**{P ≡ 20 ≤ N < 50 ⋀ 1 ≤ Np ≤ N/2 ⋀ 0 < a < 1}**

fun seleccionar_cruzar(poblacion[0..N) de real, Np: nat, a: real, fun_obj: real -> real) dev Hijos[0..Np) de real

var contador, pos_hijos, i, j, k, pos_madre, pos_padre: ent

var Valores[0..N) de real

contador := 0;

**{I’ ≡ 20 ≤ N < 50 ⋀ 1 ≤ Np ≤ N/2 ⋀ 0 ≤ contador ≤ N ⋀**

**⋀ (∀ n : 0 ≤ n < contador : Valores[n] = fun_obj(poblacion[n]))}**

**{C’ ≡ N - contador}**

mientras contador < N hacer

**{I’ ⋀ contador < N}**

Valores[contador] := fun_obj(poblacion[contador]);

contador := contador + 1

**{I’}**

fmientras

**{I’ ⋀ contador ≥ N}**

**{Q’ ≡ 20 ≤ N < 50 ⋀ 1 ≤ Np ≤ N/2 ⋀**

**⋀ (∀ n : 0 ≤ n < N : Valores[n] = fun_obj(población[n]))}**

<pos_hijos, i, j, k> := <0, 1, 2, 3>;

**{I ≡ 20 ≤ N < 50 ⋀ 1 ≤ Np ≤ N/2 ⋀ 0 ≤ i, j, k < N ⋀ i ≠ j ⋀ j ≠ k ⋀ k ≠ i ⋀**

**⋀ (∀ n : 0 ≤ n < N : Valores[n] = fun_obj(poblacion[n])) ⋀ 0 ≤ pos_hijos ≤ Np ⋀**

**⋀ (∀ h : 0 ≤ h < pos_hijos : (∃ i, j, k : 0 ≤ i, j, k < N ⋀ i ≠ j ⋀ j ≠ k ⋀ k ≠ i :**

**Hijos[h] = a · poblacion[i] + (1 - a) · poblacion[j] ⋀**

**⋀ fun_obj(poblacion[i]) ≥ fun_obj(poblacion[j]) ≥ fun_obj(poblacion[k])))}**

**{C ≡ Np – pos_hijos}**

mientras pos_hijos < Np hacer

**{I ⋀ pos_hijos < Np}**

<i, j, k> := <(i + 1) mod N, (j + 1) mod N, (k + 1) mod N>;

**{I ⋀ pos_hijos < Np}**

<pos_padre, pos_madre> := torneo(Valores, i, j, k);

**{I ⋀ pos_hijos < Np ⋀ (∃ p, q, r : p, q, r ∈ {i, j, k} ⋀ p ≠ q ⋀ q ≠ r ⋀ r ≠ p :**

**Valores[p] ≥ Valores[q] ≥ Valores[r] ⋀ pos_padre = p ⋀ pos_madre = q)}**

Hijos[pos_hijos] := a * poblacion[pos_padre] + (1 - a) * poblacion[pos_madre];

pos_hijos := pos_hijos + 1

**{I}**

fmientras

**{I ⋀ pos_hijos ≥ Np}**

ffun

**{Q ≡ (∀ h : 0 ≤ h < Np : (∃ i, j, k : 0 ≤ i, j, k < N ⋀ i ≠ j ⋀ j ≠ k ⋀ k ≠ i :**

**Hijos[h] = a · poblacion[i] + (1 - a) · poblacion[j] ⋀**

**⋀ fun_obj(poblacion[i]) ≥ fun_obj(poblacion[j]) ≥ fun_obj(poblacion[k])))}**

**Verificación formal de la función 'seleccionar_cruzar'**

**(1) {P} contador := 0 {I'}**

Calculamos pmd(contador : = 0, I'):

pmd(contador : = 0, I') ⇔ def(0) ⋀ $I'^{0}_{contador}$ ⇔

⇔ cierto ⋀ 20 ≤ N < 50 ⋀ 1 ≤ Np ≤ N/2 ⋀ 0 ≤ 0 ≤ N ⋀

⋀ (∀ n : $\underbrace{0 \le n < 0}_{\emptyset}$ : Valores[n] = fun_obj(poblacion[n])) ⇔

⇔ 20 ≤ N < 50 ⋀ 1 ≤ Np ≤ N/2 ⋀ 0 ≤ N ⋀ cierto ⇔ 20 ≤ N < 50 ⋀ 1 ≤ Np ≤ N/2

Por último, demostramos que P ⇒ pmd(contador : = 0, I'):

P ≡ 20 ≤ N < 50 ⋀ 1 ≤ Np ≤ N/2 ⋀ 0 < a < 1 ⇒ 20 ≤ N < 50 ⋀ 1 ≤ Np ≤ N/2

**(2) {I' ⋀ contador < N} Valores[contador] := fun_obj(poblacion[contador]); contador := contador + 1 {I'}**

Denotamos:

$A_1$ ≡ Valores[contador] := fun_obj(poblacion[contador])

