

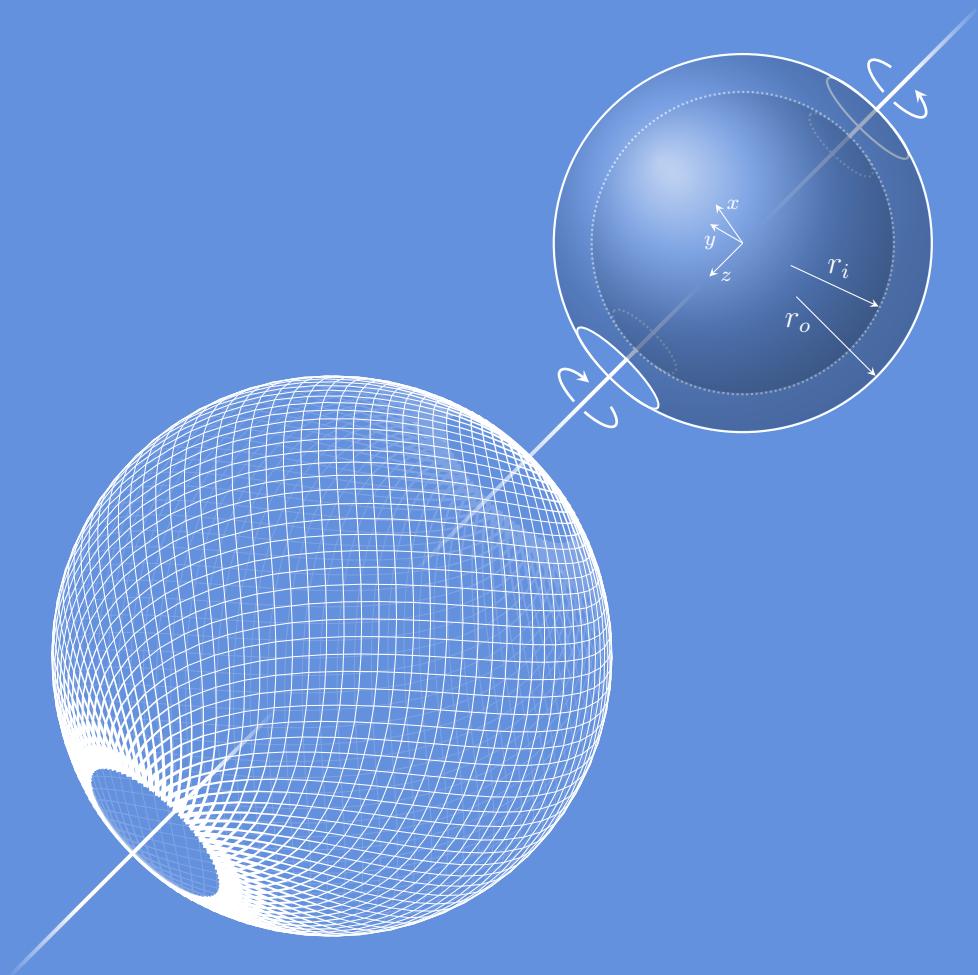
BACHELOR OF ENGINEERING THESIS

---

# Topologieoptimierung von Gitterstrukturen zum Design solider Leichtbaukomponenten

O. Wege

---





# **Topologieoptimierung von Gitterstrukturen zum Design solider Leichtbaukomponenten**

Eine Thesis zur Erlangung des Grades

Bachelor of Engineering

vorgelegt bei dem

Fachbereich Maschinenbau und Verfahrenstechnik  
Hochschule Düsseldorf

im Studiengang  
Maschinenbau – Produktentwicklung

von

OLIVER WEGE

Matrikelnummer 796046

Erstprüfer: Prof. Dr.-Ing. habil. Martin Ruess  
Zweitprüfer: Prof. Dr.-Ing. Roland Reichardt

Februar 2022

## **Topologieoptimierung von Gitterstrukturen zum Design solider Leichtbaukomponenten**

Der Wunsch nach immer leistungsfähigeren Designs im Ingenieurwesen erfordert häufig die Optimierung von Strukturen mit Blick auf Masse, Volumen, Stabilität, Tragfähigkeit und weitere Eigenschaften. Durch den rasanten Fortschritt im 3D-Druck werden die engen Grenzen der Fertigung topologieoptimierter Bauteile weitgehend aufgehoben. Der Komplexität leichter, dennoch hochstabilen Designs sind damit kaum noch Grenzen gesetzt.

In dieser Bachelorarbeit sollen zunächst leistungsfähige Verfahren zur Topologieoptimierung von ebenen und räumlichen Gitterstrukturen identifiziert und bewertet werden. Ziel der Optimierung ist es, Leichtbaukomponenten aus topologieoptimierten Gitterstrukturen zu entwerfen, die das herkömmliche Design solider Tragstrukturen ersetzen, mit reduziertem Materialeinsatz bei Erhalt analoger elastischer Eigenschaften.

Aufbauend auf ein existierendes JAVA-Framework für linear-elastische Analysen räumlicher Stabtragwerke soll ein einfaches, zweckmäßiges Verfahren zur Topologieoptimierung identifiziert und implementiert werden. Der zu untersuchende Designraum wird dabei mit unterschiedlichen Gitterstrukturen (regelmäßige Gitter oder Zellstrukturen) vorkonfiguriert.

Mögliche Erweiterungsoption: Öffnungen im Design der Leichtbaukomponenten können einem fictitious-domain-Ansatz folgend durch Penalisierung von Kräften und Spannungen im Öffnungsbereich berücksichtigt werden. Der fictitious-domain-Ansatz folgt dabei dem Konzept der Finite Cell Method [1]

Die Aufgabenstellung umfasst mindestens folgende Arbeitsschritte:

1. Ausarbeitung eines Arbeitsplans mit Arbeitspaketen und *Milestones*.
2. Erschöpfende Darstellung des Stands der Technik in Wissenschaft und Industrie. Klassifizierung der identifizierten Methoden und Abschätzung/Einordnung ihrer Leistungsfähigkeit für Aufgabenstellungen aus der Ingenieurpraxis.
3. Erweiterung des FEM-Java Frameworks FELINA (Finite Elements for Linear and Non-linear Analyses) um einen einfachen Algorithmus zur Topologieoptimierung.
4. Die Implementierung umfasst im wesentlichen folgende Schritte:
  - Implementierung des Topologie-Optimierungsalgorithmus in das Java Framework FELINA.
  - Implementierung mind. zwei unterschiedlicher Gittertypen zur Diskretisierung des Designraums.
  - Verifizierung des Codes mit Hilfe von geeigneten Benchmark-Tests, z.B. klassischer MBB-Beam [2].
  - Parameterstudie zum Einfluss von Materialparametern, Stabquerschnitt und ggf. Parameter des Optimierungsalgoritmus.
  - Entwurf, Modellbildung und Analyse eines komplexeren Demonstrator-Beispiels und kritische Abschätzung der Leistungsfähigkeit des implementierten Algorithmus.

5. Dokumentation der Arbeit in einer Thesis mit dem Textsatzsystem LaTeX. Darstellung von Literaturrecherche, Theorie & Implementierung des verfolgten Optimierungs-konzepts, Numerische Untersuchungen, Bewertung, Fazit und Ausblick.

Düsseldorf, 14.09.2021

A handwritten signature in blue ink that reads "Martin Ruess". The signature is fluid and cursive, with a horizontal line above the "M" and a small dot above the "i".

Prof. Dr.-Ing. habil. Martin Ruess

[1] D. Schillinger, M. Ruess. The Finite Cell Method: A review in the context of higher-order structural analysis of CAD and image-based geometric models, Archives of Computational Methods in Engineering 22(3):391-455, 2015

[2] O. Sigmund. A 99 line topology optimization code written in matlab. Structural and Multidisciplinary Optimization, 21:120-127, 2001.

## Zusammenfassung

*It is a funny paradox of design: utility breeds beauty.  
There is elegance in efficiency, a visual pleasure in  
things that just barely work.*

---

—BEN ORLIN

Motiviert durch die rasante Ausweitung der Konstruktionsfreiheit in der additiven Fertigung wird in dieser Thesis die Topologieoptimierung von Gitterstrukturen behandelt. Der kontinuierliche Entwurfsraum eines Bauteils wird dabei durch ein Stabtragwerk ersetzt, das auf Basis der Finite-Elemente-Methode analysiert wird. Für die Finite-Elemente-Analyse steht ein Framework zur Verfügung, in dem eine Topologieoptimierung des Stabtragwerks implementiert wurde. Dazu wurden die Methoden der Optimierung mechanischer Strukturen recherchiert und klassifiziert. Hierbei ließ sich ein Optimalitätskriterienverfahren als geeignete Lösungsstrategie zur Implementation identifizieren. Um den Algorithmus zu verifizieren und den Einfluss des Startentwurfs zu untersuchen werden diverse Modelle mit unterschiedlichen Konfigurationen vorgestellt, die eine Beurteilung der Eignung und Leistungsfähigkeit der Implementation zulassen. Grundgedanke der Arbeit ist, mit einfachen Methoden aus der statischen Mechanik und Optimierung ein Verfahren umzusetzen, das den Zweck der Topologieoptimierung erfüllt. Dazu wurden zusätzlich experimentelle Ansätze zur Effizienzsteigerung verfolgt und Methoden eingebunden, die besonders auf die Behandlung der statischen Bestimmtheit des Fachwerks abzielen, um diese im Optimierungsverlauf zu garantieren. Ein besonderes Augenmerk lag auf der Bildung eines Modells, das einen Startentwurf bietet, der sich für die Topologieoptimierung eignet und gleichzeitig flexibel definierbar ist.

---

# Inhaltsverzeichnis

---

<b>Abbildungsverzeichnis</b>	vii
<b>Tabellenverzeichnis</b>	xi
<b>Algorithmenverzeichnis</b>	xii
<b>Nomenklatur</b>	xiii
<b>1 Einleitung</b>	1
<b>2 Stand der Wissenschaft und Technik</b>	4
2.1 Methoden zur Optimierung mechanischer Strukturen . . . . .	4
2.1.1 Mathematische Formulierung des Optimierungsproblems . . . . .	6
2.1.2 Entwurfsraum und Entwurfsvariablen . . . . .	7
2.1.3 Ziel- und Restriktionsfunktionen . . . . .	7
2.2 Lösung des Optimierungsproblems . . . . .	9
2.2.1 Straffunktionsmethoden . . . . .	12
2.2.2 Direkte Methoden . . . . .	15
2.2.3 Approximationsmethoden . . . . .	17
2.2.4 Optimalitätskriterienverfahren . . . . .	19
2.3 Michell-Strukturen . . . . .	22
<b>3 Stabtragwerke in der Finite-Elemente-Methode</b>	24
3.1 Statische Bestimmtheit von Fachwerken . . . . .	25
3.2 Das Stabelement in der Finite-Elemente-Methode . . . . .	26
3.3 Stabtragwerke nach dem <i>Fictitious-Domain</i> -Ansatz . . . . .	31
<b>4 Implementation</b>	34
4.1 FE-Modellbildung von Stabtragwerken zur Topologieoptimierung . .	36
4.1.1 Grundstrukturmethode . . . . .	36
4.1.2 Restriktionszonen . . . . .	40

4.2 Topologieoptimierungsalgorithmus nach dem FSD	
Optimalitätskriterium	47
4.2.1 Redesign-Formel	48
4.2.2 Filterung unbeanspruchter Elemente	49
4.2.3 Abbruchkriterium	51
4.2.4 Berücksichtigung mehrerer Lastfälle	55
<b>5 Verifikation</b>	<b>56</b>
5.1 Michell-Kragarm mit kreisrunder Einspannung	57
5.2 Michell-Torsionsball	65
<b>6 Modellexperimente</b>	<b>68</b>
6.1 Elementfilterungsparameter	69
6.2 MBB-Balken	71
6.3 Räumlicher MBB-Balken	73
6.4 Ebener Kragbalken	75
6.5 Räumlicher Kragbalken	79
6.6 Rahmen einer Flugdrohne	81
<b>7 Fazit und Ausblick</b>	<b>86</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>89</b>
<b>A Experimente</b>	<b>92</b>
<b>Eidesstattliche Erklärung</b>	<b>96</b>

---

# Abbildungsverzeichnis

---

2.1	Grundschema eines Optimierungsprozesses in Anlehnung an [26] . . . . .	5
2.2	Strukturoptimierungsarten am Beispiel eines Stabtragwerks in Anlehnung an [26] . . . . .	6
2.3	Die Diskretisierung eines ebenen rechteckigen Entwurfsraums $\Omega$ in ein Stabtragwerk mit regulärer Knotenverteilung . . . . .	8
2.4	Klassifizierung der Lösungsmethoden für Optimierungsprobleme in Anlehnung an [4] . . . . .	10
2.5	Ein zweidimensionales Optimierungsproblem mit der Zielfunktion im Flächen- und Konturplot. Rechts ist schematisch ein Optimierungsverlauf skizziert. . . . .	10
2.6	Klassifizierung des Optimierungsproblems anhand der Linearität und Konvexität in Anlehnung an [4] . . . . .	11
2.7	Annäherung des Optimums der Ersatzzielfunktion $\psi(a)$ an das der ursprünglichen Zielfunktion $z(a)$ mit Variation der Penalty-Konstante $r$ in Anlehnung an [4] . . . . .	12
2.8	Schematische Darstellung eines ableitungsfreien und eines ableitungs-nutzenden Lösungserzeugers in Anlehnung an [4] . . . . .	14
2.9	Modifizierte Methode der zulässigen Richtungen (MMFD) in Anlehnung an [4] . . . . .	17
2.10	Linear approximiertes Ersatzproblem in Anlehnung an [4] . . . . .	17
2.11	Der Michell-Kragarm mit kreisrunder Einspannung . . . . .	23
3.1	Statische und kinematische Bestimmtheit von Fachwerken in Anlehnung an [11] . . . . .	26
3.2	Das räumliche Stabelement im globalen und lokalen Koordinatensystem in Anlehnung an [30] . . . . .	27
3.3	Zugstab unter Einzellast in Anlehnung an [22] . . . . .	28
3.4	Unterteilung des Entwurfsgebiets $\Omega$ in ein fiktives $\Omega_{fikt}$ und ein physikalisches Lösungsgebiet $\Omega_{phys}$ . . . . .	31
3.5	Zweigliedriger Zugstab mit fiktivem $\Omega_{fikt}$ und physikalischem Lösungsgebiet $\Omega_{phys}$ . . . . .	32

---

4.1	Reduziertes UML-Diagramm der JAVA-Vererbungsstruktur des FEM Frameworks FELiNA . . . . .	35
4.2	Diskretisierung eines nicht konvexen Entwurfsraums in eine reguläre polare Verteilung von Knotenpunkten unter der Beachtung einer Restriktionszone . . . . .	37
4.3	Definition der Nachbarschaft bei äquidistanter Knotenverteilung entlang der Koordinatenachsen . . . . .	38
4.4	Grundstruktur eines rechteckigen Entwurfsgebiets in diversen Konnektivitäts- und Verfeinerungslevels . . . . .	39
4.5	Kollinearitätsprüfung der Elementkandidaten . . . . .	40
4.6	Erzeugung einer kreisförmigen Restriktionszone . . . . .	41
4.7	Algorithmus der implementierten Topologieoptimierung . . . . .	47
4.8	Interpolationsfunktion der Filterungsstufen für $\hat{a}^l = 0.05$ . . . . .	50
4.9	Parameter der Optimierung und des Modells im Verlauf des Optimierungsprozesses an einem exemplarischen Modell des ebenen Kragbalkens	53
4.10	Der ebene Kragbalken im Zwischenentwurf ( $k = 71$ ) und im optimierten Entwurf ( $k = 168$ ) . . . . .	53
5.1	Modelldefinition des Michell-Kragarms mit kreisrunder Einspannung und originale Michell-Struktur aus [23] . . . . .	57
5.2	Die optimierte Struktur des Michell-Kragarms mit kreisrunder Einspannung bei Variation der Grundstruktur . . . . .	59
5.3	Relativer Fehler der optimierten Lösungen $V^*$ zur analytischen Lösung $V^{opt}$ des Michell-Kragarms mit kreisrunder Einspannung . . . . .	60
5.4	Mittlere Nachgiebigkeit $C$ der optimierten Lösungen des Michell-Kragarms mit kreisrunder Einspannung . . . . .	60
5.5	Vergleich zweier optimierter Grundstrukturkonfigurationen hinsichtlich der Verteilung der Stabquerschnittsflächen des Michell-Kragarms mit kreisrunder Einspannung . . . . .	61
5.6	Die Verteilung der Stabquerschnittsflächen im <i>optimalen</i> Fachwerk bei einer Verfeinerung auf 1716 Knoten mit $n_{lvl} = 3$ des Michell-Kragarms mit kreisrunder Einspannung . . . . .	61
5.7	Modelldefinition der Torsionsscheibe . . . . .	63
5.8	Die optimierte Struktur der Torsionsscheibe bei Variation der Grundstruktur . . . . .	64
5.9	Relativer Fehler der optimierten Lösungen $V^*$ zur analytischen Lösung $V^{opt}$ der Torsionsscheibe . . . . .	64
5.10	Globale mittlere Nachgiebigkeit $C$ der optimierten Lösungen der Torsionsscheibe . . . . .	64
5.11	Modelldefinition des Michell-Torsionsballs und originale Michell-Struktur aus [23] . . . . .	65
5.12	Die optimierte Struktur des Michell-Torsionsballs bei Variation der Grundstruktur . . . . .	66
5.13	Relativer Fehler der optimierten Lösungen $V^*$ zur analytischen Lösung $V^{opt}$ des Michell-Torsionsballs . . . . .	67
5.14	Globale mittlere Nachgiebigkeit $C$ der optimierten Lösungen des Michell-Torsionsballs . . . . .	67

6.1	Auswirkung der unteren Restriktionsgrenze der Stabquerschnittsflächen $\hat{a}^l$ auf das Ergebnis der Optimierung am Beispiel des MBB-Balkens . . . . .	70
6.2	Modelldefinition des MBB-Balkens . . . . .	71
6.3	Modelldefinition der symmetrischen Hälfte des MBB-Balkens . . . . .	71
6.4	Die optimierte Struktur des MBB-Balkens bei Variation der Grundstruktur . . . . .	72
6.5	Volumina der optimierten Lösungen $V^*$ des MBB-Balkens . . . . .	72
6.6	Globale mittlere Nachgiebigkeit $C$ der optimierten Lösungen des MBB-Balkens . . . . .	72
6.7	Modelldefinition des räumlichen MBB-Balkens . . . . .	73
6.8	Volumina der optimierten Lösungen $V^*$ des räumlichen MBB-Balkens . . . . .	73
6.9	Globale mittlere Nachgiebigkeit $C$ der optimierten Lösungen des räumlichen MBB-Balkens . . . . .	73
6.10	Die optimierte Struktur des räumlichen MBB-Balkens bei Variation der Grundstruktur . . . . .	74
6.11	Modelldefinition des ebenen Kragbalkens . . . . .	75
6.12	Die optimierte Struktur des ebenen Kragbalkens bei Variation der Grundstruktur . . . . .	76
6.13	Volumina der optimierten Lösungen $V^*$ des ebenen Kragbalkens . . . . .	76
6.14	Globale mittlere Nachgiebigkeit $C$ der optimierten Lösungen des ebenen Kragbalkens . . . . .	76
6.15	Modelldefinition des ebenen Kragbalkens mit rechteckiger Restriktionszone . . . . .	77
6.16	Die optimierte Struktur des ebenen Kragbalkens mit rechteckiger Restriktionszone bei Variation der Grundstruktur . . . . .	77
6.17	Volumina der optimierten Lösungen $V^*$ des ebenen Kragbalkens mit rechteckiger Restriktionszone . . . . .	77
6.18	Globale mittlere Nachgiebigkeit $C$ der optimierten Lösungen des ebenen Kragbalkens mit rechteckiger Restriktionszone . . . . .	77
6.19	Modelldefinition des ebenen Kragbalkens mit kreisförmiger Restriktionszone . . . . .	78
6.20	Die optimierte Struktur des ebenen Kragbalkens mit kreisförmiger Restriktionszone bei Variation der Grundstruktur . . . . .	78
6.21	Volumina der optimierten Lösungen $V^*$ des ebenen Kragbalkens mit kreisförmiger Restriktionszone . . . . .	78
6.22	Mittlere Nachgiebigkeit $C$ der optimierten Lösungen des ebenen Kragbalkens mit kreisförmiger Restriktionszone . . . . .	78
6.23	Modelldefinition des räumlichen Kragbalkens . . . . .	79
6.24	Volumina der optimierten Lösungen $V^*$ des räumlichen Kragbalkens . . . . .	79
6.25	Mittlere Nachgiebigkeit $C$ der optimierten Lösungen des räumlichen Kragbalkens . . . . .	79
6.26	Die optimierte Struktur des räumlichen Kragbalkens bei Variation der Grundstruktur . . . . .	80
6.27	Modelldefinition des Drohnenrahmens . . . . .	82
6.28	Restriktionszonen im Entwurfsraum des Drohnenrahmens . . . . .	82
6.29	Volumina der optimierten Lösungen $V^*$ des Drohnenrahmens . . . . .	84
6.30	Mittlere Nachgiebigkeit $C$ der optimierten Lösungen des Drohnenrahmens . . . . .	84

6.31 Die optimierte Struktur des Drohnenrahmens bei $\Delta x = 20 \text{ mm}$ und $n_{lvl} = 0$ . . . . .	84
6.32 Die optimierte Struktur des Drohnenrahmens bei $\Delta x = 20 \text{ mm}$ und $n_{lvl} = 1$ . . . . .	85
6.33 Die optimierte Struktur des Drohnenrahmens bei $\Delta x = 20 \text{ mm}$ und $n_{lvl} = 2$ . . . . .	85

---

# Tabellenverzeichnis

---

5.1	Optimierungs- und Modellparameter aller Experimente . . . . .	57
5.2	Optimierungsergebnisse des Michell-Kragarms mit kreisrunder Ein- spannung . . . . .	62
5.3	Optimierungsergebnisse des Michell-Torsionsballs . . . . .	67
6.1	Optimierungsergebnisse bei Variation der unteren Restriktionsgrenze der Stabquerschnittsflächen $\hat{a}^l$ . . . . .	70
6.2	Modellparameter des Drohnenrahmens . . . . .	82
6.3	Optimierungsergebnisse des Drohnenrahmens . . . . .	84
A.1	Optimierungsergebnisse der Torsionsscheibe . . . . .	92
A.2	Optimierungsergebnisse des MBB-Balkens . . . . .	93
A.3	Optimierungsergebnisse des räumlichen MBB-Balkens . . . . .	93
A.4	Optimierungsergebnisse des ebenen Kragbalkens . . . . .	94
A.5	Optimierungsergebnisse des ebenen Kragbalkens mit rechteckiger Re- striktionszone . . . . .	94
A.6	Optimierungsergebnisse des ebenen Kragbalkens mit kreisförmiger Restriktionszone . . . . .	95
A.7	Optimierungsergebnisse des räumlichen Kragbalkens . . . . .	95

---

# Algorithmenverzeichnis

---

1	Erzeugen einer kreisförmigen Restriktionszone . . . . .	42
2	Erzeugen einer rechteckigen Restriktionszone . . . . .	43
3	Erzeugen einer kugelförmigen Restriktionszone . . . . .	44
4	Erzeugen einer quaderförmigen Restriktionszone . . . . .	45
5	Erzeugen einer unendlich langen zylindrischen Restriktionszone . . . . .	46
6	Aktualisierung der Entwurfsvariablen . . . . .	49
7	Filterung und Penalisierung der Entwurfsvariablen . . . . .	51
8	Das Abbruchkriterium der Optimierung . . . . .	54

---

# Nomenklatur

---

---

## Lateinische Zeichen

$A$	Querschnittsfläche
$\mathbf{a}, a$	Entwurfsvariable/n
$\Delta \mathbf{a}$	Änderungsvektor der Entwurfsvariablen
$\mathcal{B}$	Indexmenge der Stabelemente ( <i>bars</i> )
$C$	mittlere Nachgiebigkeit (global)
$\mathbf{C}$	Konnektivitätsmatrix
$E$	Elastizitätsmodul
$e$	Fehler ( <i>error</i> )
$\mathbf{e}$	Einheitsvektor
$F$	Kraft
$\mathbf{f}$	Kraftvektor
$\mathbf{g}, g$	Ungleichheitsrestriktion/en
$\mathbf{h}, h$	Gleichheitsrestriktion/en
$\mathbf{K}$	Steifigkeitsmatrix
$\mathcal{K}$	Kriterium
$k$	Steifigkeit
$l$	Länge
$\Delta l$	Längenänderung
$\mathcal{N}$	Indexmenge der Knotenpunkte ( <i>nodes</i> )
$n_{eval}$	Anzahl der gemittelten Iterationen
$n_{FSD}$	Anzahl der voll beanspruchten Elemente
$n_{lvl}$	Konnektivitätslevel
$\mathbf{p}$	Punktlast (alt. Ortsvektor des Punkts $p$ )

---

<b>q</b>	Flächenlast (alt. Ortsvektor des Punkts $q$ )
$\mathbb{R}$	reelle Zahlenmenge
<b>R</b>	Rotationsmatrix
$\Delta r$	Knotendistanz entlang der radialen Koordinatenachse
$S$	Schnittkraft
<b>s</b>	Suchrichtung
$T$	Torsionsmoment
<b>t</b>	Streckenlast
$U$	Dehnungsenergie
<b>u</b>	Verschiebungsvektor
$u, v, w$	Verschiebungen in $x, y, z$
$V$	Volumen
$\Delta x$	Knotendistanz entlang einer kartesischen Koordinatenachse
$z$	Zielfunktion

---

## Griechische Zeichen

$\alpha$	mean-normalisierte Entwurfsvariablen $a$
$\beta$	Konturierungsschärfe
$\Gamma$	Randgebiet
$\gamma$	Restriktionsersatzfunktion
$\nabla$	Nabla-Operator (Gradient)
$\varepsilon$	Dehnung
$\epsilon$	Toleranzwert
$\eta$	Schwellenwert
$\mu$	Penalisierungswert
$\sigma$	Spannung
$\Delta\varphi, \Delta\theta$	Knotendistanz entlang einer polaren Koordinatenachse
$\psi$	Zielersatzfunktion
$\Omega$	Lösungsgebiet der FEM/Entwurfsraum der Optimierung
$\omega$	Schrittweite

---

## Hochgestellte Zeichen

$[.]^*$	optimiert ( <i>optimal</i> )
$[.]^{(\cdot)}$	iterativ variabel
$[.]^e$	elementbezogen

---

$[.]^l$	untere Grenze ( <i>lower bound</i> )
$[.]^{opt}$	analytisch optimal
$[.]^p$	knotenbezogen
$[.]^T$	transponiert
$[.]^u$	obere Grenze ( <i>upper bound</i> )

---

## Tiefgestellte Zeichen

$[.](\cdot)$	lastfallbezogen
$[.]_d$	Druck
$[.]_{fikt}$	fiktives Lösungsgebiet
$[.]_{phys}$	physikalisches Lösungsgebiet
$[.]_{res}$	Restriktionszone
$[.]_{rel}$	relativ
$[.]_z$	Zug
$[.]_\mu$	penalisiert (fiktiv)

---

## Diakritische Zeichen

$\hat{[.]}$	normiert ( <i>mean-normalisiert</i> für $a^l$ )
$\bar{[.]}$	lokal
$\tilde{[.]}$	gefiltert
$[.]'$	<i>min-max-normalisiert</i> auf $[0, 1]$

---

## Abkürzungen

BFM	Barrierefunktionsmethode (Methode der inneren Straffunktionen)
CAO	<i>Computer Aided Optimization</i>
CONLIN	<i>Convex Linearization Method</i>
FE	Finite Elemente
FEA	Finite-Elemente-Analyse
FELiNA	<i>Finite Elements for Linear and Non-linear Analysis</i>
FEM	Finite-Elemente-Methode
FGP	<i>Fixed Geometry Problem</i>
FSD	<i>Fully Stressed Design</i>
FTP	<i>Fixed Topolgy Problem</i>

GRGM	<i>Generalized Reduced Gradient Method</i>
MFD	<i>Method of Feasible Directions</i>
MMA	<i>Method of Moving Asymptotes</i>
MMFD	<i>Modified Method of Feasible Directions</i>
SCP	<i>Sequential Convex Programming</i>
SFM	Straffunktionsmethode (Methode der äußeren Straffunktionen)
SKO	<i>Soft Kill Option</i>
SLP	<i>Sequential Linear Programming</i>
RGM	<i>Reduced Gradient Method</i>

# KAPITEL 1

---

## Einleitung

---

Die Bedeutung hochstabiler Bauteile unter Verwendung eines Minimums an notwendigem Material wird im Ingenieurwesen durch das Streben nach maximaler Effizienz immer größer. Designentwürfe werden daher durch den Einsatz diverser Verfahren hinsichtlich Masse und Stabilität optimiert. Ein Ansatz zur Optimierung mechanischer Strukturen ist, das kontinuierlich verteilte Material eines soliden Bauteils durch eine diskrete Gitterstruktur zu ersetzen, die es zu optimieren gilt. Gitterstrukturen sind in der Mechanik unter dem Begriff der Stabtragwerke zu verstehen. Diese Thesis bietet in Kapitel 2 zunächst einen Überblick über die Strukturoptimierung mit besonderem Fokus auf Stabtragwerke. Dabei werden die Methoden klassifiziert und ein „[...] einfaches, zweckmäßiges Verfahren zur Topologieoptimierung [...]“ identifiziert. Dieses Verfahren wird in ein existierendes FEM-Java Framework namens FELiNA (*Finite Elements for Linear and Non-linear Analysis*) implementiert. FELiNA bietet unter anderem die Möglichkeit Fachwerke in ebenen und räumlichen Gebieten mit Hilfe der Methode der finiten Elemente (FEM) zu analysieren. Des Weiteren wird die Entwurfstheorie nach MICHELL [23] zum Design gewichtsoptimaler Fachwerke erörtert, die zur Beurteilung der optimierten Modelle dienen soll. Bevor die Implementation der Topologieoptimierung behandelt wird, werden in Kapitel 3 die Grundlagen zur Analyse von Stabtragwerken in der FEM dargelegt und der verwendete *Fictitious-Domain*-Ansatz zur Modellbildung optimierbarer Fachwerke erläutert. Die Implementation des Topologieoptimierungsalgorithmus nach dem Op-

timalitätskriterienverfahren des voll beanspruchten Designs (FSD) wird in Kapitel 4 beschrieben. Die Modellbildung umfasst darin die Diskretisierung des Entwurfsgebiets nach der Grundstrukturmethode und das Generieren von Restriktionszonen zum Einfügen von Öffnungen in oder konkaven Randgebieten an dem Entwurfsraum. Daran anknüpfend werden in Kapitel 5 und 6 die Ergebnisse von Benchmark-Modellen nach MICHELL sowie weiterer Modelle gezeigt. Erstere Modelle geben eine quantitative Abschätzung der Optimalität der Designs, die der Algorithmus liefert hat.

## Notation

Folgend wird zur Gewährleistung eindeutiger Formulierungen die verwendete Notation einiger Fälle festgelegt.

Vektorielle Größen unterscheiden sich von skalaren Größen in fettgedruckter Schreibweise. Matrizen unterscheiden sich von Vektoren mit der Verwendung von Großbuchstaben.

Skalar	$x$
Vektor	$\mathbf{x}$
Matrix	$\mathbf{X}$

Skalare Beträge (der Absolutwert), die euklidische Norm eines Vektors (die geometrische Länge) und die Mächtigkeit einer Menge (die Anzahl der in ihr befindlichen Elemente) werden allesamt gleich formuliert und sind im Kontext ihrer Eingangsgröße definiert.

Skalarer Betrag	$ x $
Euklidische Norm	$ \mathbf{x} $
Mächtigkeit einer Menge	$ \mathcal{X} $

Die Ansammlung von Knoten und Stäben in dem Lösungsgebiet des Modells werden als Indexmengen geschrieben. Sie enthalten alle Indizes die exklusiv den jeweiligen Knoten beziehungsweise das Stabelement identifizieren. Über die Mächtigkeit der Indexmengen kann zudem die Anzahl an Knoten beziehungsweise Elementen ausgedrückt werden.

Indexmenge aller Knoten	$\mathcal{N} = \{1, 2, \dots, i, \dots,  \mathcal{N} \}$
Indexmenge aller Stäbe	$\mathcal{B} = \{1, 2, \dots, i, \dots,  \mathcal{B} \}$

---

Die analytische Lösung eines Optimierungsproblems heißt „optimal“. Um den Eindruck zu vermeiden, dass eine Lösung, die auf iterative Weise die analytische Lösung eines Problems approximiert, ebenfalls analytisch optimal ist, wird unterschieden. Im Text wird sie „optimiert“ genannt oder „*optimal*“ geschrieben. Im Formelzeichen unterscheiden sich die Lösungen wie folgt.

analytisch optimale Lösung	$a^{opt}$
optimierte/approximiert optimale Lösung	$a^*$

Englische Begriffe, die als wichtig erachtet werden und hilfreich für weiterführende englischsprachige Literatur sind, werden schräggestellt angemerkt.

#### *English Text*

Im Rahmen dieser Thesis werden die Begriffe „Gebiet“ und „Raum“ sowie damit einhergehend „Lösungsgebiet“ und „Entwurfsraum“ synonym verwendet. Ebenso gilt dies für „Stab“ und „Element“.

Gebiet	≡	Raum
Stab	≡	Element

# KAPITEL 2

---

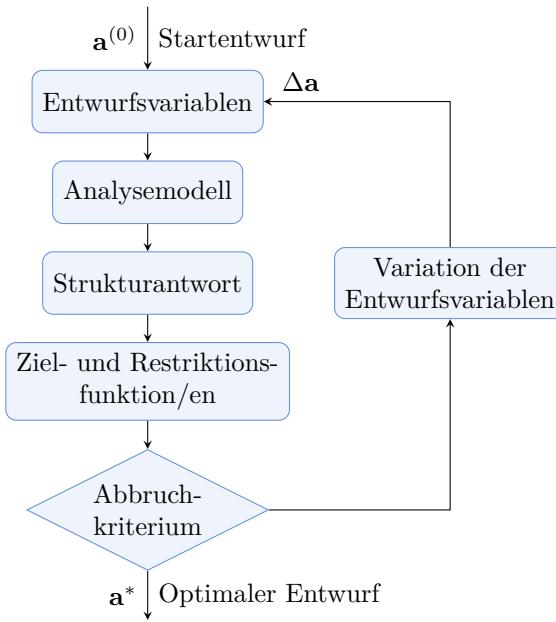
## Stand der Wissenschaft und Technik

---

In diesem Kapitel werden Methoden zur Optimierung mechanischer Strukturen im Allgemeinen dargelegt. Dies soll der Einordnung des implementierten Algorithmus dienen und einen Überblick über die Vielfalt der Ansätze zur Strukturoptimierung liefern. Des Weiteren wird eine Entwurfstheorie für das Volumenminimum von Stabtragwerken bestimmter Strukturen behandelt, die als analytischer Lösungsansatz für das Optimum dienen soll.

### 2.1 Methoden zur Optimierung mechanischer Strukturen

Was braucht es für ein optimales Strukturdesign? Wie ist das Optimum charakterisiert und was ist an der Struktur zu verändern, um dieses Optimum zu erreichen? Diese Fragen zielen auf die drei Bestandteile der Strukturoptimierung ab. ALLAIRE, BENDSOE und SIGMUND formulieren sie wie folgt [2, 7]. Erstens wird ein Modell benötigt, das typischerweise durch eine partielle Differenzialgleichung wie die Methode der finiten Elemente beschrieben wird und zur Beurteilung des mechanischen Verhaltens einer Struktur sowie der Lieferung von Strukturanworten dient. Zweitens muss eine oder mehrere Zielfunktion/en (*objective function/s*) formuliert werden, die es zu minimieren oder maximieren gilt. Und abschließend bedarf es eines zulässigen

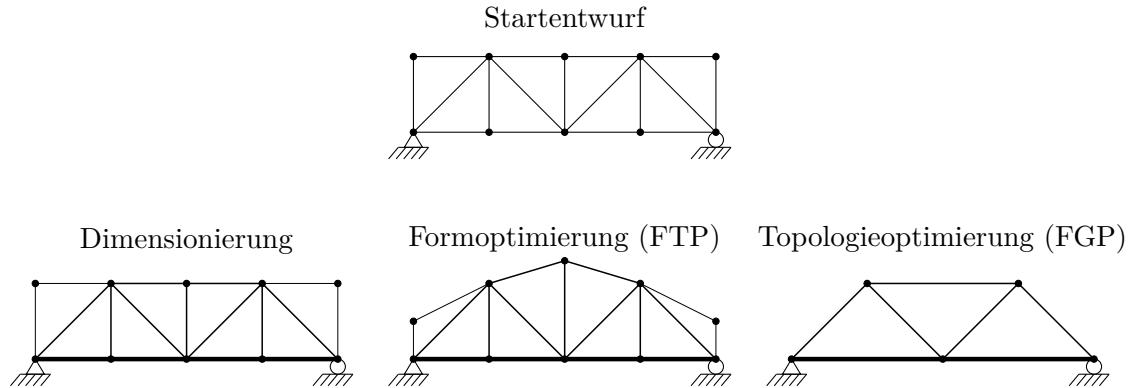


**Abb. 2.1** Grundschema eines Optimierungsprozesses in Anlehnung an [26]

Entwurfsraums (*a set of admissible designs*) zur Definition der Größen, die zur Optimierung variabel sind (Entwurfsvariablen) sowie deren mögliche Beschränkungen (Restriktionen).

