Лекция 7

naturally nyaapa

2013-03-29

Метод Гомори

2 Метод Гомори для полностью целочисленной задачи

Рассматриваем задачу вида

$$\begin{cases} f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i = 1..m \\ x_j \geq 0, j = 1..n \\ x_j \in \mathbb{Z}, j = 1..n \end{cases}$$

Будем считать. что $a_{ij}, b_i \in \mathbb{Z}$. Если это не так, то эквивалентными преобразованиями приведём ограничения к такому виду.

Рассмотриму задачу с ослабленными ограничениями:

1) Если её opt решение целочисленно, то оно является и оптимальным решением задачи целочисленного програмиирования.

2) Если оптимальное решение задачи с ослабленными ограничениями не является целочисленным, то выберем некоторую базисную переменную x_i, значение которой в найденном оптимальном решении не является целым. Рассмотрим отвечающее этой переменной ограничение из оптимальной симплекс таблицы: $x_i + \sum_{j \in S} a'_{ij} x_j = \beta_i$, где S - множество номеров небазисных переменных, а β_i - нецелое.

Тогда $x_i = b_i - \sum_{j \in S} a'_{ij} x_j$.

Представим каждый коэффициент в виде суммы целой и дробной части:

$a'_{ij} = [a'_{ij}] + f_{ij},\ f_{ij} \in [0; 1)$

$\beta_i = [\beta_i] + f_i,\ f_i \in [0; 1)$

Тогда

$x_i = [\beta_i] + f_i - \sum_{j \in S}([a'_{ij}] + f_{ij}) x_j$

$\Rightarrow x_i - [\beta_i] + \sum_{j \in S}[a'_{ij}] x_j = f_i - \sum_{j \in S} f_{ij} x_j$. Где $x_i - [\beta_i] + \sum_{j \in S}[a'_{ij}] x_j$ - целое

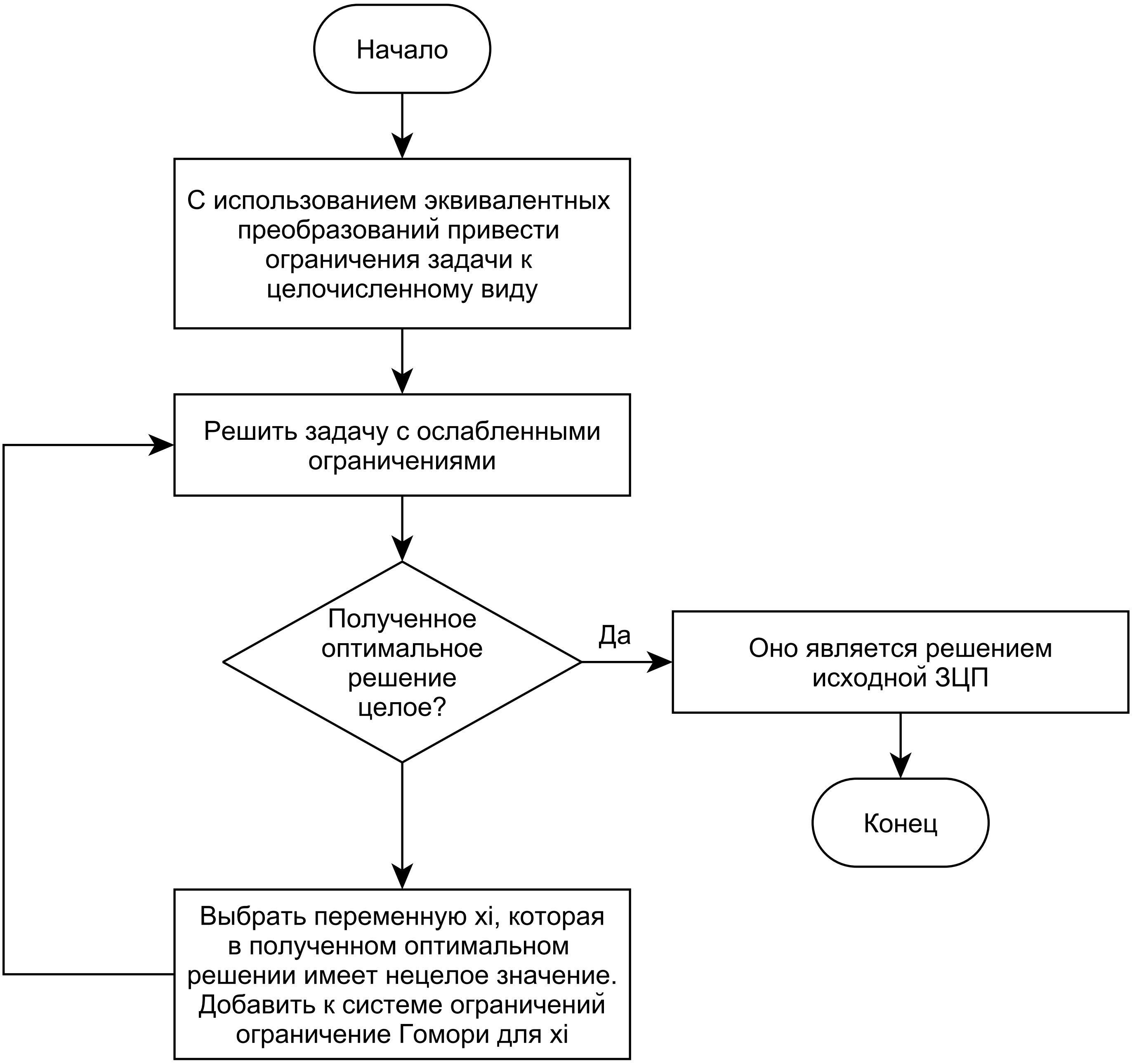
Тогда $f_i > 0 +$ целое $= \sum_{j \in S} f_{ij} x_j$

