Bootcamp Data Science
Zajęcia 1

Statystyka

Przemysław Spurek

O co chodzi z tym ciągiem zmiennych losowych?

Populacje i próbki

- W statystycznej analizie danych zazwyczaj wykorzystujemy dane z kilku wybranych **próbek**, aby wyciągnąć wnioski dotyczące **populacji**, z której pobrano te próbki.
- Właściwie zaprojektowana analiza powinien zapewnić, że dane dotyczące **próbek** są reprezentatywne dla **populacji**, z której pobrano próbki.

Populacje i próbki

Główna różnica między **populacją**, a **próbką** ma związek z przypisywaniem obserwacji do zbioru danych.

- **Populacja** – zawiera wszystkie elementy z zestawu danych.
- **Próbka** – składa się z jednej lub kilku obserwacji z populacji.

Można uzyskać więcej niż jedną próbkę z tej samej populacji.

Populacje i próbki

Przykład

Oceniając parametr populacji np. ciężar mężczyzn w Europie, zazwyczaj nie możemy zważyć wszystkich osób.

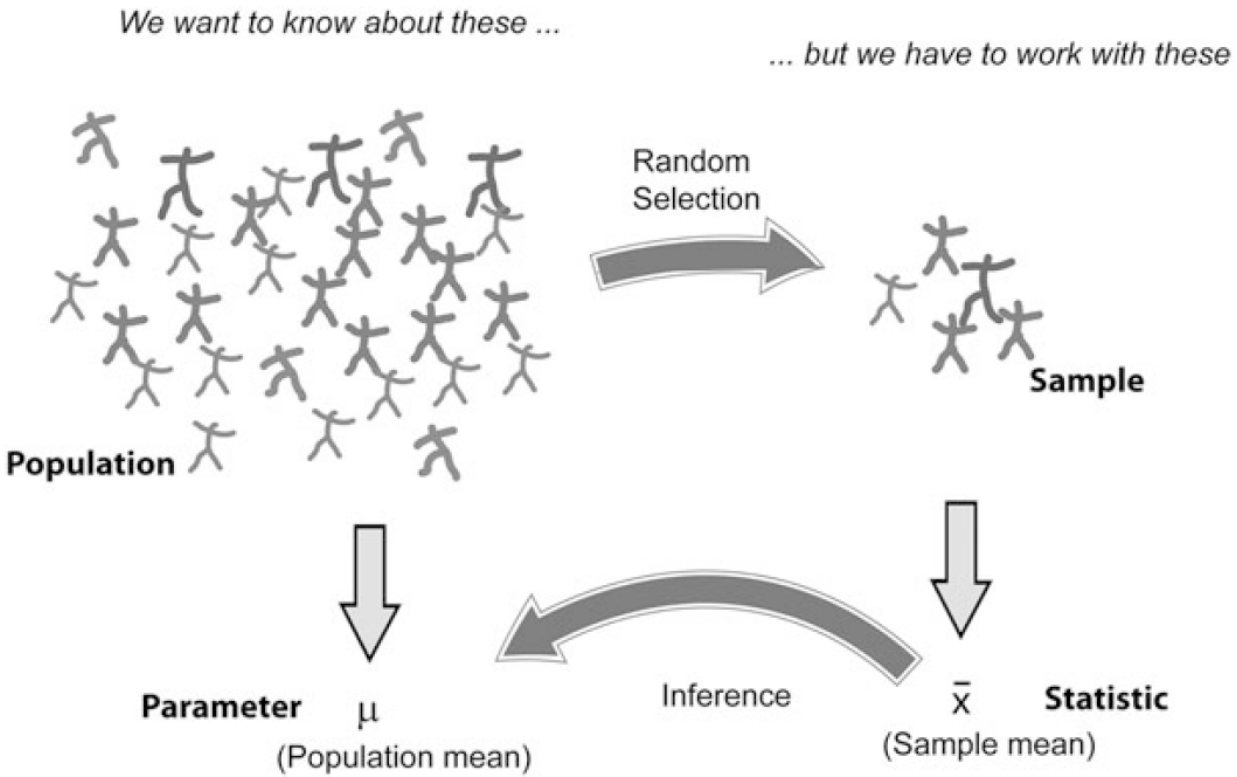
Musimy ograniczyć się do zbadania (przypadkowych reprezentantów) losowej próbki pobranej z tej grupy (populacji).

Populacje i próbki

Na podstawie statystyk próbki, czyli odpowiedniej wartości obliczonej na podstawie danych z próbki, wykorzystujemy wnioskowanie statystyczne, aby dowiedzieć się, co wiemy o odpowiednim parametrze w populacji.

- **Parametr** – charakterystyka populacji, np. średnie lub odchylenie standardowe.
- **Statystyka** – mierzalna charakterystyka próbki. Przykładem statystyki jest średnia z danych.

Populacje i próbki



Próbka

Definicja

Prostą próbą losową (lub krócej próbą losową) o liczności n nazywamy **ciąg niezależnych zmiennych losowych** $X_1, X_2, \ldots, X_n$ o takim samym rozkładzie.

Próbka

Definicja

Prostą próbą losową (lub krócej próbą losową) o liczności n nazywamy **ciąg niezależnych zmiennych losowych** $X_1, X_2, \ldots, X_n$ o takim samym rozkładzie.

Uwaga

Konkretny ciąg wartości $x_1, x_2, ..., x_n$ (prostej) próby losowej $X_1, X_2, \ldots, X_n$ nazywamy realizacją (prostej) próby losowej lub próbką.

Próbka

Definicja

Prostą próbą losową (lub krócej próbą losową) o liczności n nazywamy **ciąg niezależnych zmiennych losowych** $X_1, X_2, \ldots, X_n$ o takim samym rozkładzie.

Uwaga

Konkretny ciąg wartości $x_1, x_2, ..., x_n$ (prostej) próby losowej $X_1, X_2, \ldots, X_n$ nazywamy realizacją (prostej) próby losowej lub próbką.

Uwaga

Statystyką nazywamy każdą zmienną losową będącą ustaloną funkcją próby losowej $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Populacje i próbki

Przykład parametrów i statystyk

	Population parameter	Sample statistic
Mean	μ	$\bar{x}$
Standard deviation	σ	s

- **Parametry** – najczęściej oznaczane są za pomocą greckich liter.
- **Statystyki** – najczęściej oznaczane są za pomocą zwykłych liter.

Stopnie swobody (Degrees of Freedom)

Pojęcie stopni swobody (DOF), które w mechanice wydaje się być krystalicznie czyste, trudniej jest zrozumieć dla zastosowań statystycznych.

Przykład

W mechanice, jeśli cząstka poruszająca się na płaszczyźnie ma “2 DOF”:

Stopnie swobody (Degrees of Freedom)

Pojęcie stopni swobody (DOF), które w mechanice wydaje się być krystalicznie czyste, trudniej jest zrozumieć dla zastosowań statystycznych.

Przykład

W mechanice, jeśli cząstka poruszająca się na płaszczyźnie ma "2 DOF": w każdym punkcie czasowym ruch opisany jest przez dwa parametry (współrzędne x i y określają położenie cząstki).

Stopnie swobody (Degrees of Freedom)

Pojęcie stopni swobody (DOF), które w mechanice wydaje się być krystalicznie czyste, trudniej jest zrozumieć dla zastosowań statystycznych.

Przykład

W mechanice, jeśli cząstka poruszająca się na płaszczyźnie ma “2 DOF”: w każdym punkcie czasowym ruch opisany jest przez dwa parametry (współrzędne x i y określają położenie cząstki).

Jeśli cząstka poruszająca się w przestrzeni, ma "3 DOF": współrzędne x, y i z.

