Ответы на РК №2 по Исследованию Операций

Великолепный Nyaara, Несравненный Ukunsun и Бесподобный Quint

1 Постановка задачи целочисленного программирования. Описать(без обоснования) метод Гомори её решения.

Определение: Задачей целочисленного программирования (ЗЦП) называется следующая задача:

$$\begin{cases} f = c^T x \to max(1) \\ Ax = b(2) \\ x \geq 0(3) \\ x_1, ..x_p \in \mathbb{Z}(4) \end{cases}$$

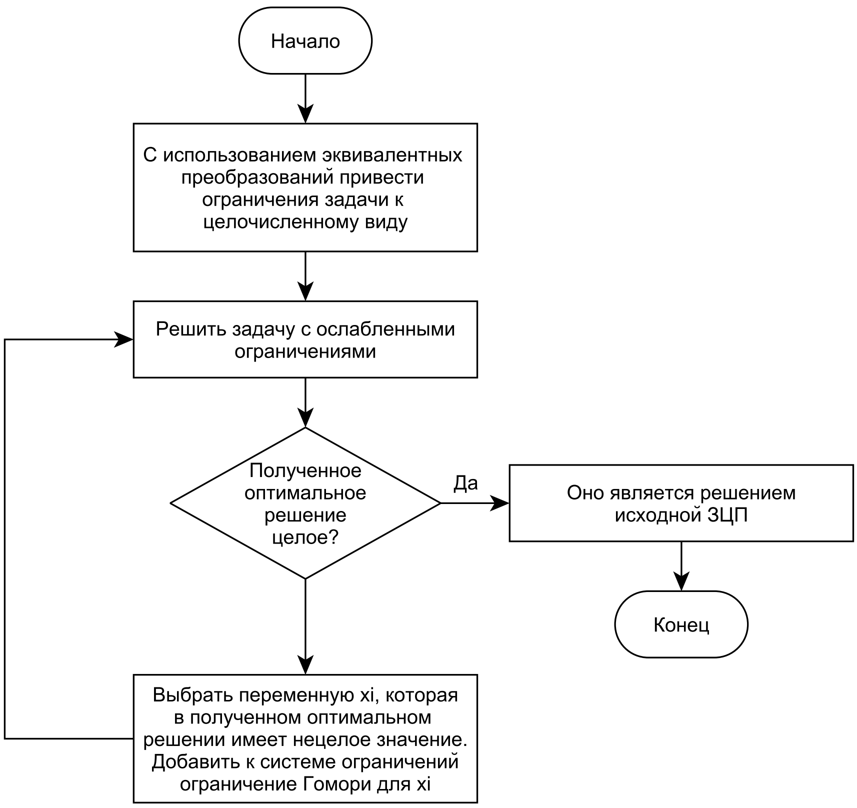
Задача (1)-(3) является "обычной"задачей линейного программирования.

Такая задача называется задачей с ослабленными ограничениями по отношению к ЗЦП (1)-(4).

Если p=n (n - число переменных), то ЗЦП (1)-(4) называется полностью целочисленной.

Если p<n, то ЗЦП (1)-(4) называется частично целочисленной.

Гомори для полностью целочисленной задачи.



Будем считать. что $a_{ij}, b_i \in \mathbb{Z}$. Если это не так, то эквивалентными преобразованиями приведём ограничения к такому виду. Рассмотриму задачу с ослабленными ограничениями:

1) Если её opt решение целочисленно, то оно является и оптимальным решением задачи целочисленного програмиирования.

2) Если оптимальное решение задачи с ослабленными ограничениями не является целочисленным, то выберем некоторую базисную переменную x_i, значение которой в найденном оптимальном решении не является целым. Рассмотрим отвечающее этой переменной ограничение из оптимальной симплекс таблицы: $x_i + \sum_{j \in S} a'_{ij} x_j = \beta_i$, где S - множество номеров небазисных переменных, а β_i - нецелое.

Тогда $x_i = b_i - \sum_{j \in S} a'_{ij} x_j$.

Представим каждый коэффициент в виде суммы целой и дробной части:

$a'_{ij} = [a'_{ij}] + f_{ij},\ f_{ij} \in [0;1)$

$\beta_i = [\beta_i] + f_i,\ f_i \in [0;1)$

Тогда

$x_i = [\beta_i] + f_i - \sum_{j \in S}([a'_{ij}] + f_{ij})x_j$

$\Rightarrow x_i - [\beta_i] + \sum_{j \in S}[a'_{ij}]x_j = f_i - \sum_{j \in S} f_{ij} x_j$. Где $x_i - [\beta_i] + \sum_{j \in S}[a'_{ij}]x_j$ - целое

Тогда $f_i > 0 +$ целое $= \sum_{j \in S} f_{ij} x_j$

$$\left.\begin{matrix} f_{ij} \geq 0 \\ x_j \geq 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \sum_{j \in S} f_{ij} x_j \geq 0$$

Т.к. $0 < f_i < 1 \Rightarrow$ целое $\geq 0 \Rightarrow \sum_{j \in S} f_{ij} x_j \geq f_i$

Полученное неравенство называется отсечением Гомори. Оно является необходимым условием целочиеленности.

Пример

$$\begin{cases} f = 7x_1 + 9x_2 \to max \\ -x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ x_1 + \frac{1}{7}x_2 \leq 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Приведём к стандартному виду:

$$\begin{cases} f = 7x_1 + 9x_2 \to max \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 \\ 7x_1 + x_2 + x_4 = 35 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ит.	БП	Зн.	x_1	x_2	x_3	x_4	
0	x_3	6	-1	$\boxed{3}$	1	0	x_3 из базиса
	x_4	35	7	1	0	1	
	-f	0	7	9	0	0	x_2 в базис
2	x_2	2	-1/3	1	1/3	0	
	x_4	33	$\boxed{22/3}$	0	-1/3	1	x_4 из базиса
	-f	-18	10	0	-3	0	x_1 в базис
2	x_3	-7/2	0	1	7/22	1/22	
	x_1	9/2	1	0	-1/22	3/22	
	-f	-63	0	0	-28/11	-15/11	