$A_2$ ≡ contador := contador + 1

Calculamos pmd($A_1$; $A_2$, I'):

pmd($A_1$; $A_2$, I') ⇔ pmd ($A_1$, pmd($A_2$, I'))

Por tanto, primeramente debemos calcular pmd($A_2$, I'):

pmd($A_2$, I') ⇔ pmd(contador := contador + 1, I') ⇔ def(contador + 1) ⋀ $I'^{contador+1}_{contador}$ ⇔

⇔ cierto ⋀ 20 ≤ N < 50 ⋀ 1 ≤ Np ≤ N/2 ⋀ 0 ≤ contador + 1 ≤ N ⋀

⋀ (∀ n : 0 ≤ n < contador + 1 : Valores[n] = fun_obj(poblacion[n])) ⇔

⇔ (20 ≤ N < 50 ⋀ 1 ≤ Np ≤ N/2 ⋀ 0 ≤ contador + 1 ≤ N ⋀

⋀ (∀ n : 0 ≤ n < contador + 1 : Valores[n] = fun_obj(poblacion[n]))) ≡ $P_1$

pmd ($A_1$, pmd($A_2$, I')) ⇔ pmd (Valores[contador] := fun_obj(poblacion[contador]), $P_1$) ⇔

⇔ pmd(Valores := asig(Valores, contador, fun_obj(poblacion[contador])), $P_1$) ⇔

⇔ def(asig(Valores, contador, fun_obj(poblacion[contador]))) ⋀

⋀ $P_{1}{}^{\text{asig(Valores,contador,fun\_obj(poblacion[contador]))}}_{Valores}$ ⇔

$\Leftrightarrow 0 \leq contador < N \wedge 20 \leq N < 50 \wedge 1 \leq Np \leq N/2 \wedge 0 \leq contador + 1 \leq N \wedge$

$\wedge (\forall n : 0 \leq n < contador + 1 : asig(Valores, contador, fun\_obj(poblacion[contador]))[n] =$

$= fun\_obj(poblacion[n])) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0 \leq contador < N \wedge 20 \leq N < 50 \wedge 1 \leq Np \leq N/2 \wedge (\forall n : 0 \leq n < contador + 1 :$

$(fun\_obj(poblacion[contador]) = fun\_obj(población[n]) \wedge contador = n) \vee$

$\vee (Valores[n] = fun\_obj(población[n]) \wedge contador \neq n \wedge 0 \leq n < N)) \Leftrightarrow$

**(*) Cálculos intermedios**

$\Leftrightarrow 0 \leq contador < N \wedge 20 \leq N < 50 \wedge 1 \leq Np \leq N/2 \wedge$

$\wedge (\forall n : 0 \leq n < contador : Valores[n] = fun\_obj(población[n]))$

**(*)** $0 \leq contador < N \wedge (\forall n : 0 \leq n < contador + 1 : (fun\_obj(poblacion[contador]) =$

$= fun\_obj(población[n]) \wedge contador = n) \vee$

$\vee (Valores[n] = fun\_obj(población[n]) \wedge contador \neq n \wedge 0 \leq n < N)) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0 \leq contador < N \wedge (\forall n : 0 \leq n < contador : (fun\_obj(poblacion[contador]) =$

$= fun\_obj(poblacion[n]) \wedge falso) \vee (Valores[n] = fun\_obj(población[n]) \wedge cierto \wedge$

$\wedge cierto)) \wedge ((fun\_obj(poblacion[contador]) = fun\_obj(poblacion[contador]) \wedge$

$\wedge contador = contador) \vee (Valores[contador] = fun\_obj(poblacion[contador]) \wedge$

$\wedge contador \neq contador \wedge 0 \leq contador < N)) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0 \leq contador < N \wedge (\forall n : 0 \leq n < contador : falso \vee (Valores[n] = fun\_obj(poblacion[n])))\wedge$

$\wedge ((cierto \wedge cierto) \vee (Valores[contador] = fun\_obj(poblacion[contador]) \wedge falso \wedge$

$\wedge 0 \leq contador < N)) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0 \leq contador < N \wedge (\forall n : 0 \leq n < contador : (Valores[n] = fun\_obj(poblacion[n]))) \wedge$

$\wedge (cierto \vee falso) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0 \leq contador < N \wedge (\forall n: 0 \leq n < contador:(Valores[n] = fun\_obj(poblacion[n]))) \wedge cierto \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0 \leq contador < N \wedge (\forall n : 0 \leq n < contador : Valores[n] = fun\_obj(poblacion[n]))$

Por último, demostramos que $(I' \wedge contador < N) \Rightarrow pmd(A_1; A_2, I')$:

$I' \wedge contador < N \Leftrightarrow 20 \leq N < 50 \wedge 1 \leq Np \leq N/2 \wedge 0 \leq contador < N \wedge$

$\wedge (\forall n : 0 \leq n < contador : Valores[n] = fun\_obj(poblacion[n])) \Leftrightarrow pmd(A_1; A_2, I')$

