# Лекция 9

nyaapa

2013-04-12

Постановки задач целочисленного программирования

1 Задача коммивояжера

2 Задача с постоянными элементами затрат

Некоторое предприятие производит n видов продукции. При этом, затраты на производство $x_j$ единиц продукта j складываются из постоянных затрат $k_j$, которые не зависят от объёма выпуска $x_j$, а так же затрат $c_j x_j$. Таким образом, функция затрат на производство j-го продукта имеет вид: $\begin{cases} 0, x_j = 0 \\ k_j + c_j x_j, x_j > 0 \end{cases}$

Постоянные затраты $k_j$ могут отвечать затратам, связанным с подготовкой документации, разработкой технологического процесса итд. Эти затраты имеют место один раз, если планируется выпуск j-го продукта, т.е. $x_j > 0$, в противном случае эти затраты не имеют места. Слагаемое $c_j x_j$ отвечает затратам ресурсов, машинного времени итд. Эти затраты пропорциональны объёму выпуска j-го продукта.

Требуется определить ассортимент производимой продукции при котором затраты минимальны.

Приходим к задаче:

$$\begin{cases} f = \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j) \to min \\ x_j \geq 0 \\ \{ \text{ другие линейные ограничений } \} \end{cases}$$

которая не является ЗЛП из-за вида целевой функции(она не является линейной).

Введём переменные $y_j = \begin{cases} 0, \text{ если } x_j = 0 \\ 1, \text{ если } x_j > 0 \end{cases}$

Пусть $M_j$ - достаточно большое число такое, что для любого разумного $x_j$ выполняется $x_j \leq M_j$.

Тогда исходная задача эквивалентна задаче

$$\begin{cases} f = \sum_{j=1}^{n} (c_j x_j + K_j y_j) \to min \\ x_j \leq M_j y_j, j = 1..n (*) \\ x_j \geq 0, j = 1..n \\ y_j \in \{0, 1\}, j = 1..n \\ \{ \text{ другие линейные ограничений } \} \end{cases}$$

Если $x_j > 0$, то $y_j = 1$ (из ограничения (*)) и целевая функция включает постоянные затраты $K_j$.

Если $X_j = 0$, то $y_j$ может принимать значение 0 или 1, но т.к. $f \to min$, то $y_j$ обратится в 0.

$y_j \in \{0,1\}, j = 1..n \sim \boxed{\begin{matrix} y_j \geq 0 \\ y_j \leq 1 \\ y_j \in \mathbb{Z} \end{matrix}}$

Приходим к частично-целочисленной задаче с переменными $x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n$.

3 Задачи с альтернативными ограничениями.

Рассмотрим ЗЛП, в которой оптимальное решение должно удовлетворять одному из двух ограничений.

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i \leq 0$

или

$\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j - b_k \leq 0$

но не обязательно обоим одновременно. В задачу следует включить то ограничение, для которого оптимальное решение лучше.

Замечание На практике к задачам такого рода может привести следующая ситуация: производитель выбирает оптимальный технологический процесс для производства некоторого продукта; разным процессам отвечают разные ограничения.

Пусть $y \in \{0,1\}$

а $M_i$ и $M_k$ - достаточно большие числа, такие, что для всех допустимых решений задачи выполняются:

В этом слуае оба ограничения можно включить в задачу:

$$\begin{cases} f_n \to extr \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i \leq M_i y \\ \sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j - b_k \leq M_k(1-y) \\ x_j \geq 0, y \in \{0,1\} \\ \{\text{ другие линейные ограничений }\} \end{cases}$$

Если $y = 0$, то выполняется 1-е ограничение, а 2-е не изменяет множество допустимых решений. Если $y = 1$, то выполняется 2-е ограничение, а 1-е не изменяет множество допустимых решений.

Замечание Указанный подход можно обобщить на случай большого числа ограничений. Пусть, например, необходимо, чтобы выполнялись ровно k из m ограничений. Введём в рассмотрение булевы переменные $y_1, ..., y_m$, каждое из которых отвечает одному из альтернативных ограничений. К ограничениям задачи нужно добавить $y_1 + ... + y_m = m - k$.

4 Задача с взаимозависимыми альтернативами

Пример Имеются 3 технологических процесса. Необходимо выбрать либо 1-й, либо 2-й. 3-й процесс может быть выбран если используется первый процесс. Нужно учесть эти требования в постановке ЗЛП.