Оптимальное решение $x^O = \left(\frac{9}{2}, \frac{7}{2}\right)$

Можно построить дополнительное ограничение для x_1 или x_2. Построим для x_2:

Из оптимальной симплекс таблицы $x_2 + 7/22x_3 + 1/22x_4 = 7/2$

$\beta_2 = 7/2 = [7/2] + \{7/2\} = 3 + 1/2$

$a'_{23} = 7/22 = 0 + 7/22$

$a'_{24} = 1/22 = 0 + 1/22$

$f_2 = 1/2$

$f_{23} = 7/22$

$f_{24} = 1/22$

$\sum_{j \in S} f_{ij} x_j \geq f_i$

$7/22x_3 + 1/22x_4 \geq 1/2$ Дополнительное ограничение(отсечение Гомори)

Приведём к стандартной форме

$7/22x_3 + 1/22x_4 - x_5 + x_6 = 1/2$

$w = -x_6 = -1/2 + 7/22x_3 + 1/22x_4 - x_5 \rightarrow max$

Ит.	БП	Зн.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
3	x_2	7/2	0	1	7/22	1/22	0	0	
	x_1	9/2	1	0	-1/22	3/22	0	0	
	x_6	1/2	0	0	7/22	1/22	-1	1	x_6 из базиса
	-f	-63	0	0	-28/11	-15/11	0	0	
	-w	1/2	0	0	1/22	1/22	-1	0	x_3 в базис

2 Постановка задачи целочисленного программирования. Описать и обосновать метод ветвей и границ её решения. Дать геометрическую интерпретацию метода.

Постановку задачи см. в 1.

Рассмотрим ЗЦП:

$$\begin{cases} f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i = 1..m \\ x_j \geq 0, j = 1..n \\ x_j \in \mathbb{Z}, j = 1..p \end{cases}$$

Полностью или частично задача является целочисленной – неважно.

Предположим, что мы нашли оптимальное решение задачи с ослабленными ограничениями. Если это решение удовлетворяет условию целочисленности, то оно является оптимальным решением ЗЦП. В противном случае выберем базисную переменную x_i, которая должна быть целой, но в полученном оптимальном решении имеет нецелое значение β_i.

В этом случе. оптимальное решение ЗЦП содержится в одной из двух подобластей: G_1 или G_2.

Таким образом, что оптимальное решение исходной ЗЦП совпадает с оптимальным решением одной из подзадач:

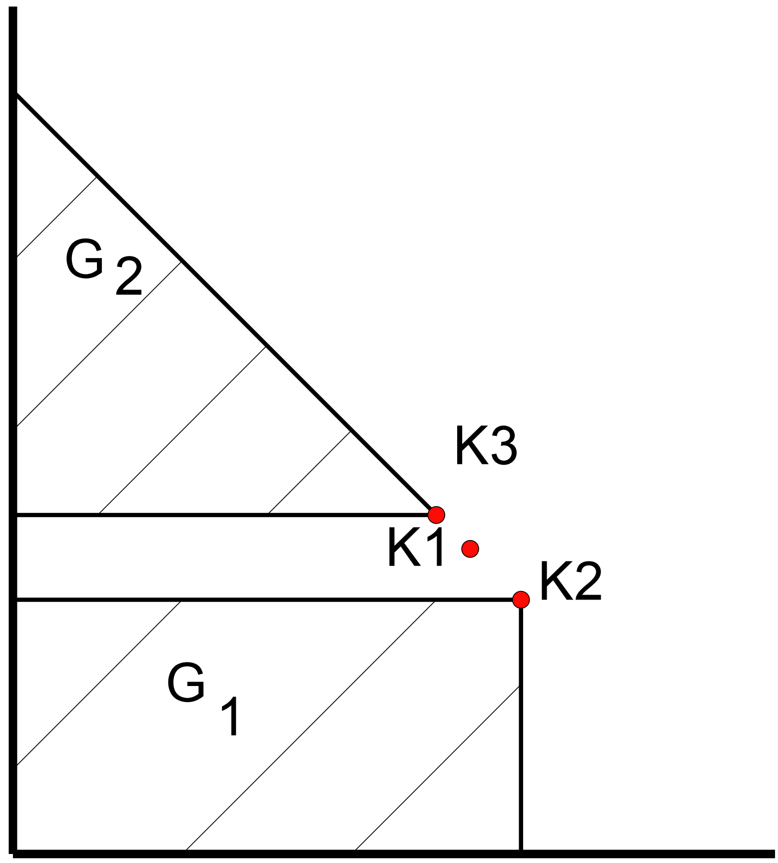
$$\begin{cases} \text{исх. ЗЦП} \\ + \\ \text{доп ограничение } x_i \leq [\beta_i] \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \text{исх. ЗЦП} \\ + \\ \text{доп ограничение } x_i \geq [\beta_i] \end{cases}$$

Помещаем обе задачи в список подзадач S. Далее берём из S одну из подзадач, решаем её(с ослабленными ограничениями), если полученное решение удовлетворяет условию целочисленности, то запоминаем его, если нет, то добавляем в S новые подзадачи, которые порождает рассмотренная подзадача. Так продолжаем до тех пор, пока не будут решены все подзадачи из S. Далее из всех полученных решений выбираем то, которое доставляет целевой функции наибольшее значение(при решении задач максимизации).

Замечание: Эффективность метода можно повысить, если не рассматривать подзадачи для областей, которые заведомо не содержат оптимальные решения исходной задачи.



K_3 - нецелая, оптимальное значение целевой функции f_3

K_1 - нецелое

K_2 - целое, оптимальное значение целевой функции f_2

Так как областиK_3 не удовлетворяют условию целочисленности, то G_2 нужно разбивать на подобласти, добавляя в S подзадачи. Однако, если $f_3 \leq f_2$, то подзадачу для G_2, равно как и порождённые ей подзадачи можно не рассматривать.

Эти соображения приводят к алгоритму, в процессе которого будут использоваться:

1) S - список подзадач.

2) x_*, f_* - некоторое решение исходной ЗЦП, которое будем называть оценкой оптимального решения.

