

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

FAKULTA INFORMAČNÍCH TECHNOLOGIÍ

Semestrální projekt do předmětu IEL

Adam Sedláček | xsedla1e

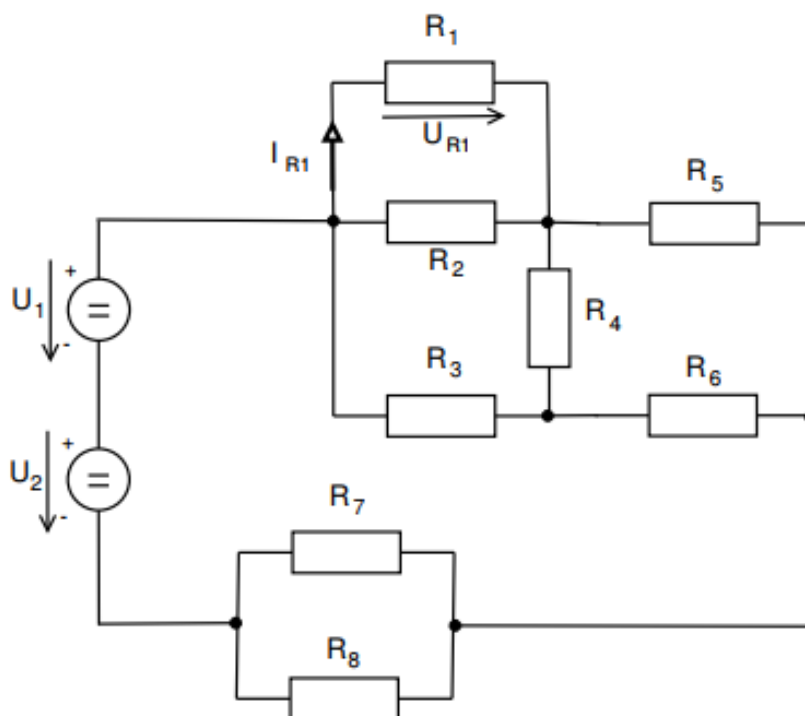
20. prosince 2017

Úloha	Skupina	Výsledky
I.	B	$U_{R1} = 67.2812V, I_{R1} = 0.1035A$
II.	B	$U_{R3} = 36.7500V, I_{R3} = 0.1670A$
III.	H	$U_{R5} = 9.5504V, I_{R5} = 0.3818A$
IV.	B	$ U_{C1} = 11.0060V, \phi_{C1} = -0.7584rad$
V.	B	$U_c(t) = 40 - 32e^{-\frac{1}{200}t}$

1. Metoda zjednodušováním

Stanovte napětí U_{R1} a proud I_{R1} . Použijte metodu postupného zjednodušování obvodu.

sk.	U_1 [V]	U_2 [V]	R_1 [Ω]	R_2 [Ω]	R_3 [Ω]	R_4 [Ω]	R_5 [Ω]	R_6 [Ω]	R_7 [Ω]	R_8 [Ω]
B	95	115	650	730	340	330	410	830	340	220



Zapojení zjednodušíme:

$$R_{12} = R_1 || R_2 = \frac{R_1 * R_2}{R_1 + R_2} = \frac{650 * 730}{650 + 730} = 343.8406 \Omega$$

$$R_{78} = R_7 || R_8 = \frac{R_7 * R_8}{R_7 + R_8} = \frac{340 * 220}{340 + 220} = 133.5714 \Omega$$

Nyní vzniklý trojúhelník R_4, R_5, R_6 převedeme na hvězdu:

$$\begin{aligned} R_A &= \frac{R_4 * R_5}{R_4 + R_5 + R_6} = \frac{330 * 410}{330 + 410 + 830} = 86.1783\Omega \\ R_A &= \frac{R_4 * R_6}{R_4 + R_5 + R_6} = \frac{330 * 830}{330 + 410 + 830} = 174.4586\Omega \\ R_A &= \frac{R_5 * R_6}{R_4 + R_5 + R_6} = \frac{410 * 830}{330 + 410 + 830} = 216.7516\Omega \end{aligned}$$

