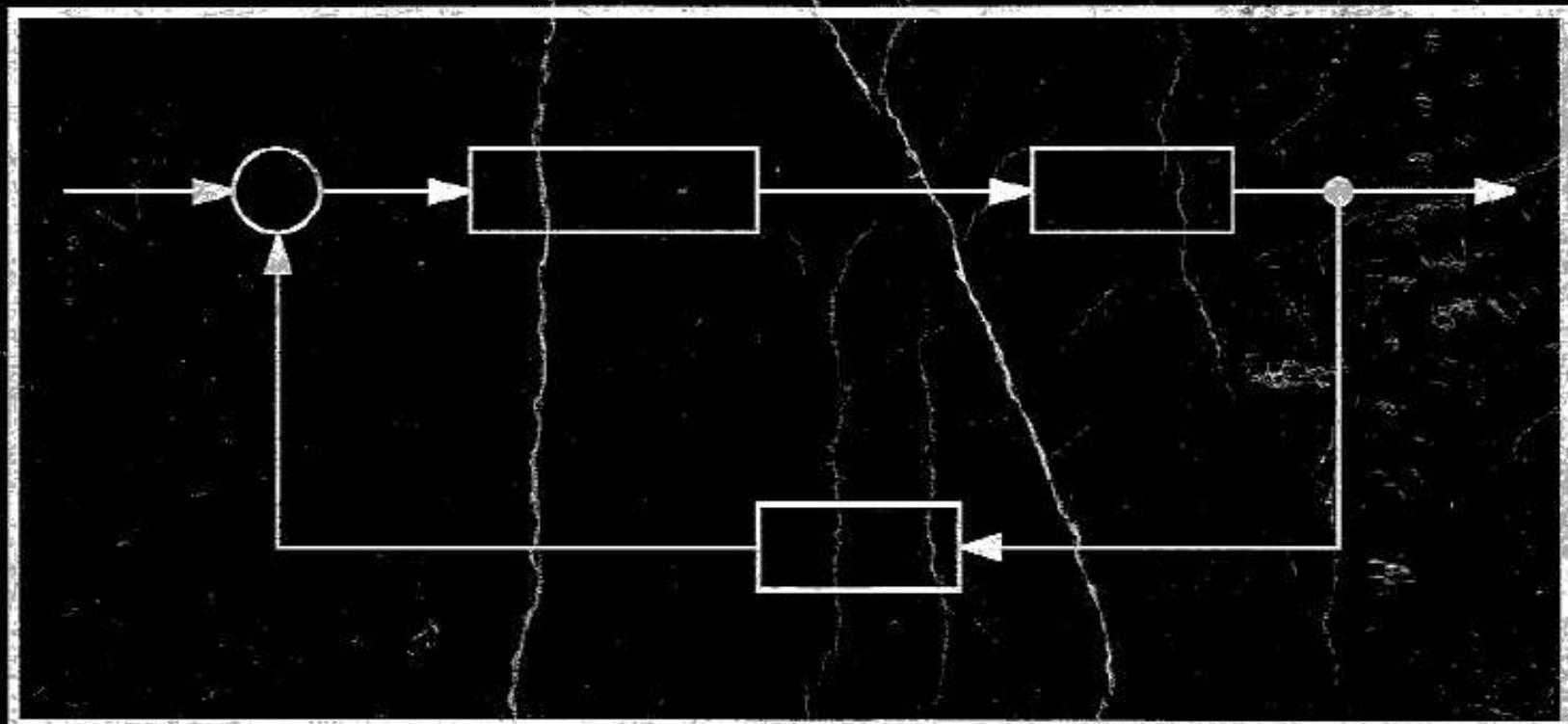


SISTEMAS DE CONTROLE E REALIMENTAÇÃO



CHARLES L. PHILLIPS
ROYCE D. HARBOR

 MAKRON Books



Sistemas de Controle e Realimentação

José que Patalozzi
Eng. Mecânica



EDITORIA AFILIADA



Sistemas de Controle e Realimentação

Charles L. Phillips

Professor de Engenharia Elétrica
Auburn University, Alabama

Royce D. Harbor

Professor de Ciências da Computação
University of West Florida

Tradução:

Luiz Fernando Ricardo

Engenheiro Eletricista (IPUC – MG)
Especialista em Engenharia Biomédica (UFPB – João Pessoa – PB)

Revisor Técnico:

Antônio PERTENCE Júnior

Engenheiro Eletrônico (IPUC – MG)
Coordenador Técnico do Cetel/MG

MAKRON Books do Brasil Editora Ltda.

Rua Tabapuã, 1.348, Itaim-Bibi

CEP 04533-004

(011) 829-8604 e (011) 820-6622

*Rio de Janeiro • Ribeirão Preto • Lisboa • Bogotá • Buenos Aires • Guatemala • Madri • México •
Nova York • Panamá • San Juan • Santiago*

*Auckland • Hamburg • Kuala Lumpur • London • Milan • Montreal • New Delhi • Paris •
Singapore • Sydney • Tokyo • Toronto*

Do original
Basic Feedback Control Systems – Second Edition

Copyright © 1990 Prentice Hall, Inc.
Copyright © 1997 MAKRON Books do Brasil Editora Ltda.

Todos os direitos para a língua portuguesa reservados pela MAKRON Books do Brasil
Editora Ltda.

Nenhuma parte desta publicação poderá ser reproduzida, guardada pelo sistema “retrieval” ou
transmitida de qualquer modo ou por qualquer outro meio, seja este eletrônico, mecânico, de
fotocópia, de gravação, ou outros, sem prévia autorização, por escrito, da Editora.

EDITOR: MILTON MIRA DE ASSUMPÇÃO FILHO

Produtora Editorial: Eugênia Pessotti
Produtor Gráfico: José Roberto Petroni

Editoração e fotolitos em alta resolução: JAG

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Phillips, Charles L.

Sistemas de controle e realimentação / Charles L. Phillips, Royce D. Harbor; tradução Luiz Fernando Ricardo; revisor técnico Antônio Pertence Jr. – São Paulo : Makron Books, 1996.

Título original: Basic feedback control systems. Bibliografia.
ISBN 85-346-0596-3

1. Realimentação – sistemas de controle I. Harbor, Royce D. II. Título

96-0597

CDD-629.83

Índices para catálogo sistemático:

1. “Feedback”: Engenharia de automação 629.83
2. Realimentação: Sistemas: Engenharia de automação 629.83
3. Sistemas de controle e realimentação: Engenharia de automação 629.83

Para Bobby, Ellen, Pat e Doeie (CLP)
Em memória de minha mãe.
Agnes L. Harbor, 1908 – 1987 (RDH)

Sumário

| | | |
|-------------------|---|----|
| Prefácio | XV | |
| Capítulo 1 | Introdução..... | 1 |
| 1.1 | O Problema de Controle | 3 |
| 1.2 | Exemplos de Sistemas de Controle | 6 |
| 1.3 | Uma Breve História do Controle | 10 |
| Capítulo 2 | Modelos de Sistemas Físicos | 14 |
| 2.1 | Modelamento de Sistemas..... | 14 |
| 2.2 | Circuitos Elétricos | 16 |
| 2.3 | Diagramas de Blocos e Gráficos de Fluxo de Sinais | 25 |
| 2.4 | Fórmula do Ganho de Mason | 29 |
| 2.5 | Sistemas Mecânicos de Translação | 35 |
| 2.6 | Sistemas Mecânicos Rotacionais..... | 40 |
| 2.7 | Sistemas Eletromecânicos | 43 |
| Gerador dc | 43 | |
| Servomotor | 45 | |

| | | |
|-------------------|---|------------|
| 2.8 | Sensores | 49 |
| | Posição | 49 |
| | Velocidade | 52 |
| | Aceleração | 53 |
| 2.9 | Um Sistema de Controle de Temperatura..... | 55 |
| 2.10 | Sistemas Análogos..... | 58 |
| 2.11 | Transformadores e Engrenagens | 60 |
| 2.12 | Um Sistema de Controle Robótico..... | 64 |
| 2.13 | Identificação do Sistema | 67 |
| 2.14 | Linearização..... | 67 |
| 2.15 | Resumo | 69 |
| | Problemas | 70 |
| Capítulo 3 | Modelo de Variáveis de Estado..... | 80 |
| 3.1 | Modelamento por Variáveis de Estado..... | 81 |
| 3.2 | Diagramas de Simulação | 85 |
| 3.3 | Solução das Equações de Estado..... | 93 |
| | Solução pela Transformada de Laplace | 93 |
| | Solução por Séries Infinitas | 98 |
| 3.4 | Funções de Transferência | 101 |
| 3.5 | Transformações de Similaridade..... | 103 |
| 3.6 | Simulação Digital | 111 |
| 3.7 | Software de Controle | 115 |
| 3.8 | Simulação Analógica | 119 |
| 3.9 | Resumo | 122 |
| | Problemas | 123 |
| Capítulo 4 | Resposta dos Sistemas | 134 |
| 4.1 | Resposta no Tempo dos Sistemas de Primeira Ordem..... | 135 |
| 4.2 | Resposta no Tempo dos Sistemas de Segunda Ordem..... | 140 |

| | | |
|-------------------|---|------------|
| 4.3 | Especificações da Resposta no Tempo | 144 |
| 4.4 | Resposta em Freqüência dos Sistemas | 150 |
| 4.5 | Respostas dos Sistemas de Ordem Superior | 157 |
| 4.6 | Modelos de Ordem Reduzida | 160 |
| 4.7 | Resumo | 162 |
| | Problemas | 162 |
| Capítulo 5 | Características dos Sistemas de Controle | 171 |
| 5.1 | Um Sistema de Controle em Malha Fechada | 172 |
| 5.2 | Estabilidade | 176 |
| 5.3 | Sensibilidade | 181 |
| 5.4 | Rejeição aos Distúrbios (Perturbações) | 185 |
| 5.5 | Precisão em Regime Estacionário | 191 |
| | Resposta ao Degrau | 193 |
| | Resposta à Rampa | 193 |
| | Entrada Parabólica | 195 |
| | Realimentação de Ganho Não-Unitário | 197 |
| | Erros da Entrada de Distúrbios | 199 |
| 5.6 | Resposta Transitória | 201 |
| 5.7 | Resposta em Freqüência de Malha Fechada | 203 |
| 5.8 | Resumo | 204 |
| | Problemas | 205 |
| Capítulo 6 | Análise de Estabilidade | 216 |
| 6.1 | O Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz | 218 |
| | Caso 1 | 220 |
| | Caso 2 | 220 |
| | Caso 3 | 222 |
| 6.2 | Raízes da Equação Característica | 229 |
| 6.3 | Estabilidade por Simulação | 229 |

| | | |
|-------------------|--|-------------|
| 6.4 | Resumo | 232 |
| | Problemas | 232 |
| Capítulo 7 | Análise e Projeto Utilizando o Lugar das Raízes | 242* |
| 7.1 | Princípios do Lugar das Raízes | 242 |
| 7.2 | Algumas Técnicas do Lugar das Raízes..... | 247 |
| 7.3 | Técnicas Adicionais para o Lugar das Raízes | 252 |
| 7.4 | Propriedades Adicionais do Lugar das Raízes | 268 |
| 7.5 | Outras Configurações | 272 |
| 7.6 | Projeto do Lugar das Raízes | 275 |
| 7.7 | Projeto de Avanço de Fase..... | 278 |
| 7.8 | Projeto Analítico de Avanço de Fase | 280 |
| 7.9 | Projeto de Atraso de Fase | 285 |
| 7.10 | Projeto PID | 290 |
| | Controladores P | 291 |
| | Controladores PI | 291 |
| | Controlador PD | 292 |
| | Controladores PID | 295 |
| 7.11 | Projeto Analítico PID..... | 295 |
| 7.12 | Lugar Complementar das Raízes..... | 298 |
| 7.13 | Implementação do Compensador | 301 |
| 7.14 | Software para o Lugar das Raízes | 305 |
| 7.15 | Resumo | 306 |
| | Problemas | 307 |
| Capítulo 8 | Análise da Resposta em Freqüência..... | 318 |
| 8.1 | Respostas em Freqüência | 319 |
| 8.2 | Diagramas de Bode..... | 325 |
| | Ganho Constante | 328 |
| | Pólos e Zeros na Origem | 328 |

| | |
|--|--------------|
| Pólos e Zeros Reais Diferentes de Zero..... | 329 |
| Diagramas de Fase | 334 |
| 8.3 Termos Adicionais | 340 |
| Pólos e Zeros Complexos | 340 |
| Atraso de Tempo Ideal | 344 |
| 8.4 O Critério de Nyquist | 348 |
| 8.5 Aplicação do Critério de Nyquist..... | 356 |
| 8.6 Estabilidade Relativa e o Diagrama de Bode | 370 |
| 8.7 Resposta em Freqüência de Malha Fechada | 385 |
| 8.8 Software para a Resposta em Freqüência..... | 393 |
| 8.9 Resumo | 394 |
| Problemas | 395 |
| Capítulo 9 Projeto da Resposta em Freqüência..... | 406 * |
| 9.1 Especificações do Sistema de Controle..... | 406 |
| Precisão em Regime Estacionário | 408 |
| Resposta Transitória | 408 |
| Estabilidade Relativa..... | 410 |
| Sensibilidade | 410 |
| Rejeição ao Distúrbio..... | 410 |
| Resumo..... | 412 |
| 9.2 Compensação | 412 |
| 9.3 Compensação de Ganho | 415 |
| 9.4 Compensação em Atraso de Fase | 419 |
| 9.5 Compensação em Avanço de Fase..... | 425 |
| 9.6 Projeto Analítico | 429 |
| 9.7 Compensação por Atraso-Avanço | 439 |
| 9.8 Projeto de um Controlador PID..... | 442 |
| O Controlador Proporcional | 443 |
| O Controlador PI..... | 443 |

| | |
|---|------------|
| O Controlador PD..... | 446 |
| O Controlador PID..... | 446 |
| 9.9 Projeto Analítico do Controlador PID..... | 448 |
| 9.10 Implementação do Controlador PID | 453 |
| 9.11 Software para o Projeto da Resposta em Freqüência..... | 456 |
| 9.12 Resumo | 456 |
| Problemas | 458 |
| Capítulo 10 Projeto de Controle Moderno..... | 466 |
| 10.1 Projeto de Atribuição de Pólos | 467 |
| 10.2 Fórmula de Ackermann | 470 |
| 10.3 Estimação de Estados | 476 |
| 10.4 Características do Sistema de Malha Fechada | 486 |
| 10.5 Estimadores de Ordem Reduzida | 489 |
| 10.6 Controlabilidade e Observabilidade | 496 |
| 10.7 Sistemas Reguladores com Entradas | 502 |
| Realimentação Total de Estados | 502 |
| Sistemas Rastreadores com Observadores | 506 |
| Rastreadores com Controladores PI | 507 |
| 10.8 Resumo | 512 |
| Problemas | 513 |
| Apêndice A Matrizes..... | 520 |
| Álgebra de Matrizes | 523 |
| Outras Relações..... | 524 |
| Apêndice B Equações de Projeto..... | 526 |
| Desenvolvimento..... | 526 |
| Projeto do Lugar das Raízes..... | 529 |
| Projeto da Resposta em Freqüência | 530 |

| | |
|--|------------|
| Compensadores PID | 531 |
| Apêndice C Transformadas de Laplace | 533 |
| C.1 Introdução | 533 |
| C.2 Teoremas da Transformada de Laplace | 540 |
| C.3 Equações Diferenciais e Funções de Transferência | 544 |
| Problemas | 547 |
| Apêndice D Transformada de Laplace | 552 |
| Índice Analítico | 554 |

Prefácio

Este livro destina-se primordialmente aos alunos do penúltimo e do último anos de Engenharia constituindo-se também em fonte de consulta e estudo para engenheiros com pouca ou nenhuma experiência em sistemas de controle. Para o máximo aproveitamento, o leitor deve ter alguma experiência em análise de sistemas lineares.

O livro é baseado no material de ensino da Universidade de Auburn e da Universidade do Oeste da Flórida, e pequenos cursos intensivos oferecidos nos EUA e na Europa. Os engenheiros que participaram dos cursos influenciaram grandemente o material e as descrições no livro, resultando em maior destaque dado aos aspectos práticos de análise e projeto. Enfatiza-se especialmente a compreensão das diferenças entre modelos matemáticos e os sistemas físicos que esses modelos representam. Embora uma verdadeira compreensão desta diferença possa ser adquirida apenas através da experiência, os estudantes devem entender que existe uma diferença.

O Capítulo 1 apresenta uma breve introdução e visão geral do texto. Alguns sistemas de controle também são descritos, de maneira a apresentar algumas aplicações práticas ao leitor.

Segue-se uma pequena história dos sistemas de controle e realimentação. Os modelos matemáticos de alguns componentes comuns que aparecem em sistemas de controle são desenvolvidos no Capítulo 2.

Os Capítulos de 3 a 10 cobrem a análise e o projeto de sistemas lineares analógicos; isto é, sistemas de controle que não contêm amostragem. O Capítulo 2 desenvolve o modelo da função de transferência dos sistemas lineares analógicos, e o Capítulo 3 desenvolve o modelo de variável de estado.

O Capítulo 4 trata das respostas típicas dos sistemas lineares analógicos, incluindo o conceito de resposta em freqüência. Uma vez que muitas das características de sistemas de

malha fechada não podem ser adequadamente explicadas sem referência à resposta em freqüência, este conceito é desenvolvido previamente no livro. Os autores acreditam que o conceito da resposta em freqüência iguala em importância o conceito da resposta no tempo.

Características importantes dos sistemas de controle são desenvolvidas no Capítulo 5. Algumas das aplicações dos sistemas de malha fechada são evidentes a partir dessas características. O importante conceito de estabilidade dos sistemas é desenvolvido em todo o Capítulo 6, bem como o critério de estabilidade de Routh-Hurwitz. O Capítulo 7 apresenta a análise e o projeto pelos procedimentos do lugar das raízes, os quais são basicamente procedimentos de resposta no tempo. De igual importância, a análise e o projeto pelos procedimentos de resposta em freqüência são apresentados nos Capítulos 8 e 9. O Capítulo 10 é dedicado ao projeto de sistemas modernos de controle. O projeto de localização de pólos é desenvolvido e o projeto de estimadores de estado é apresentado.

Há quatro apêndices. O primeiro apresenta uma revisão de matrizes, o segundo desenvolve uma rotina analítica de projeto que aplica os métodos do lugar das raízes e diagramas de Bode. O terceiro apêndice faz uma revisão da transformada de Laplace, e o quarto traz as tabelas das transformadas de Laplace e transformadas "Z".

Houve um esforço no sentido de que os muitos exemplos dados se limitassem a ilustrar apenas um único conceito. Percebe-se que, utilizando essa abordagem, muitas características óbvias e importantes dos sistemas destes exemplos não são mencionadas; entretanto, visto que este é um livro para estudantes que estão se iniciando no controle e realimentação, tornar os exemplos mais complexos tenderia a causar maior confusão.

Em geral, o material de cada capítulo está organizado de maneira tal que a parte mais avançada é colocada no final do capítulo. Esta localização permite a omissão do material pelo professor que desejar apresentar um curso menos aprofundado.

O livro pode ser estudado em sua totalidade no curso semestral de controle analógico (Capítulos 1 a 10). O material pode também ser utilizado em um curso de menor duração, omitindo-se parte dele.

Desejamos agradecer a muitos colegas, estudantes graduados e membros da administração da Universidade de Auburn e Universidade do Oeste da Flórida que contribuíram para a realização deste livro. Somos especialmente gratos ao Professor J. David Irwin, chefe do departamento de Engenharia Elétrica da Universidade de Auburn, e ao Professor T. F. Elbert, presidente do departamento de Ciências e Sistemas da Universidade do Oeste da Flórida, por sua ajuda e encorajamento. Finalmente, expressamos nossa gratidão e amor aos nossos familiares, sem os quais esta tarefa não seria possível.

Charles L. Phillips

Royce D. Harbor



Capítulo 1

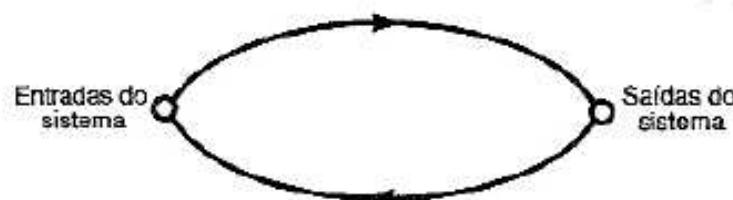
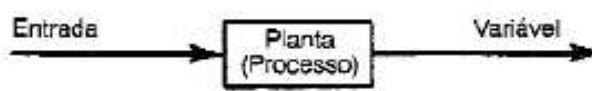
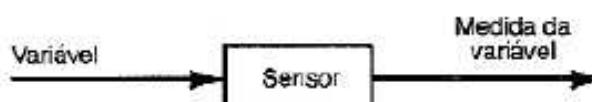
Introdução

Este livro aborda a questão da análise e projeto de sistemas de controle em malha fechada. Na análise dos sistemas de malha fechada, temos o sistema, e desejamos determinar suas características ou comportamento. No projeto, especificamos as características ou comportamento desejados e devemos configurar ou sintetizar o sistema, de forma que ele exiba as qualidades procuradas.

Definimos um sistema de malha fechada como aquele no qual os sinais aplicados ao sistema (entradas) são determinados, ao menos em parte, pelo conhecimento das respostas do sistema (saídas). Portanto, as entradas do sistema são uma função de suas saídas e as saídas, função das entradas. A Figura 1.1 mostra um diagrama em que são representadas as relações funcionais em um sistema de malha fechada.

Um exemplo de sistema de malha fechada é o controle de temperatura em residências. Neste sistema, desejamos manter, automaticamente, a temperatura do ambiente interno em determinado valor. Para controlar qualquer variável física, a qual normalmente chamamos *sinal*, devemos conhecer o valor desta variável, isto é, devemos medir esta variável. O sistema de medição desta variável é chamado *sensor*, e está representado na Figura 1.2. No sistema de controle da temperatura em uma residência, o sensor é um termostato, que indica uma temperatura baixa pelo fechamento de um contato elétrico e uma temperatura alta pela abertura do mesmo contato. Definimos a *planta* de um sistema de controle como aquela parte do sistema a ser controlada. Admitimos neste exemplo que há um aumento na temperatura quando é ativado o fornecimento de gás. Portanto, a entrada da planta é um sinal elétrico que ativa o fornecimento, e a saída da planta é a temperatura real da área. A planta é representada na Figura 1.2.

No sistema de aquecimento residencial, a saída de cada um dos sistemas está conectada à entrada do outro, para formar a malha fechada. Entretanto, na maioria dos sistemas de controle em malha fechada, é necessário conectar um terceiro sistema à malha para se obter características satisfatórias para o sistema total. Este sistema adicional é chamado *compensador*, *controlador* ou simplesmente *filtro*.

**Figura 1.1** Sistema com malha fechada.**Figura 1.2** Componentes de um sistema de controle.

A forma usual do sistema de controle em malha fechada única é dada na Figura 1.3. A entrada do sistema é um sinal de referência e, normalmente, desejamos que a saída do sistema seja igual à entrada. No controle de temperatura residencial, esta entrada é o ajuste do termostato. Se desejamos mudar a temperatura, mudamos a entrada do sistema. A saída do sistema é medida por um sensor, e este valor medido é comparado (subtraído) com a entrada. Este sinal de diferença é chamado *sinal de erro* ou simplesmente *erro*. Se a saída é igual à entrada, esta diferença é zero, e nenhum sinal alcança a planta. Portanto, a saída permanece em seu valor corrente. Se o erro não é zero, em um sistema adequadamente projetado, o sinal de erro causará uma resposta na planta de tal forma que a amplitude do erro seja reduzida. O compensador é um filtro para o sinal de erro, uma vez que a operação satisfatória normalmente não ocorre se este sinal for aplicado diretamente à planta.

Os sistemas de controle são, às vezes, divididos em duas classes. Se o objeto do sistema de controle é manter uma variável física em algum valor constante na presença de distúrbios, chamamos a este sistema de *regulador*. Um exemplo de sistema de controle regulador é o controle de velocidade dos geradores de energia em corrente alternada (C.A) nas companhias de fornecimento de energia elétrica. O propósito deste sistema de controle é manter a velocidade dos geradores em um valor constante, o que resulta em uma tensão gerada com a freqüência de 60 Hz na presença de variação da potência elétrica das cargas. Outro exemplo de sistema de controle regulador é o sistema biológico, que mantém a temperatura do corpo humano em aproximadamente 36,5°C em ambientes que normalmente tenham temperaturas diferentes.

A segunda classe dos sistemas de controle é o *servomecanismo*. Embora este termo tenha sido originalmente empregado para um sistema que controlava um movimento ou posição mecânica, atualmente é usado com freqüência para descrever um sistema de controle no qual uma variável física deve seguir ou acompanhar alguma função do tempo desejada. Um exemplo é o sistema de aterrissagem automática de aeronaves, no qual o avião segue uma rampa em direção ao ponto de toque desejado. Um segundo exemplo são os sistemas de controle de um robô, em que suas mãos devem seguir algum caminho desejado no espaço.

Até aqui, apresentamos uma discussão simplificada de um sistema de controle em malha fechada. O restante do livro aprofunda esta descrição. Para se desenvolver a análise matemática ou o projeto, torna-se necessário que tenhamos uma relação matemática entre as entradas e saídas de cada um dos blocos do sistema de controle da Figura 1.3.

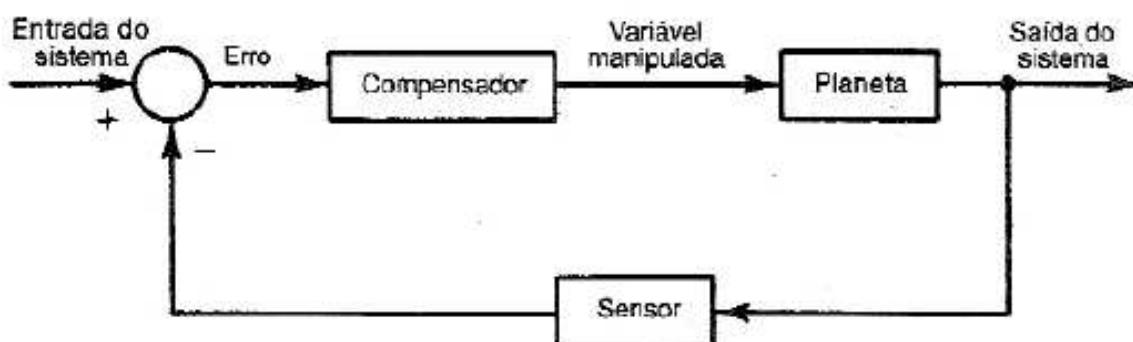


Figura 1.3 Sistema de controle em malha fechada.