Abbildung 2.1 zeigt den Zusammenhang der Optimierungsbestandteile. Der Startentwurf  $a^{(0)}$  beschreibt ein Grundmodell, welches beispielsweise durch die FEM analysiert wird. Nun können auf Basis der Strukturantworten der FEA Ziel- und Restriktionsfunktion/en ausgewertet werden. Sie geben Aufschluss darüber, wie die Entwurfsvariablen  $a$  zu verändert sind, um dem optimalen Entwurf zu entsprechen, beziehungsweise näher zu rücken. Außerdem werden die Entwurfsvariablen durch die Restriktionsfunktion/en in gewünschten Bereichen gehalten, sodass im Speziellen Stabquerschnittsflächen nicht zu klein oder zu groß werden können. Das Abbruchkriterium entscheidet darüber, ob das Optimum erreicht wurde oder eine weitere Optimierungsiteration mit varierten Entwurfsvariablen  $a + \Delta a$  vorgenommen werden muss. [26]

Strukturen, die einem mechanischen Verwendungszweck dienen, sind durch geometrische, sowie materialabhängige Größen variierbar. Die Randbedingungen, wie beispielsweise Anschlussbereiche für die Montage an die Umgebung oder an weitere Strukturen und Art der Belastung, definieren in der Regel diese Größen. Bei der Optimierung solcher mechanischer Strukturen wird meist hinsichtlich einer geringen Masse bei hoher Stabilität unter Einhaltung materialabhängiger Grenzwerte optimiert. Dazu wird in der Strukturoptimierung zwischen drei Arten unterschieden, die folgend mit zunehmender Komplexität aufgeführt werden und in Abbildung 2.2



**Abb. 2.2** Strukturoptimierungsarten am Beispiel eines Stabtragwerks in Anlehnung an [26]

veranschaulicht werden sollen. Die Dimensionierung mechanischer Strukturen optimiert Größen wie Wanddicken oder Querschnitte. Die eigentliche Form der Struktur sowie ihre Topologie bleibt dabei unverändert. Wird hingegen eine Formoptimierung vorgenommen, ist die Form des Bauteilrandes variabel. So können Änderungen der äußeren Geometrie zugelassen werden, während das Einbringen von Hohlräumen oder Streben untersagt bleibt. Zum Ausschöpfen aller Freiheitsgrade in der Optimierung wird eine Topologieoptimierung angewandt. Hierbei beschreiben die variablen Größen die Lage und Anordnung der Strukturelemente, sodass neben der Form auch die Topologie der Struktur optimierbar ist. [26]

KIRSCH formuliert die letzten beiden genannten Optimierungsarten in zwei verschiedenen Problemen einer Stabwerksoptimierung. Das Problem fixierter Topologie FTP (*fixed topology problem*) variiert die Strukturgeometrie – die Knotenpunkte der Stäbe – und die Stabquerschnittsflächen einer vorgegebenen Topologie zum Erreichen eines optimalen Strukturdesigns. Konträr dazu optimiert das Problem fixierter Geometrie FGP (*fixed geometry problem*) die Topologie – die Anordnung oder einfacher: das Vorhandensein der Stäbe – und ebenso die Stabquerschnittsflächen für eine vorgegebene Geometrie. [16]

### 2.1.1 Mathematische Formulierung des Optimierungsproblems

Eine Analogie von VANDERPLAATS soll zunächst die Begrifflichkeiten einordnen. Es wird angenommen, ein blinder Wanderer befindet sich in einem bergigen Gelände. Er beginnt zu frieren, besitzt jedoch das Wissen, dass es in tieferen Regionen des Gebirges wärmer sein wird. Demnach möchte er zu dem tiefsten Punkt gelangen und muss den Weg dorthin finden, wobei er eventuell auf unüberwindbare Zäune trifft. Die Zielfunktion  $z$  des Wanderers ist also die Minimierung der topographischen Höhe mit Hilfe des Längen- und Breitengrades als Entwurfsvariablen  $\mathbf{a}$  und der Zäune als Restriktionen  $g_j$  und  $h_k$ . [29]

Die mathematische Überführung dieser Analogie führt zu der Formulierung eines restriktierten Optimierungsproblems. Darin ist die Zielfunktion (*objective function*) durch Änderung der Entwurfsvariablen  $\mathbf{a}$  zu minimieren

$$\min_{\mathbf{a}} z(\mathbf{a}) \quad (2.1)$$

die bei Vorliegen eines Maximierungsproblems leicht in  $\max z(\mathbf{a}) = -\min z(\mathbf{a})$  transformiert werden kann. Die Restriktionen werden in Ungleichheitsrestriktionen (*inequality constraints*)

$$g_j(\mathbf{a}) \leq 0, \quad j = 1, \dots, m_g \quad (2.2)$$

und Gleichheitsrestriktionen (*equality constraints*)

$$h_k(\mathbf{a}) = 0, \quad k = 1, \dots, m_h \quad (2.3)$$

unterteilt. Explizite Restriktionen (*side constraints*) mit Unter-  $[.]^l$  und Obergrenzen  $[.]^u$  der Form

$$a_i^l \leq a_i \leq a_i^u, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.4)$$

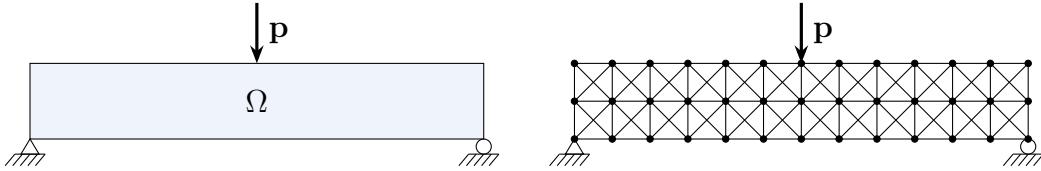
werden in Restriktionen der Formen (2.2) und (2.3) transformiert. [26]

## 2.1.2 Entwurfsraum und Entwurfsvariablen

Der Entwurfsraum ist das Gebiet, in dem die Optimierung durchgeführt werden soll. Dieser wird durch äußere Ränder beschrieben und auch gegebenenfalls durch innere Gebiete durchquert, die von der Optimierung ausgenommen sind. Zur Definition eines Entwurfsraums wird er im Falle von Gitterstrukturen durch Knotenpunkte und sie verbindende Stabelemente, wie in Abbildung 2.3 diskretisiert. Übliche Entwurfsvariablen für die Elemente sind die Querschnittsfläche oder die Materialdichte. Sie sind die zu variierenden Konstruktionsvariablen, die die mechanischen Eigenschaften der Struktur beeinflussen sollen. Die Materialdichte wird vorwiegend bei der Optimierung von kontinuierlichen Strukturen genutzt, die durch Flächen- oder Volumenelemente diskretisiert sind. Bei Gitterstrukturen wird meist die Querschnittsfläche der Stabelemente variiert. [26]

## 2.1.3 Ziel- und Restriktionsfunktionen

Zur Charakterisierung des Optimums an sich und zur Evaluierung des Entwurfs hinsichtlich seiner Optimalität ist eine Zielfunktion vonnöten. Die Beschränkung von



**Abb. 2.3** Die Diskretisierung eines ebenen rechteckigen Entwurfsraums  $\Omega$  in ein Stabtragwerk mit regulärer Knotenverteilung

Entwurfsvariablen auf gewünschte Bereiche wird in Restriktionsfunktionen festgelegt. Für die Konstruktion von mechanischen Bauteilen sind häufig zwei Aspekte von Bedeutung, die im technischen Sinne Anwendung finden. Wünschenswert ist mit so wenig Material wie nötig eine möglichst hohe Bauteilstiffigkeit zu erhalten. Ersterer Aspekt kann in der allgemeinen Form der Zielfunktion in Gleichung (2.1) eingepflegt werden werden, indem das Bauteilvolumen  $V$  minimiert wird.

$$\min V \quad (2.5)$$

An dieser Stelle sei angemerkt, dass durchweg ein Material mit konstanter Dichte  $\rho$  angenommen wird, sodass das Gewichtsoptimum gleich dem Volumenoptimum ist ( $m = \rho V$ ). Speziell für Stabtragwerke wird dazu die Summe aller Stabvolumina  $V_i$  aus der Stablänge  $l_i$  und der Stabquerschnittsfläche  $a_i$  hergenommen.

$$\min \left( \sum_i l_i a_i \right), \quad i \in \mathcal{B} \quad (2.6)$$

Darin ist  $\mathcal{B}$  die Indexmenge aller Elemente im Entwurfsraum  $\Omega$ . Für den zweiten Aspekt, die Maximierung der Bauteilstiffigkeit, wird die Zielfunktion in der Form umgeschrieben, dass die Nachgiebigkeit des Bauteils minimiert werden soll. Diese Umformulierung führt zum äquivalenten Ergebnis. Beginnend damit, dass die Verschiebung  $\mathbf{u}$  eines einzelnen Knotens  $k$  – typischerweise am Kraftangriffspunkt – minimiert werden soll,

$$\min |\mathbf{u}_k| \quad (2.7)$$

kann weitergehend auch eine Kennzahl für die Nachgiebigkeit des gesamten Bau teils berechnet werden. Die mittlere Nachgiebigkeit eines Modells, wie dem Finite-Elemente-Modell, lässt sich mit

$$C = \sum_i \mathbf{f}_i^T \mathbf{u}_i, \quad i \in \mathcal{N} \quad (2.8)$$

bestimmen. Darin ist  $\mathcal{N}$  die Indexmenge aller Knoten in  $\Omega$  und  $\mathbf{f}$  die Kraft am Knoten. Beiläufig sei erwähnt, dass die mittlere Nachgiebigkeit  $C$  gleich der geleisteten externen Arbeit  $W$  und damit betragsmäßig gleich der doppelten Dehnungsenergie des Modells ist.

$$C = 2|U| = 2 \left| \sum_i \sigma_i \varepsilon_i \right|, \quad i \in \mathcal{B} \quad (2.9)$$

Beide Größen entspringen dem Energiesatz der Finite-Elemente-Methode und werden in der Regel zu Zwecken der Modellverifikation bestimmt, was die Nutzung zu Optimierungszwecken weiter vereinfacht. Mit den Restriktionsfunktionen können beispielsweise materialabhängige Grenzwerte wie die Streck- oder Dehngrenze eines Werkstoffs berücksichtigt werden. So lässt sich die maximal zulässige Normalspannung im Stabelement  $\sigma^u$  mit einer Ungleichheitsrestriktion der Form

$$\sigma_i - \sigma^u \leq 0, \quad i \in \mathcal{B} \quad (2.10)$$

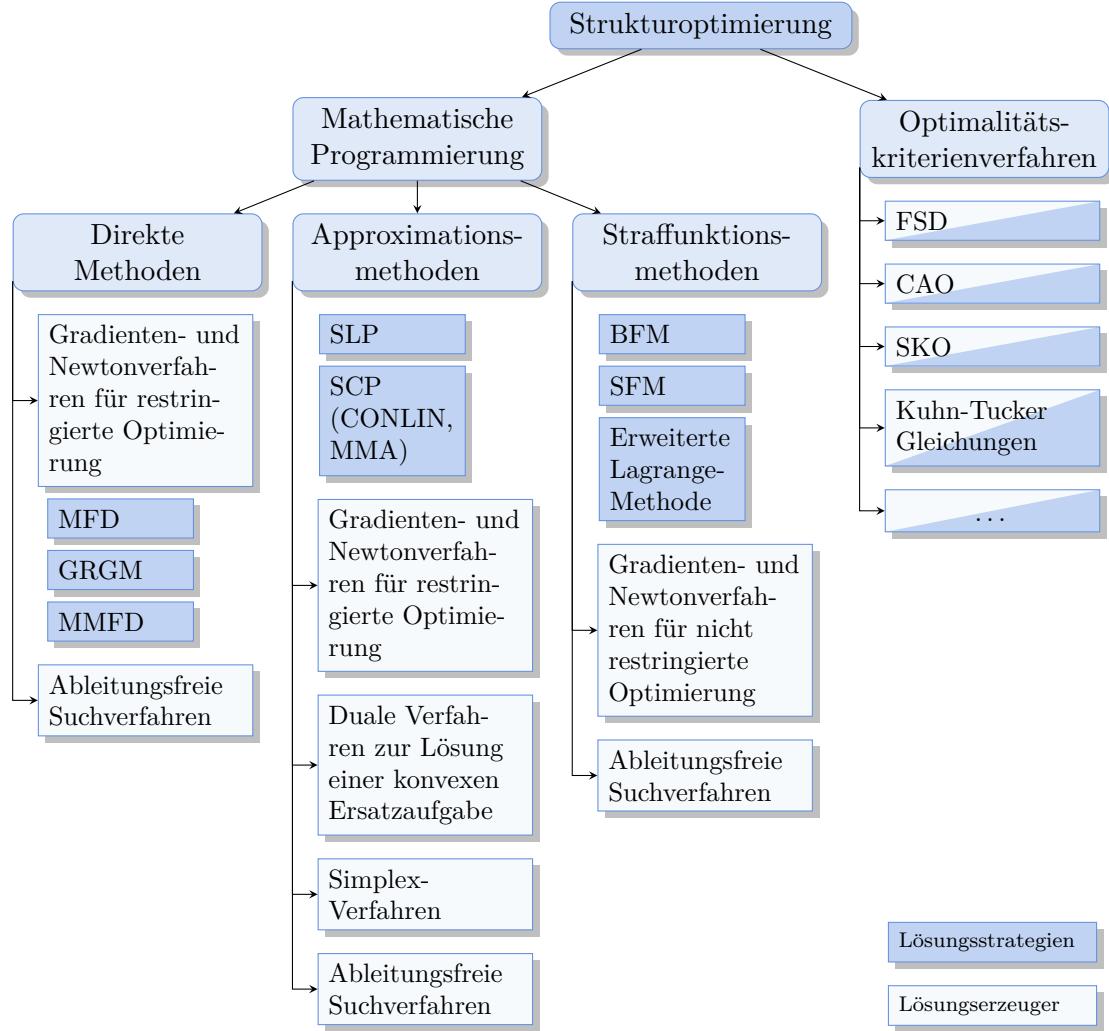
schreiben und durch

$$\begin{aligned} a_i - a^u &\leq 0 \\ a^l - a_i &\leq 0, \quad i \in \mathcal{B} \end{aligned} \quad (2.11)$$

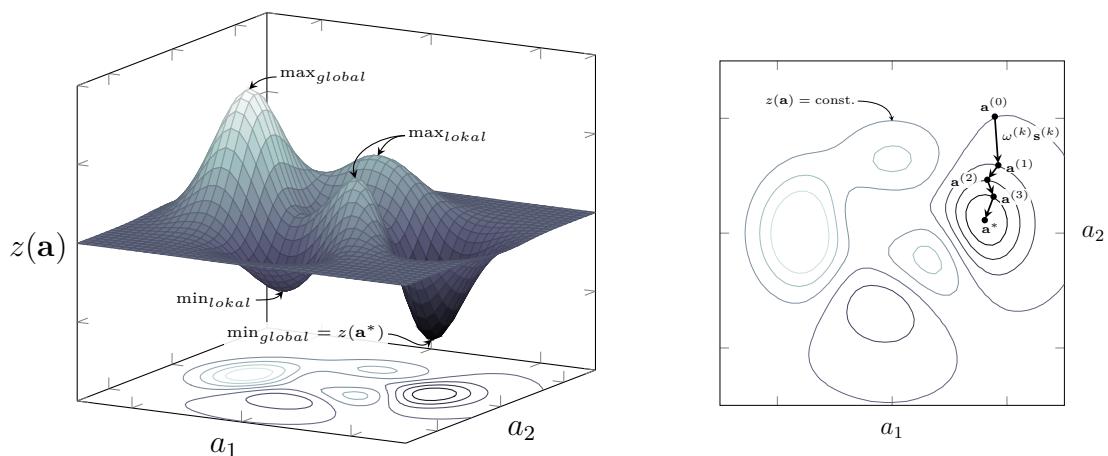
können die Entwurfsvariablen auf einen gewünschten Bereich beschränkt werden. [12]

## 2.2 Lösung des Optimierungsproblems

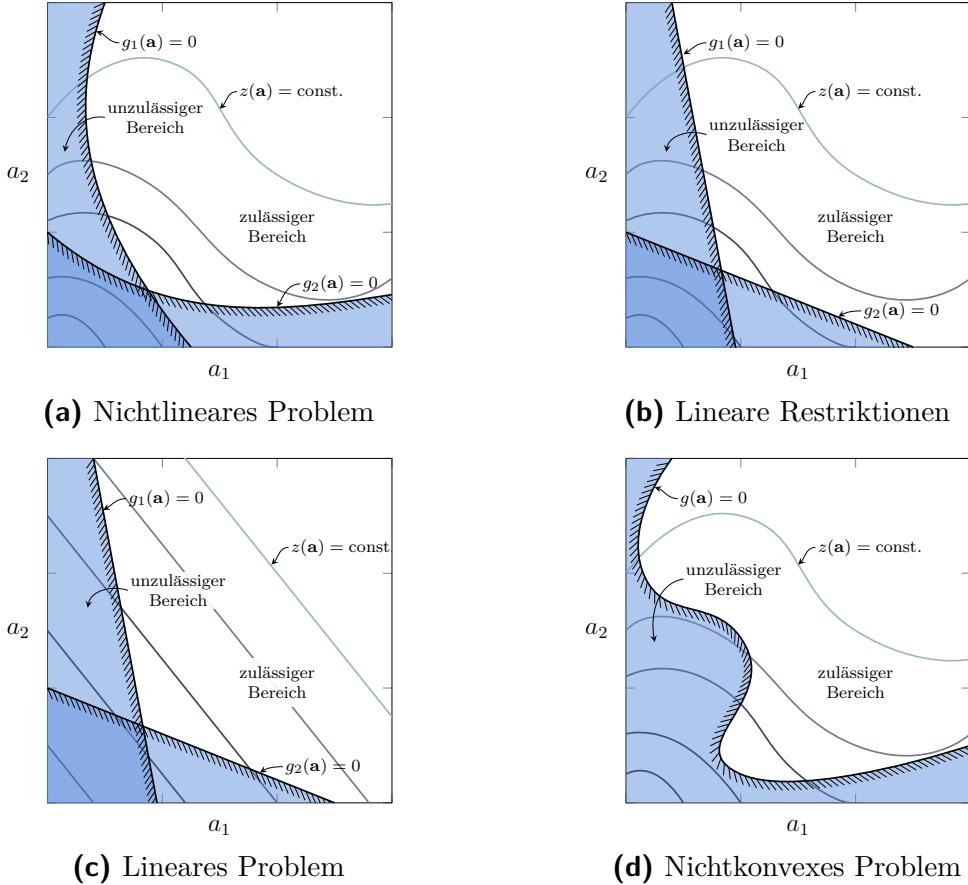
Zur Lösung eines Optimierungsproblems bedarf es eines Algorithmus. Algorithmen sind Ideen einer Rechen- oder Verfahrensvorschrift, die eine Implementierung auf einem Computer intendieren. In diesem Fall übernimmt der Optimierungsalgorithmus für ein festgelegtes Lösungsverfahren in iterativen Schritten  $k$  die Änderung  $\Delta \mathbf{a}^{(k)}$  der Entwurfsvariablen  $\mathbf{a}^{(k)}$  auf der Basis eines Startentwurfs  $\mathbf{a}^{(0)}$ . Die Bildung des Änderungsvektors  $\Delta \mathbf{a}^{(k)}$  ist gleichzeitig das Hauptklassifizierungsmerkmal der verschiedenen Lösungsmethoden in Abbildung 2.4. Lösungsstrategien sind zunächst die Beschreibung eines Lösungswegs für ein Optimierungsproblem. In diesem Lösungsweg übernimmt die tatsächliche Lösung des Problems und damit die Erzeugung des Änderungsvektors  $\Delta \mathbf{a}^{(k)}$  ein Lösungserzeuger. Der Lösungsweg des Optimierungsproblems kann grundsätzlich auf zwei Arten beschritten werden: zum einen durch die mathematische Programmierung und zum anderen durch Optimalitätskriterienverfahren. Das Prinzip der mathematischen Programmierung sei im zweidimensionalen Problem anhand VANDERPLAATS Analogie des blinden Wanderers im Gebirge auf der Suche nach dem warmen Tal dargelegt und in Abbildung 2.5 visuell veranschaulicht. Durch das sukzessive Abtasten der lokalen Umgebung wird eine Suchrichtung  $\mathbf{s}^{(k)}$  (hangabwärts) festgelegt in die mit einem Schritt der Weite  $\omega^{(k)}$  gelaufen wird. Dort angekommen wird die Suchrichtung  $\mathbf{s}^{(k+1)}$  und Schrittweite  $\omega^{(k+1)}$  aufgrund der neuen lokalen Umgebung aktualisiert.



**Abb. 2.4** Klassifizierung der Lösungsmethoden für Optimierungsprobleme in Anlehnung an [4]



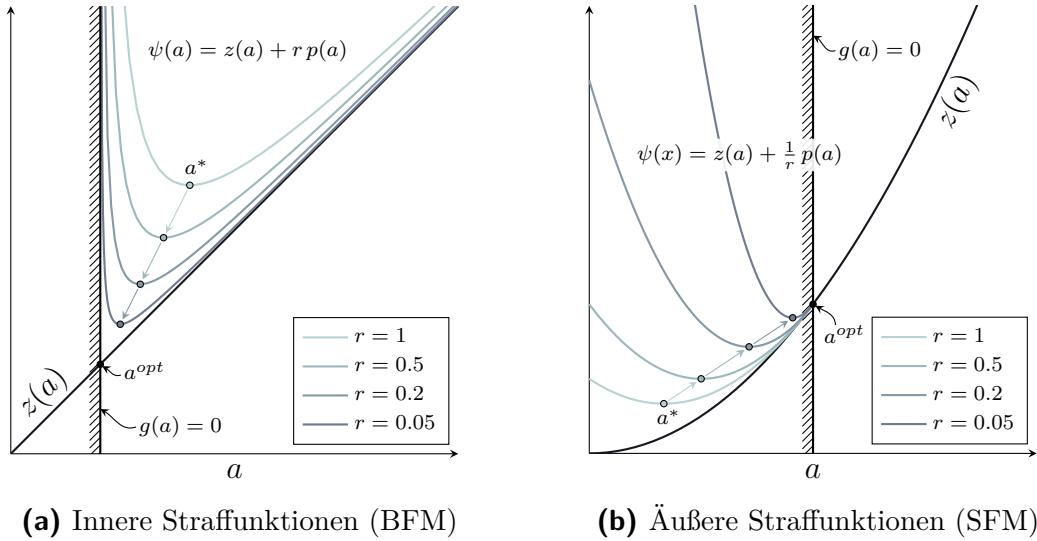
**Abb. 2.5** Ein zweidimensionales Optimierungsproblem mit der Zielfunktion im Flächen- und Konturplot. Rechts ist schematisch ein Optimierungsverlauf skizziert.



**Abb. 2.6** Klassifizierung des Optimierungsproblems anhand der Linearität und Konvexität in Anlehnung an [4]

Unabhängig von der globalen Sinnhaftigkeit der lokalen Umgebung – die womöglich in ein hochgelegenes lokales Tal weisen könnte – wird so iterativ auf das vermeintliche Optimum – das warme Tal – zugegangen. [4] Im Folgenden werden die Methoden der mathematischen Programmierung und der Optimalitätskriterienverfahren dargelegt. Der Fokus liegt dabei auf der Grundfunktionsweise sowie den Vor- und Nachteilen der Methoden. Exemplarische Darstellungen der Methoden sind ein- oder zweidimensionale Optimierungsprobleme, die allein die Funktionsweise verdeutlichen sollen. Im Falle der Strukturoptimierung eines Stabtragwerks ist das Optimierungsproblem von derselben Dimension wie das Tragwerk Stabelemente hat.

Abbildung 2.6 veranschaulicht zunächst an zweidimensionalen Beispielen die Klassifizierung des Problems nach seiner Linearität und Konvexität. Durch diese beiden Merkmale wird auch die Wahl des Verfahrens zur Lösung des Problems beeinflusst. Während sich die konvexen Probleme in Abbildungen 2.6a bis 2.6c nur durch die linearen oder nichtlinearen Ziel- und Restriktionsfunktionen unterscheiden, ist das Optimierungsproblem in Abbildung 2.6d durch den nichtkonvexen Restriktionsrand eventuell besonders zu behandeln, da eine Lösung im lokalen Optimum ausgeschlossen werden muss.



**Abb. 2.7** Annäherung des Optimums der Ersatzzielfunktion  $\psi(a)$  an das der ursprünglichen Zielfunktion  $z(a)$  mit Variation der *Penalty-Konstante*  $r$  in Anlehnung an [4]

## 2.2.1 Straffunktionsmethoden

Grundprinzip der Straffunktionsmethoden (*penalty methods*) ist die Überführung eines restriktierten Optimierungsproblems in eine Ersatzfolge von nicht restriktierten Problemen. Das bietet den Vorteil der Nutzung von Lösungserzeugern für nicht restriktierte Probleme, die in großer Menge vorhanden sind. Der Name entspringt dem Gedanken der Zielfunktion  $z(\mathbf{a})$  mit abnehmendem Abstand auf ihre Restriktionsgrenzen einen immer größer werdenden Straffunktionsanteil  $p(\mathbf{a})$  aufzufügieren. Bei der Suche nach der optimalen Struktur wird also die zu minimierende Zielfunktion dadurch begrenzt, dass ihr eigener Funktionswert an den Restriktionsgrenzen steigt. Die Restriktionen werden auf diese Weise in die Zielfunktion eingebunden, sodass sie der Lösungsalgorithmus nicht direkt behandeln muss. [4]

### Lösungsstrategien

Die Barrierefunktionsmethode (BFM) beschreibt genau diesen Gedanken in einer Zieleratzfunktion

$$\psi(\mathbf{a}) = z(\mathbf{a}) + r^{(k)} p(\mathbf{a}) \quad (2.12)$$

mit

$$p(\mathbf{a}) = \sum_{j=1}^{m_g} \frac{1}{g_j(\mathbf{a})}, \quad g_j(\mathbf{a}) > 0 \quad (2.13)$$

und fügt zudem eine *Penalty-Konstante*  $r$  ein, womit die Kondition des Problems gesteuert werden kann. So strebt  $r^{(k)}$  während des Optimierungsprozesses gegen null

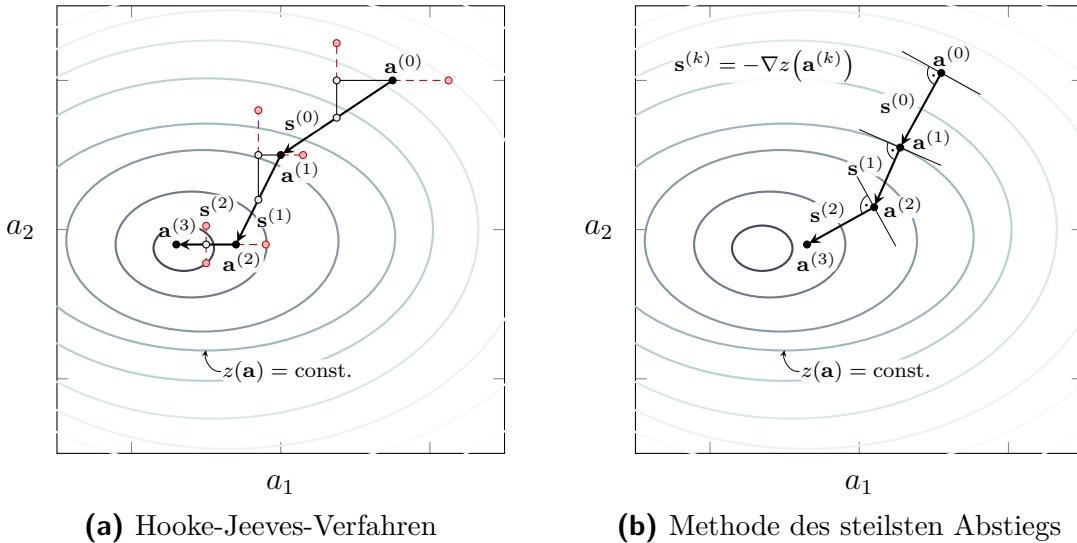
und leitet damit selbst einen schlecht gewählten Startentwurf  $\mathbf{a}^{(0)}$  zügig in Richtung Optimum und liefert zum Ende eine der originalen Zielfunktion identische Lösung  $\mathbf{a}^*$ . Bei realen Optimierungsproblemen führt ein sehr kleines  $r$  jedoch wiederum zu einer schlechten Konditionierung des Problems und zu numerischen Problemen. Abbildung 2.7a zeigt am Beispiel eines eindimensionalen Problems die Entwicklung einer solchen Zielsatzfunktion nach der Barrierefunktionsmethode. Nachteil der BFM ist, dass sich der Startentwurf im zulässigen Bereich befinden muss, da  $\psi(a)$  ausschließlich dort definiert ist und damit zu Beginn keine der Restriktionen verletzt sein dürfen. [4]

Die Methode der äußeren Straffunktionen (SFM) modifiziert die BFM in der Art, dass sich dem Optimum aus dem unzulässigen Bereich genähert wird. Zusätzlich kann sie Gleichheitsrestriktionen behandeln, was mit der BFM nicht möglich ist. Abbildung 2.7b zeigt jedoch, wie durch das Nähern aus dem unzulässigen Bereich jede Zwischenlösung vom Startentwurf  $\mathbf{a}^{(0)}$  bis zum Optimum  $\mathbf{a}^*$  unzulässig sein wird. [4]

Die leistungsstärkste der hier aufgeführten Straffunktionsmethoden ist die erweiterte Lagrange-Methode. Dazu wird das Optimierungsproblem in einer Lagrange-Funktion formuliert und um den Strafterm aus der SFM erweitert. Dies hat den Vorteil, dass das Ersatzproblem gegen das Optimum konvergiert, auch ohne dass  $r$  sehr klein werden muss. So bleibt eine gute Konditionierung stets erhalten. Die Lagrange-Methode im Detail wird in dieser Thesis nicht behandelt. Hierzu sei auf [14] verwiesen. Aufgrund der Entwicklung effizienterer Verfahren sind die Straffunktionsmethoden heute nicht mehr von allzu großer Bedeutung, dienen jedoch weiterhin als guter Vermittler der Methodiken von Optimierungsalgorithmen. Sie bestechen durch Einfachheit und hohe Allgemeingültigkeit. Die Schattenseite ist der hohe Rechenaufwand für die Vielzahl an Funktionsauswertungen. [4]

## Lösungserzeuger für nicht restringierte Optimierungsprobleme

Für die Erzeugung der tatsächlichen Lösung kommen die anfangs erwähnten Lösungserzeuger für nicht restringierte Probleme in Betracht. Dabei wird zwischen Verfahren unterschieden, die die Ableitungen der Zielfunktionen nutzen und denen, die das nicht tun. Ableitungsfreie Suchverfahren reduzieren durch den Verzicht dieser Informationsnutzung ihre Effizienz, können anderseits aber auch nicht differenzierbare oder gar unstetige Zielfunktionen behandeln. Grundsätzlich kommen dabei drei verschiedene Ansätze zum Einsatz. Der Erste ist die globale Verteilung einer Vielzahl von Abtastpunkten, deren Funktionswert miteinander verglichen wird. In dieser sogenannten vollständigen Enumeration können die Abtastpunkte regulär verteilt sein oder mit der Monte-Carlo-Methode einer zufälligen Punktverteilung folgen. In der lokalen Umgebung des besten dabei ermittelten Punktes werden erneut Punk-



**Abb. 2.8** Schematische Darstellung eines ableitungsfreien und eines ableitungs nutzenden Lösungserzeugers in Anlehnung an [4]

te verteilt, deren Funktionswert ausgewertet und wiederum verglichen wird. Der zweite Ansatz ist das sukzessive Abtasten in der lokalen Umgebung eines Punktes. So beginnt bei der sukzessiven Variation die Suche des Optimums in einem einzigen Punkt und tastet sich von dort durch den Vergleich aller  $n$  Suchrichtungen eines  $n$ -dimensionalen Problems zu einem neuen, besseren Punkt. Dies ist durch die Schrittweiterermittlung in Form einer eindimensionalen Optimierung für jede dieser  $n$  Suchrichtungen pro Iterationsschritt recht ineffizient. In Abbildung 2.8a wird das Hooke-Jeeves-Verfahren gezeigt. Dort werden alle  $n$  Suchrichtungen ausgewertet und jeweils einzeln zwischen ihnen verglichen. Wird der Funktionswert für eine Suchrichtung schlechter, so wird mit derselben Schrittweite in entgegengesetzte Richtung gegangen. Nach Abschluss aller Vergleiche zeigt deren Resultierende in eine vermutlich günstige Richtung, um die Zielfunktion zu minimieren. In diese Richtung wird nun extrapoliert und so ein neuer Entwurf erhalten. Durch die beschriebene Kopplung der Suchrichtung an die Kontur der Zielfunktion kann das Hooke-Jeeves-Verfahren die Effizienz gegenüber der sukzessiven Variation steigern. Der dritte Ansatz ist die Evolutionsstrategie. Diese biologisch inspirierte Methode beruht auf den Prinzipien der Mutation und Selektion, sodass generativ neue Entwürfe – einer Normalverteilung entstammend – erzeugt werden und anschließend hinsichtlich der Zielfunktion bewertet werden. In der biologischen Evolution bewährt sich diese Strategie für das Leben über Milliarden Jahre. In der hier angewandten Strukturoptimierung kann durch die Vernachlässigung der vorhandenen mathematischen Informationen jedoch keine vergleichbar gute Effizienz vorgewiesen werden. [4]

Gradientenverfahren hingegen nutzen die Information der Zielfunktionsableitungen, um die Suchrichtung zum Optimum zu bestimmen. Dazu wird die Zielfunktion nach allen Entwurfsvariablen partiell differenziert  $\nabla z(\mathbf{a}) = \frac{\partial z(\mathbf{a})}{\partial a_i}$ , sodass dieser Gradi-

entenvektor in der Methode des steilsten Abstiegs als Suchrichtung  $\mathbf{s} = -\nabla z(\mathbf{a})$  hergenommen werden kann. Diese Methode kann jedoch keine direkte Suchrichtung auf das globale Minimum liefern, sodass die Lösung im lokalen Minimum nicht ausgeschlossen ist. Des Weiteren kann bei hoch nichtlinearen Zielfunktionen ein ineffizienter Zickzack-Suchpfad entstehen. FLETCHER und REEVES entwickelten darauf aufbauend das Verfahren der konjugierten Richtungen, welches zusätzlich die vorangegangen Suchrichtungen in die aktuelle Ermittlung einbezieht, um den Zickzack-förmigen Verlauf zu dämpfen. Das Newtonverfahren nutzt ebenfalls die Ableitungen, jedoch wird hier die Zielfunktion zweimal partiell nach den Entwurfsvariablen differenziert. Dadurch kann die Konvergenz verbessert werden und beispielsweise eine quadratische Zielfunktion in einer Iteration minimiert werden. In sogenannten Quasi-Newtonverfahren können die zweiten Ableitungen durch die ersten Ableitungen approximiert werden, was den Rechenaufwand mindert. Für Einzelheiten zu dem Newton- und Quasi-Newtonverfahren sei auf [4] verwiesen. [4]

Die bereits erwähnte Schrittweiterermittlung in Form einer eindimensionalen Optimierung muss häufig nach der Bestimmung der Suchrichtung durchgeführt werden. So wird ausgehend von dem aktuellen Entwurf  $\mathbf{a}^{(k)}$  entlang eines Pfades in Suchrichtung  $\mathbf{s}^{(k)}$  die Schrittweite  $\omega^{(k)}$  bezüglich der Zielfunktion minimiert. Dieses eindimensionale Optimierungsproblem wird auch *Line Search* genannt. [4]

### 2.2.2 Direkte Methoden

Im Gegensatz zu den bisher genannten Straffunktionsmethoden, bei der das ursprüngliche Optimierungsproblem in ein Ersatzproblem überführt wurde, sollen die direkten Methoden das Optimum im ursprünglichen Problem finden. Bisher erwähnte Lösungserzeuger sind nur für nicht restringierte Probleme ausgelegt und daher für diese Art der restringierten Problemformulierung nicht brauchbar. Grundlegend muss bei der Bestimmung der Suchrichtung direkter Verfahren beachtet werden, dass – im Unterschied zu den Straffunktionsmethoden, die durch die Ersatzzielfunktion selber die Restriktionen beachten – Restriktionen durch einen Iterationsschritt in die steilste Abstiegsrichtung verletzt werden können. Zunächst werden also drei Stadien definiert, die während der Optimierung vorliegen können. Im Stadium 1 befindet sich der Entwurfsvariablenvektor  $\mathbf{a}^{(k)}$  innerhalb des unzulässigen Bereichs – eine oder mehrere Restriktionen sind verletzt. Stadium 2 ist das Antreffen von  $\mathbf{a}^{(k)}$  inmitten des zulässigen Bereichs – keine Restriktion ist weder verletzt noch aktiv. Das dritte Stadium stellt den Ort von  $\mathbf{a}^{(k)}$  dar, der am häufigsten gegen Ende der Optimierung vorliegt. Dabei liegt  $\mathbf{a}^{(k)}$  auf dem Restriktionsrand des zulässigen Gebiets – eine oder mehrere Restriktionen sind aktiv. Mit einem numerischen Toleranzwert  $\varepsilon$  versehen, lässt sich Stadium 3 zu

$$-\varepsilon < g_j(\mathbf{a}^{(k)}) < \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \ll 1 \quad (2.14)$$

formulieren. Bei Vorliegen der Stadien 1 und 2, wird versucht einen neuen Entwurfsvariablenvektor zu finden der sich im Stadium 3 befindet, um an der Restriktionsgrenze entlang zum Optimum zu gelangen. So kann ein unzulässiger Vektor  $\mathbf{a}^{(k)}$  durch die Suchrichtung  $\mathbf{s}^{(k)}$  in Richtung der Restriktionsgradienten  $\nabla g_j$  – und damit in Richtung des zulässigen Bereichs – verschoben werden.

$$\mathbf{s}^{(k)} = \nabla g_j \quad (2.15)$$

Die Schrittweite  $\omega^{(k)}$  errechnet sich hierzu aus der Verletztheit der Restriktion.

$$\omega^{(k)} = -\frac{g_j}{\sqrt{\nabla g_j^T \nabla g_j}} \quad (2.16)$$

Stadium 2 tritt oft zu Beginn der Optimierung auf, sodass das Problem zunächst wie ein nicht restriktives Problem behandelt wird und  $\mathbf{a}^{(k)}$  in Richtung des steilsten Abstiegs zügig den Restriktionsrand im Stadium 3 erreicht. [4] Die Lösungsstrategie der direkten Methoden besteht lediglich darin, das Optimierungsproblem unverändert dem Lösungserzeuger zuzuführen. So werden folgend passende Methoden aufgezeigt, die für Behandlung restriktiver Probleme geeignet sind.

## Lösungserzeuger für restriktierte Optimierungsprobleme

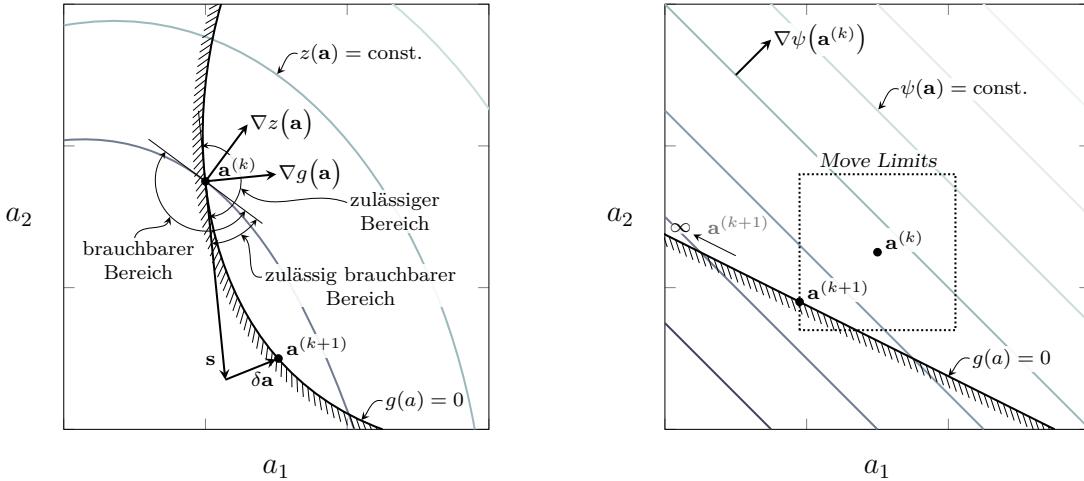
Die Methode der zulässigen Richtungen (MFD) wurde von ZOUTENDYK [36] mit dem Grundgedanken entwickelt, eine Suchrichtung zu finden, die zum einen in den brauchbaren und zum anderen in den zulässigen Bereich zeigt. Brauchbar ist die Richtung, wenn  $\mathbf{s}$  die Zielfunktion verbessert (minimiert), also gilt

$$\nabla z^T \mathbf{s} \leq 0 \quad (2.17)$$

und zulässig ist sie, wenn die  $m_a$  aktiven Restriktionen durch  $\mathbf{s}$  nicht verletzt werden.

$$\nabla g_j^T \mathbf{s} \geq 0, \quad j = 1, \dots, m_a. \quad (2.18)$$

Die beiden Bereiche besitzen eine Schnittmenge – den in Abbildung 2.9 gezeigten zulässig-brauchbaren Bereich – in dem die Suchrichtung  $\mathbf{s}$  liegen soll. Der Suchpfad zum Optimum  $\mathbf{a}^*$  entlang dem Restriktionsrand führt in der Regel zu höchster Effizienz, sodass in dem zulässig-brauchbaren Bereich der neue Punkt möglichst nahe dem Restriktionsrand liegen sollte. [4]



**Abb. 2.9** Modifizierte Methode der zulässigen Richtungen (MMFD) in Anlehnung an [4]

Die Methode der reduzierten Gradienten (RGM) nach WOLFE [31] ist zunächst nur zur Behandlung von Gleichheitsrestriktionen gedacht. ABADIE [1] generalisiert sie jedoch (GRGM), sodass auch das Berücksichtigen von Ungleichheitsrestriktionen möglich ist. Durch die Einführung von Schlupfvariablen werden Ungleichheitsrestriktionen zu Gleichheitsrestriktionen transformiert und damit die Zwischenlösungen  $\mathbf{a}^{(k)}$  auf den Restriktionsrand gedrückt. Damit wird ein um den Restriktionsrand pendelnder Suchpfad, der in der MFD entstehen kann, verhindert. Nachteilig wirken sich jedoch die zusätzlichen Schlupfvariablen auf die Effizienz aus, die mit optimiert werden müssen.

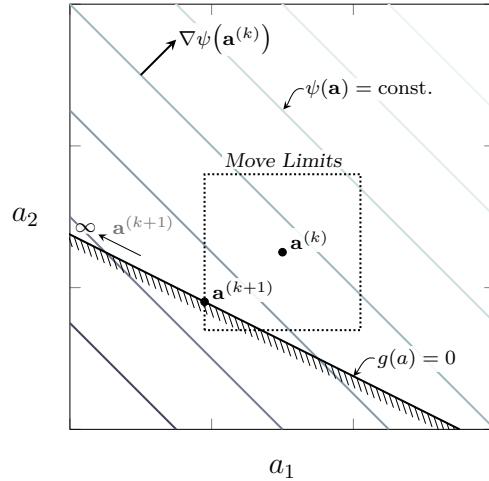
VANDERPLAATS [29] entwickelte eine modifizierte MFD (MMFD). Abbildung 2.9 zeigt, wie sie analog zur MFD eine Suchrichtung  $\mathbf{s}$  in dem zulässig-brauchbaren Bereich ermittelt. Um nun wie in der GRGM stets auf dem Restriktionsrand zu verbleiben, wird zu der Zwischenlösung  $\mathbf{a}(\omega^{(k)}) = \mathbf{a}^{(k)} + \omega^{(k)}\mathbf{s}^{(k)}$  ein Vektor  $\delta\mathbf{a}^{(k)}$  addiert, sodass deren Resultierende

$$\mathbf{a}^{(k+1)} = \mathbf{a}(\omega^{(k)}) + \delta\mathbf{a}^{(k)} \quad (2.19)$$

auf dem Rand liegt. Diese Kombination der Vorteile beider zuvor genannten Methoden macht die MMFD zu einer der effizientesten direkten Lösungsverfahren. [4]

### 2.2.3 Approximationsmethoden

Ziel der Approximationsmethoden ist die Anzahl an Systemanalysen und Gradientenberechnungen insbesondere von großen Optimierungsproblemen mit vielen Entwurfsvariablen auf ein Minimum zu reduzieren. Dazu werden implizite Systemgleichungen – beispielsweise die Steifigkeitsbeziehung  $\mathbf{Ku} = \mathbf{f}$  – durch explizite Funktio-



**Abb. 2.10** Linear approximiertes Ersatzproblem in Anlehnung an [4]

nen approximiert, deren Auswertungsaufwand deutlich geringer ist. In jedem Schritt wird ein Ersatzproblem approximiert und ausgewertet. Die Folge der approximierten Lösung konvergiert mit zunehmender Iterationsanzahl gegen die des originalen Problems. [4]

## Lösungsstrategien

Das Optimierungsproblem in der sequentiellen linearen Programmierung (SLP) wird durch eine Taylor-Reihe bis zur ersten Ordnung ersetzt. So werden die Zielsatzfunktion

$$\psi(\mathbf{a}^{(k)}) = z^{(k)} + (\nabla z^{(k)})^T (\mathbf{a} - \mathbf{a}^{(k)}) \quad (2.20)$$

und die Restriktionsersatzfunktionen

$$\gamma_j(\mathbf{a}^{(k)}) = g_j^{(k)} + (\nabla g_j^{(k)})^T (\mathbf{a} - \mathbf{a}^{(k)}), \quad j = 1, \dots, m \quad (2.21)$$

in jeder Iteration erneut entwickelt. Durch die Linearisierung des Problems verringert sich dessen Gültigkeitsbereich für eine ausreichende Genauigkeit. Dazu kommt, dass das Optimum  $\mathbf{a}^*$  bei linearen Restriktionen – im Gegensatz zum nicht linearen konvexen Rand – im Unendlichen liegen kann, wenn weniger Restriktionen als Optimierungsvariablen vorhanden sind. Es wird daher ein kleiner verschiebbarer Beobachtungsbereich um  $\mathbf{a}^{(k)}$  gelegt, in dem die Ersatzzielfunktion minimiert wird. Abbildung 2.10 zeigt dies. Anschließend wird dieser Bereich um das verbesserte  $\mathbf{a}^{(k+1)}$  abgesteckt und dort  $\psi(\mathbf{a})$  minimiert. Diese Bereiche werden durch eine zusätzliche Nebenbedingung als sogenannte *Move Limits* eingeführt und durch den Faktor  $\theta$  skaliert.

$$(1 - \theta)a_i^{(k)} \leq a_i \leq (1 + \theta)a_i^{(k)}, \quad i = 1, \dots, n; \quad 0 < \theta < 1 \quad (2.22)$$

Die Wahl von  $\theta$  ist offensichtlich ausschlaggebend für die Konvergenz des Algorithmus. Ein zu kleiner Wert resultiert in einer zu geringen Veränderung von  $\mathbf{a}$  und ein zu großer Wert kann weit im unzulässigen Bereich liegende Zwischenlösungen verursachen, die es unter Umständen nicht wieder in den zulässigen Bereich schaffen und damit sogar die Optimierung fehlschlagen kann. [4]

Die sequentiell konvexe Programmierung SCP verfolgt – anstatt der reinen Linearisierung des Problems (SLP) – die Approximation über die Erzeugung eines konvexen und damit gut lösbarer Ersatzproblems. Augenmerk liegt dabei zudem auf der Erhaltung der Konservativität des originalen Problems. Das heißt die Restriktionsapproximationen  $\gamma_j$  sollen innerhalb der abgesteckten *Move Limits* nur so viel kleiner als die originalen Restriktionsfunktionen  $g_j$  werden, dass die Zwischenlösungen  $\mathbf{a}^{(k)}$

zulässig oder zumindest in der Nähe des Restriktionsrandes liegen. Dadurch soll die Effizienz erhöht und die Erfolgsquote der Optimierung gesteigert werden. Drei Varianten der SCP seien erwähnt und auf ihre Literatur verwiesen. In der konvexen Linearisierung (CONLIN) nach FLEURY [10] wird das Optimierungsproblem durch eine Folge konvexer und separierbarer Ersatzprobleme approximiert. Separierbare Funktionen hierin sind durch die Möglichkeit gekennzeichnet sich additiv aus Termen zusammenzusetzen, die jeweils nur von einer Variable abhängen. Die Methode der bewegten Asymptoten (MMA) nach SVANBERG [28] ist eine Weiterentwicklung der CONLIN, in der sich die Konservativität und damit die Effizienz durch die Anpassung von Parametern während des Optimierungsprozesses gut steuern lässt. Die Möglichkeit des Steuerns ist ebenfalls in der konvexen Approximation nach WOO [32] möglich.

