Лекция 6

still nyaapa

2013-03-22

3 <u>Экономическая интерпретация двойственной задачи</u>

1) Рассмотрим задачу линейного программирования как задачу распределения ресурсов.

$$\begin{cases} f = c_1x_1 + ... + c_nx_n \to max \\ x_1a_1 + ... + x_na_n \leq b \\ x_1, ..., x_n \geq 0 \end{cases}$$

Где $a_1, ..., a_n$ столбцы матрицы А системы ограничений.

Элемент a_{ij} матрицы А равен норме потребления i-го ресурса для производства единицы j-го продукта. Таким образом, столбцы матрицы А отвечают видам производимой продукции, поэтому их называют технологическими процессами.

2) Оптимальное значение целевой функции $f_{max} = c^Tx^0 = b^Ty^0 = g_{min}$ по лемме 2

С точки зрения размерностей:

$$[y_j] = \frac{\text{руб}}{\text{ед. рес-в}} \Leftarrow \begin{cases} [f] = \text{ рубли} \\ [b_j] = \text{ единицы ресурсов} \end{cases}$$

Таким образом, y_j выражают ценность j-го ресурса с точки зрения получения прибыли. Поэтому, переменные двойственной задачи называют скрытыми доходами или теневыми ценами.

Эти переменные могут быть использованы для определения приоритета ресурсов в соответствии с их вкладом в opt значение целевой функции: opt значение y_j^0 определяет приращение значения целевой функции при увеличении запасов i-го ресурса(при условии, что оптимальный базис не изменяется.)

3) a_{ij} - норма потребления i-го ресурса в j-м технологическом процессе. Тогда $\sum_{i=1}^m a_{ij}y_i$ - экономический эффект j-го технологического процесса относительно теневых цен.

$[a_{ij}y_i] = \frac{\text{ед. рес.}}{\text{ед.прод}} \frac{\text{руб.}}{\text{ед. рес}} = \frac{\text{руб.}}{\text{ед. прод.}}$

Ограничения $\sum_{i=1}^m a_{ij}y_i \geq c_j$ двойственной задачи выражают строгую пропорциональность этого эффекта нормам потребления ресурсов.

4) Рассмотрим соотношения из леммы 5:

$y_i^0(\sum_{j=1}^m a_{ij}x_j^0 - b_i) = 0$

$x_j^0(\sum_{i=1}^m a_{ij}y_i^0 - c_j) = 0$

а) Если в opt решении прямой задачи какой-либо ресурс используется не полностью, т.е. $\sum_{j=1}^m a_{ij}x_j^0 - b_i < 0$, то его теневая цена y_i^0

б) Если некоторый технологический процесс строго невыгоден с точки зрения теневых цен, т.е. $\sum_{i=1}^m a_{ij}y_i^0 - c_j > 0$, то объём производства j-го продукта $x_j^0 = 0$

5) Двойственная задача

$$\begin{cases} g = b^T y \to min \\ A^T y \geq c \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Допускает такую интерпретацию: необходимо подобрать теневые цены таким образом, чтобы затраты на производство были бы минимальны.

Содержательные задачи, приводящие к ЗЛП

1 Задачи распределительного типа

См. задачу о производстве карамели из сахарного песка и фруктового пюре

2 Задача о диете

Пример: птицеводческая фабрика может запускать три вида ингридиентов для приготовления питательной смеси:

- известняк
- зерно
- соевые бобы

Питательные качества ингридиентов приведены в таблице:

	Содерж-е питат-х вещ-в(кг/кг) ингр-та			Стоимость(руб/кг)
	Ca	Белок	Клетчатка	
Известняк	0.38	0	0	480
Зерно	0.001	0.09	0.02	1800
С. Бобы	0.002	0.5	0.08	4800

По мнению зоотехников, кормовая смесь должна удовлетворять следующим требованиям: 1) минимальный общий вес ≥ 20000 кг