O propósito do Capítulo 2 é desenvolver estas relações funcionais para alguns sistemas físicos comuns. O Capítulo 3 apresenta um método diferente de expressar estas relações funcionais.

Examinamos as respostas típicas que ocorrem nos sistemas de controle no Capítulo 4 e as especificações dos sistemas no Capítulo 5. O Capítulo 6 apresenta conceitos e técnicas de análise para a estabilidade dos sistemas. O lugar das raízes, um dos principais métodos de análise e projeto, é desenvolvido no Capítulo 7. Os Capítulos 8 e 9 apresentam o segundo método principal de análise e projeto, a resposta em freqüência.

Nos Capítulos 2 a 9 assumimos que nenhum sinal aparece na forma amostrada e em particular que nenhum computador digital é usado no sistema de controle, ou seja, os sistemas considerados nestes capítulos são chamados sistemas *analógicos* ou sistemas de *dados contínuos*. Se um computador digital for usado no controle destes sistemas, eles serão chamados sistemas *digitais* de controle. O Capítulo 10 apresenta uma introdução a um método diferente de projeto dos sistemas analógicos de controle, que é classificado como um procedimento de controle moderno.

Nos Capítulos 2 a 10, assumimos que todos os sistemas são lineares (o conceito de linearidade é definido no Capítulo 2). Entretanto, os sistemas físicos não são lineares e, em geral, os sistemas não-lineares são de difícil análise ou projeto. Ao longo do livro discutimos os problemas da representação imprecisa das relações funcionais que são usadas para modelar os sistemas físicos. Contudo, em alguns sistemas, o modelo linear não é suficientemente preciso, e as não-linearidades devem ser adicionadas ao modelo para que suas relações funcionais se tornem mais exatas.

Na análise de sistemas lineares, usamos as transformadas de Laplace. O Apêndice C apresenta os conceitos e procedimentos das transformadas de Laplace.

1.1 O Problema de Controle

O problema de controle pode ser estabelecido como se segue. Um sistema físico ou processo deve ser precisamente controlado através de uma operação em malha fechada ou de realimen-

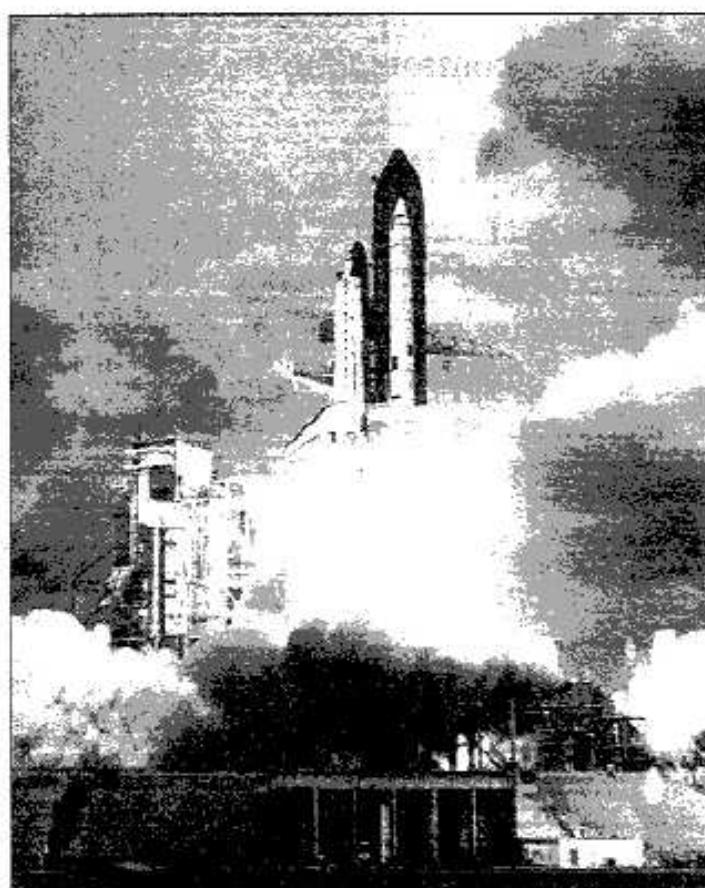
tação. Uma variável de saída, chamada resposta, é ajustada conforme determinação do sinal de erro. Este sinal é a diferença entre a resposta do sistema, medida por um sensor, e o sinal de referência, que representa a resposta desejada.

Geralmente, é necessário um controlador ou compensador para filtrar o sinal de erro de forma que certos critérios, ou especificações, sejam satisfeitos. Estes critérios podem envolver as seguintes características (porém não estão limitados a elas):

1. Rejeição a distúrbios.
2. Erros de regime estacionário.
3. Características da resposta transitória.
4. Sensibilidade às mudanças de parâmetros da planta.

Resolver o problema de controle, geralmente envolve:

1. Escolha de sensores para medida da saída da planta.
2. Escolha dos atuadores que irão agir sobre a planta.
3. Desenvolvimento de equações (modelos) da planta, dos atuadores e dos sensores.
4. Projeto do controlador baseado nos modelos desenvolvidos e critérios de controle.
5. Avaliar o projeto analiticamente, por simulação, e, finalmente, pelo teste do sistema físico.
6. Se os testes físicos não forem satisfatórios, repetir estes estágios.



Plataforma de lançamento espacial da NASA. (Cortesia NASA.)

Devido às imprecisões nos modelos, os testes nos sistemas físicos de controle normalmente não são satisfatórios. Os engenheiros de controle devem então repetir o procedimento de projeto, usando todas as ferramentas disponíveis para melhorar o sistema. Geralmente a intuição, desenvolvida ao longo das experimentações com os sistemas físicos, torna-se um importante passo no projeto.

As relações entre a análise matemática e os procedimentos do projeto de sistemas físicos são mostradas na Figura 1.4.¹ Neste texto, todas as fases mostradas na figura são discutidas, mas a ênfase está necessariamente na parte conceitual dos procedimentos – a aplicação dos conceitos matemáticos aos modelos. Nas situações práticas de projeto, entretanto, as principais dificuldades estão na formulação do problema matematicamente e na transposição da solução matemática de volta ao mundo físico. Como afirmamos anteriormente, muitas repetições dos procedimentos mostrados na Figura 1.4 são normalmente necessárias nas situações práticas.

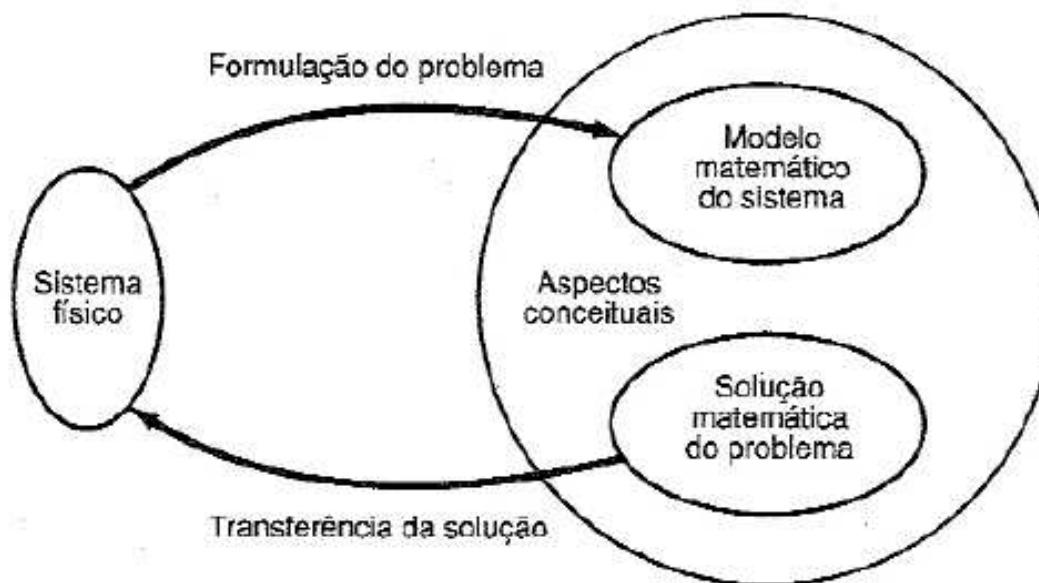


Figura 1.4 Solução matemática de problemas físicos.

Dependendo do sistema e da experiência do projetista, alguns dos passos listados podem ser omitidos. Em particular, muitos sistemas de controle são implementados pela escolha de formas padrão de controladores e seus parâmetros determinados experimentalmente seguindo passo a passo um procedimento específico com o sistema físico; não se desenvolve nenhum modelo matemático. Este procedimento funciona muito bem em alguns tipos de sistema de controle, entretanto, em outros, isto não ocorre. Por exemplo, o sistema de controle de um veículo espacial obviamente não pode ser projetado desta maneira; o sistema deve responder satisfatoriamente à primeira vez em que for acionado.

1 GARDNER W. A. *Introduction to Random Processes*. Nova Iorque: Macmillan, 1986.

Neste livro, os procedimentos matemáticos são desenvolvidos para a análise e projeto dos sistemas de controle. As técnicas podem ou não ter valor em um caso particular de controle. Entretanto, controladores padrão são utilizados nos desenvolvimentos deste livro. Assim, os procedimentos analíticos desenvolvem os conceitos de projeto dos sistemas de controle e indicam a aplicação de cada um dos controladores padrão.

1.2 Exemplos de Sistemas de Controle

Nesta seção serão descritos alguns sistemas de controle, de forma a familiarizar o leitor com estes tipos de sistemas. Além disso, os vários componentes físicos que formam os sistemas de controle se tornarão mais evidentes.

O primeiro exemplo de sistema de controle em malha fechada é o caso de um piloto aterrissando uma aeronave. O piloto tem três tarefas básicas. Primeiro, a aeronave deve aproximar-se do campo de pouso ao longo da linha central da pista. Esta aproximação é mostrada na Figura 1.5. Também é mostrada a segunda tarefa, que é a manutenção da aeronave na correta inclinação de descida. A terceira tarefa é manter a velocidade correta.

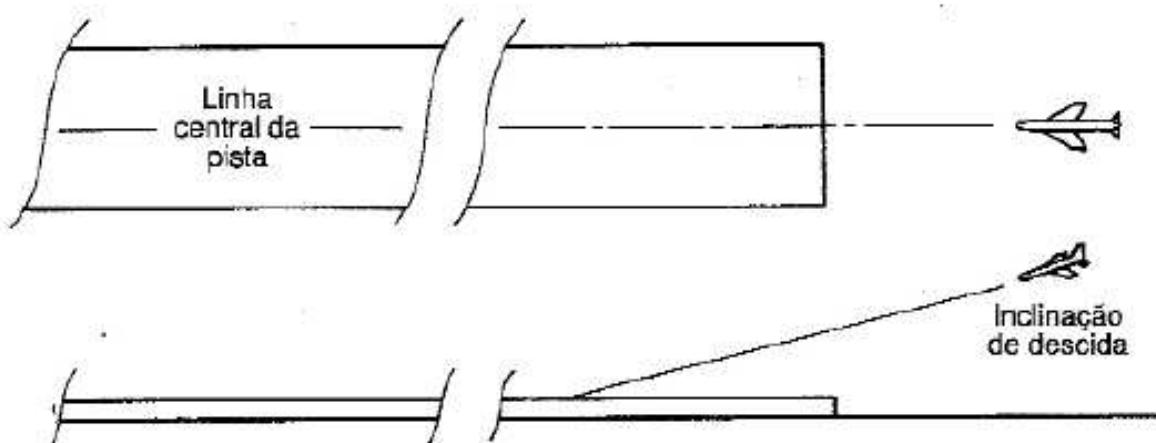


Figura 1.5 Aterrissagem.

Consideraremos apenas o problema de manter o avião na direção da linha central da pista (controlando a posição lateral do mesmo). A Figura 1.6 apresenta um diagrama em blocos do sistema. Assumimos que a posição lateral do avião é controlada pelos ailerons, as superfícies de controle situadas na parte posterior da extremidade de cada asa. Na realidade, o leme é também usado para controlar a posição lateral, mas, para simplificar, consideraremos apenas os ailerons.

Estes, juntamente com os mecanismos para variação do seu ângulo, formam o atuador do sistema de controle.

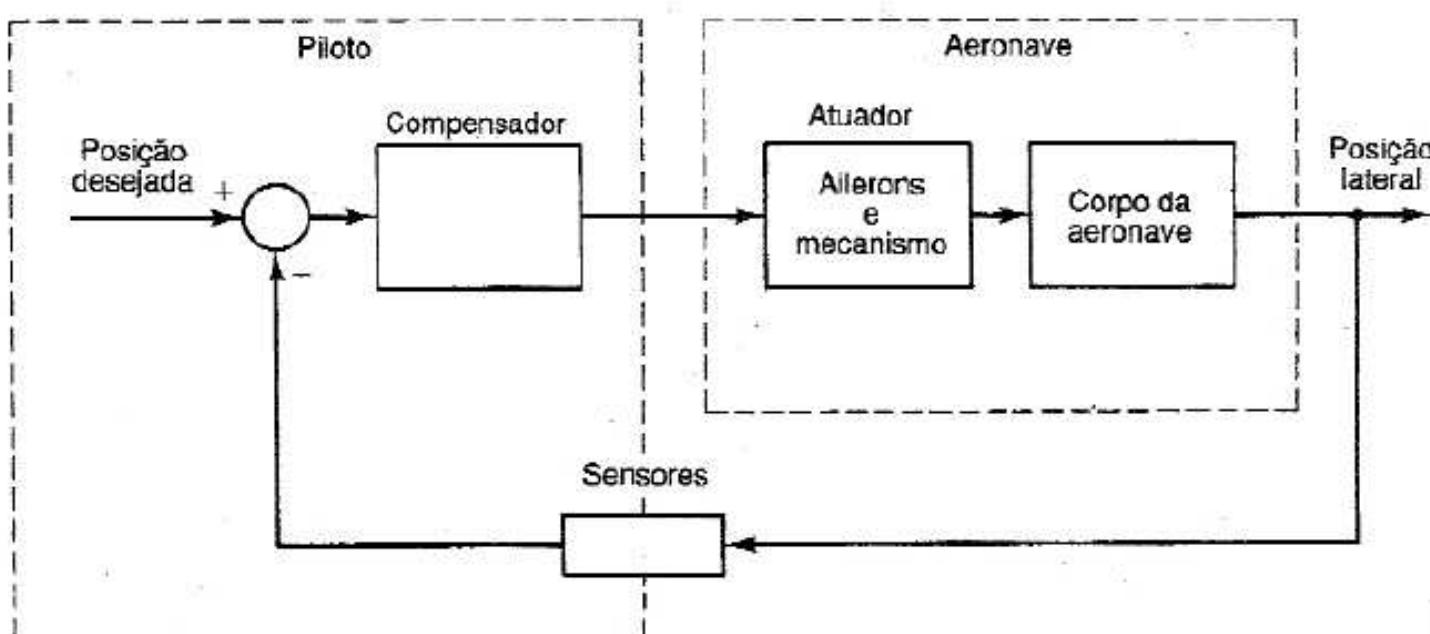


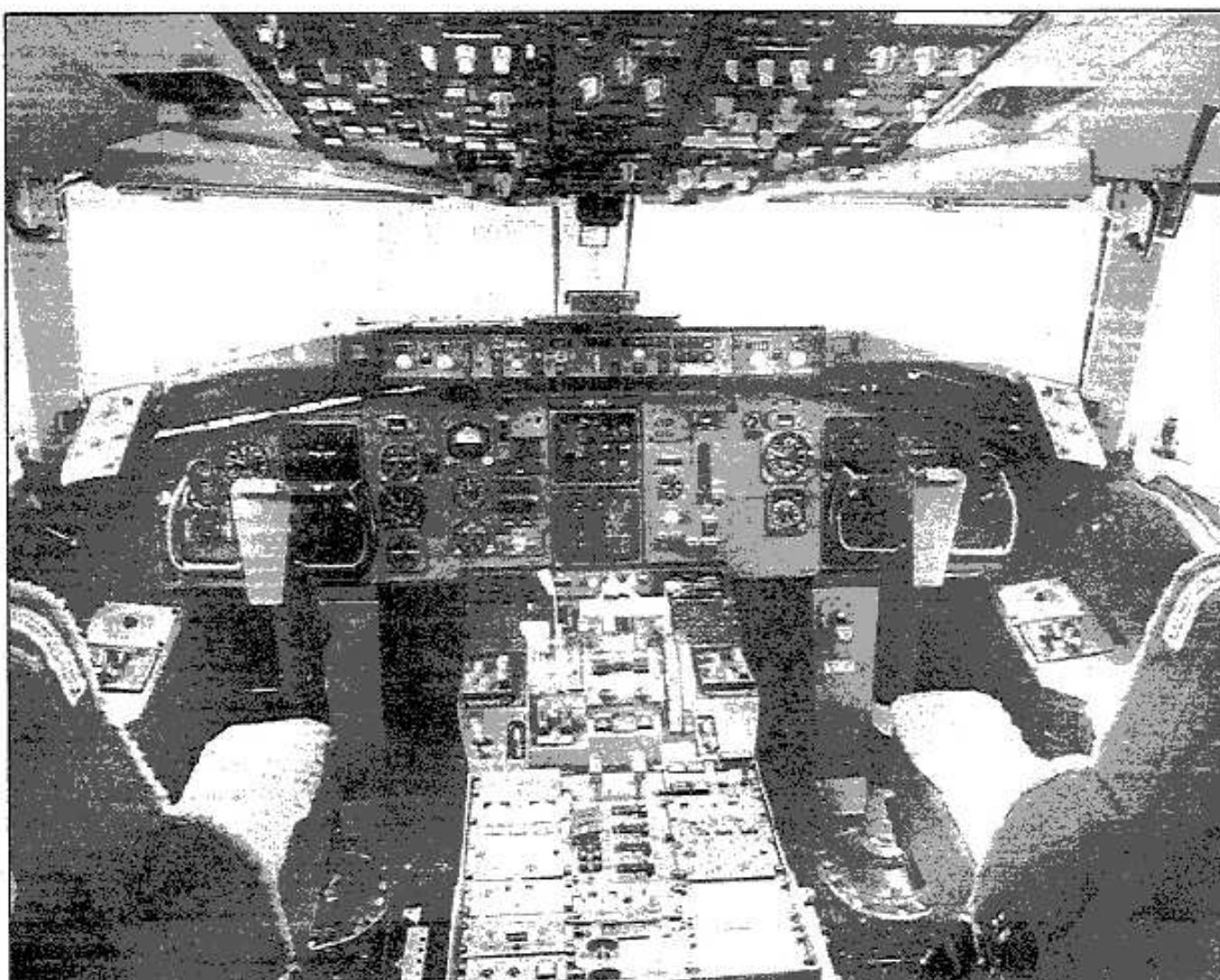
Figura 1.6 Sistema de aterrissagem do avião.

Neste sistema, o piloto usa um número de sensores em conjunto com alguns instrumentos de leitura da cabine para determinar a posição lateral da aeronave. Além disso, normalmente o piloto pode ver a pista, o que lhe dá uma indicação de sua posição em relação a ela. Portanto, o piloto tem indicações da posição lateral da aeronave e também sabe a posição desejada. Ele manipula os ailerons no esforço de trazer o avião à posição lateral necessária. Para um sistema de controle, chamamos a diferença entre a posição desejada e a posição real de *erro do sistema*.

Neste sistema, a função de compensação é exercida pelo piloto, que também realiza parte da função de sensoramento e manipulação das superfícies de controle. Dadas a posição e a altitude da aeronave, o piloto manipula os ailerons de maneira a tornar o erro do sistema igual a zero. A maneira como ele conduz o erro a zero é determinada por sua habilidade. Por exemplo, os ailerons seriam manipulados diferentemente para corrigir o erro em uma grande aeronave ou em um pequeno avião monomotor. Portanto, podemos dizer que a função de compensação é realizada no cérebro do piloto e é o resultado de intenso treinamento, o que garante que esta mesma compensação seja realizada sob as mesmas condições para cada aterrissagem.

Suponha agora que consideremos um sistema de aterrissagem automática de aeronaves no qual o pouso não depende do piloto. Por exemplo, um grande avião de passageiros que pode ser aterrissado automaticamente em muitos aeroportos. Na realidade, um sistema bem mais complexo é usado para aterrissagem de aviões de carreira na aeronáutica.²

² WIGGINTON R. F. "Evaluation of OPS-II Operational Program for the Automatic Carrier Landing System", Naval Electronic Systems Test and Evaluation Facility, Saint Inigoes, MD, 1971.



Cabine de voo para dois tripulantes de um Boeing 757. Os equipamentos eletrônicos incluem um sistema de controle automático de voo. (Cortesia de Boeing Commercial Airplane Group.)

O diagrama em bloco da Figura 1.6 também se aplica aos sistemas automáticos de pouso. Entretanto, os ailerons são manipulados pelo piloto automático (que também é um sistema de controle em malha fechada). O sensor é normalmente um radar que determina a posição do avião em relação à linha central da pista e a função de compensação é realizada em um computador digital. O computador resolve repetidas vezes um conjunto de equações para determinar os comandos ao piloto automático do avião. Nos aviões da força aérea, o compensador é do tipo padrão (chamado compensador PID), que será estudado em detalhes neste livro. Este é provavelmente o tipo mais comum de compensador usado nos sistemas de controle e realimentação.

Finalmente, podemos citar um grande número de atividades que envolvem o homem como parte de um sistema de controle em malha fechada. Quando dirigimos um carro, estamos constantemente observando a posição e direção de deslocamento do carro. Se concluímos que não são satisfatórias, tomamos uma ação para corrigi-las; isto é, ações são tomadas para corrigir o erro detectado no sistema. Um segundo exemplo bem simples é a tarefa de desenhar. Observamos continuamente a posição da ponta do lápis, atentos à mínima diferença entre a posição real da ponta e a posição desejada. [Se você duvida de que esta seja uma forma de controle com realimentação, tente desenhar com os olhos fechados (isto é, o

sistema em malha aberta ou sem realimentação.)] Outro exemplo é o de apanhar uma bola, que envolve um controle em malha fechada da posição das mãos. Saberemos o efeito desta ação no caso de abrirmos a malha (desviando o olhar para algum ponto) antes que a bola chegue até nossas mãos.

Como já foi mencionado, um exemplo de sistema de controle biológico é o de controle da temperatura do corpo humano. Este sistema tenta manter a temperatura em um valor constante. Em geral, o ambiente tende a alterar a temperatura corpórea do valor desejado. O corpo responde ao erro detectado através da transpiração, pelo acréscimo ou decréscimo do fluxo sanguíneo, tremores, e assim por diante. Este sistema de controle tem uma característica que os sistemas projetados pelo homem normalmente não têm: ele geralmente opera de maneira satisfatória por mais de setenta anos. Já uma outra característica do sistema de controle da temperatura humana normalmente está presente nos sistemas que projetamos: se a amplitude do erro torna-se muito grande, o sistema falha.

O segundo sistema de controle que descreveremos nesta seção é o controle da temperatura de uma câmara de teste ambiental.³ Esta câmara é usada pelos cientistas para o estudo dos efeitos da temperatura no crescimento de plantas. Os componentes deste sistema são mostrados no diagrama em blocos da Figura 1.7. A temperatura da câmara é detectada por um termistor, que é um resistor sensível à temperatura. Assim, a temperatura é detectada pela medição da resistência do termistor. Para maior precisão, esta resistência é medida usando uma ponte de Wheatstone.⁴ O sinal de saída da ponte resistiva é da ordem de milivolts; portanto, é necessário um amplificador de tensão para elevar este sinal a um nível adequado. Muitos transdutores têm saídas de tensão muito baixa; assim, os sistemas sensores freqüentemente incluem amplificadores de tensão.

A temperatura desejada da câmara é representada também por uma tensão. A diferença entre a temperatura desejada e a real (ambas representadas por uma tensão) é o sinal de erro. Um condicionador de ar tenta manter a temperatura interna da câmara em um valor mais baixo que o desejado. A tensão aplicada ao aquecedor elétrico na Figura 1.7 é então usada para elevar a temperatura para o valor desejado.

Portanto, um aumento na tensão aumenta a temperatura, e um decréscimo da tensão diminui a temperatura. A tensão do aquecedor é controlada por um triac, que é uma chave eletrônica de estado sólido. O triac é controlado por um circuito que converte o sinal de erro em pulsos temporizados aplicados ao gate.

O compensador para este sistema de controle é do tipo PID, como no caso do sistema automático de aterrissagem de aeronaves descrito anteriormente. No sistema físico, a compensação PID é realizada em um computador digital, porém esta função pode também ser implementada com um circuito de resistores, capacitores e amplificadores operacionais, e será estudada no Capítulo 9.

³ WHEELER R. E. "A Digital Control System for Plant Growth Chambers", M.S. Thesis, Auburn University, Auburn: AL, 1980.

⁴ IRWIN J. D. *Basic Engineering Circuit Analysis*. 3^a ed., Nova Iorque: Macmillan, 1990.

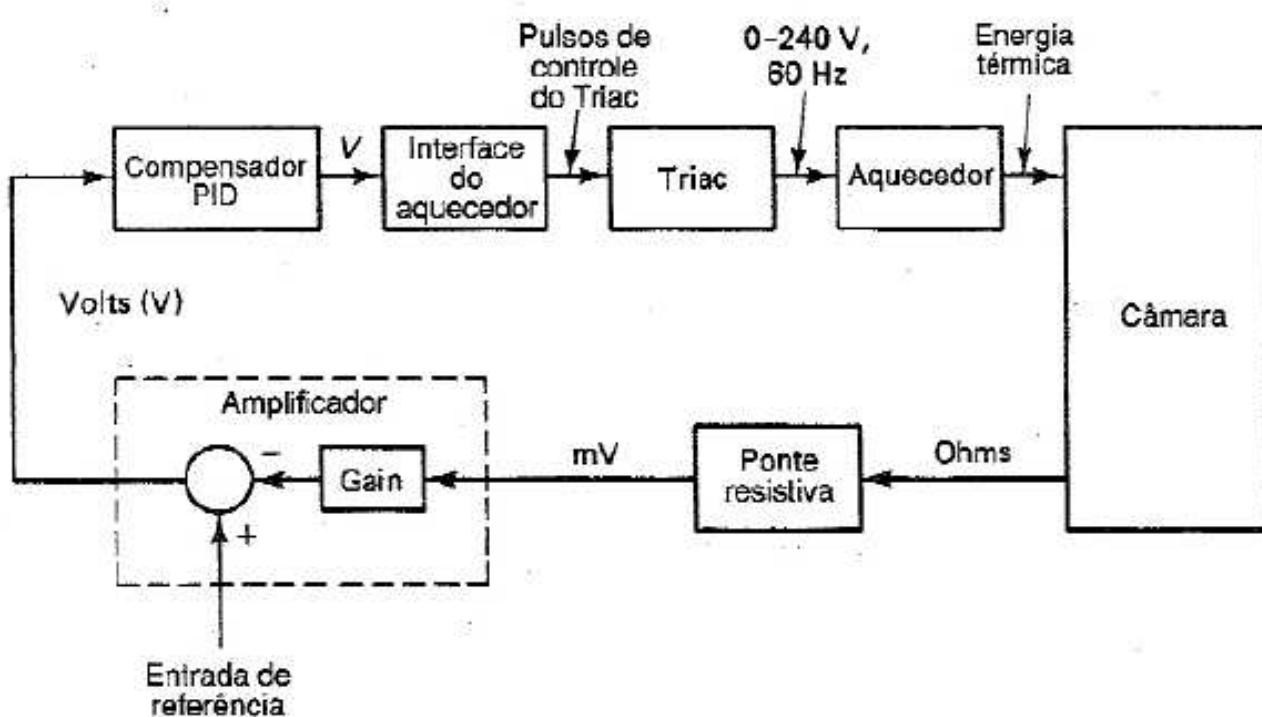


Figura 1.7 Diagrama dos elementos do sistema de controle de temperatura da câmara.