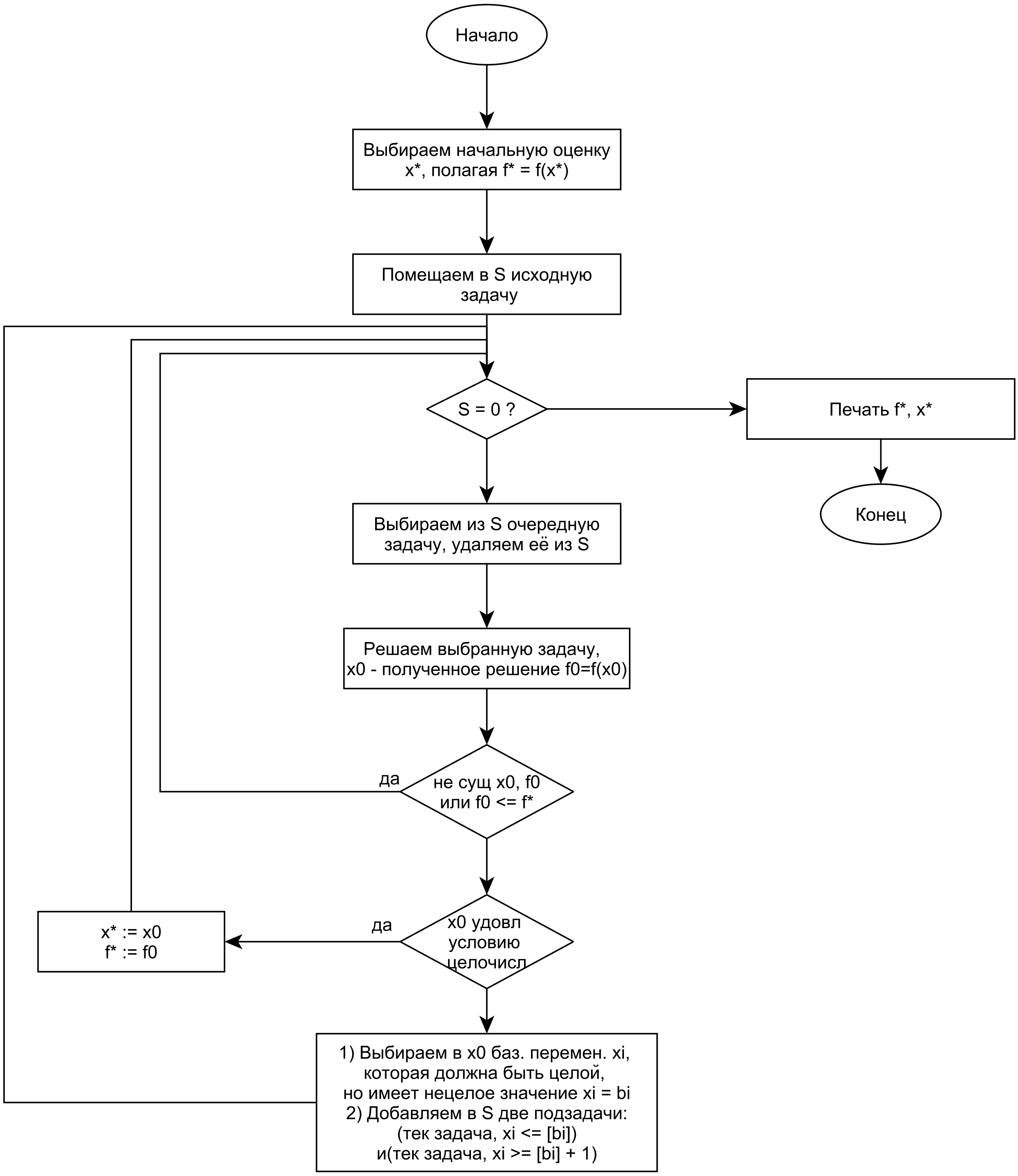
В конце работы алгоритма x_* - оптимальное решение исходной ЗЦП, $f_* = f(x_*)$.

Замечание о выборе начальных значений x_*, f_*:

а) если все $c_j \geq 0$, то можно взять $x_* = (0, ..., 0)$, $f_* = 0$;

б) можно взять в качестве x_* любое допустимое решение ЗЦП, $f_* = f(x_*)$;

в) в крайнем случае можно взять $f_* = -\infty$.



Замечание:

Основной недостаток метода заключается в том, что он не даёт точных предписаний как о выборе нецелой переменной, используемой для порождения подзадачи из S.

Метод ветвей и границ также можно назвать методом обрубания ветвей. Если к некоторому шагу имеется оценка (нижняя граница) f_* оптимального решения, то все ветви, порождаемые подзадачей $f_0 \leq f_*$, можно отбросить.

③ Постановка задачи коммивояжёра и её связь с задачей о назначениях. Описать метод ветвей и границ решения задачи коммивояжёра.

Содержательная постановка: имеется n городов. Стоимость проезда из i-го города в j-й составляет $c_{ij} \geq 0$ единиц. Допускается случай с $c_{ij} = +\infty$ (это значит, что из i-го в j-й нельзя проехать напрямую). Коммивояжер должен объехать все эти города, начав и закончив движение в одном и том же городе, побывав в каждом городе ровно один раз и так, чтобы суммарная стоимость переезда была минимальна.

Введём переменные:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если маршрут включает непосредственно переезд из i-го города в j-й} \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$$

В этом случае, стоимость переездов f $= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$.
Условие того, что коммивояжёр въезжает в каждый город ровно 1 раз: $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1$, $j = 1..n$. (a)
Условие того, что из каждого города к-р выезжает ровно 1 раз: $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1$, $i = 1..n$. (б)

Условия (a), (б) и $x_{ij} \in \{0,1\}$ не полностью определяют множество допустимых решений, например:

$$x = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Опр: Будем говорить, что матрица X задаёт полный цикл, если $\exists$ последовательность $i_1, ..., i_{n-1}$ значений индексов, такая, что $x_{1,i_1} = x_{i_1,i_2} = ... = x_{i_{n-2},i_{n-1}} = x_{i_{n-1},1} = 1$, а все остальные $x_{ij} = 0$.