2) смесь должна содержать $\geq 0.8\%$ и $\leq 1.2\%$ кальция

3) сместь должна содержать $\geq 22\%$ белка

4) смесь должна содержать $\leq 5\%$ клетчатки

Составить наоболее экономичный рецепт приготовления смеси

x_1 - масса используемого известняка, кг

x_2 - масса используемого зерна, кг

x_3 - масса используемых соевых бобов, кг

Тогда:

1) Общая масса смеси $x_1 + x_2 + x_3 \geq 20000$

2) $\begin{cases} 0.38x_1 + 0.001x_2 + 0.002x_3 \geq 0.008(x_1 + x_2 + x_3) \\ 0.38x_1 + 0.001x_2 + 0.002x_3 \leq 0.012(x_1 + x_2 + x_3) \end{cases}$

$$\begin{cases} 0.372x_1 - 0.007x_2 - 0.006x_3 \geq 0 \\ 0.368x_1 - 0.011x_2 - 0.010x_3 \leq 0 \end{cases}$$

3)$0.09x_2 + 0.5x_3 \geq 0.22(x_1 + x_2 + x_3) \Leftrightarrow 0.22x_1 + 0.13x_2 - 0.28x_3 \leq 0$

4) $0.02x_2 + 0.08x_3 \leq 0.05(x_1 + x_2 + x_3) \Leftrightarrow 0.05x_1 + 0.03x_2 - 0.03x_3 \geq 0$

5) Стоимость смеси $f = 480x_1 + 1800x_2 + 4800x_3$

Таким образом, приходим к ЗЛП

$$\begin{cases} f = 480x_1 + 1800x_2 + 4800x_3 \to min \\ x_1 + x_2 + x_3 \geq 20000 \\ 0.372x_1 - 0.007x_2 - 0.006x_3 \geq 0 \\ 0.368x_1 - 0.011x_2 - 0.010x_3 \leq 0 \\ 0.22x_1 + 0.13x_2 - 0.28x_3 \leq 0 \\ 0.05x_1 + 0.03x_2 - 0.03x_3 \geq 0 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

3 Транспортная задача

Пусть имеется m производителей(источников) некоторой однородной продукции. Мощность i-го источника обозначим $S_i > 0$.

Пусть также имеется n потребителей(стоков) этой продукциц. Мощность j-го стока обозначим $D_j > 0$

Стоимость перевозки единицы продукции из i-го источника в j-й сток составляет $c_{ij} \geq 0$ денежных единиц.

Предполагается, что $\sum_{i=1}^m S_i = \sum_{j=1}^n D_j$

Необходимо составить план перевоза продукции от источников к стокам таким образом, чтобы

1) Вся продукция была перевезена

2) Общая стоимость перевозок была бы минимальной

Пусть x_{ij} - объём продукции, перевозимой из i-го источника в j-й сток.

Тогда

1) Общая стоимость перевозок $f = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}x_{ij}$

2) Объём выведенной продукции

$\sum_{j=1}^n x_{ij} = S_i, i = 1..m$

	D_1	...	D_j	...	D_n
S_1	$x_{11} \mid c_{11}$	...	$x_{1j} \mid c_{1j}$	...	$x_{1n} \mid c_{1n}$
...					
S_j	$x_{i1} \mid c_{i1}$	...	$x_{ij} \mid c_{ij}$	...	$x_{in} \mid c_{in}$
...					
S_m	$x_{m1} \mid c_{m1}$	...	$x_{mj} \mid c_{mj}$	...	$x_{mn} \mid c_{mn}$

3) Объем завезённой продукции $\sum_{i=1}^m x_{ij} = D_j, j = 1..n$

Приходим к ЗЛП

$$\begin{cases} f = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to min \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = S_i, i = 1..m \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = D_j, j = 1..n \\ x_i j \geq 0, i = 1..m, j = 1..n \end{cases}$$

4 Задача о календарном планировании работ <u>*Пример*</u> Для производства некоторого продукта необходимо выполнить процессы A,B,C,D,E,F.