$$\left.\begin{matrix} f_{ij} \geq 0 \\ x_j \geq 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \sum_{j \in S} f_{ij} x_j \geq 0$$

Т.к. $0 < f_i < 1 \Rightarrow$ целое $\geq 0 \Rightarrow \sum_{j \in S} f_{ij} x_j \geq f_i$

Полученное неравенство называется отсечением Гомори. Оно является необходимым условием целочиеленности.

Метод Гомори для полностью целочисленной задачи.



Пример

$$\begin{cases} f = 7x_1 + 9x_2 \to max \\ -x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ x_1 + \frac{1}{7}x_2 \leq 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Приведём к стандартному виду

$$\begin{cases} f = 7x_1 + 9x_2 \to max \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 \\ 7x_1 + x_2 + x_4 = 35 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ит.	БП	Зн.	x_1	x_2	x_3	x_4	
0	x_3	6	-1	$\boxed{3}$	1	0	x_3 из базиса
	x_4	35	7	1	0	1	
	-f	0	7	9	0	0	x_2 в базис
2	x_2	2	-1/3	1	1/3	0	
	x_4	33	$\boxed{22/3}$	0	-1/3	1	x_4 из базиса
	-f	-18	10	0	-3	0	x_1 в базис
2	x_3	-7/2	0	1	7/22	1/22	
	x_1	9/2	1	0	-1/22	3/22	
	-f	-63	0	0	-28/11	-15/11	

Оптимальное решение $x^O = \left(\frac{9}{2}, \frac{7}{2}\right)$

Можно построить дополнительное ограничение для x_1 или x_2. Построим для x_2:

Из оптимальной симплекс таблицы $x_2 + 7/22x_3 + 1/22x_4 = 7/2$

$\beta_2 = 7/2 = [7/2] + \{7/2\} = 3 + 1/2$

$a'_{23} = 7/22 = 0 + 7/22$

$a'_{24} = 1/22 = 0 + 1/22$

$f_2 = 1/2$

$f_{23} = 7/22$

$f_{24} = 1/22$

$\sum_{j \in S} f_{ij} x_j \geq f_i$

$7/22x_3 + 1/22x_4 \geq 1/2$ Дополнительное ограничение(отсечение Гомори)