Введём переменные $x_j = \begin{cases} 0, \text{ если используется j-й процесс} \\ 1, \text{ если j-й процесс не используется} \end{cases}, j = 1..3$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \text{ используется 1 из 1-го и 2-го} \\ x_3 \leq x_1 \Leftrightarrow -x_1 + x_3 \leq 0 \\ x_j \in \{0,1\}, j = 1..3 \end{cases}$$

Обобщим идеи:

1. Если необходимо из p процессов выбрать один-единственный, то нужно добавить условие $\begin{cases} x_1 + ... + x_p = 1 \\ x_j \in \{0,1\}, j = 1..p \end{cases}$

2. Если из p процессов необходимо выбрать ровно k: $\begin{cases} x_1 + ...x_p = k \\ x_j \in \{0,1\} \end{cases}$

3. Если из p необходимо выбрать не более чем k, то $\begin{cases} x_1 + ...x_p \leq k \\ x_j \in \{0,1\} \end{cases}$

4. Если процесс $p+1$ может быть использован лишь в том случае, если используется хотя бы один из процессов $1..p$ $\begin{cases} x_{p+1} \leq x_1 + .. + x_p \\ x_j \in \{0,1\}, j = 1..p+1 \end{cases}$

5. Если $p+1$ может быть использован если используются все процессы $1..p$, то $\begin{cases} px_{p+1} \leq x_1 + .. + x_p \\ x_j \in \{0,1\}, j = 1..p \end{cases}$

# ЗАДАЧИ ТРАНСПОРТНОГО ТИПА Транспортная задача

1 Постановка транспортной задачи

Содержательная постановка

Имеется m производителей некоторой однородной продукции. Мощность i-го производителя обозначим $S_i > 0$. Имеется n потребителей этой продукции, мощзность j-го потребителя обозначим $D_j > 0$. Предполагается, что $\sum_{i=1}^{m} S_i = \sum_{j=1}^{n} D_j$. Стоимость перевозки единицы продукции от i-го производителя к j-му потребителя составляет $c_i j \geq 0$. Требуется:

1. Перевезти всю продукцию от производителей к потребитялм с учётом ограничений по мощности

2. Общa стоимость перевозок должна быть минимальной.

Введём переменные $x_{ij} \geq 0$ - объём продукции, перевозимой от i-го производителя к j-му потребителю. Тогда

Математическая постановка

$$\begin{cases} f = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to min \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = S_i, i = 1..m \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = D_j, j = 1..m \\ x_i j \geq 0, i = 1..m, j = 1..n \end{cases}$$

, где $\sum_{i=1}^{m} S_i = \sum_{j=1}^{n} D_j$ (*)

Замечание

**I.** При выполнении (*) задача называется сбалансированной. Если это не так, то:

1. Если $\sum_{i=1}^{m} S_i > \sum_{j=1}^{n} D_j$, то можно ввести фиктивного потребителя, мощность которого $D_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} S_i - \sum_{j=1}^{n} D_j$. При этом, полагаем, что $c_{i,n+1} = 0, i = 1..m$ Содержательная интерпретация такова: продукции произведено больше, чем требуется, необходимо оптимальным образом насытить потребителей.

2. $\sum_{i=1}^{m} S_i < \sum_{j=1}^{n} D_j$, то можно ввести фиктивного производителя мощностью $S_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} D_j - \sum_{i=1}^{m} S_i$, при этом $c_{m+1,j} = 0, j = 1..n$ Содержательная интерпретация такая: проидукции произведено меньше, чем требуется. Необходимо оптимальным образом перевезти то, что произведено.

**II.** В контексте транспортной задачи производители называются источниками, а потребители стоками. Условия задачи и план перевозок можно описать с помощью таблиц. Транспортной таблицы.

| | $D_1$ | ... | $D_j$ | ... | $D_n$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $S_1$ | $x_{11} \mid c_{11}$ | ... | $x_{ij} \mid c_{1j}$ | ... | $x_{1n} \mid c_{1n}$ |
| ... | | | | | |
| $S_j$ | $x_{i1} \mid c_{i1}$ | ... | $x_{ij} \mid c_{ij}$ | ... | $x_{in} \mid c_{in}$ |
| ... | | | | | |
| $S_m$ | $x_{m1} \mid c_{m1}$ | ... | $x_{mj} \mid c_{mj}$ | ... | $x_{mn} \mid c_{mn}$ |

Замечание

Очевидно, что транспортная задача – ЗЛП с m*n переменными и может быть решена с использованием симплекс-метода. Однако, последнее неэффективно ввиду большой размерности задачи. Для решения транспортной задачи разработана модификация симлпекс-метода, которая называется симплексным методом или методом потенциала.