Stopnie swobody (Degrees of Freedom)

W statystyce grupa n wartości $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ ma n stopni swobody.

Stopnie swobody (Degrees of Freedom)

W statystyce grupa n wartości $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ ma n stopni swobody. Jeśli policzymy wartość oczekiwaną, to możemy odjąć od każdego elementu wartości średnią próbki.

Stopnie swobody (Degrees of Freedom)

W statystyce grupa n wartości $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ ma n stopni swobody.
Jeśli policzymy wartość oczekiwaną, to możemy odjąć od każdego elementu wartości średnią próbki.
Tak otrzymane dane mają tylko $n - 1$ stopni swobody.

Stopnie swobody (Degrees of Freedom)

W statystyce grupa n wartości $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ ma n stopni swobody.
Jeśli policzymy wartość oczekiwaną, to możemy odjąć od każdego elementu wartości średnią próbki.
Tak otrzymane dane mają tylko $n - 1$ stopni swobody.

Przykład

W przypadku zbioru zawierającego dwa elementy $X = \{x_1, x_2\}$ $(n = 2)$ znamy średnią z danych oraz wartość x_1, to drugą wartość możemy uzyskać za pomocą wzoru

$$x_2 = 2 \cdot mean - x_1 .$$

Moda z próbki

Definicja

Moda (wartość modalna) jest to najczęściej występująca wartość zmiennej X. W przypadku, gdy kilka wartości jest osiąganych taką samą liczbę razy, wówczas każda z nich jest modą.

Przykład

Załóżmy, że rozważaną populacją jest zbiór samochodów znajdujących się w określonym czasie na pewnym parkingu, zaś cechą - nazwa producenta samochodu. Jej wartości mogą wyglądać, na przykład, tak:

Fiat, BMW, Ford, Ford, Fiat, Skoda, Fiat, Polonez, Toyota, Toyota, Toyota, Renault, Opel, Fiat, Opel, Opel, Toyota.

Nasza cecha ma dwie mody: Fiat i Toyota.

Średnia z próbki

https://github.com/przem85/bootcamp/blob/master/statistics/D03_Z01.ipynb

Definicja

Jeżeli cecha X przyjmuje wartości $x_1, x_2, \ldots, x_n$, wówczas jej średnią arytmetyczną, lub krótko średnią, nazywamy:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x.$$

Średnia geometryczna

W niektórych sytuacjach średnia geometryczna może być użyteczna do opisania rozmieszczenia rozkładu. Można ją obliczyć za pomocą średniej arytmetycznej logarytmów wartości

$$mean_{geometric} = \left(\prod_{i=1}^{N} x_i \right)^{1/n} = exp\left(\frac{\sum_i ln(x_i)}{n} \right).$$

Zauważ, że wartości wejściowe dla średniej geometrycznej muszą być dodatnie.

Mediana z próbki

Dla danego ciągu liczb $x_1, \ldots, x_n$, określamy ciąg $x_{(1)}, \ldots, x_{(n)}$, który powstaje przez jego niemalejące uporządkowanie, czyli:

$$x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \cdots \leq x_{(n)}.$$

Mediana z próbki

Dla danego ciągu liczb $x_1, \ldots, x_n$, określamy ciąg $x_{(1)}, \ldots, x_{(n)}$, który powstaje przez jego niemalejące uporządkowanie, czyli:

$$x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \cdots \leq x_{(n)}.$$

Definicja

Medianą cechy X, przyjmującej wartości $x_1, \ldots, x_n$, nazywamy środkowy wyraz ciągu $x_{(1)}, \ldots, x_{(n)}$, gdy n jest liczbą nieparzystą, lub średnią arytmetyczną dwóch wyrazów środkowych, gdy n jest liczbą parzystą. Zatem:

$$me = \begin{cases} x_{(k+1)} & \text{dla} \quad n = 2k+1 \\ \frac{x_{(k)} + x_{(k+1)}}{2} & \text{dla} \quad n = 2k. \end{cases}$$

Rang

Zakres (rang) jest po prostu różnicą między najwyższą i najniższą wartością w danych.
W przypadku zakresu danych łatwo jest zauważyć dane odstające. Często takie punkty są spowodowane błędami w wyborze próbki lub w procedurze pomiaru.

Odchylenie standardowe oraz wariancja

Używa się dwóch estymatorów wariancji próbki:

- $$S^2 = var(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$
- $$S^{*2} = var(X) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

Odchylenie standardowe oraz wariancja

Używa się dwóch estymatorów wariancji próbki:

- $$S^2 = var(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$
- $$S^{*2} = var(X) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

Odchylenie standardowe jest pierwiastkiem kwadratowym wariancji:

$$S = \sqrt{var}.$$

Odchylenie standardowe oraz wariancja

Używa się dwóch estymatorów wariancji próbki:

- $$S^2 = var(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$
- $$S^{*2} = var(X) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

Odchylenie standardowe jest pierwiastkiem kwadratowym wariancji:

$$S = \sqrt{var}.$$

Czasami używa się

$$S_1^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2$$

Odchylenie standardowe oraz wariancja

W przeciwieństwie do innych języków, takich jak Matlab lub R, numpy domyślnie oblicza wariancję dla "n". Aby uzyskać wariancję próbki należy ustawić "ddof = 1" :

```
import numpy as np
data = np.arange(7,14)
print(np.std(data, ddof=0))
print(np.std(data))
print(np.std(data, ddof=1))
```

Sample standard error

Dla próbki z rozkładu normalnego (SE lub SEM) jest:

$$SEM = \frac{s}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n^2}},$$

$$SEM^* = \frac{s}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Próbka

Definicja

Prostą próbą losową (lub krócej próbą losową) o liczności n nazywamy **ciąg niezależnych zmiennych losowych** $X_1, X_2, \ldots, X_n$ o takim samym rozkładzie.

Uwaga

Konkretny ciąg wartości $x_1, x_2, ..., x_n$ (prostej) próby losowej $X_1, X_2, \ldots, X_n$ nazywamy realizacją (prostej) próby losowej lub próbką.

Uwaga

Statystyką nazywamy każdą zmienną losową będącą ustaloną funkcją próby losowej $X_1, X_2, \ldots, X_n$**.**

Rozkłady prawdopodobieństwa a testowanie hipotez

`https://github.com/przem85/bootcamp/blob/master/statistics/D03_Z02.ipynb`

Aby zilustrować związek pomiędzy **rozkładami prawdopodobieństwa** a **testowaniem hipotez**, rozważmy następujący problem:

Rozkłady prawdopodobieństwa a testowanie hipotez

`https://github.com/przem85/bootcamp/blob/master/statistics/D03_Z02.ipynb`

Aby zilustrować związek pomiędzy **rozkładami prawdopodobieństwa** a **testowaniem hipotez**, rozważmy następujący problem:

- Średnia masa noworodków w USA wynosi 3.5 kg, przy odchyleniu standardowym 0.76 kg.

Rozkłady prawdopodobieństwa a testowanie hipotez

`https://github.com/przem85/bootcamp/blob/master/statistics/D03_Z02.ipynb`

Aby zilustrować związek pomiędzy **rozkładami prawdopodobieństwa** a **testowaniem hipotez**, rozważmy następujący problem:

- Średnia masa noworodków w USA wynosi 3.5 kg, przy odchyleniu standardowym 0.76 kg.
- Załóżmy, że chcemy **znaleźć** wszystkie dzieci znacznie różniące się od normy (aby móc monitorować ich rozwój).