## **Lösungserzeuger für approximierte Ersatzprobleme**

Die Lösung kann für lineare Ersatzprobleme (SLP) durch beispielsweise das Simplex-Verfahren [8] erfolgen, es kommen aber auch die erwähnten allgemeinen Verfahren zur direkten Lösung in Frage und selbst die Lösung durch ein Straffunktionsverfahren wäre möglich. Zudem eignen sich zur Lösung konvexer separabler Optimierungsprobleme (SCP) besonders duale Lösungsverfahren. Dabei wird das primale Problem (die Minimierung der Ersatzzielfunktion) in einem dualen Problem (die Maximierung der Lagrange-Funktion des primalen Problems) optimiert. Durch die duale Formulierung des Problems wird der Sattelpunkt der Lagrange-Funktion gefunden, in dem das Optimum  $\mathbf{a}^*$  liegt. [4]

### **2.2.4 Optimalitätskriterienverfahren**

Optimalitätskriterienverfahren unterscheiden sich in der Unabhängigkeit der lokalen Gegebenheiten von der Suche nach dem globalen Optimum. Mittelpunkt der Optimalitäts-kriterienverfahren ist eine *Redesign*-Formel, durch die der Startentwurf iterativ in die optimale Struktur überführt wird. Die Kriterien, nach denen diese Formel aufgestellt wird, sind speziell und beschränken das Verfahren in seiner Allgemeingültigkeit. Es sind meist Prinzipien oder Axiome, die durch ingenieurwissenschaftliche Erfahrungen aufgestellt wurden und mathematisch umfänglich oder für einen eingeschränkten Aufgabenbereich bewiesen werden können. [4]

## **Homogene Spannungsverteilung**

MATTHECK [20] beschreibt das Axiom konstanter Spannung im Sinne des adaptiven Wachstums in der Natur. So wird dort im Speziellen in Bezug auf Kerben gezeigt, wie die Adaption nach dem Kriterium der homogenen Spannungsverteilung

bionischen Strukturen, wie Bäumen oder auch Knochen, zu hochfesten Eigenschaften verhilft. Durch zwei Methoden wird die Strukturoptimierung auf dieser Basis realisiert. Die *Soft Kill Option* (SKO) [6] variiert mit dem Elastizitätsmodul  $E_i$  die Materialeigenschaften auf Basis der Elementspannung  $\sigma_i$

$$E_i^{(k+1)} = E_i^{(k)} + \Delta E_i^{(k)}, \quad \Delta E_i^{(k)} = f(\sigma_i^{(k)} - \sigma^u) \quad (2.23)$$

die die Finite-Elemente-Analyse als Strukturantwort liefert. Darin kann die Variation  $f$  im einfachsten Fall eine direkte Proportionalität zwischen  $\Delta E_i^{(k)}$  und der Differenz zwischen Elementspannung  $\sigma_i^{(k)}$  und der festgelegten maximal zulässigen Spannung  $\sigma^u$  beschreiben, sodass hoch beanspruchte Elemente steifer werden, während weniger beanspruchte Elemente nachgiebiger werden. Eine anschließende FEA kann dann durch die inhomogene Verteilung der Steifigkeit notwendiges von überschüssigem Material konturieren. Dies wird iterativ wiederholt bis jedes Element den zulässigen Spannungswert  $\sigma^u$  annimmt und anschließend wird  $E$  wieder auf einen konstanten Wert gesetzt. Elemente, die im Optimierungsprozess Spannungswerte nahe null annehmen, können dabei ebenso gut komplett eliminiert – „gekilled“ – werden. [20]

An die topologisch optimierende SKO wird die Formoptimierung der *Computer Aided Optimization* (CAO) [19] gekoppelt. Zweck der CAO ist der adaptive Zuwachs der Struktur an Randschichten, die einer hohen Beanspruchung ausgesetzt sind. Dazu wird sich der thermischen Finite-Elemente-Analyse bedient. Nach der statisch mechanischen FEA im ersten Schritt werden die Spannungen  $\sigma$  als Strukturantwort in eine thermische Belastung übersetzt, die elementweise auf die Struktur gegeben wird. Elemente an der Randschicht erhalten einen Wärmeausdehnungskoeffizienten  $\alpha_T > 0$  während innenliegende Elemente sich mit  $\alpha_T = 0$  nicht ausdehnen sollen. So wächst die Randschicht des Bauteils entsprechend ihrer Spannungsverteilung. Gerade in Bereichen von Kerben trägt diese Methode zur erweiterten Homogenisierung der Spannungsverteilung bei. [20]

Speziell zur Optimierung von Stabtragwerken findet sich die homogene Spannungsverteilung in dem Prinzip des voll beanspruchten Tragwerks wieder, das auch als *Fully Stressed Design* (FSD) bezeichnet wird. Dabei liegt das Optimum ebenfalls wieder an Restriktionsgrenzen, denn als voll beansprucht gilt ein Stabtragwerk für die Stäbe  $i = 1, \dots, n$ , wenn alle Stäbe in mindestens einem Lastfall  $j$  an ihrer zulässigen Spannungsgrenze belastet werden

$$\sigma_{i(j)} = \sigma^u \quad (2.24)$$

oder wenn alle Entwurfsvariablen – in diesem Fall die Stabquerschnittsflächen  $a_i$  – an ihrer Untergrenze

$$a_i = a^u \quad (2.25)$$

angelangt sind.

Hier spielt jedoch die statische Bestimmtheit des Fachwerks eine einschränkende Rolle, denn es zeigt sich, dass nur für statisch bestimmte Tragwerke eine voll beanspruchte Struktur auch die gewichtsoptimale Lösung darstellt. Bei statisch unbestimmten Tragwerken besitzt dieses Optimalitätskriterium keine Allgemeingültigkeit. Es ist jedoch möglich, dass auch ein voll beanspruchtes Tragwerk mit statischer Unbestimmtheit die gewichtsoptimale Lösung ist. In diesem Fall liegt dann dadurch, dass die überzähligen Stäbe eliminiert wurden in der Regel wieder ein statisch bestimmtes System vor. Ebenso erlangt es wieder Gültigkeit, wenn das unbestimmte System nur einen einzelnen Lastfall hat. Systeme mit mehreren Lastfällen, die durch Ausnutzung von Symmetrien auf Systeme mit einzelnen Lastfällen zerlegt werden, sind jedoch davon ausgeschlossen. Hinzukommt, dass sich im statisch bestimmten System Veränderungen am Querschnitt eines Stabes einzeln und allein auf die Spannung in diesem Stab auswirken. Diese Entkopplung ist bei statisch unbestimmten Systemen nicht gegeben, jedoch können dieselben Algorithmen angewendet werden wie bei statisch bestimmten Systemen. Lediglich mit dem Unterschied, dass sich die Zahl der Iterationen bis zum optimalen Entwurf erhöht. Damit verschlechtert sich die Konvergenz und somit die Effizienz des Algorithmus. [12] Die statische Bestimmtheit wird gesondert in Abschnitt 3.1 behandelt.

Dass das Optimalitätskriterium der homogenen Spannungsverteilung zielführend für eine gewichtsoptimale Struktur ist, kann recht simpel an einfachen Beziehungen der Festigkeitslehre dargelegt werden. Es sei das Beispiel des Zugstabs aus Abbildung 3.3 hergenommen und die Querschnittsfläche  $A$  variiert. Das Volumen des Stabs  $V_s = Al$  sinkt bei konstanter Länge  $l$ , wenn die Querschnittsfläche  $A$  sinkt. Gleichzeitig steigt die Spannung  $\sigma = \frac{F}{A}$  wenn  $A$  sinkt, sodass allgemein die Stabspannung steigt, wenn das Stabvolumen sinkt. So wäre wohl auch die intuitive Vermutung – weniger Material führt zur höheren Bauteilbeanspruchung. Im Optimalfall eines Elements  $\sigma_i = \sigma^u$  würde also die maximal zulässige Spannung überschritten, wenn das Volumen weiter verringert werden würde und in anderer Richtung das Volumen steigen, wenn das Element entlastet werden würde. Das Optimum des Optimalitätskriterienverfahrens der homogenen Spannungsverteilung ist daher dadurch charakterisiert, dass alle Strukturanworten  $\sigma_i$  an der Restriktionsgrenze  $\sigma^u$  liegen. Werden, wie bei der Kombination von SKO und CAO, sowohl die Topologie als auch die Form optimiert, sollte zunächst die Form und anschließend die Topologie variiert werden, da sich das Kriterium nur unter Konstanz der Knotenpunktkoordinaten formulieren lässt. Für den mathematischen Beweis anhand der Kuhn-Tucker-Bedingungen des voll beanspruchten Tragwerks im Gewichtsminimum

sei auf [4] verwiesen.

## 2.3 Michell-Strukturen

MICHELL entwickelt in seinem häufig zitierten Artikel [23] eine Entwurfstheorie für Fachwerke hinsichtlich des Gewichtsoptimums bei einem gegebenen Lastfall mit Spannungsrestriktionen. Diese Theorie fußt auf dem Lastpfad-Theorem von MAXWELL [21], das als Grundstein der graphischen Statik und geometrisch reziproken Diagramme gilt. Eine Zusammenführung beider Veröffentlichungen bieten BAKER et al. [5]. Da MICHELLS optimale Strukturen durch stabgefüllte Kontinua beschrieben werden, die – durch die unendlich vielen Stäbe zur Imitation eines Kontinuums – mitnichten realisierbar sind, sei PRAGER erwähnt. Er zeigt, dass die Diskretisierung der Stabkontinua in eine endliche Anzahl an Stäben keine signifikanten Einbußen der Materialeffizienz nach sich zieht und spricht als Maß seiner optimierten Strukturen von der Michell-Effizienz [24]. Ohne tief in die graphische Statik und geometrisch reziproken Diagramme zu tauchen, soll die Charakteristik der Michell-Strukturen dargelegt werden, da sie in der Literatur für die Strukturoptimierung von Fachwerken als analytisch determinierbares Optimum des Strukturvolumens  $V^{opt}$  dient. Dies ist insofern wertvoll, da das durch den Optimierungsalgorithmus ermittelte Optimum  $V^*$  verifiziert werden kann und so der Fehler  $e_{rel}$ , beziehungsweise, wie PRAGER es tut, die Michell-Effizienz

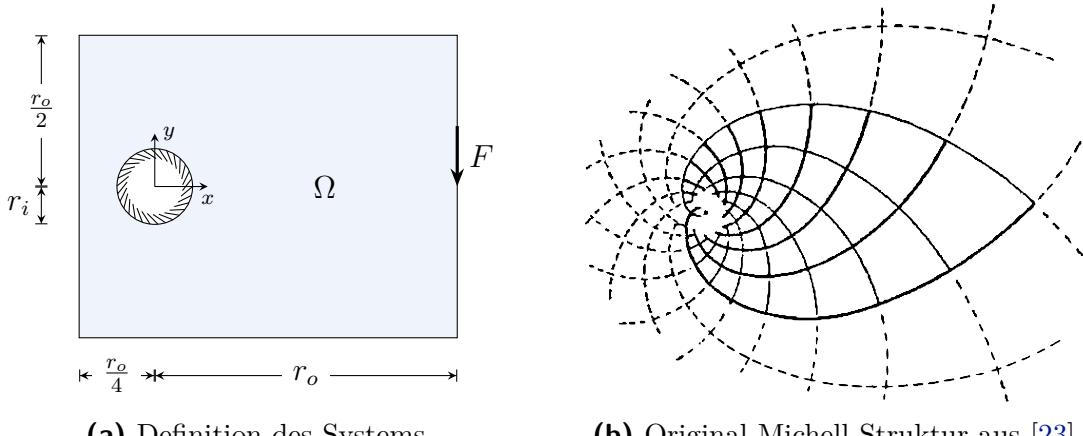
$$\eta_M = 1 - e_{rel}, \quad e_{rel} = \frac{V^* - V^{opt}}{V^{opt}} \quad (2.26)$$

die Optimalität der optimierten Lösung  $\mathbf{x}^*$  charakterisiert. Probleme, deren Lösung durch eine analytische Lösung verifiziert werden kann, sind sogenannte *Benchmark-Probleme*. So können im Speziellen Algorithmen in diesen *Benchmark*-Tests auf ihre Leistung geprüft und miteinander verglichen werden.

Das MAXWELL-Lastpfad-Theorem

$$\underbrace{\sum_{\text{Zug-Lastpfad}} l_z F_z}_{\text{Zug-Lastpfad}} - \underbrace{\sum_{\text{Druck-Lastpfad}} l_d F_d}_{\text{Druck-Lastpfad}} = f(\mathbf{f}_{ext}, \mathbf{x}_f) = \text{const.} \quad (2.27)$$

zeigt, dass der Lastpfad aller Zugstäbe der Struktur – mit der Stablänge  $l$  und -kraft  $F$  – subtrahiert mit dem Lastpfad aller Druckstäbe, unabhängig von der Form des Fachwerks, eine konstante Funktion der externen Lasten  $\mathbf{f}_{ext}$  und deren Wirkungspunkten  $\mathbf{x}_f$  ist. Davon ausgehend kann in bestimmten Fällen das Minimum des benötigten Materials zum Standhalten ( $\sigma_i \leq \sigma^u$ ) des externen Lastsystems gefunden werden, sowie die Form des Fachwerks in dem dieses Minimum erreicht wird. Mit den oberen Limits der Spannungsrestriktionen für Zug-  $\sigma_z^u$  und Druckbeanspruchung  $\sigma_d^u$  lässt sich Gleichung (2.27) für ein gegebenes Fachwerk zu



**Abb. 2.11** Der Michell-Kragarm mit kreisrunder Einspannung

$$\sum l_e \frac{F_z}{\sigma_z^u} + \sum l_d \frac{F_d}{\sigma_d^u} = V^{opt}(\mathbf{f}_{ext}, \mathbf{x}_f) = \text{const.} \quad (2.28)$$

formulieren, in der das Volumenminimum  $V^{opt}$  wieder eine konstante Funktion der externen Lasten  $\mathbf{f}_{ext}$  und deren Wirkungspunkten  $\mathbf{x}_f$  ist. Beispielsweise existiert für den Michell-Kragarm mit kreisrunder Einspannung aus Abbildung 2.11 die Funktion des Volumenminimums mit

$$V^{opt} = Fr_o \ln \frac{r_o}{r_i} \left( \frac{1}{\sigma_z^u} + \frac{1}{\sigma_d^u} \right). \quad (2.29)$$

In Abbildung 2.11b wird das wiederkehrende Winkelschema der Michell-Strukturen deutlich. Die Kreuzung der Stäbe unter einem rechten Winkel lässt sich in allen Strukturen, die dem Ansatz von MICHELL folgen, feststellen. [23]

# KAPITEL 3

---

## **Stabtragwerke in der Finite-Elemente-Methode**

---

Dieses Kapitel behandelt zunächst die Grundlagen zur Analyse und Charakterisierung von Stabtragwerken, die zur Formulierung eines Optimierungsproblems essenziell sind. Anschließend wird der Stab als finites Element hergeleitet, um Gitterstrukturen mit Hilfe der FEM zu modellieren und zu analysieren. Der Begriff des Stabtragwerks, der in dieser Thesis durchweg verwendet wird, sei zunächst definiert und die einhergehenden Annahmen dargelegt. Tragwerke aus Stäben bestehen ausschließlich aus geraden Stäben, die an deren Enden in Knotenpunkten miteinander verbunden sind. Dabei sind Fachwerke Stabtragwerke, die aus Stäben bestehen, deren Länge deutlich größer ist als ihr Durchmesser und nur axiale Kräfte (Zug/Druck) aufnehmen können. Lasten greifen ausschließlich an den Knoten an, die als reibungsfreie Gelenke zu verstehen sind. Rahmenwerke hingegen bestehen aus biegesteifen Stäben (Balken), die Lasten greifen an beliebigen Stellen an und die Knoten sind ebenfalls steif. [11] Im Folgenden wird sich allein auf Fachwerke beschränkt. Wird der Begriff Stabtragwerk verwendet, dient dies der Verallgemeinerung, da viele gezeigte Methoden genau so auf Rahmenwerke anwendbar sind.

Es werden Annahmen zur Idealisierung des Fachwerks getroffen. In realen Konstruktionen können die Stabenden miteinander oder an Knotenblechen verschweißt sein,

sodass sie mitnichten reibungsfrei gelenkig sind. Dies hat lokale Störeffekte zufolge, beeinflusst jedoch nicht das globale Tragverhalten. Das Eigengewicht der Stäbe wird vernachlässigt oder auf die benachbarten Knoten als Punktlasten verteilt. [11]

### 3.1 Statische Bestimmtheit von Fachwerken

Für die statische Bestimmtheit kann eine notwendige Bedingung formuliert werden. Dies wird exemplarisch an den ebenen Fachwerken in Abbildung 3.1 gezeigt. Ein Fachwerk ist statisch bestimmt, wenn die Auflager- und Stabkräfte allein aus den Gleichgewichtsbedingungen bestimmbar sind. Diese Gleichgewichtsbedingungen sind das Gleichungssystem der statischen Kräftegleichgewichte an den Knoten. Bei ebenen Fachwerken mit  $k$  Knoten,  $s$  Stäben und  $r$  Lagerreaktionen besteht das Gleichungssystem aus  $2k$  Gleichungen für die  $s + r$  Unbekannten. Daher ist die notwendige Bedingung für die Ermittlung der Unbekannten in der Ebene

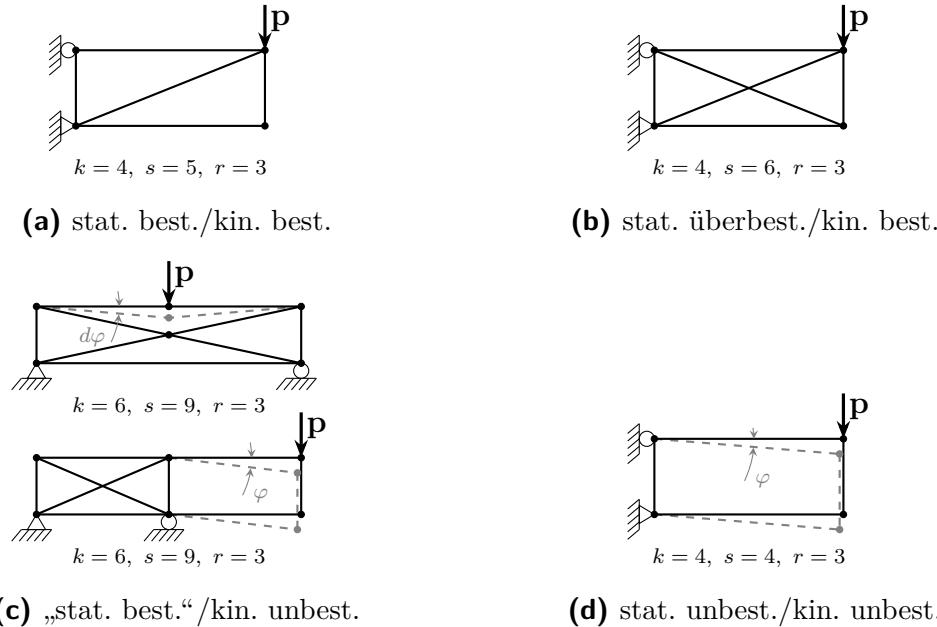
$$2k = s + r \quad (3.1)$$

und im Raum

$$3k = s + r. \quad (3.2)$$

Wird nun das Fachwerk aus Abbildung 3.1a hergenommen liefert Gleichung (3.1) die notwendige Bedingung zur statischen Bestimmtheit. Das ebene Festlager blockiert beide Freiheitsgrade am Knoten, das ebene Loslager lediglich einen ( $r = 2 + 1$ ). Die Fachwerke in Abbildungen 3.1b und 3.1d hingegen werden Gleichung (3.1) nicht befriedigen und sind damit statisch unbestimmt. Das Fachwerk in Abbildung 3.1d ist zudem beweglich – es ist kinematisch unbestimmt. So lassen sich die horizontalen Stäbe um einen endlichen Winkel  $\varphi$  drehen (Beweglichkeit im Großen). In Abbildung 3.1b ist das Fachwerk zwar kinematisch bestimmt, jedoch enthält es überzählige Stäbe, sodass die Stabkräfte nur unter Berücksichtigung der Deformation der Stäbe ermittelt werden können. Abbildung 3.1c zeigt, dass Gleichung (3.1) keine hinreichende Bedingung für statische Bestimmtheit ist. Die kinematische Unbestimmtheit muss ausgeschlossen werden, um die Tragfähigkeit eines Fachwerks zu garantieren. In dem unteren Fachwerk lassen sich die horizontalen Stäbe der rechten Hälfte ebenfalls um einen endlichen Winkel  $\varphi$  drehen, die oberen horizontalen Stäbe des oberen Fachwerks hingegen um einen infinitesimalen Winkel  $d\varphi$  (Beweglichkeit im Kleinen). [30]

Bei Betrachtung der diskretisierten Struktur in Abbildung 2.3 wird auffallen, dass sie im Falle eines Fachwerks mehrfach statisch überbestimmt ist. Da als Analysemethode in dieser Thesis ein Deformationsverfahren – die Finite-Elemente-Methode –



**Abb. 3.1** Statische und kinematische Bestimmtheit von Fachwerken in Anlehnung an [11]

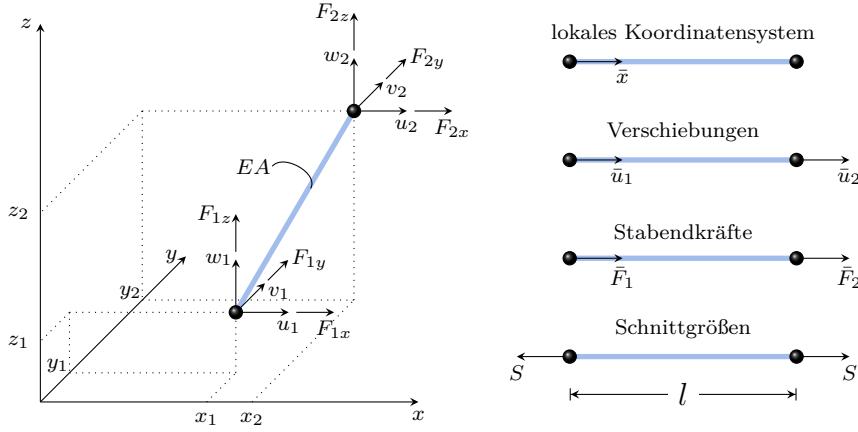
genutzt wird, ist die Analyse von statisch überbestimmten Fachwerken nicht weiter ein Problem. Eine statische Unbestimmtheit im Sinne eines statisch unterbestimmten oder kinematisch unbestimmten Fachwerks ist hingegen zu jedem Zeitpunkt zu vermeiden, um die Lösbarkeit der Gleichung (3.3) zu gewährleisten.

## 3.2 Das Stabelement in der Finite-Elemente-Methode

Es wird das räumliche Stabelement mit festem Querschnitt und konstanten Materialeigenschaften betrachtet. Das ebene Stabelement wird nicht gesondert betrachtet, da das räumliche Stabelement ebenso in der Ebene angewandt werden kann. Abbildung 3.2 zeigt, dass der Stab aufgrund der rein axialen Lastaufnahme lokal als eindimensionales Element zu betrachten ist. Die Zentrale Gleichung der Finite-Elemente-Methode für die statisch elastische Analyse ist die Steifigkeitsbeziehung, die auf das lineare Federgesetz  $Kraft = Steifigkeit \times Längenänderung$  zurückzuführen ist.

$$\mathbf{Ku} = \mathbf{f} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^e & \cdots & \mathbf{K}_{1n}^e \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{K}_{n1}^e & \cdots & \mathbf{K}_{nn}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^p \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n^p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1^p \\ \vdots \\ \mathbf{f}_n^p \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

mit den Systemgrößen und den elementbezogenen  $[\cdot]^e$  sowie knotenbezogenen  $[\cdot]^p$  Größen



**Abb. 3.2** Das räumliche Stabelement im globalen und lokalen Koordinatensystem in Anlehnung an [30]

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &\in \mathbb{R}^{(2mn \times 2mn)}, & \mathbf{K}_{ij}^e &\in \mathbb{R}^{(2m \times 2m)} \\ \mathbf{u} &\in \mathbb{R}^{(mn \times 1)}, & \mathbf{u}_i^p &\in \mathbb{R}^{(m \times 1)} \\ \mathbf{f} &\in \mathbb{R}^{(mn \times 1)}, & \mathbf{f}_i^p &\in \mathbb{R}^{(m \times 1)}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

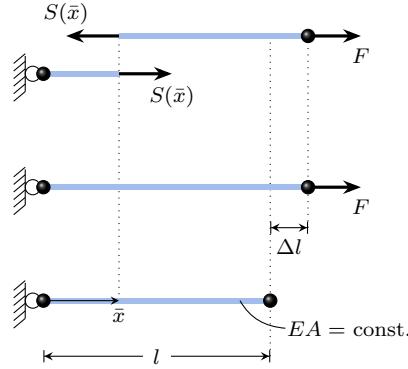
Darin ist  $\mathbf{K}$  die symmetrische Systemsteifigkeitsmatrix, gefüllt mit den einzelnen Elementsteifigkeitsmatrizen  $\mathbf{K}_{ij}^e$ , die die Steifigkeit zwischen den Knoten  $i$  und  $j$  beschreiben.  $\mathbf{u}$  ist ein Spaltenvektor mit den Verschiebungen an allen  $n$  Knoten und  $\mathbf{f}$  ist ebenfalls ein Spaltenvektor, gefüllt mit allen Knotenkräften der Struktur.  $m$  ist die Anzahl an Freiheitsgraden pro Knoten, welche für den Stab im Raum gleich 3 ist ( $u, v, w$ ). Die wesentliche Unbekannte des Gleichungssystems ist der Verschiebungsvektor  $\mathbf{u}$ , den es zu ermitteln gilt. Dazu beschreibt die Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$  die Beziehung zwischen den Kräften, die an den Knoten anliegen und den daraus resultierenden Verschiebungen in der Struktur. Im einfachsten und hier behandelten Fall ist sowohl die Querschnittsfläche  $A$  als auch der Elastizitätsmodul  $E$  über die Längsachse  $\bar{x}$  konstant, sodass der eindimensionale Stab als linear elastische Feder modelliert werden kann. Die Steifigkeitsmatrix eines Stabelements ist dadurch recht schnell hergeleitet und es werden offensichtlich keine Formfunktionen zur Approximation der inneren Elementgrößen benötigt. Aus der Festigkeitslehre ist der Zugstab wie in Abbildung 3.3 gezeigt bekannt. Die Kinematik zeigt mit

$$\varepsilon(\bar{x}) = \frac{du(\bar{x})}{\bar{x}} = \frac{\Delta l}{l} \quad (3.5)$$

die Beziehung zwischen der Dehnung  $\varepsilon(\bar{x})$  und der Verschiebung  $u(\bar{x})$  entlang der lokalen axialen Koordinate  $\bar{x}$ . Das Stoffgesetz liefert

$$\sigma(\bar{x}) = E\varepsilon(\bar{x}) \quad (3.6)$$

mit der Normalspannung  $\sigma(\bar{x})$ , welche sich mit der Normalkraft am Schnitt  $S(\bar{x})$  aus



**Abb. 3.3** Zugstab unter Einzellast in Anlehnung an [22]

$$\sigma(\bar{x}) = \frac{S(\bar{x})}{A(\bar{x})} = \frac{S(\bar{x})}{A} = \frac{F}{A} \quad (3.7)$$

errechnet. Der Zusammenhang zwischen Kraft und Längenänderung  $\Delta l$  des Stabes kann also durch

$$F = \frac{EA}{l} \Delta l \quad (3.8)$$

beschrieben werden. Das Verhältnis von Kraft zu Längenänderung ist die Dehnsteifigkeit

$$\frac{F}{\Delta l} = \frac{EA}{l} = k. \quad (3.9)$$

Nun soll mit diesem Hintergrund die lokale Elementsteifigkeitsmatrix  $\bar{\mathbf{K}}^e$  aufgestellt werden, um den Stab in eine Tragwerkstruktur einbinden zu können, die durch Gleichung (3.3) beschrieben und gelöst werden kann. Hierbei wird die Steifigkeitsbeziehung für beide Knoten des Stabs im lokalen Koordinatensystem aus Abbildung 3.2 hergenommen und jeweils einzeln die Knotenkräfte angelegt. So werden die Gleichungen

$$\begin{aligned} \bar{F}_{1x} &= k \Delta l = k(\bar{u}_1 - \bar{u}_2) \\ \bar{F}_{2x} &= k \Delta l = k(\bar{u}_2 - \bar{u}_1) \end{aligned} \quad (3.10)$$

gewonnen. Die Überlagerung beider Gleichungen lässt sich in Matrix-Vektor-Schreibweise kompakt zu

$$\begin{bmatrix} \bar{F}_1 \\ \bar{F}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

umschreiben, sodass die lokale Elementsteifigkeitsmatrix

$$\bar{\mathbf{K}}^e = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

hergeleitet ist. [22] Die lokale Steifigkeitsbeziehung des Stabelements im Raum  $\bar{\mathbf{K}}^e \bar{\mathbf{u}}^e = \bar{\mathbf{f}}^e$  ist demnach

$$\begin{bmatrix} k & 0 & 0 & -k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k & 0 & 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{v}_1 \\ \bar{w}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{w}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{F}_{1x} \\ \bar{F}_{1y} \\ \bar{F}_{1z} \\ \bar{F}_{2x} \\ \bar{F}_{2y} \\ \bar{F}_{2z} \end{bmatrix}, \quad k = \frac{EA}{l}. \quad (3.13)$$

Zur Modellierung eines Tragwerks aus Stabelementen muss aus den bisher ausschließlich verwendeten lokalen Koordinaten in die globalen Koordinaten übergegangen werden. Dazu bedarf es der Einführung einer Rotationsmatrix  $\mathbf{R}$  mit der die lokalen in globale Größen transformiert werden. Die Transformation von knotenbezogenen Größen erfolgt mit den Richtungskosinus  $c$  zwischen den lokalen  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  und globalen  $(x, y, z)$  Koordinaten zu

$$\mathbf{R}^p = \begin{bmatrix} c_{\bar{x}x} & c_{\bar{x}y} & c_{\bar{x}z} \\ c_{\bar{y}x} & c_{\bar{y}y} & c_{\bar{y}z} \\ c_{\bar{z}x} & c_{\bar{z}y} & c_{\bar{z}z} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

und die der elementbezogenen Größen durch

$$\mathbf{R}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}^p \end{bmatrix}. \quad (3.15)$$

Die lokale Elementsteifigkeitsmatrix  $\bar{\mathbf{K}}^e$  wird mit

$$\mathbf{K}^e = \mathbf{R}^{eT} \bar{\mathbf{K}}^e \mathbf{R}^e \quad (3.16)$$

in die globale Elementsteifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}^e$  überführt. Die Systemsteifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$  wird anschließend mit den einzelnen Elementsteifigkeitsmatrizen befüllt. Dabei ist das Kräftegleichgewicht am jeweiligen Knoten entscheidend für die Position der Steifigkeiten der dort angreifenden Elemente. Formal lässt sich das Zusammensetzen der Systemsteifigkeitsmatrix als

$$\mathbf{K} = \sum_e \mathbf{K}^e \quad (3.17)$$

schreiben. [22]

Äußere Kräfte werden als sogenannte Neumann-Randbedingungen in der Art berücksichtigt, dass sie in den Kraftvektor  $\mathbf{f}$  eingetragen werden. Alle übrigen Einträge sind null. Lagerungen werden definiert, indem die Verschiebung des gewünschten Freiheitsgrades eines Knotens gleich null gesetzt wird. Das Gleichungssystem wird um die Zeile und Spalte dieses Freiheitsgrades des Knotens reduziert. Diese Art der Randbedingung nennt sich Dirichlet-Randbedingung. [22] Bei der Festlegung der Randbedingung von Fachwerken sei an die statische Bestimmtheit aus Abschnitt 3.1 erinnert.

Die Methoden zur Lösung von Gleichung (3.3) werden in dieser Thesis nicht näher erläutert. Während vergleichsweise kleine Systeme mit üblichen Methoden wie dem Gauß-Verfahren gelöst werden können, werden komplexere Systeme beispielsweise mit Hilfe der Cholesky-Zerlegung gelöst. Ist der Verschiebungsvektor  $\mathbf{u}$  ermittelt, so können Dehnungen und Spannungen daraus errechnet werden. Es bedarf der Rücktransformation von dem globalen in das lokale Koordinatensystem. Die Verschiebungs- und Kraftvektoren am Stabelement werden durch

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{u}}^e &= \mathbf{R}^e \mathbf{u}^e \\ \bar{\mathbf{f}}^e &= \mathbf{R}^e \mathbf{f}^e \end{aligned} \quad (3.18)$$

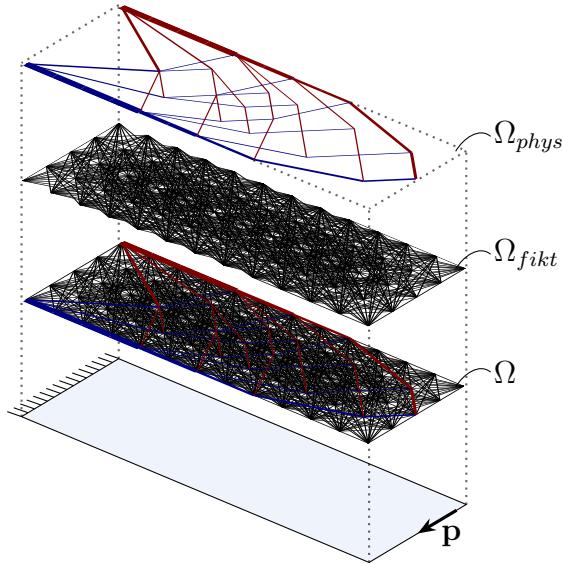
zurück in das lokale Koordinatensystem transformiert. Die Dehnung wird nach Gleichung (3.5) auf die elementbezogene Vektorschreibweise übertragen und errechnet sich so zu

$$\varepsilon^e = \mathbf{b}^e \bar{\mathbf{u}}^e, \quad \mathbf{b}^e = \left[ -\frac{1}{l} \ 0 \ 0 \ \frac{1}{l} \ 0 \ 0 \right] \quad (3.19)$$

und die Spannung nach Gleichung (3.6) mit

$$\sigma^e = E \varepsilon^e. \quad (3.20)$$

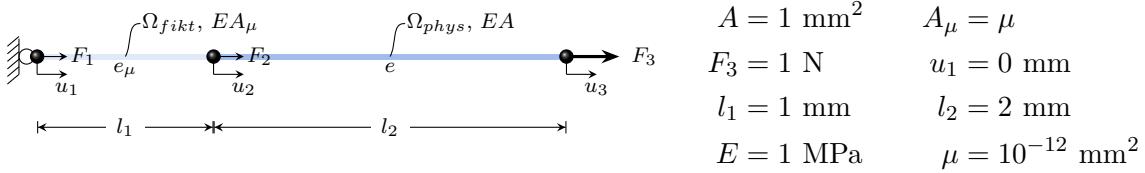
Mit dieser Methode zur statisch elastischen Analyse eines Fachwerks aus finiten Stabelementen können computergestützt komplexe Strukturen in der Ebene und im Raum modelliert werden. [22] Dieses Analysemmodell soll zur Lieferung der Strukturantworten dienen, um Fachwerke zu optimieren.



**Abb. 3.4** Unterteilung des Entwurfsgebiets  $\Omega$  in ein fiktives  $\Omega_{fikt}$  und ein physikalisches Lösungsgebiet  $\Omega_{phys}$

### 3.3 Stabtragwerke nach dem *Fictitious-Domain*-Ansatz

Dass die Topologie der Struktur während des Optimierungsprozesses variabel ist, bedarf einer Methode zur Eliminierung unbeanspruchter Elemente. Wird die Stabquerschnittsfläche  $a_i$  als Entwurfsvariable eingesetzt, bedeutet dies, dass das Stabelement  $e_i$  aus der Struktur entnommen werden kann, wenn  $a_i \approx 0$  ist. Problematisch ist bei Fachwerken jedoch die statische Bestimmtheit aus Abschnitt 3.1. Auch wenn statisch überbestimmte Grundstruktur-Fachwerke im Optimum wieder statisch bestimmt sind, wird es häufig statisch unbestimmte Zwischenlösungen geben, die in der darauf folgenden FEA nicht gelöst werden können. Dies kommt dem Fehlschlag der Optimierung gleich. Motiviert davon, kann eine Penalisierung unbeanspruchter Elemente nach dem *Fictitious-Domain*-Ansatz vorgenommen werden, der an das Konzept der *Finite-Cell-Method* (FCM) [25] anlehnt. Dabei wird das Lösungsgebiet der FEA  $\Omega$  in ein physikalisches Lösungsgebiet  $\Omega_{phys}$  und ein fiktives Lösungsgebiet  $\Omega_{fikt}$  unterteilt. Abbildung 3.4 zeigt wie das tragende, steife Fachwerk ( $\Omega_{phys}$ ) in ein Fachwerk aus sehr weichen Stäben ( $\Omega_{fikt}$ ) eingebettet wird. Daraus folgt die Garantie der statischen Bestimmtheit während des gesamten Optimierungsprozesses. Zur Veranschaulichung des Ansatzes, wird der zweigliedrige Zugstab aus Abbildung 3.5 nach dem Vorgehen aus Abschnitt 3.2 analysiert. Der Stab  $e_\mu$  stellt einen fiktiven Leerraum dar und ist so mit einem Querschnittswert von  $\mu = 10^{-12}$  penalisiert. Bei Vorliegen eines idealen Leerraums würde erwartet werden, dass sich der Stab  $e$  aufgrund der äußeren Kraft  $F_3$  in selbige Richtung fortbewegen würde, ohne dass er Dehnung  $\varepsilon_\mu = \frac{u_3 - u_2}{l_2} = 0$  erfährt. Ein Systemverhalten, das durch seine kine-



**Abb. 3.5** Zweigliedriger Zugstab mit fiktivem  $\Omega_{fikt}$  und physikalischem Lösungsgebiet  $\Omega_{phys}$

matische Unbestimmtheit eine Unlösbarkeit des Gleichungssystems  $\mathbf{Ku} = \mathbf{f}$  zufolge hätte. Werden nun die Kräftegleichgewichte der Knoten aufgestellt

$$\begin{aligned} F_1 &= k_\mu(u_1 - u_2) \\ F_2 &= k_\mu(u_2 - u_1) + k(u_2 - u_3) \quad \text{mit} \quad k_\mu = \frac{EA_\mu}{l_1}, \quad k = \frac{EA}{l_2} \\ F_3 &= k(u_3 - u_2) \end{aligned} \quad (3.21)$$

und zusammen mit den Randbedingung in die Steifigkeitsbeziehung  $\mathbf{Ku} = \mathbf{f}$  eingepflegt

$$\begin{bmatrix} k_\mu & -k_\mu & 0 \\ -k_\mu & k_\mu + k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_3 \end{bmatrix}, \quad (3.22)$$

folgt nach Reduktion der I. Zeile und Spalte, sowie Addition der II. und III. Zeile

$$\begin{aligned} u_2 &= \frac{F_3}{k_\mu} = \frac{1 \text{ N}}{10^{-12} \frac{\text{N}}{\text{mm}}} = 10^{12} \text{ mm} \\ u_3 &= \frac{k + k_\mu}{k} u_2 = \frac{0.5 \frac{\text{N}}{\text{mm}} + 10^{-12} \frac{\text{N}}{\text{mm}}}{0.5 \frac{\text{N}}{\text{mm}}} 10^{12} \text{ mm} \approx 1 \cdot 10^{12} \text{ mm}, \end{aligned} \quad (3.23)$$

sodass gezeigt werden kann, wie die Lösbarkeit gewährleistet werden kann, während die Ergebnisse die Vermutung des idealen Systems befriedigend approximieren. Denn während  $u_1$  durch die Lagerung gleich 0 ist, nehmen  $u_2$  und  $u_3$  unverhältnismäßig große Werte mit verschwindend kleiner Differenz zueinander an. Bei  $\mu \rightarrow 0$  folgen also die Dehnungen des fiktiven Stabs mit  $\varepsilon_\mu = \frac{u_2 - u_1}{l_1} \rightarrow \infty$  und des physikalischen Stabs mit  $\varepsilon = \frac{u_3 - u_2}{l_2} \rightarrow 0$ .