Математическая постановка задачи коммивояжёра:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_i j x_i j \to min & (1) \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, j = 1..n & (2) \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, i = 1..n & (3) \\ x_{ij} \in \{0,1\} & (4) \\ (x_{ij}) \text{ задаёт полный цикл} & (5) \end{cases}$$

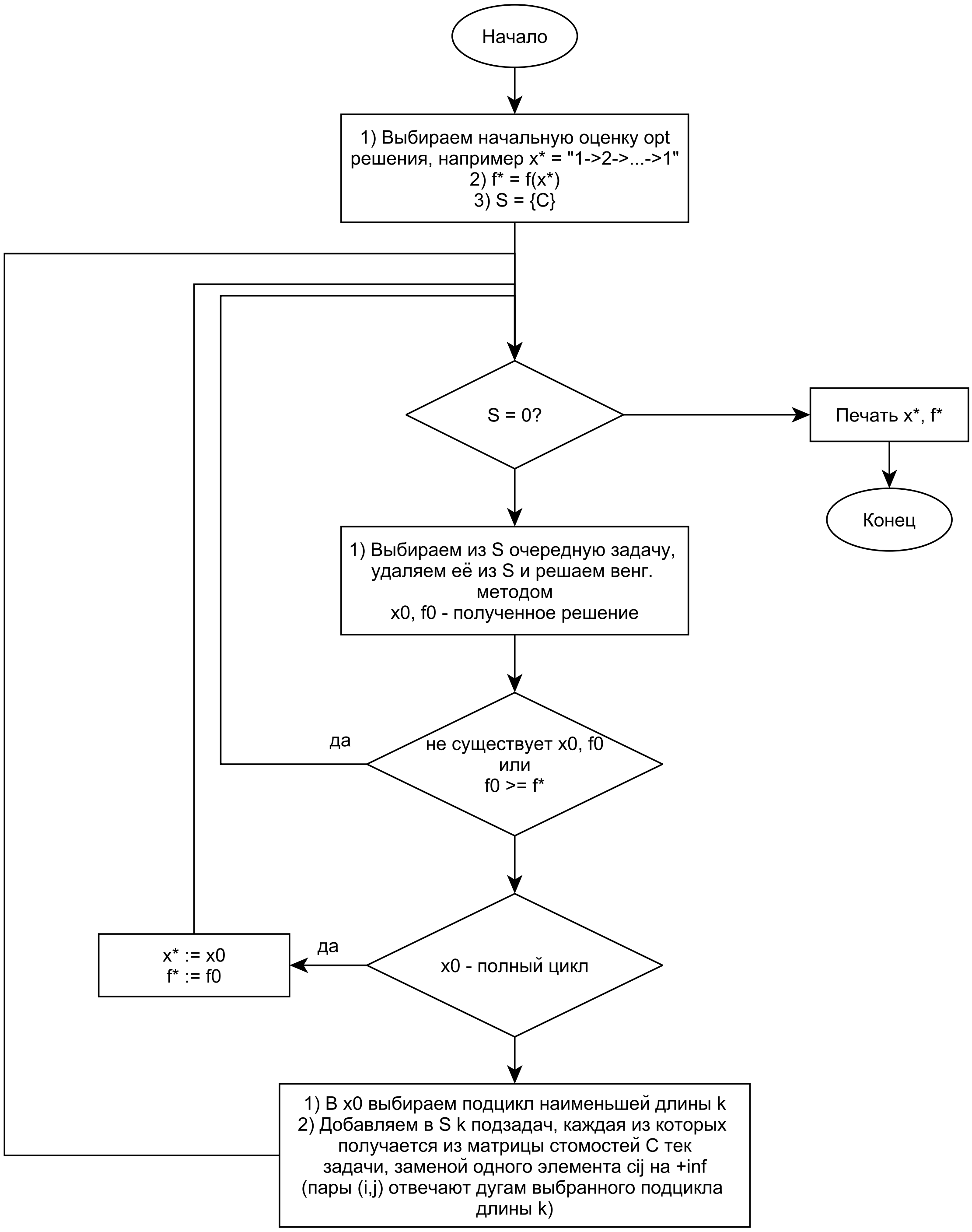
Замечание: Условие (4) можно заменить на условия $\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x_{ij} \leq 1 \\ x_{ij} \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Таким образом, задача (1)-(4) является ЗЦП. Задачу (1)-(5) можно рассмотреть как ЗЦП с дополнительным ограничением (5). Однако, использование симплекс-метода для её решения неэффективно из-за большого количествао ограничений.

Удобнее рассматривать задачу (1)-(5) как задачу о назначениях (1)-(4) с дополнительным ограничением (5). Это позволит использовать для решения задачи коммивояжёра модификацию метода ветвей и границ: Задача (1)-(4) будет играть роль задачи с ослабленными ограничениями, а условие (5) будет играть ту же роль, которую играет условие целочисленности в методе ветвей и границ для решения ЗЦП.

Предположим, что мы решили задачу (1)-(4) с использованием венгерского метода. Если полученное решение удовлетворяет условию (5), то оно является решением исходной задачи коммивояжёра. В противном случае это решение содержит подцикл длины $k < n$.

Так как оптимальное решение исходной задачи коммивояжёра не может содержать такого подцикла, то можно утверждать, что оно не содержит по крайней мере одну из дуг цикла $i_1 \to ... \to i_k \to i_1$. Таким образом, оптимальным решением задачи коммивояжёра является оптимальное решение одной из k задач, каждая из которых получена из текущей задачи удалением одной из дуг этого подцикла.



4 Постановка транспортной задачи. Понятие транспортной таблицы. Сбалансированная и несбалансированная задачи. Сведение несбалансированной задачи к сбалансированной и экономическая интерпретация соответствующей модели. Записать ограничения сбалансированной задачи в виде, отвечающем сети.

Содержательная постановка: Имеется m производителей некоторой однородной продукции. Мощность i-го производителя обозначим $S_i > 0$. Имеется n потребителей этой продукции, мощзность j-го потребителя обозначим $D_j > 0$. Предполагается, что $\sum_{i=1}^{m} S_i = \sum_{j=1}^{n} D_j$. Стоимость перевозки единицы продукции от i-го производителя к j-му потребителя составляет $c_i j \geq 0$. Требуется:

1) Перевезти всю продукцию от производителей к потребитялм с учётом ограничений по мощности.