Rozkłady prawdopodobieństwa a testowanie hipotez

`https://github.com/przem85/bootcamp/blob/master/statistics/D03_Z02.ipynb`

Aby zilustrować związek pomiędzy **rozkładami prawdopodobieństwa** a **testowaniem hipotez**, rozważmy następujący problem:

- Średnia masa noworodków w USA wynosi 3.5 kg, przy odchyleniu standardowym 0.76 kg.
- Załóżmy, że chcemy **znaleźć** wszystkie dzieci znacznie różniące się od normy (aby móc monitorować ich rozwój).
- Co zrobić z dzieckiem, które urodziło się z wagą 2.6 kg?

Rozkłady prawdopodobieństwa a testowanie hipotez

`https://github.com/przem85/bootcamp/blob/master/statistics/D03_Z02.ipynb`

Aby zilustrować związek pomiędzy **rozkładami prawdopodobieństwa** a **testowaniem hipotez**, rozważmy następujący problem:

- Średnia masa noworodków w USA wynosi 3.5 kg, przy odchyleniu standardowym 0.76 kg.
- Załóżmy, że chcemy **znaleźć** wszystkie dzieci znacznie różniące się od normy (aby móc monitorować ich rozwój).
- Co zrobić z dzieckiem, które urodziło się z wagą 2.6 kg?
- Możemy wypowiedzieć ten problem w formie testu hipotez:
  - Nasza hipoteza polega na tym, że dziecko pochodzi z populacji "zdrowych" niemowląt.
  - Czy możemy odrzucić hipotezę, czy też ciężar dziecka sugeruje, że nie ma podstaw do odrzucenia takiej hipotezy?

Aby odpowiedzieć na to pytanie, możemy postępować w następujący sposób:

Rozkłady prawdopodobieństwa a testowanie hipotez

Aby odpowiedzieć na to pytanie, możemy postępować w następujący sposób:

- Załóżmy, że urodzenia są modelowane rozkładem normalnym o parametrach $\mu = 3.5$, $\sigma = 0.76$.

Aby odpowiedzieć na to pytanie, możemy postępować w następujący sposób:

- Załóżmy, że urodzenia są modelowane rozkładem normalnym o parametrach $\mu = 3.5$, $\sigma = 0.76$.
- Znajdźmy dystrybuantę (CDF) tej zmiennej losowej oraz wyznacz $CDF(2.6)$.

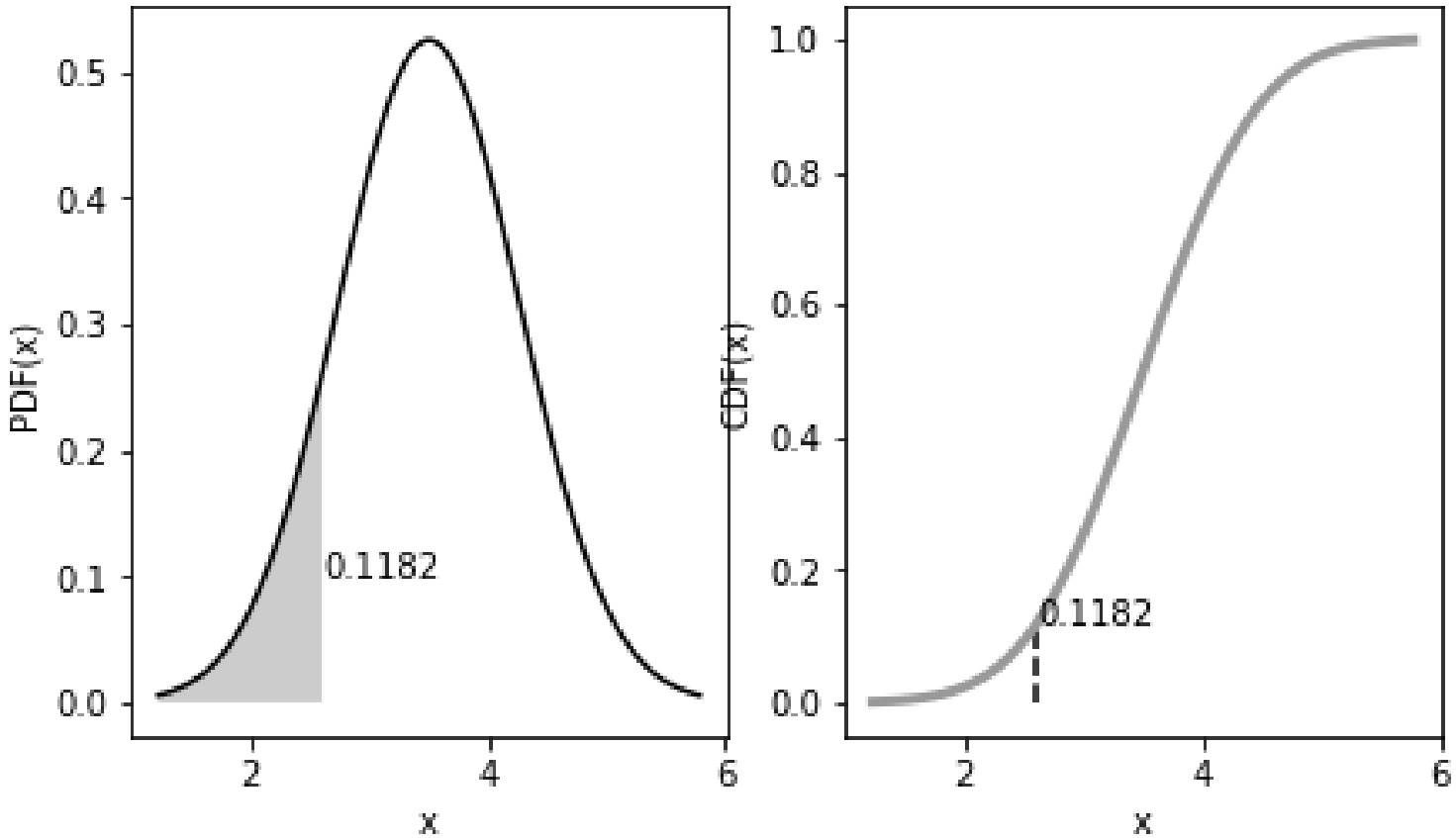
Rozkłady prawdopodobieństwa a testowanie hipotez

Aby odpowiedzieć na to pytanie, możemy postępować w następujący sposób:

- Załóżmy, że urodzenia są modelowane rozkładem normalnym o parametrach $\mu = 3.5$, $\sigma = 0.76$.
- Znajdźmy dystrybuantę (CDF) tej zmiennej losowej oraz wyznacz $CDF(2.6)$.
- Innymi słowy, prawdopodobieństwo, że zdrowe dziecko jest co najmniej o 0.9 kg lżejsze od przeciętnego dziecka:

$$P(X < 2.6) = CDF(2.6) = 0.118.$$

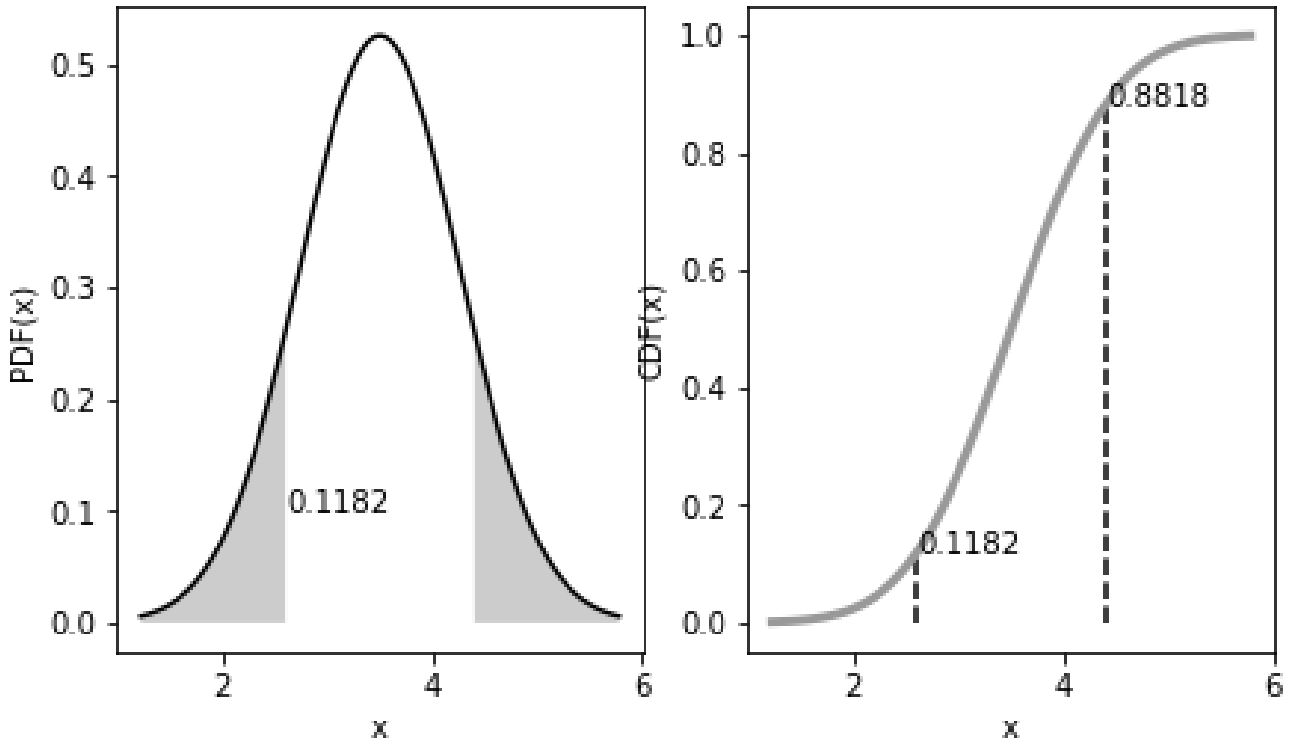
Rozkłady prawdopodobieństwa a testowanie hipotez



Rozkłady prawdopodobieństwa a testowanie hipotez

Aby odpowiedzieć na to pytanie, możemy postępować w następujący sposób:

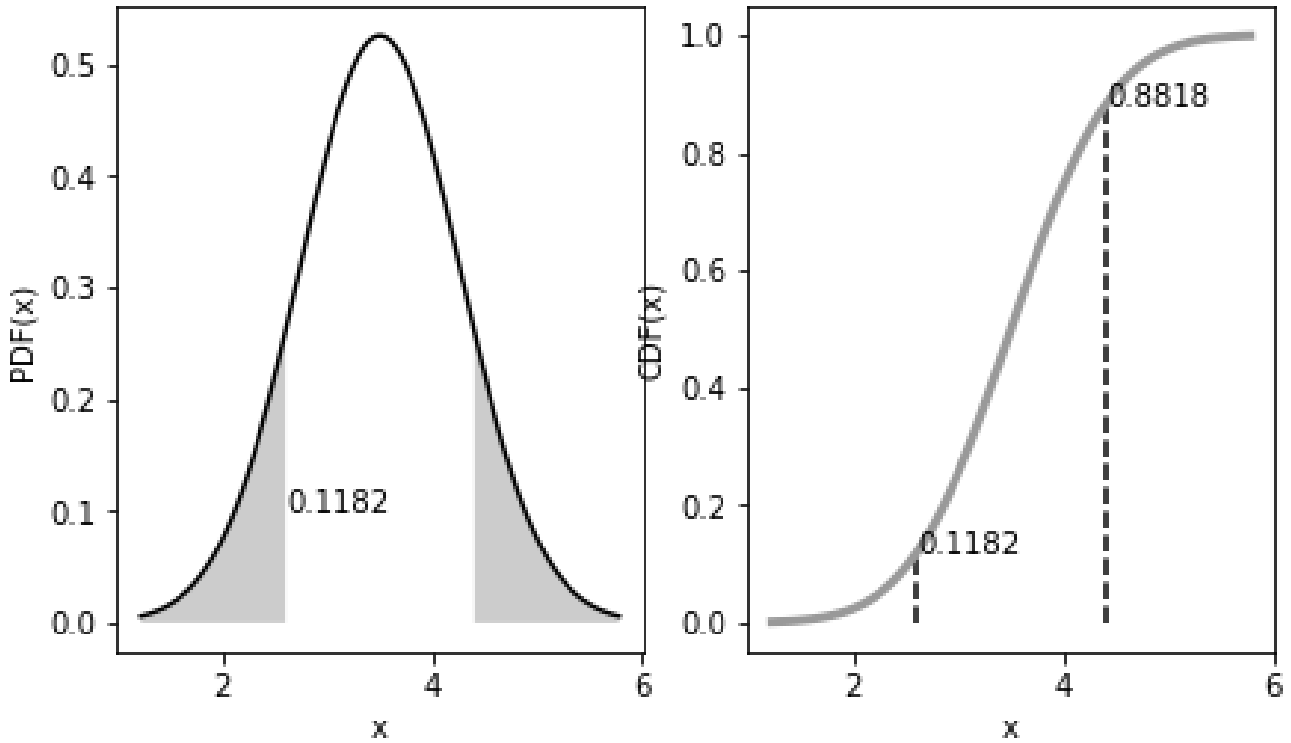
- My zakładamy że zjawisko to jest modelowane rozkładem normalny więc prawdopodobieństwo, że zdrowe dziecko jest co najmniej o 0.9 kg cięższe od przeciętnego dziecka, wynosi również 11.8%.



Rozkłady prawdopodobieństwa a testowanie hipotez

Interpretacja wyników:

- Jeśli dziecko jest zdrowe, prawdopodobieństwo, że jego masa odbiega o co najmniej 0.9 kg od średniej wynosi $2 \cdot 11,8\% = 23,6\% = 0.236$. To nie jest znaczące, więc nie mamy wystarczających dowodów na odrzucenie naszej hipotezy, a nasze dziecko uważa się za zdrowe.



Rozkłady prawdopodobieństwa a testowanie hipotez II

`https://github.com/przem85/bootcamp/blob/master/statistics/D03_Z03.ipynb`

Aby zilustrować związek pomiędzy **rozkładami prawdopodobieństwa** a **testowaniem hipotez**, rozważmy następujący problem:

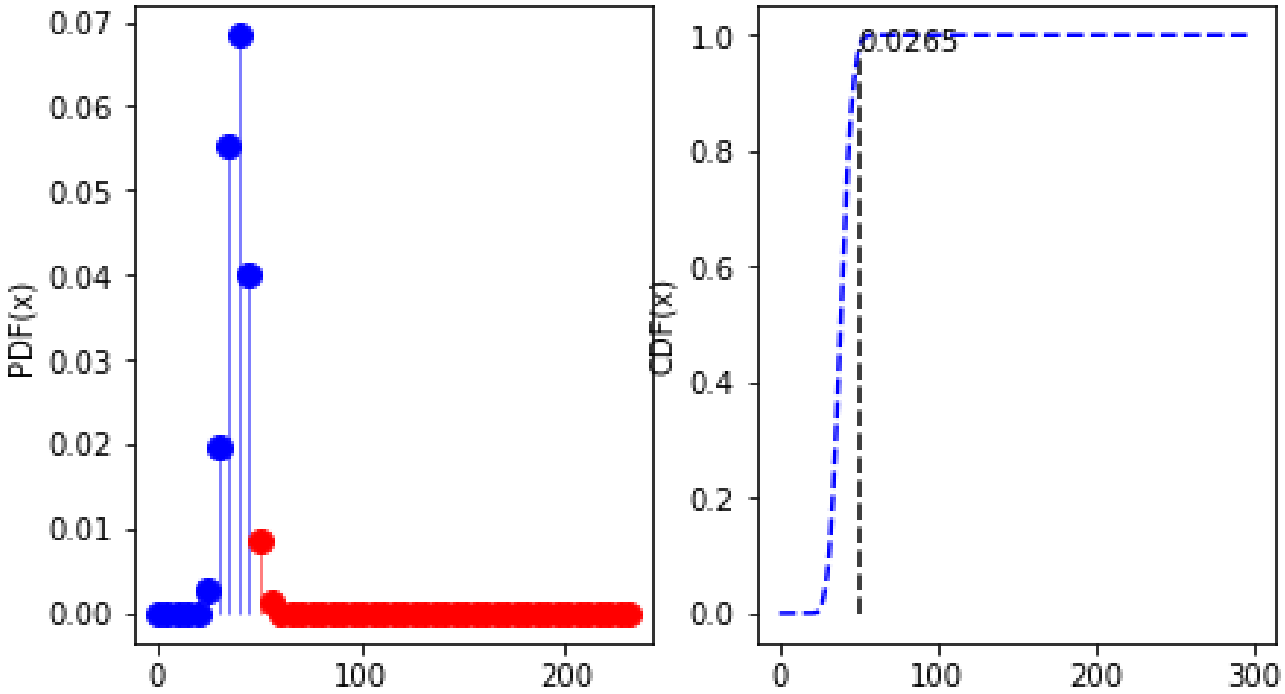
- Załóżmy, że mamy grę planszową, która zależy od rzutu kostką. Oczywiście jak dostaniemy wynik 6 to poruszamy się najszybciej. W danej grze 6 wypadła 51 razy w ciągu 235 rzutów.
- Jeśli kostka jest uczciwa, oczekiwalibyśmy, że 6 wypadnie $235/6 = 39.17$ razy.
- Czy kostka aby na pewno jest uczciwa?

Rozkłady prawdopodobieństwa a testowanie hipotez II

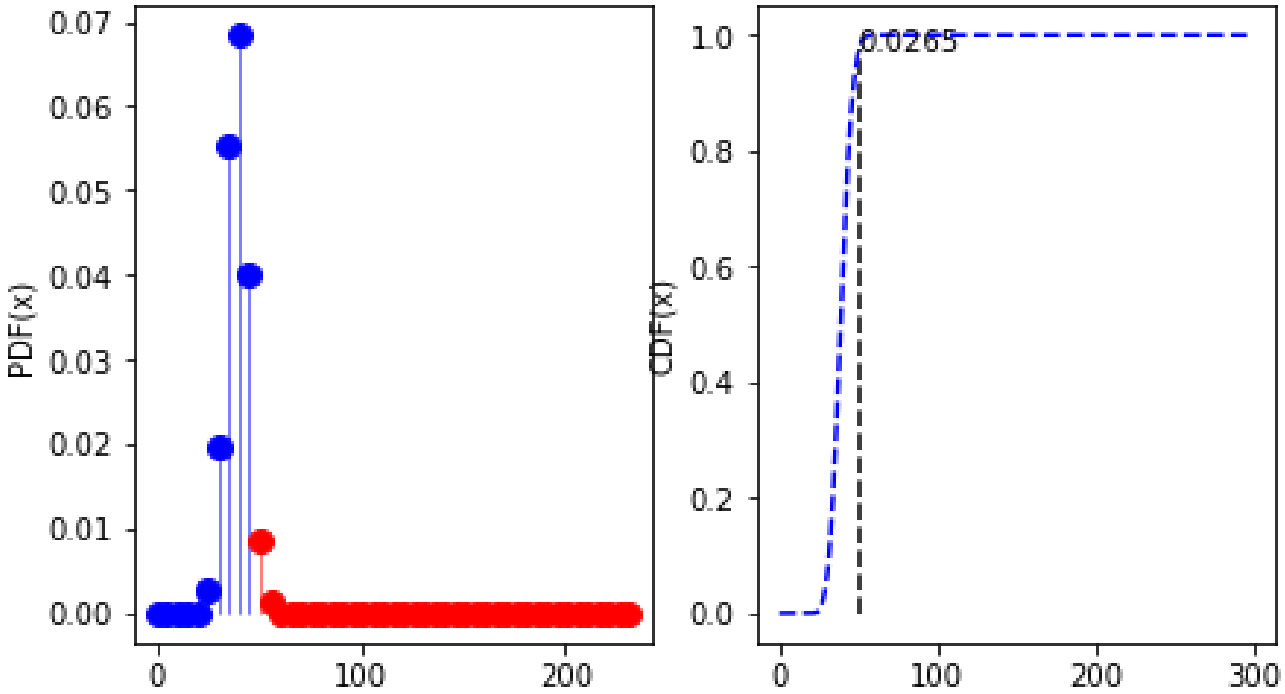
Aby znaleźć odpowiedź na to pytanie:

- skontrujmy rozkład dwumianowy z parametrami $n = 235$ i $p = \frac{1}{6}$. Podobnie jak wcześniej zakładamy, że kostka jest uczciwa.
- obliczymy prawdopodobieństwo wypadnięcia dokładnie 51 razy 6, 52 razy i itd. Następnie dodajmy te wyniki. W ten sposób obliczymy prawdopodobieństwo wypadnięcia dokładnie 51 razy 6 lub wyniku większego $P(X \geq 51)$

Rozkłady prawdopodobieństwa a testowanie hipotez II



Rozkłady prawdopodobieństwa a testowanie hipotez II



W tym przykładzie wynik wynosi 0.0265, co wskazuje, że obserwowanie 51 szóstek jest mało prawdopodobne (poniżej 5%). Kostka najprawdopodobniej nie jest uczciwa.

Statystyki testowe mogą mieć najróżniejsze rozkłady.

Rozkład chi kwadrat

Rozkład chi-kwadrat wiąże się z rozkładem normalnym w prosty sposób: jeśli zmienna losowa X ma rozkład normalny $X \sim N(0,1)$, to X^2 ma rozkład chi-kwadrat z jednym stopniem swobody $X \sim \chi^2_1$.

Rozkład chi kwadrat

Rozkład chi-kwadrat wiąże się z rozkładem normalnym w prosty sposób: jeśli zmienna losowa X ma rozkład normalny $X \sim N(0,1)$, to X^2 ma rozkład chi-kwadrat z jednym stopniem swobody $X \sim \chi^2_1$.

Suma kwadratów n niezależnych zmiennych losowych o standardowym rozkładzie normalnych ma rozkład chi-kwadrat z n stopniami swobody:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \chi^2_n$$

Rozkład chi kwadrat

Rozkład chi kwadrat – to rozkład zmiennej losowej, która jest sumą n kwadratów niezależnych zmiennych losowych o standardowym rozkładzie normalnym. Liczbę naturalną n nazywa się liczbą stopni swobody rozkładu zmiennej losowej.
Jeżeli ciąg niezależnych zmiennych losowych $X_i \sim N(0,1)$ oraz:

$$Y = \sum_{i=1}^{n} (X_i)^2,$$

to:

$$Y \sim \chi^2_n,$$

czyli słownie: Zmienna losowa Y ma rozkład chi kwadrat o n stopniach swobody.