2 Основные идеи симплексного метода

Рассмотрим систему ограничений ТЗ в координатной форме.

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = S_i, i = 1..m \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = D_j, j = 1..m \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{11} + ... + x_{1n} = S_1 \\ x_{21} + ... + x_{2n} = S_2 \\ ... \\ x_{m1} + ... + x_{mn} = S_m \\ x_{11} + x_{21} + ... + x_{m1} = D_1 \\ x_{12} + x_{22} + ... + x_{m2} = D_2 \\ ... \\ x_{1n} + x_{2n} + ... + x_{mn} = D_n \end{cases}$$

Сложим n последних ограничений и вычтем из полученной суммы сумму m-1 первых ограничений:

$$x_{m1} + ... + x_{mn} = \underbrace{(D_1 + ... + D_n) - (S_1 + ... + S_{m-1})}_{S_m,\text{ так как задача сбалансирована}}$$

В то же время с использованием примера можно показать, что исключение двух или более ограничений приведёт к рассмотрению множества допустимых решений. Таким образом, сбалансированная транспортная задача имеет m + n - 1 независимых ограничений $\Rightarrow$ любое БДР содержит m + n - 1 базисных переменных

б) Составим задачу, двойственную к транспортной задаче.

Пусть ограничениям $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = S_i, i = 1..m$ отвечают переменные $u_i$. Ограничениям $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = D_j, j = 1..m - v_j$

$$\begin{cases} g = \sum_{i=1}^{m} S_i u_i + \sum_{j=1}^{n} D_j v_j \to max \\ u_i + v_j \le c_{ij}, i = 1..m, j = 1..n \\ u_i, v_j \text{ не ограничены в знаке} \end{cases}$$

Из доказанных ранее соотношений двойственности следует, что

1. $x_{ij}$ удовлетворяют ограничениям прямой задачи

2. $u_i, v_j$ удовлетворяют ограничениям двойственной задачи

3. $x_{ij}(c_{ij} - u_i - v_j) = 0$,

То в этом случае $x_{ij}$ – оптимальное решение прямой задачи, $u_i, v_j$ - двойственной.

На этих самых соображениях основан симплексный метод, общая схема которого такова:

- Находим БДР прямой задачи

- Это решение итерационно улучшаем так, чтобы на каждом шаге выполнялись условия (1) и (3)

- При выполнении условия (2) вычисления заканчивают.

3 Построение начального базисного допустимого решения

Мы рассмотрим 2 метода:

1. Северо-западного угла

2. Метод min стоимости

**I.** Метод северо-западного угла.

Пример

Берём верхний левый угол.

| • | $D_1 = 5$ | $D_2 = 25$ | $D_3 = 10$ | $D_4 = 10$ |
|---|---|---|---|---|
| $S_1 = 10$ | 5\|- | 5- | - | - |
| $S_2 = 15$ | \| | 15- | - | - |
| $S_3 = 25$ | \| | 5\|- | 10\|- | 10 |

m + n - 1 = 6 базисных переменных.

Пример

| • | $D_1 = 10$ | $D_2 = 10$ | $D_3 = 1510$ | $D_4 = 10$ |
|---|---|---|---|---|
| $S_1 = 5$ | 5- | - | - | - |
| $S_2 = 15$ | \| | 10 | | |
| $S_3 = 25$ | \| | | | |

Если вычеркнем столбец

| • | $D_1 = 10$ | $D_2 = 10$ | $D_3 = 1510$ | $D_4 = 10$ |
|---|---|---|---|---|
| $S_1 = 5$ | 5- | - | - | - |
| $S_2 = 15$ | \| | 10\| | 0- | - |
| $S_3 = 25$ | \| | \| | 15 | 10 |

Если вычеркнем вторую строку

| $\bullet$ | $D_1 = 10$ | $D_2 = 10$ | $D_3 = 1510$ | $D_4 = 10$ |
|---|---|---|---|---|
| $S_1 = 5$ | 5- | - | - | - |
| $S_2 = 15$ | $\mid$ | 10- | - | - |
| $S_3 = 25$ | $\mid$ | 0$\mid$ | 15 | 10 |

Разница в том, какая из двух войдёт в базис. В любом случае БДР вырождена. Можно вычеркнуть как строку, так и столбец, но что-то одно.

