Тема «Разработка приложения анализа свободных затухающих колебаний линейного осциллятора»

Колебания системы называются свободными, если скорость изменения состояния системы определяется только состоянием самой системы, а именно восстанавливающей равновесное состояние силой, зависящей от величины обобщенной координаты , которая определяет отклонение системы из этого состояния. Такая система называется линейным осциллятором. Расчетная схема линейного осциллятора приведена на рисунке 1.

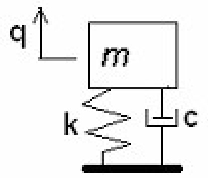

Рисунок 1 - Расчетная схема линейного осцилятора

Уравнение колебаний линейного осциллятора с затуханием имеет вид

$$m\ddot{q}(t) + c\dot{q}(t) + kq(t) = 0.$$
$$q_{t=t_0} = q_0,\ \dot{q}_{t=t_0} = \dot{q}_0,$$
$$t_0 \le t \le t_k,$$
$$q_{t=t_0} = q_0,\ \dot{q}_{t=t_0} = \dot{q}_0,$$
$$t_0 \le t \le t_k. \qquad (1)$$

Введя обозначения $\omega^2 = \dfrac{k}{m},\quad 2n = \dfrac{c}{m}$ запишем уравнение (1) в виде

$$\ddot{q}(t) + 2n\dot{q}(t) + \omega^2 q(t) = 0. \qquad (2)$$

Решение уравнения (2) будет иметь различную форму в зависимости от соотношений n и ω.

Первый случай: $n < \omega$ (случай «малого» сопротивления).

Решение уравнения (2) представляется в виде

$$q(t) = Ae^{-nt}\sin(\omega_1 t + \beta), \qquad (3)$$

где $\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - n^2}$, $A = \sqrt{q_0^2 + \dfrac{\dot{q}_0^2}{\omega^2}},\quad \beta = arctg\dfrac{\omega q_0}{\dot{q}_0}$.

A - амплитуда, β - начальная фаза, $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ - круговая частота свободных колебаний.

$T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ - период свободных колебаний системы без затухания ($n = 0$).

$T_1 = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - n^2}} = \dfrac{T}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{n}{\omega}\right)^2}}$ - период свободных колебаний системы с затуханием.

$\psi = \dfrac{Ae^{-nt}}{Ae^{-n(t+T_1)}} = e^{nT_1}$ - коэффициент затухания – характеристика быстроты убывания амплитуд. Более подходящим для характеристики затухания является натуральный логарифм коэффициента затухания ψ, так называемый логарифмический декремент колебаний

$$\delta = \ln\psi = nT_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{n}\right)^2 - 1}}.$$

Второй случай: $n > k$ (случай «большого» сопротивления).

Решение уравнения (2) имеет вид:

$$q = e^{-nt}\left[\frac{q_0(k_2+n)+\dot{q}_0}{2k_0}e^{2k_2t} + \frac{q_0(k_2-n)-\dot{q}_0}{2k_0}e^{-k_2t}\right], \qquad (4)$$

где $k_2 = \sqrt{n^2 - \omega^2}$.

Третий случай: $n = \omega$.

Решением уравнения (1) будет

$$q(t) = e^{-nt}(C_1 t + C_2), \qquad (5)$$

Где

$$C_1 = \frac{q_0(k_2+n)+\dot{q}_0}{2k_2}, \quad C_2 = \frac{q_0(k_2-n)-\dot{q}_0}{2k_2}.$$