2) Общая стоимость перевозок должна быть минимальной.

Математическая постановка

Введём переменные $x_{ij} \geq 0$ - объём продукции, перевозимой от i-го производителя к j-му потребителю. Тогда:

$$\begin{cases} f = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to min \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = S_i, i = 1..m \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = D_j, j = 1..m \\ x_i j \geq 0, i = 1..m, j = 1..n \end{cases}$$

, где $\sum_{i=1}^{m} S_i = \sum_{j=1}^{n} D_j$ (*)

Сбалансированные и несбалансированные задачи.

При выполнении (*) задача называется сбалансированной. Если это не так, то:

1) Если $\sum_{i=1}^{m} S_i > \sum_{j=1}^{n} D_j$, то можно ввести фиктивного потребителя, мощность которого $D_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} S_i - \sum_{j=1}^{n} D_j$. При этом, полагаем, что $c_{i,n+1} = 0, i = 1..m$. Содержательная интерпретация такова: продукции произведено больше, чем требуется, необходимо оптимальным образом насытить потребителей.

2) $\sum_{i=1}^{m} S_i < \sum_{j=1}^{n} D_j$, то можно ввести фиктивного производителя мощностью $S_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} D_j - \sum_{i=1}^{m} S_i$, при этом $c_{m+1,j} = 0, j = 1..n$. Содержательная интерпретация такая: проидукции произведено меньше, чем требуется. Необходимо оптимальным образом перевезти то, что произведено.

Понятие транспортной таблицы.

Условия задачи и план перевозок можно описать с помощью транспортной таблицы:

	D_1	...	D_j	...	D_n
S_1	$x_{11} \mid c_{11}$	...	$x_{ij} \mid c_{1j}$	...	$x_{1n} \mid c_{1n}$
...					
S_j	$x_{i1} \mid c_{i1}$	...	$x_{ij} \mid c_{ij}$	...	$x_{in} \mid c_{in}$
...					
S_m	$x_{m1} \mid c_{m1}$	...	$x_{mj} \mid c_{mj}$	...	$x_{mn} \mid c_{mn}$

Записать ограничения сбалансированной задачи в виде, отвечающем сети.

[??????????????????? - в лекциях в явном виде нету.]

5 Постановка транспортной задачи, понятие транспортной таблицы. Обосновать утверждение о числе независимых ограничений сбалансированной задачи. Описать методы нахождения начального базисного допустимого решения и симплексный метод решения задачи.

Постановку ТЗ смотри в 4.

Очевидно, что транспортная задача – ЗЛП с m*n переменными и может быть решена с использованием симплекс-метода. Однако, последнее неэффективно ввиду большой размерности задачи. Для решения транспортной задачи разработана модификация симлпекс-метода, которая называется симплексным методом или методом потенциала.

Основные идеи симплексного метода

а) Рассмотрим систему ограничений ТЗ в координатной форме.

$$\begin{cases} x_{11} + ... + x_{1n} = S_1 \\ x_{21} + ... + x_{2n} = S_2 \\ ... \\ x_{m1} + ... + x_{mn} = S_m \\ x_{11} + ... + x_{m1} = D_1 \\ x_{12} + ... + x_{m2} = D_2 \\ ... \\ x_{1n} + ... + x_{mn} = D_n \end{cases}$$

Сложим n последних ограничений и вычтем из полученной суммы сумму m-1 первых ограничений:
$x_{m1} + ... + x_{mn} = (D_1 + ... + D_n) - (S_1 + ... + S_{m-1}) = S_m$ (т.к. задача сбалансирована).

Таким образом одно из m+n ограничений является избыточным, и число независимых ограничений не более m+n–1. В то же время с использованием примера можно показать, что исключение двух или более ограничений приведёт к рассмотрению множества допустимых решений. Таким образом, сбалансированная транспортная задача имеет m+n–1 независимых ограничений, а любое БДР содержит m+n–1 базисных переменных.

б) Составим задачу, двойственную к транспортной задаче.

Пусть ограничениям $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = S_i, i = 1..m$ отвечают переменные u_i, а ограничениям $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = D_j, j = 1..m$ отвечают переменные v_j. Тогда:

$$\begin{cases} g = \sum_{i=1}^{m} S_i u_i + \sum_{j=1}^{n} D_j v_j \to max \\ u_i + v_j \leq c_{ij}, i = 1..m, j = 1..n \\ u_i, v_j \text{ не ограничены в знаке} \end{cases}$$

Из доказанных ранее соотношений двойственности следует, что:

1) x_{ij} удовлетворяют ограничениям прямой задачи.

2) u_i, v_j удовлетворяют ограничениям двойственной задачи.

3) $x_{ij}(c_{ij} - u_i - v_j) = 0$.

То в этом случае x_{ij} – оптимальное решение прямой задачи, а u_i, v_j - двойственной.

На этих самых соображениях основан симплексный метод, общая схема которого такова:

1) Находим БДР прямой задачи.

2) Это решение итерационно улучшаем так, чтобы на каждом шаге выполнялись условия (1) и (3).

3) При выполнении условия (2) вычисления заканчивают.

Для построения начального базисного допустимого решения мы рассмотрим 2 метода: метод северо-западного угла и метод min стоимости.

Метод северо-западного угла. Всегда берём верхний левый угол. Далее берём минимум из S_i и D_j левого верхнего угла, вычитаем этот минимум из обоих чисел, и убираем строку или столбец (в зависимости от минимума).