**(3) {I' ⋀ contador ≥ N} nada {Q' ≡ 20 ≤ N < 50 ⋀ 1 ≤ Np ≤ N/2 ⋀ ⋀ (∀ n : 0 ≤ n < N : Valores[n] = fun_obj(población[n]))}**

Calculamos pmd(nada, Q'): pmd(nada, Q') ⇔ Q'

Por último, demostramos que (I' ⋀ contador ≥ N) ⇒ Q':

I' ⋀ contador ≥ N ⇔ 20 ≤ N < 50 ⋀ 1 ≤ Np ≤ N/2 ⋀ 0 ≤ contador ≤ N ⋀

⋀ (∀ n : 0 ≤ n < contador : Valores[n] = fun_obj(poblacion[n])) ⋀ contador ≥ N ⇔

⇔ 20 ≤ N < 50 ⋀ 1 ≤ Np ≤ N/2 ⋀ contador = N ⋀

⋀ (∀ n : 0 ≤ n < contador : Valores[n] = fun_obj(poblacion[n])) ⇔

⇔ 20 ≤ N < 50 ⋀ 1 ≤ Np ≤ N/2 ⋀ (∀ n : 0 ≤ n < N : Valores[n] = fun_obj(poblacion[n])) ⇔ Q'

**(4) I' ⋀ contador < N ⇒ C' ≥ 0**

I' ⋀ contador < N ⇒ contador < N ⇒ N – contador > 0 ⇒ N – contador ≥ 0 ⇔ C' ≥ 0

**(5) {I' ⋀ contador < N ⋀ C' = T} Valores[contador] := fun_obj(poblacion[contador]); contador := contador + 1 {C' < T}**

Denotamos:

$A_1$ ≡ Valores[contador] := fun_obj(poblacion[contador])

$A_2$ ≡ contador := contador + 1

Calculamos pmd($A_1$; $A_2$, C' < T):

pmd($A_1$; $A_2$, C' < T) ⇔ pmd ($A_1$, pmd($A_2$, C' < T))

Por tanto, primeramente debemos calcular pmd($A_2$, C' < T):

pmd($A_2$, C' < T) ⇔ pmd(contador := contador + 1, C' < T) ⇔

⇔ def(contador + 1) ⋀ $(\mathrm{C'} < \mathrm{T})_{contador}^{contador+1}$ ⇔ cierto ⋀ N – (contador + 1) < T ⇔

⇔ N – contador < T + 1

pmd ($A_1$, pmd($A_2$, C' < T)) ⇔

⇔ pmd (Valores[contador] := fun_obj(poblacion[contador]), N – contador < T + 1) ⇔

⇔ pmd(Valores := asig(Valores, contador, fun_obj(poblacion[contador])), N – contador < T + 1)

⇔ def(asig(Valores, contador, fun_obj(poblacion[contador]))) ⋀

⋀ $(\mathrm{N} - \mathrm{contador} < \mathrm{T} + 1)_{Valores}^{\text{asig(Valores,contador,fun\_obj(poblacion[contador]))}}$ ⇔

⇔ 0 ≤ contador < N ⋀ N – contador < T + 1 ⇔ 0 ≤ contador < N ⋀ C' < T + 1

Por último, demostramos que $(I' \wedge contador < N \wedge C' = T) \Rightarrow pmd(A_1; A_2, C' < T)$:

$I' \wedge contador < N \wedge C' = T \Rightarrow 0 \le contador \le N \wedge contador < N \wedge C' = T \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 \le contador < N \wedge C' < T + 1 \Leftrightarrow pmd(A_1; A_2, C' < T)$

**(6) {Q'} <pos_hijos, i, j, k> := <0, 1, 2, 3> {I}**

Calculamos $pmd(\langle pos\_hijos, i, j, k\rangle := \langle 0, 1, 2, 3\rangle , I)$:

$pmd(\langle pos\_hijos, i, j, k\rangle := \langle 0, 1, 2, 3\rangle , I) \Leftrightarrow def(0) \wedge def(1) \wedge def(2) \wedge def(3) \wedge I^{0,1,2,3}_{pos_{hijos},i,j,k} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow cierto \wedge cierto \wedge cierto \wedge cierto \wedge 20 \le N < 50 \wedge 1 \le Np \le N/2 \wedge 0 \le 1 < N \wedge 0 \le 2 < N \wedge$

$\wedge\ 0 \le 3 < N \wedge 1 \ne 2 \wedge 2 \ne 3 \wedge 3 \ne 1 \wedge (\forall n : 0 \le n < N : Valores[n] = fun\_obj(población[n])) \wedge$

$\wedge\ 0 \le 0 \le Np \wedge (\forall h : \underbrace{0 \le h < 0}_{\emptyset} : (\exists i, j, k : 0 \le i, j, k < N \wedge i \ne j \wedge j \ne k \wedge k \ne i :$