Zapojení následně ještě zjednodušíme:

$$\begin{aligned} R_{A12} &= R_{12} + R_A = 343.8906 + 86.1783 = 430.0689\Omega \\ R_{B3} &= R_3 + R_B = 340 + 173.4586 = 514.4586\Omega \\ R_{AB123} &= R_{B3} || R_{A12} = \frac{R_{B3} * R_{A12}}{R_{B3} + R_{A12}} = \frac{514.4586 * 430.0689}{514.4586 + 430.0689} = 234.2469\Omega \end{aligned}$$

Nyní můžeme vypočítat R_{ekv} :

$$R_{ekv} = R_{AB123} + R_C + R_{78} = 234.2469 + 216.7516 + 133.5714 = 584.5699\Omega$$

Vypočteme proud:

$$I = \frac{U}{R_{ekv}} = \frac{210}{584.5699} = 0.3592A$$

Ted' můžeme vypočítat napětí na R_{AB123} :

$$U_{AB123} = I * R_{AB123} = 0.3592 * 234.2469 = 84.1415V$$

Díky napětí, můžeme vypočítat proud I_{A12} :

$$I_{A12} = \frac{U_{AB123}}{R_{A12}} = \frac{84.1415}{430.0689} = 0.1956A$$

Vypočteme napětí U_{12} :

$$U_{12} = I_{A12} * R_{12} = 0.1956 * 343.8406 = 67.2812V$$

Ted' už jen zbývá zjistit proud I_1 :

$$I_{R1} = \frac{U_{12}}{R_1} = \frac{67.2812}{650} = 0.1035A$$

Výsledné hodnoty jsou:

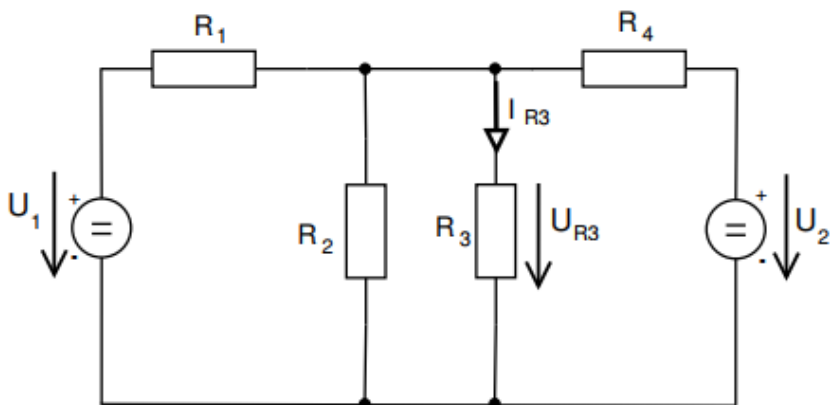
$$I_{R1} = 0.1035A$$

$$U_{R1} = 67.2812V$$

2. Théveninuv teorém

Stanovte napětí U_{R3} a proud I_{R3} . Použijte metodu Théveninovy věty.

sk.	U_1 [V]	U_2 [V]	R_1 [Ω]	R_2 [Ω]	R_3 [Ω]	R_4 [Ω]
B	100	50	310	610	220	570



Spojíme R_2 a R_3 , které následně "vyjmeme" a zkratujeme zdroje:

$$R_{23} = R_2 || R_3 = \frac{R_2 * R_3}{R_2 + R_3} = \frac{610 * 220}{610 + 220} = 160.6867\Omega$$

Zjistíme R_i :

$$R_i = R_1 || R_4 = \frac{R_1 * R_4}{R_1 + R_4} = \frac{310 * 570}{310 + 570} = 200.7955\Omega$$