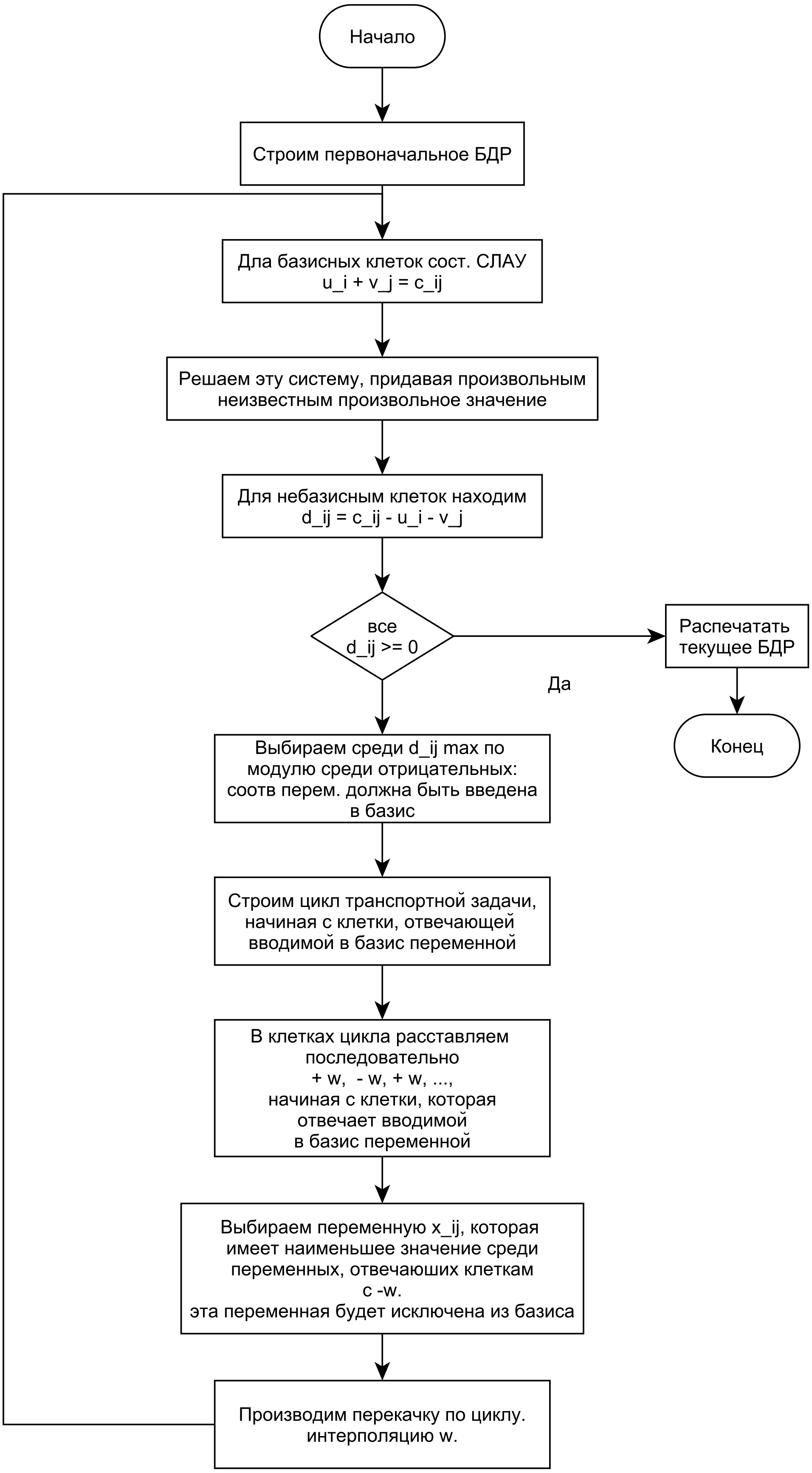
•	$D_1 = 5$	$D_2 = 25$	$D_3 = 10$	$D_4 = 10$
$S_1 = 10$	5|-	5-	-	-
$S_2 = 15$	|	15-	-	-
$S_3 = 25$	|	5|-	10|-	10

m+n–1 = 6 базисных переменных.

Метод минимальной стоимости. Отличается от метода С-З угла лишь выбором очередной переменной для включения в базис. В методе минимальной стоимости выбирается не левая верхняя клетка оставшейся таблицы, а та, которая отвечает минимальной c_{ij}.

•	$D_1 = 10$	$D_2 = 10$	$D_3 = 1510$	$D_4 = 10$
$S_1 = 5$	- | 5	- | 6	- | 3	5 | 1 (1)
$S_2 = 15$	5 | 7 (6)	10 | 2 (3)	- | 2	- | 5
$S_3 = 25$	5 | 4 (5)	- | 7	15 | 1 (2)	5 | 4 (4)

В круглых скобках – порядок выбора.



Блок схема симплексного метода (метода потенциалов)

6 Постановка транспортной задачи. Доказать, что если мощности источников и стоков являются целыми числами, то задача имеет целочисленное решение.

Постановку ТЗ см. в 4.

Опр: СЛАУ называется треугольной, если выполняются два следующих условия:

1) Эта система содержит по крайней мере одно уравнение, в левой части которого находится ровно одна неизвестная.

2) После исключения этой неизвестной из системы она также будет обладать свойством 1.

Теорема: Пусть зафиксировано некоторое БДР транспортной задачи. Предположим, что из транспортной задачи вычеркнуты небазисные переменные (т.е. они равны нулю). Тогда оставшаяся система является треугольной.

Докозательство:

1) Пусть транспортная таблица имеет размерность m на n. Нужно показать, что некоторая строка и некоторый столбец содержит ровно одну БП.

Предположим противное, что в каждой строке и каждом столбце не менее двух базисных переменных. Тогда общее число N базисных переменных: $N \geq 2 * max\{m, n\} \geq m + n$. В то же время, число базисных переменных равно $m + n - 1$. **Противоречие** $\Rightarrow$ по крайней мере одна строка/столбец содержит одну базисную переменную.

2) Исключим эту переменную из системы ограничений изменив мощности источников истоков. К полученной таблице можно применить те же самые рассуждения $\Rightarrow$ оставшаяся система так же будет содержать строку или столбец с одной базисной переменной.

■

Теорема: Пусть x_{ij} базисная переменная в некотором БДР транспортной задачи. Тогда значение x_{ij} задаётся соотношением вида $x_{ij} = \pm \sum_{\text{по некот. p}} S_p \mp \sum_{\text{по некот. q}} D_q$ (*).