Продолжительность каждого процесса, а также предшествующие процессы, приведены в таблице

Процесс	Продолж	Предш. процессы
A	t_A	•
B	t_B	•
C	t_C	A
D	t_D	A
E	t_E	B,D
F	t_F	C,E

Необходимо составить такой план выполнения работ, при котором суммарное время изготовления продукции min.

A и B начнём в момент времени t $= 0$

C и D начнём в t $= x_1$

E в t $= x_2$

F в t $= x_3$

Тогда

1) A предшествует процессам C и D $\to x_1 \geq t_A$

2) B,D предшествует E $\Rightarrow x_2 \geq t_B$, $x_2 \geq t_D + x_1$

3) C,E предшествует F $\Rightarrow x_3 \geq t_C + x_1$, $x_3 \geq t_E + x_2$

4) Общее время выполнения работ $f = x_3 + t_F$

Таким образом приходим к ЗЛП

$$\begin{cases} f = x_3 + t_F \to min \\ x_1 \geq t_A \\ x_2 \geq t_B \\ x_2 - x_1 \geq t_D \\ x_3 - x_1 \geq t_C \\ x_3 - x_2 \geq t_E \\ \cancel{x_1, x_2, x_3 \geq 0} \text{ Эти ограничения избыточны, их можно не требовать} \end{cases}$$

5 Задача о минимизации дисбалланса на автоматической линии

Пример Завод выпускает изделие, состоящее из деталей A,B,C(по одной детали каждого вида на одно готовое издение). Для изготовления деталей A,B,C могут использоваться станки двух типов, которые характеризуются следующей производительность:

Станок	Max. время работы в сутки, час	Производительность, дет/час		
		A	B	C
I	20	5	8	7
II	15	3	5	10

Требуется определить план производства деталей каждого вида на станках таким образом, чтобы общий объём выпуска готовых изделий был max.

Пусть x_{ij} - время часов в сутки, в течении которого на i-м станке выпускают детали вида j

j = 1 – детали A

j = 2 – детали B

j = 3 – детали C

Тогда $\sum x_{ij}$

Кол-во изделий

$f = min\{5x_{11} + 3x_{21}, 8x_{12} + 5x_{22}, 7x_{13} + 10x_{23}\} \to max$

Тогда

1) Время работы I станка $x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 20$

2) Время работы II станка $x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 15$

Приходим к задаче

$$\begin{cases} f = min\{5x_{11} + 3x_{21}, 8x_{12} + 5x_{22}, 7x_{13} + 10x_{23}\} \to max \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 20 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 15 \\ x_{ij} \geq 0, i = 1..2, j = 1..3 \end{cases}$$

Которая НЕ является ЗЛП из-за вида целевой функции.

Модифицируем. Получаем ЗЛП.

$$\begin{cases} f = y \to max \\ y \leq 5x_{11} + 3x_{21} \\ y \leq 8x_{12} + 5x_{22} \\ y \leq 7x_{13} + 10x_{23} \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 20 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 15 \\ x_{ij} \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

ЦЕЛОЧИСЛЕННОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

1 Постановка задачи

Опр. Задачей целочисленного программирования(ЗЦП) называется следующая задача

$$\begin{cases} f = c^T x \to max(1) \\ Ax = b(2) \\ x \geq 0(3) \\ x_1, .., x_p \in \mathbb{Z}(4) \end{cases}$$

Задача (1)-(3) является "обычной"задачей линейного программирования. Эта задача называется задачей с ослабленными ограничениями по отношению к ЗЦП (1)-(4).