Die Penalisierung wird für Stabelemente mit Querschnittsflächen nahe 0 angewandt. Die Implementierung zur Filterung dieser Elemente, die dem fiktiven Gebiet zugeordnet werden, wird in Abschnitt 4.2.2 erläutert. Die Lösungsbereiche lassen sich geschlossen zu

$$a_i = \begin{cases} a_i & \forall e_i \in \Omega_{phys}, \\ \mu = 10^{-12} & \forall e_i \in \Omega_{fikt} \end{cases}, \quad i \in \mathcal{B} \quad (3.24)$$

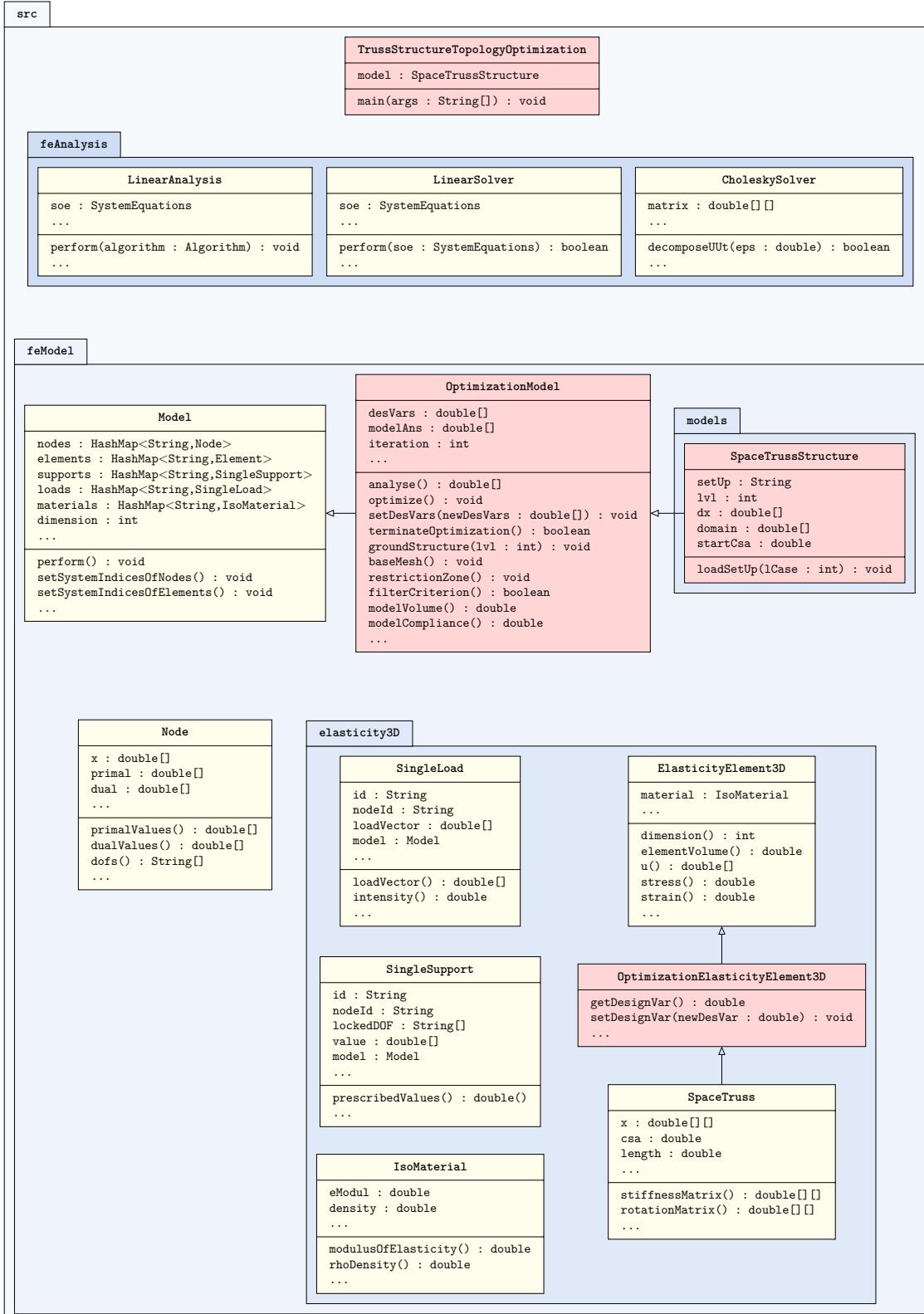
formulieren.

# KAPITEL 4

## Implementation

Als einfaches und zweckmäßiges Verfahren zur Topologieoptimierung von ebenen und räumlichen Stabtragwerken wurde nach dem Prinzip des voll beanspruchten Tragwerks (FSD) ein Optimierungsalgorithmus in dem FEM-Java-Framework FE-LiNA implementiert. Es wird zunächst die Anbindung der Optimierungsklassen und -methoden an die vorhandene Programmstruktur erläutert und anschließend wird sowohl die Implementation von Finite-Elemente-Stabtragwerken als auch die des Topologieoptimierungsalgorithmus dargelegt.

Abbildung 4.1 zeigt die Programmstruktur von FELiNA in einem reduzierten UML-Diagramm mit den Klassen, die für die hier beschriebene Anwendung relevant sind. Bereits bestehende Klassen sind hellgelb hinterlegt, während die implementierten Klassen hellrot hinterlegt sind. Die implementierten Klassen erweitern ein Framework, dass der linear-elastischen Finite-Elemente-Analyse von räumlichen Stabtragwerken dient. Der grundlegende Aufbau eines FE-Modells ist wie folgt. Das Hauptprogramm (`TrussStructreTopologyOptimization`) initialisiert ein Modell (`SpaceTrussStructure`). Zunächst wird eine Menge aus Knoten (`Node`) initialisiert, die durch Koordinaten und Freiheitsgrade definiert sind. Den finiten Stabelementen (`SpaceTruss`) werden zwei Knoten zugeordnet, die sie verbinden. Des Weiteren charakterisiert sich das Stabelement durch ein ihm zugeordnetes Material (`IsoMaterial`), in dem das Elastizitätsmodul, die Dichte und die Querschnittsfläche



**Abb. 4.1** Reduziertes UML-Diagramm der JAVA-Vererbungsstruktur des FEM Frameworks FELiNA

hinterlegt sind. Nun werden die Randbedingungen des Modells in Form von Einzellasten (`SingleLoad`) und Lagerungen (`SingleSupport`) definiert, denen jeweils ein Knoten und der Wert der Randbedingung in Form eines Kraftvektors beziehungsweise den blockierten Freiheitsgraden zugeordnet wird. Die linear-elastische Analyse des Modells (`LinearAnalysis`) stellt aus dem Modell die Systemgleichung mit der Systemsteifigkeitsmatrix aus den Elementsteifigkeitsmatrizen und dem Lastvektor auf. Anschließend löst ein Solver (`LinearSolver`) mit Hilfe der Cholesky-Zerlegung (`CholeskySolver`) die Systemgleichung.

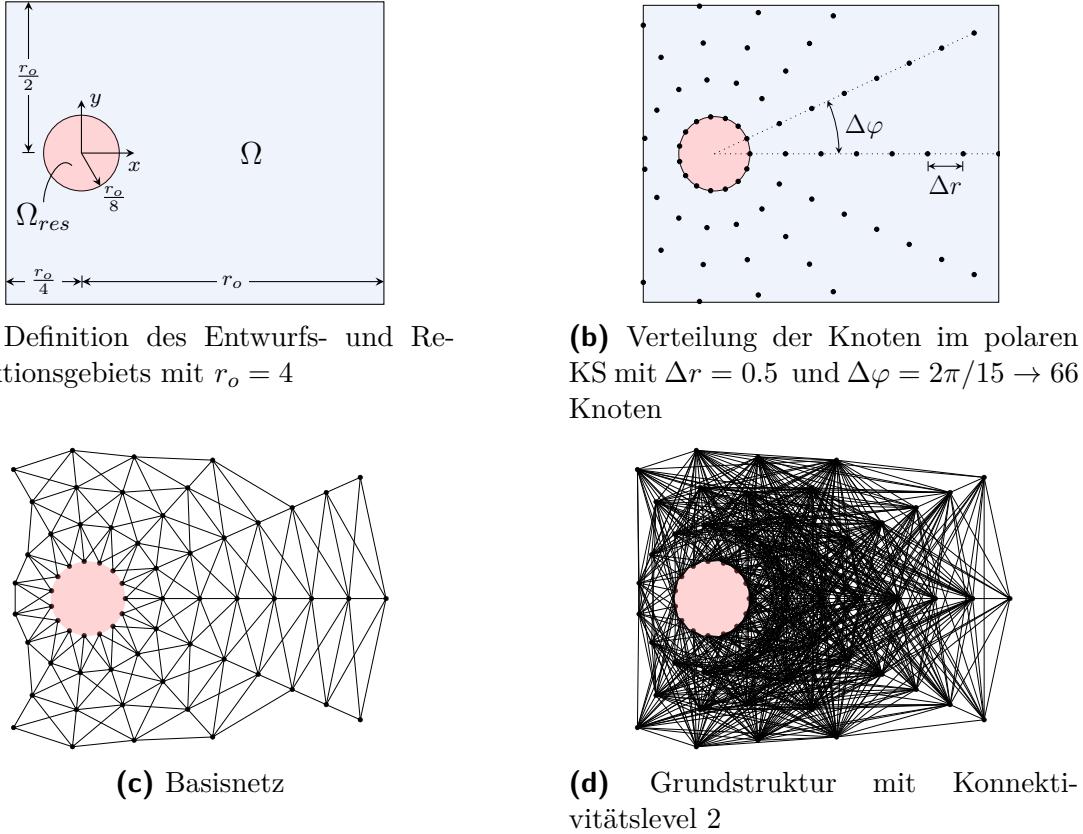
Die Erzeugung der Grundstruktur sowie die Topologieoptimierung des Stabtragwerks an sich findet in der Klasse `OptimizationModel` statt. Sie ist das Herzstück der Implementation dieser Thesis. In ihr werden die Knoten nach der Grundstrukturmethode verbunden, die Entwurfsvariablen auf Basis der *Redesign*-Formel aktualisiert und nach dem *Fictitious-Domain*-Ansatz penalisiert. Des Weiteren bietet die Klasse Methoden zur Erzeugung von Restriktionszonen, Filterung der Entwurfsvariablen, Evaluierung des Abbruchkriteriums und zum Modellieren einer Struktur unter dem Einfluss mehrerer Lastfälle.

## 4.1 FE-Modellbildung von Stabtragwerken zur Topologieoptimierung

Dieser Abschnitt behandelt das reine Aufsetzen der Grundstruktur eines Stabtragwerks, das als Startentwurf in die Topologieoptimierung gegeben wird. Da die Topologieoptimierung in diesem Fall subtraktiver Natur ist und so lediglich Elemente eliminieren, jedoch nach Erzeugung der Grundstruktur keine neuen Elemente mehr generieren kann, ist die Grundstruktur des Modells von essenzieller Bedeutung für die Optimalität der Lösung. Einfacher gesagt, muss der Algorithmus mit den Stäbelementen, die er zur Verfügung bekommt, dem Optimum so nah wie möglich kommen. Je mehr Stäbe vorhanden sind und je vielseitiger sie die Knoten miteinander verbinden, desto höher ist also die Chance, dass in der Grundstruktur die optimale Struktur des Stabwerks enthalten ist.

### 4.1.1 Grundstrukturmethode

Die Methode einen Entwurfsraum  $\Omega$  in finite Flächen- oder Volumenelemente zu diskretisieren und die Knoten der Elemente in bestimmter Weise mit Stäben zu verbinden, ist in der Strukturoptimierung von Stabtragwerken ein gängiges Verfahren, um eine Grundstruktur für die Optimierung zu erzeugen [34, 35, 7, 15]. So kann durch die Information über eine Menge an Elementen und den Knoten, die sie verbinden, mit deren Koordinaten eine Geometrie durch Flächen- oder Volumen-

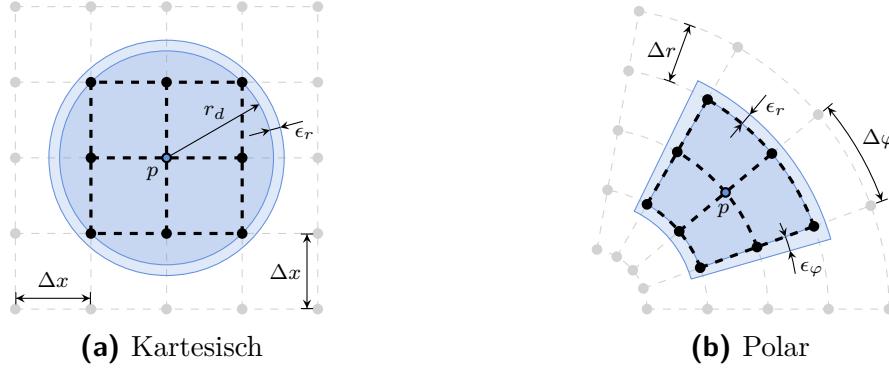


**Abb. 4.2** Diskretisierung eines nicht konvexen Entwurfsraums in eine reguläre polare Verteilung von Knotenpunkten unter der Beachtung einer Restriktionszone

elemente approximiert werden, aber gleichzeitig auch dieselbe Geometrie durch ein Stabtragwerk ersetzt werden. Diese Informationen werden in der Regel durch eine Software zur Netzgenerierung gewonnen und können in dem implementierten Programm eingelesen werden. Abbildung 4.2 hingegen beschreibt die Möglichkeit zur Erzeugung einer recht simplen Diskretisierungen eines Entwurfsraums ohne Nutzung einer externen Software. Dabei wird der Entwurfsraum entlang seiner – hier polaren – Koordinatenachsen in äquidistante Abschnitte unterteilt, auf denen Knoten platziert werden. Durch die Verbindung der Knoten in unmittelbarer Nachbarschaft entsteht ein sogenanntes Basisnetz (*base mesh*). Basisnetze zeichnen sich dadurch aus, dass die Knoten nur innerhalb eines Flächen- oder Volumenelements miteinander verbunden sind. Die Konnektivität und dementsprechend die Vielfältigkeit der Positionierung der Stäbe im Entwurfsraum ist gering. Das Basisnetz dient zum Aufbau von Grundstrukturen höheren Konnektivitätslevels. Abbildung 4.3a zeigt die Konnektivität der benachbarten Knoten im kartesischen Basisnetz. Die Knoten  $p$  und  $q$  werden im kartesischen Basisnetz miteinander verbunden, wenn

$$\|\mathbf{p} - \mathbf{q}\| < r_d + \epsilon_r, \quad 0 \leq \epsilon_r < (2 - r_d)\Delta x \quad (4.1)$$

mit den Ortsvektoren der Knoten  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{q}$ , einer Toleranz  $\epsilon_r$  und dem Nachbarschaftsradius



**Abb. 4.3** Definition der Nachbarschaft bei äquidistanter Knotenverteilung entlang der Koordinatenachsen

$$r_d = \begin{cases} \sqrt{3}\Delta x & \text{im Raum} \\ \sqrt{2}\Delta x & \text{in der Ebene} \end{cases} \quad (4.2)$$

gilt. Darin ist  $\Delta x$  der inkrementelle Abstand zwischen zwei Punkten entlang einer Koordinatenachse. Diese Formulierung führt zur äquivalenten Gitterstruktur, wie die Verbindung aller Knotenpunkte innerhalb eines finiten Viereckelements mit den Seitenlängen  $\Delta x$ . Im Raum beschreibt  $r_d$  eine Kugel. Das Schema der Knotenverbindung ist dabei identisch. Abbildung 4.3b zeigt das Vorgehen bei äquidistanter Diskretisierung entlang der Koordinatenachsen im polaren System. Hier werden die Knoten  $p(r_p, \varphi_p)$ ,  $q(r_q, \varphi_q)$  miteinander verbunden, die

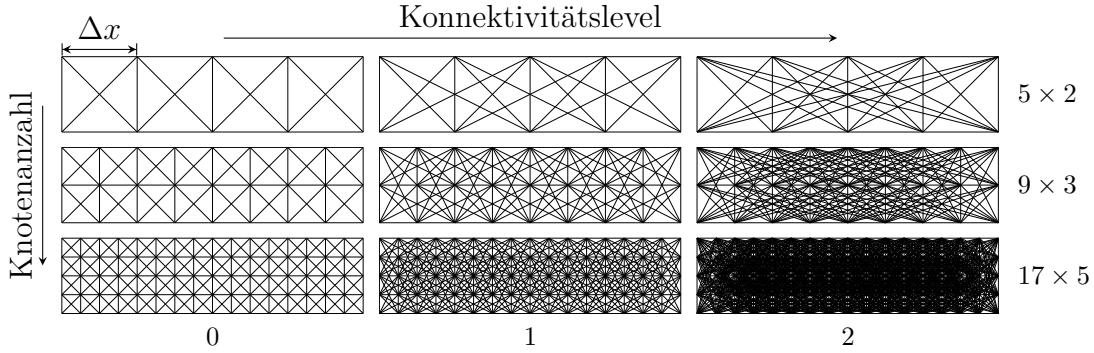
$$r_p - (\Delta r + \epsilon_r) < r_q < r_p + \Delta r + \epsilon_r, \quad 0 \leq \epsilon_r < \Delta r \quad (4.3)$$

und gleichzeitig

$$\varphi_p - (\Delta\varphi + \epsilon_\varphi) < \varphi_q < \varphi_p + \Delta\varphi + \epsilon_\varphi, \quad 0 \leq \epsilon_\varphi < \Delta\varphi \quad (4.4)$$

erfüllen. Mit der kreisförmig geschlossenen Form des polaren Koordinatensystems sind Knoten mit  $\varphi_p = 0$  ebenso für den Fall  $\varphi_p = 2\pi$  gegen den jeweiligen Knoten  $q$  zu prüfen. Auch die polare Formulierung der Knotennachbarschaft lässt sich durch Einführung der dritten Koordinate in die räumliche Modellierung ausweiten. Das dritte Nachbarschaftsintervall, wird analog zu Gleichung (4.4) definiert. Die Toleranzen  $\epsilon_d$ ,  $\epsilon_r$  und  $\epsilon_\theta$  dienen der Berücksichtigung numerischer Ungenauigkeit der Knotenkoordinaten.

Ist das Basisnetz erst einmal durch externe Generierung oder interne Nachbarschaftsverknüpfung erzeugt, unterscheidet sich das weitere Vorgehen nicht. Erstere Methode des Imports generierter Netzdaten bietet vor allem die Möglichkeit komplexere Geometrien zu modellieren und adaptive Inkremeante darzustellen. Das implementierte Programm ist dabei unabhängig von der Knotenzahl eines finiten Flächen- oder



**Abb. 4.4** Grundstruktur eines rechteckigen Entwurfsgebiets in diversen Konnektivitäts- und Verfeinerungslevels

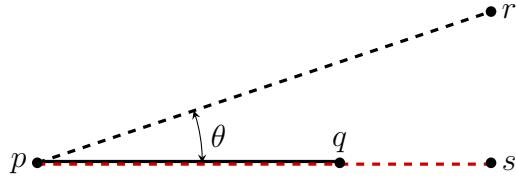
Volumenelements. Aus Gründen der einfacheren Darstellbarkeit wird hauptsächlich die Generierung der ebenen Grundstruktur betrachtet. Im Raum funktioniert sie auf identische Weise.

Der Fokus der Grundstruktur liegt neben der Feinheit des Basisnetzes auf der Konnektivität der Knoten. Das Basisnetz wird mit dem Konnektivitätslevel 0 definiert. Im Level 0 verlassen die Verbindungen den Nachbarschaftsradius beziehungsweise das Flächen- oder Volumenelement nicht. Mit steigendem Konnektivitätslevel reichen die Verbindungen der Knoten über die Nachbarschaftsgrenzen hinaus. So ist ein Knoten in einer Struktur mit dem Konnektivitätslevel 1 mit den Knoten im Nachbarschaftsradius beziehungsweise im Flächen- oder Volumenelement verbunden und zusätzlich mit allen Knoten aus den direkt benachbarten Elementen. Im Konnektivitätslevel 2 kommen die Verbindungen mit allen Nachbarn der Nachbarn hinzu, im Konnektivitätslevel 3 alle Nachbarn der Nachbarn der Nachbarn und so weiter. Die Elementanzahl nimmt rasant zu und endet in der maximalen Konnektivität, in der alle Knoten des Modells miteinander verbunden sind. Abbildung 4.4 zeigt den Einfluss der Feinheit des Basisnetzes und des Konnektivitätslevels auf die Grundstruktur des Modells. Im Falle der Konfiguration mit  $5 \times 2$  Knoten ist die maximale Konnektivität dort bei Level 2 erreicht.

Die Konnektivität der Knoten wird in einer Konnektivitätsmatrix  $\mathbf{C}^n$  für das jeweiligen Level  $n$  ausgedrückt. Ihre Elemente definieren sich mit den Knoten  $p$  und  $q$  in dem Basisnetz zu

$$c_{pq}^0 = \begin{cases} 1 & \text{falls } p \text{ und } q \text{ in einem Element liegen} \\ 0 & \text{falls } p = q \text{ oder sonst.} \end{cases} \quad (4.5)$$

Sie ist symmetrisch und bidirektional. Das Konnektivitätslevel 1 wird durch



**Abb. 4.5** Kollinearitätsprüfung der Elementkandidaten

$$\mathbf{C}^1 = \mathbf{C}^0 \mathbf{C}^0 \quad (4.6)$$

erreicht. Für höhere Level wird Gleichung (4.6) wiederholt. Da Elemente dabei Werte größer als 1 nehmen können, wird  $\mathbf{C}^n$  durch

$$c_{pq}^n = \begin{cases} 1 & \text{falls } c_{pq}^n > 1 \quad \text{und } p \neq q \\ 0 & \text{falls } p = q \quad \text{oder sonst} \end{cases} \quad (4.7)$$

zurück in die ursprüngliche Definition konvertiert.  $\mathbf{C}^n - \mathbf{C}^{n-1}$  enthält die neuen Elementkandidaten. Bevor das Element  $\overline{pq}$  hinzugefügt wird, soll sicher gestellt werden, dass es nicht kollinear zu einem anderen schon bestehenden Element ist. So werden redundante Elemente, die aufeinander liegen, bei der Erzeugung der Grundstruktur vermieden. Die Kollinearitätsprüfung erfolgt mit dem Vektor der Richtungskosinus zwischen den Knoten  $p$  und  $q$

$$\hat{\mathbf{d}}_{pq} = \frac{\mathbf{p} - \mathbf{q}}{\|\mathbf{p} - \mathbf{q}\|} \quad (4.8)$$

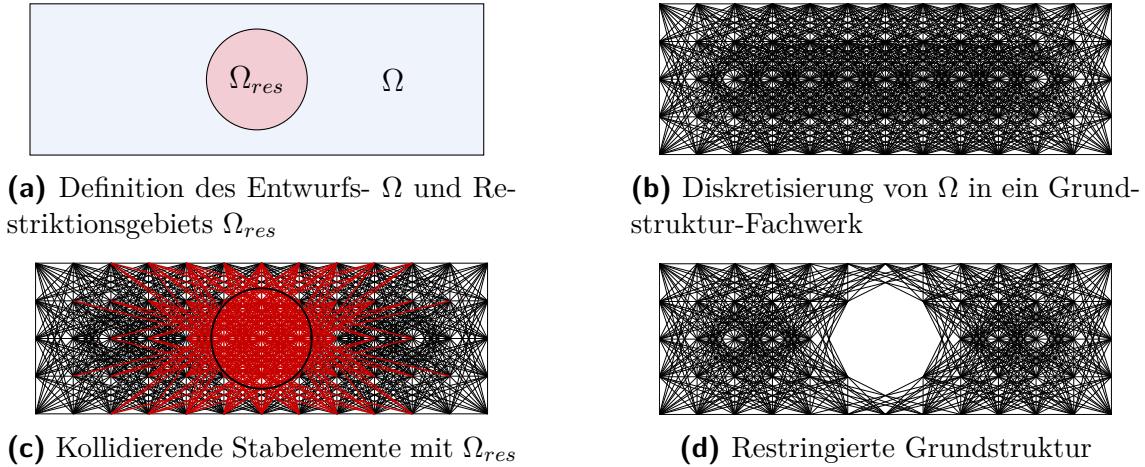
für jedes Element mit dem zweiten Knoten  $i$  am Knoten  $p$  mit

$$\cos(\angle pqi) = \hat{\mathbf{d}}_{pq} \hat{\mathbf{d}}_{pi} \leq \epsilon_\theta, \quad \epsilon_\theta \lesssim 1 \quad (4.9)$$

worin  $\epsilon_\theta$  die Kollinearitätstoleranz ist, die zum einen aus numerischen Gründen zu definieren ist und zum anderen als Parameter genutzt werden kann, um definieren zu können welcher Winkel zwischen den Elementen in der Struktur mindestens vorliegen soll. Abbildung 4.5 zeigt, wie der Kandidat  $\overline{pr}$  mit ausreichendem Winkel zu dem bestehenden Element  $\overline{pq}$  zugelassen wird, während der Kandidat  $\overline{ps}$  aufgrund seiner Kollinearität zu  $\overline{pq}$  abgelehnt wird. In diesem Fall wird der Struktur das Stabelement mit den Knoten  $p, r$  hinzugefügt und das Matrixelement  $c_{pr}^n$  sowie  $c_{rp}^n$  gleich 1 gesetzt, um gegebenenfalls mit dem nächsten Konnektivitätslevel fortzufahren. [34, 35]

### 4.1.2 Restriktionszonen

Die Grundstrukturmethode hat bis zu diesem Punkt den Nachteil, dass sie nur konvexe Entwurfsgebiete füllen kann. Konkave Gebiete würden durch die Verbindung



**Abb. 4.6** Erzeugung einer kreisförmigen Restriktionszone

von Knoten im Konnektivitätslevel größer als 0 an ihren Rändern verletzt werden. Dazu zählen jedoch auch konvexe Gebiete, die restriktierte Teilgebiete beinhalten, in denen keine Stäbe zulässig sind. Hierzu können Restriktionszonen  $\Omega_{res}$  definiert werden, in denen das Vorhandensein von Elementen untersagt ist. Die Restriktionszonen wurden dabei durch die Kollisionserkennung aus der algorithmischen Geometrie implementiert. Als Geometrien kommen eine Vielzahl von Körpern in Frage, um den gewünschten Entwurfsraum passend auf seinen Rändern zu restringieren. Dazu werden alle Elemente der Struktur auf die Kollision mit der Restriktionszone geprüft, sodass anschließend kollidierende Elemente aus der Struktur eliminiert werden. Abbildung 4.6 zeigt eine solche Erzeugung einer Restriktionszone mit der Geometrie eines Kreises. Es wurden folgende Geometrien zur ebenen und räumlichen Modellierung einer restriktierten Grundstruktur implementiert, deren Kollisionserkennung in Algorithmus 1 bis Algorithmus 5 dokumentiert ist. Darin sind  $\mathbf{p}$  und  $\mathbf{q}$  die Knotenkoordinaten des Stabelements.

## Kreis

Der Kreis wird durch seine Mittelpunktskoordinaten  $\mathbf{c}$  und den Radius  $r$  definiert. Das Stabelement kollidiert bei Vorliegen eines der drei Kriterien mit der kreisförmigen Restriktionszone. [9]

1. Knoten  $p$  liegt innerhalb des Kreises
2. Knoten  $q$  liegt innerhalb des Kreises
3. Der Punkt auf der Gerade in Stabrichtung, der dem Kreis am nächsten ist, liegt zwischen den Knoten  $p$  und  $q$  und ist innerhalb des Kreises

Im Algorithmus 1 wird die dafür benötigte Kollisionserkennung einer Linie (dem Stabelement) mit einem Kreis (der Restriktionszone) beschrieben.

### Algorithmus 1 Erzeugen einer kreisförmigen Restriktionszone

```

Funktion kreisRestriktionZone( $\mathbf{c}$ ,  $r$ )
  für alle Elemente tue
    wenn linieKreisKollision( $\mathbf{c}$ ,  $r$ ,  $\mathbf{p}(Element)$ ,  $\mathbf{q}(Element)$ ) dann
      restringiere Element

Funktion linieKreisKollision( $\mathbf{c}$ ,  $r$ ,  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{q}$ )
  wenn punktKreisKollision( $\mathbf{c}$ ,  $r$ ,  $\mathbf{p}$ ) oder punktKreisKollision( $\mathbf{c}$ ,  $r$ ,  $\mathbf{q}$ ) dann
    zurück wahr // Kriterium 1 und 2
     $\mathbf{p}_k = \mathbf{p} + \frac{(\mathbf{c}-\mathbf{p})(\mathbf{q}-\mathbf{p})}{\|\mathbf{q}-\mathbf{p}\|^2}(\mathbf{q}-\mathbf{p})$  // nächster Geradenpunkt zum Kreis
    wenn nicht liniePunktKollision( $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{q}$ ,  $\mathbf{p}_k$ ) dann
      zurück falsch // keine Kollision, da nächster Punkt nicht innerhalb des Elements
    wenn  $\mathbf{p}_k \leq r$  dann
      zurück wahr // Kriterium 3
    zurück falsch

Funktion liniePunktKollision( $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{q}$ ,  $\mathbf{r}$ ) //  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{q}$  definieren die Linie,  $\mathbf{r}$  den Punkt
   $d_{pr} = \|\mathbf{p} - \mathbf{r}\|$ 
   $d_{qr} = \|\mathbf{q} - \mathbf{r}\|$ 
  wenn  $d_{pr} + d_{qr} = \|\mathbf{p} - \mathbf{q}\| \pm \epsilon_{num}$  dann // numerische Toleranz  $\epsilon_{num} \gtrsim 0$ 
    zurück wahr
  zurück falsch

Funktion punktKreisKollision( $\mathbf{c}$ ,  $r$ ,  $\mathbf{p}$ )
  wenn  $\|\mathbf{p} - \mathbf{c}\| \leq r$  dann
    zurück wahr
  zurück falsch
```

## Rechteck

Das Rechteck wird durch seine Mittelpunktskoordinaten  $\mathbf{c}$  sowie Breite  $b$  und Höhe  $h$  definiert. Wenn das Stabelement mit mindestens einer der vier Seitenlinien des Rechtecks kollidiert, verletzt es die Zone. [9]

### Algorithmus 2 Erzeugen einer rechteckigen Restriktionszone

```

Funktion rechteckRestriktionZone( $\mathbf{c}$ ,  $b$ ,  $h$ )
  für alle Elemente tue
    wenn linieRechteckKollsision( $\mathbf{c}$ ,  $b$ ,  $h$ ,  $\mathbf{p}(Element)$ ,  $\mathbf{q}(Element)$ ) dann
      restringiere Element

Funktion linieRechteckKollsision( $\mathbf{c}$ ,  $b$ ,  $h$ ,  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{q}$ )
   $\mathbf{b} = [b/2 \ 0]^T$ 
   $\mathbf{h} = [0 \ h/2]^T$ 
   $s_l = \text{linieLinieKollision}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{c} - \mathbf{b} - \mathbf{h}, \mathbf{c} - \mathbf{b} + \mathbf{h})$  // linke Seite
   $s_r = \text{linieLinieKollision}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{c} + \mathbf{b} - \mathbf{h}, \mathbf{c} + \mathbf{b} + \mathbf{h})$  // rechte Seite
   $s_o = \text{linieLinieKollision}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{c} - \mathbf{b} + \mathbf{h}, \mathbf{c} + \mathbf{b} + \mathbf{h})$  // obere Seite
   $s_u = \text{linieLinieKollision}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{c} - \mathbf{b} - \mathbf{h}, \mathbf{c} + \mathbf{b} - \mathbf{h})$  // untere Seite
  wenn  $s_l$  oder  $s_r$  oder  $s_o$  oder  $s_u$  dann
    zurück wahr // bei Kollision mit einer der vier Seitenlinien
  zurück falsch

Funktion linieLinieKollsision( $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{q}$ ,  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{s}$ )
   $d_p = \frac{(s_x - r_x)(p_y - r_y) - (s_y - r_y)(p_x - r_x)}{(s_y - r_y)(q_x - p_x) - (s_x - r_x)(q_y - p_y)}$  // Distanz von  $\mathbf{p}$  zum Schnittpunkt
   $d_r = \frac{(q_x - p_x)(p_y - r_y) - (q_y - p_y)(p_x - r_x)}{(s_y - r_y)(q_x - p_x) - (s_x - r_x)(q_y - p_y)}$  // Distanz von  $\mathbf{r}$  zum Schnittpunkt
  wenn  $d_p$  und  $d_r$  in  $[0, 1]$  sind dann
    zurück wahr
  zurück falsch

```

## Kugel

Die Kugel wird durch ihre Mittelpunktskoordinaten  $\mathbf{c}$  und den Radius  $r$  definiert. Das Stabelement kollidiert ebenso wie mit der kreisförmigen Zone bei Vorliegen eines der drei Kriterien. [35]

1. Knoten  $p$  liegt innerhalb der Kugel
2. Knoten  $q$  liegt innerhalb der Kugel
3. Der Punkt auf der Gerade in Stabrichtung, der der Kugel am nächsten ist, liegt zwischen den Knoten  $p$  und  $q$  und ist innerhalb der Kugel

### Algorithmus 3 Erzeugen einer kugelförmigen Restriktionszone

```

Funktion kugelRestriktionZone( $\mathbf{c}$ ,  $r$ )
  für alle Elemente tue
    wenn linieKugelKollsision( $\mathbf{c}, r, \mathbf{p}(Element), \mathbf{q}(Element)$ ) dann
      restringiere Element

Funktion linieKugelKollsision( $\mathbf{c}, r, \mathbf{p}, \mathbf{q}$ )
   $\mathbf{r}_{cp} = \mathbf{c} - \mathbf{p}$ 
   $\mathbf{r}_{qp} = \mathbf{q} - \mathbf{p}$ 
  wenn  $\mathbf{r}_{cp} \cdot \mathbf{r}_{cp} \leq r^2$  dann // Kriterium 1
    zurück wahr
  wenn  $(\mathbf{r}_{cp} - \mathbf{r}_{qp}) \cdot (\mathbf{r}_{cp} - \mathbf{r}_{qp}) \leq r^2$  dann // Kriterium 2
    zurück wahr
   $\mathbf{w} = \frac{\mathbf{r}_{cp} \cdot \mathbf{r}_{qp}}{\mathbf{r}_{qp} \cdot \mathbf{r}_{qp}} \mathbf{r}_{qp}$  // nächster Geradenpunkt zur Kugel
  wenn  $(\mathbf{r}_{cp} - \mathbf{w}) \cdot (\mathbf{r}_{cp} - \mathbf{w}) \leq r^2$  und  $0 \leq \mathbf{w} \cdot \mathbf{r}_{qp} \leq \mathbf{r}_{qp} \cdot \mathbf{r}_{qp}$  dann // Kriterium 3
    zurück wahr
  zurück falsch

```

## Quader

Der Quader lässt sich durch zwei die Raumdiagonale verbindende Punkte mit den Koordinaten  $\mathbf{b}_{min}$  und  $\mathbf{b}_{max}$  definieren. Jeder Punkt  $\mathbf{a}$  auf einem Stabelement mit den Knotenkoordinaten  $\mathbf{p}$  und  $\mathbf{q}$  kann durch den Richtungsvektor des Elements  $\mathbf{r}_{pq} = \mathbf{q} - \mathbf{p}$  und einer Variablen  $t \in [0, 1]$  mit  $\mathbf{a} = \mathbf{p} + t\mathbf{r}_{pq}$  definiert werden. Wenn das Stabelement mit dem Quader kollidiert, befindet sich ein Teil des Stabes mit den Koordinaten  $\mathbf{p}' = \mathbf{p} + t_{min}\mathbf{r}_{pq}$  und  $\mathbf{q}' = \mathbf{p} + t_{max}\mathbf{r}_{pq}$  innerhalb des Quaders. Die Kollisionserkennung basiert hierbei darauf, den Stab in allen drei Raumrichtungen  $\mathbf{e}_x = [1 \ 0 \ 0]^T$ ,  $\mathbf{e}_y = [0 \ 1 \ 0]^T$  und  $\mathbf{e}_z = [0 \ 0 \ 1]^T$  durch die Zonenlimits  $\mathbf{b}_{min}$  und  $\mathbf{b}_{max}$  entlang der Achsen zu beschneiden. Anhand dessen, ob das Element beschnitten wurde oder nicht, kann eine Aussage getroffen werden, ob eine Kollision stattfindet. Algorithmus 4 beschreibt das Vorgehen nach diesem Ansatz. [35]

### Algorithmus 4 Erzeugen einer quaderförmigen Restriktionszone

```

Funktion quaderRestriktionZone( $\mathbf{b}_{min}$ ,  $\mathbf{b}_{max}$ )
  für alle Elemente tue
    wenn linieQuaderKollsision( $\mathbf{b}_{min}$ ,  $\mathbf{b}_{max}$ ,  $\mathbf{p}(Element)$ ,  $\mathbf{q}(Element)$ ) dann
      restringiere Element

Funktion linieQuaderKollsision( $\mathbf{b}_{min}$ ,  $\mathbf{b}_{max}$ ,  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{q}$ )
   $t_{min} = 0$  // →  $\mathbf{p}' = \mathbf{p}$  zu Anfang der Beschneidung
   $t_{max} = 1$  // →  $\mathbf{q}' = \mathbf{q}$  zu Anfang der Beschneidung
  für alle Raumrichtungen  $\mathbf{e}_i$  tue
     $t_1 = \frac{\mathbf{b}_{min}\mathbf{e}_i - \mathbf{p} - \mathbf{e}_i}{\mathbf{r}_{qp}\mathbf{e}_i}$ 
     $t_2 = \frac{\mathbf{b}_{max}\mathbf{e}_i - \mathbf{p} - \mathbf{e}_i}{\mathbf{r}_{qp}\mathbf{e}_i}$ 
    wenn  $t_1 > t_2$  dann
      tausche Werte von  $t_1$  und  $t_2$  // schafft Unabhängigkeit der Staborientierung
     $t_{min} = \max(t_{min}, t_1)$ 
     $t_{max} = \min(t_{max}, t_2)$ 
    wenn  $t_{min} \leq t_{max}$  dann
      zurück wahr
    zurück falsch
  
```

## Unendlicher Zylinder

Der Zylinder wird durch seine Achse  $\mathbf{n} = \mathbf{c}_2 - \mathbf{c}_1$  und den Radius  $r$  definiert. Das Stabelement kollidiert mit ihm in einem der beiden Fälle. [35]

1. Mindestens einer der beiden Knoten des Stabs liegt in dem Zylinder
2. Das Stabelement kollidiert mit der Zylindermantelfläche

**Algorithmus 5** Erzeugen einer unendlich langen zylindrischen Restriktionszone

```

Funktion infZylinderRestriktionZone( $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, r$ )
  für alle Elemente tue
    wenn linieInfZylinderKollsion( $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, r, \mathbf{p}(Element), \mathbf{q}(Element)$ ) dann
      restringiere Element

Funktion linieInfZylinderKollsion( $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, r, \mathbf{p}, \mathbf{q}$ )
   $\mathbf{n} = \mathbf{c}_2 - \mathbf{c}_1$ 
   $\mathbf{r}_{c_1p} = \mathbf{p} - \mathbf{c}_1$ 
   $\mathbf{m}_p = \frac{\mathbf{r}_{c_1p} \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}} \mathbf{n}$ 
  wenn  $(\mathbf{r}_{c_1p} - \mathbf{m}_p)(\mathbf{r}_{c_1p} - \mathbf{m}_p) \leq r^2$  dann
    zurück wahr // Knoten p liegt im Zylinder

   $\mathbf{r}_{c_1q} = \mathbf{q} - \mathbf{c}_1$ 
   $\mathbf{m}_q = \frac{\mathbf{r}_{c_1q} \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}} \mathbf{n}$ 
  wenn  $(\mathbf{r}_{c_1q} - \mathbf{m}_q)(\mathbf{r}_{c_1q} - \mathbf{m}_q) \leq r^2$  dann
    zurück wahr // Knoten q liegt im Zylinder

   $\mathbf{r}_{qp} = \mathbf{q} - \mathbf{p}$ 
   $a = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{r}_{qp} \cdot \mathbf{r}_{qp}) - (\mathbf{r}_{qp} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{r}_{qp} \cdot \mathbf{n})$ 
   $b = 2((\mathbf{n} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{r}_{c_1p} \cdot \mathbf{r}_{qp}) - (\mathbf{r}_{qp} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{r}_{c_1p} \cdot \mathbf{n}))$ 
   $c = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{r}_{c_1p} \cdot \mathbf{r}_{c_1p} - r^2) - (\mathbf{r}_{c_1p} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{r}_{c_1p} \cdot \mathbf{n})$ 
   $d = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac$ 
  wenn  $d < 0$  dann
    zurück falsch
   $t_w = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{d}}{a}$ 
  wenn  $t_w$  in  $[0, 1]$  ist dann
    zurück wahr // Kriterium 2
  zurück falsch

```

## 4.2 Topologieoptimierungsalgorithmus nach dem FSD Optimalitätskriterium

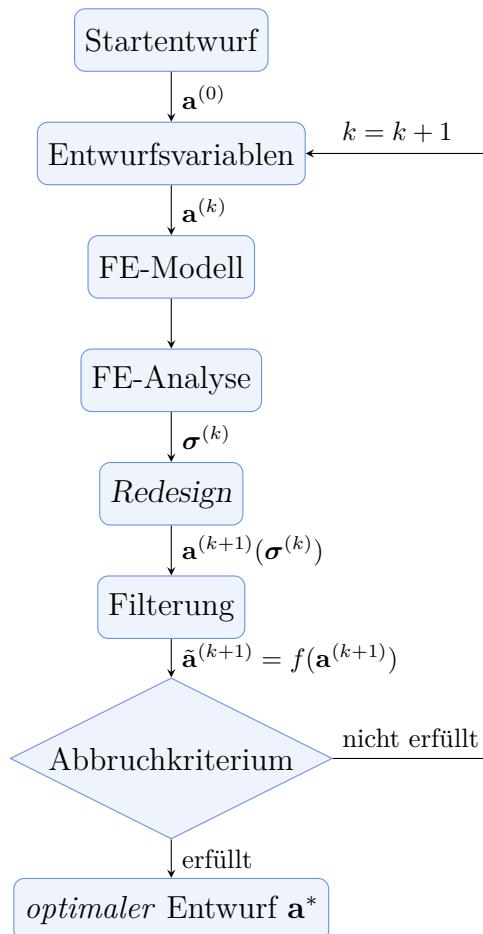
Nachdem die Grundstruktur erzeugt wurde, soll nun die optimale Struktur für den vorliegenden Lastfall in ihr identifiziert werden. Wie in Abschnitt 2.2.4 dargelegt wurde, liegt ein Fachwerk mit voll beanspruchten Stabelementen im – oder zumindest am – Minimum seines benötigten Materialvolumens. Motiviert davon wurde ein FSD-Algorithmus in Anlehnung an BAIER [4] implementiert und erweitert. Das Optimierungsproblem lässt sich zu

$$\min (V = \sum l_i a_i) \quad (4.10)$$

sodass

$$\begin{aligned} a_i - a^u &\leq 0 \\ a^l - a_i &< 0 \end{aligned}, \quad i \in \mathcal{B}_{phys} \quad (4.11)$$

formulieren. Abbildung 4.7 zeigt den Optimierungsalgorithmus, in den die Grundstruktur mit dem Startentwurf  $\mathbf{a}^{(0)}$  gegeben und analysiert wird. Auf Basis der



**Abb. 4.7** Algorithmus der implementierten Topologieoptimierung

Strukturantworten  $\sigma^{(k)}$  variiert die *Redesign*-Formel die Entwurfvariablen, die anschließend einem Filterungsprozess unterzogen werden, mit dem Ziel das Stabwerk auszudünnen. Am Ende jeder Iteration  $k$  wird der Entwurf evaluiert und anhand bestimmter Kriterien entschieden, ob eine weitere Iteration erfolgt oder der Entwurf als optimal beziehungsweise optimiert gilt.