Zjistíme U_i :

$$0 = I_x * R_1 + U_i - U_1$$

$$I_x = \frac{U_2 - U_1}{R_1 + R_4} = \frac{50 - 100}{310 + 570} = -0.0568A$$

$$U_i = U_1 - I_x * R_1 = 100 - (-0.0568) * 310 = 117.6136V$$

Nyní můžeme vypočíst I_{R23} a U_{R23} :

$$\begin{aligned}I_{R23} &= \frac{U_i}{R_i + R_{23}} = \frac{82.3864}{200.7955 + 160.6867} = 0.2279A \\U_{R23} &= R_{23} * I_{R23} = 160.6867 * 0.2279 = 36.75V \\I_{R3} &= \frac{U_{R23}}{R_3} = \frac{36.75}{220} = 0.1670A\end{aligned}$$

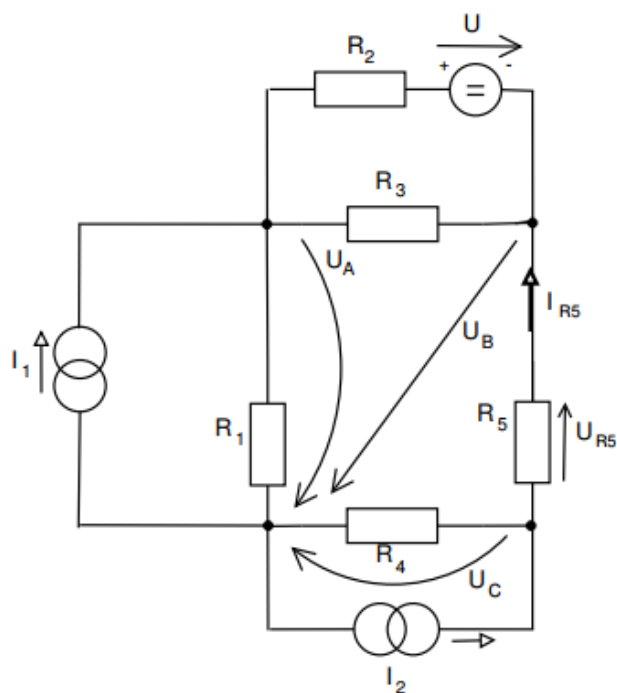
Výsledné hodnoty jsou:

$$\begin{aligned}I_{R3} &= 0.1670A \\U_{R3} &= 36.75V\end{aligned}$$

3. Metoda uzlových napětí

Stanovte napětí U_{R5} a proud I_{R5} . Použijte metodu uzlových napětí.

sk.	U [V]	I_1 [A]	I_2 [A]	R_1 [Ω]	R_2 [Ω]	R_3 [Ω]	R_4 [Ω]	R_5 [Ω]
H	130	0.95	0.50	47	39	58	28	25



Napětový zdroj převedeme na proudový:

$$I_3 = U || R_2 = \frac{U}{R_2} = \frac{130}{39} = 3.333\bar{3}A$$

Zapíšeme v podobě rozšířené matice pomocí vodivosti:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} G_1 + G_2 + G_3 & -G_2 - G_3 & 0 & I_1 + I_3 \\ -G_2 - G_3 & G_2 + G_3 + G_5 & -G_5 & -I_3 \\ 0 & -G_5 & G_4 + G_5 & I_2 \end{array} \right)$$

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 0.0642 & -0.0429 & 0 \\ -0.0429 & 0.0829 & -0.04 \\ 0 & -0.04 & 0.0757 \end{vmatrix} = 0.0002$$

Budeme potřebovat matici pro ΔB a ΔC :

$$\Delta B = \begin{vmatrix} 0.0642 & 4.283\bar{3} & 0 \\ -0.0429 & -3.333\bar{3} & -0.04 \\ 0 & 0.5 & 0.0757 \end{vmatrix} = -0.0010$$

$$\Delta C = \begin{vmatrix} 0.0642 & -0.0429 & 4.283\bar{3} \\ -0.0429 & 0.0829 & -3.333\bar{3} \\ 0 & -0.04 & 0.5 \end{vmatrix} = 0.0005$$