1.3 Uma Breve História do Controle

Esta seção apresenta uma pequena história do controle automático realimentado [5-7].^{5,6,7} O termo “automático” implica o controle realizado sem a intervenção humana. O termo “realimentado” parece ter sido usado pela primeira vez em 1920 pelo pessoal do Bell Telephone Laboratories.

Os primeiros dispositivos de realimentação incluem um relógio de água do segundo século a.C. O tempo era medido com base na água que caía de um reservatório a uma taxa constante através de um orifício. Para garantir a taxa constante das gotas, era necessário manter um nível constante de água no reservatório; algum tipo de controle automático seria necessário para se conseguir isto. É interessante notar que ainda hoje projetamos sistemas de controle para manter constante o nível de líquidos em um vaso.

A Figura 1.8 apresenta uma versão do relógio de água. Uma válvula flutuante na parte superior do vaso age como sensor e atuador do sistema de controle e mantém o nível de água do vaso constante.

A válvula fecha quando o nível da água atinge um valor desejado. Se o nível estiver abaixo do valor predeterminado, a válvula se abre, elevando o nível no tanque. Note a similaridade deste controle com aqueles normalmente usados nas descargas dos banheiros. A água que cai é medida por acumulação em um vaso que possui uma escala. O nível de água da

5 EL-HAWARY M. E. *Control System Engineering*. Reston, VA: Reston Publishing Company, 1984.

6 BLACKWELL, W. A. & GRIGSBY, L. L. *Introductory Network Theory*. Boston, MA: PWS Engineering, 1985.

7 “Centennial Hall of Fame”, *IEEE Spectrum*, abril de 1984.

uma indicação precisa do tempo transcorrido desde a última vez que o vaso foi esvaziado. Na verdade, a acumulação de água no vaso inferior é uma forma de integração (somatório). Este mesmo procedimento é algumas vezes utilizado para realizar a integração numérica em computadores digitais. Esta técnica, utilizada há quatro mil anos, é ainda útil aos computadores dos dias de hoje. É importante notar a dificuldade que temos em idealizar a utilidade de procedimentos matemáticos novos.

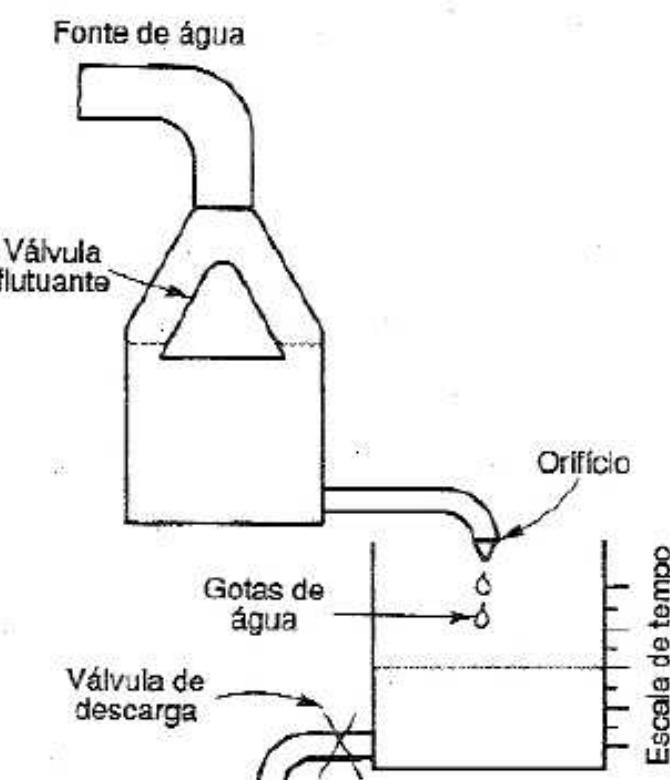


Figura 1.8 Relógio de água simplificado.

Cornelis Drebbel (1572-1633), um mecânico e químico alemão, inventou um regulador para manter constante a temperatura de uma câmara, a qual, acredita-se, teria sido usada tanto como incubadora de frangos como estufa de uso geral para seus experimentos químicos. O regulador era baseado em um dispositivo que permitia o vazamento de ar quente da câmara, uma vez que a temperatura desejada fosse alcançada. Este regulador pode ser comparado ao sistema de aquecimento doméstico usual, em que o ar quente circula pelo ambiente quando a temperatura cai abaixo de um valor desejado.

O americano William Henry (1729-1786), de Lancaster, Pennsylvania, inventou um regulador de temperatura que utilizava uma válvula manipulada automaticamente para controlar o gás de combustão e, portanto, a temperatura. O sensor de temperatura e o atuador eram baseados na pressão exercida pela expansão do ar aquecido. A expansão do ar tenderia a fechar a válvula, o que diminuiria a taxa de combustão, enquanto a contração do ar tenderia a abrir a válvula.

Os avanços relativos aos reguladores a válvula flutuante para caldeiras a vapor foram feitos por muitos, incluindo James Brindley, em 1758, Sutton Thomas Wood, em 1784, e o russo I. I. Polzumov, em 1763. Os avanços em reguladores de pressão para máquinas a vapor foram dados por Denis Papin (1674-1712), Robert Delap, em 1799, e também por Matthew Murray, em 1799.

A principal invenção no controle de velocidade, tanto para os moinhos de vento quanto para as máquinas a vapor, foi o governador centrífugo de Thomas Mead, em 1787. Mathew Boulton e James Watt inventaram o tipo de governador centrífugo que aparece na Figura 1.9 em 1788. Um aumento na velocidade da máquina a vapor movia as esferas para fora devido à força centrífuga, que, em consequência, movia o mecanismo para cima. Este movimento operava uma válvula na linha de vapor para redução do fluxo, que então diminuía a velocidade da máquina. O decréscimo da velocidade do motor a vapor aumentava o fluxo de vapor, que, por sua vez, aumentava a velocidade da máquina.

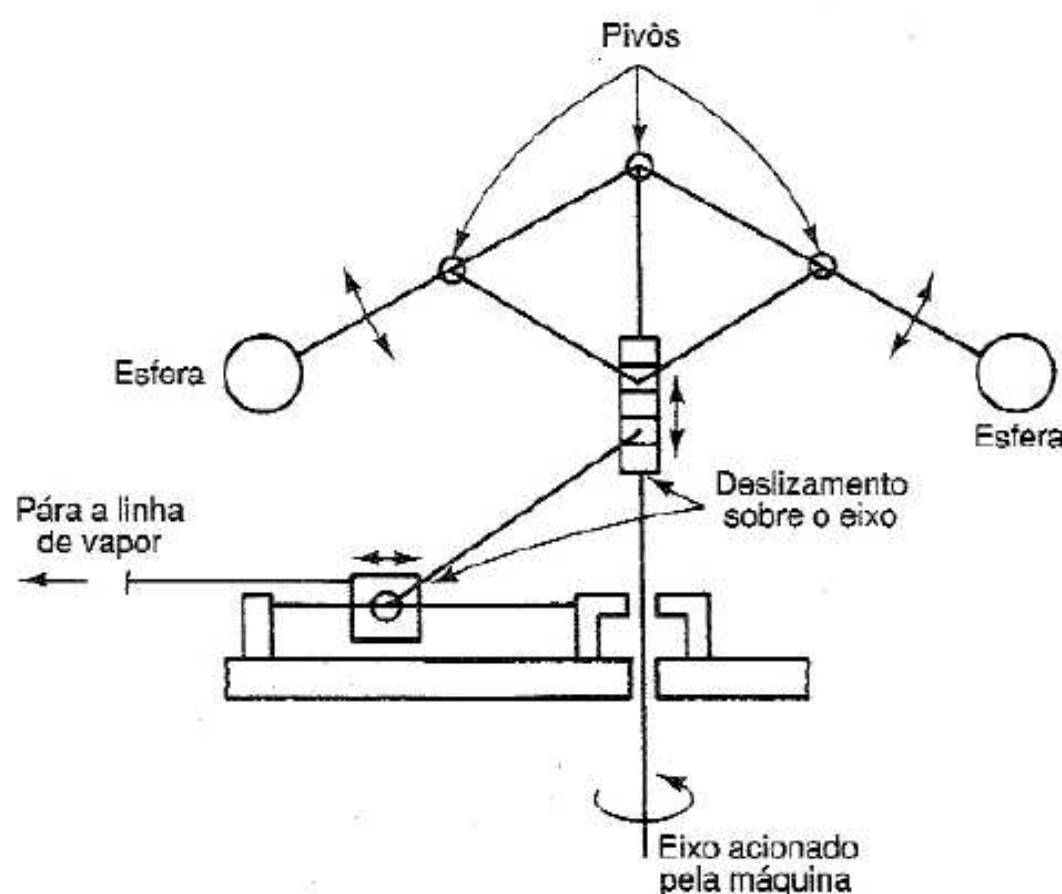


Figura 1.9 Governador da máquina a vapor.

Os dispositivos citados funcionavam aproximadamente como descrevemos acima; entretanto, em muitos casos, o regulador não mantinha a variável do sistema em um valor constante, permitindo uma pequena oscilação em torno do valor desejado. Para eliminar esta instabilidade, seria necessário modelar matematicamente os dispositivos físicos; isto é, seriam necessárias equações matemáticas cujas soluções descrevessem a operação dos dispositivos. Tais necessidades conduziram ao modelamento matemático, análise e projeto utilizados nos dias de hoje.

Os colaboradores da matemática usada no modelamento, na análise e no projeto dos sistemas de controle são inúmeros. Pierre Simon Laplace (1749-1827) idealizou a transformada de Laplace, a base da maioria dos procedimentos de análise e projeto dos sistemas. Outros, como Sir Isaac Newton (1642-1727), contribuíram para o modelamento matemático e análise; Brook Taylor, para a análise matemática (série de Taylor); James Clerk Maxwell (1831-1879), para o modelamento matemático e análise; Edward John Routh (1831-1907), com o critério de Routh; Oliver Heaviside (1850-1925), para a análise matemática; Charles P. Steinmetz (1865-1923), para a análise da resposta em frequência usando números complexos; Harry Nyquist (1889-1976), com o critério de Nyquist; Hendrik W. Bode (1905-1982), com o diagrama de Bode; Harold S. Black (1898-1981), com os amplificadores de realimentação negativa; John Von Neumann (1903-1957), com a operação básica de um computador digital. Esta lista não é de modo algum exaustiva. Ela não inclui todos os colaboradores mais importantes nem as contribuições mais expressivas. Nossa intenção é dar ao leitor uma idéia dos colaboradores na área do controle automático e a época em que trabalharam. Uma lista contendo os colaboradores atuais seria bem mais longa e bastante discutível.

Capítulo 2

Modelos de Sistemas Físicos

Neste capítulo, trataremos da obtenção dos modelos matemáticos de sistemas físicos. Com o termo *modelo matemático*, definimos as relações matemáticas entre a saída de um sistema e sua entrada. Talvez um dos mais simples modelos de sistema físico seja aquele que se conhece por lei de OHM (que poderia ser chamado mais apropriadamente de modelo de OHM), aplicável ao fenômeno elétrico de resistência. O modelo é definido por

$$v(t) = i(t)R \quad (2-1)$$

Nesta equação, $v(t)$ é a tensão em volts, $i(t)$ é a corrente em ampéres, e R é a resistência em ohms. Se a resistência fosse conectada a uma fonte de tensão conhecida, a tensão seria a entrada do sistema e a corrente, a saída (ou resposta). Neste capítulo, desenvolvemos modelos para alguns sistemas físicos comuns. No restante do livro, estes modelos serão usados para ilustrar a análise e o projeto dos sistemas de controle. Usamos os modelos para prever como o sistema responderá sob determinadas condições específicas, sem testar na realidade o sistema físico.

No Capítulo 1, foi usado o termo *sistema linear*. Agora, vamos defini-lo. *Um sistema é linear se o princípio da superposição se aplica*. Por exemplo, suponhamos que a resposta de um sistema para uma entrada $r_1(t)$ é $c_1(t)$ e para uma entrada $r_2(t)$, é $c_2(t)$. Se o sistema é linear, a resposta do sistema para a entrada $[k_1r_1(t) + k_2r_2(t)]$ é $[k_1c_1(t) + k_2c_2(t)]$, onde k_1 e k_2 são constantes arbitrárias.

2.1 Modelamento de Sistemas

No dicionário IEEE¹, o *modelo matemático* de um sistema é definido como um conjunto de equações usado para representar o sistema físico. Deve-se entender que nenhum modelo

¹ IEEE Standard Dictionary of Electrical and Electronic Terms. Nova Iorque: IEEE, Inc., 1984.

matemático de sistema físico é exato. Podemos melhorar a precisão de um modelo aumentando a complexidade de suas equações, porém, nunca obteremos exatidão. Geralmente, nos esforçamos para desenvolver um modelo que seja adequado ao problema apresentado sem torná-lo excessivamente complexo. Há afirmações de que o desenvolvimento de modelos dos sistemas físicos representa de 80 a 90% de esforço requerido na análise e projeto dos sistemas de controle.

Neste capítulo, as leis físicas são utilizadas para desenvolver os modelos de alguns sistemas físicos simples. Estes modelos serão usados posteriormente para ilustrar as técnicas de análise e projeto para sistemas de controle. Consideraremos apenas os sistemas que são descritos por *equações diferenciais lineares invariantes no tempo*. Conforme o Apêndice C, estas equações podem ser resolvidas usando-se as transformadas de Laplace. Contudo, é importante ressaltar que um sistema descrito por equações diferenciais lineares invariantes no tempo pode ser representado por uma *função de transferência*, e todas as características das equações podem ser determinadas a partir desta função. Portanto, à medida que as equações modelam exatamente um sistema físico, a função de transferência fornece as características deste sistema.

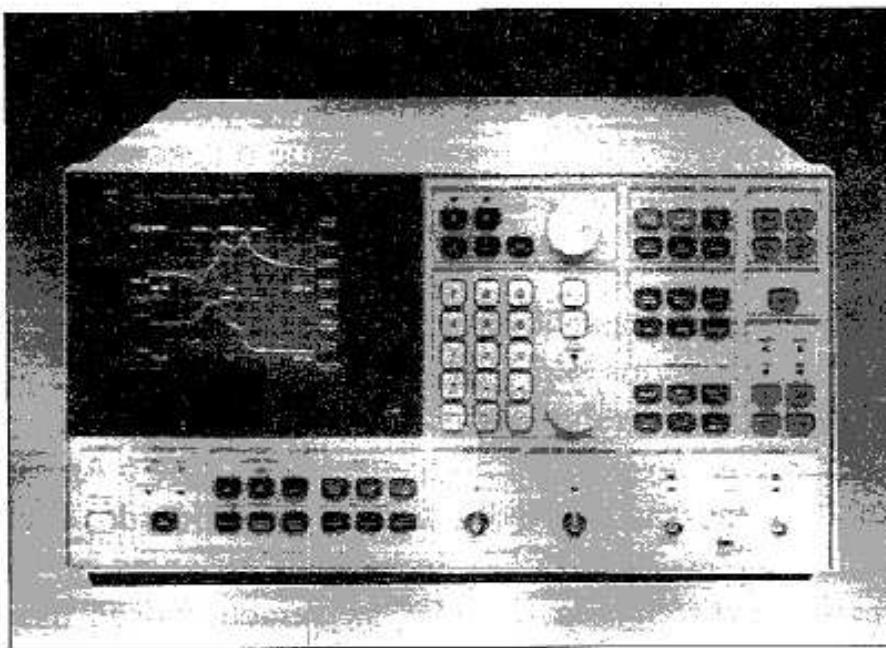
Um aspecto muito importante deve ser evidenciado em relação à discussão anterior. No projeto e na análise apresentados neste livro, sempre trabalhamos com o *modelo matemático* do sistema físico envolvido. Não devemos confundir o modelo com o sistema físico real. O modelo pode ou não representar exatamente as características reais de um sistema físico. Este modelo pode ser preciso para uma determinada entrada, mas completamente impreciso para outra entrada específica. Este ponto é ilustrado no próximo exemplo.

Exemplo 2.1

Suponhamos um resistor comum de carbono de 1Ω e 2 W. Estamos, portanto, considerando um sistema físico. Se aplicarmos uma tensão constante (dc) de 1 V ao resistor, de acordo com o modelo (2.1), circulará uma corrente de 1 A. Se conectarmos fisicamente o resistor aos terminais de uma fonte de 1 V, teremos a circulação de uma corrente de 1 A, dependendo do valor real da resistência, das características da fonte e outras já mencionadas. Como a potência dissipada em uma resistência é dada por

$$P(t) = \frac{v^2(t)}{R} \quad (2-2)$$

aproximadamente 1 W será dissipado neste resistor. Agora, suponhamos que o mesmo experimento é realizado com uma fonte de 10 V. O modelo matemático nos diz que fluirá uma corrente de 10 A através da resistência e que a potência dissipada será de 100 W. Entretanto, como o resistor é capaz de dissipar apenas 2 W, ele se danificará ocasionando o desaparecimento da corrente. Ou, dependendo das características da fonte, um fusível se romperá. De forma alguma, a corrente será de aproximadamente 10 A, como previsto pelo modelo. Assim, as características do resistor de 1Ω podem alterar, dependendo do sinal de entrada (tensão) aplicado ao dispositivo.



Um analisador de sinais dinâmico que, dentre muitas funções, calcula a função de transferência de um sistema a partir das medições da entrada e saída.

Este simples exemplo mostra que o modelo de um sistema físico depende, entre outras coisas, do sinal de entrada. O modelo pode também ser função da temperatura, umidade, velocidade (por exemplo, de uma aeronave) e outros. O modelo de um sistema físico particular pode ser adequado para um dado conjunto de circunstâncias e inadequado para outras. Geralmente, só quando testamos o sistema podemos responder às questões de adequação do modelo. Este problema implica momentos de ansiedade no vôo inicial de aeronaves, veículos espaciais etc. Infelizmente, às vezes, também implica algumas catástrofes.

A discussão anterior pretende enfatizar a diferença entre um sistema físico e o seu modelo. Como um sistema físico não possui um único modelo, não podemos dizer o modelo de um sistema físico particular. Devemos lembrar que sempre podemos melhorar a precisão de um modelo aumentando sua complexidade, mas nunca podemos obter exatidão.

Agora que enfatizamos a diferença entre o sistema físico e o modelo deste sistema, usaremos a abordagem comum para a análise e o projeto. Seremos cuidadosos com a linguagem, ao discutir os sistemas. Em geral, neste livro, usamos o termo *sistema* quando nos referimos ao *modelo matemático*. Quando discutimos um sistema físico, nos referimos a ele com o termo *sistema físico*.

2.2 Circuitos Elétricos

Nesta seção, desenvolveremos os modelos para alguns circuitos elétricos simples e úteis.² O modelo da resistência foi dado em (2.1). Este modelo também é dado na Figura 2.1, juntamen-

² IRWIN, J. D. *Basic Engineering Circuit Analysis*. 3rd ed. Nova Iorque: Macmillan, 1990.

te com os modelos de indutância e capacitância. Também são definidas na Figura 2.1 uma fonte de tensão e uma fonte de corrente ideais. As linhas tracejadas indicam que os elementos mostrados fazem parte de circuitos maiores. Por exemplo, a resistência tem de ser uma parte de um circuito maior, ou então $v(t)$ é igual a zero.

Para a fonte de tensão ideal, a tensão em seus terminais independe do circuito conectado a ela, o qual determina a corrente, $i(t)$, que flui através da fonte.

Para a fonte de corrente ideal, o circuito conectado a ela determina a tensão, $v(t)$, que aparece em seus terminais, e a corrente independe do mesmo.

Considere um circuito que é uma combinação dos elementos mostrados na Figura 2.1. As equações do circuito são escritas usando os modelos dados na figura juntamente com as leis de tensão e corrente de Kirchhoff. A lei de tensões de Kirchhoff pode ser enunciada como:

A soma algébrica das tensões ao longo de qualquer malha fechada em um circuito elétrico é zero.

A lei de corrente de Kirchhoff pode ser enunciada como:

A soma algébrica das correntes em qualquer nó de um circuito elétrico é zero.

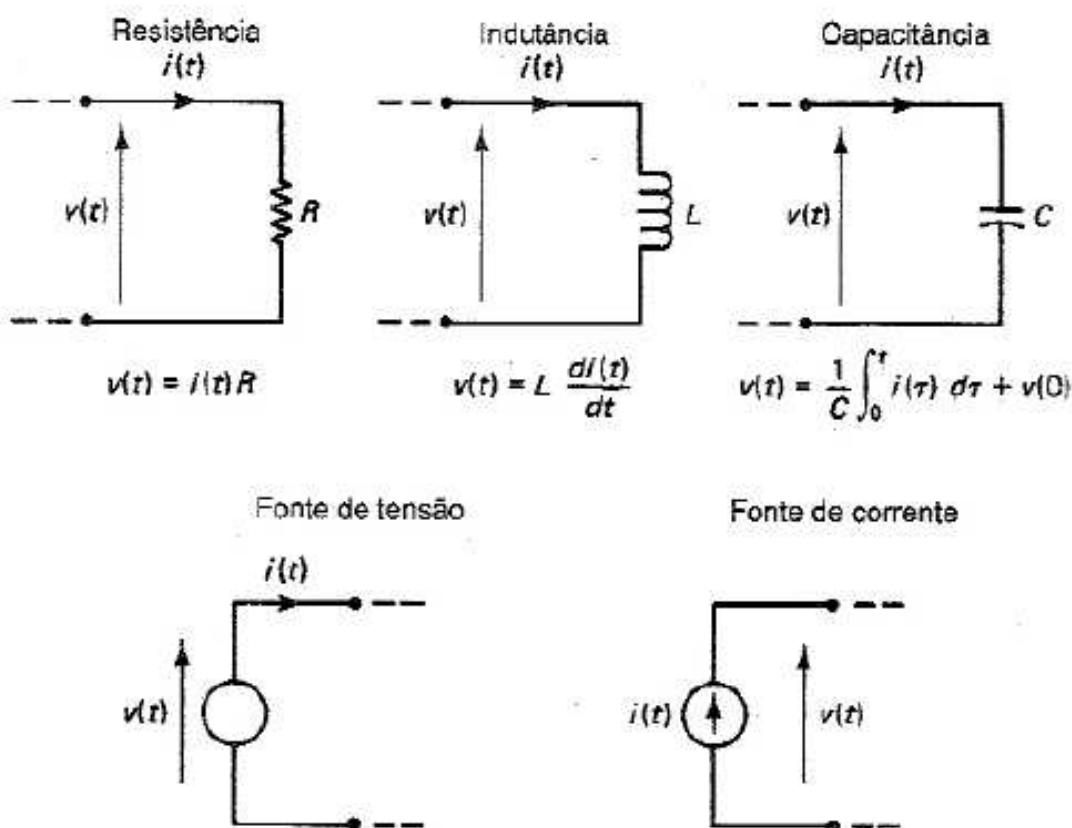


Figura 2.1 Elementos de um circuito elétrico.

A seguir, exemplos simples de equações de circuitos.

Exemplo 2.2

Como um primeiro exemplo, considere o circuito da Figura 2.2. Neste circuito, consideramos $v_1(t)$ a entrada do circuito e $v_2(t)$ a saída. Portanto, desejamos escrever um conjunto de equações de modo que a sua solução forneça $v_2(t)$ em função de $v_1(t)$, ou de maneira equivalente, para a variável da transformada de Laplace, $V_2(s)$ em função de $V_1(s)$. Pela lei de tensões de Kirchhoff, considerando a condição inicial no capacitor igual a zero,

$$R_1 i(t) + R_2 i(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau = v_1(t)$$

$$R_2 i(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau = v_2(t)$$

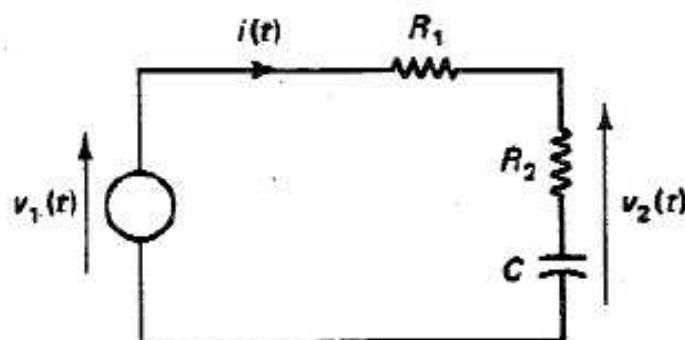


Figura 2.2 Circuito do Exemplo 2.2.

Assim, estas duas equações formam o modelo matemático do circuito da Figura 2.2.

Podemos também representar o modelo em termos da variável s da transformada de Laplace. Tomando a transformada de Laplace das duas últimas equações, temos:

$$R_1 I(s) + R_2 I(s) + \frac{1}{sC} I(s) = V_1(s)$$

$$R_2 I(s) + \frac{1}{sC} I(s) = V_2(s)$$

Desta forma, o circuito pode ser modelado pelas duas equações diferenciais ou, equivalentemente, pelas duas equações da variável s da transformada de Laplace.

Considere um sistema com entrada $e(t)$ e saída $c(t)$. Se $C(s)$ é a transformada de Laplace da saída do sistema e $E(s)$ é a transformada de Laplace da entrada, então a função de transferência $G(s)$ é definida por:

$$G(s) = \frac{C(s)}{E(s)} \quad (2-3)$$

Uma função de transferência pode ser escrita somente para o caso no qual o modelo do sistema é uma equação diferencial linear invariante no tempo e as condições iniciais do sistema ignoradas. O Exemplo 2.3 deduz a função de transferência do circuito do Exemplo 2.2.