$Hijos[h] = a \cdot poblacion[i] + (1 - a) \cdot poblacion[j] \wedge$

$\wedge\ fun\_obj(poblacion[i]) \ge fun\_obj(poblacion[j]) \ge fun\_obj(poblacion[k]))) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 20 \le N < 50 \wedge 1 \le Np \le N/2 \wedge 1 < N \wedge 2 < N \wedge 3 < N \wedge cierto \wedge cierto \wedge cierto \wedge$

$\wedge\ (\forall n : 0 \le n < N : Valores[n] = fun\_obj(población[n])) \wedge 0 \le Np \wedge cierto \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 20 \le N < 50 \wedge 1 \le Np \le N/2 \wedge (\forall n : 0 \le n < N : Valores[n] = fun\_obj(población[n]))$

Por último, demostramos que $Q' \Rightarrow pmd(\langle pos\_hijos, i, j, k\rangle := \langle 0, 1, 2, 3\rangle , I)$:

$Q' \Leftrightarrow 20 \le N < 50 \wedge 1 \le Np \le N/2 \wedge (\forall n : 0 \le n < N : Valores[n] = fun\_obj(población[n])) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow pmd(\langle pos\_hijos, i, j, k\rangle := \langle 0, 1, 2, 3\rangle , I)$

**(7) {I ∧ pos_hijos < Np} <i, j, k> := <(i + 1) mod N, (j + 1) mod N, (k + 1) mod N> {I ∧ pos_hijos < Np}**

Calculamos $pmd(\langle i, j, k\rangle := \langle (i + 1)\ \underline{mod}\ N, (j + 1)\ \underline{mod}\ N, (k + 1)\ \underline{mod}\ N\rangle, I \wedge pos\_hijos < Np)$:

$pmd(\langle i, j, k\rangle := \langle (i + 1)\ \underline{mod}\ N, (j + 1)\ \underline{mod}\ N, (k + 1)\ \underline{mod}\ N\rangle, I \wedge pos\_hijos < Np) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow def((i + 1)\ \underline{mod}\ N) \wedge def((j+ 1)\ \underline{mod}\ N) \wedge def((k + 1)\ \underline{mod}\ N) \wedge$

$\wedge\ (I \wedge pos\_hijos\ <\ Np)^{(i+1)modN,(j+1)modN,(k+1)modN}_{i,j,k} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow cierto \wedge cierto \wedge cierto \wedge pos\_hijos < Np \wedge 20 \le N < 50 \wedge 1 \le Np \le N/2 \wedge$

$\wedge\ 0 \le (i + 1)\ \underline{mod}\ N, (j + 1)\ \underline{mod}\ N, (k + 1)\ \underline{mod}\ N < N \wedge (i + 1)\ \underline{mod}\ N \ne (j + 1)\ \underline{mod}\ N \wedge$

$\wedge\ (j + 1)\ \underline{mod}\ N \ne (k + 1)\ \underline{mod}\ N \wedge (k + 1)\ \underline{mod}\ N \ne (i + 1)\ \underline{mod}\ N \wedge$

$\wedge\ (\forall n : 0 \le n < N : Valores[n] = fun\_obj(población[n])) \wedge 0 \le pos\_hijos \le Np \wedge$

$\wedge\ (\forall h : 0 \le h < pos\_hijos : (\exists i, j, k : 0 \le i, j, k < N \wedge i \ne j \wedge j \ne k \wedge k \ne i :$

Hijos[h] = a · poblacion[i] + (1 - a) · poblacion[j] ⋀

⋀ fun_obj(poblacion[i]) ≥ fun_obj(poblacion[j]) ≥ fun_obj(poblacion[k]))) ⇔

⇔ 20 ≤ N < 50 ⋀ 1 ≤ Np ≤ N/2 ⋀ (i + 1) mod N ≠ (j + 1) mod N ⋀ (j + 1) mod N ≠ (k + 1) mod N ⋀

⋀ (k + 1) mod N ≠ (i + 1) mod N ⋀ (∀ n : 0 ≤ n < N : Valores[n] = fun_obj(población[n])) ⋀

⋀ 0 ≤ pos_hijos < Np ⋀ (∀ h : 0 ≤ h < pos_hijos : (∃ i, j, k : 0 ≤ i, j, k < N ⋀ i ≠ j ⋀ j ≠ k ⋀ k ≠ i :

Hijos[h] = a · poblacion[i] + (1 - a) · poblacion[j] ⋀

⋀ fun_obj(poblacion[i]) ≥ fun_obj(poblacion[j]) ≥ fun_obj(poblacion[k])))

Por último, demostramos que (I ⋀ pos_hijos < Np) ⇒ pmd(<i, j, k> := <(i + 1) mod N, (j + 1) mod N, (k + 1) mod N>, I ⋀ pos_hijos < Np):

Sabemos que si 0 ≤ i, j, k < N ⋀ i ≠ j ⋀ j ≠ k ⋀ k ≠ i ⇒ (i + 1) mod N ≠ (j + 1) mod N ⋀ ⋀ (j + 1) mod N ≠ (k + 1) mod N ⋀ (k + 1) mod N ≠ (i + 1) mod N

Así, como estos son los únicos predicados en los que se diferencian (I ⋀ pos_hijos < Np) y pmd(<i, j, k> := <(i + 1) mod N, (j + 1) mod N, (k + 1) mod N>, I ⋀ pos_hijos < Np), queda demostrada la implicación.