Rozkład chi kwadrat

Rozkład chi kwadrat ma gęstość

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} & \text{gdy } x \geq 0 \\ 0 & \text{gdy } x < 0 \end{cases},$$

gdzie Γ oznacza funkcję Gamma.
https://pl.wikipedia.org/wiki/Funkcja_%CE%93

Rozkład chi kwadrat

https://github.com/przem85/bootcamp/blob/master/statistics/D03_Z04.ipynb

Zadanie

Proszę napisać skrypt w Pythonie, w którym:

- zdefiniujesz zmienną losową o rozkładzie chi kwadrat,
- narysujesz dla niej gęstość i dystrybuantę,
- wylosujesz próbkę i narysujesz histogram (na jednym rysunku),
- narysujesz kilka gęstości rozkładu chi kwadrat z różnymi parametrami,
- wylosujesz kilka próbek dla zmiennej losowej o rozkładzie chi kwadrat. (Czemu się od siebie różnią?),
- policz skośność i kurtozę dla zdefiniowanej zmiennej.

Rozkład chi kwadrat

Jeżeli $(X_1, \ldots, X_n)$ jest próbka prostą z rozkładu $N(\mu, \sigma^2)$, to zmienna losowa

$$\frac{(n-1)S^{*2}}{\sigma^2},$$

gdzie

$$S^{*2} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2, \quad \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

ma rozkład χ^2_{n-1} (chi kwadrat z $n-1$ stopniami swobody).

Rozkład chi kwadrat

https://github.com/przem85/bootcamp/blob/master/statistics/D03_Z05.ipynb

Zadanie

Producent pigułek na ból głowy zobowiązał się dostarczyć pigułki z odchyleniem standardowym $\sigma = 0.05$. Z następnej partii pigułek wybrano próbkę $n = 13$ pigułek o wagach
$3.04, 2.94, 3.01, 3.00, 2.94, 2.91, 3.02, 3.04, 3.09, 2.95, 2.99, 3.10, 3.02$ g.

Pytanie: Czy odchylenie standardowe jest większe niż dozwolone?

Rozkład chi kwadrat

- Stawiamy hipotezę, że odchylenie jest mniejsze od ustalonego σ.

Rozkład chi kwadrat

- Stawiamy hipotezę, że odchylenie jest mniejsze od ustalonego σ.
- Zauważmy, że:

$$\frac{(n-1)S^{*2}}{\sigma^2} = \frac{(n-1)\frac{1}{(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2}.$$

ma rozkład chi kwadrat.

Rozkład chi kwadrat

- Rozkład chi kwadrat opisuje rozkład sumy kwadratów zmiennych losowych z rozkładu normalnego więc musimy znormalizować nasze dane, zanim obliczymy odpowiednią wartość CDF:

$$SF_{\chi^2_{(n-1)}}\left(\sum\left(\frac{x-\bar{x}}{\sigma}\right)^2\right) = 1 - CDF_{\chi^2_{(n-1)}}\left(\sum\left(\frac{x-\bar{x}}{\sigma}\right)^2\right) = 0.1929$$

Rozkład chi kwadrat

- Rozkład chi kwadrat opisuje rozkład sumy kwadratów zmiennych losowych z rozkładu normalnego więc musimy znormalizować nasze dane, zanim obliczymy odpowiednią wartość CDF:

$$SF_{\chi^2_{(n-1)}}\left(\sum\left(\frac{x-\bar{x}}{\sigma}\right)^2\right) = 1 - CDF_{\chi^2_{(n-1)}}\left(\sum\left(\frac{x-\bar{x}}{\sigma}\right)^2\right) = 0.1929$$

- Jeśli partia pigułek pochodzi z rozkładu z odchyleniem standardowym mniejszym od $\sigma = 0.05$ to prawdopodobieństwo otrzymania większej niż obserwowana wartość chi kwadrat wynosi około 19%.

Rozkład chi kwadrat

- Rozkład chi kwadrat opisuje rozkład sumy kwadratów zmiennych losowych z rozkładu normalnego więc musimy znormalizować nasze dane, zanim obliczymy odpowiednią wartość CDF:

$$SF_{\chi^2_{(n-1)}}\left(\sum\left(\frac{x-\bar{x}}{\sigma}\right)^2\right) = 1 - CDF_{\chi^2_{(n-1)}}\left(\sum\left(\frac{x-\bar{x}}{\sigma}\right)^2\right) = 0.1929$$

- Jeśli partia pigułek pochodzi z rozkładu z odchyleniem standardowym mniejszym od $\sigma = 0.05$ to prawdopodobieństwo otrzymania większej niż obserwowana wartość chi kwadrat wynosi około 19%.
- Innymi słowy, partia pasuje do oczekiwanego odchylenia standardowego.

Rozkład chi kwadrat

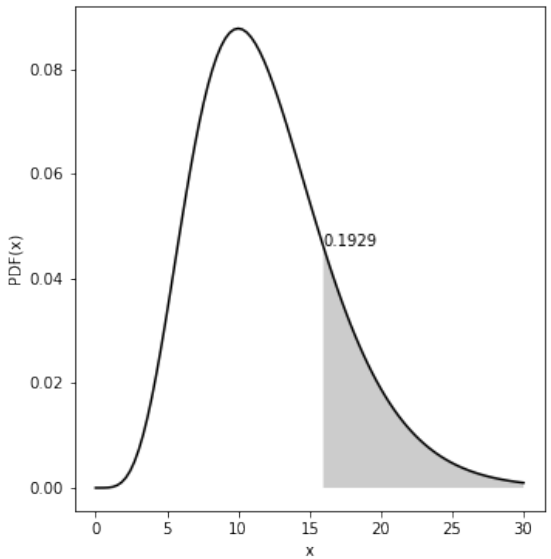
- Rozkład chi kwadrat opisuje rozkład sumy kwadratów zmiennych losowych z rozkładu normalnego więc musimy znormalizować nasze dane, zanim obliczymy odpowiednią wartość CDF:

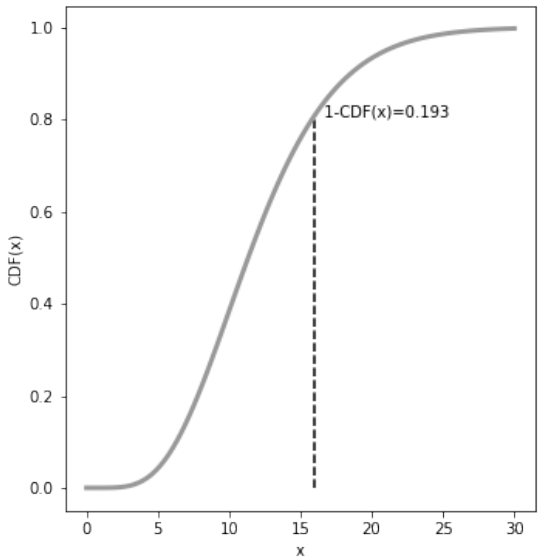
$$SF_{\chi^2_{(n-1)}}\left(\sum\left(\frac{x-\bar{x}}{\sigma}\right)^2\right) = 1 - CDF_{\chi^2_{(n-1)}}\left(\sum\left(\frac{x-\bar{x}}{\sigma}\right)^2\right) = 0.1929$$

- Jeśli partia pigułek pochodzi z rozkładu z odchyleniem standardowym mniejszym od $\sigma = 0.05$ to prawdopodobieństwo otrzymania większej niż obserwowana wartość chi kwadrat wynosi około 19%.
- Innymi słowy, partia pasuje do oczekiwanego odchylenia standardowego.
- Liczba DOF (stopni swobody) wynosi $n - 1$, ponieważ interesuje nas tylko gęstość rozkładu, a średnia wartość jest odejmowana od wszystkich punktów danych.