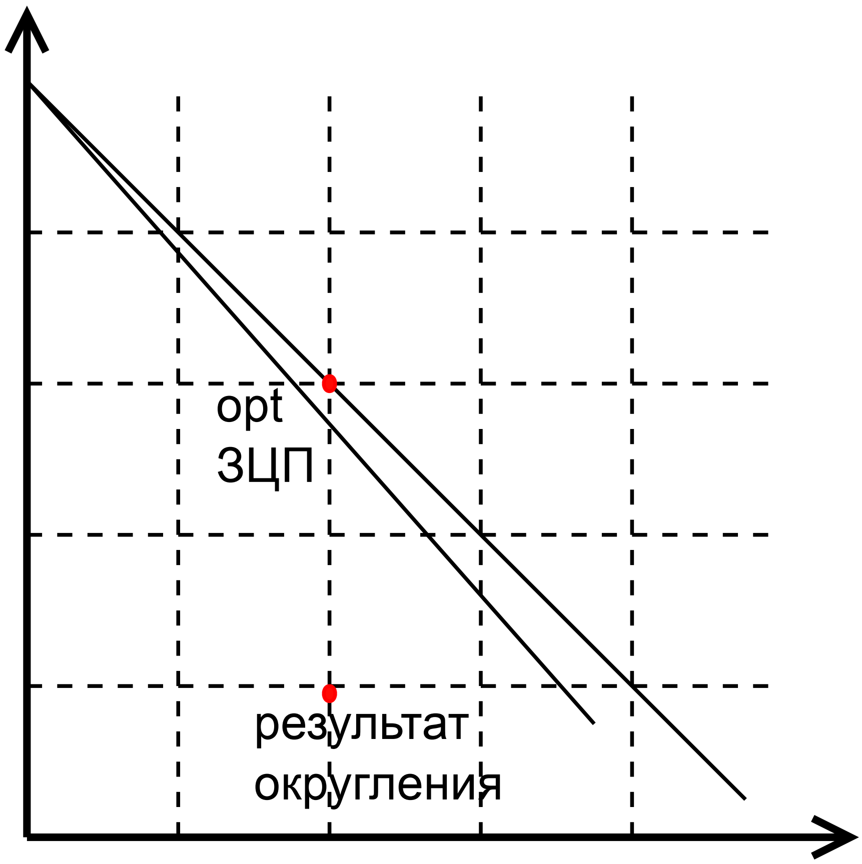
Если p=n (n - число переменных), то ЗЦП (1)-(4) называется полностью целочисленной.

Если p≤n, то ЗЦП (1)-(4) называется частично целочисленной.

Замечание: Многие объекты(автомобили, самолёты, станки, люди) исчисляются лишь целыми единицами => в задачах оптимизации появляются требования целочисленности

2 О методах решения задач целочисленного программирования

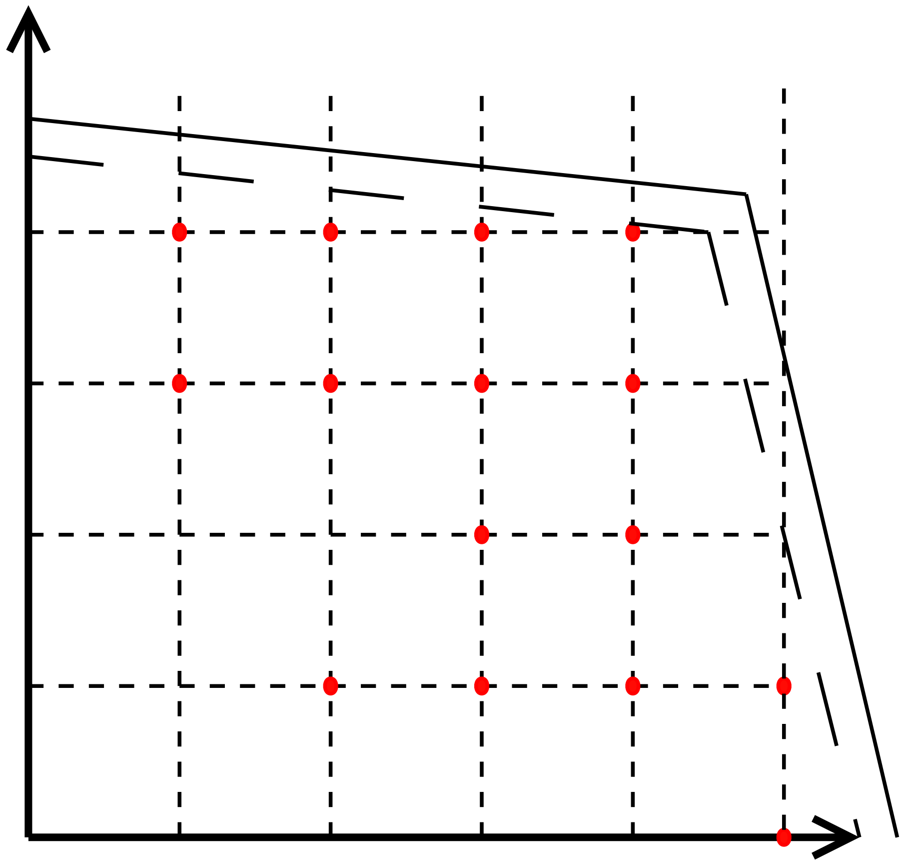
I. "Решить задачу с ослабленными ограничениями и округлить результат метод, который не всегда даёт решение ЗЦП.