Exemplo 2.3

Da primeira equação da transformada de Laplace:

$$R_1 I(s) + R_2 I(s) + \frac{1}{sC} I(s) = V_1(s)$$

resolvendo para $I(s)$:

$$I(s) = \frac{V_1(s)}{R_1 + R_2 + (1/sC)}$$

Da segunda equação da transformada de Laplace:

$$R_2 I(s) + \frac{1}{sC} I(s) = V_2(s)$$

substituindo o valor de $I(s)$ encontrado anteriormente:

$$V_2(s) = \frac{R_2 + (1/sC)}{R_1 + R_2 + (1/sC)} V_1(s)$$

Reescrevendo esta equação teremos a função de transferência $G(s)$

$$G(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{R_2 Cs + 1}{(R_1 + R_2)Cs + 1}$$

Portanto, para o circuito da Figura 2.2, as equações diferenciais do Exemplo 2.2 (ou a transformada de Laplace destas equações) ou a função de transferência deste exemplo são descrições igualmente válidas. Como acabamos de ver, podemos facilmente alternar de um tipo de equação para outro.

Os exemplos anteriores ilustram o desenvolvimento do modelo matemático de um circuito elétrico. Em sistemas de controle físicos, geralmente há um elemento adicional de circuito: o *amplificador operacional* (geralmente chamado de amp-op).³ O amplificador operacional é normalmente usado em circuitos de sensores para amplificar pequenos sinais e também em circuitos de compensação, como será discutido na Seção 7.13. O símbolo utilizado para um amplificador operacional nos diagramas de circuitos é mostrado na Figura 2.3(a). A entrada indicada com o sinal (-) é chamada *entrada inversora*, e a entrada indicada com o sinal (+) é chamada *entrada não-inversora*. As conexões da fonte de alimentação são indicadas por V^+ para a tensão positiva e V^- para a tensão negativa. Normalmente, o amplificador operacional é mostrado como na Figura 2.3(b), sem as conexões da fonte de alimentação.

³ SHORT, K. L. *Microprocessors and Programmed Logic*. 2^a ed. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1987.

Nesta figura, v_d é a tensão de entrada e v_o a tensão de saída. O amplificador é projetado e construído de tal forma que a impedância de entrada seja muito alta, resultando em i^- e i^+ muito pequenas. Além disso, o ganho do amplificador é muito alto (da ordem de 10^5 ou mais), o que implica que a tensão de entrada deva ser muito baixa para que o amplificador opere em sua faixa linear.

Para propósitos de análise, consideramos que o amplificador é ideal, e portanto tem correntes de entrada nulas; isto é, na Figura 2.3(b), i^- e i^+ são iguais a zero. Além disso, o amplificador ideal opera com uma tensão de entrada v_d igual a zero. Na maioria das aplicações, o modelo do amplificador ideal é adequado.

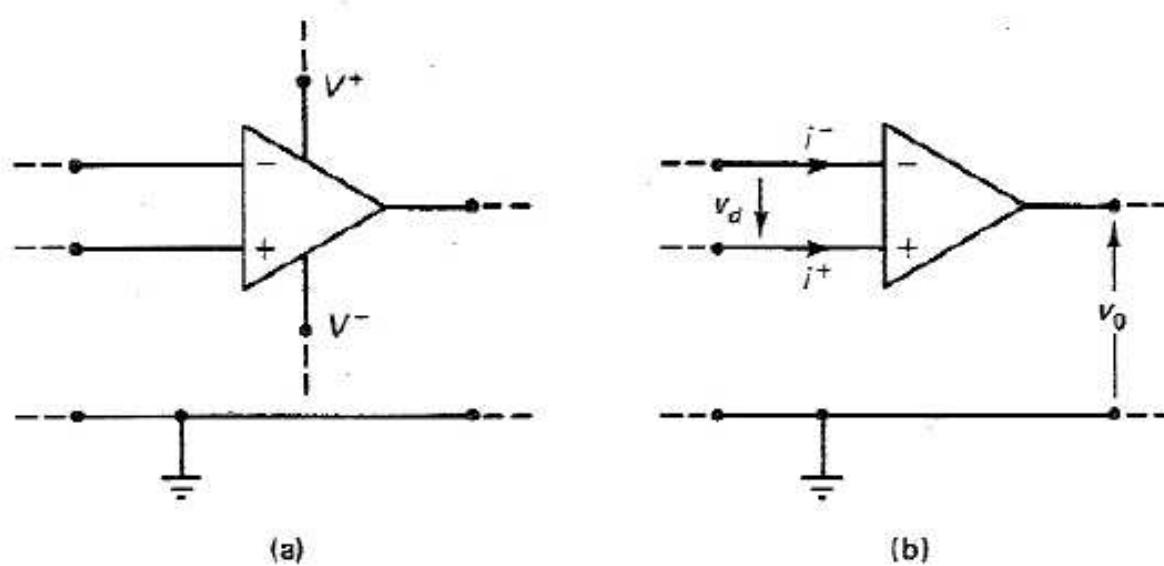


Figura 2.3 O amplificador operacional.⁴

Como o amp-op é um dispositivo de ganho muito alto, deve ser acrescentada uma realimentação ao amplificador para estabilizá-lo. O circuito de realimentação é conectado do terminal de saída ao terminal de entrada inversora; isto é, ao terminal negativo. Esta ligação resulta em realimentação negativa ou estabilizadora.

Um exemplo de um amplificador operacional é mostrado na Figura 2.4. Este circuito é usado para converter uma corrente i_1 numa tensão v_o . Como i^- é nula, a corrente de entrada i_1 fluirá através de R , resultando em

$$v_R = -i_1 R$$

Uma vez que v_d também é nula, a soma das tensões ao longo da malha externa até a conexão de terra resulta em

$$v_o = v_R = -i_1 R$$

Portanto, deduz-se que a tensão de saída do circuito é uma constante (R) vezes a corrente de entrada, com sinal invertido.

⁴ PERENCE JR., A. *Amplificadores Operacionais e Filtros Ativos*. 5^a ed. São Paulo, SP: Makron Books, 1995.

Outro circuito de amplificador operacional muito útil é analisado no exemplo seguinte.

Exemplo 2.4

Considere o circuito da Figura 2.5. Como fizemos anteriormente, assumimos que v_d e i^- são iguais a zero. Então a corrente i_1 circula através do circuito R_2C e, assumindo que as condições iniciais são nulas, podemos escrever as seguintes equações:

$$v_i = i_1 R_1$$

$$v_o = -i_1 R_2 - \frac{1}{C} \int_0^t i_1 d\tau$$

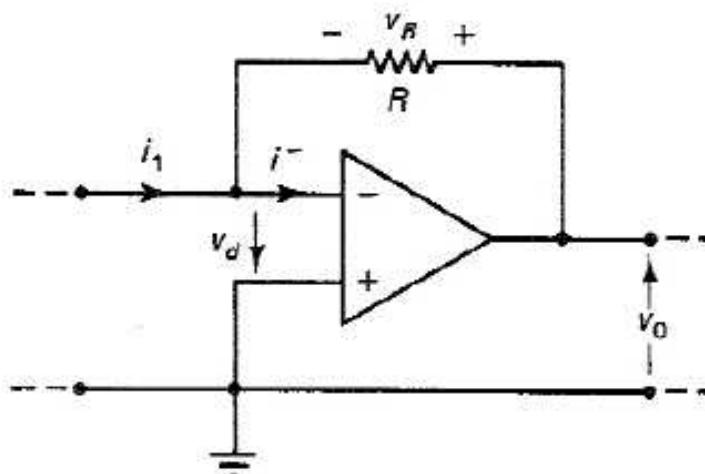


Figura 2.4 Conversor corrente-tensão.

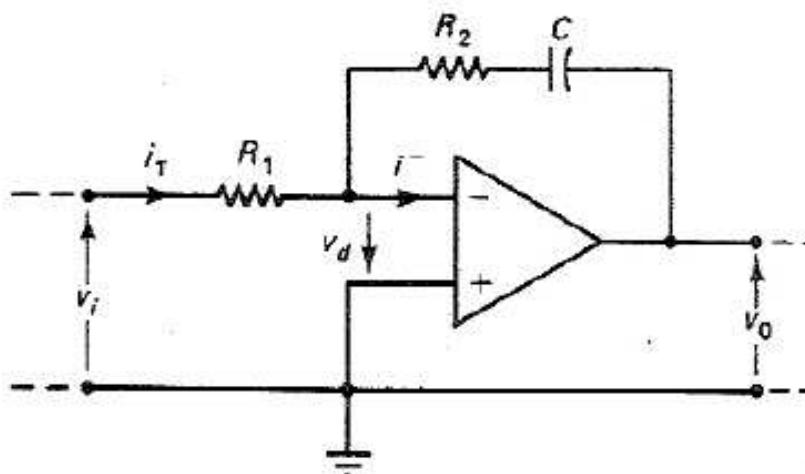


Figura 2.5 Circuito do Exemplo 2.5.

A transformada de Laplace destas equações fornece

$$V_i(s) = I_1(s)R_1$$

$$V_o(s) = -\left(R_2 + \frac{1}{sC}\right)I_1(s)$$

Resolvendo a primeira equação para $I_1(s)$ e substituindo o resultado na segunda equação temos

$$\frac{V_o(s)}{V_t(s)} = -\left(\frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{sR_1C}\right) = -\frac{R_2Cs + 1}{R_1Cs} = G(s)$$

Esta relação é, obviamente, a função de transferência do circuito se $V_t(s)$ for definida como a entrada e $V_o(s)$ como a saída. Note que, se R_2 for igual a zero, a função de transferência é a de um integrador com ganho de $-1/R_1C$; isto é,

$$G(s) = \left(\frac{-1}{R_1C}\right)\frac{1}{s}$$

Se, ao contrário, o capacitor é substituído por um curto-círculo ($C \rightarrow \infty$), o circuito torna-se um amplificador com ganho de $-R_1/R_2$. Ambos os circuitos são blocos básicos de construção de um computador analógico, que será descrito na Seção 3.8.

Como tópico final desta seção, estudaremos a técnica de análise de circuitos chamada *análise por impedância*. Note que esta aproximação é válida apenas para o caso em que as condições iniciais são ignoradas. Devemos lembrar que este é um requisito para se desenvolver a função de transferência; nos desenvolvimentos e exemplos que se seguem, estas condições iniciais são ignoradas, a menos que seja especificado de outra forma.

Considere os elementos básicos de um circuito, mostrados novamente na Figura 2.6. A abordagem da impedância é ilustrada usando-se a indutância, que é descrita por

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad (2-4)$$

A transformada de Laplace desta equação fornece

$$V(s) = LsI(s) \quad (2-5)$$

que é da forma

$$V(s) = Z(s)I(s) \quad (2-6)$$

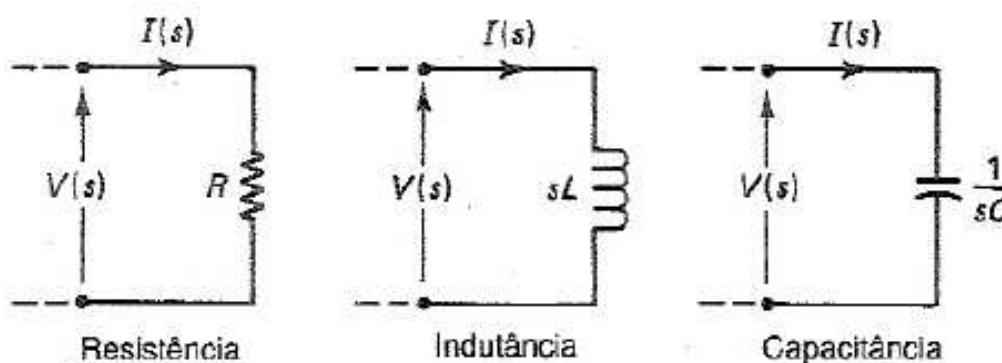


Figura 2.6 Método da impedância.

onde, por definição, $Z(s)$ é a impedância do elemento. Em geral, a impedância de um circuito passivo (sem fonte) é a razão da transformada de Laplace da tensão aplicada ao circuito para a transformada de Laplace da corrente através dele. A impedância é definida em relação a dois terminais específicos. As impedâncias de uma resistência, indutância e uma capacitância são mostradas na Figura 2.6. Para uma resistência,

$$Z(s) = R \quad (2-7)$$

e para uma capacitância,

$$Z(s) = \frac{1}{sC} \quad (2-8)$$

Em um circuito, as impedâncias em série se somam. Para impedâncias em paralelo, o inverso da impedância equivalente é igual à soma do inverso das impedâncias individuais.

Exemplo 2.5

No circuito da Figura 2.7, a impedância equivalente do circuito RC em paralelo, $Z_p(s)$, é

$$\frac{1}{Z_p(s)} = \frac{1}{R} + \frac{1}{1/(sC)}$$

Então,

$$Z_p(s) = \frac{R}{RCs + 1}$$

e a impedância total é dada por

$$Z(s) = \frac{V(s)}{I(s)} = sL + Z_p(s) = \frac{RLCs^2 + Ls + R}{RCs + 1}$$

Note que a abordagem da impedância simplifica a dedução das funções de transferência para os circuitos elétricos.

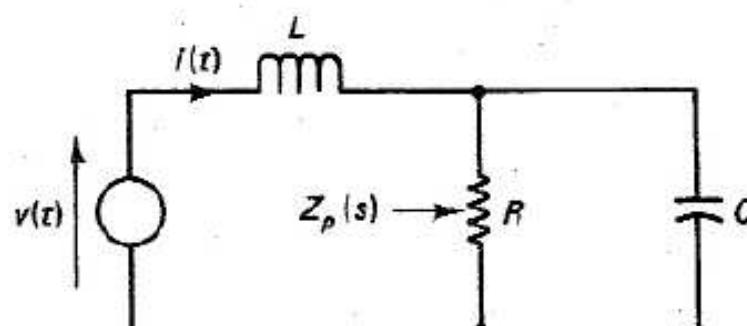


Figura 2.7 Circuito do Exemplo 2.5.

A análise da impedância é particularmente útil na dedução da função de transferência de circuitos de amplificadores operacionais usados como filtros. Por exemplo, considere o circuito da Figura 2.8. Note que este é o mesmo circuito dado no Exemplo 2.4. As equações do circuito são

$$V_i(s) = R_1 I_1(s)$$

e

$$V_o(s) = - \left[R_2 + \frac{1}{(sC)} \right] I_1(s)$$

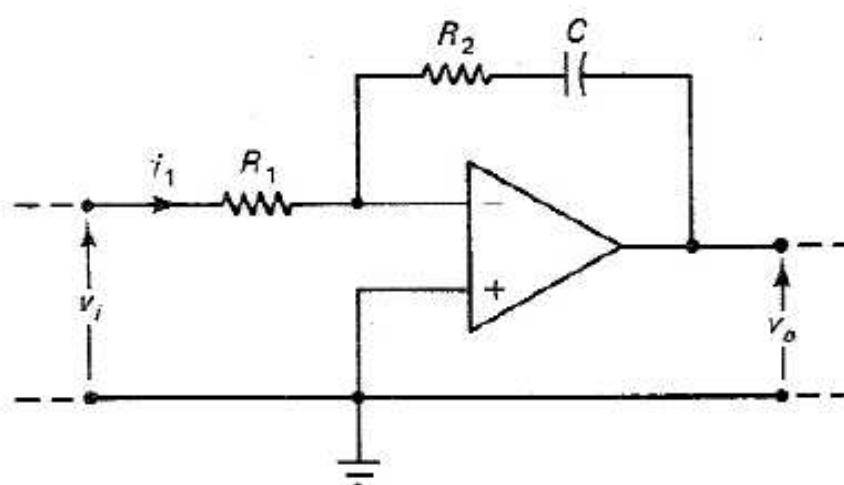


Figura 2.8 Exemplo da análise de impedância.

Tomando a razão das duas equações, teremos

$$G(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = - \left[\frac{R_2 Cs + 1}{R_1 Cs} \right]$$

que é a mesma função de transferência deduzida no Exemplo 2.4 por um processo mais trabalhoso.

É conveniente neste ponto deduzir a função de transferência genérica para um circuito que contém um simples amplificador operacional, como mostra a Figura 2.9. Nesta figura, $Z_i(s)$ é a impedância de entrada da $Z_f(s)$, que é a impedância de realimentação. As equações do circuito são

$$V_i(s) = Z_i(s) I(s)$$

e

$$V_o(s) = -Z_f(s) I(s)$$

A razão das duas equações fornece a função de transferência:

$$G(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = - \frac{Z_f(s)}{Z_i(s)} \quad (2-9)$$

Este circuito é muito útil na implementação de compensadores em sistemas de controle, como veremos na Seção 7.13.

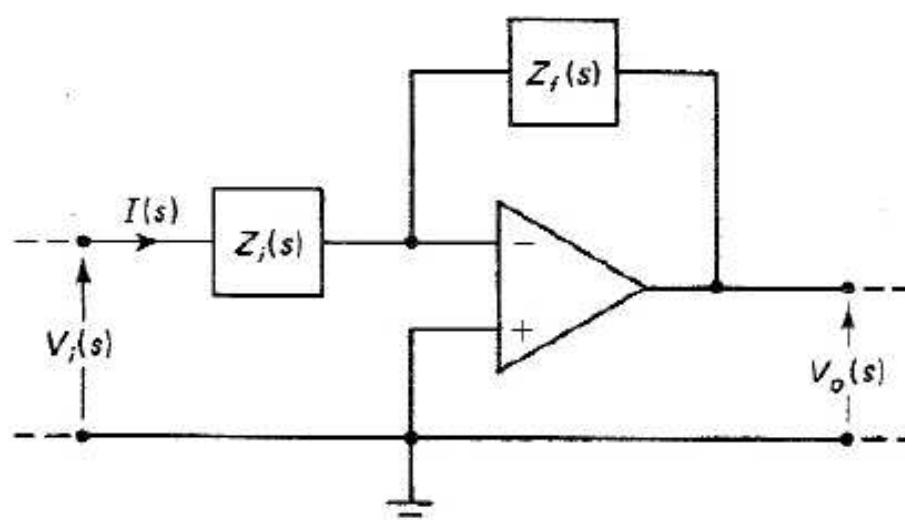


Figura 2.9 Um amplificador inverter com impedâncias generalizadas.

2.3 Diagramas de Blocos e Gráficos de Fluxo de Sinais

Na seção anterior foi apresentado o conceito de uma função de transferência para um sistema linear invariante no tempo. Por definição, a função de transferência é a razão entre a transformada de Laplace da variável de saída e a transformada de Laplace da variável de entrada. Seja $E(s)$ a variável de entrada (a transformada de Laplace desta variável), $C(s)$ a variável de saída e $G(s)$ a função de transferência. Um método de indicar graficamente a relação

$$C(s) = G(s)E(s) \quad (2-10)$$

é através de um diagrama de blocos, como mostra a Figura 2.10(a). Para o bloco mostrado, a saída é, por definição, igual à função de transferência indicada no bloco multiplicada pela entrada. A entrada e a saída são definidas pelas direções das setas.

Um gráfico de fluxo de sinais é também usado para representar a função de transferência. O gráfico de fluxo de sinais que representa (2.10) é dado na Figura 2.10(b). Cada sinal é representado por um nó no gráfico, indicados por $E(s)$ e $C(s)$ na figura. Cada função de transferência é representada por um ramo indicado na figura pela linha com uma seta, e a função de transferência escrita próximo à seta. Por definição, o sinal de saída de um ramo é igual à função de transferência deste multiplicado pelo seu sinal de entrada.

Dois pontos muito importantes devem ser colocados. Primeiro, um diagrama de blocos e um gráfico de fluxo de sinais contêm exatamente a mesma informação. Não há vantagens de um sobre o outro; é uma questão apenas de preferência pessoal. Segundo, um diagrama de blocos (ou um gráfico de fluxo de sinais) é construído a partir de equações e, portanto, é uma representação gráfica das mesmas.

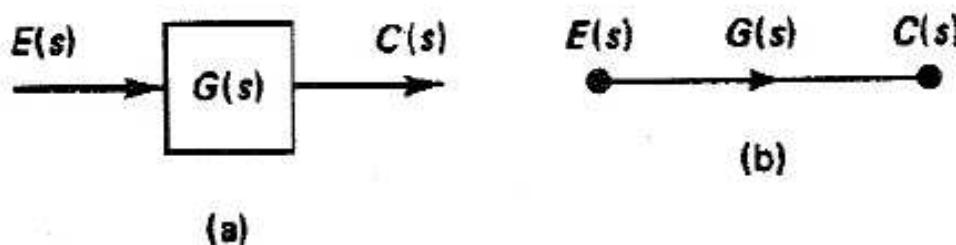


Figura 2.10 Elementos de um diagrama em blocos e do gráfico de fluxo de sinais.

Um elemento adicional é necessário para representar equações através de um diagrama de blocos. Este elemento é um ponto de soma (ou junção de somatória), ilustrada na Figura 2.11 para a equação

$$C(s) = G_1(s)E_1(s) + G_2(s)E_2(s) - G_3(s)E_3(s) \quad (2-11)$$

Para o diagrama de blocos, o ponto de soma é representado por um círculo, como na Figura 2.11(a). Por definição, o sinal de saída deste ponto é igual à soma dos sinais de entrada, onde o sinal de cada componente é determinado pelo sinal colocado ao lado da seta do mesmo. Note que, embora um ponto de soma possa ter qualquer número de entradas, temos apenas uma saída.

No gráfico de fluxo de sinais, a função do ponto de soma é implementada por um nó. Um ponto de soma é representado por um nó onde chegam os sinais de vários ramos, como ilustra a Figura 2.11(b). Por definição, o sinal de nó é igual à soma dos sinais das ramificações conectadas àquele nó. O diagrama de blocos e o gráfico de fluxo de sinais são ilustrados pelo Exemplo 2.6.

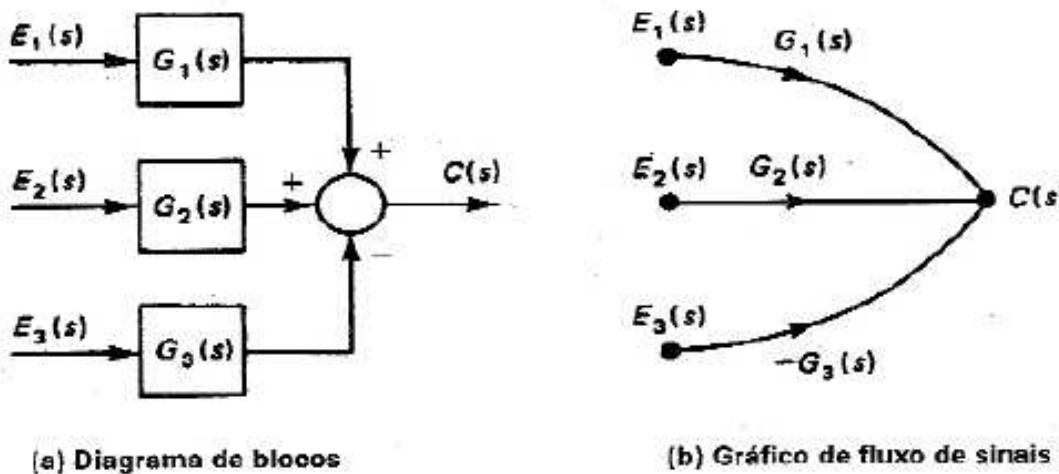


Figura 2.11 Exemplos equivalentes.

Exemplo 2.6

Considere as seguintes equações:

$$E(s) = R(s) - H(s)C(s)$$

$$C(s) = G(s)E(s)$$

onde $R(s)$ é o sinal de entrada, $C(s)$ é o sinal de saída, $E(s)$ é um sinal interno e $G(s)$ e $H(s)$ são funções de transferência. A primeira equação define um ponto de soma, como mostra a Figura 2.12(a) e a segunda é usada para completar o diagrama de blocos. A figura também mostra o gráfico de fluxo de sinais para estas equações. Note que as duas construções geométricas são idênticas. Este será sempre o caso quando as equações forem usadas da mesma forma para a construção de cada um.

No exemplo anterior, as equações podem ser resolvidas para encontrar a saída $C(s)$ em função da entrada $R(s)$. Substituindo a primeira equação na segunda teremos

$$C(s) = G(s)R(s) - G(s)H(s)C(s) \quad (2-12)$$

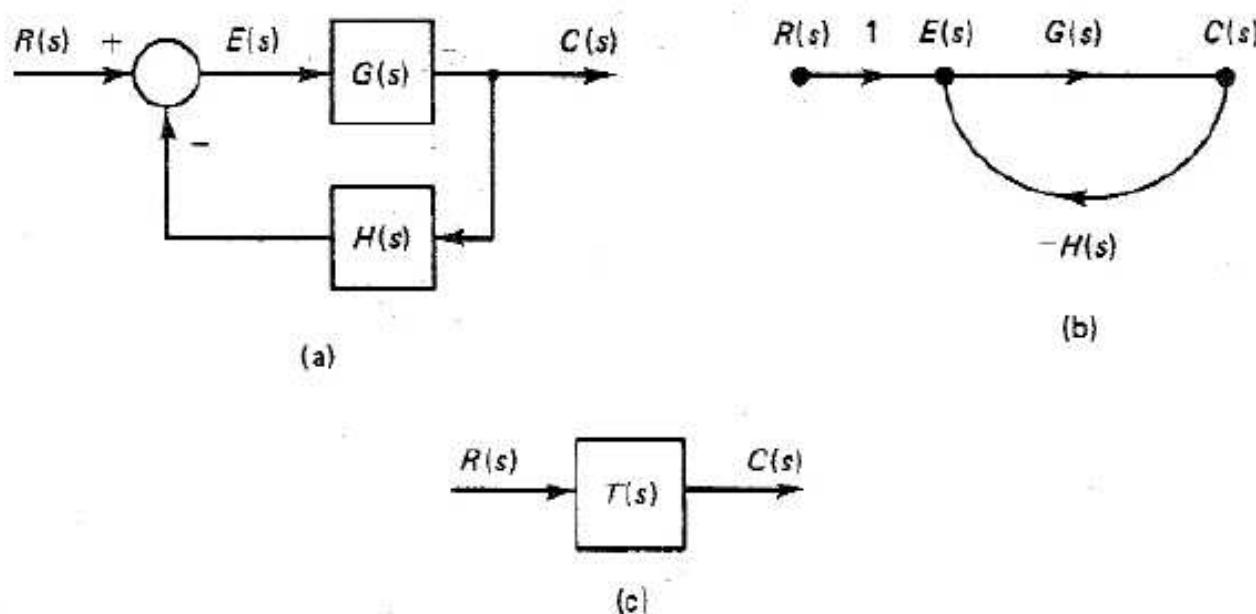


Figura 2.12 Exemplos equivalentes.