Rozkład chi kwadrat

```
import numpy as np
from scipy import stats
data = np.r_[3.04, 2.94, 3.01, 3.00, 2.94, 2.91, 3.02,
         3.04, 3.09, 2.95, 2.99, 3.10, 3.02]
sigma = 0.05
chi2Dist = stats.chi2(len(data)-1)
statistic = sum( ((data-np.mean(data))/sigma)**2 )
chi2Dist.sf(statistic)
```





Rozkład t-Studenta

- W 1908 roku W. S. Gosset, który pracował dla browaru Guinness w Dublinie, interesował się problemami małych próbek (na przykład właściwości chemicznych jęczmienia, w których rozmiary próbek mogły być tak niskie, jak 3).

Rozkład t-Studenta

- W 1908 roku W. S. Gosset, który pracował dla browaru Guinness w Dublinie, interesował się problemami małych próbek (na przykład właściwości chemicznych jęczmienia, w których rozmiary próbek mogły być tak niskie, jak 3).
- Ponieważ w tych pomiarach nie było znane prawdziwe odchylenie standardowe więc przybliżył je za pomocą standardowego błędu SE.

Rozkład t-Studenta

- W 1908 roku W. S. Gosset, który pracował dla browaru Guinness w Dublinie, interesował się problemami małych próbek (na przykład właściwości chemicznych jęczmienia, w których rozmiary próbek mogły być tak niskie, jak 3).
- Ponieważ w tych pomiarach nie było znane prawdziwe odchylenie standardowe więc przybliżył je za pomocą standardowego błędu SE.
- Stosunek między średnią próbki, a błędem standardowym miał rozkład, który był nieznany do czasu, gdy Gosset pod pseudonimem "Student" rozwiązał ten problem.

Rozkład t-Studenta

- W 1908 roku W. S. Gosset, który pracował dla browaru Guinness w Dublinie, interesował się problemami małych próbek (na przykład właściwości chemicznych jęczmienia, w których rozmiary próbek mogły być tak niskie, jak 3).
- Ponieważ w tych pomiarach nie było znane prawdziwe odchylenie standardowe więc przybliżył je za pomocą standardowego błędu SE.
- Stosunek między średnią próbki, a błędem standardowym miał rozkład, który był nieznany do czasu, gdy Gosset pod pseudonimem "Student" rozwiązał ten problem.
- Szukanym rozkładem prawdopodobieństwa był t-Distribution. Ze względu na pseudonim Gosseta rozkład ten nosi nazwę t-Studenta.

Rozkład t-Studenta (t-Distribution)

Ponieważ w większości przypadków nie jest znana średnia populacji i jej wariancja, zazwyczaj analizuje się dane dotyczące próbek z rozkładem t-Studenta.

Rozkład t-Studenta (t-Distribution)

Ponieważ w większości przypadków nie jest znana średnia populacji i jej wariancja, zazwyczaj analizuje się dane dotyczące próbek z rozkładem t-Studenta.

Rozkład t-Studenta z n stopniami swobody jest rozkładem zmiennej losowej T postaci:

$$T = \frac{U}{\sqrt{Z}}\sqrt{n}$$

gdzie:

- U jest zmienną losową mającą standardowy rozkład normalny N(0,1),
- Z jest zmienną losową o rozkładzie chi kwadrat o n stopniach swobody,
- U i Z są niezależne.

Rozkład t-Studenta

Rozkład t-Studenta z n stopniami swobody ma gęstość:

$$f_X(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma(\frac{n}{2})}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-(\frac{n+1}{2})},$$

gdzie Γ oznacza funkcję Gamma.
https://pl.wikipedia.org/wiki/Funkcja_%CE%93

Rozkład t-Studenta

https://github.com/przem85/bootcamp/blob/master/statistics/D03_Z06.ipynb

Zadanie

Proszę napisać skrypt w Pythonie, w którym:

- zdefiniujesz zmienną losową o rozkładzie t-Studenta,
- narysujesz dla niej gęstość i dystrybuantę,
- wylosujesz próbkę i narysujesz histogram (na jednym rysunku),
- narysujesz kilka gęstości rozkładu t-Studenta z różnymi parametrami,
- wylosujesz kilka próbek dla zmiennej losowej o rozkładzie t-Studenta. (Czemu się od siebie różnią?),
- policzysz skośność i kurtozę dla zdefiniowanej zmiennej.

Rozkład t-Studenta

Jeżeli $(X_1, \ldots, X_n)$ jest próbka prostą z rozkładu $N(\mu, \sigma^2)$, to zmienna losowa:

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{S^*},$$

gdzie

$$S^{*2} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2, \quad \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

ma rozkład t-Studenta z $n-1$ stopniami swobody.

Rozkład t-Studenta

https://github.com/przem85/bootcamp/blob/master/statistics/D03_Z07.ipynb

Zadanie

Zmienna losowa X ma rozkład t-Studenta o $n = 15$ stopniach swobody. Oblicz prawdopodobieństwa:

- $P(|X| >= 1,753)$,
- $P(|X| < 2,13)$,
- $P(X >= 2,95)$.

Rozkład F-Snedecora (F-distribution)

Rozkład F-Snedecora został podany przez Sir Ronalda Fishera, który opracował go w celu określania wartości krytycznych w teście ANOVA "Analize of Variance".

Rozkład F-Snedecora (F-distribution)

Rozkład F-Snedecora został podany przez Sir Ronalda Fishera, który opracował go w celu określania wartości krytycznych w teście ANOVA "Analize of Variance".
Jeśli chcemy zbadać, czy dwie grupy mają tę samą wariancję, musimy obliczyć stosunek kwadratów odchyleń standardowych próbek:

$$F = \frac{S_X^2}{S_Y^2}$$

gdzie S_X jest odchyleniem standardowym pierwszej próbki, a S_Y odchyleniem standardowym drugiej próbki.

Rozkład F-Snedecora (F-distribution)

Rozkład F-Snedecora został podany przez Sir Ronalda Fishera, który opracował go w celu określania wartości krytycznych w teście ANOVA "Analize of Variance".
Jeśli chcemy zbadać, czy dwie grupy mają tę samą wariancję, musimy obliczyć stosunek kwadratów odchyleń standardowych próbek:

$$F = \frac{S_X^2}{S_Y^2}$$

gdzie S_X jest odchyleniem standardowym pierwszej próbki, a S_Y odchyleniem standardowym drugiej próbki.
Powyższa statystyka ma rozkład F-Snedecora.

Rozkład F-Snedecora (F-distribution)

Rozkład F-Snedecora ma gęstość:

$$f_X(x; d_1, d_2) = \frac{\sqrt{\frac{(d_1\,x)^{d_1}\;d_2^{d_2}}{(d_1\,x+d_2)^{d_1+d_2}}}}{x\,\mathrm{B}\left(\frac{d_1}{2}, \frac{d_2}{2}\right)} =$$

$$= \frac{1}{\mathrm{B}\left(\frac{d_1}{2}, \frac{d_2}{2}\right)} \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^{\frac{d_1}{2}} x^{\frac{d_1}{2}-1} \left(1 + \frac{d_1}{d_2}\,x\right)^{-\frac{d_1+d_2}{2}},$$

$$\text{dla } x \geq 0$$

gdzie B oznacza funkcję Beta.
`https://en.wikipedia.org/wiki/Beta_function`

Rozkład F-Snedecora

https://github.com/przem85/bootcamp/blob/master/statistics/D03_Z08.ipynb

Zadanie

Proszę napisać skrypt w pythonie, w którym:

- zdefiniujesz zmienną losową o rozkładzie F-Snedecora,
- narysujesz dla niej gęstość i dystrybuantę,
- wylosujesz próbkę i narysujesz histogram (na jednym rysunku),
- narysujesz kilka gęstości rozkładu F-Snedecora z różnymi parametrami,
- wylosujesz kilka próbek dla zmiennej losowej o rozkładzie F-Snedecora. (Czemu się od siebie różnią?),
- policzysz skośność i kurtozę dla zdefiniowanej zmiennej.