Pomocí Cramerova pravidla zjistíme napětí:

$$U_B = \frac{\Delta B}{\Delta A} = -\frac{-0.00100303}{0.00016073} = -6.2404V$$

$$U_C = \frac{\Delta C}{\Delta A} = \frac{0.000531553}{0.00016073} = 3.3100V$$

Výsledná rovnice pro zjištění U_{R5} a I_{R5} :

$$U_B = U_{R4} + U_{R5}$$

$$-U_R = -U_B - U_R = -6.2404 - 3.3100 = -9.5504V$$

$$I_{R5} = \frac{U_{R5}}{R_5} = \frac{9.5504}{25} = 0.3818A$$

Výsledek U_{R5} a I_{R5} :

$$U_{R5} = 9.5504V$$

$$I_{R5} = 0.3818A$$

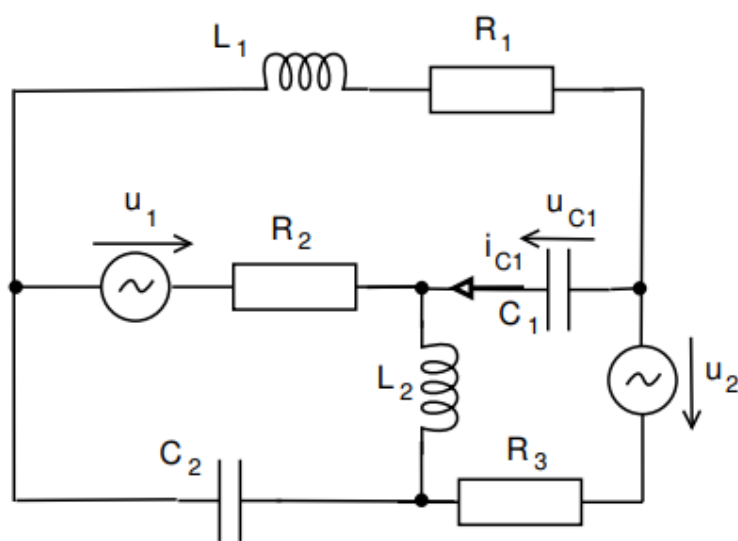
4. Smyčkové proudy v RLC obvodu

Pro napájecí napětí platí: $u_1 = U_1 \cdot \sin(2\pi ft)$, $u_2 = U_2 \cdot \sin(2\pi ft)$.

Ve vztahu pro napětí $u_{C1} = U_{C1} \cdot \sin(2\pi ft + \phi_{C1})$ určete $|U_{C1}|$ a ϕ_{C1} . Použijte metodu smyčkových proudů.

Pozn: Pomocné "směry šipek napájecích zdrojů platí pro speciální časový okamžik ($t = \frac{\pi}{2\omega}$)"

sk.	U_1 [V]	U_2 [V]	R_1 [Ω]	R_2 [Ω]	R_3 [Ω]	L_1 [mH]	L_2 [mH]	C_1 [μF]	C_2 [μF]	f [Hz]
B	25	40	11	15	12	100	85	220	95	80



Vypočteme impedance pro dané kondenzátory a cívky včetně ω :

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 80 = 502.6548 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$Z_{L1} = j\omega L_1 = 502.6548 \cdot 100 \cdot 10^{-3} j = 50.2655 j \Omega$$

$$Z_{L2} = j\omega L_2 = 502.6548 \cdot 85 \cdot 10^{-3} j = 42.7257 j \Omega$$

$$Z_{C1} = -\frac{1}{\omega C_1} j = -\frac{1}{502.6548 \cdot 220 \cdot 10^{-6}} j = -9.0429 j \Omega$$

$$Z_{C2} = -\frac{1}{\omega C_2} j = -\frac{1}{502.6548 \cdot 95 \cdot 10^{-6}} j = -20.9414 j \Omega$$

