Лекция 8

none other than nyaapa

2013-04-05

3 Метод Гомори для частично целочисленных задач

Рассмотрим частично-целочисленную ЗЦП

$$\begin{cases} f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i = 1..m \\ x_j \geq 0, j = 1..n \\ x_j \in \mathbb{Z}, j = 1..p \end{cases}$$

Как и раньше, решим задачу с ослабленными ограничениями. Если полученное решение удовлетворяет условию целочисленности, то оно является решением исходной ЗЦП. В противном случае, выберем базисную переменнюу x_i, которая по условию должна быть целочисленной, но значение которой в полученном оптимальном решении нецелое.

Рассмотрим ограничения для x_i из оптимальной симплекс таблицы.

$x_i = \beta_i - \sum_{j \in S} a'_{ij} x_j$ (*),

где β_i - нецелое, S - множество номеров небазисных переменных.

Так как некоторые переменные x_j, $j \in S$ могут принимать нецелые значения, построим отсечение другого типа:

Пусть $\beta_i = [\beta_i] + f_i$, $f_i \in (0, 1)$

Для переменной x_i должно выполняться одно из двух ограничений:

или
A $x_i \leq [\beta_i]$
B $x_i \geq [\beta_i] + 1$

Ограничения A и B не могут выполняться одновременно, но одно из них обязательно выполняеттся для оптимального решения ЗЦП.

(*) $\Rightarrow x_i - [\beta_i] = f_i - \sum_{j \in S} a'_{ij} x_j$

Если A: $x_i - [\beta_i] \leq 0$

и следовательно $f_i - \sum_{s \in S} a'_{ij} x_j \leq 0$

$\boxed{\sum_{j \in S} a'_{ij} x_j \geq f_i}$ A

Если B, то $x_i - [\beta_i] \geq 1$ и $f_i - \sum_{j \in S} a'_{ij} \geq 1 \Rightarrow$

$\boxed{\sum_{j \in S} a'_{ij} x_j \geq f_i - 1}$ B_1

Разобъём $S = S^+ \cup S^-$, где

S^+ - номера j ,для который $a'_{ij} \geq 0$

S^- - ... $a'_{ij} < 0$

Тогда

$A_1 \Rightarrow \sum_{j\in S^+} a'_{ij}x_j + \sum_{j \in S^-} a'_{ij}x_j \geq f_i$

А $\sum_{j\in S^-} a'_{ij}x_j \geq 0$ вся.

Тогда, тем более, $\boxed{\sum_{j\in S^+} a'_{ij}x_j \geq f_i}$ A_2

$B_1 \Rightarrow \underset{\geq 0}{\sum_{j\in S^+} a'_{ij}x_j} + \underset{\leq 0}{\sum_{j \in S^-} a'_{ij}x_j} \geq \underset{<0}{f_i - 1}$