Rozkład F-Snedecora (F-distribution)

Jeżeli $(X_1, \ldots, X_n)$ jest próbką prostą z rozkładu $N(\mu_1, \sigma_1^2)$, a $(Y_1, \ldots, Y_m)$ jest niezależną próbką prostą z rozkładu $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ to zmienna losowa

$$F = \frac{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(X_i - \bar{X})^2}$$

gdzie

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \quad \bar{Y} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} Y_i$$

ma rozkład $F(m-1, n-1)$ (F-Snedecora).

Rozkład F-Snedecora (F-distribution)

https://github.com/przem85/bootcamp/blob/master/statistics/D03_Z09.ipynb

Zadanie

Weźmy na przykład przypadek, w którym chcemy porównać dokładność dwóch metod. Chcemy określić, czy dokładność obu metod jest równoważna, czy też jedna metoda jest lepsza.
Mamy następujące wyniki: Próbka 1:
$[20.7, 20.3, 20.3, 20.3, 20.7, 19.9, 19.9, 19.9, 20.3, 20.3, 19.7, 20.3]$
Próbka 2:
$[19.7, 19.4, 20.1, 18.6, 18.8, 20.2, 18.7, 19.0]$

Rozwiąż zadanie oraz wykonaj odpowiedni rysunek gęstości i dystrybuanty rozkładu F-Snedecora.

Rozkład F-Snedecora (F-distribution)

Statystyką F-Snedecora wynosi $F = 0.244$ i ma stopnie swobody równe $n - 1$ i $m - 1$, gdzie n i m są licznościami próbek. Statystyka F znajduje się w ogonie ($p_{oneTail} = 0.019$), więc odrzucamy hipotezę, że obie metody mają taką samą precyzję.

Rozkład logarytmicznie normalny

Rozkłady normalne są najłatwiejsze do pracy. Niestety, czasami analizujemy dane, które przyjmują tylko wartości dodatnie.

Rozkład logarytmicznie normalny

Rozkłady normalne są najłatwiejsze do pracy. Niestety, czasami analizujemy dane, które przyjmują tylko wartości dodatnie.

Definicja

Rozkład logarytmicznie normalny (albo logarytmiczno-normalny, log-normalny) – to ciągły rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej, której logarytm ma rozkład normalny.

Rozkład logarytmicznie normalny

Rozkład logarytmicznie normalny ma gęstość:

$$LN(x;\mu,\sigma^2) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}} & \text{gdy } x \geq 0 \\ 0 & \text{gdy } x < 0 \end{cases} .$$

Rozkład logarytmicznie normalny

https://github.com/przem85/bootcamp/blob/master/statistics/D03_Z10.ipynb

Zadanie

Proszę napisać skrypt w Pythonie, w którym:

- zdefiniujesz zmienną losową o rozkładzie logarytmicznie normalnym,
- narysujesz dla niej gęstość i dystrybuantę,
- wylosujesz próbkę i narysujesz histogram (na jednym rysunku),
- narysujesz kilka gęstości rozkładu logarytmicznie normalnego z różnymi parametrami,
- wylosujesz kilka próbek dla zmiennej losowej o rozkładzie logarytmicznie normalnym. (Czemu się od siebie różnią?),
- policzysz skośność i kurtozę dla zdefiniowanej zmiennej.

Rozkład Weibulla

Rozkład Weibulla jest najczęściej stosowany do analizy przeżycia.
Rozkład Weibulla ma gęstość

$$f_X(x; k, \lambda) = \begin{cases} \frac{k}{\lambda}\left(\frac{k}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-(x/\lambda)^k} & \text{gdy } x \geq 0 \\ 0 & \text{gdy } x < 0 \end{cases},$$

gdzie $k > 0$ jest parametrem kształtu oraz $\lambda > 0$ jest parametrem skali.

Rozkład Weibulla

Rozkład Weibulla – ciągły rozkład prawdopodobieństwa często stosowany w analizie przeżycia do modelowania sytuacji, gdy prawdopodobieństwo śmierci/awarii zmienia się w czasie.

Rozkład Weibulla

Rozkład Weibulla – ciągły rozkład prawdopodobieństwa często stosowany w analizie przeżycia do modelowania sytuacji, gdy prawdopodobieństwo śmierci/awarii zmienia się w czasie.

Może on w zależności od parametrów przypominać zarówno rozkład normalny (dla k=3.4), jak i rozkład wykładniczy (dla k=1).

Rozkład Weibulla

Parametrem kształtu k może być interpretowany bezpośrednio w następujący sposób:

- Wartość $k < 1$ wskazuje, że szybkość awarii maleje w czasie.
- Wartość $k = 1$ wskazuje, że współczynnik awarii jest stały w czasie. Może to sugerować, że przypadkowe zdarzenia zewnętrzne powodują awarię.
- Wartość $k < 1$ wskazuje, że szybkość awarii zwiększa się wraz z upływem czasu.

Rozkład Weibulla

Parametrem kształtu k może być interpretowany bezpośrednio w następujący sposób:

- Wartość $k < 1$ wskazuje, że szybkość awarii maleje w czasie.
- Wartość $k = 1$ wskazuje, że współczynnik awarii jest stały w czasie. Może to sugerować, że przypadkowe zdarzenia zewnętrzne powodują awarię.
- Wartość $k < 1$ wskazuje, że szybkość awarii zwiększa się wraz z upływem czasu.

Parametr λ można zinterpretować jako czas, po którym zginie $1 - \frac{1}{e} \approx 63,2\%$ osobników.

Rozkład Weibulla

https://github.com/przem85/bootcamp/blob/master/statistics/D03_Z11.ipynb

Zadanie

Proszę napisać skrypt w Pythonie, w którym:

- zdefiniujesz zmienną losową o rozkładzie Weibulla,
- narysujesz dla niej gęstość i dystrybuantę,
- wylosujesz próbkę i narysujesz histogram (na jednym rysunku),
- narysujesz kilka gęstości rozkładu Weibulla z różnymi parametrami,
- wylosujesz kilka próbek dla zmiennej losowej o rozkładzie Weibulla. (Czemu się od siebie różnią?),
- policzysz skośność i kurtozę dla zdefiniowanej zmiennej.

Rozkład wykładniczy

Rozkład wykładniczy modeluje się za pomocą:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{k}{\lambda}\lambda e^{-\lambda x} & \text{gdy } x \geq 0 \\ 0 & \text{gdy } x < 0 \end{cases},$$

gdzie $k > 0$ jest parametrem kształtu oraz $\lambda > 0$ jest parametrem skali.

Rozkład wykładniczy

https://github.com/przem85/bootcamp/blob/master/statistics/D03_Z12.ipynb

Zadanie

Proszę napisać skrypt w Pythonie, w którym:

- zdefiniujesz zmienną losową o rozkładzie wykładniczym,
- narysujesz dla niej gęstość i dystrybuantę,
- wylosujesz próbkę i narysujesz histogram (na jednym rysunku),
- narysujesz kilka gęstości rozkładu wykładniczego z różnymi parametrami,
- wylosujesz kilka próbek dla zmiennej losowej o rozkładzie wykładniczym. (Czemu się od siebie różnią?),
- policzysz skośność i kurtozę dla zdefiniowanej zmiennej.

Po co nam tyle rożnych rozkładów prawdopodobieństwa?