Resolvendo esta equação para $C(s)$ temos a função de transferência do sistema $T(s)$:

$$C(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} R(s) = T(s)R(s) \quad (2-13)$$

Portanto, podemos representar este sistema com um simples bloco, como na Figura 2.12(c).

O método dado acima é adequado para a solução da função de transferência do sistema, contanto que ele seja descrito por apenas duas ou três equações. Contudo, um procedimento melhor é o de se utilizar a regra de Cramer.⁵ Este método exige, primeiramente, que as equações sejam expressas na forma de matrizes vetores. Para o exemplo anterior, as equações escritas nesta forma são:

$$\begin{bmatrix} 1 & H(s) \\ G(s) & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E(s) \\ C(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R(s) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2-14)$$

⁵ AGNEW, J. L. & KNAPP, R. C. *Linear Algebra with Applications*. Pacific Grove, CA: Brooks/Cole, 1989.

Estas equações são da forma

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{y} \quad (2-15)$$

onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & H(s) \\ G(s) & -1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} E(s) \\ C(s) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} R(s) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2-16)$$

Como é mostrado na revisão de matrizes do Apêndice A, a Equação (2-15) pode ser resolvida para \mathbf{x} como

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{y} \quad (2-17)$$

onde \mathbf{A}^{-1} indica o inverso da matriz \mathbf{A} . Usando este procedimento para resolver (2-14), obtemos a solução para $E(s)$ e $C(s)$. A regra de Cramer nos permite resolver $C(s)$ de maneira mais simples. Para (2-14), a regra de Cramer resulta na solução como uma razão dos determinantes

$$C(s) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & R(s) \\ G(s) & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & H(s) \\ G(s) & -1 \end{vmatrix}} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} R(s) = T(s)R(s) \quad (2-18)$$

A regra de Cramer se aplica à solução de uma equação matricial da forma de (2-15) e é expressa como a razão de dois determinantes, como em (2-18). O determinante do denominador é sempre o determinante da matriz \mathbf{A} . Suponha que desejamos encontrar a variável da linha de ordem i do vetor \mathbf{x} . Então, o determinante do numerador na solução é obtido substituindo-se a coluna de ordem i do denominador pelo vetor \mathbf{y} . Note que em (2-18), o determinante do numerador é simplesmente o determinante do denominador com a segunda coluna substituída pelo vetor \mathbf{y} de (2-14).

Como foi mostrado nos exemplos anteriores e ilustrado posteriormente, os modelos de sistemas lineares invariantes no tempo são equações lineares simultâneas se a transformada de Laplace for usada. Como já foi mostrado, as equações podem ser resolvidas pela eliminação de variáveis, pela regra de Cramer ou pelo procedimento de inversão de matrizes. Os dois últimos métodos são geralmente os preferidos, uma vez que normalmente torna-se mais fácil identificar os erros. A próxima seção apresenta um método diferente conhecido como fórmula do ganho de Mason, que é particularmente adequado para os sistemas simples. Entretanto, como será demonstrado, é muito difícil encontrar alguns erros que possam ocorrer na aplicação do procedimento.

2.4 Fórmula do Ganho de Mason

Esta seção apresenta um procedimento que permite encontrar a função de transferência, por inspeção, do diagrama de blocos ou do gráfico de fluxo de sinais. Este método é chamado *fórmula do ganho de Mason*.⁶ Embora seja um método relativamente simples, deve ser usado com extremo cuidado, uma vez que os termos do denominador ou numerador da função de transferência podem facilmente passar despercebidos. Contudo, não há um método disponível que nos dê uma indicação quando os termos foram omitidos. Porém, após adquirir alguma experiência, a fórmula do ganho de Mason pode ser aplicada com confiança.

Nesta seção serão dadas as regras para a fórmula do ganho de Mason quando aplicada ao gráfico de fluxo de sinais. Exatamente as mesmas regras se aplicam ao diagrama de blocos. Primeiro, são dadas as definições para dois tipos de nós que podem aparecer no gráfico de fluxo de sinais. Os nós de entrada ou *fonte* e os nós de saída ou *sorvedouro*.

Fonte (nó de entrada) É um nó de onde os sinais saem, isto é, para os ramos conectados a um nó fonte, as setas são todas direcionadas para fora do nó.

Sorvedouro (nó de saída) É aquele para o qual os sinais convergem.

A Figura 2.13(a) ilustra esta definição. Nesta figura, o nó que identifica o sinal $R(s)$ é um nó de entrada (fonte) e o nó do lado direito para $C(s)$ é um nó de saída (sorvedouro). Note que é usado o artifício de adicionar um ramo de ganho unitário ao nó original para $C(s)$ criando um nó de saída para $C(s)$. Isto é possível porque a relação matemática para $C(s)$ não altera, como mostra o gráfico. Entretanto, em geral, não é possível transformar um nó arbitrário em fonte pela adição de um ramo de ganho unitário, já que isto altera a expressão matemática para o nó original. Para ilustrar este ponto, a expressão para $E(s)$ na Figura 2.13(a) é

$$E(s) = R(s) - H(s)C(s)$$

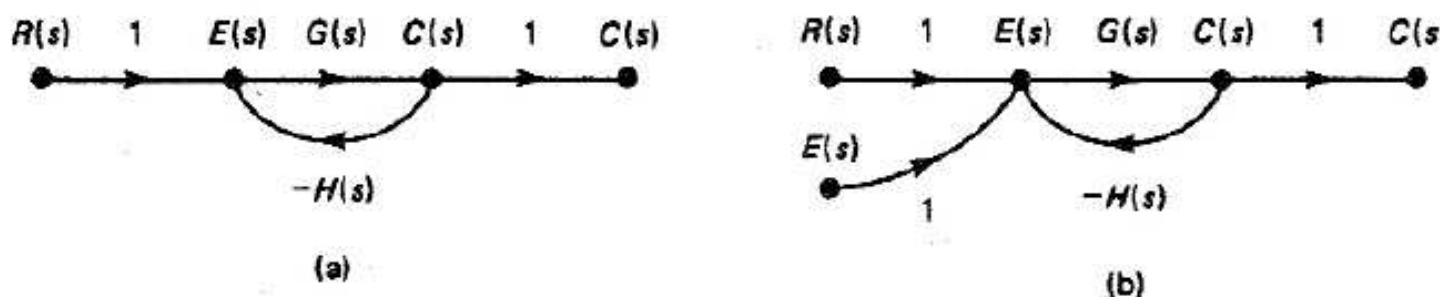


Figura 2.13 Gráfico de fluxo de sinais.

Se acrescentarmos um ramo de ganho unitário para transformar $E(s)$ em um nó fonte, como mostra a Figura 2.13(b), a expressão para o nó $E(s)$ torna-se

6 MASON, S. J. "Feedback Theory Some Properties of Flow Graphs." *Proc. IRE*, 41 (September 1953): 1144-1156.

$$E(s) = R(s) - H(s)C(s) + E(s)$$

que é claramente uma expressão diferente. Este exemplo ilustra uma consideração fundamental. Podemos manipular (mudar a configuração) um gráfico de fluxo de sinais ou um diagrama de blocos, certos de que isto não altera as equações para quais estas representações foram baseadas.

A seguir, temos as definições adicionais para a aplicação da fórmula do ganho de Mason.

Caminho (percurso) Um caminho é uma conexão contínua das ramificações de um nó para outro com todas as setas na mesma direção; isto é, todos os sinais seguem na mesma direção do primeiro nó para o segundo.

Laço (malha) Um laço é um caminho fechado (com todas as setas na mesma direção) no qual nenhum nó é percorrido mais que uma vez. Note que um nó fonte não pode ser uma parte do laço, já que cada nó deste laço deve ter, no mínimo, um ramo de entrada e outro de saída.

Caminho direto É um caminho que conecta um nó fonte a um sorvedouro, sem que nenhum nó seja percorrido mais que uma vez.

Ganho do caminho O ganho do caminho é o produto das funções de transferência de todos os ramos que formam o caminho.

Ganho de malha O ganho de malha é o produto das funções de transferência de todos os ramos que formam a malha.

Laços que não se tocam São aqueles que não têm nenhum nó em comum. Um caminho e uma malha não se tocam quando não têm nenhum nó em comum.

Todas estas definições são ilustradas usando o gráfico de fluxo de sinais da Figura 2.14. Há duas malhas no gráfico, uma com um ganho de $-G_2H_1$ e outra com o ganho $-G_4H_2$. Note que estas duas malhas não se tocam. Também, há dois caminhos diretos ligando a entrada $R(s)$ e a saída $C(s)$. Um destes caminhos tem um ganho de $G_1G_2G_3G_4G_5$, e o outro de $G_6G_4G_5$. Note que o caminho $G_6G_4G_5$ não toca a malha $-G_2H_1$, mas toca a outra malha. O caminho $G_1G_2G_3G_4G_5$ toca ambas as malhas.

Com base nas definições acima, podemos demonstrar a fórmula de ganho de Mason.

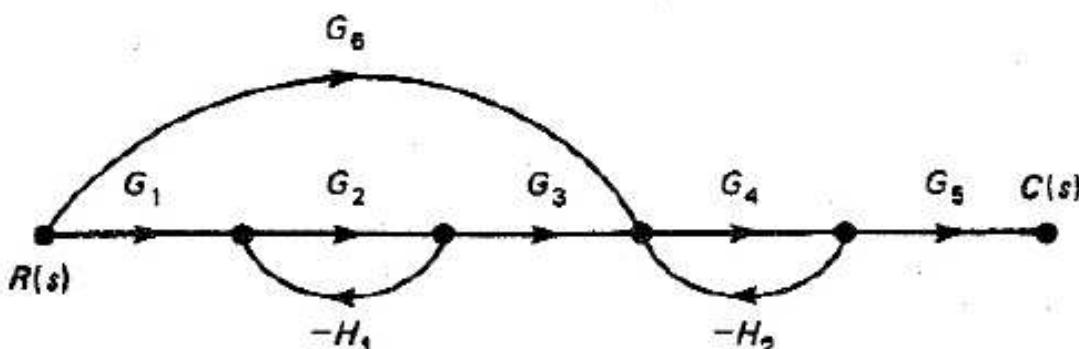


Figura 2.14 Gráfico de fluxo de sinais.

A fórmula dá apenas a função de transferência de um nó fonte (entrada) a um sorvedouro (saída), e pode ser escrita como

$$T = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^p M_k \Delta_k = \frac{1}{\Delta} (M_1 \Delta_1 + M_2 \Delta_2 + \dots + M_p \Delta_p) \quad (2-19)$$

onde T é o ganho (função de transferência) do nó de entrada para o nó de saída, p é o número de caminhos diretos e

$$\Delta = 1 - (\text{soma de todos os ganhos individuais de malha})$$

$$+ (\text{soma dos produtos dos ganhos de malha de todas as combinações possíveis das malhas que não se tocam, tomadas duas a duas})$$

$$- (\text{soma dos produtos dos ganhos de malha de todas as combinações possíveis das malhas que não se tocam, tomadas três a três})$$

$$+ (\text{soma dos produtos dos ganhos de malha de todas as combinações possíveis das malhas que não se tocam tomadas quatro a quatro})$$

$$- (\dots)$$

M_k = sinal do caminho direto de ordem k .

Δ_k = valor de Δ para a parte do gráfico que não toca o caminho direto de ordem k .

A seguir, são dados alguns exemplos para ilustrar o uso da fórmula de ganho de Mason.

Exemplo 2.7

Como primeiro exemplo considere novamente o sistema mostrado na Figura 2.13(a). Este sistema tem uma única malha com um ganho de

$$L_1 = -G(s)H(s)$$

Há um caminho direto com um ganho de

$$M_1 = (1)G(s)(1) = G(s)$$

Além disso, este caminho toca a única malha; isto é, o caminho direto e a malha têm, no mínimo, um nó em comum. Assim, não há outra malha nesta parte do gráfico que não toca o caminho direto, e

$$\Delta_1 = 1$$

A função de transferência é, então, de (2-19),

$$T(s) = \frac{M_1 \Delta_1}{\Delta} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

Este resultado confirma o da Equação (2-18).

Suponha que, no último exemplo, desejamos expressar a saída $C(s)$ em função de $E(s)$. A fórmula de ganho de Mason não pode ser aplicada, já que $E(s)$ não é um nó fonte. Note também que a equação desejada é $C(s) = G(s)E(s)$.

Exemplo 2.8

Como um segundo exemplo da fórmula de ganho de Mason, considere novamente o sistema da Figura 2.14. Seja L_i o ganho da malha de ordem i . E os ganhos das duas únicas malhas podem ser escritos como:

$$L_1 = -G_2H_1; \quad L_2 = -G_4H_2$$

Dois caminhos diretos estão presentes na Figura 2.14, e seus ganhos podem ser escritos da seguinte forma:

$$M_1 = G_1G_2G_3G_4G_5; \quad M_2 = G_6G_4G_5$$

O valor de Δ pode ser transcrito diretamente da Figura 2.14:

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2) + L_1L_2 = 1 + G_2H_1 + G_4H_2 + G_2G_4H_1H_2$$

O último termo está presente nesta equação, já que as duas malhas não se tocam, ou seja, não têm nós em comum.

A determinação de Δ_k de (2-19) é mais difícil. Como afirmamos acima, o valor de Δ_1 é o valor de Δ para a parte do gráfico que não toca o primeiro caminho direto. Um método de calcular Δ_1 é redesenhar o gráfico removendo o primeiro caminho direto. Obviamente, todos os nós deste caminho também serão removidos. A Figura 2.15(a) mostra o resultado da remoção. A segunda parte da figura ilustra a remoção do segundo caminho direto. Então Δ_1 é simplesmente o Δ do gráfico da Figura 2.15(a), e Δ_2 , o da Figura 2.15(b). Assim, podemos escrever que:

$$\Delta_1 = 1; \quad \Delta_2 = 1 - (-G_2H_1)$$

Já que a Figura 2.15(a) não possui malhas e a Figura 2.15(b) possui uma malha. Então, a partir de (2-19) podemos escrever a função de transferência do sistema da Figura 2.14 como

$$T = \frac{M_1\Delta_1 + M_2\Delta_2}{\Delta} = \frac{G_1G_2G_3G_4G_5 + G_6G_4G_5(1 + G_2H_1)}{1 + G_2H_1 + G_4H_2 + G_2G_4H_1H_2}$$

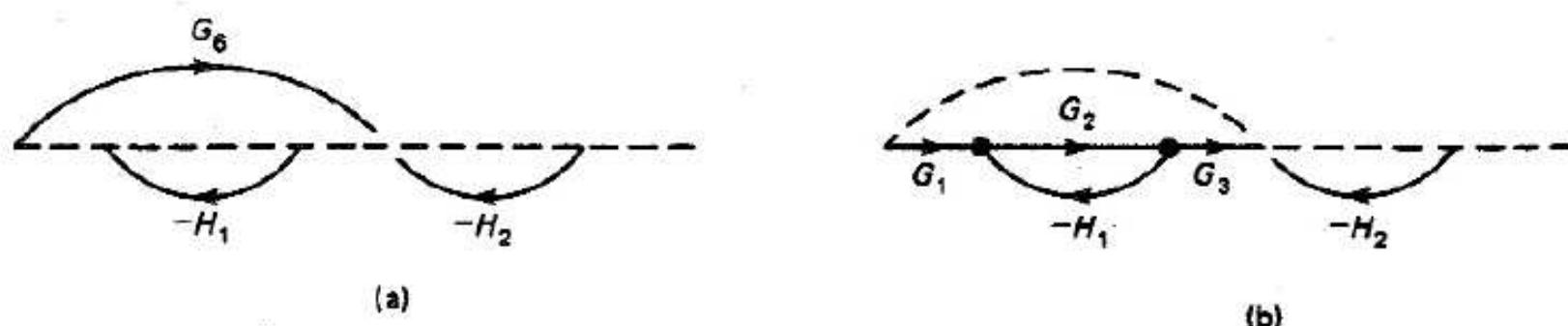


Figura 2.15 Gráfico de fluxo de sinais com o caminho direto removido.

Note que, mesmo neste gráfico de fluxo de sinais relativamente simples, a função de transferência possui muitos termos. Daí a facilidade de se ignorar termos da função. O único procedimento disponível para verificar os resultados da fórmula do ganho de Mason são métodos algébricos, tais como a regra de Cramer. A seguir, este exemplo é resolvido utilizando a regra de Cramer.

Exemplo 2.9

Para verificar a função de transferência obtida no Exemplo 2.8, é necessário escrever as equações para o gráfico da Figura 2.14. Primeiro, cada nó deve ser indicado por variáveis, como mostra a Figura 2.16. As equações dos sistemas então são:

$$\begin{aligned} E &= G_1R - H_1F \Rightarrow E + H_1F = G_1R \\ F &= G_2E \Rightarrow -G_2E + F = 0 \\ M &= G_3F + G_6R - H_2N \Rightarrow -G_3F + M + H_2N = G_6R \\ N &= G_4M \Rightarrow -G_4M + N = 0 \\ C &= G_5N \Rightarrow -G_5N + C = 0 \end{aligned}$$

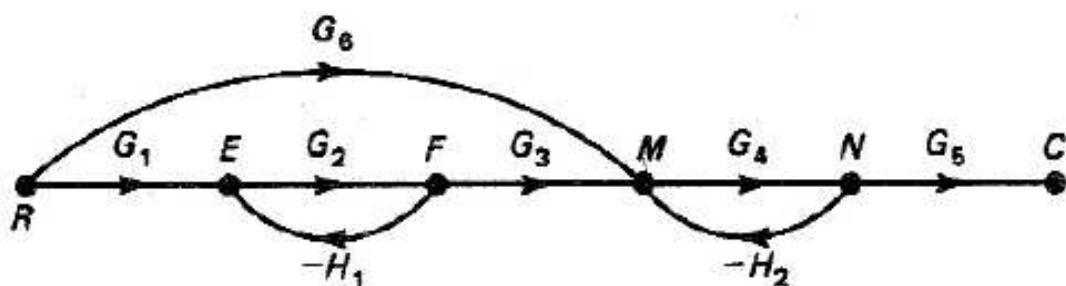


Figura 2.16 Gráfico de fluxo de sinais com todos os sinais indicados.

O segundo conjunto de equações não tem os sinais conhecidos no lado esquerdo. Conhecemos apenas os sinais no lado direito.

Estas equações podem ser escritas na forma de matrizes como

$$\begin{bmatrix} 1 & H_1 & 0 & 0 & 0 \\ -G_2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -G_3 & 1 & H_2 & 0 \\ 0 & 0 & -G_4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -G_5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ F \\ M \\ N \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 \\ 0 \\ G_6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} R$$

e são do tipo

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$$

Para aplicarmos a regra de Cramer, primeiro encontramos o determinante da matriz \mathbf{A} , o que é denominado $\det \mathbf{A}$. O determinante é calculado usando-se o método do menor dado no Apêndice A. Expandindo o determinante de \mathbf{A} ,

$$\det \mathbf{A} = (1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -G_3 & 1 & H_2 & 0 \\ 0 & -G_4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -G_5 & 1 \end{vmatrix} + G_2 \begin{vmatrix} H_1 & 0 & 0 & 0 \\ -G_3 & 1 & H_2 & 0 \\ 0 & -G_4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -G_5 & 1 \end{vmatrix}$$

Agora, cada um destes determinantes pode ser expandido para sua primeira linha, obtendo-se

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & H_2 & 0 \\ -G_4 & 1 & 0 \\ 0 & -G_5 & 1 \end{vmatrix} + G_2 H_1 \begin{vmatrix} 1 & H_2 & 0 \\ -G_4 & 1 & 0 \\ 0 & -G_5 & 1 \end{vmatrix}$$

Cada um destes determinantes pode ser expandido para sua última coluna.

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & H_2 \\ -G_4 & 1 \end{vmatrix} + G_2 H_1 \begin{vmatrix} 1 & H_2 \\ -G_4 & 1 \end{vmatrix} = 1 + G_4 H_2 + G_2 H_1 (1 + G_4 H_2)$$

Esta expressão é a mesma do denominador da função de transferência do Exemplo 2.8.

O numerador da função de transferência é o valor do determinante obtido pela substituição da quinta coluna da matriz \mathbf{A} pelo vetor de excitação da equação matricial. Esta substituição é necessária, já que \mathbf{C} é a quinta variável no vetor de incógnitas. Assim, o determinante requerido do numerador é

$$\begin{vmatrix} 1 & H_1 & 0 & 0 & G_1 R \\ -G_2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -G_3 & 1 & H_2 & G_6 R \\ 0 & 0 & -G_4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -G_5 & 0 \end{vmatrix}$$

Este determinante é igual ao numerador da função de transferência deduzida no Exemplo 2.8. É deixado como exercício para o leitor esta demonstração.

Este exemplo nos mostra que a fórmula de ganho de Mason pode ser considerada um método gráfico para o cálculo da regra de Cramer ou para se obter o inverso de uma matriz.

Como afirmamos anteriormente, a fórmula de ganho de Mason pode ser aplicada diretamente ao diagrama de blocos. Nas definições dadas acima, as seguintes substituições foram feitas, onde o termo *sinal* é definido como qualquer entrada ou saída de um bloco ou ponto de soma.

GRÁFICO DE FLUXO DE SINAIS

| | |
|---------------|---|
| nó de entrada | → |
| nó de saída | → |
| ramo | → |
| nó | → |

DIAGRAMAS DE BLOCOS

| |
|------------------|
| sinal de entrada |
| sinal de saída |
| bloco |
| sinal |

Note que podemos identificar qualquer sinal interno como o sinal de saída.

2.5 Sistemas Mecânicos de Translação

Este capítulo apresenta os modelos de elementos dos sistemas mecânicos de translação linear e um método para escrever as equações dos sistemas compostos por uma interconexão destes elementos. Os elementos mecânicos envolvidos são *massa*, *amortecimento (atrito)* e *elastância (mola)*. Os símbolos destes elementos são dados na Figura 2.17. Mais uma vez, devemos lembrar que os modelos matemáticos podem ou não representar precisamente os dispositivos físicos específicos. Esta mesma afirmativa se aplica aos elementos mecânicos da Figura 2.17. Definiremos estes elementos por equações matemáticas, da mesma maneira que fizemos para os elementos do circuito elétrico. Obviamente, estas definições devem ter aplicação razoável nos sistemas físicos.

A seguir, serão definidos os elementos de translação linear. Primeiramente, vamos considerar a *massa*. A Figura 2.17 $f(t)$ representa a força aplicada, $x(t)$, o deslocamento e M , a massa.

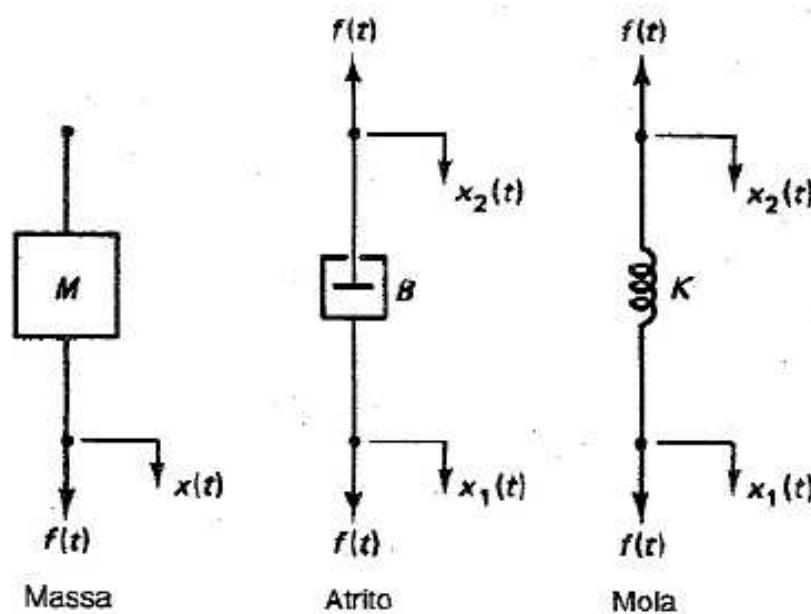


Figura 2.17 Elementos mecânicos de translação linear.

Consideramos que todas as unidades são consistentes. Então, de acordo com a segunda lei de Newton,

$$f(t) = Ma(t) = M \frac{dv(t)}{dt} = M \frac{d^2x(t)}{dt^2} \quad (2-20)$$

onde $v(t)$ é a velocidade e $a(t)$ a aceleração. Assumimos que a massa seja rígida; isto é, o ponto de conexão superior não se move em relação ao ponto de conexão inferior. Portanto, a posição do ponto superior é também $x(t)$.

Para os dois elementos mecânicos restantes, o ponto de conexão superior pode mover-se em relação ao ponto inferior. Daí, a necessidade de duas variáveis de deslocamento para se descrever o movimento destes elementos. Primeiro, considere o *atrito*, como mostra a Figura 2.17. Uma implementação física deste fenômeno é o atrito viscoso associado ao óleo, ar etc. Um dispositivo físico modelado como atrito é o absorvedor de choque (amortecedor) de um automóvel. O modelo matemático do atrito é dado por

$$f(t) = B \left(\frac{dx_1(t)}{dt} - \frac{dx_2(t)}{dt} \right) \quad (2-21)$$

onde B é o coeficiente de amortecimento. Note que a força de atrito é diretamente proporcional à *diferença* de velocidades dos elementos.

O último elemento mecânico de translação a ser definido é uma *mola*. A equação que o define, da lei de Hooke, é dada por

$$f(t) = K [x_1(t) - x_2(t)] \quad (2-22)$$

Note que aqui a força desenvolvida é diretamente proporcional à *diferença* do deslocamento de um extremo da mola em relação ao outro. Estas equações são válidas para forças e deslocamentos nas direções indicadas pelas setas na Figura 2.17. Se quaisquer das direções forem invertidas, o sinal equivalente àquele termo nas equações deve ser trocado.

Para estes elementos mecânicos, o atrito dissipá energia, porém não pode armazena-la. Tanto a massa quanto uma mola podem armazenar energia, mas não podem dissipá-la.

Vamos escrever as equações para a interconexão entre estes elementos usando a lei de Newton, que pode ser enunciada da seguinte maneira:

A soma das forças aplicadas a um corpo é igual ao produto de sua massa pela aceleração adquirida.

Os dois exemplos a seguir ilustram os elementos de translação linear e a lei de Newton.