Докозательство:

Так как значения БП задаются треугольной системой, то некоторое уравнение содержит в левой части ровно 1 неизвестную x_{pq}. Тогда $x_{pq} = S_p$, если $S_p \leq D_q$ (а) или $x_{pq} = D_q$, если $S_p > D_q$ (б).

Исключим x_{pq} из системы, тогда в правых частях оставшихся уравнений будут стоять величины:

1) (а): $-S_p + D_q$ или D_q

2) (б): $+S_p - D_q$ или S_p

Применяя к оставшей системе приведённые рассуждения, получим (*).

■

Следствие: Если $S_i, i = 1..m$ и $D_j, j = 1..n$ являются целочисленными, то любое БДР ТЗ будет целочисленным.

Опр: Такая транспортная задача называется классической.

7 Постановка задачи о назначениях и задачи коммивояжёра, связь между ними. Сведение задачи о назначениях к задаче целочисленного программирования и к транспортной задаче. Записать транспортную таблицу, отвечающую задаче.

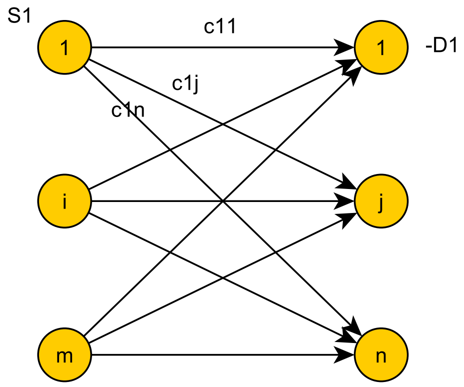
Постановку задачи коммивояжера и задачи о назначениях, а также связь между ними см. в 3.

Задача о назначениях является частным случаем транспортной задачи, когда m = n, а $S_i = D_i = 1$. Условие $x_{ij} \in \{0, 1\}$ можно заменить условием $x_{ij} \geq 0$, т.к. мы показали ранее, что если все мощности $S_i, D_j \in \mathbb{Z}$, то $x_{ij} \in \mathbb{Z}$ (*доказательство см. в 6, в самом конце*).

Замечание: Любое БДР задачи о назначениях будет вырождено, т.к. баз. переменных 2n - 1, а любое допустимое решение содержит лишь n переменных $\Rightarrow$ некоторые базисные переменные будут раны нулю.

(8) Постановка транспортной задачи с промежуточными пунктами. Описать алгоритм её приведения к транспортной задаче.

В (обычной) ТЗ были m источников и n стоков. Условие этой задачи можно сформулировать с использованием орграфа, или, как принято говорить в ИО, ориентированной сети.



Замечание: Мы намеренно указываем мощность стоков со знаком -, чтобы показать, что в соответствующих пункта продукция выводится из транспортной системы.

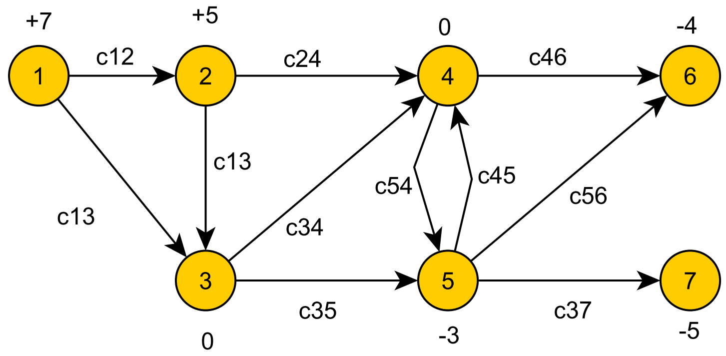
Соответственно этим обозначением ограничения ТЗ удобно записывать в виде:

$x_{i1} + ... + x_{in} = S_i$, $i = 1..m$

$-x_{ij} - ... - x_{nj} = -D_j$, $j = 1..n$

В ТЗ с промежуточными пунктами помимо пунктов, из которых продукция может только вывозиться, и пунктов, в которые она может только ввозиться, могут присутствовать пункты, в которые продукция может как ввозиться, так и вывозиться.

Пример: Крупная торговая компания имеет сеть складов в регионе, структура которой изображена на рисунке.



Из пункта №1 продукцию можно только вывозить ⇒ пункт №1 называется источником. В пункты №6, №7 можно только завозить ⇒ они называются стоками. Остальные пункты называются промежуточными.

$c_{ij} \geq 0$ - стоимость перевозки педингицы продукции из i-го в j-й пункты.

Каждый пункт характеризуется числом, которое мы бдуем называть величиной "чистого запаса"в этом пункте и обозначим T_k, где k - номер пункта. Величина $T_k > 0$ означает, что в соответствующем пункте имеется избыток продукции, а $T_k < 0$ – недостаток. Значение $T_k = 0$ означает, что после всех перевозок объём продукции в k-м пункте не должэен измениться.

В нашем примере:

$$\left.\begin{array}{r}\sum_{T_k>0} T_k = 7+5 = 12 \\ \sum_{T_k<0} T_k = -3-4-5 = -12\end{array}\right\} \Rightarrow \text{сбаланисированная задача}$$

Пусть $x_{ij} \geq 0$ - объём продукции, перевозимой из i-го пункта в j-й. Тогда стоимость перевозок $f = \sum_{(i,j)\in \text{ сети}} c_{ij}x_{ij} \to min.$

Каждое ограничение имеет вид:

– {объём продукции, ввозимой в k-й пункт} + {объём продукции, вывозимой из k-го пункта} = T_k

В нашем примере получаем систему ограничений.

Пункт	x_{12}	x_{13}	x_{23}	x_{24}	x_{34}	x_{35}	x_{45}	x_{46}	x_{54}	x_{56}	x_{57}	
1	1	1										+7
2	-1		1	1								+5
3		-1	-1		1	1						0
4				-1	-1		1	1	-1			0
5						-1	-1		1	1	1	-3
6								-1		-1		-4
7											-1	-5

Таким образом приходим к ЗЛП. Эту задачу можно решить симплекс-методом, но мы покажем, как свести её к ТЗ. Основная идея:

1) Если пункт только источник ⇒ останется источкником.