### 4.2.1 Redesign-Formel

Die *Redesign*-Formel übersetzt das FSD-Kriterium recht schlicht in ein proportionales Verhältnis der Stabquerschnitte  $a_i$  zu den Stabspannungen  $\sigma_i$  im Verhältnis zur maximal zulässigen Spannung  $\sigma^u$

$$a_i^{(k+1)} = a_i^{(k)} \frac{\sigma_i^{(k)}}{\sigma^u}, \quad i \in \mathcal{B}. \quad (4.12)$$

Wenn der Stab  $i$  in der Iteration  $k$  überbeansprucht ist ( $\sigma_i > \sigma^u$ ), ist der Quotient – die Spannungsreserve  $\sigma_r = \frac{\sigma_i^{(k)}}{\sigma^u}$  – größer als 1 und der Stab wird in darauf folgender Iteration  $k + 1$  mit einer größeren Querschnittsfläche vorliegen. Genau so auch gegensätzlich im unterbeanspruchten Fall. Ist ein Bereich vorgesehen, in dem sich die Querschnittsflächen der Stäbe befinden sollen, können diese mit

$$a_i^{(k+1)} = \min \left( \max \left( a^l, a_i^{(k)} \frac{\sigma_i^{(k)}}{\sigma^u} \right), a^u \right), \quad i \in \mathcal{B}. \quad (4.13)$$

restringiert werden, sodass Stäbe außerhalb des Bereich auf die Restriktionsgrenzen  $a^u, a^l$  gesetzt werden, die sie verletzen. Hierbei ist den Stäben untersagt gegen eine Querschnittsfläche von 0 zu streben und damit aus dem Stabwerk aufgrund von zu niedriger Beanspruchung eliminiert zu werden. Die untere Grenze  $a^l$  kann aber auch als Schwellenwert hergenommen werden, um unbeanspruchte Stäbe zu eliminieren. Nach dem *Fictitious-Domain*-Ansatz aus Abschnitt 3.3 kann Gleichung (4.13) auch zu

$$a_i^{(k+1)} = \begin{cases} \min \left( a_i^{(k)} \frac{\sigma_i^{(k)}}{\sigma^u}, a^u \right) & \text{falls } a_i^{(k+1)} > a^l \\ \mu = 10^{-12} & \text{falls } a_i^{(k+1)} \leq a^l \end{cases}, \quad i \in \mathcal{B} \quad (4.14)$$

umformuliert werden, sodass alle unbeanspruchten Stabelemente mit Querschnittsflächen unterhalb des Schwellenwerts durch  $\mu$  penalisiert werden. Diese Stäbe gehören nun dem fiktiven Lösungsgebiet  $\Omega_{fikt}$  an, werden rein aus Gründen der Erhaltung der statischen Bestimmtheit der Struktur mit gelöst und gelten physikalisch als eliminiert. Die Implementation des *Redesigns* der Struktur ist in Algorithmus 6 dokumentiert. Die Penalisierung unbeanspruchter Elemente, die in Gleichung (4.14) unter einen festen Schwellenwert  $a^l$  ausgeführt wird, wird in der Implementation

durch ein Interpolationsschema um einen relativen Schwellenwert erzielt. Dies wird im kommenden Abschnitt erläutert.

**Algorithmus 6** Aktualisierung der Entwurfsvariablen

```

Funktion redesign()
   $n_{FSD} = 0$            // Initialisierung einer Zählvariablen für voll beanspruchte Elemente
  für alle Elemente  $i \in \Omega_{phys}$  tue
     $\sigma_r = \frac{\sigma_i^{(k)}}{\sigma^u}$                                 // Spannungsreserve
     $a_i^{(k+1)} = \min(a_i^{(k)}\sigma_r, a^u)$                   // Variation der Entwurfsvariable
    wenn  $\sigma_r = 1 \pm \epsilon_\sigma$  dann
       $\lfloor n_{FSD} = n_{FSD} + 1$ 
    filter ( $\mathbf{a}^{(k+1)}$ )                                         // Algorithmus 7
  
```

### 4.2.2 Filterung unbeanspruchter Elemente

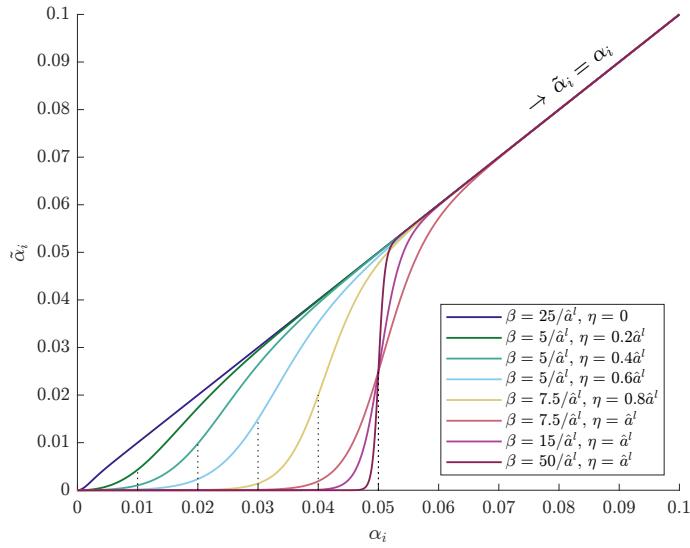
Motiviert davon, eine möglichst schnelle Konvergenz des Entwurfs  $\mathbf{a}^{(k)}$  gegen das Optimum  $\mathbf{a}^*$  zu erreichen und die Grenze zwischen dem physikalischen und fiktiven Lösungsgebiet scharf zu konturieren, wurde eine Methode zur Filterung der Stabelemente implementiert. Die Anforderungen an die Interpolationsfunktion sind die Konturierung um einen Schwellenwert  $\eta$  mit einer Schärfe  $\beta$ . In Disziplinen wie dem *Machine Learning* auch unter dem Begriff der Aktivierungsfunktion (*activation function*) bekannt und in einer Vielzahl vorhanden. In der Strukturmechanik sind sie häufig in der Topologieoptimierung kontinuierlicher Entwurfsräume zu finden und dienen dort der Konturierung von finiten Flächen- oder Volumenelementen durch Filterung der Materialdichte an dem Schwellenwert. Für die Filterung der Stabelemente wurde die von LARSEN, SIGMUND und GROEN [17] verwendete Interpolationsfunktion aus Abbildung 4.8 zur Konturierung der Materialdichte verwendet.

$$\tilde{\alpha}_i = \alpha_i \frac{\tanh(\beta\eta) + \tanh(\beta(\alpha_i - \eta))}{\tanh(\beta\eta) + \tanh(\beta(1 - \eta))} \quad (4.15)$$

Mit der Variation des Schwellenwerts  $\boldsymbol{\eta} = [\eta_1, \dots, \eta_8]$  und der Konturierungsschärfe  $\boldsymbol{\beta} = [\beta_1, \dots, \beta_8]$  wurden mehrere Stufen der Filterung

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\beta} &= \frac{1}{\hat{a}^l} [25 \ 5 \ 5 \ 5 \ 7.5 \ 7.5 \ 15 \ 50] \\ \boldsymbol{\eta} &= \hat{a}^l [0 \ 0.2 \ 0.4 \ 0.6 \ 0.8 \ 1 \ 1 \ 1] \end{aligned} \quad (4.16)$$

definiert. In die Funktion gehen nicht unmittelbar die Absolutwerte der Stabquerschnittsflächen  $a_i$  ein, sondern deren normierte Werte



**Abb. 4.8** Interpolationsfunktion der Filterungsstufen für  $\hat{a}^l = 0.05$

$$\alpha_i = \frac{a_i}{\text{mean}(\mathbf{a}^{(k)})}, \quad i \in \mathcal{B}_{phys} \quad (4.17)$$

die relativ zu dem arithmetischen Mittelwert aller Querschnittsflächen  $\mathbf{a}^{(k)}$  angegeben werden. Dadurch wird eine gewisse Generalisierung der Filterungsmethode auf unterschiedliche Modellkonfigurationen geschaffen. Analog dazu wird die untere Restriktionsgrenze  $a^l$  in die normierte Form

$$\hat{a}^l = \frac{a^l}{\text{mean}(\mathbf{a}^{(k)})}, \quad i \in \mathcal{B}_{phys} \quad (4.18)$$

überführt. Aus  $\hat{a}^l = 0.05$  resultiert die Penalisierung aller Stabelemente mit einer Querschnittsfläche unter 5% der durchschnittlichen Querschnittsfläche im physikalischen Gebiet der Struktur. Abbildung 4.8 zeigt zudem, dass Elemente mit Querschnittsflächen außerhalb des Filterbereichs nicht durch die Filterung beeinflusst werden ( $\tilde{\alpha}_i = \alpha_i$ ). Die drei letzten Stufen  $\tilde{\alpha}(\beta_6, \eta_6), \dots, \tilde{\alpha}(\beta_8, \eta_8)$  liegen mit dem Schwellenwert direkt auf der unteren Restriktionsgrenze  $\eta = \hat{a}^l$  und sorgen durch das Abgreifen von Ansammlungen an der Restriktionsgrenze für eine Verschärfung der Konturierung.

In Abschnitt 2.2.4 wurde angemerkt, dass sich Veränderungen der Querschnittsfläche eines einzelnen Stabes in statisch überbestimmten Systemen – die bis zum Erreichen des Optimums angenommen werden müssen – nicht nur auf die Spannungen dieses einen Stabes auswirken. Durch diese Kopplung der Abhängigkeiten zwischen den Stäben, können die Entwurfsvariablen im Optimierungsverlauf hohen Schwankungen ausgesetzt sein. So ist es ratsam, dass sich die Struktur über eine gewisse Anzahl an Iterationen stabilisiert und die Filterung erst in dem stabilen Zustand der Struktur vorgenommen wird, um das Risiko, dass Elemente fälschlicherweise penalisiert

werden, zu mindern. Nach diesem Ansatz wird in jeder Optimierungsiteration die Filterung auf geringster Stufe  $\tilde{\alpha}(\beta_1, \eta_1)$  durchgeführt, die lediglich auf einem Einflussbereich von etwa [0, 0.6%] wirkt. Bei Vorliegen der folgenden drei Kriterien für die Stabilität der Entwurfsvariablen wird die Struktur durch alle Stufen  $\tilde{\alpha}(\beta, \eta)$  gefiltert. Ihre Evaluation der letzten  $n_{eval}$  Iterationen wird im kommenden Abschnitt detailliert erläutert. Algorithmus 7 zeigt die Implementation nach der beschriebenen Filtermethode.

1. Die Anzahl der Elemente im physikalischen Lösungsgebiet  $|\Omega_{phys}|$  war in den letzten  $n_{eval}$  Iterationen konstant.
2. Das Strukturvolumen  $V$  war in den letzten  $n_{eval}$  Iterationen konstant.
3. Die mittlere Nachgiebigkeit  $C$  war in den letzten  $n_{eval}$  Iterationen konstant.

#### Algorithmus 7 Filterung und Penalisierung der Entwurfsvariablen

```

Funktion filter( $\mathbf{a}^{(k+1)}$ )
   $n_{filt} = 0$                                 // Initialisierung einer Zählvariablen für gefilterte Elemente
   $\boldsymbol{\alpha}^{(k+1)} = \frac{\mathbf{a}^{(k+1)}}{\text{mean}(\mathbf{a}^{(k)})}, \forall a_i \in \Omega_{phys}$           // Normalisierung
  wenn  $|\Omega_{phys}|, V$  und  $C$  in den letzten  $n_{eval}$  Iterationen konstant dann
    für alle Elemente  $i \in \Omega_{phys}$  tue
       $\tilde{\alpha}_i(\beta, \eta, \alpha_i)$                                 // Filterung in allen Stufen
  sonst
    für alle Elemente  $i \in \Omega_{phys}$  tue
       $\tilde{\alpha}_i(\beta_1, \eta_1, \alpha_i)$                                 // Filterung in der ersten Stufe
   $\mathbf{a}^{(k+1)} = \boldsymbol{\alpha}^{(k+1)} \text{mean}(\mathbf{a}^{(k)}), \forall a_i \in \Omega_{phys}$           // Denormalisierung
  für alle Elemente  $i \in \Omega_{phys}$  tue
    wenn  $a_i \leq \mu$  dann
       $a_i = \mu, i \in \Omega_{fikt}$                                 // Penalisierung
       $n_{filt} = n_{filt} + 1$ 
```

Die Filterungen werden mit dem Ziel, Elemente mit Querschnittsflächen im Filterungsbereich zu penalisieren, pro Stufe mehrfach (20, ..., 50 mal) durchgeführt. Damit wird sichergestellt, dass die betreffenden Querschnittsflächen gegen 0 streben. Nach der Filterung werden die Entwurfsvariablen denormalisiert und die herausgefilterten Elemente penalisiert.

$$a_i = \begin{cases} \mu, & i \in \mathcal{B}_{fikt} \quad \text{falls } a_i \leq \mu \\ a_i, & i \in \mathcal{B}_{phys} \quad \text{falls } a_i > \mu \end{cases}, \quad i \in \mathcal{B}_{phys}. \quad (4.19)$$

### 4.2.3 Abbruchkriterium

Die Erfüllung des Abbruchkriteriums führt zur Beendigung des Optimierungsprozesses. Demnach muss es eine durch die Optimierungs- und Modellparameter determinierbare Entscheidung liefern, die das Optimum charakterisiert. Dazu wurden

mehrere Subkriterien definiert, die bei gleichzeitiger Erfüllung zur Beendigung des Optimierungsprozesses führen.

1. FSD (*Fully Stressed Design*): Alle Elemente im physikalischen Lösungsgebiet sind voll beansprucht.
2. Das Strukturvolumen  $V$  war in den letzten  $n_{eval}$  Iterationen konstant.
3. Die mittlere Nachgiebigkeit  $C$  war in den letzten  $n_{eval}$  Iterationen konstant.
4. Die Entwurfsvariablen ändern sich nicht mehr.

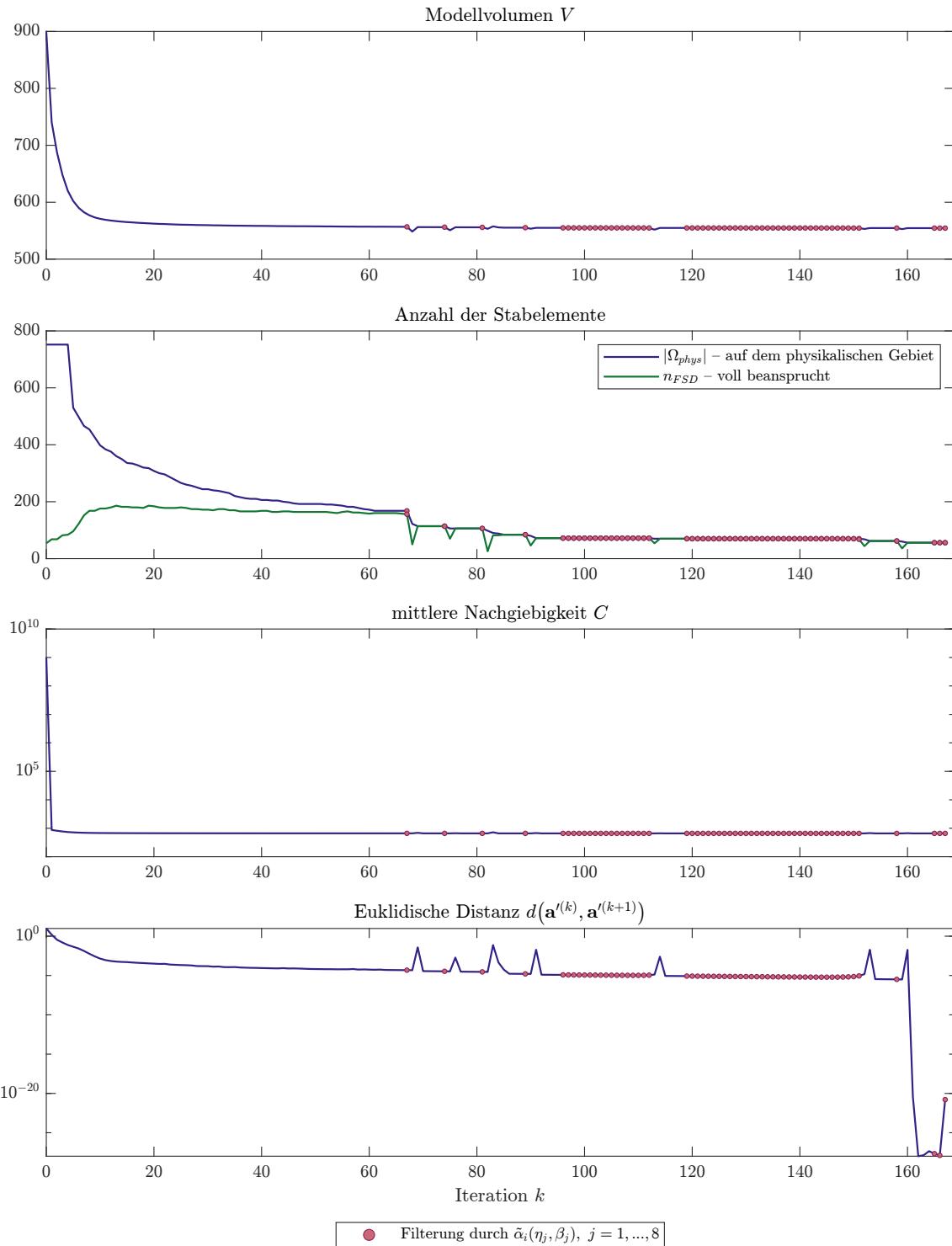
Anhand der exemplarischen Verläufe der Modell- und Optimierungsparameter in Abbildung 4.9 sollen die Subkriterien erläutert werden. Es gilt nun zwei Aspekte zu betrachten. Zum einen die objektiv optimalen Parameter wie die Konvergenz des Modellvolumens beziehungsweise der mittleren Nachgiebigkeit gegen ein Minimum oder dass jeder Stab voll – beziehungsweise näherungsweise voll ( $\sigma_r = 1 \pm \epsilon_\sigma$ ) – beansprucht ist (Kriterium 1 bis 3). Zum anderen möchte aber auch eine möglichst strukturierte und ausgedünnte Struktur erhalten werden. Im Hinblick auf eine etwaige Fertigung eines solchen Fachwerks ist es sinnvoll, dass das Minimum des Materials auch auf ein Minimum an Stabelementen verteilt ist. Das Volumen und die mittlere Nachgiebigkeit des Modells konvergieren relativ zum gesamten Verlauf der Optimierung recht schnell. Auch liegt bei nicht einmal der Hälfte ( $k = 71$ ) des gezeigten Verlaufs schon ein voll beanspruchter Entwurf vor. Würden also ausschließlich diese drei Kriterien zur Charakterisierung des Optimums hergenommen werden, würde die Optimierung hier beendet. Abbildung 4.10b zeigt diese Struktur. Wird nun, unter der Bedingung, dass sowohl das Volumen, als auch die mittlere Nachgiebigkeit nicht steigen, weiter optimiert, so werden weitere Elemente herausgefiltert und schließlich wird der Entwurf aus Abbildung 4.10c erhalten. Dieser Entwurf erfüllt nicht nur die Kriterien 1 bis 3, sondern auch Kriterium 4. Als Maß für die Veränderung der Entwurfsvariablen wird die euklidische Distanz

$$d(\mathbf{a}'^{(k)}, \mathbf{a}'^{(k+1)}) = \sqrt{\sum (a_i'^{(k)} - a_i'^{(k+1)})^2}, \quad i \in \Omega_{phys} \quad (4.20)$$

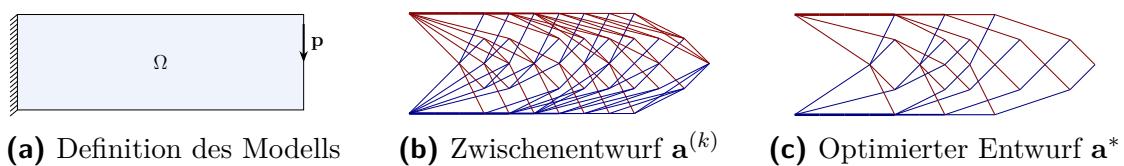
zwischen den *min-max*-normalisierten Entwurfsvariablenvektoren  $\mathbf{a}'$  zweier aufeinander folgenden Iterationen mit

$$a'_i = \frac{a_i - \min(\mathbf{a})}{\max(\mathbf{a}) - \min(\mathbf{a})}, \quad a'_i \in [0, 1], \quad i \in \Omega_{phys} \quad (4.21)$$

bestimmt. Sie zeigt für den optimierten Entwurf  $\mathbf{a}^*$  eine Veränderung, die mit einer Größenordnung von  $10^{-20}$ , unter Berücksichtigung numerischer Ungenauigkeiten, als 0 zu werten ist.



**Abb. 4.9** Parameter der Optimierung und des Modells im Verlauf des Optimierungsprozesses an einem exemplarischen Modell des ebenen Kragbalkens



**Abb. 4.10** Der ebene Kragbalken im Zwischenentwurf ( $k = 71$ ) und im optimierten Entwurf ( $k = 168$ )

Die euklidische Distanz ist also ein Kriterium, das aussagt, wie groß die Änderung für den Entwurf  $\mathbf{a}^{(k+1)}$  sein musste, um aus der vorherigen Iteration  $k$  diese Konfiguration an Entwurfvariablen zu erhalten. Wenn sie gegen 0 strebt, ging aus der Redesign-Formel keine Variation der Stabquerschnitte mehr hervor und so ist für die gegebene Grundstruktur unter den formulierten Kriterien das *optimale* Fachwerk gefunden.

Es wird durch die zum Teil experimentellen Ansätze in dieser Thesis recht oft mit numerischen Toleranzen oder Schwellenwerten gearbeitet. Daher besteht das Risiko, dass beispielsweise ein Element penalisiert wird, obwohl es zur statischen Bestimmtheit von Nöten wäre. Dann greift ein Notfallkriterium, dass die Optimierung beendet. Im Falle der statischen Unbestimmtheit, steigt die mittlere Nachgiebigkeit – oder auch das Volumen – der Struktur innerhalb einer Iteration sprungartig an, sodass darauf ein Kriterium für den Notfallabbruch ausgelegt wurde. Die Toleranzen sind in der Implementation so ausgelegt, dass nicht sehr progressiv abgebrochen wird. Dies soll garantieren, dass das Abbruchkriterium im Zweifel das *Optimum* nicht erkennt und weiter optimiert, anstatt fälschlicherweise schon kurz vor dem *Optimum* abzubrechen. So kann selbst bei Fehlschlägen des Abbruchkriteriums im Nachhinein der *optimale* Entwurf in den gespeicherten Daten ermittelt werden. Durch Fehler in der Modellbildung oder Wahl eines äußerst ungünstigen Startentwurfs kann die Struktur kollabieren, sodass ihr Volumen gleich 0 ist. Auch das wurde im Notfallkriterium berücksichtigt. Die gesamte Funktion, die die Beendigung der Optimierung implementiert, zeigt Algorithmus 8.

**Algorithmus 8** Das Abbruchkriterium der Optimierung

```

Funktion beendeOptimierung()
  /* Subkriterien */
   $\mathcal{K}_{FSD} = \mathcal{K}_V = \mathcal{K}_C = \mathcal{K}_{eud} = \mathcal{K}_{not} = \text{falsch}$       // Initialisierung der Kriterien 1-4 +
  Notfall
  wenn  $n_{FSD} = |\Omega_{phys}|$  dann
     $\mathcal{K}_{FSD} = \text{wahr}$ 
  wenn  $V$  in den letzten  $n_{eval}$  Iterationen konstant dann
     $\mathcal{K}_V = \text{wahr}$ 
  wenn  $C$  in den letzten  $n_{eval}$  Iterationen konstant dann
     $\mathcal{K}_C = \text{wahr}$ 
  wenn  $d(\mathbf{a}'^{(k)}, \mathbf{a}'^{(k+1)}) < \epsilon_{eud}$  dann
     $\mathcal{K}_{eud} = \text{wahr}$ 
  wenn  $\frac{dV}{dk}$  oder  $\frac{dC}{dk}$  in den letzten  $n_{eval}$  Iterationen  $>> 0$  oder  $V = 0$  dann
     $\mathcal{K}_{not} = \text{wahr}$ 
  /* Abbruchkriterium */
  wenn ( $\mathcal{K}_{FSD}$  und  $\mathcal{K}_V$  und  $\mathcal{K}_C$  und  $\mathcal{K}_{eud}$ ) oder  $\mathcal{K}_{not}$  dann
     $\text{zurück wahr}$ 

```

#### 4.2.4 Berücksichtigung mehrerer Lastfälle

Nach dem Prinzip der Superposition wurde die Möglichkeit der Betrachtung mehrerer Lastfälle implementiert. Hierbei zählt ein Stab als voll beansprucht, wenn in mindestens einem Lastfall  $j$

$$\frac{\sigma_{i(j)}}{\sigma^u} = 1 \pm \epsilon_\sigma, \quad j = 1, \dots, n_L, \quad i \in \mathcal{B}_{phys} \quad (4.22)$$

gilt. Pro Iteration wird die FEA separat für die Lastfälle durchgeführt und anschließend anstatt eines Strukturantwortvektors mehrere zurück gegeben. Die Strukturantworten, die der *Update*-Formel zur Variation der Entwurfsvariablen übergeben werden sind die Maximalspannungen eines Stabelements aus allen Lastfällen. Die *Update*-Formel aus Gleichung (4.14) lässt sich zur Berücksichtigung mehrerer Lastfälle zu

$$a_i^{(k+1)} = \begin{cases} \min \left( a_i^{(k)} \frac{\max(\sigma_{i(j)}^{(k)})}{\sigma^u}, a^u \right) & \text{falls } a_i^{(k+1)} > a^l, \\ \mu = 10^{-12} & \text{falls } a_i^{(k+1)} \leq a^l \end{cases}, \quad j = 1, \dots, n_L, \quad i \in \mathcal{B} \quad (4.23)$$

umformulieren.

# KAPITEL 5

## Verifikation

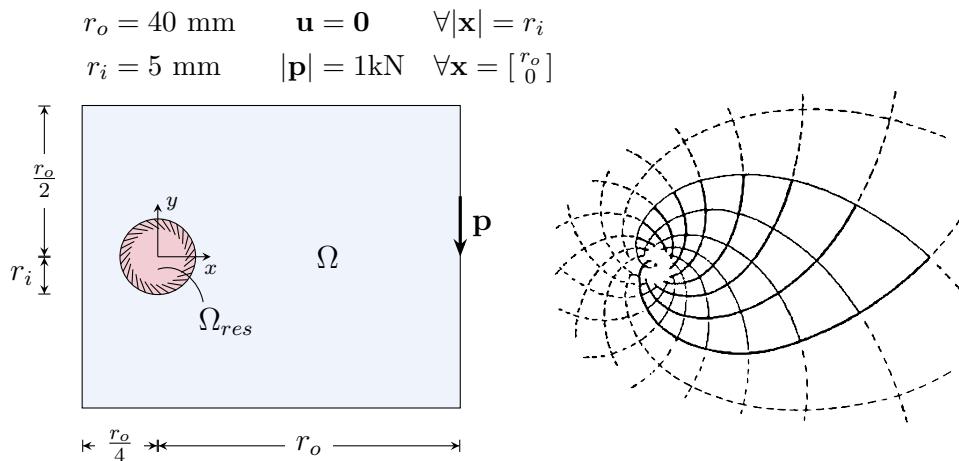
In diesem Kapitel werden zur Verifikation des implementierten Topologieoptimierungsalgorithmus Benchmark-Probleme nach MICHELL [23] optimiert. Dies ermöglicht die Abschätzung der Optimalität des gelieferten Entwurfs. An den Modellen wird eine Parameterstudie zu der Konfiguration der Grundstruktur durchgeführt. Dabei wird das Konnektivitätslevel  $n_{lvl}$  und die Knotenanzahl  $|\mathcal{N}^{(0)}|$  der Grundstruktur variiert. Mit der Variation dieser beiden Parameter steht den Grundstrukturen eine unterschiedliche Anzahl an Stabelementen  $|\mathcal{B}^{(0)}|$  zur Optimierung zur Verfügung. Um die Performance und Robustheit des Algorithmus abschätzen zu können sind die sonstigen Optimierungsparameter aus Tabelle 5.1 dieselben.

Das folgende Modell des Michell-Kragarms mit kreisrunder Einspannung beinhaltet viele Aspekte, die die Stärken und Schwächen des Algorithmus identifizieren. Es wurde in hoher Diversität hinsichtlich der Grundstruktur modelliert. Daher werden an diesem Optimierungsproblem detailliert die Ergebnisse der Experimente diskutiert. Da anschließend folgende Modelle ähnliche allgemeine Charakteristiken der Optimierung aufweisen, werden dort primär modellspezifische Erkenntnisse diskutiert. Deren Optimierungsergebnisse lassen sich im Anhang A im Detail betrachten und werden aus Gründen der Übersichtlichkeit in diesem und folgendem Kapitel 6 nicht in tabellarischer Form dargestellt. Alle Optimierungsexperimente wurden auf einer CPU des Typs i7-4770K 3.5GHz mit 4 Kernen/8 Threads durchgeführt.

Konvergenztoleranz des Modellvolumens	$\epsilon_V$	$10^{-3}$	[ $\cdot$ ]
Konvergenztoleranz der mittleren Nachgiebigkeit	$\epsilon_C$	$10^{-3}$	[ $\cdot$ ]
Konvergenztoleranz der euklidischen Distanz	$\epsilon_{eud}$	$10^{-6}$	[ $\cdot$ ]
Penalisierungswert	$\mu$	$10^{-12}$	[mm $^2$ ]
untere Grenze der Entwurfsvariablen	$\hat{a}^l$	5%	[ $\cdot$ ]
obere Grenze der Stabspannung ( $\sigma_z^u = \sigma_d^u = \sigma^u$ )	$\sigma^u$	500	[MPa]
Entwurfsvariablen im Startentwurf	$a_i^{(0)}$	$10^{-8}$	[mm $^2$ ]
Elastizitätsmodul	$E$	$2.1 \cdot 10^5$	[MPa]
Kollinearitätstoleranz im polaren KS	$\epsilon_\theta$	$1 - 10^{-12}$	[ $\cdot$ ]
Kollinearitätstoleranz im kartesischen KS	$\epsilon_\theta$	$1 - 10^{-6}$	[ $\cdot$ ]

**Tab. 5.1** Optimierungs- und Modellparameter aller Experimente

## 5.1 Michell-Kragarm mit kreisrunder Einspannung

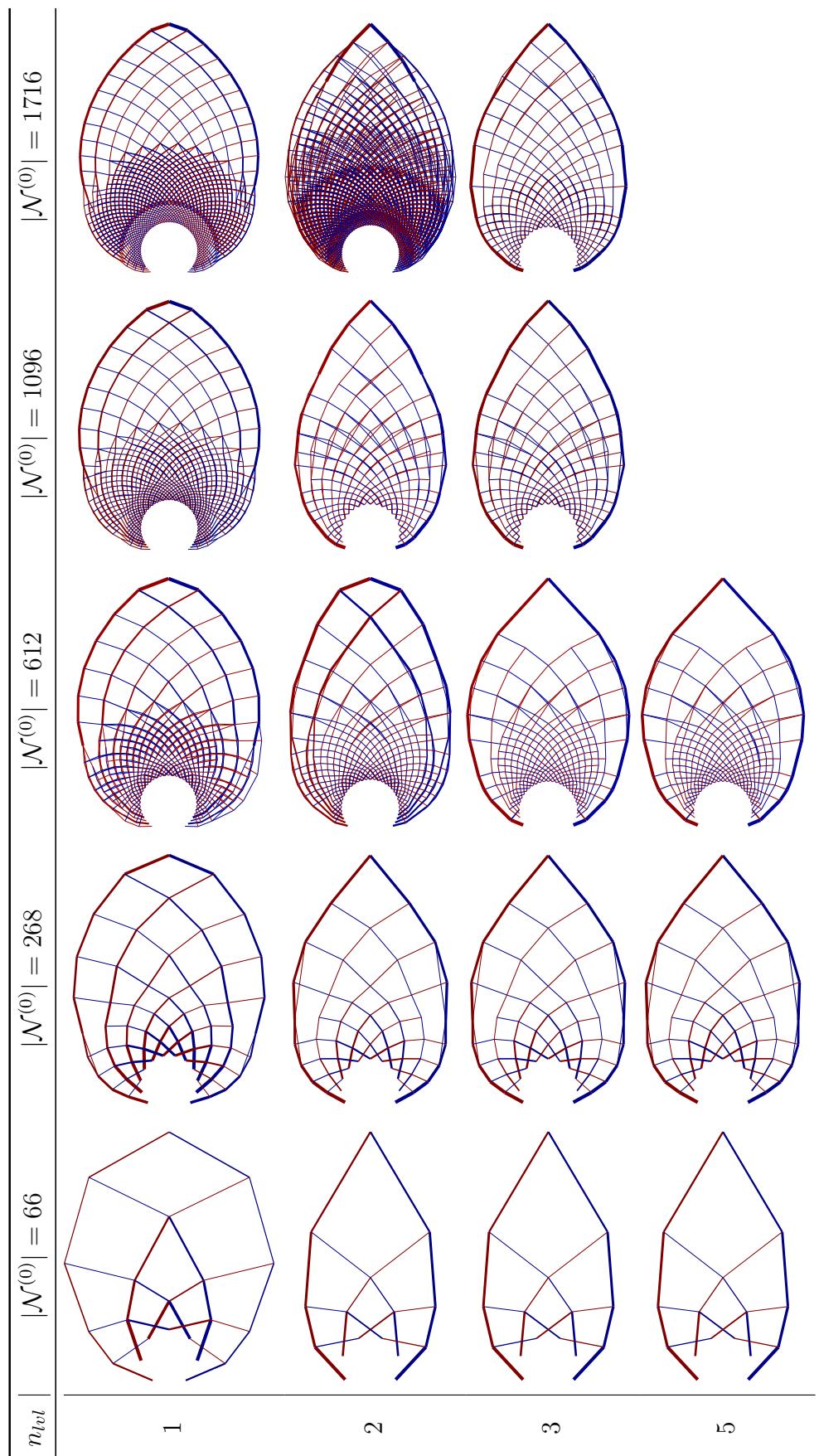
**Abb. 5.1** Modelldefinition des Michell-Kragarms mit kreisrunder Einspannung und originale Michell-Struktur aus [23]

Das Modell des Michell-Kragarms mit kreisrunder Einspannung in Abbildung 5.1 wurde bereits in Abschnitt 2.3 vorgestellt. Die Knoten am kreisrunden Rand mit dem Radius  $r_i$  sind in beiden Freiheitsgraden ( $u, v$ ) blockiert – fest gelagert. Eine Punktlast  $\mathbf{p}$  wirkt mit einem Abstand  $r_o$  zum Ursprung auf die Struktur. Damit die optimale Struktur der analytisch optimalen Michell-Struktur entsprechen kann sind die äußeren geometrischen Ränder des Entwurfsraums  $\Omega$  groß genug zu wählen. Da die optimierte Lösung aber ab einer Mindestgröße des Entwurfsraums nicht mehr von ihm abhängig ist, ist  $\Omega$  so groß wie nötig und klein wie möglich zu wählen. In Abbildung 5.1 gezeigte Seitenverhältnisse haben sich als brauchbar erwiesen. Um die Verbindungen von Knoten durch den kreisförmigen Leerraum an der Einspannung auszuschließen wurde dort eine Restriktionszone  $\Omega_{res}$  mit demselben Radius  $r_i$  platziert. Das analytisch minimale Volumen des Fachwerks für den gegebenen Lastfall errechnet sich nach MICHELL [23] mit  $\sigma_z^u = \sigma_d^u = \sigma^u$  zu

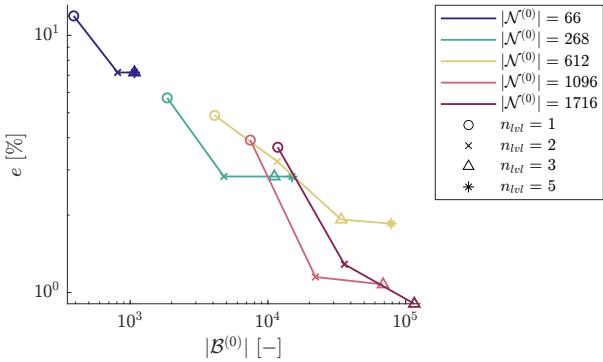
$$V^{opt} = |\mathbf{p}| r_o \ln \frac{r_o}{r_i} \left( \frac{1}{\sigma_z^u} + \frac{1}{\sigma_d^u} \right) = 332.7106 \text{ mm}^3. \quad (5.1)$$

Um die optimierten Ergebnisse korrekt zu interpretieren, sei erneut an die Natur der Michell-Struktur rechts in Abbildung 5.1 erinnert. Das analytische Volumenminimum  $V^{opt}$  wird nicht konkret in der Form des gezeigten Michell-Fachwerks erhalten, sondern wenn nach demselben Winkelschema unendlich viele Stabpfade von der Einspannung zum Lastknoten verlaufen. Prinzipiell liegt so im Optimum also ein „Kontinuum aus Stäben“ vor.