Тогда, тем более $\sum_{j\in S^-} a'_{ij}x_j \leq f_i - 1$

Так как $f_i - 1 < 0$, то $\frac{1}{f_i-1}\sum_{j\in S^-} a'_{ij}x_j \geq 1$

Так как $f_i > 0$, то

$\boxed{\frac{f_i}{f_i-1}\sum_{j\in S^-} a'_{ij}x_j \geq f_i}$ B_2

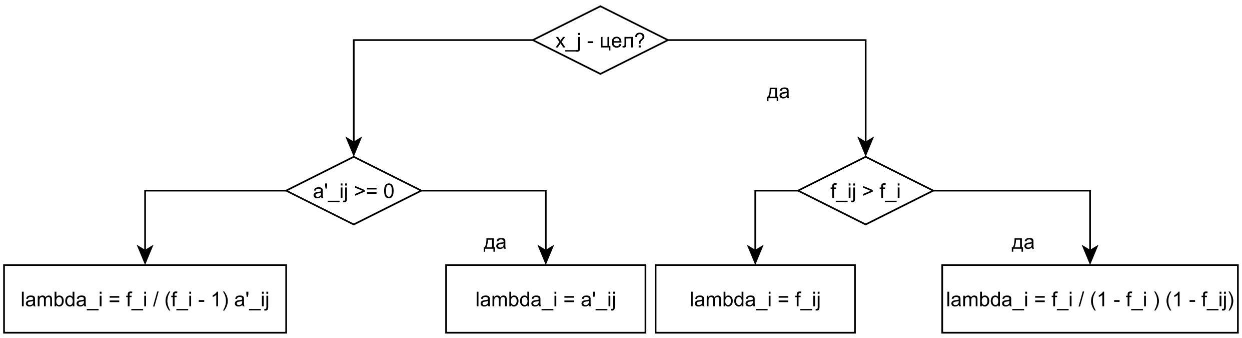
A_2 и B_2 являются следствиями A и B и могут не выполняться одновременно, однако, независимо от того, какой случай имеет место, будет выполняться:

$\sum_{j\in S^+} a'_{ij}x_j + \frac{f_i}{f_i-1}\sum_{j\in S^-} a'_{ij}x_j \geq f_i$ (**)

(**) задают дополнительное ограничение, которое называется отсечением Гомори для частично целочисленной задачи. Как и раньше, оптимальное решение задачи с ослабленными ограничениями не удовлетворяет этому условию.

Построенное ограничение выведено без учёта того, что некоторые небазисные переменные могут быть подчинены условию целочисленности. Более эффективным будет ограничение следующего вида

$\sum_{j\in S} \lambda_j x_j \geq f_i$, где λ_j выбирается из условия



Пример

$$\begin{cases} f = 7x_1 + 9x_2 \to max \\ -x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ x_1 + \frac{1}{7}x_2 \leq 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ x_1 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Оптимальная симплекс-таблица для задачи с ограничениями

Ит.	БП	Зн.	x_1	x_2	x_3	x_4	
2	x_3	-7/2	0	1	7/22	1/22	
	x_1	9/2	1	0	-1/22	3/22	
	-f	-63	0	0	-28/11	-15/11	

$x_1 = 9/2 \notin \mathbb{Z}$

$f_1 = \{9/2\} = 1/2$

Ограничение имеет вид $\lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4 \geq f_1$

Ограничение из оптимальной симплекс-таблицы

$x_1 - 1/22x_3 + 3/22x_4 = 9/2$

$a'_{13} = -1/22$ $a'_{14} = 3/22$ $\beta_1 = 9/2$

$\lambda_3 = \frac{1/2}{1/2-1}(-1/22) = 1/22$

$\lambda_4 = 3/22$

Новое ограничение $\boxed{1/22x_3 + 3/22x_4 \geq 1/2}$

Стандартная форма для нового ограничения $1/22x_3 + 3/22x_4 - x_5 + x_6 = 1/2$

$2 = -x_6 = -1/2 + 1/22x_3 + 3/22x_4 - x_5 \to max$

Ит.	БП	Зн.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
3	x_2	7/2	0	1	7/22	1/22	0	0	
	x_1	9/2	1	0	-1/22	3/22	0	0	
	x_6	1/2	0	0	1/22	3/22	0	1	x_6 из базиса
	-f	-63	0	0	-28/11	-15/11	0	0	
	-w	1/2	0	0	1/22	$\boxed{3/22}$	-1	0	x_4 в базис
4	x_2	10/3	0	1	10/33	0	0	-1/3	
	x_1	4	1	0	1/11	0	0	-1	
	x_4	11/3	0	0	1/3	1	0	22/3	
	-f	-58	0	0	-23/11	0	0	10	
	-w	0	0	0	-1	-1	-1	0	

Замечание Мы рассмотрели лишь два типа отсечений. В настоящее время построено большое количество ограничений других типов. Несмотря на то, что методы отсечения надёжны, общепринятая точка зрения такова, что эти методы не подходят для решения задач большой размерности. Известный случаи, когда непреднамеренная перестановка ограничений делала несложную исходную задачу крайне громоздкой.