**(8) {I ⋀ pos_hijos < Np} <pos_padre, pos_madre> := torneo(Valores, i, j, k)**

**{I ⋀ pos_hijos < Np ⋀ 0 ≤ i, j, k < N ⋀ (∃ p, q, r : p, q, r ∈ {i, j, k} ⋀ p ≠ q ⋀ q ≠ r ⋀ r ≠ p :**

**Valores[p] ≥ Valores[q] ≥ Valores[r] ⋀ pos_padre = p ⋀ pos_madre = q}**

Demostrado en la corrección de la función 'torneo'.

**(9) {I ⋀ pos_hijos < Np ⋀ 0 ≤ i, j, k < N ⋀ (∃ p, q, r : p, q, r ∈ {i, j, k} ⋀ p ≠ q ⋀ q ≠ r ⋀ r ≠ p :**

**Valores[p] ≥ Valores[q] ≥ Valores[r] ⋀ pos_padre = p ⋀ pos_madre = q)}**

**Hijos[pos_hijos] := a * poblacion[pos_padre] + (1 - a) * poblacion[pos_madre];**

**pos_hijos := pos_hijos + 1 {I}**

Denotamos:

$A_3$ ≡ Hijos[pos_hijos] := a * poblacion[pos_padre] + (1 - a) * poblacion[pos_madre]

$A_4$ ≡ pos_hijos := pos_hijos + 1

Calculamos pmd($A_3$; $A_4$, I):

pmd($A_3$; $A_4$, I) ⇔ pmd ($A_3$, pmd($A_4$, I))

Por tanto, primeramente debemos calcular pmd($A_4$, I):

pmd($A_4$, I) ⇔ pmd(pos_hijos := pos_hijos + 1, I) ⇔ def(pos_hijos + 1) ⋀ $I_{pos\_hijos}^{pos_{hijos}+1}$ ⇔

⇔ cierto ⋀ 20 ≤ N < 50 ⋀ 1 ≤ Np ≤ N/2 ⋀ 0 ≤ i, j, k < N ⋀ i ≠ j ⋀ j ≠ k ⋀ k ≠ i ⋀

$\wedge$ ($\forall$ n : 0 ≤ n < N : Valores[n] = fun_obj(poblacion[n])) $\wedge$ 0 ≤ pos_hijos + 1 ≤ Np $\wedge$

$\wedge$ ($\forall$ h : 0 ≤ h < pos_hijos + 1 : ($\exists$ i, j, k : 0 ≤ i, j, k < N $\wedge$ i ≠ j $\wedge$ j ≠ k $\wedge$ k ≠ i :

Hijos[h] = a · poblacion[i] + (1 - a) · poblacion[j] $\wedge$

$\wedge$ fun_obj(poblacion[i]) ≥ fun_obj(poblacion[j]) ≥ fun_obj(poblacion[k]))) ≡ $P_2$

pmd ($A_3$, pmd($A_4$, I)) ⇔

⇔ pmd(Hijos[pos_hijos] := a * poblacion[pos_padre] + (1 - a) * poblacion[pos_madre], $P_2$) ⇔

⇔ pmd(Hijos := asig(Hijos, pos_hijos, a * poblacion[pos_padre] + (1 - a) * * poblacion[pos_madre]), $P_2$) ⇔

⇔ def(asig(Hijos, pos_hijos, a * poblacion[pos_padre] + (1 - a) * poblacion[pos_madre])) $\wedge$
$\wedge$ ${P_2}_{Hijos}^{\text{asig(Hijos,pos\_hijos,a} \,*\, \text{poblacion[pos\_padre]}+\,(1-\text{a})*\,\text{poblacion[pos\_madre])}}$ ⇔

⇔ 0 ≤ pos_hijos < Np $\wedge$ 0 ≤ pos_padre, pos_madre < N $\wedge$ 20 ≤ N < 50 $\wedge$ 1 ≤ Np ≤ N/2 $\wedge$

$\wedge$ 0 ≤ i, j, k < N $\wedge$ i ≠ j $\wedge$ j ≠ k $\wedge$ k ≠ i $\wedge$

$\wedge$ ($\forall$ n : 0 ≤ n < N : Valores[n] = fun_obj(poblacion[n])) $\wedge$ 0 ≤ pos_hijos + 1 ≤ Np $\wedge$

$\wedge$ ($\forall$ h : 0 ≤ h < pos_hijos + 1 : ($\exists$ i, j, k : 0 ≤ i, j, k < N $\wedge$ i ≠ j $\wedge$ j ≠ k $\wedge$ k ≠ i :

fun_obj(poblacion[i]) ≥ fun_obj(poblacion[j]) ≥ fun_obj(poblacion[k]) $\wedge$

$\wedge$ asig(Hijos, pos_hijos, a * poblacion[pos_padre] + (1 - a) * poblacion[pos_madre])[h] =