2) Если только сток ⇒ останется стоком.

3) Если и источник и сток ⇒ два новых пункта (источник и сток), соединённые связью 0 в оба направления.

<u>Алгоритм сведения к ТЗ:</u>

1) Для каждого источника k резервируем в транспортной таблице строку, можность соответствующего источника $S_i = T_k$.

2) Для каждого стока k задачи с промежуточными пунктами резервируем в транспортной таблице столбце, мощность соответствующего стока $D_j = T_k + B$, где B - общий объём перевозимой в системе продукции(в нашем примере B = 12).

3) Для каждого промежуточного пункта резервируем в транспортной таблице и строку и столбец. Мощность соотвтствующего источника $S_i = -T_k$, мощность соответствующего стока $D_j = B$.

4) Ввести переменные $x_{ij} \geq 0$ только для тех дуг, которые существуют в исходной сети, соответствующие стоимости c_{ij} принять равными стоимостям перевозок по соответствующим дугам исходной сети. Для промежуточных пунктов также ввести переменные x_{kk}, $c_{kk} = 0$.

•	Стоки	12	12	12	12	4	5
Мощности	Пункт	2	3	4	5	6	7
$S_1 = 7$	1	$\mid c_{12}$	$\mid c_{13}$	•	•	•	•
$S_2 = 5 + 12 = 17$	2	$\mid 0$	$\mid c_{23}$	$\mid c_{24}$	•	•	•
$S_3 = 0 + 12 = 12$	3	•	$\mid 0$	$\mid c_{34}$	$\mid c_{35}$	•	•
$S_4 = 0 + 12 = 12$	4	•	•	$\mid 0$	$\mid c_{45}$	$\mid c_{46}$	•
$S_5 = -3 + 12 = 9$	5	•	•	$\mid c_{54}$	$\mid 0$	$\mid c_{56}$	$\mid c_{57}$

Замечание

1) Заштрихованные клетки можно интерпретировать как случай $c_{ij} = +\infty$, $+\infty * 0 = 0$.

2) В исходной ЗЛП – 7 уравнений и 11 переменных, в полученной ТЗ – 11 уравнений и 15 переменных. Увеличение размерности связано с тем, что некоторые пункты являются промежуточными.

3) Можно показать, что полученная ТЗ эквивалентная задаче ЛП.

4) Величина B играет роль т.н. "буферного"запаса.

5) Многие операционные модели, содержательная постановка которых не имеет ничего общего с перевозкой продукции, приводятся к ТЗ с промежуточными пунктами, а, следовательно и к ТЗ.

⑨ Постановка задачи нахождения пути минимальной длины в ориентированной сети и её сведение к транспортной задаче с промежуточными пунктами.

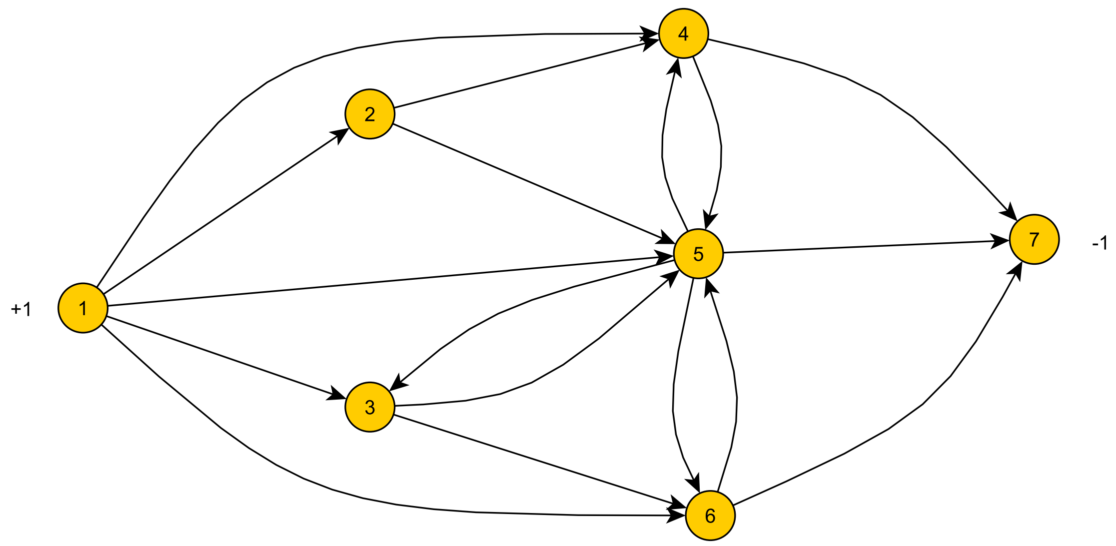
Дано:

1) Орграф (сеть), каждой дуге (i, j) которого поставлено в соответствие число $c_{ij} \geq 0$. Это число интерпретируется как длина этой дуги или стоимость её прохождения.

2) В этой сети выделено 2 узла, один из которых мы будем называть источником, а другой – стоком.

Требуется: Найти длину кратчайшего пути из источника в сток.

Пример: Найти кратчайший путь из узла 1 в узел 7.



Будем рассматривать граф как транспортную сеть.

Узел 1 – источник. $T_1 = +1$

Узел 7 – сток. $T_7 = -1$

Остальные пункты промежуточные.

$T_k = 0, k = \{2, 3, 4, 5, 6\}$

Замечание:

1) При сведении этой задачи к ТЗ будет работать правило "Если мощности целочислены, то и x_{ij} целочислено $\Rightarrow x_{ij} \in \{0, 1\}$.

2) Значение целевой функции $f = \sum c_{ij} x_{ij}$, где $x_{ij} \in \{0, 1\}$ на любом БДР будет равно длине некоторого пути. Значение функции на оптимальном решении равно длине кратчайшего пути.

3) У полученной ТЗ мощности всех источников и стоков будут $= 1 \Rightarrow$ её можно рассмотреть как вариант задачи о назначении, в которой некот. работники и не могут выполнить некот. работы (некот $c_{ij} = +\infty$).