Метод ветвей и границ

1 Основные идщеи метода

Рассмотрим ЗЦП:

$$\begin{cases} f=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i = 1..m \\ x_j \geq 0, j = 1..n \\ x_j \in \mathbb{Z}, j = 1..p \end{cases}$$

Полностью или частично задача является целочисленной – неважно.

Предположим, что мы нашли оптимальное решение задачи с ослабленными ограничениями. Если это решение удовлетворяет условию целочисленности, то оно является оптимальным решением ЗЦП. В противном случае выберем базисную переменную x_i, которая должна быть целой, но в полученном оптимальном решении имеет нецелое значение β_i.

В этом случе. оптимальное решение ЗЦП содержится в одной из двух подобластей: G_1 или G_2.

Таким образом, что оптимальное решение исходной ЗЦП совпадает с оптимальным решением одной из подзадач:

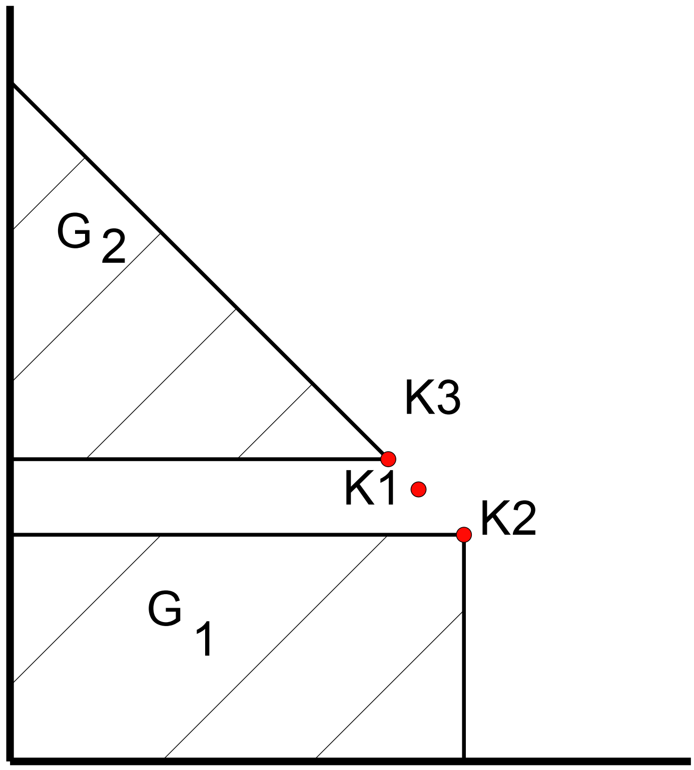
$$\begin{cases} \text{исх. ЗЦП} \\ + \\ \text{доп ограничение } x_i \leq [\beta_i] \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \text{исх. ЗЦП} \\ + \\ \text{доп ограничение } x_i \geq [\beta_i] \end{cases}$$

Помещаем обе задачи в список подзадач S. Далее берём из S одну из подзадач, решаем её(с ослабленными ограничениями), если полученное решение удовлетворяет условию целочисленности, то запоминаем его, если нет, то добавляем в S новые подзадачи, которые порождает рассмотренная подзадача. Так продолжаем до тех пор, пока не будут решены все подзадачи из S. Далее из всех полученных решений выбираем то, которое доставляет целевой функции наибольшее значение(при решении задач максимизации).

<u>Замечание</u>Эффективность метода можно повысить, если не рассматривать подзадачи для областей, которые заведомо не содержат оптимальные решения исходной задачи.



K_3 - нецелая, оптимальное значение целевой функции f_3

K_1 - нецелое

K_2 - целое, оптимальное значение целевой функции f_2

Так как областиK_3 не удовлетворяют условию целочисленности, то G_2 нужно разбивать на подобласти, добавляя в S подзадачи. Однако, если $f_3 \leq f_2$, то подзадачу для G_2, равно как и порождённые ей подзадачи можно не рассматривать.