Exemplo 2.10

Considere o sistema mecânico da Figura 2.18. Como em todos os sistemas de translação que consideramos, admitimos que o movimento pode ocorrer em apenas uma dimensão indicada nesta figura por $x(t)$. Os movimentos de um lado para outro não são permitidos. Somamos as forças

aplicadas à massa, M . Três forças influenciam o movimento. São elas: a força aplicada, a força de atrito e a força da mola. Assim, podemos escrever

$$M \frac{d^2x}{dt^2} = f(t) - B \frac{dx}{dt} - Kx$$

Note que cada elemento mecânico conectado a um ponto contribui com um termo para a soma das forças naquele ponto.

Podemos definir uma função de transferência para este sistema, tendo a força aplicada $f(t)$ como entrada e o deslocamento da massa $x(t)$ como saída. Podemos expressar a transformada de Laplace das equações do sistema como

$$F(s) = Ms^2X(s) + BsX(s) + KX(s) = (Ms^2 + Bs + K)X(s)$$

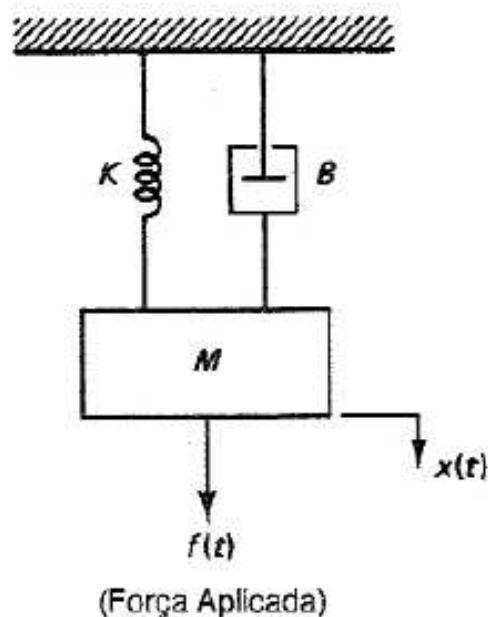


Figura 2.18 Sistema de translação mecânica.

As condições iniciais são ignoradas, já que o objetivo é encontrar a função de transferência. Assim, a função de transferência é dada por

$$G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{Ms^2 + Bs + K} \quad (2-23)$$

Exemplo 2.11

Como segundo exemplo, considere o sistema mecânico mostrado na Figura 2.19. Este é um modelo simplificado do sistema de suspensão de uma das rodas de um automóvel, sendo M_1 a massa do automóvel, B o amortecedor, K_1 as molas, M_2 a massa da roda e K_2 a elastânciça do pneu. Note que devem ser escritas duas equações, já que existem dois deslocamentos independentes; isto é, conhecendo o deslocamento $x_1(t)$ não podemos determinar o deslocamento $x_2(t)$.

Primeiro, são somadas as forças para a massa M_1 . Na Figura 2.19 esta massa é envolvida por uma curva tracejada fechada, e todos os elementos que penetram esta curva exercem uma força em M_1 . Portanto, a equação contém três termos (não há força aplicada à massa).

$$M_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} = -B \left(\frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_2}{dt} \right) - K_1(x_1 - x_2)$$

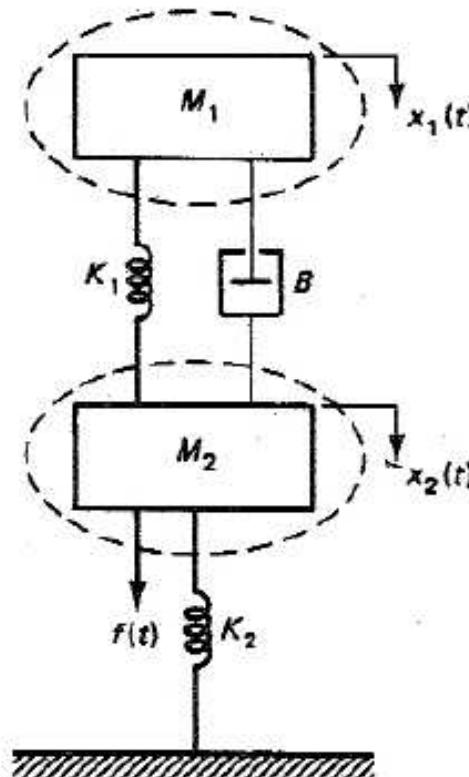


Figura 2.19 Sistema do Exemplo 2.11.

O próximo passo é somar as forças de M_2 . Três elementos estão conectados a M_2 além da força aplicada. Por isso cinco termos aparecem na equação da força.

$$M_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} = f(t) - B \left(\frac{dx_2}{dt} - \frac{dx_1}{dt} \right) - K_1(x_2 - x_1) - K_2x_2$$

Agrupando os termos e tomando a transformada de Laplace destas equações, teremos

$$M_1 s^2 X_1(s) + B [sX_1(s) - sX_2(s)] + K_1[X_1(s) - X_2(s)] = 0$$

$$M_2 s^2 X_2(s) + B [sX_2(s) - sX_1(s)] + K_1[X_2(s) - X_1(s)] + K_2 X_2(s) = F(s)$$

Suponha que desejamos encontrar uma função de transferência entre $F(s)$ e $X_1(s)$, isto é, entre a força aplicada à roda e o deslocamento do carro. Esta função de transferência pode ser encontrada eliminando-se $X_2(s)$ nas duas equações acima. O método usado aqui é o de construir um gráfico de fluxo de sinais das equações e achar a função de transferência usando a fórmula do ganho de Mason. Este método não é o mais direto; ele é dado aqui para praticarmos a construção do gráfico de fluxo de sinais (ou diagramas de blocos) e a aplicação da fórmula de ganho de Mason. Existem três variáveis nestas equações; por isso, o gráfico de fluxo de sinais tem três nós, sendo $F(s)$ o nó de entrada. A primeira equação deve ser resolvida em função de um dos termos desconhecidos e a segunda em função do outro. Escolhemos resolver a primeira equação em função de $X_1(s)$.

$$X_1(s) = \frac{Bs + K_1}{M_1 s^2 + Bs + K_1} X_2(s) = G_1(s) X_2(s)$$

A função racional (razão entre dois polinômios) mostrada é indicada como $G_1(s)$ para maior conveniência.

Agora a segunda equação pode ser resolvida para $X_2(s)$

$$\begin{aligned} X_2(s) &= \frac{1}{M_2 s^2 + Bs + K_1 + K_2} F(s) + \frac{Bs + K_1}{M_2 s^2 + Bs + K_1 + K_2} X_1(s) \\ &= G_2(s) F(s) + G_3(s) X_1(s) \end{aligned}$$

O gráfico de fluxo de sinais é construído como mostra a Figura 2.20(a). Assim, a função de transferência é da fórmula do ganho de Mason,

$$T(s) = \frac{X_1(s)}{F(s)} = \frac{G_1(s) G_2(s)}{1 - G_1(s) G_3(s)}$$

Se calcularmos esta expressão teremos

$$T(s) = \frac{Bs + K_1}{M_1 M_2 s^4 + B(M_1 + M_2)s^3 + (K_1 M_2 + K_1 M_1 + K_2 M_1)s^2 + K_2 B s + K_1 K_2}$$

O sistema, como se vê, é de quarta ordem. A dinâmica do sistema mecânico é completamente descrita por esta função de transferência. Dadas a massa do carro, a massa da roda e a elastância do pneu, a suavidade do movimento é determinada pelos parâmetros dos amortecedores e das molas. Estes parâmetros são usados para que o sistema possa ser ajustado para dar uma boa resposta. Com a deterioração dos amortecedores, o valor do parâmetro B se altera, o que modifica a função de transferência, e assim a qualidade do movimento. Note também que o mesmo acontecerá se for instalado um amortecedor com o valor B incorreto.

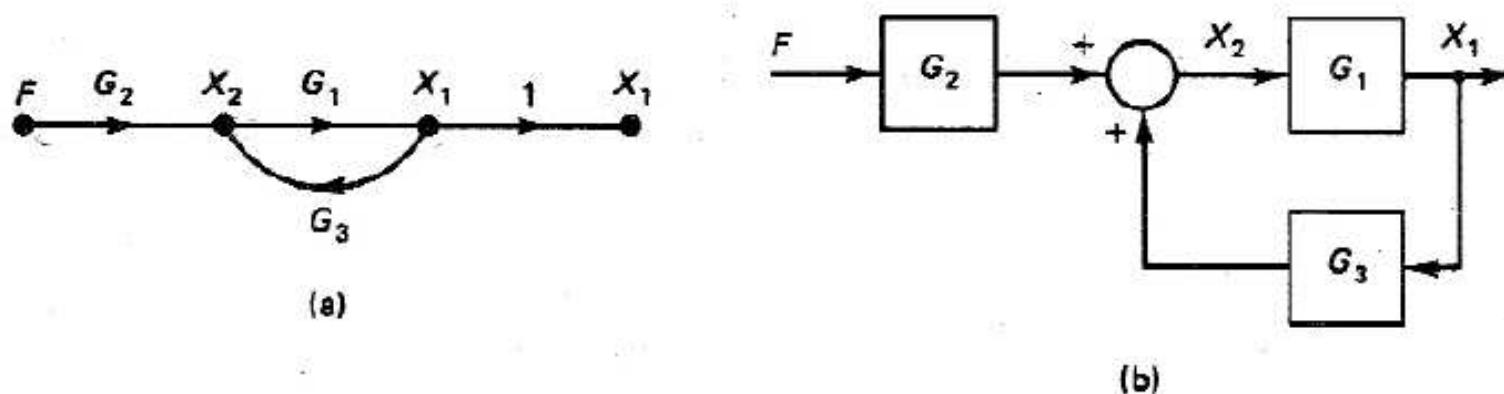


Figura 2.20 Modelos para o Exemplo 2.11.

O gráfico de fluxo de sinais construído no último exemplo não é único. Se a primeira equação for resolvida para $X_2(s)$ e a segunda para $X_1(s)$, teremos um gráfico diferente. É claro que a função de transferência $T(s) = X_1(s)/F(s)$ não mudará (veja o Problema 2.19).

Ainda no último exemplo, foi usado um gráfico de fluxo de sinais para aplicação da fórmula de ganho de Mason. Poderia ter sido usado um diagrama de blocos. A figura mostra o diagrama de blocos deste sistema, construído a partir das equações obtidas. Note que a geometria deste diagrama é idêntica à do gráfico de fluxo, já que ambos são construídos da mesma maneira e se originam da mesma equação. A fórmula do ganho de Mason é função apenas da geometria do gráfico de fluxo, e assim o diagrama de blocos pode ser usado por ela com a mesma eficiência. O diagrama de blocos da Figura 2.20(b) resulta na mesma função de transferência que o gráfico da Figura 2.20(a), como o leitor pode ver.

Um segundo aspecto deve ser observado neste exemplo. Construímos um diagrama de blocos a partir do sistema de equações como um exercício. Normalmente, o diagrama é construído de tal forma que cada um dos blocos representa, tanto quanto possível, uma parte do sistema. Esta construção nos dá uma melhor compreensão das interações no sistema físico.

2.6 Sistemas Mecânicos Rotacionais

Nesta seção serão considerados os elementos que compõem o sistema mecânico linear rotacional. Este sistema é análogo ao sistema linear de translação (as equações são da mesma forma), e, portanto, podem ser usados os mesmos procedimentos para escrever suas equações.

Os três elementos do sistema linear rotacional são descritos na Figura 2.21. O primeiro elemento, o *momento de inércia*, é definido pela relação

$$\tau(t) = J \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = J \frac{d\Omega(t)}{dt} \quad (2-24)$$

onde $\tau(t)$ é o torque aplicado, J é o momento de inércia, θ é o ângulo de rotação e $\Omega(t)$ é a velocidade angular. Esta equação é análoga à definida para a massa no sistema de translação, (2-20). De fato, o momento de inércia de um corpo é função de sua massa e geometria. O segundo elemento na Figura 2.21, o *attrito*, é definido pela equação

$$\tau(t) = B \left(\frac{d\theta_1(t)}{dt} - \frac{d\theta_2(t)}{dt} \right) = B[\Omega_1(t) - \Omega_2(t)] \quad (2-25)$$



Figura 2.21 Elementos mecanicos rotacionais.

onde $\tau(t)$ é o torque aplicado, B é o coeficiente de amortecimento, $\theta(t)$ é um ângulo de rotação e $\Omega(t)$ é uma velocidade angular. O elemento de rotação é considerado como tendo momento de inércia igual a zero, e admitimos que o atrito ocorre entre as duas partes mostradas do elemento.

Para o terceiro elemento, uma *mola rotacional*, a equação é

$$\tau(t) = K[\theta_1(t) - \theta_2(t)] \quad (2-26)$$

onde K é o coeficiente da mola. Novamente, consideramos que o elemento de rotação tem momento de inércia zero. Para determinar as equações que descrevem o sistema rotacional, utilizamos as equações anteriores juntamente com o princípio que estabelece que a soma dos torques ao redor do eixo de uma inércia deve ser igual ao momento de inércia vezes sua aceleração angular. A seguir, são dados dois exemplos:

Exemplo 2.12

Considere o pêndulo de torção modelado na Figura 2.22. Uma aplicação deste tipo de pêndulo são os relógios que normalmente são colocados dentro de uma cúpula de vidro. O momento de inércia da esfera do pêndulo é representado por J , B indica o atrito entre a esfera e o ar, e K representa a elastância da suspensão metálica. Aqui assumimos que o torque é aplicado à esfera do pêndulo, enquanto em um relógio o torque é aplicado por um complexo mecanismo de mola. Somando os torques na esfera temos

$$J \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = \tau(t) - B \frac{d\theta(t)}{dt} - K\theta(t) \quad (2-27)$$

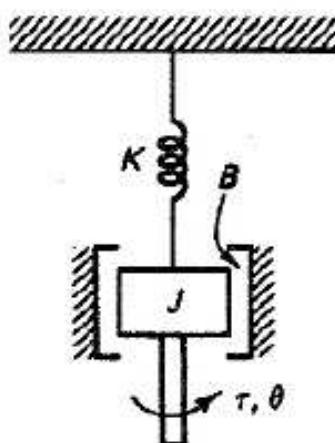


Figura 2.22 Sistema para o Exemplo 2.12.

A função de transferência é então facilmente obtida como

$$\frac{\theta(s)}{T(s)} = \frac{1}{Js^2 + Bs + K} \quad (2-28)$$

Note a similaridade desta função de transferência com a do sistema mecânico de translação do Exemplo 2.10. De fato, muitos tipos diferentes de sistemas físicos podem ser precisamente modelados por uma função de transferência de segunda ordem do tipo dado acima. Este efeito é investigado mais detalhadamente na seção dos sistemas análogos.

Exemplo 2.13

Como segundo exemplo de sistemas rotacionais, definiremos o modelo de um satélite rígido. O satélite é ilustrado na Figura 2.23. Assumimos que ele é rígido e está em um ambiente sem atrito, girando em torno de um eixo perpendicular a esta página. O torque é aplicado pelo disparo dos jatos propulsores indicados na figura. Por exemplo, o acionamento dos dois propulsores, como mostra a figura, tende a aumentar o ângulo θ . Se os outros dois propulsores forem acionados, θ tende a decrescer. Consideraremos que o torque propulsor (empuxo) é a entrada do sistema e o ângulo de atitude θ é a saída. Então,

$$\tau(t) = J \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

uma vez que nenhum atrito do ar está presente. O momento de inércia do satélite é J . A função de transferência então será

$$G(s) = \frac{\theta(s)}{\tau(s)} = \frac{1}{Js^2} \quad (2-29)$$

Este é um modelo razoavelmente preciso de um satélite rígido e é útil como exemplo devido a sua simplicidade. Note que, se anexarmos painéis solares como acessórios do satélite, a característica de rigidez não é mais válida (algumas partes do satélite podem se mover em relação a outras), e o modelo torna-se bem mais complexo.

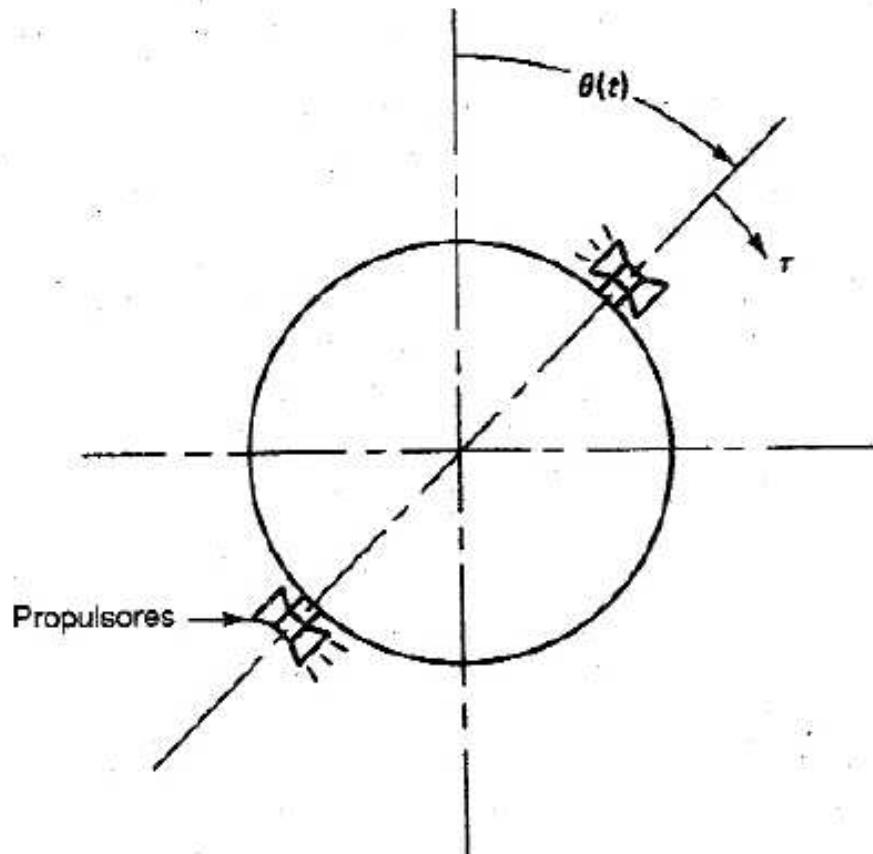


Figura 2.23 Um satélite.

2.7 Sistemas Eletromecânicos

Nesta seção desenvolveremos os modelos de dois tipos diferentes de sistemas eletromecânicos: o gerador dc e o servomotor dc.

Gerador dc

Consideramos que o gerador é acionado por uma fonte de energia chamada motor principal, que possui capacidade suficiente, de modo que a carga elétrica do gerador não afeta sua velocidade. Assumimos que a velocidade é constante. Um diagrama do circuito do gerador é dado na Figura 2.24. A equação para o circuito de campo é

$$e_f = R_f i_f + L_f \frac{di_f}{dt} \quad (2-30)$$

onde a dependência funcional das variáveis no tempo é omitida por conveniência. Nesta equação, e_f é a tensão de campo aplicada e é considerada como a entrada do sistema. A corrente de campo é i_f , a resistência da bobina de campo é R_f e a indutância, L_f . A equação para o circuito de armadura é

$$e_g = R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + e_a \quad (2-31)$$

onde e_g é a tensão gerada no circuito da armadura, i_a a corrente de armadura, e_a a tensão nos terminais da armadura, e R_a e L_a a resistência e indutância da armadura, respectivamente. A equação que relaciona a tensão gerada e_g ao fluxo ϕ é⁷

$$e_g = K\phi \frac{d\theta}{dt} \quad (2-32)$$

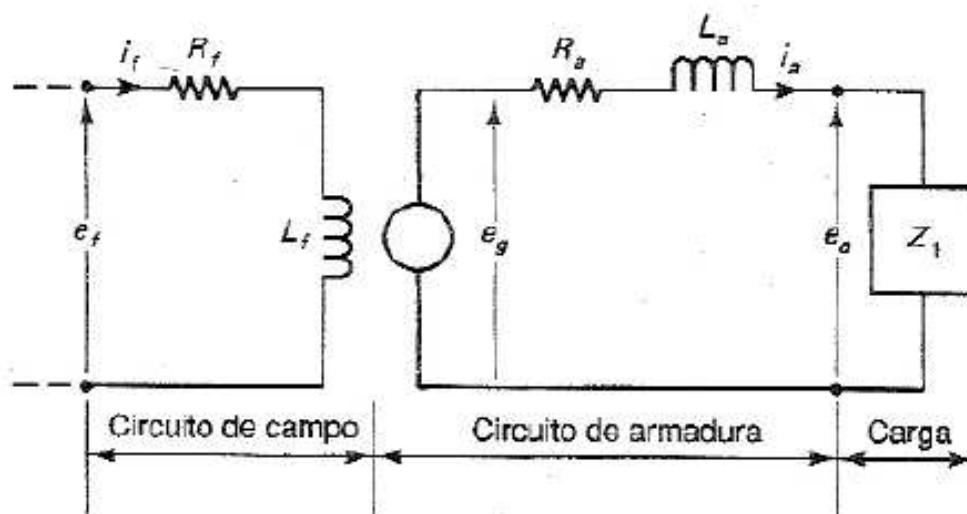


Figura 2.24 Um gerador dc.

⁷ McPHERSON, G. *An Introduction to Electrical Machines and Transformers*. Nova Iorque: John Wiley, 1981.

Nesta equação, K é um parâmetro determinado pela estrutura física do gerador e $d\theta/dt$ é a velocidade angular da armadura. Uma vez que $d\theta/dt$ foi considerada constante e como o fluxo ϕ é diretamente proporcional à corrente de campo i_f , a tensão gerada, de (2-32), pode ser expressa como

$$e_g = K_g i_f \quad (2-33)$$

No desenvolvimento a seguir, todas as condições iniciais são ignoradas. As transformadas de Laplace de (2-30) e (2-33) são, respectivamente,

$$E_f(s) = (sL_f + R_f)I_f(s) \quad (2-34)$$

$$E_g(s) = K_g I_f(s) \quad (2-35)$$

As equações para o circuito da armadura são escritas usando a análise de impedância dada na Seção 2.2. Fazendo $Z_a(s)$, a impedância do circuito de armadura e $Z_l(s)$ a impedância da carga do gerador, podemos escrever

$$I_a(s) = \frac{E_g(s)}{Z_a(s) + Z_l(s)} = \frac{E_g(s)}{L_a(s) + R_a + Z_l(s)} \quad (2-36)$$

e

$$E_a(s) = I_a(s)Z_l(s) \quad (2-37)$$

Nestas equações admitimos que a tensão do campo $E_f(s)$ é a entrada do sistema e que a tensão da armadura $E_a(s)$ é a saída. Há quatro incógnitas: $I_f(s)$, $E_g(s)$, $I_a(s)$ e $E_a(s)$. Assim, as quatro equações (2-34), (2-35), (2-36) e (2-37) podem ser resolvidas para fornecer a saída em função da entrada, que é a função de transferência. Entretanto, primeiro construiremos um diagrama em blocos a partir destas equações e obteremos a função de transferência deste diagrama. De (2-34), encontramos $I_f(s)$:

$$I_f(s) = \frac{E_f(s)}{L_f(s) + R_f} \quad (2-38)$$

e esta equação nos dá o primeiro bloco da Figura 2.25. Obtemos o segundo bloco diretamente de (2-35). O terceiro bloco é obtido de (2-36), e o quarto, de (2-37).

Como não há malhas no diagrama da Figura 2.25, a função de transferência é simplesmente o produto dos ganhos dos quatro blocos.

$$G(s) = \frac{E_a(s)}{E_f(s)} = \frac{K_g Z_l(s)}{(L_f s + R_f)[L_a s + R_a + Z_l(s)]} \quad (2-39)$$

Note que, apesar de chamarmos este dispositivo de um gerador dc, a função de transferência dá a forma como a tensão de saída varia no tempo em função da variação no tempo da tensão do campo. Dado $e_f(t)$, podemos determinar $e_a(t)$ de (2-39). Assim, (2-39) nos dá a *dinâmica* do gerador.

Deve-se notar que uma mudança nas condições de carga do sistema afeta a sua função de transferência. Esta mudança ocorre freqüentemente nos sistemas e para alguns é um fator que pode facilmente passar despercebido; portanto, o engenheiro deve estar sempre atento aos efeitos da carga quando trabalha com as funções de transferência.

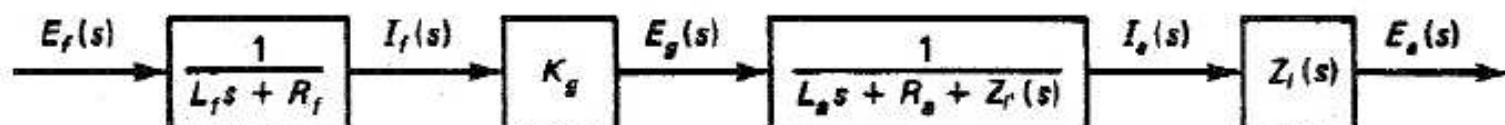


Figura 2.25 Diagrama em blocos do gerador.