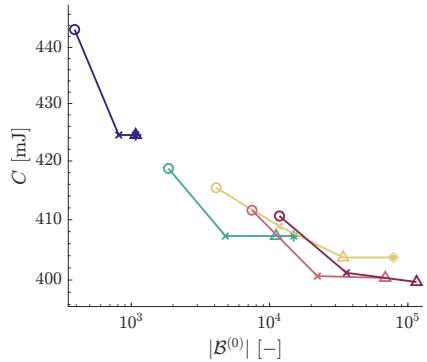
Abbildung 5.2 zeigt die optimierten Strukturen der Experimente aus Tabelle 5.2. Zunächst können die Ergebnisse optisch verifiziert werden. Die Stäbe sind nach ihrer Belastungsart gefärbt, sodass rote Elemente Zug- und blaue Elemente Druckstäben entsprechen. Auf den ersten Blick wird der Einfluss der Verfeinerung durch die Knotenverteilung in der Grundstruktur deutlich. Gröbere Grundstrukturen resultieren in einem klarer strukturiertem *optimalen* Design. Auch wenn die elementärmeren Fachwerke weniger voluminös erscheinen als die dicht verästelten, zeigt Abbildung 5.3, dass durch feinere Grundstrukturen Entwürfe hervorgehen, die dem analytischen Volumenminimum näher sind. Die Ergebnisse zeigen aber auch, dass knotenreiche Grundstrukturen erst besonders dann gute Optimalität liefern, wenn sie ausreichend divers miteinander verbunden sind – dementsprechend das Konnektivitätslevel ausreichend hoch ist. Die feinen Konfigurationen – deutlich sichtbar bei  $|\mathcal{N}^{(0)}| = 1096$  und 1716 – weisen bei niedriger Konnektivität hohe Abweichungen von der erwarteten Form auf. Der Grund hierfür ist, dass die Grundstrukturen keine Stabelemente beinhalten, die günstige Pfade zum Abtragen der Last bilden können. Dabei kann als Anhaltspunkt der Winkel zwischen den beiden Elementen am Kraftangriffspunkt betrachtet werden, der im Abgleich mit der Michell-Struktur wesentlich spitzer sein müsste, als es die Strukturen niederen Konnektivitätslevels ermöglichen können. Wird nach dieser Erkenntnis die Konnektivität erhöht, nähert sich das äußere Erscheinungsbild, genau so wie das Modellvolumen  $V^*$ , dem Michell-Optimum. Die Kehrseite der elementreichen Grundstrukturen wiederum ist eine schlechtere Konturierung zwischen dem physikalischen und fiktiven Lösungsgebiet. Abbildung 5.6 zeigt, wie die hauptsächlich tragenden Elemente von sehr dünnen Elementen begleitet werden, die ihnen in ihrer Richtung sehr ähnlich sind. Auch Abbildung 5.5 zeigt im Vergleich mit einer größeren Struktur, dass der Anteil an Stäben mit kleiner Querschnittsfläche recht hoch ist. Die *Update*-Formel liefert in diesen Fällen selbst mit der implementierten Filterung keine hinreichende Konturierung zwischen notwendigen und entbehrlichen Elementen. Damit sei eine Schwäche des Algorithmus identifiziert. Je größer die Knotenverteilung, desto schärfert die Struktur konturiert.



**Abb. 5.2** Die optimierte Struktur des Michell-Kragarms mit kreisrunder Einspannung bei Variation der Grundstruktur



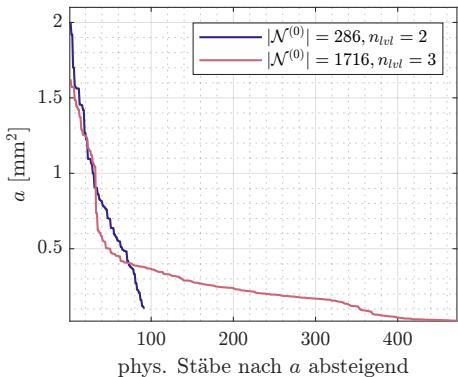
**Abb. 5.3** Relativer Fehler der optimierten Lösungen  $V^*$  zur analytischen Lösung  $V^{opt}$  des Michell-Kragarms mit kreisrunder Einspannung



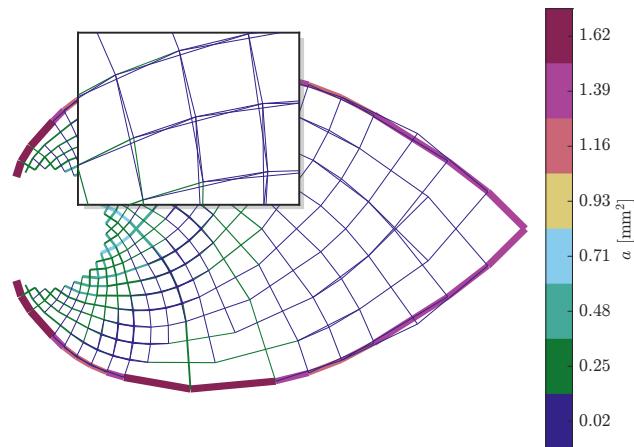
**Abb. 5.4** Mittlere Nachgiebigkeit  $C$  der optimierten Lösungen des Michell-Kragarms mit kreisrunder Einspannung

Werden die Stabpfade von der Einspannung in Richtung des Lastknotens verfolgt, zeigen sich bei mehreren Konfigurationen vermehrt doppelte Pfade, die schließlich in einen Pfad zusammen laufen. Bei solch geringen Abständen zwischen den Pfaden fällt die Identifizierung des optimalen Pfades durch die *Update*-Formel schwer. Das Vorliegen solcher doppelter ineinander verlaufender Pfade lässt jedoch auch darauf schließen, dass in diesem Bereich nicht der Pfad enthalten ist, der die Last optimal abtragen kann.

Eine Erhöhung des Konnektivitätslevels muss nicht zwangsläufig in einer Lösung höherer Optimalität resultieren. Im offensichtlichen Fall der maximalen Konnektivität – alle Knoten sind miteinander verbunden – gewinnt die Struktur bei einer Erhöhung des Levels keine neuen Stabelemente, sodass die optimierte Lösung bei höherer Laufzeit  $t^*$  identisch sein wird. Die Konfigurationen  $|\mathcal{N}^{(0)}| = 66$  mit  $n_{lvl} = 3$  und  $n_{lvl} = 5$  zeigen dies. Die maximale Konnektivität einer Stabstruktur ist modell- und konfigurationsabhängig. Knotenärmere Modelle erreichen sie logischerweise bei geringerem Konnektivitätslevel als knotenreichere Konfigurationen. Die Konfigurationen  $|\mathcal{N}^{(0)}| = 268$  mit  $n_{lvl} = 2$  bis  $n_{lvl} = 5$  resultieren aber auch ohne Vorliegen der maximalen Konnektivität in demselben *optimalen* Entwurf. Tabelle 5.2 zeigt den enormen Zuwachs der Elementanzahl in der Grundstruktur  $|\mathcal{B}^{(0)}|$  aus denen dieselbe Anzahl an *optimalen* Stäben  $|\mathcal{B}^*|$  und ein näherungsweise identisches *optimales* Volumen resultiert. Durch Verwendung der Grundstrukturmethode nach ZEGARD & PAULINO [34] kann also durch die Steuerbarkeit der Konnektivität eine höhere Effizienz vorgewiesen werden als mit der Verwendung einer vollständig verbundenen Grundstruktur. Auch der Aspekt der Kollinearitätsprüfung der Stäbe ist dabei im Hinterkopf zu behalten. Wenn schon die besagte Problematik mit dünnen richtungsgleichen Stäben besteht, die kaum von den hauptsächlich tragenden Stäben konturiert werden können, so wirkt sich das Vorliegen kollinearer Stäbe besonders negativ auf die Optimalität und Strukturiertheit der Lösung aus.



**Abb. 5.5** Vergleich zweier optimierter Grundstrukturkonfigurationen hinsichtlich der Verteilung der Stabquerschnittsflächen des Michell-Kragarms mit kreisrunder Einspannung



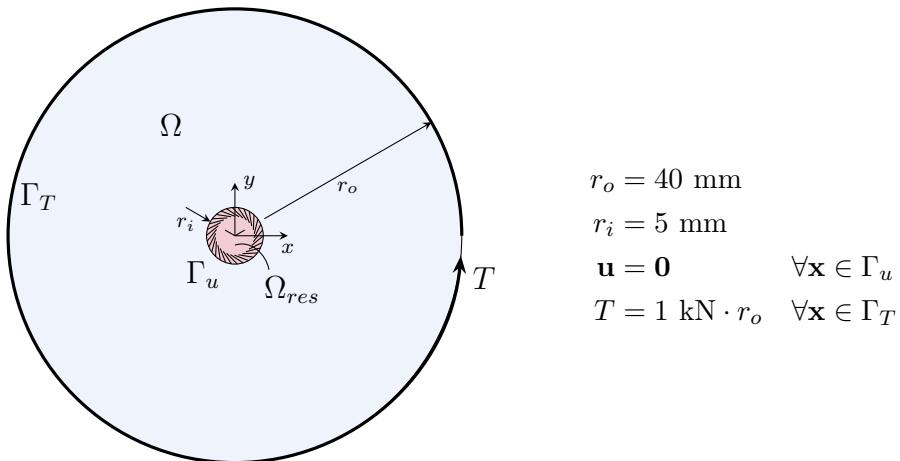
**Abb. 5.6** Die Verteilung der Stabquerschnittsflächen im *optimalen* Fachwerk bei einer Verfeinerung auf 1716 Knoten mit  $n_{lvl} = 3$  des Michell-Kragarms mit kreisrunder Einspannung

Abbildung 5.4 zeigt für die globale mittlere Nachgiebigkeit  $C$  dasselbe Konvergenzverhalten wie das Modellvolumen in Abbildung 5.3. Die Lösungen höherer Optimalität resultieren also gleichzeitig in steiferen Fachwerken. An beiden Parametern wird die hohe Konvergenzgeschwindigkeit bei der Erhöhung des Konnektivitätslevels von  $n_{lvl} = 1$  auf  $n_{lvl} = 2$  deutlich, die bei weiterer Steigerung von  $n_{lvl}$  stark abnimmt. Dabei ist zu beachten, dass die analytisch optimale Michell-Struktur aus gekrümmten Stabpfaden besteht, die durch tendenziell kürzere Stäbe geformt werden. Neu dazu kommende Stäbe bei Erhöhung der Konnektivität sind länger als schon bestehende Stäbe. Speziell in diesem Modell sind so die neuen Stäbe ab einer gewissen Konnektivität durch ihre zu große Länge für die Bildung der Krümmung ungeeignet und steigern daher auch nicht die Optimalität. Des Weiteren wird in Abbildung 5.3 die Konvergenz des Volumens durch die Verfeinerung der Knotenverteilung festgestellt. Die Änderung zwischen den *optimalen* Volumina der Entwürfe mit demselben Konnektivitätslevel nimmt bei steigender Knotenzahl  $|\mathcal{N}^{(0)}|$  stetig ab.

$ \mathcal{N}^{(0)} $ [-]	$n_{lvl}$ [-]	$\Delta r$ [mm]	$\Delta\varphi$ [rad]	$k^*$ [-]	$t^*$ [h:m:s]	$ \mathcal{B}^{(0)} $ [-]	$ \mathcal{B}_{phys}^* $ [-]	$V^*$ [mm <sup>3</sup> ]	$e$ [-]
66	1	5.00	$2\pi/15$	110	00:00:04	389	30	372.3202	11.91%
66	2	5.00	$2\pi/15$	100	00:00:04	811	20	356.5750	7.17%
66	3	5.00	$2\pi/15$	96	00:00:05	1075	20	356.5750	7.17%
66	5	5.00	$2\pi/15$	96	00:00:07	1075	20	356.5750	7.17%
268	1	2.50	$2\pi/30$	225	00:00:32	1857	110	351.7154	5.71%
268	2	2.50	$2\pi/30$	229	00:01:15	4793	92	342.1136	2.83%
268	3	2.50	$2\pi/30$	265	00:08:09	11134	92	342.1111	2.83%
268	5	2.50	$2\pi/30$	280	00:28:18	14957	92	342.1072	2.82%
612	1	1.67	$2\pi/45$	86	00:00:42	4109	543	348.9538	4.88%
612	2	1.67	$2\pi/45$	329	00:11:34	11714	314	343.4662	3.23%
612	3	1.67	$2\pi/45$	462	01:20:23	34104	236	339.1019	1.92%
612	5	1.67	$2\pi/45$	555	17:47:01	78533	236	338.8761	1.85%
1096	1	1.25	$2\pi/60$	573	00:22:28	7456	818	345.7380	3.92%
1096	2	1.25	$2\pi/60$	539	01:03:44	22157	310	336.5331	1.15%
1096	3	1.25	$2\pi/60$	553	05:42:19	68587	292	336.2875	1.08%
1716	1	1.00	$2\pi/75$	218	00:30:25	11791	1721	344.9264	3.67%
1716	2	1.00	$2\pi/75$	226	01:23:51	35934	2661	336.9939	1.29%
1716	3	1.00	$2\pi/75$	737	29:29:29	115668	472	335.7178	0.90%

**Tab. 5.2** Optimierungsergebnisse des Michell-Kragarms mit kreisrunder Einspannung

## Torsionsscheibe



**Abb. 5.7** Modelldefinition der Torsionsscheibe

Das analytisch optimale Volumen  $V^{opt}$  des Michell-Kragarms mit kreisrunder Einspannung kann durch die Proportionalität zur Punktlast  $|\mathbf{p}|$  beliebig vervielfacht werden. So wurde das Modell aus Abbildung 5.7 aufgesetzt, das einen kreisförmigen Entwurfsraum  $\Omega$  mit dem Radius  $r_o$  um die Einspannung beschreibt. Am Rand  $\Gamma_T$  wird an jedem Knoten  $i$  eine Punktlast  $\mathbf{p}_i$  in tangentialer Richtung angelegt, sodass sich in Summe das Torsionsmoment

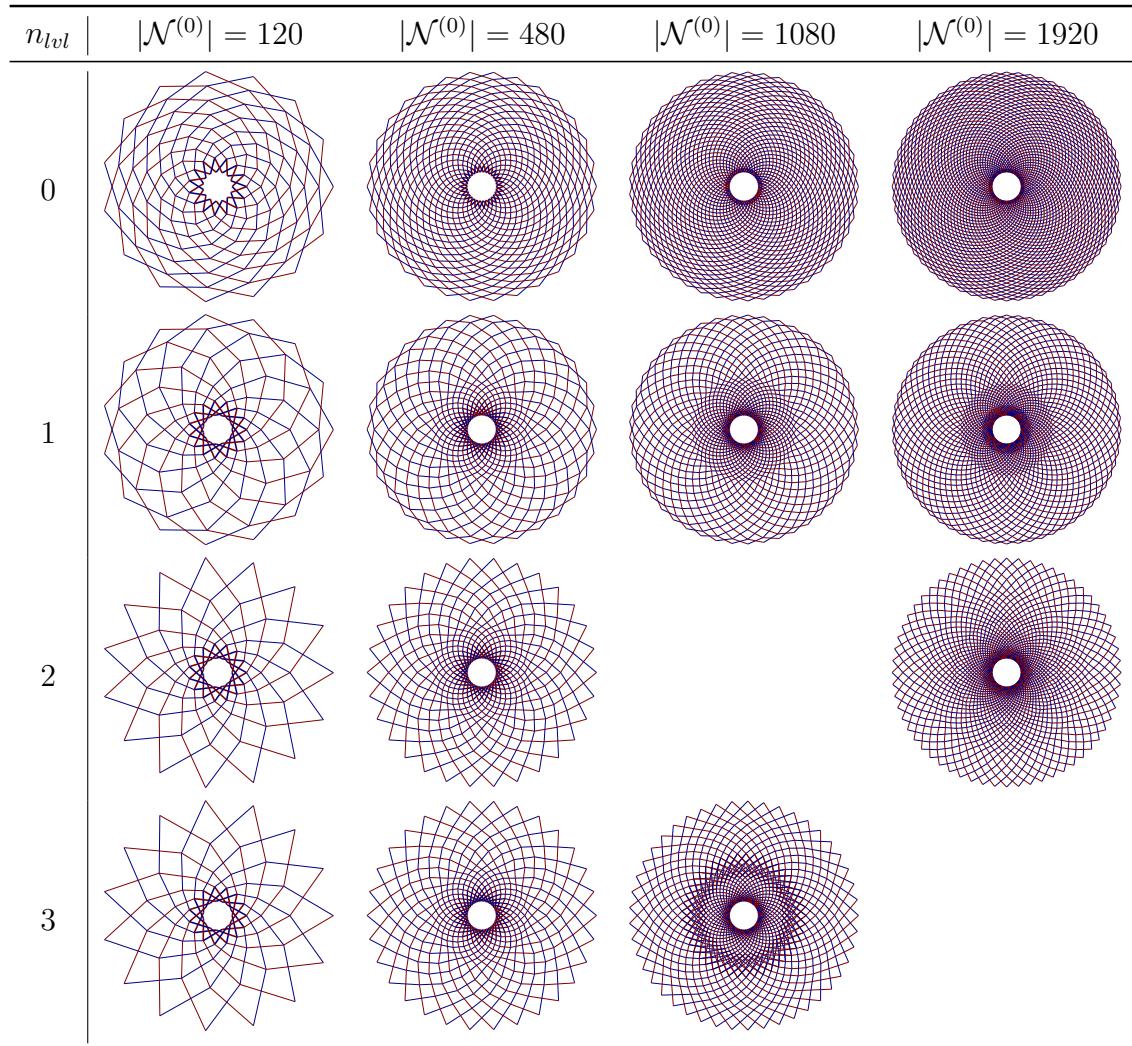
$$T = \sum_i |\mathbf{p}_i| r_o, \quad \forall i \in \mathcal{N} \wedge \mathbf{x}_i \in \Gamma_T \quad (5.2)$$

bildet. Das analytisch optimale Volumen ist durch Aufteilung derselben Kraft auf mehrere Knoten identisch zu dem des einzelnen Kragarmes und errechnet sich so analog zu Gleichung (5.1) mit

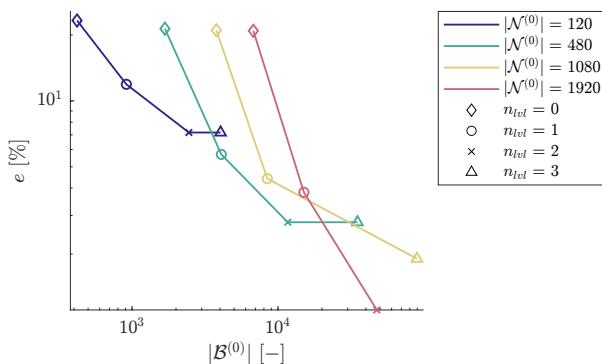
$$V^{opt} = T \ln \frac{r_o}{r_i} \left( \frac{1}{\sigma_z^u} + \frac{1}{\sigma_d^u} \right) = 332.7106 \text{ mm}^3. \quad (5.3)$$

Mit diesem Modell sollte untersucht werden, wie sich der optimierte Entwurf bei Anlegen mehrerer Lasten entwickelt, wenn weiterhin davon ausgegangen wird, dass die Entwurfstheorie nach Michell mitsamt dem analytisch optimalen Volumen Gültigkeit besitzt. Des Weiteren diente der Artikel von XU & DAI [33] als Inspiration für das Modell. Dort wird der Einsatz von Michell-Strukturen zum Design von Leichtbau-Stirnrädern untersucht. Die Randbedingungen eines Stirnrades sind aufgrund der Torsionsbelastung ähnlich zu diesem Modell. Abbildung 5.8 zeigt die optimierten Fachwerke der Torsionsscheibe. Es kann erkannt werden, dass das *optimale* Fachwerk wieder in einer Michell-artigen Struktur resultiert. Genauer gesagt, besteht es aus mehreren Michell-Kragarmen in radialer Anordnung. Abbildung 5.9 zeigt, dass das Modellvolumen der optimierten Lösungen gegen die analytisch optimale Lösung

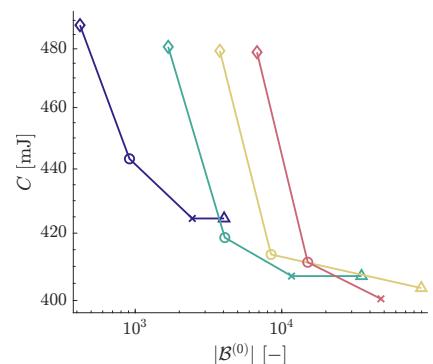
konvergiert und stützt damit die Entwurfstheorie nach Michell auch für diese Art der Mehrfachbelastung.



**Abb. 5.8** Die optimierte Struktur der Torsionsscheibe bei Variation der Grundstruktur

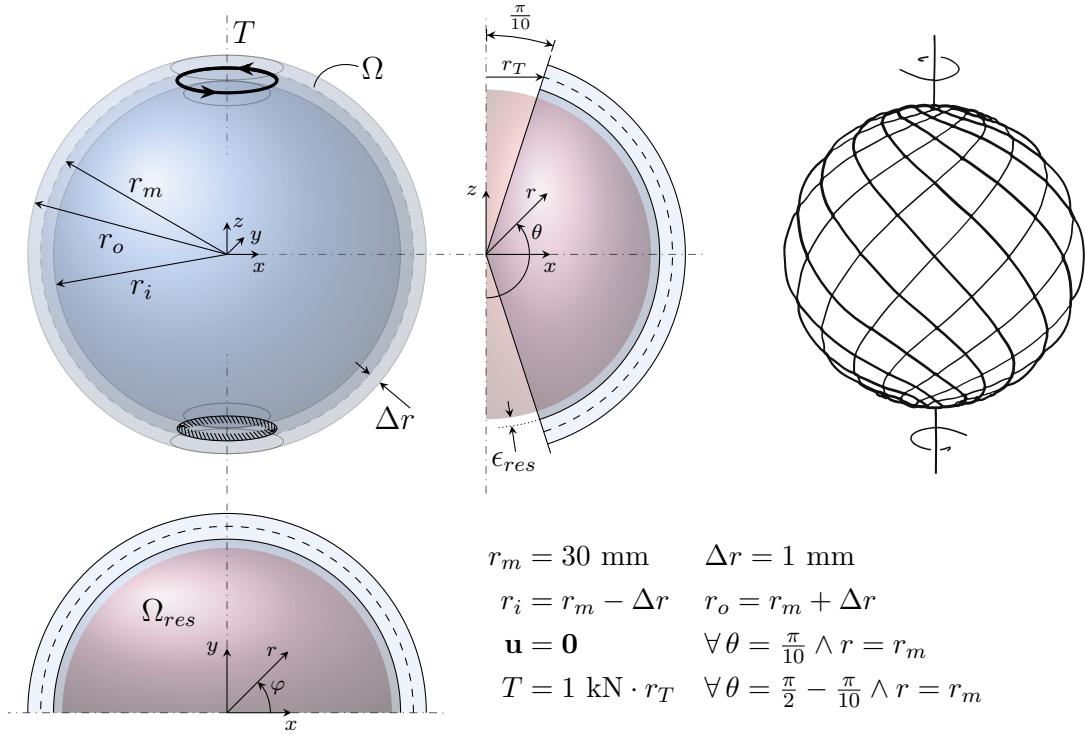


**Abb. 5.9** Relativer Fehler der optimierten Lösungen  $V^*$  zur analytischen Lösung  $V^{opt}$  der Torsionsscheibe



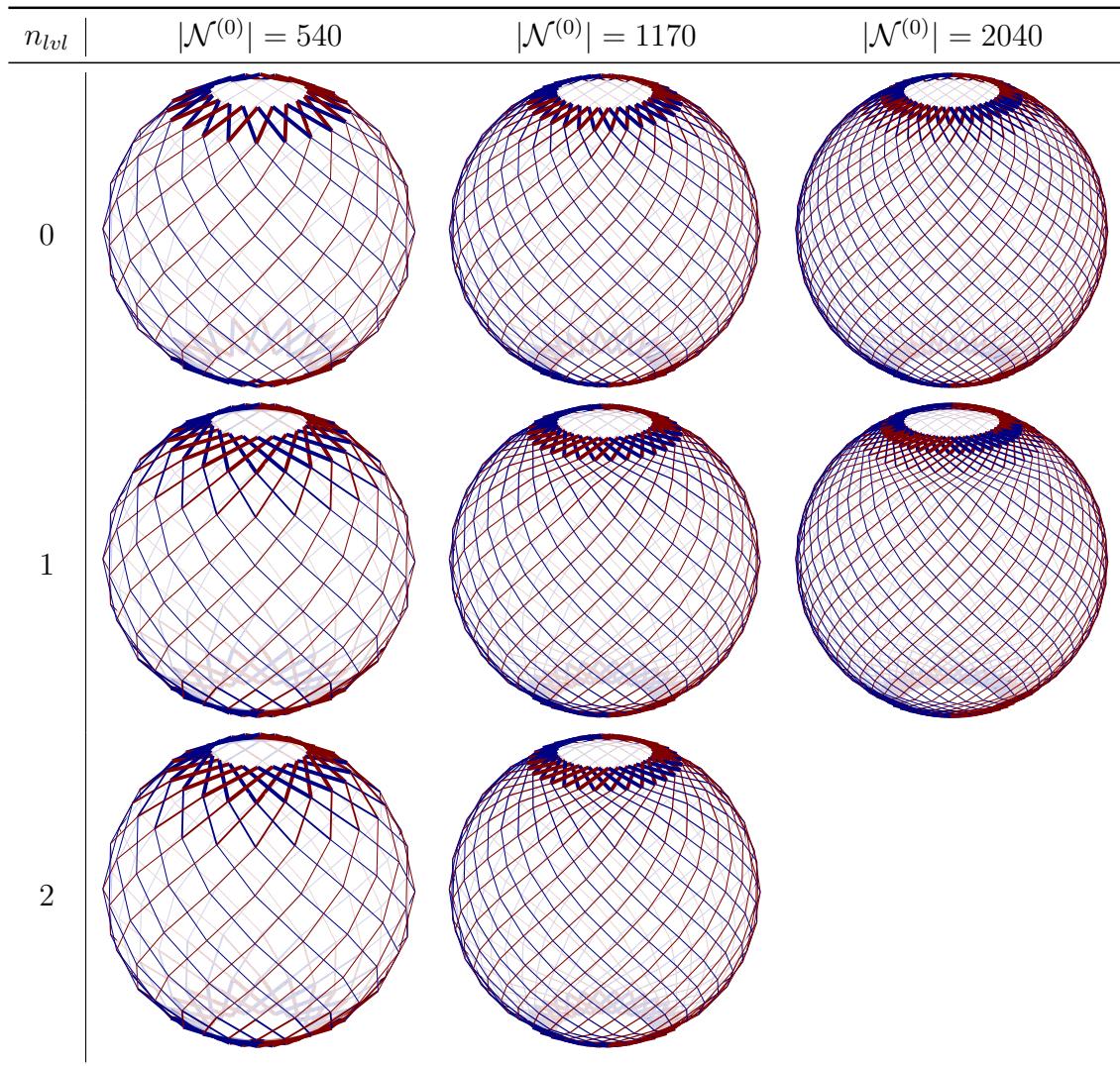
**Abb. 5.10** Globale mittlere Nachgiebigkeit  $C$  der optimierten Lösungen der Torsionsscheibe

## 5.2 Michell-Torsionsball



**Abb. 5.11** Modelldefinition des Michell-Torsionsballs und originale Michell-Struktur aus [23]

Neben den bisher gezeigten ebenen Michell-Modellen kann der Algorithmus ebenfalls bei der Optimierung räumlicher Modelle durch eine analytisch optimale Lösung verifiziert werden. In [23] zeigt Michell die Struktur eines kugelförmigen Fachwerks das tordiert wird. ZEGARD & PAULINO [35] stellten daraus ebenfalls ein Modell auf, das hier implementiert wurde. Abbildung 5.11 zeigt die Definition des Modells und die in [23] präsentierte Michell-Struktur. Analog zu [35] wird der Entwurfsraum als hohle Kugel mit dem Radius  $r_m$  definiert, die am unteren Ende fest gelagert und am oberen Ende mit einem Torsionsmoment  $T$  beaufschlagt wird. Sowohl die Lagerung als auch die Kraftangriffspunkte wirken auf einem kreisrunden Randgebiet, das durch den Radius  $r_m$  und einem Winkelabstand von  $\pi/10$  zu der  $z$ -Achse beschrieben wird. Um der Struktur mehr Variation in der Form zu bieten, wird der schalenförmige Entwurfsraum zusätzlich durch eine innere und eine äußere Kugel erweitert auf der zusätzliche Knoten verteilt werden, sodass die Kugelschale räumlich wird. Der innere Raum wird zur Gewährleistung der Hohlheit bei höheren Konnektivitätslevels unter Berücksichtigung einer radialen Toleranz  $\epsilon_{res}$  mit einer Restriktionszone ausgestattet. Das analytisch optimale Volumen errechnet sich nach [23] mit  $\sigma_z^u = \sigma_d^u = \sigma^u$  zu

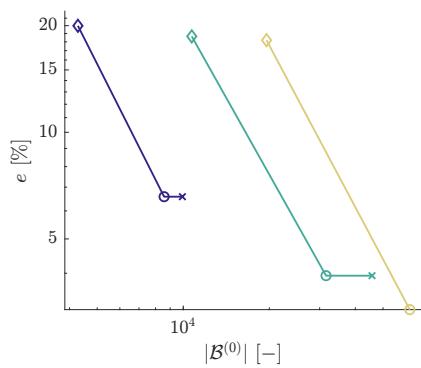
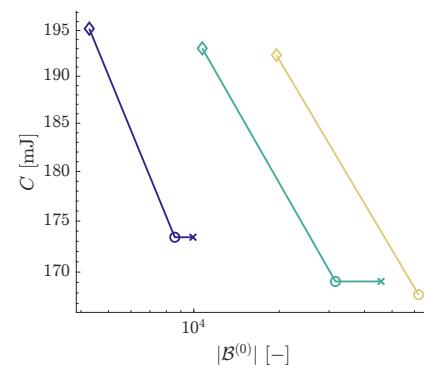


**Abb. 5.12** Die optimierte Struktur des Michell-Torsionsballs bei Variation der Grundstruktur

$$V^{opt} = 2T \ln \left( \tan \left( \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{10} \right) \right) \left( \frac{1}{\sigma_z^u} + \frac{1}{\sigma_d^u} \right) = 136.6644 \text{ mm}^3. \quad (5.4)$$

In Abbildung 5.12 lassen sich in den optimierten Ergebnissen die wiederkehrenden Winkelmuster der Michell-Strukturen erkennen, bei denen sich die Stäbe unter einem rechten Winkel kreuzen. Im Abgleich mit Tabelle 5.3 wird auffallen, dass die Optimalität der Lösung bei einem Konnektivitätslevel größer als 1 nicht mehr steigt, ohne das maximale Konnektivität vorliegt. Ein geringerer Fehler zum analytisch optimalen Volumen kann dann nur durch Verfeinerung der Knotenverteilung in der Grundstruktur erreicht werden. Dieses Konvergenzverhalten kann erneut auf die gekrümmte Form der Stabpfade zurückgeführt werden, die hier durch die zusätzliche räumliche Krümmung verstärkt nicht linear wird. Längere Stäbe bieten also wieder keine Möglichkeit zur Bildung von Stabpfaden, die die Last optimaler abtragen würden. Abbildung 5.13 zeigt das beschriebene Verhalten.

$ \mathcal{N}^{(0)} $	$n_{lvl}$	$\Delta\theta, \Delta\varphi$	$k^*$	$t^*$	$ \mathcal{B}^{(0)} $	$ \mathcal{B}_{phys}^* $	$V^*$	$e$
[-]	[-]	[rad]	[-]	[h:m:s]	[-]	[-]	[mm <sup>3</sup> ]	[-]
540	0	$\pi/10$	754	00:08:34	4280	320	163.9755	19.98%
540	1	$\pi/10$	1064	00:43:38	8570	320	145.6553	6.58%
540	2	$\pi/10$	1066	02:22:16	9930	320	145.6553	6.58%
1170	0	$\pi/15$	475	01:03:41	10710	720	162.1573	18.65%
1170	1	$\pi/15$	918	04:08:06	31590	720	142.0449	3.94%
1170	2	$\pi/15$	917	17:04:36	45750	720	142.0449	3.94%
2040	0	$\pi/20$	384	04:03:44	19560	1280	161.5284	18.19%
2040	1	$\pi/20$	774	15:02:12	62026	1280	140.9794	3.16%

**Tab. 5.3** Optimierungsergebnisse des Michell-Torsionsballs**Abb. 5.13** Relativer Fehler der optimierten Lösungen  $V^*$  zur analytischen Lösung  $V^{opt}$  des Michell-Torsionsballs**Abb. 5.14** Globale mittlere Nachgiebigkeit  $C$  der optimierten Lösungen des Michell-Torsionsballs

# KAPITEL 6

---

## Modellexperimente

---

Neben den Benchmark-Problemen aus dem vorherigem Kapitel wurden in diesem Kapitel übliche Topologieoptimierungsprobleme oder gängige Geometrien und Lastfälle aus der Mechanik modelliert. Hinzu kommen Experimente von Modellen mit Restriktionszonen, die die Auswirkung von Öffnungen verschiedener Art innerhalb des Entwurfsraums untersuchen sollen. Es wird mit einem Modell begonnen, an dem der Einfluss der implementierten Filtermethode gezeigt wird, um einen Anhaltspunkt für die Definition der unteren Restriktionsgrenze der Entwurfsvariablen  $\hat{a}^l$  zu gewinnen. Abschließend wurde ein Problem mit Realitätsbezug modelliert, dass die Anwendung des implementierten Optimierungsalgorithmus auf ingenieursgemäße Aufgaben zeigen soll.

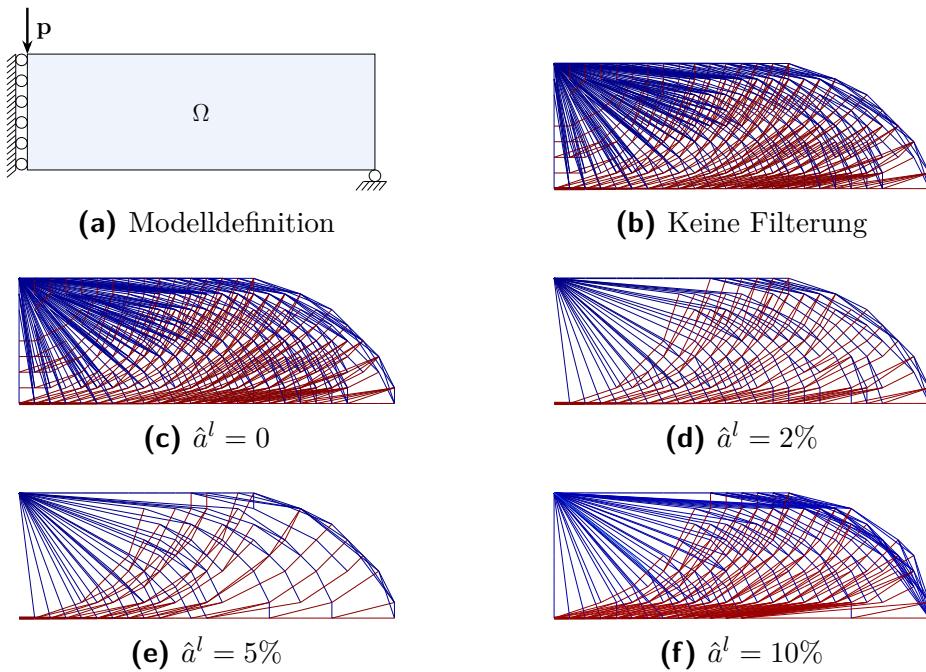
## 6.1 Elementfilterungsparameter

Zur Abschätzung der Auswirkung der Filterungsmethode für unbeanspruchte Elemente aus Abschnitt 4.2.2 auf das optimierte Ergebnis wird die Optimierung in diesem Abschnitt mit verschiedenen unteren Restriktionsgrenzen  $\hat{a}^l$  durchgeführt. Dies wird am Beispielmodell des MBB-Balkens mit einer Grundstruktur aus  $|\mathcal{N}^{(0)}| = 225$  Knoten bei einer Konnektivität von  $n_{lvl} = 5$  gezeigt.

Verglichen wird die optische Erscheinung der optimierten Fachwerke aus Abbildung 6.1 mit ihren quantitativen Kennwerten in Tabelle 6.1. Beginnend mit der Optimierung ohne jegliche Filterung von Elementen mit sehr kleinen Querschnittsflächen wird eine unstrukturierte, elementreiche Lösung beobachtet. Die Stäbe entfallen dort auf natürliche Weise sobald ihre Querschnittsfläche unter den Penalisierungswert  $\mu$  sinkt. Auch das Ergebnis in Abbildung 6.1c liefert durch die Filterung um den Schwellenwert 0 ein nahezu identisches Fachwerk, jedoch konnten reichlich Iterationen und damit auch Zeit eingespart werden. Zu erwähnen ist, dass eine Optimierung mit  $\hat{a}^L = 0$  effizienter als ohne Filterung ist, weil sie nach dem verwendeten Interpolationsschema aus Abschnitt 4.2.2 auch Elemente filtert, deren Querschnittsfläche im Einflussbereich um 0 liegt und so schneller das *optimale* Fachwerk erreicht wird.

Bei  $\hat{a}^L = 2\%$  und  $5\%$  in Abbildungen 6.1d und 6.1e kann eine deutliche Ausdünnung erreicht werden, die jedoch die Optimalität des Volumens mindert. Durch die progressivere Penalisierung von Elementen können Stäbe in das fiktive Lösungsgebiet überführt werden, die für das *optimale* Fachwerk dieser Grundstruktur im physikalischen Gebiet gebraucht würden. In diesen Fällen muss die Aufwandsreduktion den – leichten – Volumenzuwachs in Kauf nehmen. Neben der höheren Strukturiertheit der Elemente sinken auch die benötigten Iterationen erheblich.

Abbildung 6.1f zeigt, dass mit einer unteren Grenze von  $10\%$  des Querschnittsflächenmittelwerts im Modell kein guter Kompromiss zwischen Effizienz und Optimalität der Optimierung erreicht werden kann. Das gezeigte Fachwerk ist die letzte zulässige Lösung bevor das Modell aufgrund statischer Unbestimmtheit kollabiert ist.

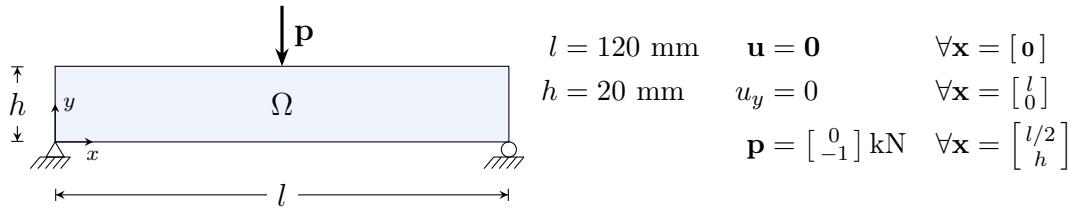


**Abb. 6.1** Auswirkung der unteren Restriktionsgrenze der Stabquerschnittsflächen  $\hat{a}^l$  auf das Ergebnis der Optimierung am Beispiel des MBB-Balkens

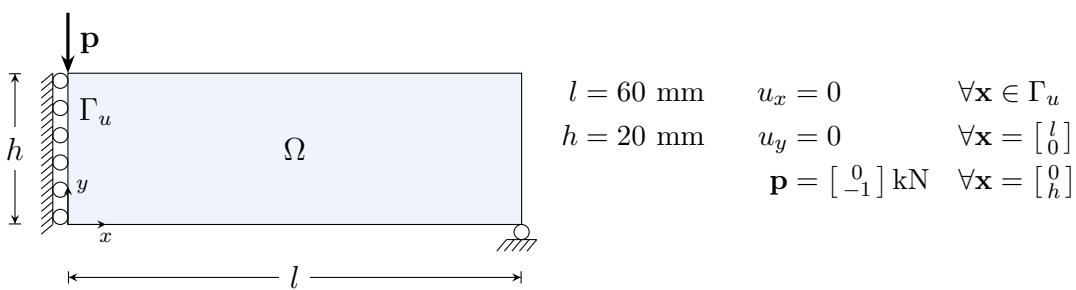
$\hat{a}^l$ [-]	$k^*$ [-]	$t^*$ [h:m:s]	$ \mathcal{B}_{phys}^* $ [-]	$V^*$ [mm <sup>3</sup> ]
-	890	00:30:34	669	284.7051
0	667	00:23:50	664	284.7298
2%	297	00:09:49	335	284.8987
5%	130	00:04:46	236	285.5445
10%	69	00:02:10	431	287.1046

**Tab. 6.1** Optimierungsergebnisse bei Variation der unteren Restriktionsgrenze der Stabquerschnittsflächen  $\hat{a}^l$

## 6.2 MBB-Balken



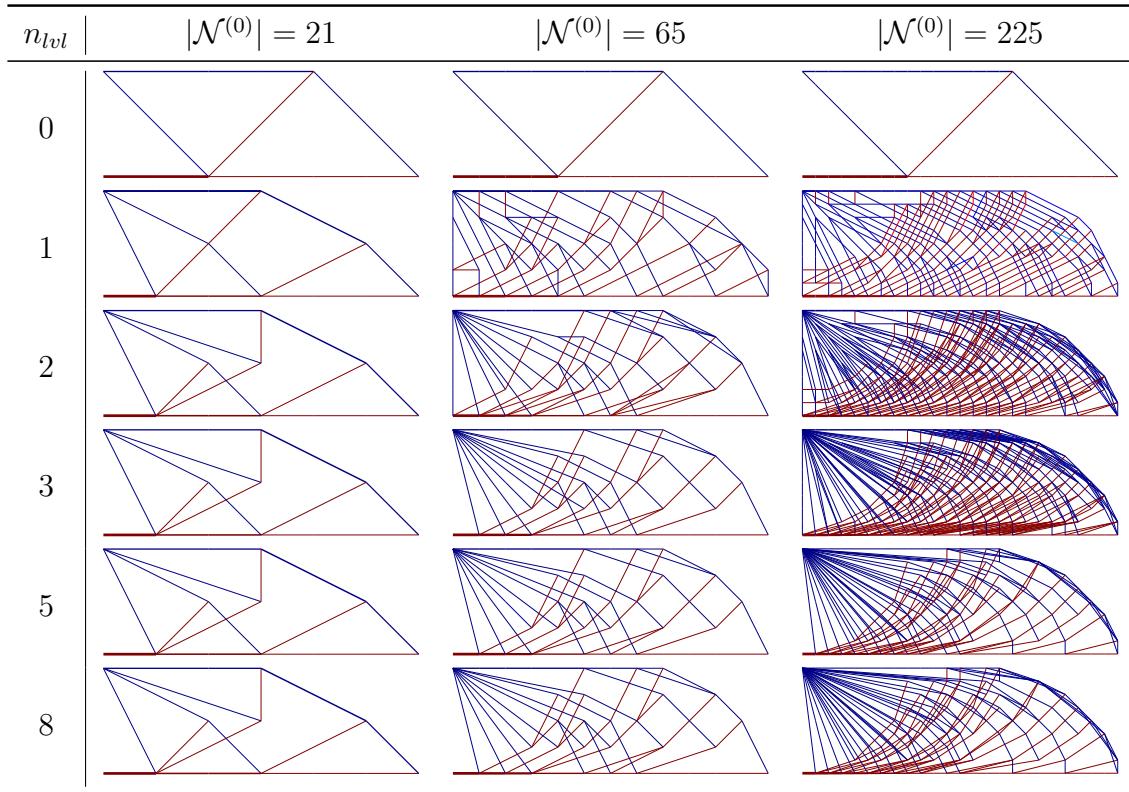
**Abb. 6.2** Modelldefinition des MBB-Balkens



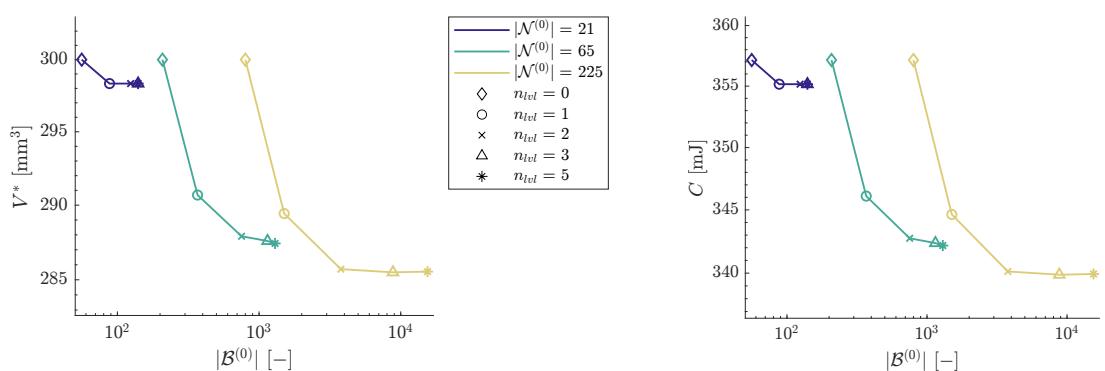
**Abb. 6.3** Modelldefinition der symmetrischen Hälften des MBB-Balkens

Der Messerschmitt–Bölkow–Blohm-Balken (*MBB-Beam*) aus Abbildung 6.2 ist eines der typischsten Topologieoptimierungsprobleme [27, 17]. Insbesondere ZEGARD & PAULINO [34] zeigen die optimierten Ergebnisse bei Verwendung einer stabgefüllten Grundstruktur. Durch die Symmetrie des Modells kann das Lösungsgebiet um die Hälfte reduziert werden. Die Lösung des Entwurfsraums der symmetrischen Hälften aus Abbildung 6.3 liefert durch Spiegelung an der  $y$ -Achse wieder das vollständige Modell und besitzt dabei ein lediglich halb so großes Gleichungssystem.