Zavedeme smyčkové proudy I_A, I_B, I_C a k nim příslušné rovnice:

$$\begin{aligned} Z_{L1} \cdot I_A + R_1 \cdot I_A + Z_{C1} \cdot (I_A + I_C) + R_2 \cdot (I_A - I_B) - U_1 &= 0 \\ R_2 \cdot (I_B - I_A) + Z_{L2} \cdot (I_B + I_C) + Z_{C2} \cdot I_B + U_1 &= 0 \\ Z_{C1} \cdot (I_C + I_A) + Z_{L2} \cdot (I_C + I_B) + R_3 \cdot I_C - U_2 &= 0 \end{aligned}$$

Upravení rovnic:

$$\begin{aligned} I_A \cdot (Z_{L1} + R_1 + Z_{C1} + R_2) - I_B \cdot R_2 + I_C \cdot Z_{C1} &= U_1 \\ -R_2 \cdot I_A + I_B \cdot (R_2 + Z_{L2} + Z_{C2}) + I_C \cdot Z_{L2} &= -U_1 \\ I_A \cdot Z_{C1} + I_B \cdot Z_{L2} + I_C \cdot (Z_{C1} + Z_{L2} + R_3) &= U_2 \end{aligned}$$

Sestavení hlavní matice:

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 26 + 41.2226j & -15 & -9.0428j \\ -15 & 15 + 21.7842j & 42.7256j \\ -9.0428j & 42.7256j & 12 + 33.6828j \end{vmatrix} = -11602.7683 + 66559.4466j$$

Sestavení matic pro výpočet $\Delta I_C, \Delta I_A$:

$$\Delta I_A = \begin{vmatrix} 25 & -15 & -9.0428j \\ -25 & 15 + 21.7842j & 42.7256j \\ 40 & 42.7256j & 12 + 33.6828j \end{vmatrix} = 9754.5181 - 13674.4200j$$

$$\Delta I_C = \begin{vmatrix} 26 + 41.2226j & -15 & 25 \\ -15 & 15 + 21.7842j & -25 \\ -9.0428j & 42.7256j & 40 \end{vmatrix} = -78276.3166 + 59138.6680j$$

Výpočet proudů pomocí Cramerova pravidla:

$$\begin{aligned} I_A &= \frac{\Delta I_A}{\Delta A} = -0.2242 - 0.1075jA \\ I_C &= \frac{\Delta I_C}{\Delta A} = 1.0613 + 0.9910jA \\ I_{C1} &= I_A + I_C = 0.8371 + 0.8835jA \end{aligned}$$

Napětí na U_C :

$$U_C = I_{C1} \cdot Z_{C1} = (0.8371 + 0.8835j) \cdot (-9.0429j) = 7.9894 - 7.5698j$$

Výsledek pro $|U_{C1}|$ a ϕ_{C1} :

$$|U_C| = \sqrt{(\text{img}U_C)^2 + (\text{real}U_C)^2} = \sqrt{7.5698^2 + 7.9894^2} = 11.0060V$$

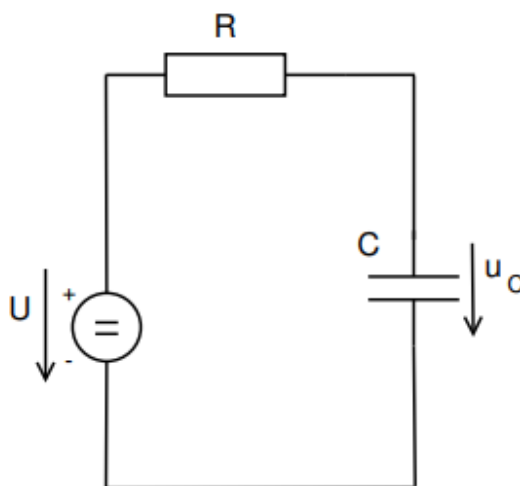
$$\phi_C = \arctg\left(\frac{\text{img}U_C}{\text{real}U_C}\right) = \arctg\left(\frac{-7.5698}{7.9894}\right) = -0.7584\text{rad}$$

5. Diferenciální rovnice

Sestavte diferenciální rovnici popisující chování obvodu na obrázku, dále ji upravte dosazením hodnot parametrů. Vypočítejte analytické řešení $u_C = f(t)$.