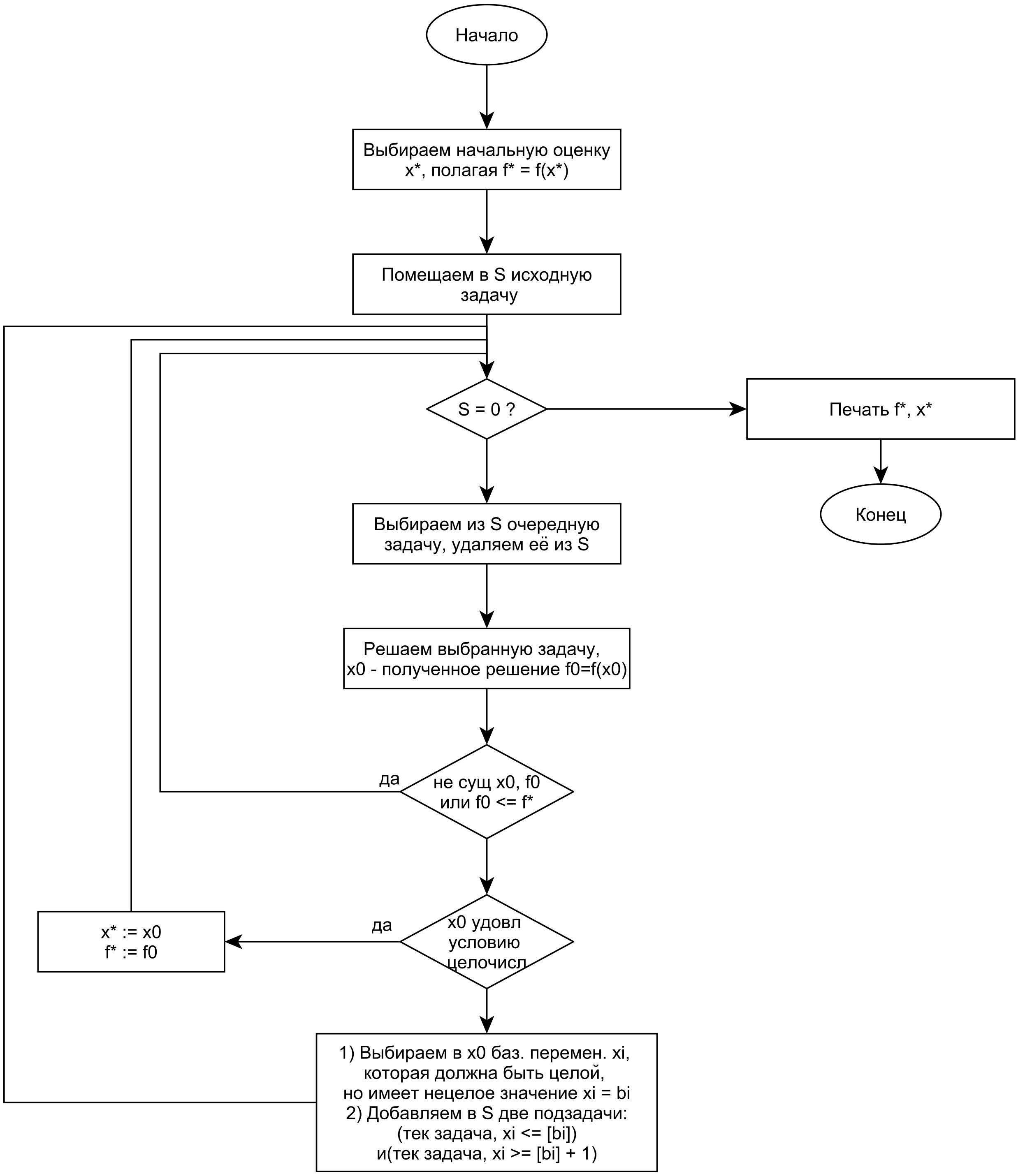
Эти соображения приводят к алгоритму, в процессе которого будут использоваться:

1. S - список подзадач

2. x_*, f_* - некоторое решение исходной ЗЦП, которое будем называть оценкой оптимального решения

   В конце работы алгоритма x_* - оптимальное решение исходной ЗЦП, $f_* = f(x_*)$

2 Метод ветвей и граний для решений ЗЦП



<u>Замечание</u> 1) О выборе начальных значений x_*, f_* а) если все $c_j \geq 0$, то можно взять $x_* = (0, ..., 0)$, $f_* = 0$

б) можно взять в качестве x_* любое допустимое решение ЗЦП, $f_* = f(x_*)$

в) в крайнем случае можно взять $f_* = -\infty$

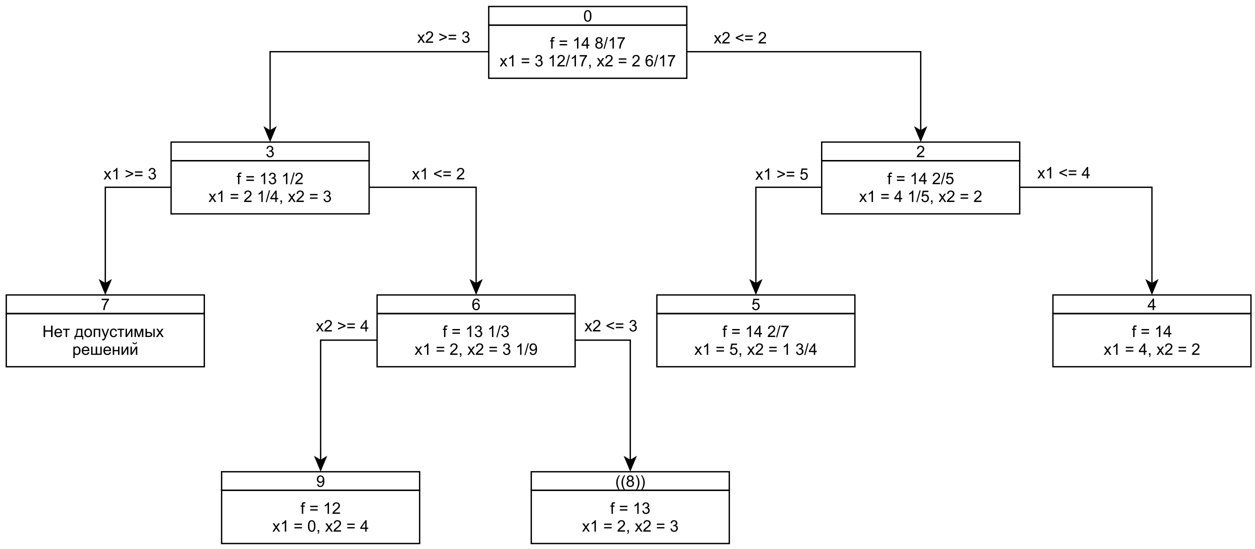
2) Если задача полность целочисленная, а все коэффициенты целевой функции целые $y \in \mathbb{Z}$, то условие $\boxed{\nexists x_0, f_0 \text{ или } f_0 \leq f_*}$ можно заменить более эффективным условием $\boxed{\nexists x_0, f_0 \text{ или } [f_0] \leq f_*}$

Например $\begin{matrix} f_* = 10 \\ f_0 = 10.8 \end{matrix}$, $f = \sum_{j=1}^{n} \underset{\in\mathbb{Z}}{c_j} \underset{\in\mathbb{Z}}{x_j}$

Пример

$$\begin{cases} f = 2x_1 + 3x_2 \to max \\ 5x_1 + 7x_2 \leq 35 \\ 4x_1 + 9x_2 \leq 36 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Оптимальное - $(3\frac{12}{17}, 2\frac{6}{17})$



Возможные реализации метода ветвей и границ.