Servomotor

Um *servomotor* é um motor dc⁸ projetado especificamente para ser usado em um sistema de controle de malha fechada. O diagrama do circuito de um servomotor é dado na Figura 2.26. Nesta figura, $e_a(t)$ é a tensão da armadura, que é considerada a entrada do sistema. A resistência e a indutância da armadura são R_m e L_m , respectivamente. A tensão $e_m(t)$ é a tensão gerada na armadura devido ao movimento de sua bobina no campo magnético do motor e normalmente é chamada de força contra-eletromotriz, FCEM. Portanto, podemos escrever

$$e_m(t) = K\phi \frac{d\theta}{dt} \quad (2-40)$$

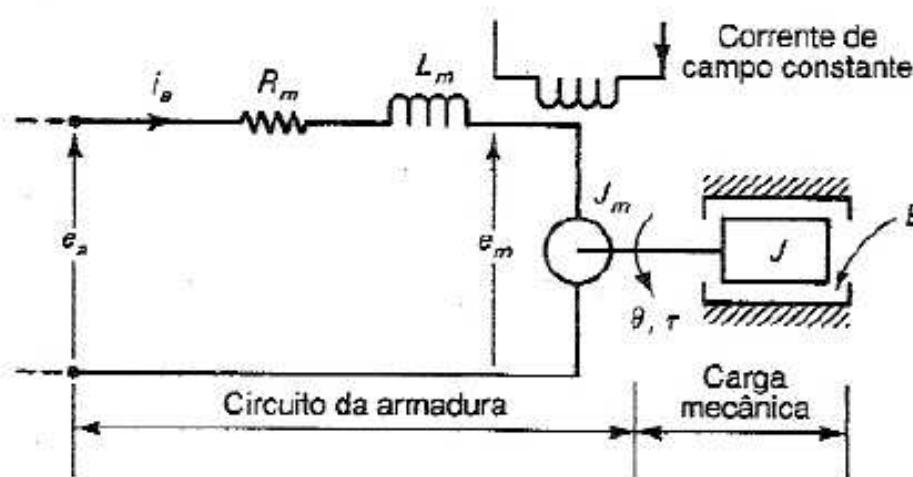
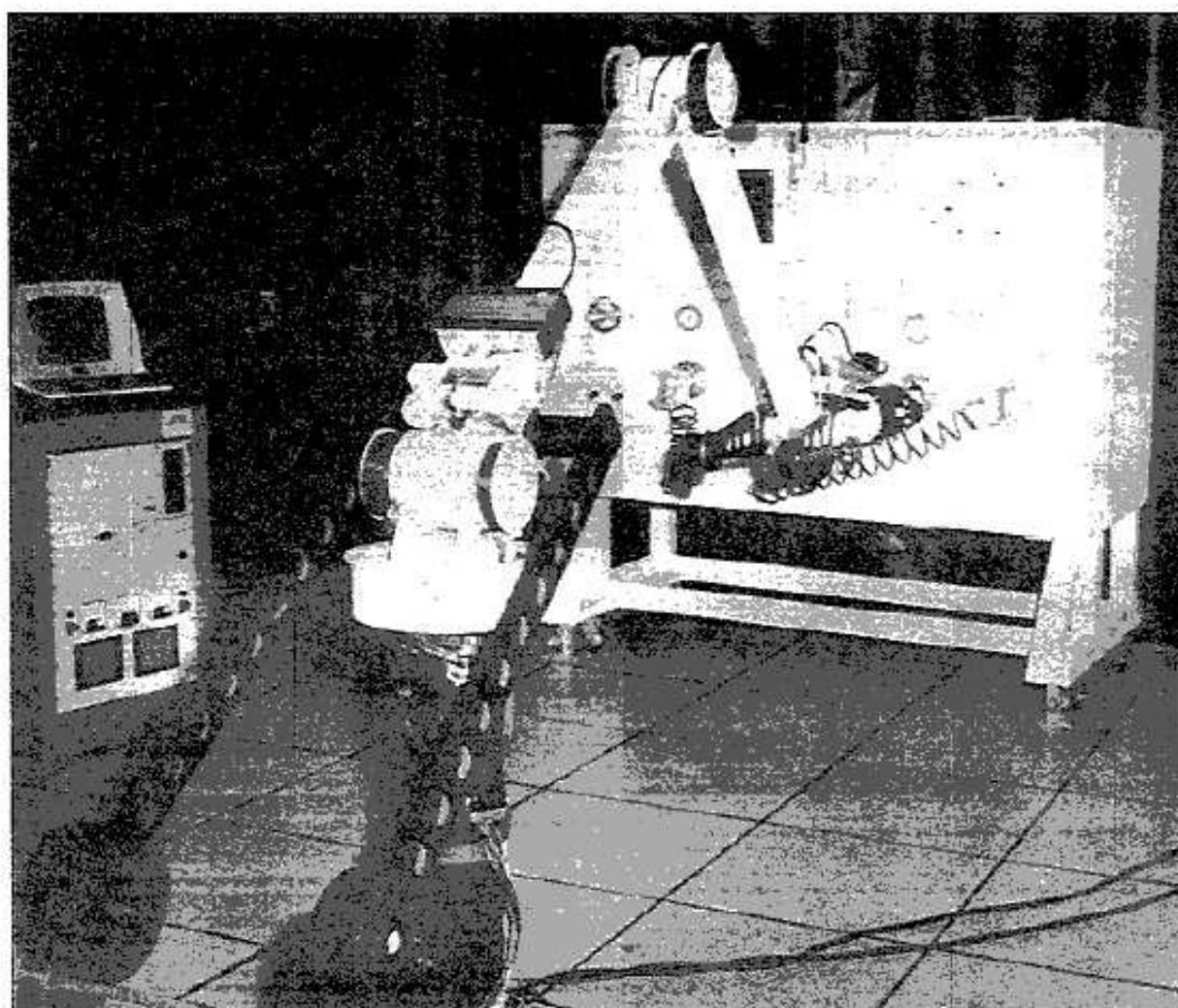


Figura 2.26 Servomotor.



Um robô em desenvolvimento pela NASA para execução de serviços em satélites em órbita. O robô pode ser “ensinado” a realizar sozinho tarefas repetitivas. (Cortesia da NASA.)

onde K é um parâmetro do motor, ϕ é o fluxo do campo e θ é o ângulo do eixo do motor; isto é, $d\theta/dt$ é a velocidade angular do eixo. O fluxo ϕ é considerado constante; portanto

$$e_m(t) = K_m \frac{d\theta}{dt} \quad (2-41)$$

Note que esta consideração é muito importante; se o fluxo é uma variável do sistema, (2-40) torna-se uma equação não-linear, devido ao produto de duas variáveis. Então a análise torna-se mais difícil e, em particular, a transformada de Laplace não pode ser usada. Lembre que a transformada de Laplace do produto de duas funções não é igual ao produto das transformadas.

A transformada de Laplace de (2-41) é

$$E_m(s) = K_m s \Theta(s) \quad (2-42)$$

Para o circuito da armadura podemos escrever

$$E_a(s) = (L_m s + R_m) I_a(s) + E_m(s) \quad (2-43)$$

que resolvendo para $I_a(s)$:

$$I_a(s) = \frac{E_a(s) - E_m(s)}{L_m s + R_m} \quad (2-44)$$

A equação para o torque desenvolvido é

$$\tau(t) = K_t \phi i_a(t) = K_t i_a(t) \quad (2-45)$$

uma vez que o fluxo é considerado constante. Note que esta equação também não seria linear se o fluxo variasse com o tempo. A transformada de Laplace desta equação é

$$T(s) = K_t I_a(s) \quad (2-46)$$

A equação final é obtida pela soma dos torques na armadura do motor. Na Figura 2.26, o momento de inércia J inclui toda a inércia conectada ao eixo, e B inclui o atrito do ar e o atrito dos rolamentos. Portanto, a equação do torque é

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} = \tau(t) - B \frac{d\theta}{dt} \quad (2-47)$$

e assim podemos escrever

$$T(s) = (J s^2 + B s) \Theta(s) \quad (2-48)$$

Resolvendo esta equação para o ângulo do eixo do motor temos

$$\Theta(s) = \frac{T(s)}{J s^2 + B s} \quad (2-49)$$

Um diagrama em blocos pode ser construído agora das quatro equações (2-42), (2-44), (2-46) e (2-49), como mostra a Figura 2.27. Da fórmula do ganho de Mason, podemos escrever a função de transferência do motor

$$G(s) = \frac{\Theta(s)}{E_a(s)} = \frac{G_1(s) K_t G_2(s)}{1 + K_t G_1(s) G_2(s) H(s)} \quad (2-50)$$

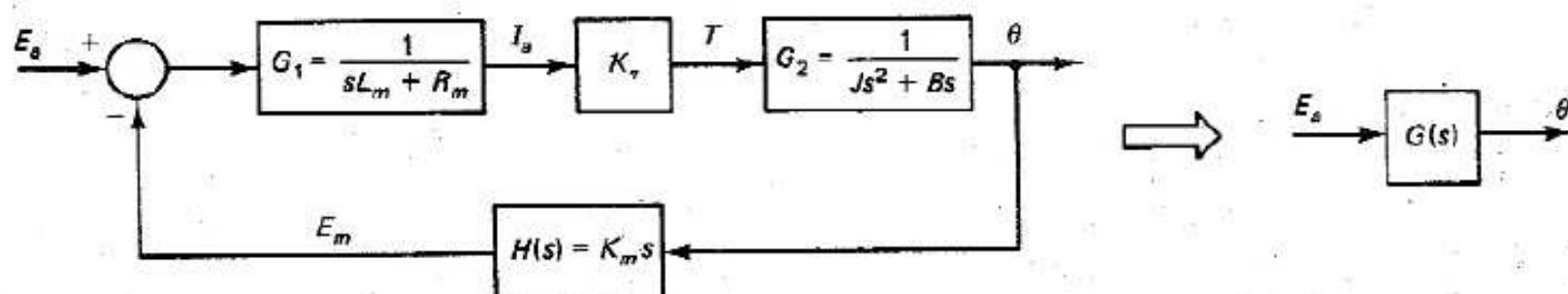


Figura 2.27 Diagrama em blocos do servomotor.

Calculando esta expressão teremos

$$G(s) = \frac{K_t}{JL_m s^3 + (BL_m + JR_m)s^2 + (BR_m + K_t K_m)s} \quad (2-51)$$

Uma aproximação que pode ser freqüentemente feita para os servomotores é ignorar a indutância da armadura L_m . Quando esta indutância é pequena o suficiente para ser ignorada, a função de transferência é de segunda ordem e é dada por

$$G(s) = \frac{K_t}{JR_m s^2 + (BR_m + K_t K_m)s} \quad (2-52)$$

Note que esta função de transferência depende da inércia e do atrito da carga acionada, assim como dos parâmetros do motor. Lembre-se da definição de J e B em (2-47).

O servomotor é usado em muitos exemplos neste livro, com o modelo dado por (2-51) ou (2-52). A Figura 2.28 mostra um sistema particular de um servomotor utilizado em um sistema de rastreamento por radar. O objetivo deste sistema é rastrear uma aeronave ou algum alvo equivalente automaticamente. Na Figura 2.28 o sistema eletrônico do receptor do radar calcula o erro, $e(t)$, entre o ângulo do alvo, $\theta_A(t)$, e o ângulo apontado pela antena, $\theta_R(t)$. Os blocos referentes ao motor, pedestal da antena e os demais teriam o mesmo modelo desenvolvido acima, e a inércia e o atrito seriam uma parte deste modelo.

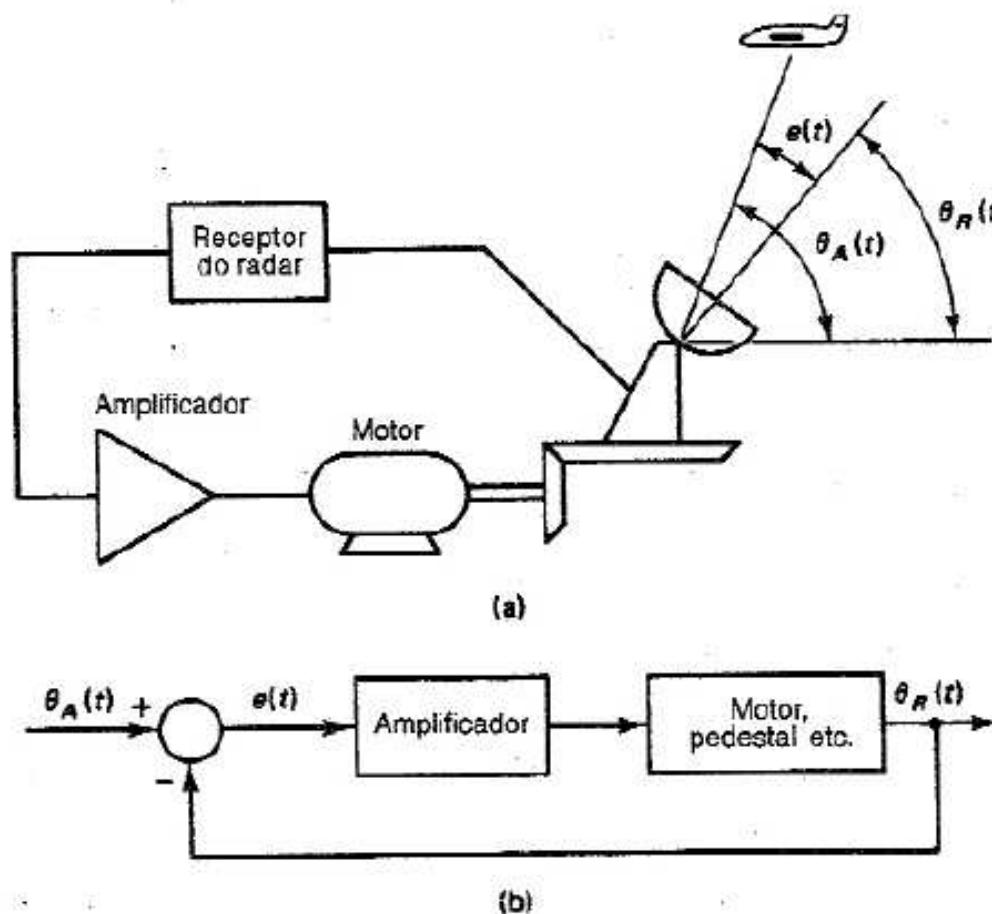


Figura 2.28 Um sistema de rastreamento por radar.

2.8 Sensores

Esta seção apresenta uma breve introdução aos sensores usados nos sistemas de controle. Para os leitores interessados em um tratamento mais aprofundado, vários livros bons, dedicados exclusivamente aos sensores, estão disponíveis.^{9, 10, 11} Um bom material a esse respeito são os manuais dos fabricantes; veja, por exemplo, o texto de Herceg.¹²

Nesta discussão, consideraremos apenas os sensores de posição, velocidade e aceleração. Todos estes sensores têm aplicação no controle robótico, por exemplo.

Posição

Provavelmente o sensor de posição mais simples é um resistor variável (potenciômetro). Os resistores podem medir tanto a posição de translação como a de rotação, como ilustra a Figura 2.29. Em cada caso, R_1 é a resistência do cursor para ponto comum, e R é a resistência total. A resistência R_1 é então uma função da posição. A mesma equação se aplica para a medida da posição lateral ou da posição angular, e, pelo divisor de tensão,

$$e(t) = \frac{R_1(t)}{R} E \quad (2-53)$$

onde $e(t)$ é a saída do sensor, E é a tensão dc aplicada e $R_1(t)$ é proporcional ao deslocamento. Normalmente, a resistência R_1 é uma função linear do deslocamento e, portanto, $e(t)$ é diretamente proporcional ao deslocamento. Assim,

$$e(t) = K_x x(t), \quad e(t) = K_\theta \theta(t)$$

onde K_x e K_θ são constantes que dependem da construção dos resistores e da tensão dc, E .

O uso do potenciômetro como sensor tem as seguintes vantagens:

1. Baixo custo.
2. Pode proporcionar uma alta-tensão de saída.

⁹ DeSILVA, C. W. *Control Sensors and Actuators*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1989.

¹⁰ HODESKI, M. F. *Design of Microprocessor Sensor & Control Systems*. Reston, VA: Reston Publishing Company, 1985.

¹¹ WOLF, S. & SMITH, R. *Student Reference Manual for Electronic Instrumentation*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1990.

¹² HERCEG, E. E. *Handbook of Measurement and Control*. Pennsauken, NJ: Schaenitz Engineering, 1976.

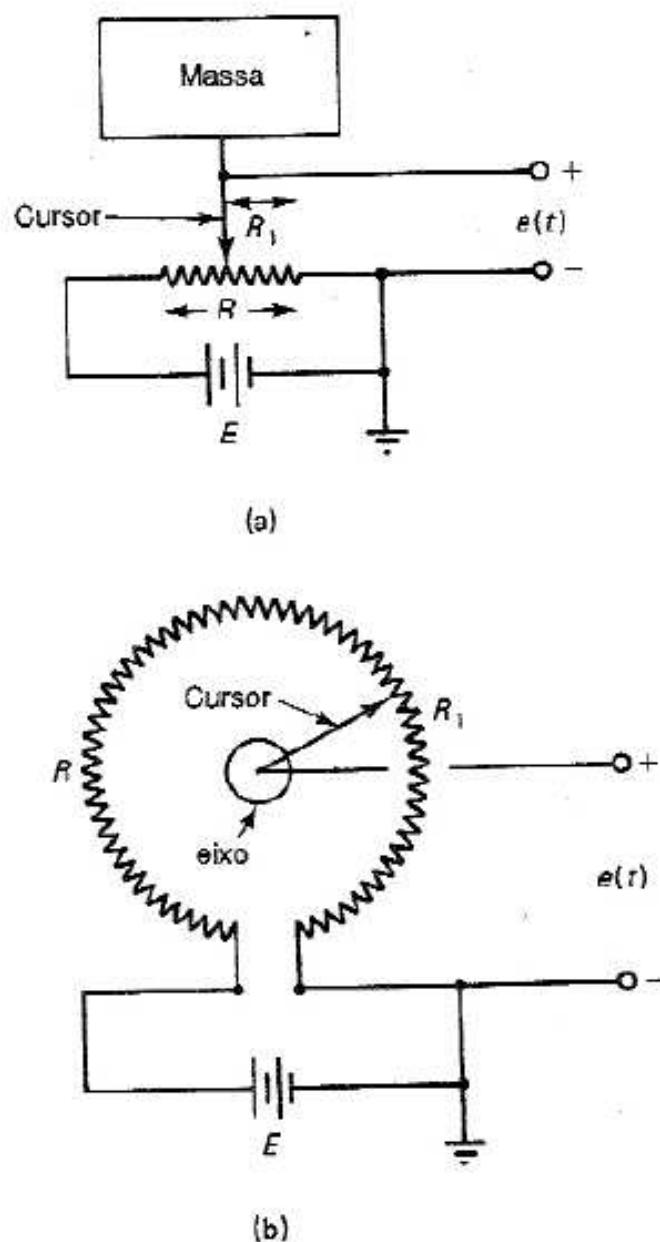


Figura 2.29 Sensores de posição resistivos.

Algumas desvantagens são:

1. O potenciômetro se torna ruidoso com o tempo (falha de contato).
2. Desgaste.
3. Apresenta carga de atrito para o sistema mecânico.
4. O cursor pode “saltar” com movimentos rápidos.

Um segundo sensor de posição é um codificador. A Figura 2.30 mostra um *codificador incremental* ótico. Existem codificadores para os movimentos de translação e rotação. Na Figura 2.30, um pulso de tensão é gerado cada vez que uma janela do disco passa pela fonte de luz. Neste sensor, deve haver um circuito eletrônico que conte os pulsos de forma a determinar o ângulo de rotação. Este sensor é chamado codificador incremental devido à geração de um pulso que indica uma variação incremental da posição e não a posição real.

Normalmente, é necessário uma janela de referência para determinar a posição absoluta de inicialização do sistema, como mostra a Figura 2.30. A janela de referência também é necessária nos casos de falta temporária de energia ou quando os ruídos geram uma contagem incorreta.

Este codificador não indicará uma reversão na direção do movimento. Um procedimento usado para determinar a direção de rotação é colocar um segundo receptor em outra janela numa trilha diferente do codificador, com o segundo sensor afastado do primeiro em relação ao centro das janelas. O segundo sensor aponta para a borda de uma janela quando o primeiro aponta para o centro da outra. O resultado é mostrado na Figura 2.31 para o movimento em uma velocidade constante. A saída do sensor 1 em avanço de 90° do sensor 2 indica uma direção de rotação, enquanto o atraso de 90° da saída de um em relação ao outro indica rotação na direção oposta. Na Figura 2.31, ω é a freqüência das tensões em rad/s.

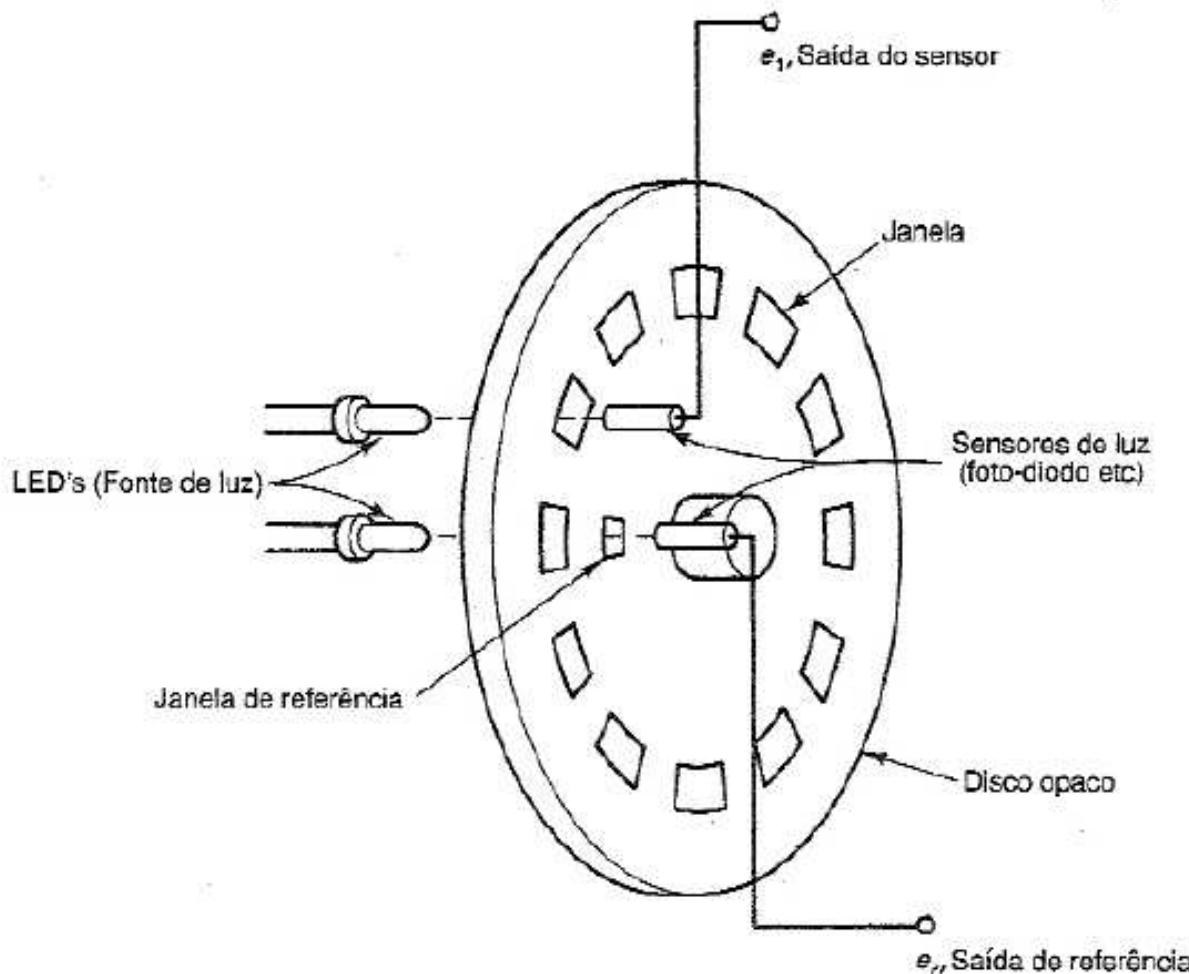


Figura 2.30 Codificador incremental ótico.

Existem codificadores mais complexos que geram um código binário na saída; o código binário indica a posição absoluta¹³ e pode ser transmitido diretamente a um computador digital para fins de controle. Este tipo de codificador é chamado *codificador absoluto*, e não será discutido aqui.

13 DeSILVA, C. W. Op. cit.

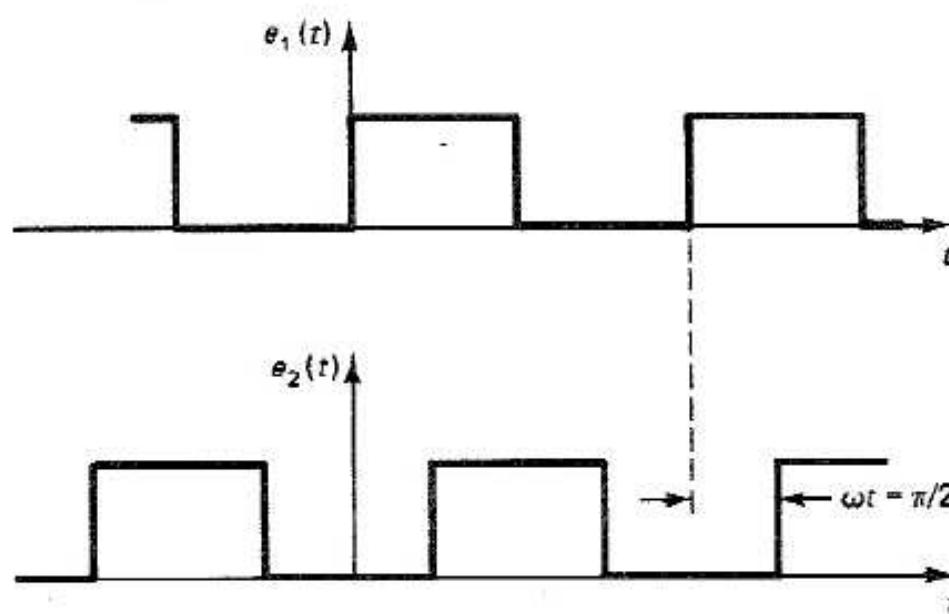


Figura 2.31 Determinação da direção de rotação.

Velocidade

O codificador da Figura 2.30 pode ser usado para medir a velocidade pela contagem do número de pulsos por minuto. Um segundo procedimento para determinar a velocidade é a medida do tempo entre os pulsos adjacentes, ou o tempo para que ocorra um dado número de pulsos. Em cada caso, as medições podem ser bastante imprecisas nas pequenas velocidades, em que os pulsos ocorrem a uma taxa muito lenta.

Um gerador dc especial, chamado *tacômetro*, pode também ser usado para medir a velocidade. Um tipo de tacômetro tem o campo magnético formado por um ímã permanente.¹⁴ Então a equação do gerador dc (2-32) pode ser expressa como

$$e_g(t) = K\phi \frac{d\theta(t)}{dt} = K_\tau \frac{d\theta(t)}{dt} \quad (2-54)$$

onde $e_g(t)$ é a tensão gerada, ϕ é o fluxo magnético, θ é o ângulo do eixo e K é determinado pela construção física do tacômetro. Assim,

$$E_g(s) = K_\tau \Omega(s) \quad (2-55)$$

onde $\Omega(s) = L [d\theta/dt]$ e as unidades de $\theta(t)$ são radianos.

No circuito da armadura do gerador da Figura 2.24, a tensão de saída $E_a(s)$ é dada por

$$E_a(s) = I_a(s)Z_l(s) = \frac{Z_l(s)}{L_a s + R_a + Z_l(s)} K_\tau \Omega(s)$$

14 DeSILVA, C. W. Idem ibd.

Para esta faixa de freqüência em que o valor da impedância da carga é muito maior que a impedância da armadura, $E_a(s) \approx K_\tau \Omega(s)$, e a tensão de saída do tacômetro é diretamente proporcional à velocidade do eixo. A função de transferência do tacômetro, com a posição do eixo, $\Theta(s)$, como entrada, é dada por

$$\frac{E_a(s)}{\Theta(s)} = K_\tau s \quad (2-56)$$

Portanto, podemos ver a diferenciação equivalente que aparece na medição de velocidade. Entretanto, a diferenciação real não ocorre; a medição da velocidade é feita diretamente.