Proveďte kontrolu výpočtů dosazením do sestavené diferenciální rovnice.

sk.	U [V]	C [F]	R [Ω]	$u_C(0)$ [V]
B	40	10	20	8



Podle II. Kirchhoffova zákona sestavíme rovnici pro napětí ve smyčce, popisující proud:

$$0 = u_R + u_C - u$$

$$0 = R \cdot I + u_C - u$$

$$I = \frac{u - u_C}{R}$$

Známe hodnoty můžeme dosadit do axiomu, který platí pro tento obvod:

$$u'_C = \frac{1}{C} \cdot I$$

$$u'_C = \frac{u - u_C}{R \cdot C}$$

$$u'_C = \frac{40 - u_C}{10 \cdot 20}$$

$$u'_C = \frac{40}{200} - \frac{u_C}{200}$$

$$\frac{1}{5} = u'_C + \frac{u_C}{200}$$

Obecný tvar:

$$u_C(t) = k(t)e^{\lambda t}$$

Vypočteme si potřebnou λ :

$$\lambda + \frac{1}{200} = 0$$

$$\lambda = -\frac{1}{200}$$

Nyní máme všechny potřebné hodnoty pro derivaci:

$$u_C(t) = k(t)e^{-\frac{1}{200}t}$$

$$u'_C(t) = k'(t)e^{-\frac{1}{200}t} - \frac{1}{200} \cdot k(t)e^{-\frac{1}{200}t}$$

Dané hodnoty dosadíme do rovnice obvodu:

$$\frac{1}{5} = u'_C + \frac{u_C}{200}$$

$$\frac{1}{5} = k'(t)e^{-\frac{1}{200}t} - \frac{1}{200} \cdot k(t)e^{-\frac{1}{200}t} + \frac{1}{200} \cdot k(t)e^{-\frac{1}{200}t}$$

$$\frac{1}{5} = k'(t)e^{-\frac{1}{200}t}$$

Vyjádříme $k(t)$:

$$k'(t)e^{-\frac{1}{200}t} = \frac{1}{5}$$

$$k'(t) = \frac{e^{\frac{1}{200}t}}{5}$$

$$\int k'(t)dt = \frac{e^{\frac{1}{200}t}}{5}$$

$$k(t) = 40e^{\frac{1}{200}t} + A$$

Dosadíme hodnoty do obecného tvaru rovnice:

$$u_C(t) = k(t)e^{\lambda t}$$

$$u_C(t) = (40e^{\frac{1}{200}t} + A) \cdot e^{-\frac{1}{200}t}$$

$$u_C(t) = 40 + Ae^{-\frac{1}{200}t}$$

Vliv počáteční podmínky:

$$u_C(0) = 40 + Ae^{-\frac{1}{200} \cdot 0}$$

$$8 = 40 + A$$

$$A = -32$$

Hledaná rovnice tedy je:

$$u_C(t) = 40 - 32e^{-\frac{1}{200}t}$$

Kontrola:

$$u'_C + \frac{u_C}{200} = \frac{1}{5}$$

$$u_C(t) = 40 - 32e^{-\frac{1}{5}t}$$

$$u'_c(t) = \frac{32}{200}e^{-\frac{1}{5}t}$$

$$\frac{1}{5} = \frac{32}{200}e^{-\frac{1}{200}t} + \frac{40 - 32e^{-\frac{1}{200}t}}{200}$$

$$\frac{1}{5} = \frac{1}{5}$$

6. Výsledková tabulka

Úloha	Skupina	Výsledky
I.	B	$U_{R1} = 67.2812V, I_{R1} = 0.1035A$
II.	B	$U_{R3} = 36.7500V, I_{R3} = 0.1670A$
III.	H	$U_{R5} = 9.5504V, I_{R5} = 0.3818A$
IV.	B	$ U_{C1} = 11.0060V, \phi_{C1} = -0.7584rad$
V.	B	$U_c(t) = 40 - 32e^{-\frac{1}{200}t}$