Приведём к стандартной форме

$7/22x_3 + 1/22x_4 - x_5 + x_6 = 1/2$

$w = -x_6 = -1/2 + 7/22x_3 + 1/22x_4 - x_5 \to max$

Ит.	БП	Зн.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
3	x_2	7/2	0	1	7/22	1/22	0	0	
	x_1	9/2	1	0	-1/22	3/22	0	0	
	x_6	1/2	0	0	7/22	1/22	-1	1	x_6 из базиса
	-f	-63	0	0	-28/11	-15/11	0	0	
	-w	1/2	0	0	1/22	1/22	-1	0	x_3 в базис
4	x_2	3	0	1	0	0	1		
	x_1	32/7	1	0	0	1/7	-1/7		
	x_3	11/7	0	0	1	1/7	-22/7		
	-f	-59	0	0	0	-1	-8		
	-w	0	0	0	0	0	0	-1	

$x_1 + 1/7x_4 - 1/7x_5 = 32/7$

$S = \{4, 5\}$

$i = 1$

$f_1 = \{32/7\} = 4/7$

$f_{14} = \{1/7\} = 1/7$

$f_{15} = \{-1/7\} = 6/7$

$\sum_{j \in S} f_{ij} x_j \geq f_i$

$1/7x_4 5 + 6/7x_5 \geq 4/7$

$1/7x_4 + 6/7x_5 - x_7 + x_8 = 4/7$

$w' = -x_8 = -4/7 + 1/7x_4 + 6/7x_5 - x_7 \rightarrow max$

Ит.	БП	Зн.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_7	x_8	
5	x_2	3	0	1	0	0	1	0	0	
	x_1	32/7	1	0	0	1/7	-1/7	0	0	
	x_3	11/7	0	0	1	1/7	-22/7	0	0	
	x_8	4/7	0	0	0	1/7	$\boxed{6/7}$	-1	1	$x_1 \rightarrow$
	-f	-59	0	0	0	-1	-8	0	0	
	-w'	4/7	0	0	0	1/7	6/7	-1	0	$x_5 \leftarrow$
Пропуск										
7	x_2	3	0	1	0	0	1	0		
	x_1	4	1	0	0	0	-1	1		
	x_3	1	0	0	1	0	-4	1		
	x_4	1	0	0	0	1	6	-7		
	-f	-55	0	0	0	0	-2	-7		

Замечание Дадим графическую иллюстрацию.

Ограничения исходной задачи:

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 \le 6(1) \\ x_1 + 1/7x_2 \le 5(2) \end{cases}$$

$x_3 = 6 + x_1 - 3x_2$

$x_4 = 35 - 7x_1 - x_2$

1-е ограничение:

$7/22x_3 + 1/22x_4 \ge 1/2$

$7/22(6 + x_1 - 3x_2) + 1/22(35 - 7x_1 - x_2) \ge 1/2$

$\underline{x_2 \le 3}$ (3)