**II.** Метод минимальной стоимости.

Отличается от метода С-З угла лишь выбором очередной переменной для включения в базис. В методе минимальной стоимости выбирается не левая верхняя клетка оставшейся таблицы, а та, которая отвечает минимальной $c_{ij}$

Пример

| $\bullet$ | $D_1 = 10$ | $D_2 = 10$ | $D_3 = 1510$ | $D_4 = 10$ |
|---|---|---|---|---|
| $S_1 = 5$ | - $\mid$ 5 | - $\mid$ 6 | - $\mid$ 3 | 5 $\mid$ 1 (1) |
| $S_2 = 15$ | 5 $\mid$ 7 (6) | 10 $\mid$ 2 (3) | - $\mid$ 2 | - $\mid$ 5 |
| $S_3 = 25$ | 5 $\mid$ 4 (5) | - $\mid$ 7 | 15 $\mid$ 1 (2) | 5 $\mid$ 4 (4) |

В круглых скобках – порядок выбора.

Замечание

Во всех разобранных примерах значения переменных начального БДР задавались соотношениями вида

$x_{ij} = \sum_{\text{по некот р}} S_p \mp \sum_{\text{по некот q}} D_q$

Этот факт неслучаен. Оказывается, соотношениями такого вида задаются значения базисных переменных любого БДР транспортной задачи. Докажем это.

Опр Будем называть СЛАУ треугольной, если выполняются два следующих условий

1. Эта система содержит по крайней мере одно уравнение, в левой части которого находится ровно одна неизвестная.

2. После исключения этой неизвестной из системы оставшаяся система также будет обладать свойством 1.

Th

1. Пусть зафиксировано некоторое БДР транспортной задачи.

2. Предположим, что вычеркнуты из транспортной задачи небазисные переменные(они $= 0$).

Тогда оставшаяся система является треугольной.

Докозательство

Пусть транспортная таблица имеет размерность m x n. 1) Нужно показать, что некоторая строка и некоторый столбец содержит ровно одну БП.

Предположим противное, что в каждой строке и каждом столбце не менее двух базисных переменных. Тогда общее число N базисных переменных $N \geq 2 * max\{m, n\} \geq m + n$ А базисных переменных $m + n - 1$.

Противоречие $\Rightarrow$ по крайней мере одна строка/столбец содержит одну базисную переменную.

2) Исключим эту переменную из системы ограничений изменив мощности источников истоков. К полученной таблице можно применить те же самые рассуждения $\Rightarrow$ оставшаяся система так же будет содержать строку или столбец с одной базисной переменной.

$\blacksquare$

Th2 Пусть $x_{ij}$ базисная переменная в некотором БДР транспортной задачи. Тогда значение $x_{ij}$ задаётся соотношением вида $x_{ij} = \pm \sum_{\text{по некот p}} S_p \mp \sum_{\text{по некот q}} D_q$ (*).

Так как значения БП задаются треугольной системой, то некоторое уравнение содержит в левой части ровно 1 неизвестную $x_{pq}$.

Тогда $x_{pq} = S_p$, если $S_p \leq D_q$ (а)

или

$x_{pq} = D_q$, если $S_p > D_q$ (б).

Исключим $x_{pq}$ из системы, тогда в правых частях оставшихся уравнений будут стоять величины:

- в (а): $-S_p + D_q$ или $D_q$
- в (б): $S_p - D_q$ или $S_p$

Применяя к оставшей системе приведённые рассуждения, получим (*)

$\blacksquare$

Следствие Если $S_i, i = 1..m$ и $D_j, j = 1..n$ являются целочисленными, то любое БДР тр. задачи будет целочисленным.

Опр Такая транспортная задача называется классической.

4 Улучшение текущего БДР.