Bei Betrachtung der optimierten Entwürfe in Abbildung 6.4 wird auffallen, dass hier neben gekrümmten Stabpfaden auch Bereiche vorhanden sind, die anscheinend recht lange Stäbe benötigen um die aufgebrachte Last optimal abtragen zu können. Abbildung 6.5 bestätigt, dass die Konfigurationen mit hoher Konnektivität Lösungen höherer Optimalität liefern. Für jede Verfeinerungsstufe der Grundstruktur konvergiert das optimierte Volumen wieder durch Erhöhung der Konnektivität. Auch hier sind aber neben gleich bleibenden *optimalen* Entwürfen durch das Vorliegen maximaler Konnektivität Fälle zu beobachten in denen die Optimalität aufgrund neuer Stabelemente nicht gesteigert werden kann.



**Abb. 6.4** Die optimierte Struktur des MBB-Balkens bei Variation der Grundstruktur

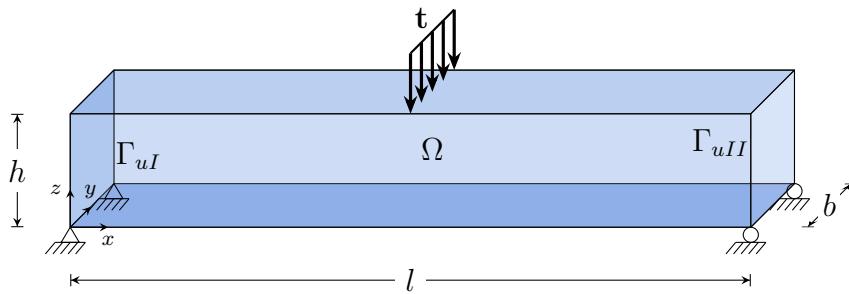


**Abb. 6.5** Volumina der optimierten Lösungen  $V^*$  des MBB-Balkens

**Abb. 6.6** Globale mittlere Nachgiebigkeit  $C$  der optimierten Lösungen des MBB-Balkens

## 6.3 Räumlicher MBB-Balken

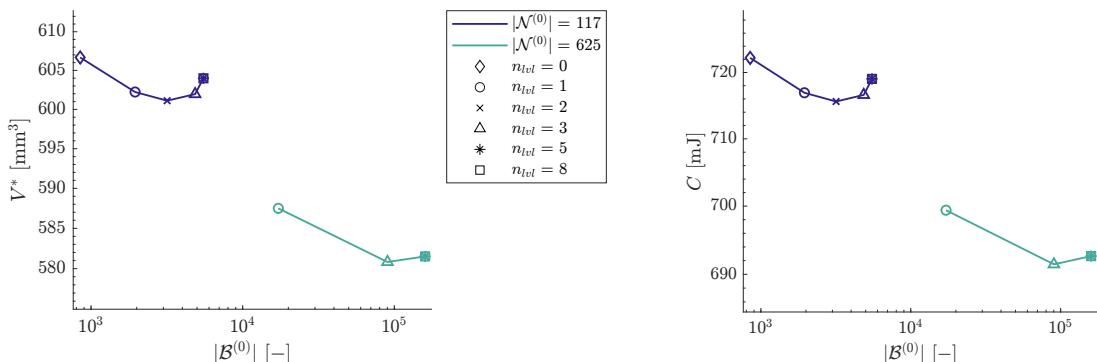
$$\begin{aligned}
 l &= 120 \text{ mm} & \mathbf{u} &= \mathbf{0} & \forall \mathbf{x} \in \Gamma_{uI} \wedge z = 0 \wedge (y = 0 \vee y = b) \\
 b &= 20 \text{ mm} & u_z &= 0 & \forall \mathbf{x} \in \Gamma_{uII} \wedge z = 0 \wedge (y = 0 \vee y = b) \\
 h &= 20 \text{ mm} & \mathbf{t} &= \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \frac{\text{kN}}{b} & \forall \mathbf{x} = \begin{bmatrix} l/2 \\ h \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$



**Abb. 6.7** Modelldefinition des räumlichen MBB-Balkens

Der MBB-Balken lässt sich ebenfalls als räumliches Modell definieren. Dabei wird eine Streckenlast  $\mathbf{t}$  über die Breite  $b$  des Balkenquerschnitts aufgebracht. Die Lagerung findet am Rand  $\Gamma_{uI}$  in fester und am Rand  $\Gamma_{uII}$  in loser Form an den Eckpunkten des Balkens statt.

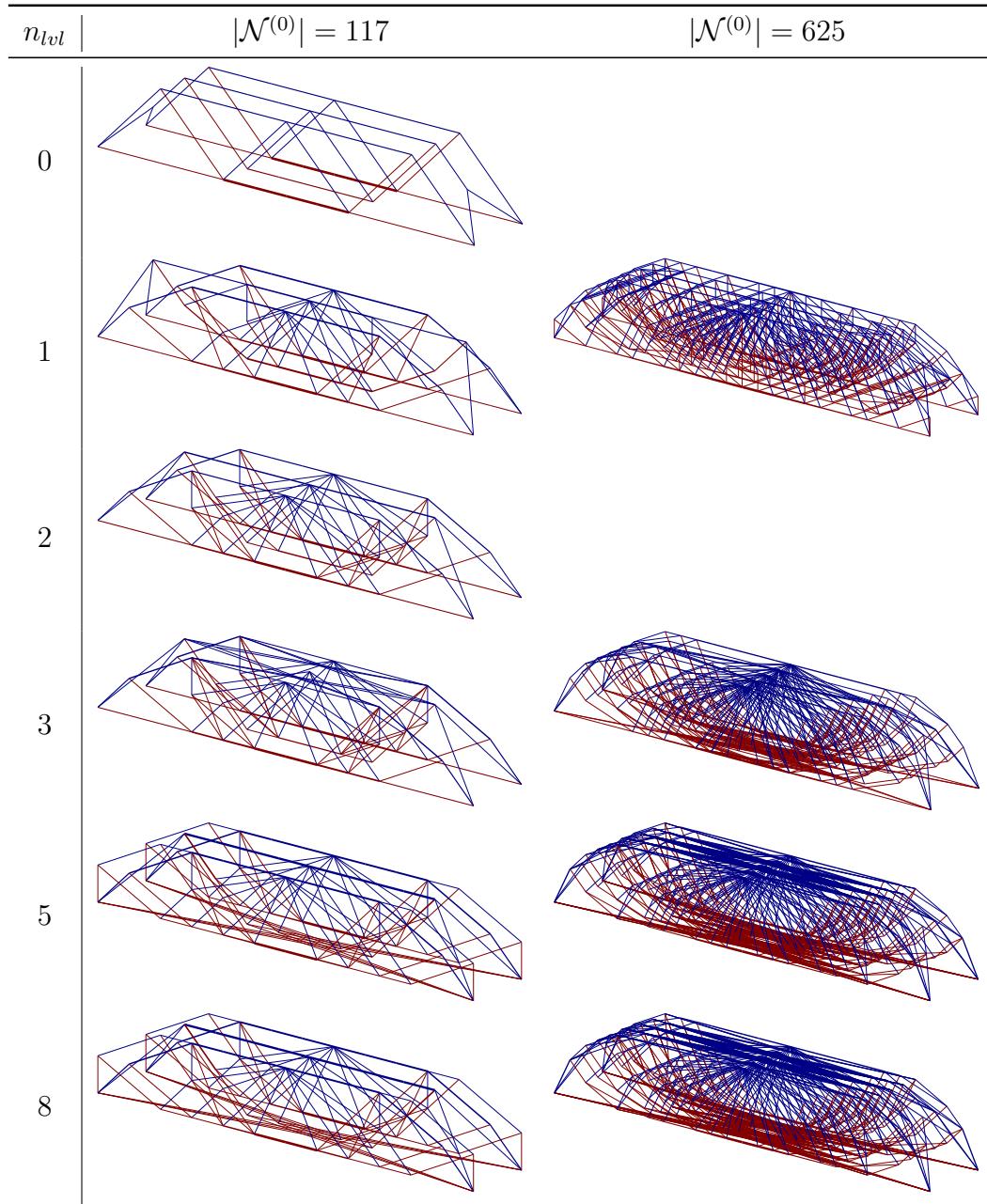
Die Optimierungsergebnisse dieses Modells zeigen ein neues Verhalten hinsichtlich der Konvergenz des Volumens bei Variation der Grundstruktur. Abbildung 6.8 zeigt, dass die Lösungen höchster Optimalität hier für die jeweiligen Verfeinerungsstufen nicht durch die Konfiguration mit der höchsten Konnektivität geliefert werden. Ab einem Konnektivitätslevel von 2 beziehungsweise 3 steigt das *optimale* Volumen wieder bis die Grundstruktur maximale Konnektivität erlangt. Durch den optischen Vergleich der optimierten Entwürfe in Abbildung 6.10 lässt sich jedoch nicht klar erkennen, woraus dies resultiert. Der einzige wahrnehmbare Unterschied zwischen



**Abb. 6.8** Volumina der optimierten Lösungen  $V^*$  des räumlichen MBB-Balkens

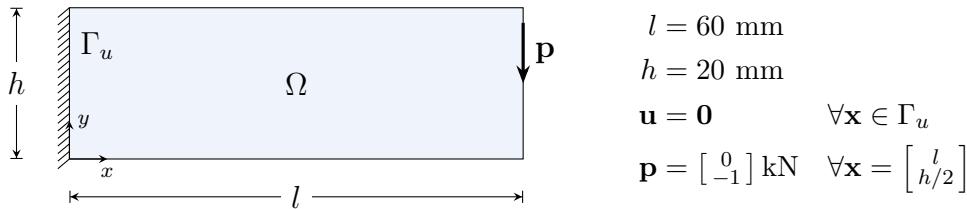
**Abb. 6.9** Globale mittlere Nachgiebigkeit  $C$  der optimierten Lösungen des räumlichen MBB-Balkens

den Fachwerken scheinen lange diagonale Stäbe in der horizontalen Ebene bei  $z = 0$  und  $z = h$  zu sein, die sich ab einem Konnektivitätslevel von 2 beziehungsweise 3 bilden. Auch nach Sichtung aller Optimierungs- und Modellparameter im Verlauf der Optimierung konnte diesem Verhalten nicht auf den Grund gegangen werden.



**Abb. 6.10** Die optimierte Struktur des räumlichen MBB-Balkens bei Variation der Grundstruktur

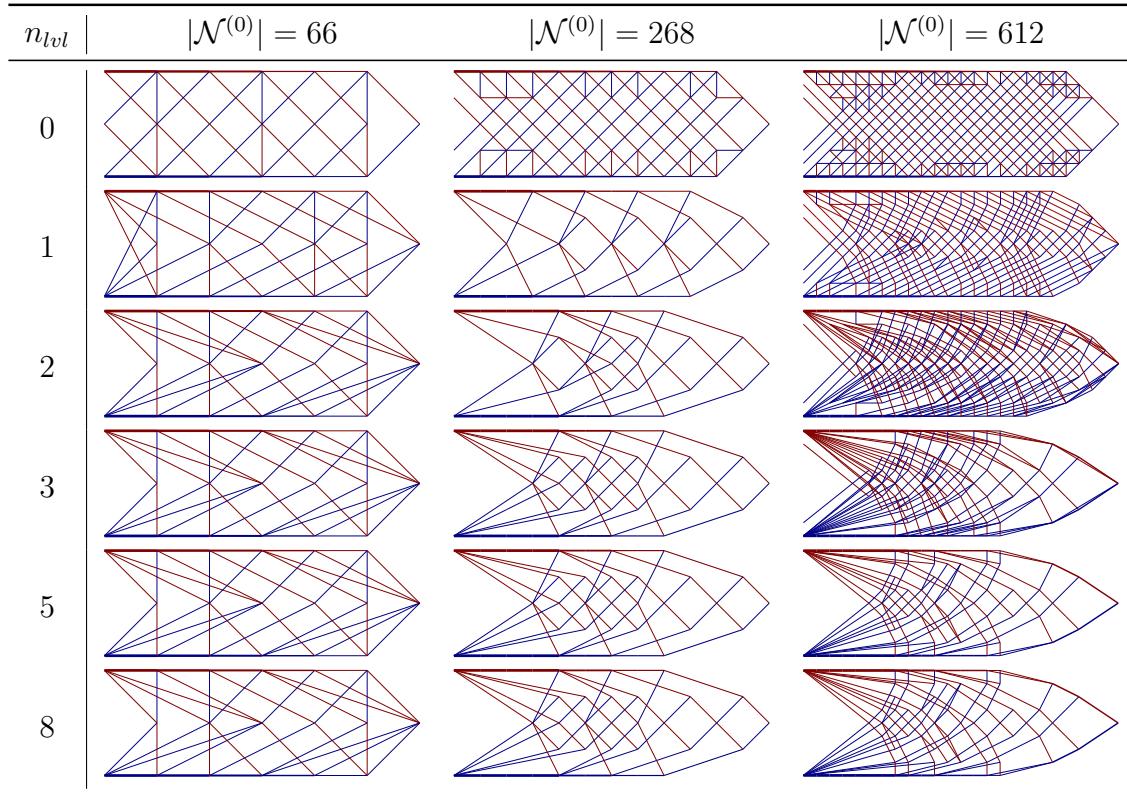
## 6.4 Ebener Kragbalken



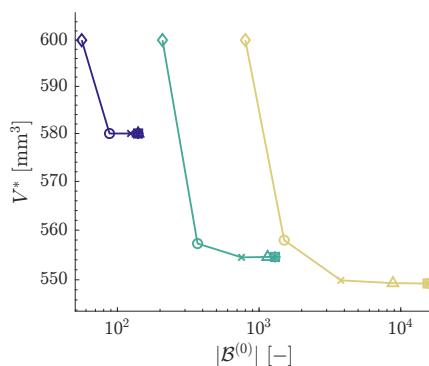
**Abb. 6.11** Modelldefinition des ebenen Kragbalkens

Der Kragbalken ist ein üblicher Lastfall in der Mechanik. Die Ähnlichkeit zum Lastfall des Michell-Kragarms mit kreisrunder Einspannung spiegelt sich auch in den Ergebnissen aus Abbildung 6.12 wieder. Die sich unter einem rechten Winkel kreuzenden Stäbe bilden auch hier die *optimal* abtragenden Lastpfade. Die Konvergenz des optimierten Volumens und der mittleren Nachgiebigkeit stellt sich auch hier nach dem bereits bekannten Verhalten ein. Die Abbildungen 6.13 und 6.14 zeigen dies.

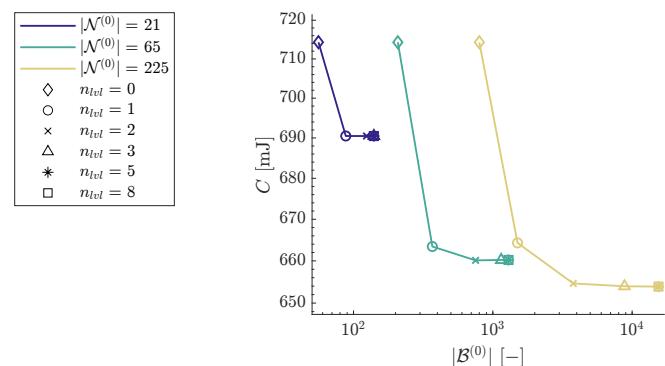
Am Modell des ebenen Kragbalkens wurden außerdem die ebenen Restriktionszonen getestet, die einen Leerraum  $\Omega_{res}$  im inneren des Entwurfsraums  $\Omega$  bilden. Abbildungen 6.15 bis 6.18 zeigen die Experimente mit der rechteckigen Restriktionszone, Abbildungen 6.19 bis 6.22 die mit kreisrunder Restriktionszone. Auch unter der geometrischen Restriktion des Entwurfsgebiets konvergiert das *optimale* Volumen der Modelle unter Verfeinerung und Erhöhung der Konnektivität. Die Konvergenz findet jedoch gegen ein höheres Volumen als das des Kragbalkens ohne Restriktionszone statt. Die *optimalen* Pfade zum Abtragen der Last im geschlossenen Entwurfsraum können hier nicht in derselben Weise ausgebildet werden. Die verminderte Optimalität der Pfade muss durch einen Materialzuwachs ausgeglichen werden, um die Spannungsrestriktion der Stäbe zu erfüllen. Des Weiteren besitzen die Lösungen der geometrisch restringierten Modelle tendenziell weniger Stäbe. Die Einführung einer Öffnung im Entwurfsraum führt also im Falle des ebenen Kragbalkens zu einem elementärmeren Fachwerk mit dickeren Stäben. Rein optisch ist zudem in Abbildungen 6.16 und 6.20 insbesondere bei hoher Knotenzahl und Konnektivität der Grundstruktur recht interessant zu sehen, dass der Algorithmus praktisch zwei kleinere Kragbalken hervorbringt, die durch weitere Stäbe verbunden werden. Zwischen diesen beiden kleineren Kragbalken befindet sich die Restriktionszone.



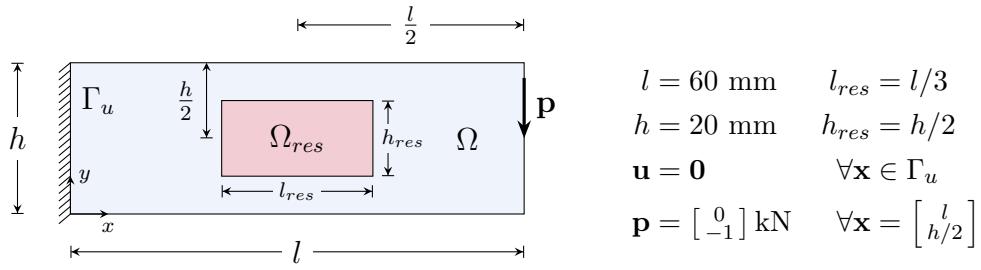
**Abb. 6.12** Die optimierte Struktur des ebenen Kragbalkens bei Variation der Grundstruktur



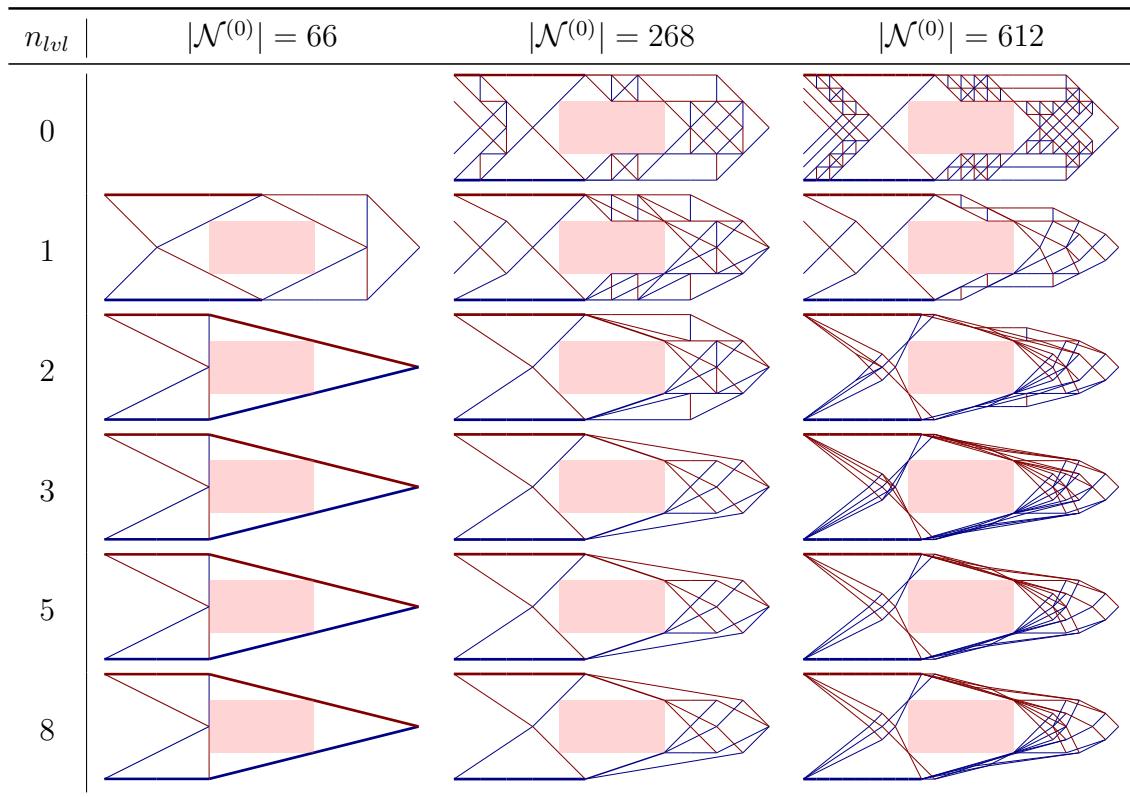
**Abb. 6.13** Volumina der optimierten Lösungen  $V^*$  des ebenen Kragbalkens



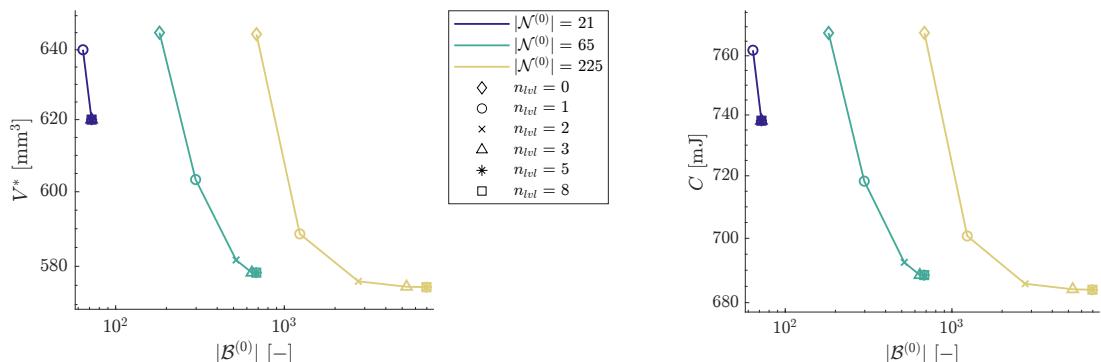
**Abb. 6.14** Globale mittlere Nachgiebigkeit  $C$  der optimierten Lösungen des ebenen Kragbalkens



**Abb. 6.15** Modelldefinition des ebenen Kragbalkens mit rechteckiger Restriktionszone

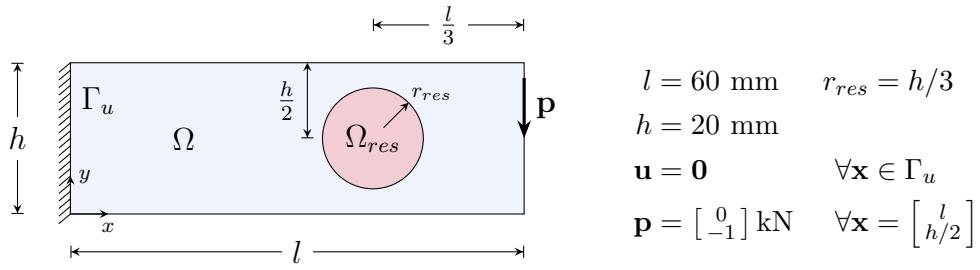


**Abb. 6.16** Die optimierte Struktur des ebenen Kragbalkens mit rechteckiger Restriktionszone bei Variation der Grundstruktur

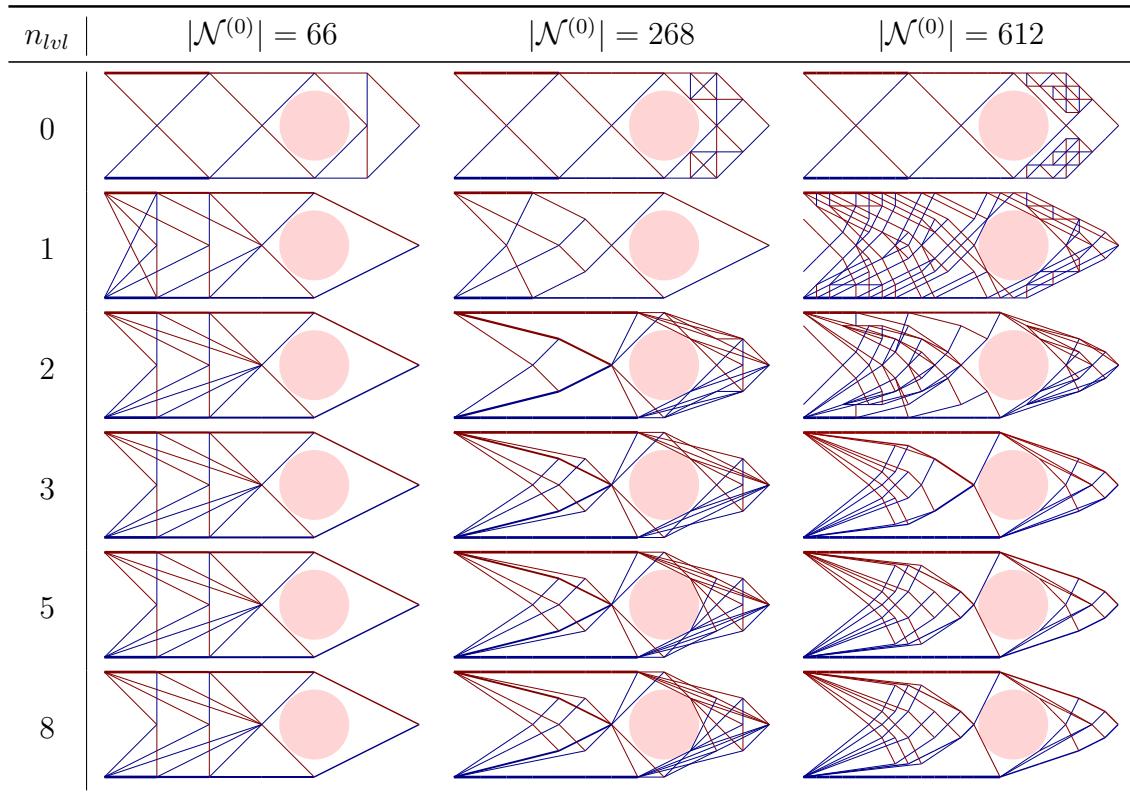


**Abb. 6.17** Volumina der optimierten Lösungen  $V^*$  des ebenen Kragbalkens mit rechteckiger Restriktionszone

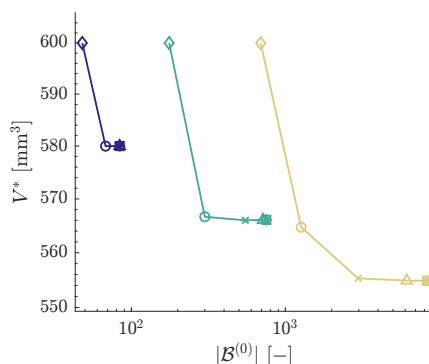
**Abb. 6.18** Globale mittlere Nachgiebigkeit  $C$  der optimierten Lösungen des ebenen Kragbalkens mit rechteckiger Restriktionszone



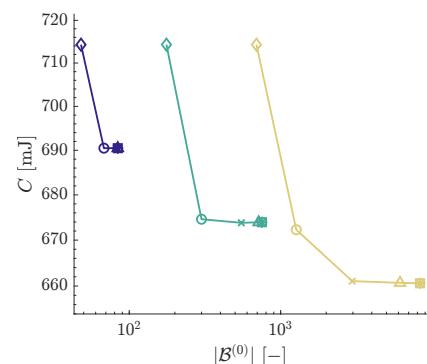
**Abb. 6.19** Modelldefinition des ebenen Kragbalkens mit kreisförmiger Restriktionszone



**Abb. 6.20** Die optimierte Struktur des ebenen Kragbalkens mit kreisförmiger Restriktionszone bei Variation der Grundstruktur

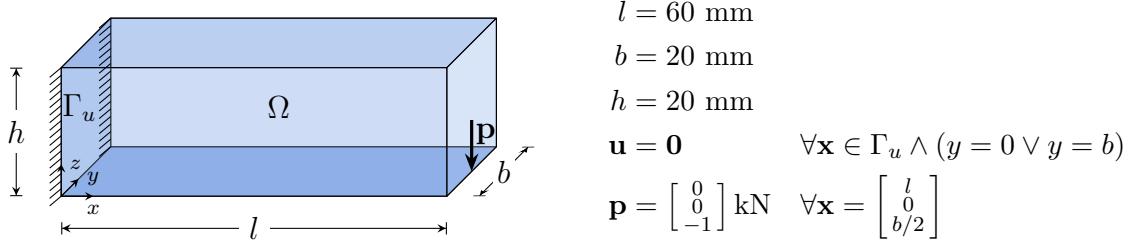


**Abb. 6.21** Volumina der optimierten Lösungen  $V^*$  des ebenen Kragbalkens mit kreisförmiger Restriktionszone



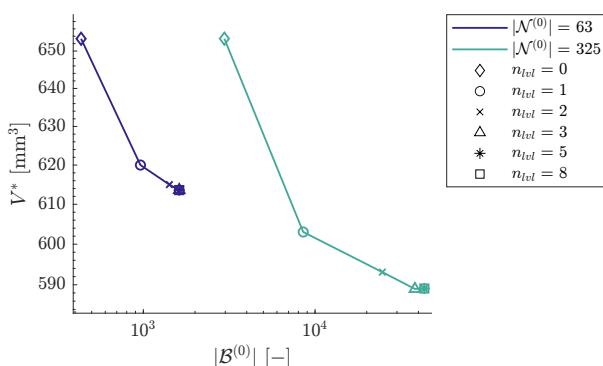
**Abb. 6.22** Mittlere Nachgiebigkeit  $C$  der optimierten Lösungen des ebenen Kragbalkens mit kreisförmiger Restriktionszone

## 6.5 Räumlicher Kragbalken

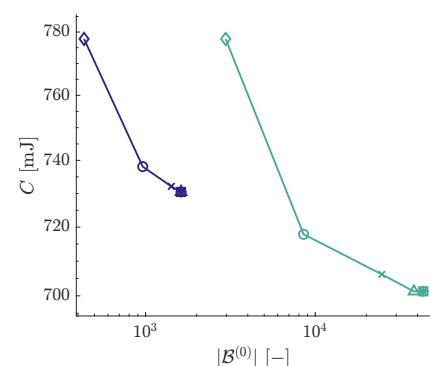


**Abb. 6.23** Modelldefinition des räumlichen Kragbalkens

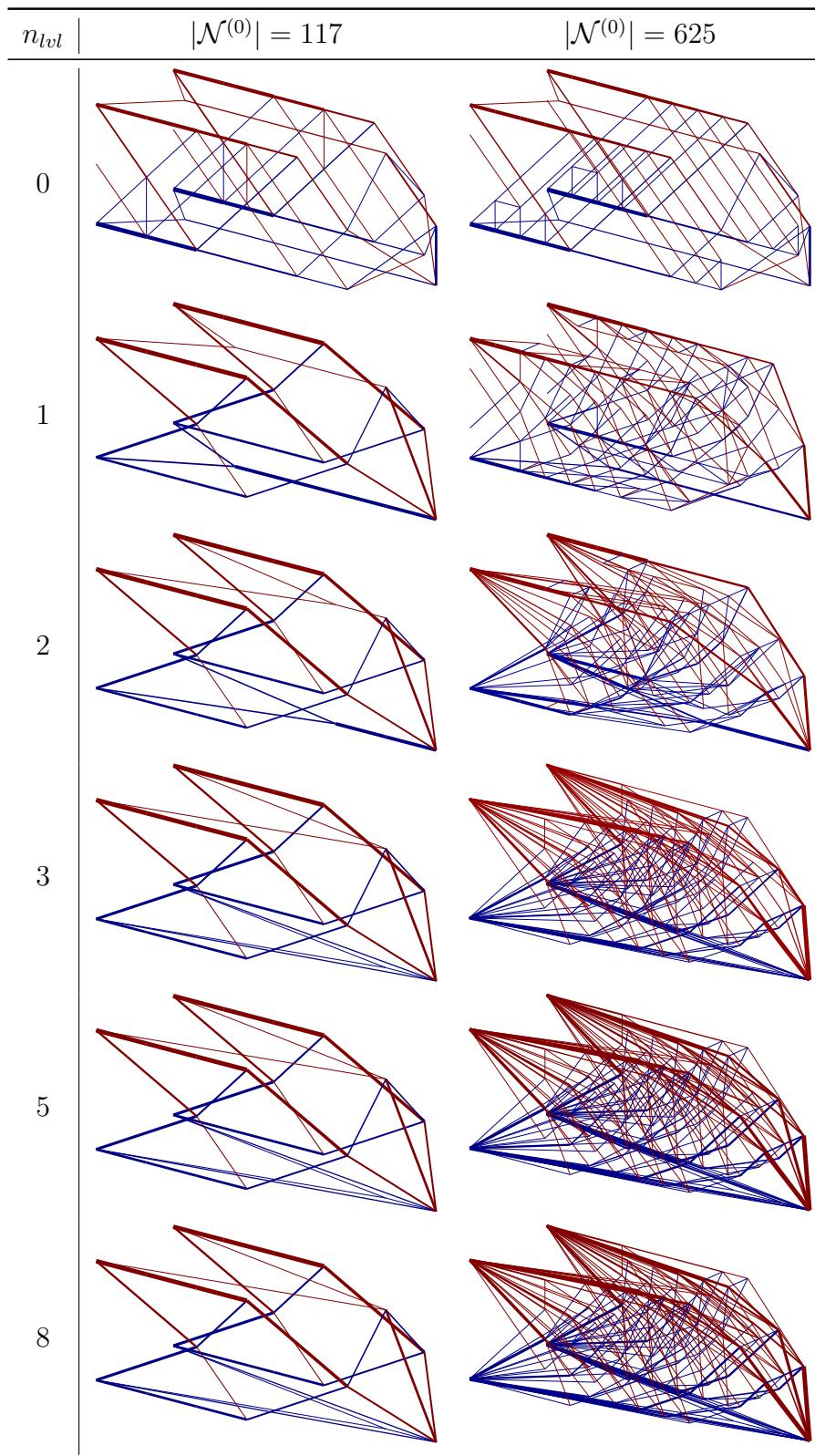
Auch der Kragbalken wurde in einer räumlichen Form modelliert. Die Last wird hier am unteren Rand angelegt, anstatt auf halber Höhe. Durch Einspannung an den Rändern  $y = 0$  und  $y = b$  bei Wirkung der Last in  $y = b/2$  profitiert das Modell von hoher Konnektivität. Abbildung 6.26 zeigt, dass das Fachwerk insbesondere in der horizontalen Ebene bei  $z = 0$  bestrebt ist diagonale Pfade von der Lagerung zur Last zu finden. Diese Erkenntnis führt weiter zur Vermutung, dass das Optimum in Form von zwei ebenen Fachwerken in der Form aus Abbildung 6.12 vorliegen müsste, die jeweils auf der Ebene von der Einspannung zur Last liegen. Nachdem auch ZEGARD & PAULINO [35] dies vermuteten, passten sie die Grundstruktur so an, dass diese Ebenen schon im Basisnetz vorliegen und bestätigten so diese Hypothese.



**Abb. 6.24** Volumina der optimierten Lösungen  $V^*$  des räumlichen Kragbalkens



**Abb. 6.25** Mittlere Nachgiebigkeit  $C$  der optimierten Lösungen des räumlichen Kragbalkens

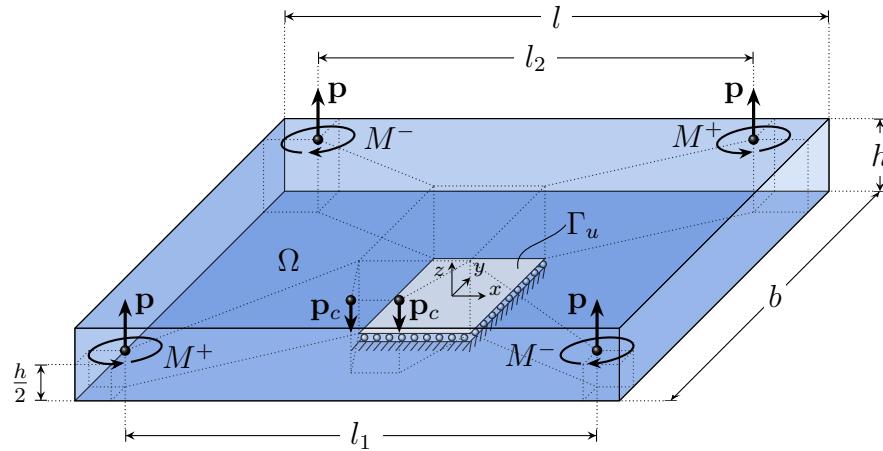
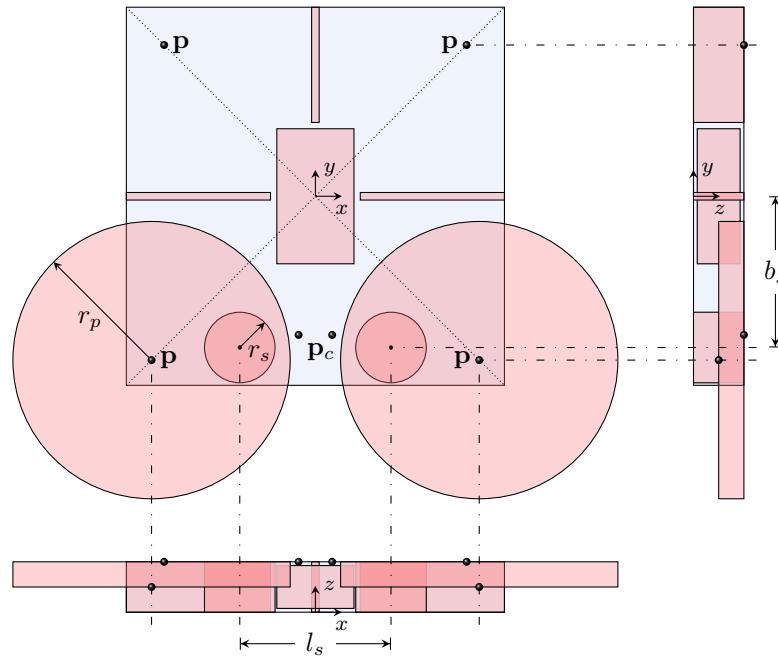


**Abb. 6.26** Die optimierte Struktur des räumlichen Kragbalkens bei Variation der Grundstruktur

## 6.6 Rahmen einer Flugdrohne

Abschließend wurde der Algorithmus auf seine Leistungsfähigkeit bei der Optimierung komplexerer Modelle getestet. Dazu wurde exemplarisch der Rahmen einer Flugdrohne mit vier Rotoren optimiert. Abbildung 6.27 zeigt den statischen Lastfall einer Drohne, die aufwärts ( $z^+$ ) beschleunigt. Die gepunkteten Linien dienen darin zur reinen Orientierung. Die Motoren belasten die Struktur an ihren Montagepunkten mit einem Moment  $M$  entgegen ihrer Laufrichtung. Durch denselben Drehsinn der diagonal gegenüber liegenden Motoren werden die Momente  $M^+ = -M^-$  ausgeglichen, sodass sich die Drohne bei der Aufwärtsbeschleunigung nicht um die  $z$ -Achse dreht. Die Propeller an den Motoren erzeugen jeweils eine Auftriebskraft  $\mathbf{p}$ . Im Zentrum der Drohne, befindet sich der Akku und eine Steuerungseinheit, die während der Beschleunigung durch ihre Trägheit auf die Struktur einwirken. Für den statischen Lastfall werden die Verschiebungen der Montagefläche  $\Gamma_u$  daher in Richtung der  $z$ -Achse blockiert. Das Gewicht der Motoren sei bereits als Punktmasse in ihrer Auftriebskraft berücksichtigt. Zwei zusätzliche Montagepunkte für eine Kamera werden durch ihre Gewichtskraft mit  $\mathbf{p}_c$  im Entwurfsraum definiert.