Кроме того, в некоторых задачах(например, булевое программирование), аппарат округления оказывается логически неприемлем.

II. Методы отсечения

Множество допустимых решений задачи с ослабленными ограничениями – выпуклый многоугольник. Хорошо было бы добавить "новые"ограничение т.о., чтобы соединить внешние целые точки этого множеества.



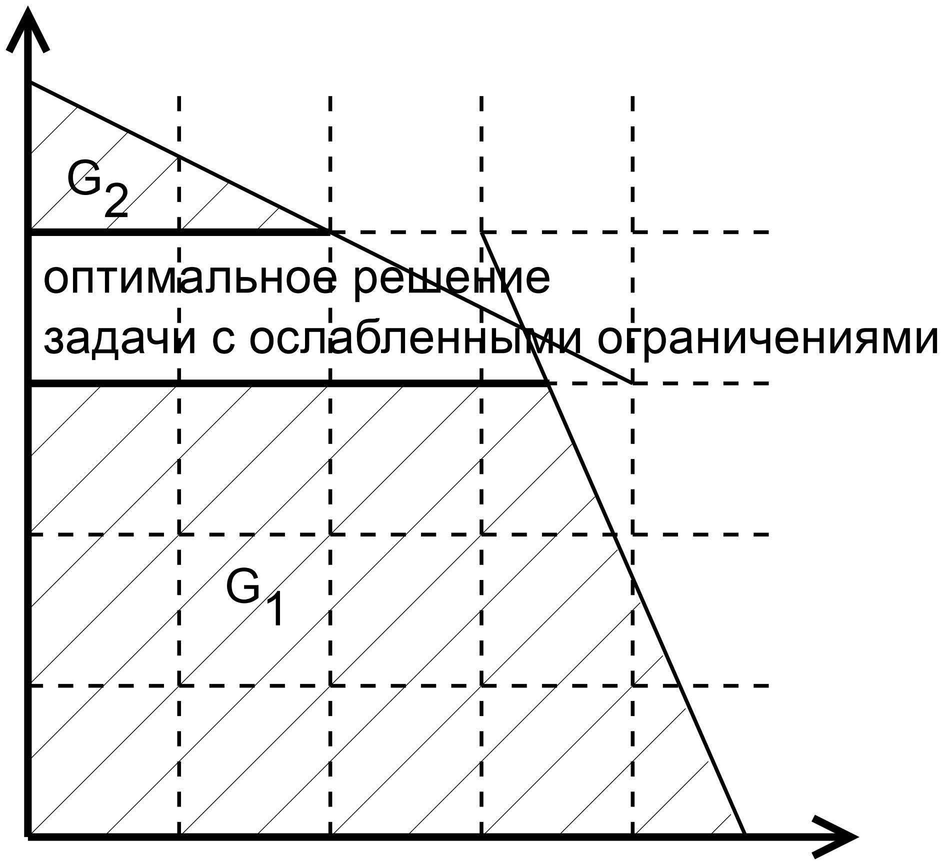
Новая область должна содержать все целые точки исходной области. При этом, крайним точка новой области будут целые точки.