Шаг	0	1	2	3	4	5
Номер задачи	—	1	2	4	5	3
S	{1}	{2, 3}	{3, 5, 4}	{3, 5}	{3}	{}
f_*, x_*	$x_* = (0,0)$ $f_* = 0$	$x_* = (0,0)$ $f_* = 0$	$x_* = (0,0)$ $f_* = 0$	$x_* = (4,2)$ $f_* = 14$	$x_* = (4,2)$ $f_* = 14$	{}

$$\Rightarrow \begin{matrix} x_1* = 4 \\ x_2* = 2 \\ f* = 14 \end{matrix}$$

5 шагов.

1	3	7	6	8	9	2	5	4
2,3	2,6,7	2,6	2,8,9	2,9	2	4,5	5	{}
$f_* = 0$	•	•	•	$f_* = 13$	•	•	•	opt

9 шагов.

Замеч

Основной недостаток метода заключается в том, что он не даёт точных предписаний как о выборе нецелой переменной, используемой для порождения подзадачи из S.

2) метод ветвей и границ ещё можно назвать методом обрубания ветвей. Если к некоторому шагу имеется оценка(нижняя граница) f_* оптимального решения, то все ветви, порождаемые подзадачей $f_0 \leq f_*$

можно отбросить.

Постановка задач целочисленного программирования

В настоящем пункте мы рассмотрим содержательные задачи, которые в исходной постановке не являются задачами целочисленного программирования, однако, могут быть сведены к ним с использованием различных приёмов.

1 Задача коммивояжера.

Содержательная постановка:

имеется n городов. Стоимость проезда из i-го города в j-й составляет $c_{ij} \geq 0$ единиц. Допускается случай с $c_{ij} = +\infty$, это значит, что из i-го в j-й нельзя проехать напрямую.

Коммивояжер должен объехать все эти города, начав и закончив движение в одном и том же городе, побывав в каждом городе ровно один раз и так, чтобы суммарная стоимость переезда была минимальна.

Введём переменные

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{Если маршрут включает непосредственно переезд из i-го города в j-й} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

В этом случае, стоимость переездов $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_i j x_i j$

Условие того, что коммивояжёр въезжает в каждый город ровно 1 раз, $\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1$, $j = 1..n$ (а)

Условие того, что из каждого города к-р выезжает ровно 1 раз: $\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1$, $i = 1..n$ (б)

Условие $\begin{cases} \text{(а)} \\ \text{(б)} \\ x_{ij} \in \{0, 1\} \end{cases}$

не полностью определяет множество допустимых решений т.к., например $x = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ из первого во второй и обратно. из третьего в четвёртый и обратно.

Опр Будем говорить, что матрица X задаёт полный цикл, если $\exists$ последовательность $i_1, ..., i_{n-1}$ значений индексов, такая, что $x_{1,i_1} = x_{i_1,i_2} = ... = x_{i_{n-2},i_{n-1}} = x_{i_{n-1},1} = 1$, а все остальные $x_{ij} = 0$

Математическая постановка задачи коммивояжёра:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_i j x_i j \to min & (1) \\ \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, j = 1..n & (2) \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, i = 1..n & (3) \\ x_{ij} \in \{0, 1\} & (4) \\ (x_{ij}) \text{ задаёт полный цикл} & (5) \end{cases}$$

Замечание (4) $\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x_{ij} \leq 1 \\ x_{ij} \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Таким образом, задача (1)-(4) является ЗЦП.

Задачу (1)-(4) можно рассмотреть как ЗЦП с дополнительным ограничением (5). Однако, использование симплекс-метода для её решения неэффективно из-за большого количествао ограничений.