= a · poblacion[i] + (1 - a) · poblacion[j])) ⇔

⇔ 0 ≤ pos_hijos < Np $\wedge$ 0 ≤ pos_padre, pos_madre < N $\wedge$ 20 ≤ N < 50 $\wedge$ 1 ≤ Np ≤ N/2 $\wedge$

$\wedge$ 0 ≤ i, j, k < N $\wedge$ i ≠ j $\wedge$ j ≠ k $\wedge$ k ≠ i $\wedge$

$\wedge$ ($\forall$ n : 0 ≤ n < N : Valores[n] = fun_obj(poblacion[n])) $\wedge$

$\wedge$ ($\forall$ h : 0 ≤ h < pos_hijos + 1 : ($\exists$ i, j, k : 0 ≤ i, j, k < N $\wedge$ i ≠ j $\wedge$ j ≠ k $\wedge$ k ≠ i :

fun_obj(poblacion[i]) ≥ fun_obj(poblacion[j]) ≥ fun_obj(poblacion[k]) $\wedge$

$\wedge$ ((Hijos[h] = a · poblacion[i] + (1 - a) · poblacion[j] $\wedge$ h ≠ pos_hijos $\wedge$ 0 ≤ h < Np) $\vee$

$\vee$ (a * poblacion[pos_padre] + (1 - a) * poblacion[pos_madre] =

= a · poblacion[i] + (1 - a) · poblacion[j] $\wedge$ h = pos_hijos)))) ⇔

**(**) Cálculos intermedios**

⇔ 0 ≤ pos_hijos < Np $\wedge$ 0 ≤ pos_padre, pos_madre < N $\wedge$ 20 ≤ N < 50 $\wedge$ 1 ≤ Np ≤ N/2 $\wedge$

$\wedge$ 0 ≤ i, j, k < N $\wedge$ i ≠ j $\wedge$ j ≠ k $\wedge$ k ≠ i $\wedge$

$\wedge$ ($\forall$ n : 0 ≤ n < N : Valores[n] = fun_obj(poblacion[n])) $\wedge$

$\wedge$ ($\forall$h : 0 ≤ h < pos_hijos : ($\exists$ i, j, k : 0 ≤ i, j, k < N $\wedge$ i ≠ j $\wedge$ j ≠ k $\wedge$ k ≠ i :

$\text{fun\_obj}(\text{poblacion}[i]) \geq \text{fun\_obj}(\text{poblacion}[j]) \geq \text{fun\_obj}(\text{poblacion}[k]) \land$

$\land\ \text{Hijos}[h] = a \cdot \text{poblacion}[i] + (1 - a) \cdot \text{poblacion}[j])) \land$

$\land\ (\exists\ i, j, k : 0 \leq i, j, k < N \land i \neq j \land j \neq k \land k \neq i :$

$\text{fun\_obj}(\text{poblacion}[i]) \geq \text{fun\_obj}(\text{poblacion}[j]) \geq \text{fun\_obj}(\text{poblacion}[k]) \land$

$\land\ (a * \text{poblacion}[\text{pos\_padre}] + (1 - a) * \text{poblacion}[\text{pos\_madre}] =$

$= a \cdot \text{poblacion}[i] + (1 - a) \cdot \text{poblacion}[j]))$

**(**)** $0 \leq \text{pos\_hijos} < Np \land (\forall h : 0 \leq h < \text{pos\_hijos} + 1 : (\exists\ i, j, k : 0 \leq i, j, k < N \land i \neq j \land j \neq k \land k \neq i :$

$\text{fun\_obj}(\text{poblacion}[i]) \geq \text{fun\_obj}(\text{poblacion}[j]) \geq \text{fun\_obj}(\text{poblacion}[k]) \land$

$\land\ ((\text{Hijos}[h] = a \cdot \text{poblacion}[i] + (1 - a) \cdot \text{poblacion}[j] \land h \neq \text{pos\_hijos} \land 0 \leq h < Np) \lor$

$\lor\ (a * \text{poblacion}[\text{pos\_padre}] + (1 - a) * \text{poblacion}[\text{pos\_madre}] =$

$= a \cdot \text{poblacion}[i] + (1 - a) \cdot \text{poblacion}[j] \land h = \text{pos\_hijos})))) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0 \leq \text{pos\_hijos} < Np \land (\forall h : 0 \leq h < \text{pos\_hijos} : (\exists\ i, j, k : 0 \leq i, j, k < N \land i \neq j \land j \neq k \land k \neq i :$

$\text{fun\_obj}(\text{poblacion}[i]) \geq \text{fun\_obj}(\text{poblacion}[j]) \geq \text{fun\_obj}(\text{poblacion}[k]) \land$

$\land\ ((\text{Hijos}[h] = a \cdot \text{poblacion}[i] + (1 - a) \cdot \text{poblacion}[j] \land \text{cierto} \land \text{cierto}) \lor$

$\lor\ (a * \text{poblacion}[\text{pos\_padre}] + (1 - a) * \text{poblacion}[\text{pos\_madre}] =$