Т.к. opt решению ЗЛП отвечают крайние точки мн-ва, то для решения ЗЦП в этом случае можно использовать стандартные методы решения ЗЛП.

Указанные идеи лежат в основе группы методов, которые называются методами отсечения. При их реализации в ходе решения ЗЦП добавляются новые ограничения, которые исключают из множества допустимых решений нецелое оптимальное решение задачи с ослабленными ограничениями.

Мы будем изучать методы отсечения на примере метода Гомори.

III. Комбинаторные методы. В их основе лежит идея перебора всех целых точек множества допустимых решений задачи с ослабленными ограничениями.

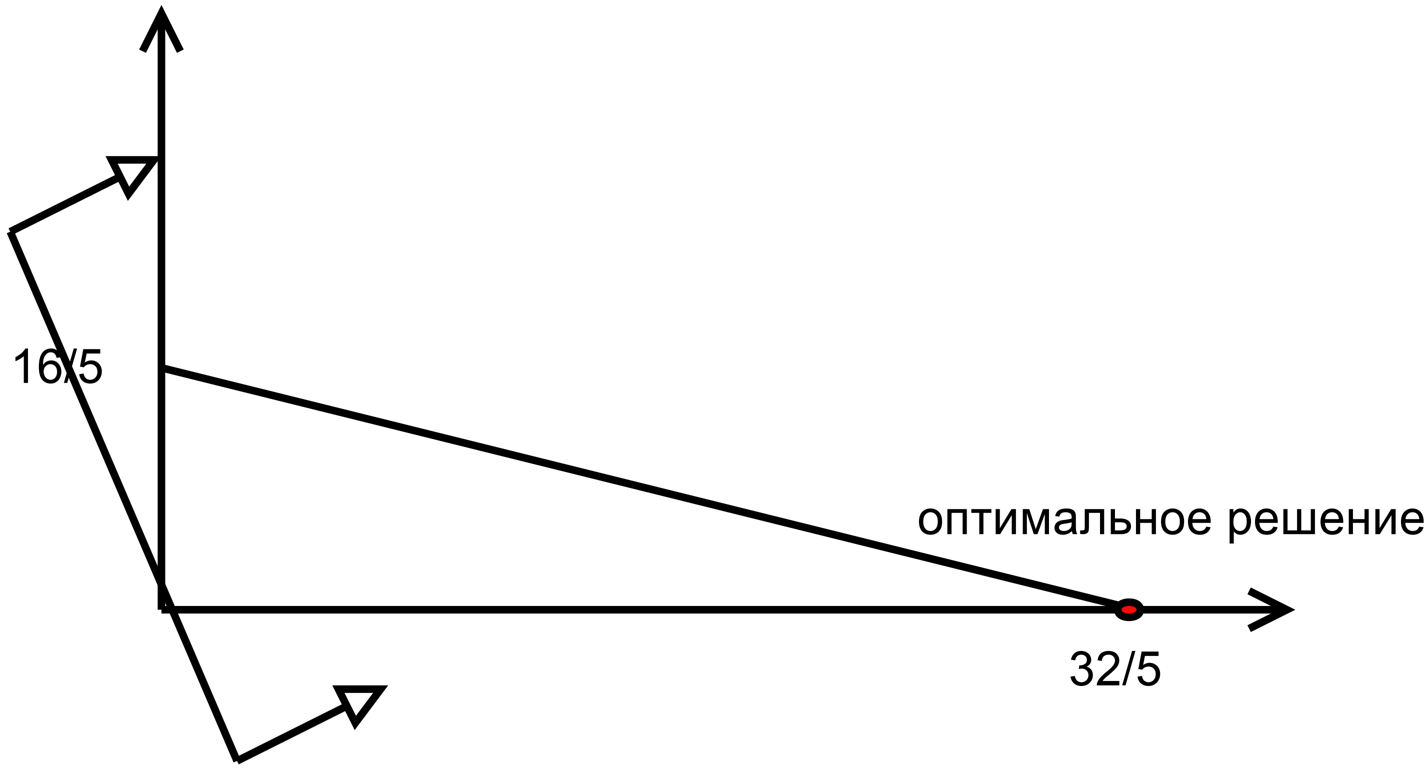


Отбрасывание части нецелых решений(между плоскостями) не изменяет множество допустимых решений ЗЦП. Можно утверждать, что оптимальное решение ЗЦП содержится или в G_1 или в G_2. Путём использования специальных процедур можно отбросить одно из множеств в G_1 или в G_2 как заведомо не содержащее оптимального решение ЗЦП. Это позволит сократить объёмы вычислений. Мы познакомимся с этой группой методов на примере метода ветвей и границ.

1 Основные идеи метода Гомори

Пример:

$$\begin{cases} f = 2x_1 + x_2 \to max \\ 3/4x_1 + 6/4x_2 \le 48/10 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



Оптимальное решение задачи с ослабленными ограничениями (32/5, 0).

Попробуем отсечь от множества допустимых решений задачи с ослабленными ограничениями точку (32/5,0)