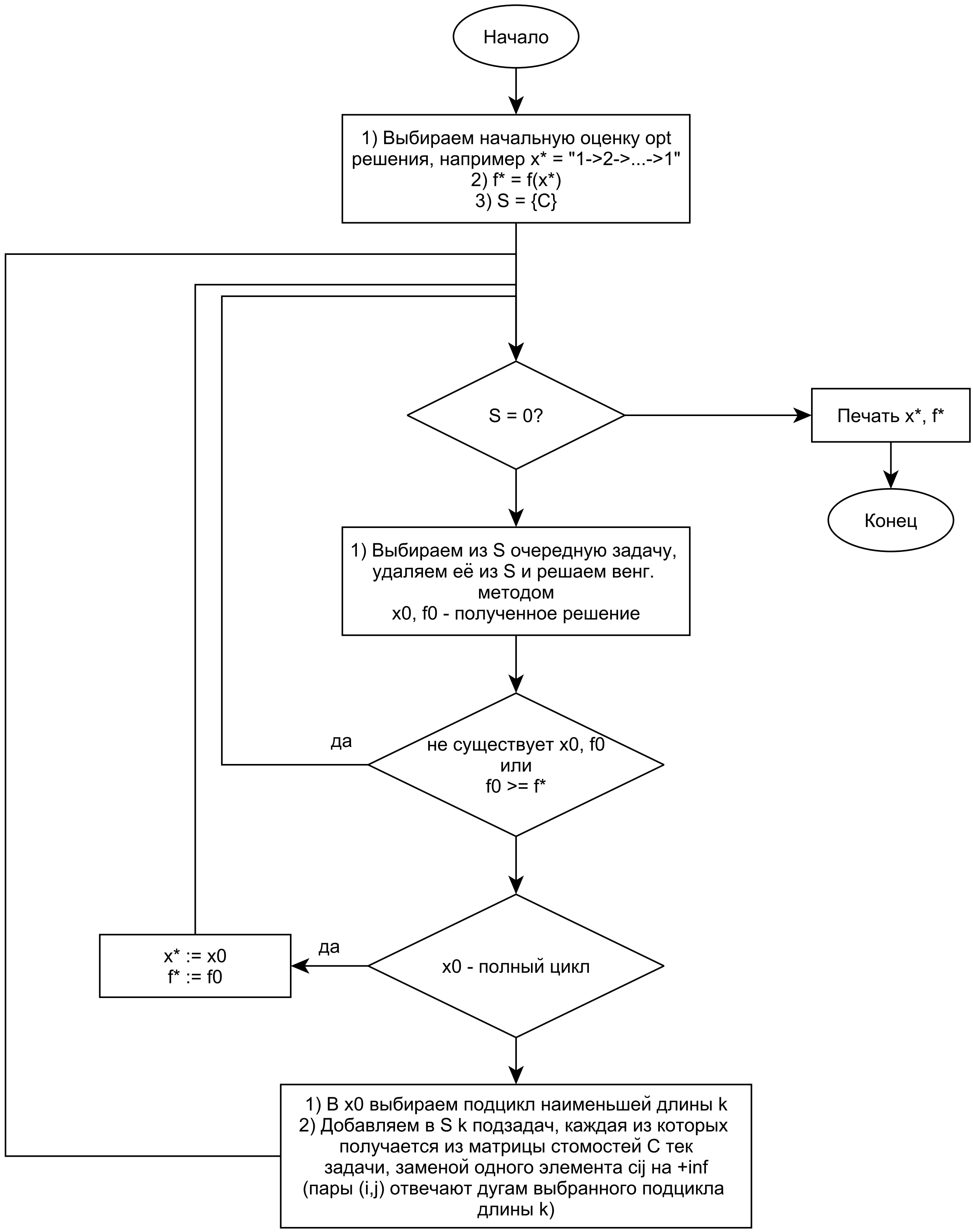
Удобнее рассматривать задачу (1)-(5) как задачу о назначениях (1)-(4) с дополнительным ограничением (5). Это позволит использовать для решения задачи коммивояжёра модификацию метода ветвей и границ: Задача (1)-(4) будет играть роль задачи с ослабленными ограничениями, а условие (5) будет играть ту же роль, которую играет условие целочисленности в методе ветвей и границ для решения ЗЦП.