$= a \cdot \text{poblacion}[i] + (1 - a) \cdot \text{poblacion}[j] \land \text{falso})))) \land$

$\land\ (\exists\ i, j, k : 0 \leq i, j, k < N \land i \neq j \land j \neq k \land k \neq i :$

$\text{fun\_obj}(\text{poblacion}[i]) \geq \text{fun\_obj}(\text{poblacion}[j]) \geq \text{fun\_obj}(\text{poblacion}[k]) \land$

$\land\ ((\text{Hijos}[\text{pos\_hijos}] = a \cdot \text{poblacion}[i] + (1 - a) \cdot \text{poblacion}[j]) \land \text{falso} \land$

$\land\ 0 \leq \text{pos\_hijos} < Np) \lor$

$\lor\ (a * \text{poblacion}[\text{pos\_padre}] + (1 - a) * \text{poblacion}[\text{pos\_madre}] =$

$= a \cdot \text{poblacion}[i] + (1 - a) \cdot \text{poblacion}[j] \land \text{cierto}))) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0 \leq \text{pos\_hijos} < Np \land (\forall h : 0 \leq h < \text{pos\_hijos} : (\exists\ i, j, k : 0 \leq i, j, k < N \land i \neq j \land j \neq k \land k \neq i :$

$\text{fun\_obj}(\text{poblacion}[i]) \geq \text{fun\_obj}(\text{poblacion}[j]) \geq \text{fun\_obj}(\text{poblacion}[k]) \land$

$\land\ ((\text{Hijos}[h] = a \cdot \text{poblacion}[i] + (1 - a) \cdot \text{poblacion}[j]) \lor \text{falso}))) \land$

$\land\ (\exists\ i, j, k : 0 \leq i, j, k < N \land i \neq j \land j \neq k \land k \neq i :$

$\text{fun\_obj}(\text{poblacion}[i]) \geq \text{fun\_obj}(\text{poblacion}[j]) \geq \text{fun\_obj}(\text{poblacion}[k]) \land$

$\land\ (\text{falso} \lor (a * \text{poblacion}[\text{pos\_padre}] + (1 - a) * \text{poblacion}[\text{pos\_madre}] =$

$= a \cdot \text{poblacion}[i] + (1 - a) \cdot \text{poblacion}[j]))) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0 \le pos\_hijos < Np \wedge (\forall h : 0 \le h < pos\_hijos : (\exists\, i, j, k : 0 \le i, j, k < N \wedge i \ne j \wedge j \ne k \wedge k \ne i :$

$fun\_obj(poblacion[i]) \ge fun\_obj(poblacion[j]) \ge fun\_obj(poblacion[k]) \wedge$

$\wedge\ Hijos[h] = a \cdot poblacion[i] + (1 - a) \cdot poblacion[j])) \wedge$

$\wedge (\exists\, i, j, k : 0 \le i, j, k < N \wedge i \ne j \wedge j \ne k \wedge k \ne i :$

$fun\_obj(poblacion[i]) \ge fun\_obj(poblacion[j]) \ge fun\_obj(poblacion[k]) \wedge$

$\wedge (a * poblacion[pos\_padre] + (1 - a) * poblacion[pos\_madre] =$

$= a \cdot poblacion[i] + (1 - a) \cdot poblacion[j]))$

Por último, demostramos que $P_3 \equiv (I \wedge pos\_hijos < Np \wedge 0 \le i, j, k < N \wedge (\exists\, p, q, r : p, q, r \in \{i, j, k\} \wedge p \ne q \wedge q \ne r \wedge r \ne p : Valores[p] \ge Valores[q] \ge Valores[r] \wedge pos\_padre = p \wedge \wedge\ pos\_madre = q)) \Rightarrow pmd(A_3; A_4, I)$:

Algunos de los predicados que componen $pmd(A_3; A_4, I)$ también forman parte de $P_3$, por lo que, para ellos, la demostración de la implicación es trivial. Por esto, nos centramos en el resto de asertos:

$P_3 \Rightarrow 0 \le i, j, k < N \wedge i \ne j \wedge j \ne k \wedge k \ne i \wedge (\exists\, p, q, r : p, q, r \in \{i, j, k\} \wedge p \ne q \wedge q \ne r \wedge r \ne p :$

$Valores[p] \ge Valores[q] \ge Valores[r] \wedge pos\_padre = p \wedge pos\_madre = q) \wedge$

$\wedge (\forall\, n : 0 \le n < N : Valores[n] = fun\_obj(poblacion[n])) \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 \le pos\_padre, pos\_madre < N \wedge (\exists\, i, j, k : 0 \le i, j, k < N \wedge i \ne j \wedge j \ne k \wedge k \ne i :$

$fun\_obj(poblacion[i]) \ge fun\_obj(poblacion[j]) \ge fun\_obj(poblacion[k]) \wedge$