Рассмотрим ограничение $3/4x_1 + 6/4x_2 \leq 48/10$ и приведём его к виду, в котором все коэффициенты и правая часть являются целыми числами $15x_1 + 30x_2 \leq 96$

В стандартной форме ЗЛП: $15x_1 + 30x_2 + x_3 = 96$

Используем симплекс метод:

Ит	БП	Знач	x_1	x_2	x_3
1	x_3	96	$\boxed{15}$	30	1
	-f	0	2	1	0
2	x_1	32/5	1	2	1/15
	-f	-192/15	0	-3	-2/15

Оптимальное решение (32/5, 0).

$x_1^0 = 32/5$ - не является целым.

$x_2^0 = 0$

Рассмотрим строки opt симплекс-таблицы для x_1

$x_1 = 32/5 - 2x_2 - 1/15x_3$, где x_1, x_2, x_3 – целые.

$32/5 - 2x_2 - 1/15x_3 =$ целое

[x] = max{y : y + ℤ, y≤x}

{x}=x - [x]

([32/5] + {32/5}) - ([2] + {2})x_2 - ([-1/15] + {-1/15})x_3 = целое

(6 + 2/5) - (2 + 0)x_3 - (0 + 1/15)x_3 = целое

(6 - 2x_2 - 0x_3) + (2/5 - 0x_2 - 1/15) = целое

2/5 - 1/15x_3 = целое

$1/15x_3 = 2/5 +$ целое $\Rightarrow 1/15x_3 \geq 2/5$

Замечание: $1/15x_3 \geq 2/5 \Rightarrow x_3 \geq 6 \Rightarrow 96 - 15x_1 - 30x_2 \geq 6 \Rightarrow 15x_1 + 30x_2 \leq 90 \Rightarrow x_1 + 2x_2 \leq 6$

Это ограничение исключает точку (32/5, 0) из множества допустимых решений

Рассмотрим задачу с дополнительным ограничением:

$1/15x_3 \geq 2/5 \Rightarrow 1/15x_3 - x_4\ 2/5$

$1/15x_3 - x_4 + x_5 = 2/5$

$w = -x_5 = 1/15x_3 - x_4 - 2/5 \rightarrow max$

Ит	БП	Знач	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	x_1	32/5	1	2	1/15	0	0
	x_5	2/5	0	0	$\boxed{1/15}$	-1	1
	-w	2/5	0	0	1/15	-1	0
	-f	-192/5	0	-3	-2/15	0	0
3	x_1	6	1	2	0	1	-1
	x_3	6	0	0	1	-15	15
	-w	0	0	0	0	0	-1
	-f	-12	0	-3	0	-2	2