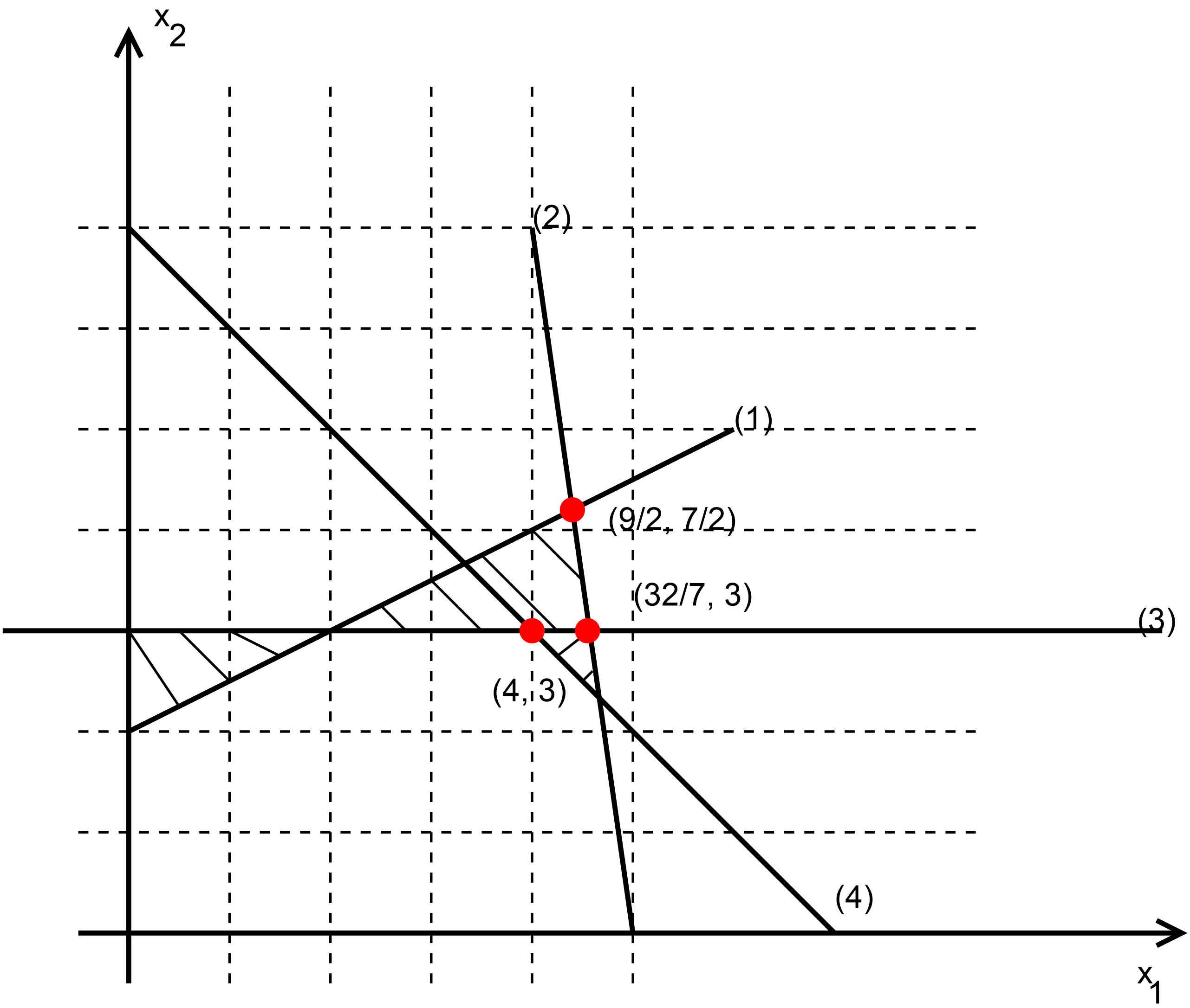
$x_5 = -1/2 + 7/22x_3 + 1/22x_4 = 3 - x_2$

2-е отсечение

$1/7x_4 + 6/7x_5 \ge 4/7$

$1/7(35 - 7x_1 - x_2) + 6/7(3 - x_2) \ge 4/7$

$\underline{x_1 + x_2 \le 7}$ (4)



<u>Замечания:</u>

Вид неравенства, определяющего новое ограничени, зависит от выбора базисной переменной, которая имеет нецелое значение в оптимальном решении задачи с ослабленными ограничениями. Таким образом, одна и та же симплекс таблица порождает несколько ограничений.

Вопрос: какую переменную лучше выбрать для построения ограничения Гомори?

Таким образом одна и та же симплекс таблица порождает несколько ограничений. Какую переменную лучше выбрать для построения дополнительных ограничений? В настоящее время существуют эмпирические правила для выбора такой переменной:

1. $max f_i$ - max значение дробной части
2. $\frac{max(f_i}{\sum_{j\in S} f_{ij})}$

<u>Пример</u>(см пред. пример) после решения задачи с ослабленными ограничениями

$\left.\begin{array}{c} x_1 : f_1 = 1/2 \\ x_2 = f_2 = 1/2 \end{array}\right\} \Rightarrow$ выбрать по (1) нельзя

$x_1 : \frac{1/2}{21/22+3/22} = 11/24; < x_2 : \frac{1/2}{7/22+1/22} = 11/8$

Следует выбрать x_2