Um segundo procedimento para obtenção da velocidade é medir a posição e então diferenciar este sinal. Se a medida da posição contém ruídos de alta freqüência (a amplitude do ruído muda rapidamente), a diferenciação aumentará a amplitude destes ruídos, já que a saída do diferenciador é igual à taxa de variação da amplitude do sinal. Quando possível, a velocidade é sempre medida, em vez de se utilizar a diferenciação da posição para obtê-la.

Aceleração

Consideraremos agora a medida da aceleração. Para uma massa rígida isolada,

$$f(t) = M\ddot{x}(t) = Ma(t) \quad (2-57)$$

onde $f(t)$ é a força, $x(t)$ é o deslocamento e $a(t)$ é a aceleração. Portanto, se a força é medida, a aceleração é dada por

$$a(t) = \frac{1}{M} f(t) = Kf(t) \quad (2-58)$$

e é diretamente proporcional à força. Os acelerômetros são baseados na medição da força aplicada a uma massa; isto é, a força é medida e a aceleração é calculada de (2-58).

Considere o acelerômetro ilustrado na Figura 2.32. Ele é rigidamente acoplado ao corpo e deve determinar sua aceleração. Para este acelerômetro, a força de inércia $f(t)$ deve ser determinada pela geração de uma força $f_a(t)$ necessária para impedir o movimento da massa M em relação ao corpo do acelerômetro. Então, $f_a(t) = f(t)$ e a aceleração do corpo é dada por

$$a(t) = \frac{1}{M} f_a(t) \quad (2-59)$$

Não consideraremos o equipamento eletrônico e os métodos usados para gerar a força $f_a(t)$; estes tópicos estão além do escopo deste livro. Entretanto, é necessário um sistema de malha fechada para manter a posição constante da massa M em relação ao acelerômetro. Para este instrumento, é necessário um sistema de controle de malha fechada interno ao equipamento.

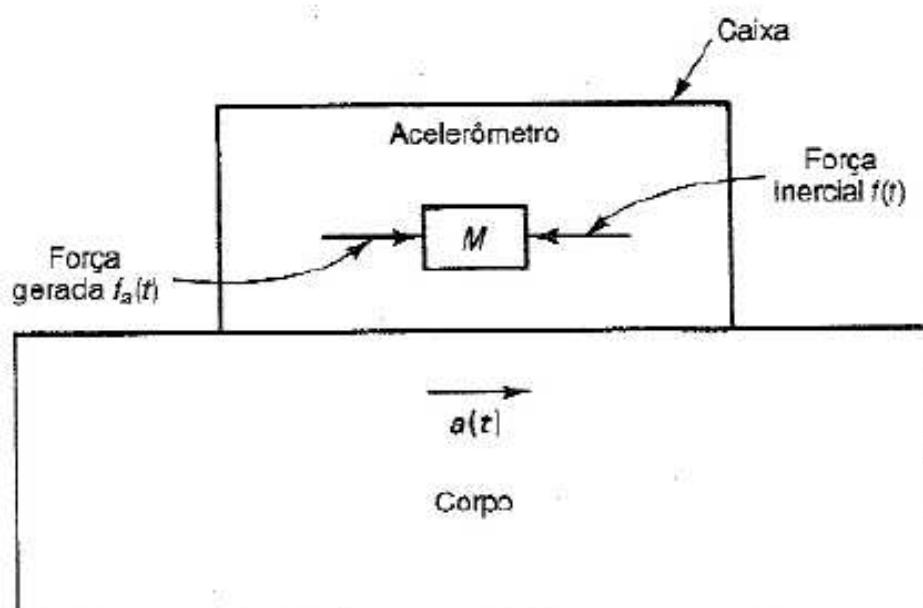


Figura 2.32 Medição da aceleração.

Um segundo tipo de acelerômetro é baseado na característica piezoelétrica de certos cristais. Uma força aplicada em uma dada direção na estrutura do cristal gera uma tensão entre duas superfícies deste cristal. Esta tensão é proporcional à força aplicada.

Um diagrama do acelerômetro piezoelétrico é dado na Figura 2.33. A aceleração da massa cria uma força no cristal, gerando uma tensão $e(t)$ proporcional à força. Assim, a tensão $e(t)$ é proporcional à aceleração da massa. A mola mecânica e a massa na Figura 2.33 dão ao acelerômetro uma ressonância (um pico na resposta em freqüência). As freqüências do movimento da massa devem ser bem menores que a freqüência ressonante, ou as medições resultantes apresentarão erros grosseiros. Obviamente, qualquer sensor terá uma largura de faixa limitada dentro da qual o instrumento é preciso; isto é, qualquer sensor apresenta uma dinâmica.

Considere $x(t)$ como o deslocamento da massa do acelerômetro. Em (2-59), como $f_a(t) = \ddot{x}(t)$, a função de transferência de um acelerômetro é dada por

$$\frac{E(s)}{X(s)} = \frac{1}{M} s^2 \quad (2-60)$$

Note que, efectivamente, o acelerômetro é um diferenciador de segunda ordem da posição. Como no caso da medição de velocidade, em geral não obtemos a aceleração através da diferenciação do sinal de posição, devido à amplificação dos ruídos de alta freqüência.

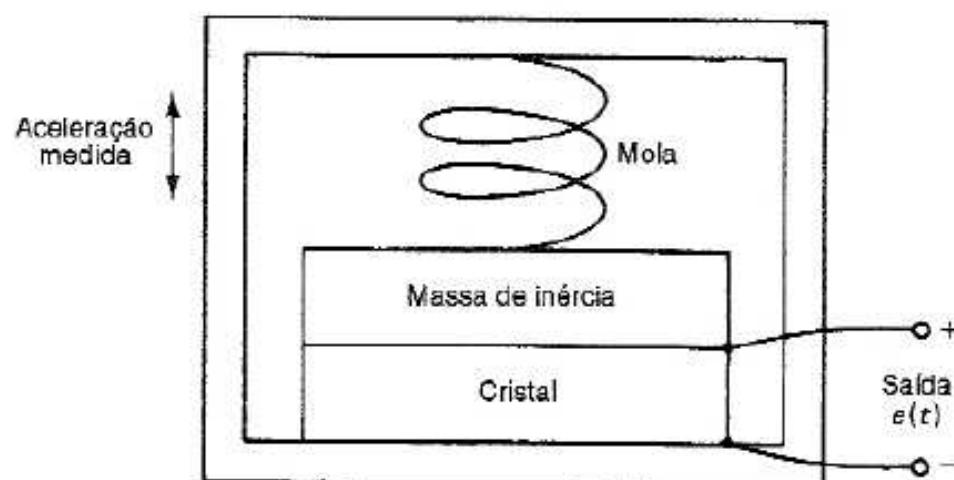


Figura 2.33 Acelerômetro piezoelétrico.

2.9 Um Sistema de Controle de Temperatura

Nesta seção, é modelado um sistema específico de controle de temperatura. A Figura 2.34 mostra um diagrama do sistema. O líquido de temperatura T deixa o tanque a uma determinada taxa e é reposto por um líquido na temperatura T_i , onde $T_i < T$. O líquido no interior do tanque é aquecido por um aquecedor elétrico e agitado por um misturador de forma que o conteúdo pode ser considerado na temperatura T que, em geral, varia com o tempo.

São necessárias as seguintes definições para definirmos o modelo do sistema:

q_e = Fluxo de calor fornecido pelo aquecedor

q_l = Fluxo de calor no líquido

q_o = Fluxo de calor que entra no tanque com o líquido de saída

q_i = Fluxo de calor que entra no tanque com o líquido de chegada

q_s = Fluxo de calor através da superfície do tanque

Pelo princípio da conservação de energia, o calor adicionado ao tanque deve ser igual ao calor transferido por ele mais o calor que permanece no interior. Assim,

$$q_e + q_i = q_l + q_o + q_s \quad (2-61)$$

Agora

$$q_l = C \frac{dT}{dt} \quad (2-62)$$

onde C é a capacidade térmica do líquido; isto é, C é um parâmetro do sistema.¹⁵ Fazendo V igual ao fluxo de entrada e de saída do tanque (considerados iguais) e H igual ao calor específico do líquido, podemos escrever

15 TRIMMER, J. D. *Response of Physical Systems*. Nova Iorque: John Wiley, 1950.

$$q_i = VHT_i \quad (2-63)$$

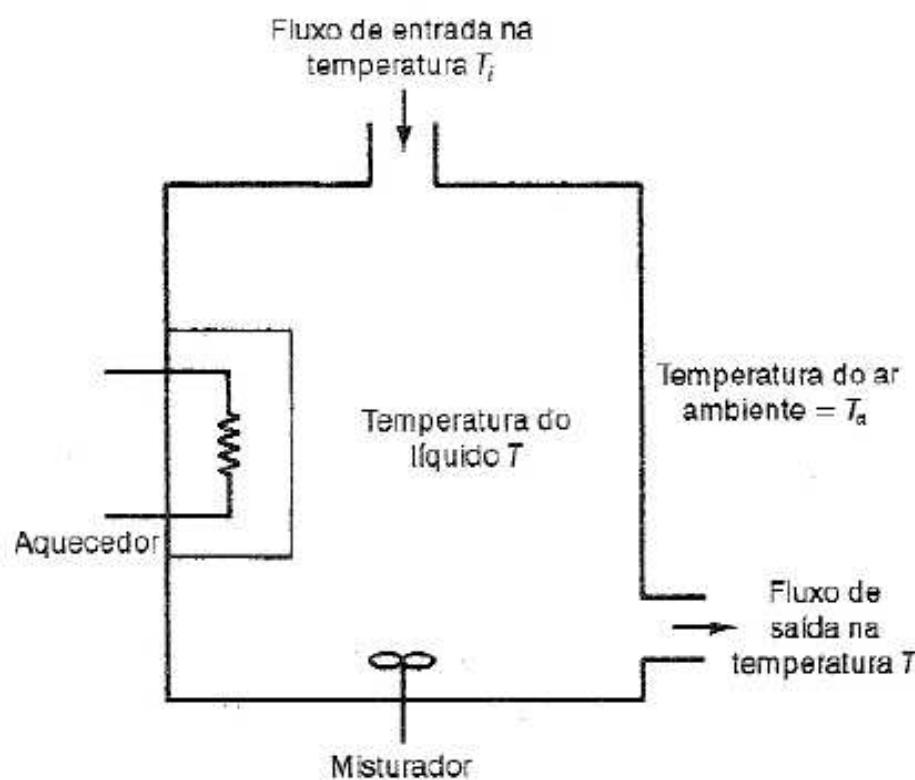


Figura 2.34 Um sistema térmico.

e

$$q_o = VHT \quad (2-64)$$

Se R é a resistência térmica para o fluxo através da superfície do tanque e T_a é a temperatura ambiente fora do tanque, então

$$q_s = \frac{T - T_a}{R} \quad (2-65)$$

Substituindo (2-62) a (2-65) em (2-61), temos

$$q_e + VHT_i = C \frac{dT}{dt} + VHT + \frac{T - T_a}{R} \quad (2-66)$$

Esta é uma equação diferencial linear de primeira ordem com q_e , T_i e T_a como as funções da excitação. Em termos de um sistema de controle, a entrada de controle é a saída do aquecedor elétrico q_e . Os termos T_i e T_a são chamados entradas de distúrbio, ou simplesmente distúrbios, e são entradas sobre as quais não temos controle. Geralmente, estas entradas causam respostas indesejáveis, já que não podemos controlá-las. Normalmente, um dos requisitos principais de um projeto de sistema de controle é minimizar os efeitos dos distúrbios no sistema.

Para continuar a discussão de (2-66), a temperatura T é a variável a ser controlada, e consideramos que esta é a saída. Note que, se o fluxo V é uma função do tempo, (2-66) é uma equação diferencial linear de primeira ordem variante no tempo. Não podemos encontrar

funções de transferência que representem esta equação, uma vez que, no segundo termo do lado direito de (2-66), V e T são funções do tempo.

Para simplificar a análise, assumimos que o fluxo V é constante. Tomando a transformada de Laplace de (2-66) e resolvendo para a temperatura $T(s)$, teremos

$$T(s) = \frac{Q_e(s)}{Cs + VH + (1/R)} + \frac{VHT_i(s)}{Cs + VH + (1/R)} + \frac{(1/R)T_a(s)}{Cs + VH + (1/R)} \quad (2-67)$$

Diferentes configurações podem ser usadas para representar (2-67) como um diagrama de blocos; uma delas é dada na Figura 2.35.

Se ignorarmos as entradas de distúrbio, a função de transferência será dada por

$$G(s) = \frac{T(s)}{Q_e(s)} = \frac{K_1}{\tau s + 1} \quad (2-68)$$

Uma função de transferência deste tipo é chamada *atraso de primeira ordem*. A razão do termo atraso se tornará clara quando for estudada a resposta em freqüência. Em (2-68) os termos do distúrbio foram ignorados; entretanto, como veremos mais tarde, em algum estágio do projeto eles devem ser considerados. Como afirmamos, para alguns projetos de controle, a minimização dos efeitos dos distúrbios é a principal especificação.

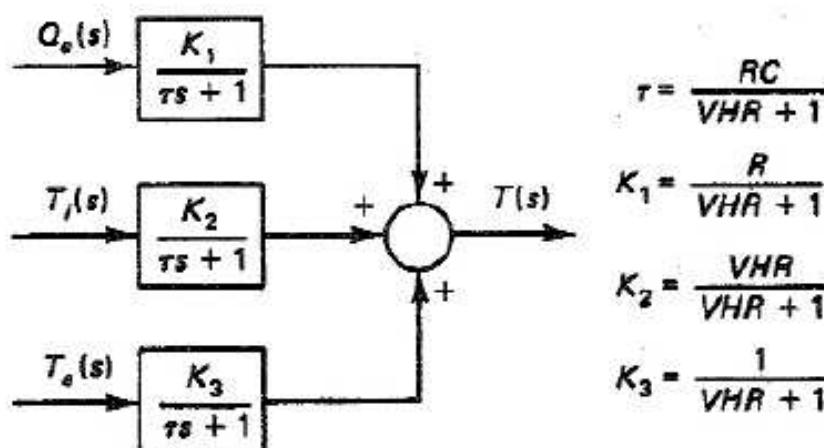


Figura 2.35 Diagrama em blocos do sistema térmico.

Um aspecto final deve ser considerado. Na dedução anterior consideramos a energia calorífica do aquecedor elétrico como a entrada do sistema. Entretanto, esta energia é normalmente controlada pelo ajuste da tensão aplicada ao aquecedor. Se o aquecedor é adequadamente modelado como uma resistência, a energia elétrica por unidade de tempo (potência) é dada por

$$P = V_h^2/R_h \quad (2-69)$$

onde P é a potência em watts, V_h é a tensão eficaz (rms) em volts aplicada ao aquecedor e R_h é a resistência de aquecimento em ohms. Portanto, a energia elétrica, que é convertida em calor, é uma função não-linear da tensão aplicada, e não existe uma função de transferência da tensão de entrada do aquecedor V_h para a temperatura do líquido T .

Note como este sistema foi simplificado por algumas considerações. Primeiro, assumimos que o fluxo de entrada no tanque é exatamente igual ao fluxo de saída, o que muito provavelmente não será o caso. Além disso, admitimos que o fluxo é constante. Em seguida, ignoramos os distúrbios de entrada; e que devem ser considerados em algum ponto do projeto. Então assumimos que a entrada é uma variável física que nos dá uma função de transferência. No caso prático, estariamos forçados a trabalhar com o sistema não-linear. À medida que avançarmos na análise e no projeto neste texto, veremos como as dificuldades como estas podem ser superadas, pelo menos em parte.

2.10 Sistemas Análogos

Na discussão anterior, vimos que diferentes tipos de sistemas físicos são modelados por equações lineares com coeficientes constantes. Os diferentes sistemas físicos que são modelados por equações da mesma forma são chamados *sistemas análogos*. Nesta seção serão considerados alguns destes sistemas.

Ilustramos este conceito com o circuito da Figura 2.36. Usando o conceito de impedância, podemos escrever

$$\frac{I(s)}{V(s)} = \frac{1}{Z(s)} = \frac{1}{Ls + R + (1/Cs)} + \frac{Cs}{LC^2 + RCs + 1}$$

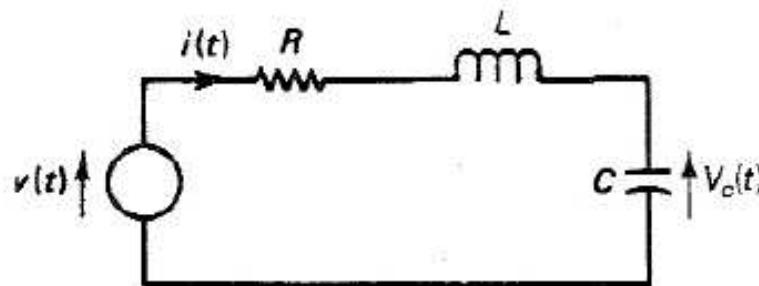


Figura 2.36 Um circuito RLC.

Se a tensão através do capacitor for considerada como a saída, a função de transferência da tensão de entrada para a saída é

$$G(s) = \frac{V_c(s)}{V(s)} = \frac{(1/Cs)I(s)}{V(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

Esta função de transferência é da forma geral de segunda ordem

$$G(s) = \frac{b_0}{a_2s^2 + a_1s + a_0} \quad (2-70)$$

que é do mesmo tipo do sistema mecânico de translação linear (2-23) do Exemplo 2.10, do pêndulo de torção (2-28) do Exemplo 2.12, do satélite (2-29) do Exemplo 2.13, do gerador dc (2-39) com carga resistiva e do servomotor (2-52). Em um caso particular, certos coeficientes podem ser zero. Estas funções de transferência estão listadas na Tabela 2.1.

TABELA 2.1 SISTEMAS DE SEGUNDA ORDEM

| Sistema | Número da equação | Equação |
|---------------------|-------------------|--|
| Translação mecânica | (2-23) | $\frac{1}{Ms^2 + Bs + K}$ |
| Pêndulo dc torção | (2-28) | $\frac{1}{Js^2 + Bs + K}$ |
| Satélite | (2-29) | $\frac{1}{Js^2}$ |
| Gerador dc | (2-39) | $\frac{K_g R_l}{(Lfs + R_f)(L_a s + R_a + R_l)}$ |
| Servomotor | (2-52) | $\frac{K_t}{JR_m s^2 + (BR_m + K_t K_m)s}$ |

Uma vez que estamos modelando os sistemas físicos com equações diferenciais lineares de coeficientes constantes, naturalmente as funções de transferência serão da mesma forma. A função de transferência de segunda ordem mais genérica é da forma

$$G(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \quad (2-71)$$

onde um dos coeficientes diferentes de zero podem ser escolhidos iguais à unidade sem perda de generalidade (dividindo-se o numerador e o denominador por este coeficiente). Normalmente faz-se a_2 igual à unidade. Esta função de transferência de segunda ordem pode modelar qualquer sistema físico que seja adequadamente descrito por uma equação diferencial linear de segunda ordem com coeficientes constantes. Portanto, todos estes sistemas são classificados como sistemas análogos.

O objetivo desta seção é apresentar o conceito de sistemas análogos. Este conceito tem muitas aplicações. Por exemplo, se compreendemos as vibrações nos sistemas mecânicos lineares, podemos aplicar este conhecimento à resposta dos circuitos elétricos lineares, e vice-versa. Se entendemos a resposta dos circuitos elétricos lineares, também temos uma compreensão do fluxo de calor nos sistemas de transferência de calor, embora isto não seja imediatamente óbvio. O próximo exemplo ilustra este fato.

Exemplo 2.14

No sistema de controle de temperatura da Seção 2.9, a função de transferência da potência elétrica de entrada para a temperatura de saída foi obtida em (2-68) como

$$\frac{T(s)}{Q_e(s)} = \frac{K_1}{\tau s + 1}$$

Considere agora o circuito mostrado na Figura 2.37. A função de transferência deste circuito é dada por

$$\frac{V_e(s)}{V(s)} = \frac{(1/sC_2)I(s)}{V(s)} = \frac{(1/sC_2)}{R + (1/sC_1) + (1/sC_2)} = \frac{(C_e/C_2)}{RC_e s + 1}$$

onde

$$C_e = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

Se fizermos (C_e/C_2) igual a K_1 e RC_e igual a τ , as duas funções de transferência serão iguais. Suponha que é aplicado um degrau unitário à entrada do circuito. Do estudo de circuitos elétricos sabemos que a tensão em C_2 crescerá exponencialmente até o valor final. Portanto, um degrau de entrada na potência elétrica do aquecedor no sistema de controle resultará em um crescimento exponencial da temperatura até um valor final. Um degrau na tensão dos terminais do aquecedor provocará um degrau na potência elétrica. Na realidade, este procedimento de aplicação de um degrau na potência elétrica de entrada no sistema de controle é o método utilizado para determinar os parâmetros do sistema.

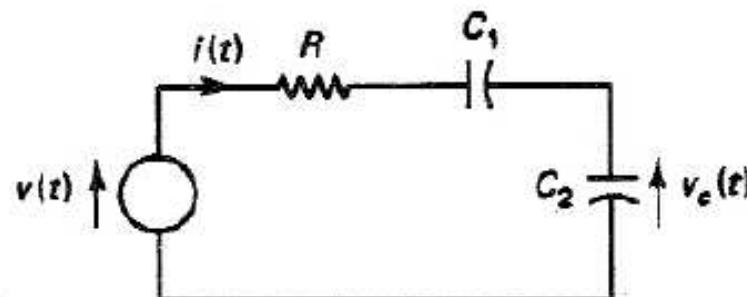


Figura 2.37 Circuito do Exemplo 2.14.

2.11 Transformadores e Engrenagens

Esta seção apresenta dois sistemas análogos acoplados: transformadores elétricos e engrenagens mecânicas. Consideraremos apenas os casos ideais e vemos que as equações que descrevem os sistemas têm a mesma forma.

Considere primeiro o transformador elétrico. O diagrama do circuito é mostrado na Figura 2.38. Em um transformador ideal, assumimos que a potência de entrada é igual à potência de saída, e então

$$p(t) = e_1(t) i_1(t) = e_2(t) i_2(t) \quad (2-72)$$

onde $p(t)$ é a potência transferida pelo transformador. Também pode ser mostrado que, da análise do fluxo no núcleo do transformador,¹⁶

$$N_1 i_1(t) = N_2 i_2(t) \quad (2-73)$$

onde N_1 é o número de espiras na bobina de entrada (primário) e N_2 é o número de espiras da bobina de saída (secundário). Então de (2-72) e (2-73),

$$\frac{e_1(t)}{N_1} = \frac{e_2(t)}{N_2} \quad (2-74)$$

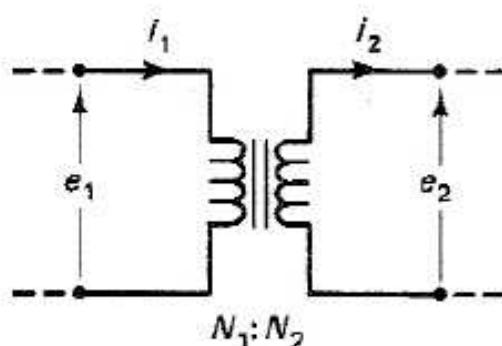


Figura 2.38 Um transformador.

A relação N_1/N_2 é chamada *relação de transformação*, e, das equações anteriores,

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{e_1(t)}{e_2(t)} = \frac{i_2(t)}{i_1(t)} \quad (2-75)$$

Assim, o transformador é um dispositivo de acoplamento cujo propósito, normalmente, é alterar os níveis de tensão ou corrente. Geralmente, o modelo de um transformador ideal é uma aproximação razoável do transformador físico que possui um núcleo de ferro. O modelo de um transformador ideal é dado em (2-75).

¹⁶ BLACKWELL W. A. & GRIGSBY, L. L. *Introductory Network Theory*. Boston, MA: Prindle, Weber & Schmidt, Inc., 1985.

Exemplo 2.15

Considere o circuito da Figura 2.39. Neste circuito, a fonte de tensão e a resistência são o equivalente de Thevenin¹⁷ de um amplificador, que é acoplado à carga $Z_L(s)$ através do transformador. Agora

$$E_i(s) = RI_1(s) + E_1(s)$$

e

$$E_2(s) = Z_L(s)I_2(s)$$

De (2-75),

$$E_1(s) = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)E_2(s); \quad I_1(s) = \left(\frac{N_2}{N_1}\right)I_2(s)$$

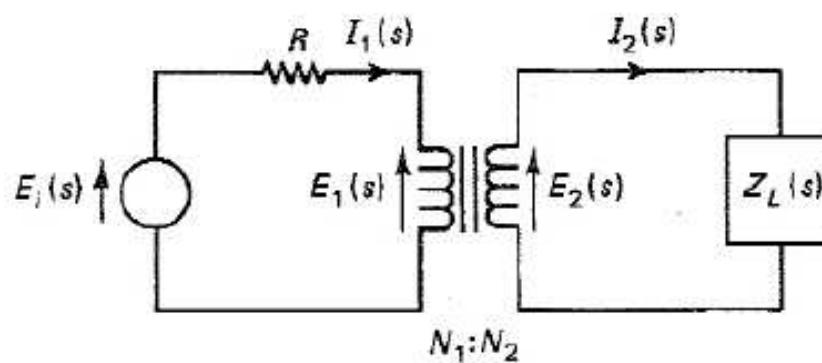


Figura 2.39 Um circuito acoplado por transformador.

Usando estas duas equações e a equação da malha do secundário dada anteriormente, podemos escrever a equação da malha do primário como

$$E_i(s) = RI_1(s) + \left(\frac{N_1}{N_2}\right)E_2(s) = \left[R + \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 Z_L(s)\right]I_1(s)$$

Portanto, a impedância $Z_s(s)$, vista pela fonte de tensão, é

$$Z_s(s) = \frac{E_i(s)}{I_1(s)} = R + \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 Z_L(s)$$

e, no circuito primário, o efeito da impedância de carga no secundário é uma impedância equivalente de $(N_1/N_2)^2 Z_L(s)$. Assim, o transformador tem o efeito de converter a impedância do secundário de um nível para outro. Esta característica é útil no acoplamento dos amplificadores às cargas, para a máxima transferência de potência.¹⁸

17 IRWIN, J.D. Op cit.

18 VAN VALKENBURG, M. E. *Network Analysis*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1974.