Предположим, что мы решили задачу (1)-(4) с использованием венгерского метода. Если полученное решение удовлетворяет условию (5), то оно является решением исходной задачи коммивояжёра. В противном случае это решение содержит подцикл длины $k < n$.

Так как оптимальное решение исходной задачи коммивояжёра не может содержать такого подцикла, то можно утверждать, что оно не содержит по крайней мере одну из дуг цикла $i_1 \to ... \to i_k \to i_1$. Таким образом, оптимальным решением задачи коммивояжёра является оптимальное решение одной из k задач, каждая из которых получена из текущей задачи удалением одной из дуг этого подцикла.

1 Можно заведомо исключить подцикл длины 1 в оптимальных решениях задач с ослабленными ограничениями, если положить $c_{ii} = +\infty$

Блок-схема метода ветвей и границ для решения задачи коммивояжёра


Начало
1) Выбираем начальную оценку opt решения, например x* = "1->2->...->1"
2) f* = f(x*)
3) S = {C}
S = 0?
Печать x*, f*
Конец
1) Выбираем из S очередную задачу, удаляем её из S и решаем венг. методом
x0, f0 - полученное решение
да
не существует x0, f0
или
f0 >= f*
да
x* := x0
f* := f0
x0 - полный цикл
1) В x0 выбираем подцикл наименьшей длины k
2) Добавляем в S k подзадач, каждая из которых получается из матрицы стомостей C тек задачи, заменой одного элемента cij на +inf (пары (i,j) отвечают дугам выбранного подцикла длины k)

Пример

$$C = \begin{bmatrix} \infty & 7 & 1 & 8 & 7 \\ 9 & \infty & 9 & 2 & 6 \\ 2 & 12 & \infty & 11 & 10 \\ 9 & 9 & 12 & \infty & 4 \\ 8 & 1 & 12 & 10 & \infty \end{bmatrix}$$

0-й шаг) $x_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$f_* = f(x_1) = 39$

$S = \{C\}$

1-й шаг) Венгерский метод для C $\Rightarrow$

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$f_0 = 10$

$f_0 < f_* \Rightarrow x_0$ - пц? нет $1 \to 3$ и $2 \to 4 \to 5 \to 2$

Выбираем подцикл минимальной длины – $1 \to 3$

$$[C_{31} = \infty] \Rightarrow C_1 = \begin{bmatrix} \infty & 7 & \underline{\infty} & 8 & 7 \\ 9 & \infty & 9 & 2 & 6 \\ 2 & 12 & \infty & 11 & 10 \\ 9 & 9 & 12 & \infty & 4 \\ 8 & 1 & 12 & 10 & \infty \end{bmatrix}$$

$$[C_{13} = \infty] \Rightarrow C_1 = \begin{bmatrix} \infty & 7 & 1 & 8 & 7 \\ 9 & \infty & 9 & 2 & 6 \\ \underline{\infty} & 12 & \infty & 11 & 10 \\ 9 & 9 & 12 & \infty & 4 \\ 8 & 1 & 12 & 10 & \infty \end{bmatrix}$$

2 Венгерский метод для C_1:

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad f_0 = 24 \Rightarrow f_* > f_0 \Rightarrow x_0 \text{ пц } x_* = 1 \to 5 \to 2 \to 4 \to 3, f_* = 24$$

3 В.М. для C_2

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad f_0 = 23 \Rightarrow f_0 < f_* \Rightarrow x_0 \text{ пц } \Rightarrow 1 \to 3 \to 5 \to 2 \to 4 = x_0 = x_*, f_* = 23$$