$\wedge (a * poblacion[pos\_padre] + (1 - a) * poblacion[pos\_madre] =$

$= a \cdot poblacion[i] + (1 - a) \cdot poblacion[j]))$

**(10) $\{I \wedge pos\_hijos \ge Np\}$ nada $\{Q\}$**

Calculamos pmd(nada, Q): $pmd(nada, Q) \Leftrightarrow Q$

Por lo que únicamente nos queda demostrar que $(I \wedge pos\_hijos \ge Np) \Rightarrow Q$:

$I \wedge pos\_hijos \ge Np \Rightarrow pos\_hijos \ge Np \wedge 0 \le pos\_hijos \le Np \wedge$

$\wedge (\forall\, h : 0 \le h < pos\_hijos : (\exists\, i, j, k : 0 \le i, j, k < N \wedge i \ne j \wedge j \ne k \wedge k \ne i :$

$Hijos[h] = a \cdot poblacion[i] + (1 - a) \cdot poblacion[j] \wedge$

$\wedge\ fun\_obj(poblacion[i]) \ge fun\_obj(poblacion[j]) \ge fun\_obj(poblacion[k]))) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow pos\_hijos = Np \wedge (\forall\, h : 0 \le h < pos\_hijos : (\exists\, i, j, k : 0 \le i, j, k < N \wedge i \ne j \wedge j \ne k \wedge k \ne i :$

$Hijos[h] = a \cdot poblacion[i] + (1 - a) \cdot poblacion[j] \wedge$

$\wedge\ fun\_obj(poblacion[i]) \ge fun\_obj(poblacion[j]) \ge fun\_obj(poblacion[k]))) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ (∀ h : 0 ≤ h < Np : (∃ i, j, k : 0 ≤ i, j, k < N ⋀ i ≠ j ⋀ j ≠ k ⋀ k ≠ i :

Hijos[h] = a · poblacion[i] + (1 - a) · poblacion[j] ⋀

⋀ fun_obj(poblacion[i]) ≥ fun_obj(poblacion[j]) ≥ fun_obj(poblacion[k]))) $\Leftrightarrow$ Q

**(11) I ⋀ pos_hijos < Np ⇒ C ≥ 0**

I ⋀ pos_hijos < Np ⇒ pos_hijos < Np ⇒ Np – pos_hijos > 0 ⇒ Np – pos_hijos ≥ 0 $\Leftrightarrow$ C ≥ 0

**(12) {I ⋀ pos_hijos < Np ⋀ C = T} <i, j, k> := <(i + 1) <u>mod</u> N, (j + 1) <u>mod</u> N, (k + 1) <u>mod</u> N>; <pos_padre, pos_madre> := torneo(Valores, i, j, k); Hijos[pos_hijos] := a * * poblacion[pos_padre] + (1 - a) * poblacion[pos_madre]; pos_hijos := pos_hijos + 1 {C < T}**

Denotamos:

$A_5$ ≡ <i, j, k> := <(i + 1) <u>mod</u> N, (j + 1) <u>mod</u> N, (k + 1) <u>mod</u> N>

$A_6$ ≡ <pos_padre, pos_madre> := torneo(Valores, i, j, k)

$A_7$ ≡ Hijos[pos_hijos] := a * poblacion[pos_padre] + (1 - a) * poblacion[pos_madre]

$A_8$ ≡ pos_hijos := pos_hijos + 1

Calculamos pmd($A_5$; $A_6$; $A_7$; $A_8$, C < T):

pmd($A_5$; $A_6$; $A_7$; $A_8$, C < T) $\Leftrightarrow$ pmd ($A_5$; $A_6$; $A_7$, pmd($A_8$, C < T))

Por tanto, primeramente debemos calcular pmd($A_8$, C < T):

pmd($A_8$, C < T) $\Leftrightarrow$ pmd(pos_hijos := pos_hijos + 1, Np – pos_hijos < T) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ def(pos_hijos + 1) ⋀ $(Np - \ pos\_hijos < T)^{pos\_hijos+1}_{pos\_hijos}$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ cierto ⋀ (Np – (pos_hijos + 1) < T) $\Leftrightarrow$ Np – pos_hijos < T + 1

Como los predicados $A_5$, $A_6$ y $A_7$ no modifican ninguna de las variables presentes en pmd($A_8$, C < T), podemos afirmar que pmd($A_5$; $A_6$; $A_7$; $A_8$, C < T) $\Leftrightarrow$ pmd($A_8$, C < T) ⋀ ⋀ 0 ≤ pos_hijos < Np.

Por último, demostramos que (I ⋀ pos_hijos < Np ⋀ C = T) ⇒ pmd($A_8$, C < T) ⋀ 0 ≤ pos_hijos <Np:

I ⋀ pos_hijos < Np ⋀ C = T ⇒ 0 ≤ pos_hijos ≤ Np ⋀ pos_hijos < Np ⋀ C = T ⇒

⇒ 0 ≤ pos_hijos < Np ⋀ C < T + 1 $\Leftrightarrow$ 0 ≤ pos_hijos < Np ⋀ Np – pos_hijos < T + 1 $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ 0 ≤ pos_hijos < Np ⋀ pmd($A_8$, C < T)