Abbildung 6.28 zeigt die Positionierung der Restriktionszonen. Die hinteren Rotoren sollen näher aneinander positioniert sein als die vorderen beiden. Außerdem sollen die vorderen beiden Rotoren abgesenkt sein, sodass zylindrische Restriktionszonen mit dem Radius  $r_p$  im Eingriffsbereich der Propeller definiert werden müssen. Da in Algorithmus 5 lediglich der unendlich lange Zylinder implementiert ist, wurde eine Zusatzbedingung für dieses Modell definiert, die betreffende Element nur dann restriktiert, wenn sich das Element nicht vollständig unterhalb von  $z = h/2$  befindet. Zum Verstauen des Akkus und der Steuerungseinheit wird im Zentrum eine quaderförmige Restriktionszone definiert. Zusätzlich werden drei quaderförmige Restriktionszonen in Form von dünnen Platten gesetzt, um die Verbindung der hinteren Motoren untereinander und mit den vorderen Motoren zu verhindern. An der Front wird dieses Gebiet jedoch zur Montage der Kamera benötigt. Hier wurden anstatt dessen zylindrische Restriktionszonen platziert, um flächige Materialansammlungen unter dem Propeller zu vermeiden. Eine Verbindung der vorderen Motoren ist jedoch auf Grund der lokal geringeren Bauhöhe nicht verhindert. Alle Dimensionen und Annahmen sind Vereinfachungen und garantieren keine zweckmäßige Auslegung einer Flugdrohne. Vielmehr dient dieses Modell der Demonstration der implementierten Methoden.

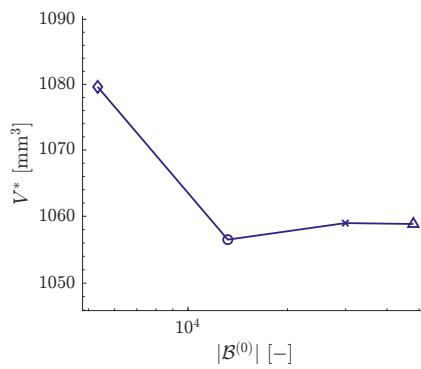
**Abb. 6.27** Modelldefinition des Drohnenrahmens**Abb. 6.28** Restriktionszonen im Entwurfsraum des Drohnenrahmens

$l$	300 mm	$u_z$	$0 \forall \mathbf{x} \in \Gamma_u$
$b$	300 mm	$\Gamma_u$	$ x  = 30 \text{ mm} \wedge  y  = 50 \text{ mm} \wedge z = 0$
$l_1$	280 mm	$ \mathbf{p} $	25 N
$l_2$	240 mm	$ \mathbf{p}_c $	$0.25 \text{ N } \forall y = -110 \text{ mm} \wedge  x  = 10 \text{ mm} \wedge z = h$
$h$	40 mm	$M$	$25\sqrt{2} \text{ N mm}$
$r_p$	120 mm	$l_s$	120 mm
$r_s$	28 mm	$b_s$	120 mm

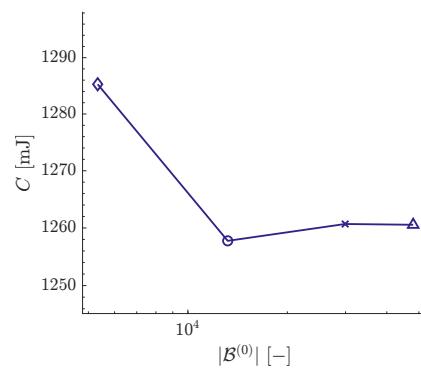
**Tab. 6.2** Modellparameter des Drohnenrahmens

Abbildung 6.29 zeigt die Stagnation des optimierten Volumens ab einem Konnektivitätslevel von 1. Tatsächlich steigt das Volumen bei höherer Konnektivität sogar wieder leicht an. Rein optisch lässt sich das optimierte Modell in Abbildungen 6.31 bis 6.33 durch den Lastfall und die definierten Restriktionszonen als gelungen beurteilen. Die hinteren beiden Motoren werden separat durch armförmige Strukturen mit der Basis verbunden. Auch die vorderen beiden Motoren werden durch zwei Tragarme gestützt, die wiederum zum Teil miteinander verbunden sind. Hierbei scheinen sich die beiden zylindrischen Restriktionszonen bewehrt zu haben, die einen Teil des vorderen Gebiets zur besseren Luftströmung der Propeller freihalten sollen. Mit der Steigerung des Konnektivitätslevels lässt sich erkennen, dass sowohl die oberste als auch die unterste horizontale Ebene in der optimierten Struktur sehr reich mit Elementen gefüllt ist. Konstruktionstechnisch könnte also der Ansatz gewählt werden eine Hybrid-Lösung für den Rahmen anzustreben, in der zwei Platten durch eine Gitterstruktur miteinander verbunden werden.

Das Modell wurde ebenfalls mit einer feineren Grundstruktur aufgesetzt. Der implementierte Algorithmus ist jedoch für diese Art der Komplexität bei einer feineren Knotenverteilung an seine Leistungsgrenze gestoßen. Wie auch schon an anderen Modellen gezeigt, steigt die benötigte Rechenzeit bei einer hohen Anzahl an Stabelementen enorm. Die reine Zeit zur Erzeugung des Drohnenrahmen-Modells mit  $\Delta x = 10 \text{ mm}$  und  $n_{lvl} = 2$  benötigt in etwa 16 Stunden. Daher wurde die Grundstruktur lediglich mit einer festen Anzahl an Knotenpunkten optimiert und gleichzeitig mit diesem realitätsbezogenen Modell gezeigt, welcher Grad an Komplexität realisierbar ist und wann die Effizienz des Algorithmus nicht ausreicht, um das Modell in zumutbarer Rechenzeit zu optimieren.



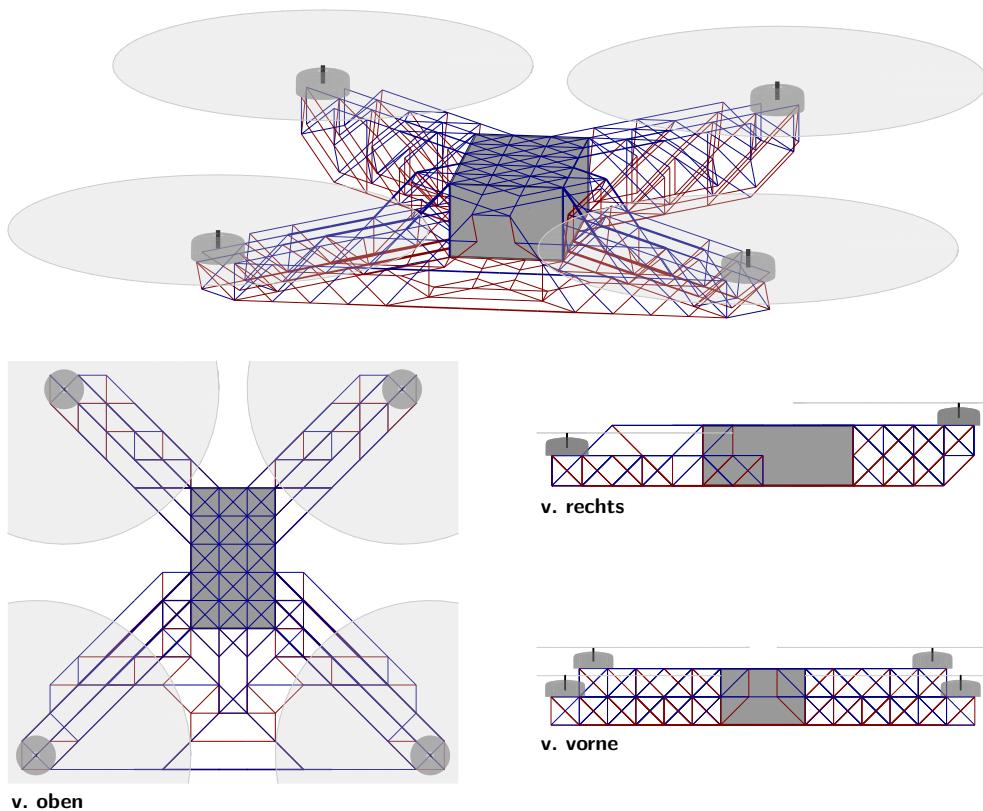
**Abb. 6.29** Volumina der optimierten Lösungen  $V^*$  des Drohnenrahmens



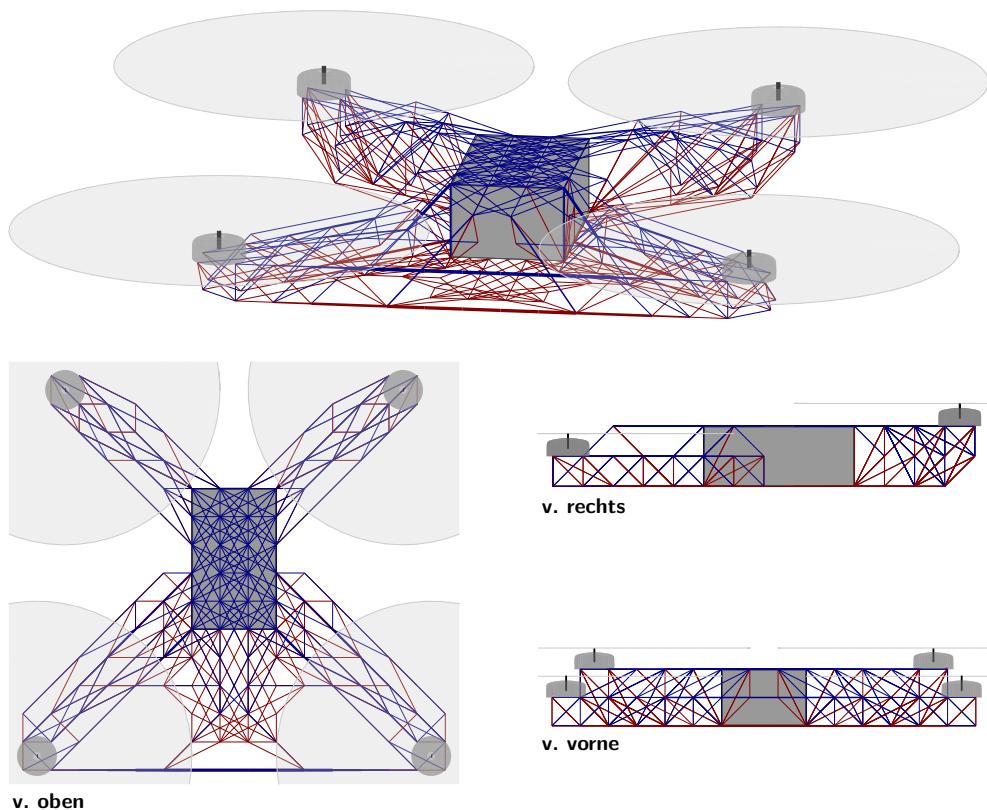
**Abb. 6.30** Mittlere Nachgiebigkeit  $C$  der optimierten Lösungen des Drohnenrahmens

$ \mathcal{N}^{(0)} $	$n_{lvl}$	$\Delta x$	$k^*$	$t^*$	$ \mathcal{B}^{(0)} $	$ \mathcal{B}_{phys}^* $	$V^*$
[-]	[-]	[mm]	[-]	[h:m:s]	[-]	[-]	[mm <sup>3</sup> ]
768	0	20.0	55	00:01:59	5333	681	1079.6156
768	1	20.0	446	00:35:39	13199	801	1056.4936
768	2	20.0	459	02:50:20	29927	1224	1058.9762
768	3	20.0	336	10:05:05	48069	1335	1058.8428

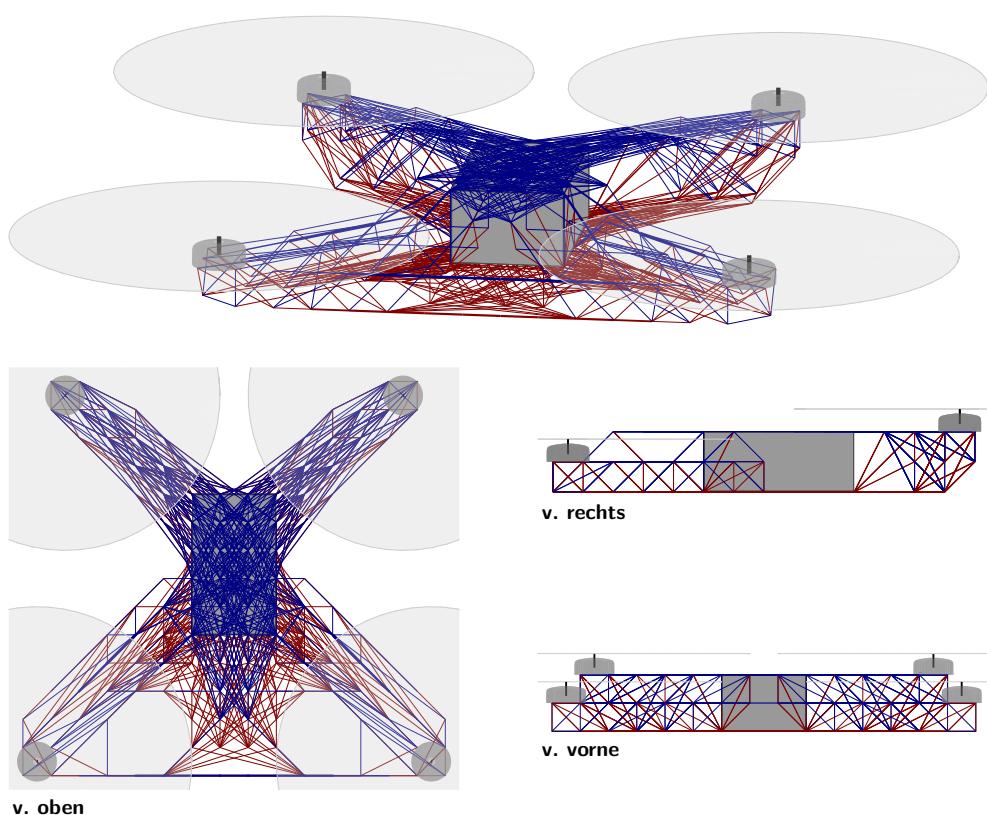
**Tab. 6.3** Optimierungsergebnisse des Drohnenrahmens



**Abb. 6.31** Die optimierte Struktur des Drohnenrahmens bei  $\Delta x = 20$  mm und  $n_{lvl} = 0$



**Abb. 6.32** Die optimierte Struktur des Drohnenrahmens bei  $\Delta x = 20 \text{ mm}$  und  $n_{lvl} = 1$



**Abb. 6.33** Die optimierte Struktur des Drohnenrahmens bei  $\Delta x = 20 \text{ mm}$  und  $n_{lvl} = 2$

# KAPITEL 7

## Fazit und Ausblick

Ziel dieser Thesis war es „[...] Leichtbaukomponenten aus topologieoptimierten Gitterstrukturen zu entwerfen, die das herkömmliche Design solider Tragstrukturen ersetzen, mit reduziertem Materialeinsatz bei Erhalt analoger elastischer Eigenschaften.“. Dazu sollten zunächst „[...] leistungsfähige Verfahren zur Topologieoptimierung von ebenen und räumlichen Gitterstrukturen identifiziert und bewertet werden.“. Dies geschah in Form der Literaturrecherche zur Strukturoptimierung mit dem Fokus auf der Topologieoptimierung von Stabtragwerken. Dabei wurden die Grundlagen erläutert und schließlich ein Verfahren identifiziert, dass durch Einfachheit und die Spezialisierung auf Fachwerke besticht. Das Verfahren nach dem Optimalitätskriterium des voll beanspruchten Tragwerks ist im Kern die Umsetzung einer evidenten Schlussfolgerung, die sich mathematisch bewiesen und in der Natur wiederfinden lässt. Bei einem vorhandenen FEM-Framework lässt sich ein Algorithmus dieser Art mit überschaubarem Aufwand implementieren.

Die Modellbildung der zu optimierenden Struktur umfasste zum größten Teil die Diskretisierung eines ebenen oder räumlichen Gebiets in ein Fachwerk aus finiten Stabelementen: „Der zu untersuchende Designraum wird dabei mit unterschiedlichen Gitterstrukturen (regelmäßige Gitter oder Zellstrukturen) vorkonfiguriert.“ Diese Vorkonfiguration wurde durch die Grundstrukturmethode realisiert, um ein möglichst divers gefülltes aber gleichzeitig steuerbares Ausgangsmodell zu bieten,

---

das aus einem regelmäßigen Gitter aber auch aus beliebig generierten Netzdaten erzeugt werden kann.

Die „*Mögliche Erweiterungsoption: Öffnungen im Design der Leichtbaukomponenten können einem fictitious-domain-Ansatz folgend durch Penalisierung von Kräften und Spannungen in im Öffnungsbereich berücksichtigt werden.*“ wurde in Kombination mit der Kollisionsdetektion zur Definition von Restriktionszonen im Entwurfsraum umgesetzt. Der *fictitious-domain*-Ansatz wurde zusätzlich zur Gewährleistung der statischen Bestimmtheit bei der Eliminierung unbeanspruchter Elemente genutzt. Hierfür wurde ein Grundlagenkurs zu Stabtragwerken in der FEM eingeschoben und das Prinzip eines fiktiven Lösungsgebiets anhand eines Beispiels veranschaulicht.

Der implementierte Algorithmus zur Topologieoptimierung wurde durch Benchmark-Probleme aus der Entwurfstheorie nach MICHELL verifiziert. Dies hat gezeigt, dass das Volumen der optimierten Strukturen mit Verfeinerung des Basisnetzes und Erhöhung der Knotenkonnectivität gegen das Volumen an Material konvergiert, das nach MICHELL mindestens notwendig ist, um der Belastung stand zu halten. Neben dem Volumen des optimierten Fachwerks wurde zudem ein Augenmerk auf die Strukturiertheit der Stabelemente gelegt. Es konnte erkannt werden, dass gröbere Grundstrukturkonfigurationen in klarer strukturierten Fachwerken resultieren, während ihr Volumen gegenüber dem der feineren Konfigurationen weniger optimal ist. Es ist offensichtlich, dass die größeren Strukturen eine deutlich einfachere Fertigbarkeit aufweisen. Daher kann bei der Entwurfsentscheidung reeller ingenieurgemäßer Konstruktionen die Wirtschaftlichkeit möglichst simpler, elementarmer Strukturen der hoch optimierten, feinen Strukturen überwiegen. Es ist also abzuwägen, wie viel Material durch die feinere Knotenverteilung eingespart werden kann und welche Komplexität der Struktur und zusätzlicher Rechenaufwand dafür in Kauf genommen werden muss. Über die Parameter der Elementfilterung können die Strukturiertheit und die Effizienz des Algorithmus in einem limitierten Rahmen gesteuert werden. Neben der Fertigung solcher Strukturen als reelle Fachwerke, können insbesondere Strukturen sehr feiner Elementverteilung aber auch als Anhaltspunkt für die Auslegung von kontinuierlichen, soliden Leichtbauteilen dienen oder gar per additiver Fertigung realisiert werden. Dabei ist zu beachten, dass die Elemente in diesen Fällen nicht nur axial beansprucht werden, da sie nicht länger durch Gelenke, sondern fest miteinander verbunden sind.

Der implementierte Topologieoptimierungsalgorithmus stößt bei Modellen hoher Dimension und insbesondere bei räumlichen Modellen an die Grenze der zumutbaren Rechenzeit. Es existieren diverse Potentiale in der Programmierung und Kopplung des Algorithmus an das FEM-Framework, die ausgeschöpft werden sollten, um die Effizienz zu erhöhen. Ebenfalls könnten Methoden implementiert werden, um Substäbe eines längeren Stabes oder Elemente innerhalb eines lokalen Gebiets zu-

sammenzuführen, wenn ihre Orientierung ähnlich ist. Die Literatur und besonders recht junge Artikel liefern außerdem noch viel Inspiration, um diese Arbeit fortzuführen.

Alternativ zu dem Ansatz möglichst viele fein verteilte Elemente zur Verfügung zu haben, um daraus die optimalen Stäbe zu konturieren, kann auch die Lösung aus einer größeren Grundstruktur weiter optimiert werden. Dazu kann nach Topologieoptimierung eine Formoptimierung vorgenommen werden, die die Position der Knotenpunkte so wählt, dass die sich daran befindenden Elemente die optimal abtragenden Pfade bilden. Wie HE et al. [13] in ihrem Artikel beschreiben, können so besonders für das Bauingenieurwesen relevantere Strukturen entworfen werden, wenn gleichzeitig die Anzahl an Knotenpunkten oder Elementen mit als Variable in die Zielfunktion aufgenommen wird, sodass auch hinsichtlich gewünschter Komplexitätskriterien optimiert werden kann. Sie verwenden dort Rahmenelemente – Stäbe die neben Normalkräften auch Querkräfte und Momente abtragen können. Auch das wäre ein spannender Erweiterungsansatz dieser Arbeit.

Neben der reinen Formoptimierung des topologieoptimierten Fachwerks könnte auch mit einer Kombination aus beiden Optimierungsarten weiter verfahren werden. So wie MARTINEZ [18] es für ebene Fachwerke mit einer Punktlast tut oder JIANG et al. [15] zusätzlich für komplexere räumliche Modelle. Dabei fußen die Methoden auf dem Entwurfsprinzip nach MICHELL, sodass durch gleichzeitige Verschiebung der Knotenpunkte und lokale topologische Operationen die Stabelemente forcierter werden, sich im rechten Winkel kreuzen.

Von der anderen Seite aufgerollt könnte die Grundstruktur, die in den implementierten Optimierungsalgorithmus gegeben wird auf eine andere Art erzeugt werden. Durch eine FEA eines kontinuierlichen Flächen- oder Volumenmodells kann ein Spannungsfeld des gesamten Lösungsgebiets erhalten werden, dessen Isolinien die Pfade vorgeben auf denen die Stäbe platziert werden. ARORA et al. [3] nutzen dieses Prinzip, um solide Bauteile durch nichtlineare Rahmenwerke zu ersetzen, die neben der Materialeinsparung zusätzlich eine ganz eigene Ästhetik mit sich bringen, die beispielsweise für das Design architektonischer Bauwerke interessant sein dürfte.

---

# Literaturverzeichnis

---

- [1] ABADIE, J. : Generalization of the Wolfe reduced gradient method to the case of nonlinear constraints. In: *Optimization* (1969), S. 37–47
- [2] ALLAIRE, G. ; CAVALLINA, L. ; MIYAKE, N. ; OKA, T. ; YACHIMURA, T. : The homogenization method for topology optimization of structures: old and new. (2019), 01
- [3] ARORA, R. ; JACOBSON, A. ; LANGLOIS, T. R. ; HUANG, Y. ; MUELLER, C. ; MATUSIK, W. ; SHAMIR, A. ; SINGH, K. ; LEVIN, D. I.: Volumetric Michell trusses for parametric design & fabrication. In: *Proceedings of the ACM Symposium on Computational Fabrication*, 2019, S. 1–13
- [4] BAIER, H. ; SEESSELBERG, C. ; SPECHT, B. : *Optimierung in der Strukturmechanik*. Springer-Verlag, 1994
- [5] BAKER, W. ; BEGHINI, L. ; MAZUREK, A. ; CARRION, J. ; BEGHINI, A. : Maxwell's reciprocal diagrams and discrete Michell frames. In: *Structural and Multidisciplinary Optimization* 48 (2013), 08. <http://dx.doi.org/10.1007/s00158-013-0910-0> – DOI 10.1007/s00158-013-0910-0
- [6] BAUMGARTNER, A. ; HARZHEIM, L. ; MATTHECK, C. : SKO (soft kill option): the biological way to find an optimum structure topology. In: *International Journal of Fatigue* 14 (1992), Nr. 6, S. 387–393
- [7] BENDSOE, M. P. ; SIGMUND, O. : *Topology optimization: theory, methods, and applications*. Springer Science & Business Media, 2003
- [8] BRONSTEIN, I. N. ; SEMENDJAJEW, K. ; MUSIOL, G. ; MÜHLIG, H. : *Taschenbuch der Mathematik*. 7., vollständig überarbeitete und ergänzte Auflage. 2008
- [9] ERICSON, C. : *Real-time collision detection*. Crc Press, 2004

- [10] FLEURY, C. ; BRAIBANT, V. : Structural optimization: a new dual method using mixed variables. In: *International journal for numerical methods in engineering* 23 (1986), Nr. 3, S. 409–428
- [11] GROSS, D. ; HAUGER, W. ; SCHRÖDER, J. ; WALL, W. A.: *Technische Mechanik 1: Statik*. Springer-Verlag, 2019
- [12] HARZHEIM, L. : *Strukturoptimierung: Grundlagen und Anwendungen*. 3., überarbeitete und erweiterte Auflage. Haan-Gruiten : Verlag Europa-Lehrmittel, 2019. – ISBN 978-3-8085-5882-9
- [13] HE, L. ; GILBERT, M. ; SHEPHERD, P. ; YE, J. ; KORONAKI, A. ; FAIRCLOUGH, H. E. ; DAVISON, B. ; TYAS, A. ; GONDZIO, J. ; WELDEYESUS, A. G.: A new conceptual design optimization tool for frame structures. In: *Proceedings of IASS Annual Symposia* Bd. 2018 International Association for Shell and Spatial Structures (IASS), 2018, S. 1–8
- [14] IMAI, K. ; SCHMIT JR, L. A.: Configuration optimization of trusses. In: *Journal of the Structural Division* 107 (1981), Nr. 5, S. 745–756
- [15] JIANG, L. ; GU, X. ; GU ; CHEN, S. : Generative Design of Bionic Structures Via Concurrent Multiscale Topology Optimization and Conformal Geometry Method. In: *Journal of Mechanical Design* 143 (2020), 06. <http://dx.doi.org/10.1115/1.4047345>. – DOI 10.1115/1.4047345
- [16] KIRSCH, U. : On the relationship between optimum structural topologies and geometries. In: *Structural optimization* 2 (1990), Nr. 1, S. 39–45
- [17] LARSEN, S. ; SIGMUND, O. ; GROEN, J. : Optimal truss and frame design from projected homogenization-based topology optimization. In: *Structural and Multidisciplinary Optimization* 57 (2018), Nr. 4, S. 1461–1474
- [18] MARTINEZ, P. ; MARTI, P. ; QUERIN, O. : Growth method for size, topology, and geometry optimization of truss structures. In: *Structural and Multidisciplinary Optimization* 33 (2007), Nr. 1, S. 13–26
- [19] MATTHECK, C. : Design and growth rules for biological structures and their application to engineering. In: *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures* 13 (1990), Nr. 5, S. 535–550
- [20] MATTHECK, C. : *Design in der Natur: der Baum als Lehrmeister*. 4., überarb. und erw. Neuaufl. Freiburg i. Br. [u.a.] : Rombach, 2006
- [21] MAXWELL, J. C.: XLV. On reciprocal figures and diagrams of forces. In: *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 27 (1864), Nr. 182, S. 250–261
- [22] MERKEL, M. ; ÖCHSNER, A. : *Eindimensionale Finite Elemente*. Springer, 2010
- [23] MICHELL, A. G. M.: LVIII. The limits of economy of material in frame-structures. In: *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 8 (1904), Nr. 47, S. 589–597

- [24] PRAGER, W. : A note on discretized michell structures. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 3 (1974), Nr. 3, S. 349–355. [http://dx.doi.org/https://doi.org/10.1016/0045-7825\(74\)90019-X](http://dx.doi.org/https://doi.org/10.1016/0045-7825(74)90019-X). – DOI [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(74\)90019-X](https://doi.org/10.1016/0045-7825(74)90019-X)
- [25] SCHILLINGER, D. ; RUESS, M. : The Finite Cell Method: A review in the context of higher-order structural analysis of CAD and image-based geometric models. In: *Archives of Computational Methods in Engineering* 22 (2015), Nr. 3, S. 391–455
- [26] SCHUMACHER, A. : *Optimierung mechanischer Strukturen: Grundlagen und industrielle Anwendungen*. Springer-Verlag, 2013
- [27] SIGMUND, O. : A 99 Line Topology Optimization Code Written in MATLAB. Structural and Multidisciplinary Optimization 21, 120-127. In: *Structural and Multidisciplinary Optimization* 21 (2001), 04, S. 120–127. <http://dx.doi.org/10.1007/s001580050176>. – DOI 10.1007/s001580050176
- [28] SVANBERG, K. : The method of moving asymptotes—a new method for structural optimization. In: *International journal for numerical methods in engineering* 24 (1987), Nr. 2, S. 359–373
- [29] VANDERPLAATS, G. N.: *Numerical optimization techniques for engineering design: with applications*. Bd. 1. McGraw-Hill New York, 1984
- [30] WERKLE, H. : *Finite Elemente in der Baustatik: Statik und Dynamik der Stab- und Flächentragwerke*. Springer-Verlag, 2008
- [31] WOLFE, P. : Methods of nonlinear programming. In: *Nonlinear programming* (1967)
- [32] WOO, T. H.: Space frame optimization to frequency constraints. In: *AJAA—27th Structures, Structural dynamic and Materials Conference*, 1986, S. 103–112
- [33] XU, G. ; DAI, N. : Michell truss design for lightweight gear bodies. In: *Math. Biosci. Eng* 18 (2021), S. 1653–1669
- [34] ZEGARD, T. ; PAULINO, G. H.: GRAND—Ground structure based topology optimization for arbitrary 2D domains using MATLAB. In: *Structural and Multidisciplinary Optimization* 50 (2014), Nr. 5, S. 861–882
- [35] ZEGARD, T. ; PAULINO, G. H.: GRAND3—Ground structure based topology optimization for arbitrary 3D domains using MATLAB. In: *Structural and Multidisciplinary Optimization* 52 (2015), Nr. 6, S. 1161–1184
- [36] ZOUTENDIJK, G. : *Methods of feasible directions: a study in linear and non-linear programming*. Elsevier, 1960

# ANHANG

---

## Experimente

---

$ \mathcal{N}^{(0)} $	$n_{lvl}$	$\Delta r$	$\Delta\varphi$	$k^*$	$t^*$	$ \mathcal{B}^{(0)} $	$ \mathcal{B}_{phys}^* $	$V^*$	$e$
[-]	[-]	[mm]	[rad]	[-]	[h:m:s]	[-]	[-]	[mm <sup>3</sup> ]	[-]
120	0	5.00	$2\pi/15$	8	00:00:01	420	210	410.1649	23.28%
120	1	5.00	$2\pi/15$	71	00:00:03	914	150	372.3202	11.91%
120	2	5.00	$2\pi/15$	69	00:00:07	2451	120	356.5750	7.17%
120	3	5.00	$2\pi/15$	69	00:00:19	4042	120	356.5750	7.17%
480	0	2.50	$2\pi/30$	8	00:00:01	1680	840	403.7742	21.36%
480	1	2.50	$2\pi/30$	194	00:01:21	4088	600	351.6678	5.70%
480	2	2.50	$2\pi/30$	191	00:05:46	11657	540	342.0040	2.79%
480	3	2.50	$2\pi/30$	200	00:32:34	35025	540	342.0040	2.79%
1080	0	1.67	$2\pi/45$	8	00:00:11	3780	1890	402.6110	21.01%
1080	1	1.67	$2\pi/45$	419	00:18:50	8459	1350	347.3971	4.41%
1080	3	1.67	$2\pi/45$	426	09:12:45	89545	1170	339.0443	1.90%
1920	0	1.25	$2\pi/60$	8	00:00:54	6780	3360	402.2054	20.89%
1920	1	1.25	$2\pi/60$	715	02:30:46	15046	2280	345.4419	3.83%
1920	2	1.25	$2\pi/60$	993	08:41:51	47501	1680	336.4080	1.11%

**Tab. A.1** Optimierungsergebnisse der Torsionsscheibe

$ \mathcal{N}^{(0)} $	$n_{lvl}$	$\Delta x$	$k^*$	$t^*$	$ \mathcal{B}^{(0)} $	$ \mathcal{B}_{phys}^* $	$V^*$
[-]	[-]	[mm]	[-]	[h:m:s]	[-]	[-]	[mm <sup>3</sup> ]
21	0	10.0	33	00:00:01	56	16	300.0000
21	1	10.0	60	00:00:01	88	17	298.3333
21	2	10.0	133	00:00:01	124	19	298.3333
21	3	10.0	131	00:00:01	140	19	298.3333
21	5	10.0	131	00:00:01	140	19	298.3333
21	8	10.0	131	00:00:01	140	19	298.3333
65	0	5.0	35	00:00:01	208	32	300.0000
65	1	5.0	64	00:00:01	368	95	290.6852
65	2	5.0	78	00:00:01	752	83	287.9070
65	3	5.0	161	00:00:06	1148	68	287.5878
65	5	5.0	243	00:00:10	1296	68	287.4243
65	8	5.0	243	00:00:11	1296	68	287.4243
225	0	2.5	47	00:00:02	800	64	300.0000
225	1	2.5	45	00:00:02	1504	375	289.4328
225	2	2.5	72	00:00:17	3776	463	285.7094
225	3	2.5	109	00:01:25	8808	417	285.4962
225	5	2.5	130	00:04:46	15460	236	285.5445
225	8	2.5	130	00:04:51	15460	236	285.5445

**Tab. A.2** Optimierungsergebnisse des MBB-Balkens

$ \mathcal{N}^{(0)} $	$n_{lvl}$	$\Delta x$	$k^*$	$t^*$	$ \mathcal{B}^{(0)} $	$ \mathcal{B}_{phys}^* $	$V^*$
[-]	[-]	[mm]	[-]	[h:m:s]	[-]	[-]	[mm <sup>3</sup> ]
117	0	10.0	35	00:00:02	848	90	606.6667
117	1	10.0	119	00:00:09	1952	116	602.2222
117	2	10.0	135	00:00:15	3176	126	601.1105
117	3	10.0	235	00:00:40	4856	132	601.9487
117	5	10.0	321	00:01:07	5512	150	603.9834
117	8	10.0	321	00:01:13	5512	150	603.9834
625	1	5.0	52	00:03:21	17184	894	587.4910
625	3	5.0	197	01:48:21	90184	722	580.8239
625	5	5.0	461	10:38:57	159712	760	581.5160
625	8	5.0	461	12:53:10	159712	760	581.5160

**Tab. A.3** Optimierungsergebnisse des räumlichen MBB-Balkens

$ \mathcal{N}^{(0)} $ [-]	$n_{lvl}$ [-]	$\Delta x$ [mm]	$k^*$ [-]	$t^*$ [h:m:s]	$ \mathcal{B}^{(0)} $ [-]	$ \mathcal{B}_{phys}^* $ [-]	$V^*$ [mm <sup>3</sup> ]
21	0	10.0	19	00:00:01	56	38	599.9825
21	1	10.0	23	00:00:01	88	40	579.9914
21	2	10.0	39	00:00:01	124	40	580.0000
21	3	10.0	41	00:00:01	140	40	580.0000
21	5	10.0	41	00:00:01	140	40	580.0000
21	8	10.0	41	00:00:01	140	40	580.0000
65	0	5.0	25	00:00:01	208	120	600.0000
65	1	5.0	51	00:00:01	368	58	557.2839
65	2	5.0	167	00:00:03	752	56	554.5000
65	3	5.0	221	00:00:05	1148	64	554.5833
65	5	5.0	220	00:00:07	1296	64	554.5833
65	8	5.0	220	00:00:08	1296	64	554.5833
225	0	2.5	42	00:00:01	800	428	599.9991
225	1	2.5	64	00:00:03	1504	364	557.9711
225	2	2.5	94	00:00:16	3776	364	549.8962
225	3	2.5	196	00:01:54	8808	218	549.3300
225	5	2.5	424	00:09:24	15460	158	549.2634
225	8	2.5	424	00:10:33	15460	158	549.2634

**Tab. A.4** Optimierungsergebnisse des ebenen Kragbalkens

$ \mathcal{N}^{(0)} $ [-]	$n_{lvl}$ [-]	$\Delta x$ [mm]	$k^*$ [-]	$t^*$ [h:m:s]	$ \mathcal{B}^{(0)} $ [-]	$ \mathcal{B}_{phys}^* $ [-]	$V^*$ [mm <sup>3</sup> ]
21	1	10.0	19	00:00:01	64	20	640.0000
21	2	10.0	61	00:00:01	72	10	620.0000
21	3	10.0	61	00:00:01	72	10	620.0000
21	5	10.0	61	00:00:01	72	10	620.0000
21	8	10.0	61	00:00:01	72	10	620.0000
65	0	5.0	22	00:00:01	182	84	645.0000
65	1	5.0	46	00:00:01	298	72	603.3328
65	2	5.0	61	00:00:01	518	52	581.6667
65	3	5.0	106	00:00:03	642	36	578.3333
65	5	5.0	114	00:00:04	682	36	578.3333
65	8	5.0	114	00:00:04	682	36	578.3333
225	0	2.5	32	00:00:01	684	260	644.5488
225	1	2.5	107	00:00:07	1236	116	588.6111
225	2	2.5	193	00:00:07	2748	124	576.0495
225	3	2.5	198	00:02:10	5304	126	574.6484
225	5	2.5	313	00:08:18	6964	110	574.5291
225	8	2.5	313	00:09:24	6964	110	574.5291

**Tab. A.5** Optimierungsergebnisse des ebenen Kragbalkens mit rechteckiger Restriktionszone

$ \mathcal{N}^{(0)} $	$n_{lvl}$	$\Delta x$	$k^*$	$t^*$	$ \mathcal{B}^{(0)} $	$ \mathcal{B}_{phys}^* $	$V^*$
[-]	[-]	[mm]	[-]	[h:m:s]	[-]	[-]	[mm $^3$ ]
21	0	10.0	26	00:00:01	48	24	600.0000
21	1	10.0	30	00:00:01	68	26	579.9913
21	2	10.0	38	00:00:01	82	26	580.0000
21	3	10.0	31	00:00:01	84	26	580.0000
21	5	10.0	31	00:00:01	84	26	580.0000
21	8	10.0	31	00:00:01	84	26	580.0000
65	0	5.0	35	00:00:01	176	60	599.9894
65	1	5.0	52	00:00:01	300	40	566.6667
65	2	5.0	158	00:00:04	550	58	566.0000
65	3	5.0	490	00:00:20	716	64	566.0912
65	5	5.0	463	00:00:21	752	68	566.0901
65	8	5.0	463	00:00:23	752	68	566.0901
225	0	2.5	59	00:00:02	692	138	599.9603
225	1	2.5	39	00:00:02	1268	246	564.7195
225	2	2.5	96	00:00:25	2968	166	555.2927
225	3	2.5	357	00:04:14	6148	92	554.6476
225	5	2.5	486	00:16:04	8322	112	554.8668
225	8	2.5	486	00:19:40	8322	112	554.8668

**Tab. A.6** Optimierungsergebnisse des ebenen Kragbalkens mit kreisförmiger Restriktionszone

$ \mathcal{N}^{(0)} $	$n_{lvl}$	$\Delta x$	$k^*$	$t^*$	$ \mathcal{B}^{(0)} $	$ \mathcal{B}_{phys}^* $	$V^*$
[-]	[-]	[mm]	[-]	[h:m:s]	[-]	[-]	[mm $^3$ ]
63	0	10.0	72	00:00:01	434	75	653.3138
63	1	10.0	76	00:00:02	962	40	620.0000
63	2	10.0	130	00:00:08	1418	36	615.0000
63	3	10.0	229	00:00:14	1618	36	613.6012
63	5	10.0	229	00:00:17	1618	36	613.6012
63	8	10.0	229	00:00:18	1618	36	613.6012
325	0	5.0	84	00:00:23	2964	184	653.3333
325	1	5.0	64	00:01:01	8532	252	603.0391
325	2	5.0	216	00:21:55	24660	236	593.0925
325	3	5.0	282	00:55:16	38140	307	588.9785
325	5	5.0	256	00:52:40	43284	315	589.0919
325	8	5.0	256	01:02:25	43284	315	589.0919

**Tab. A.7** Optimierungsergebnisse des räumlichen Kragbalkens

## **Eidesstattliche Erklärung**

Hiermit versichere ich, Oliver Wege, an Eides statt, die vorliegende Bachelor Thesis selbstständig verfasst und keine weiteren als die angegebenen Hilfsmittel und Quellen benutzt zu haben.

Dies ist die von der Hochschule Düsseldorf zu bewertende Version.

.....

Ort, Datum

.....

Unterschrift