Лекция 10

Благороднейший Арсений

2013-04-19

1

$$\begin{cases} f = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to min \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = S_i, i = 1..m \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = D_j, j = 1..m \\ x_i j \geq 0, i = 1..m, j = 1..n \end{cases}, \text{ где } \sum_{i=1}^{m} S_i = \sum_{j=1}^{n} D_j \ (*)$$

2 Основные идеи симплексного метода задачи двойственной к транспортной задаче

$$\begin{cases} g = \sum_{i=1}^{m} S_i u_i + \sum_{j=1}^{n} D_j v_j \to max \\ u_i + v_j \leq c_{ij}, i = 1..m, j = 1..n \\ u_i, v_j \text{ не ограничены в знаке} \end{cases}$$

Если

1. x_{ij} удовлетворяют ограничениям прямой задачи

2. u_i, v_j удовлетворяют ограничениям двойственной задачи

3. $x_{ij}(c_{ij} - u_i - v_j) = 0,$

То в этом случае x_{ij} – оптимальное решение прямой задачи, u_i, v_j - двойственной.

Общая схема которого такова:

- Находим БДР прямой задачи

- Это решение итерационно улучшаем так, чтобы на каждом шаге выполнялись условия (1) и (3)

- При выполнении условия (2) вычисления заканчивают.

4 Улучшение текущего БДР

Пусть x_{ij} - некоторое БДР. Тогда для него выполняются ограничения транспортной задачи.

$$\begin{cases} x_{11} + ... + x_{1n} = S_1 \\ x_{21} + ... + x_{2n} = S_2 \\ ... \\ x_{m1} + ... + x_{mn} = S_m \\ x_{11} + x_{21} + ... + x_{m1} = D_1 \\ x_{12} + x_{22} + ... + x_{m2} = D_2 \\ ... \\ x_{1n} + x_{2n} + ... + x_{mn} = D_n \end{cases}$$

$c_{11}x_{11} + ... + c_{1n}x_{1n} + ... + c_{m1}x_{m1} + ... + c_{mn}x_{mn} = f$

Каждое уравнение первой группы умножим на u_i, каждое уравнение второй группы умножим на v_j и вычтем из равенства для целевой функции

$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(c_{ij} - u_i v_j)x_{ij} = f - \sum_{i=1}^{m} S_i u_i - \sum_{j=1}^{n} v_j D_j$ (*)

Занимаясь линейным программированием, мы показали, что коэффициенты при базисных переменных в соотношении (*) можзно выбрать равными нулю. Это будет каноническая форма целевой функции.

При доказательстве одного из соотношений двойственности мы показали, что если x_{ij} – оптимальное решение прямой задачи, то подобранное значение переменных двойственной задачи будут оптимальным решением двойственной задачи.

Так как x_{ij} не обязательно является оптимальным решением транспортной задачи, то u_i, v_j, возможно, не будут удовлетворять ограничениям двойственной задачи. Подобранные значение u_i, v_j можно назвать "пробным"базисом двойственной задачи. Если этот базис будет допустим, то x_{ij} будет оптимальным решением транспортной задачи.

Эти значения u_i, v_j должны удовлетворять следующей системе: $u_i + v_j = c_{ij}$, где $(i, j) \in$ базисн индексов. Так как в транспортной задаче $m + n - 1$ базисных переменных, то в этой системе $m + n - 1$ уравнений. В этой системе $m + n$ неизвестных.

Эту систему решают, придавая одному из неизвестных произвольное(обычно 0) значение. В принципе, можно произвольной переменной присвоить произвольное значение. На ход решения это не повлияет.

После того, как найдены u_i, v_j нужно вычислить величины $d_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$, где $(i, j) \in$ небазисн индексов. d_{ij} равное значению коэффициента при небазисн. перем. x_{ij} в (*).

Очевидно, в базис следует включить ту переменную x_{ij}, для которой $d_{ij} < 0$. В соответствии с принципом оптимальности, выберем ту переменную, для которой $max\{|d_{ij}| : d_{ij} < 0\}$. Если все $d_{ij} \geq 0$, то текущее БДР оптимально.

<u>Замечание</u> Если $d_{ij} \geq 0$ для небаз и $d_{ij} = 0$ для базисных, то $c_{ij} - u_i - v_j \geq 0$ для всех. Т.е. $u_i + v_j \leq c_{ij}$. Т.е., выбранный базис для двойственной задачи допустим.

■

<u>Пример</u>

•	5	25	10	10
10	5 | 3	5 | 3	| 5	| 1
15	| 4	15 | 6	| 7	| 8
25	| 1	5 | 2	10 | 3	10 | 4

Составим систему $c_{ij} = u_i + v_j$, $(i, j) \in$ баз. инд.

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 3 \\ u_1 + v_2 = 3 \\ u_2 + v_2 = 6 \\ \left.\begin{matrix} u_3 + v_2 = 2 \\ u_3 + v_3 = 3 \\ u_3 + v_4 = 4 \end{matrix}\right\} \end{cases}$$

Пусть $u_3 = 0 \rightarrow$

$$\begin{cases} u_1 = 3 - 2 = 1 \\ u_2 = 6 - 2 = 4 \\ u_3 = 0 \\ v_1 = 3 - 1 = 2 \\ v_2 = 2 \\ v_3 = 3 \\ v_4 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_{13} = 5 - u_1 - v_3 = 5 - 1 - 3 = 1 \geq 0 \\ d_{14} = 1 - u_1 - v_4 = 1 - 1 - 4 = -4 < 0 \\ d_{21} = 4 - u_2 - v_1 = 4 - 4 - 1 = -1 < 0 \\ d_{23} = 7 - u_2 - v_3 = 7 - 4 - 3 = 0 \\ d_{24} = 8 - u_2 - v_4 = 8 - 4 - 4 = 0 \\ d_{31} = 1 - u_3 - v_1 = 1 - 0 - 2 = -1 < 0 \end{cases}$$

Таким образом, x_{14} - в базис.

Какую переменную следует исключить из базиса?

5	5 - w	•	+w
•	15	•	•
•	5 + w	10	10 - w

x_{14} включаем в базис $\rightarrow$ в новом БДР x_{14} можзет принять значение $x_{14} = w > 0 \rightarrow$ в этом случае нарушается баланс в 1й строке и 4м столбце.

Из 4-го столбца $\rightarrow x_{34} := 10 - w \rightarrow$ не выполняется.

Ограничение для 3-й строки $\rightarrow x_{32} := 5 + w \rightarrow$ нарушим баланс во 2м столбце $\rightarrow x_{12} := 5 - w$.

Проведённая процедура называется построением цикла транспортной задачи. Цикл всегда содержит ровно 1 небазисныую клетку, а все остальные - базисные. Можно показать, что для данного БДР и данной переменной, подлежащей для включения в базис, цикл единственный.

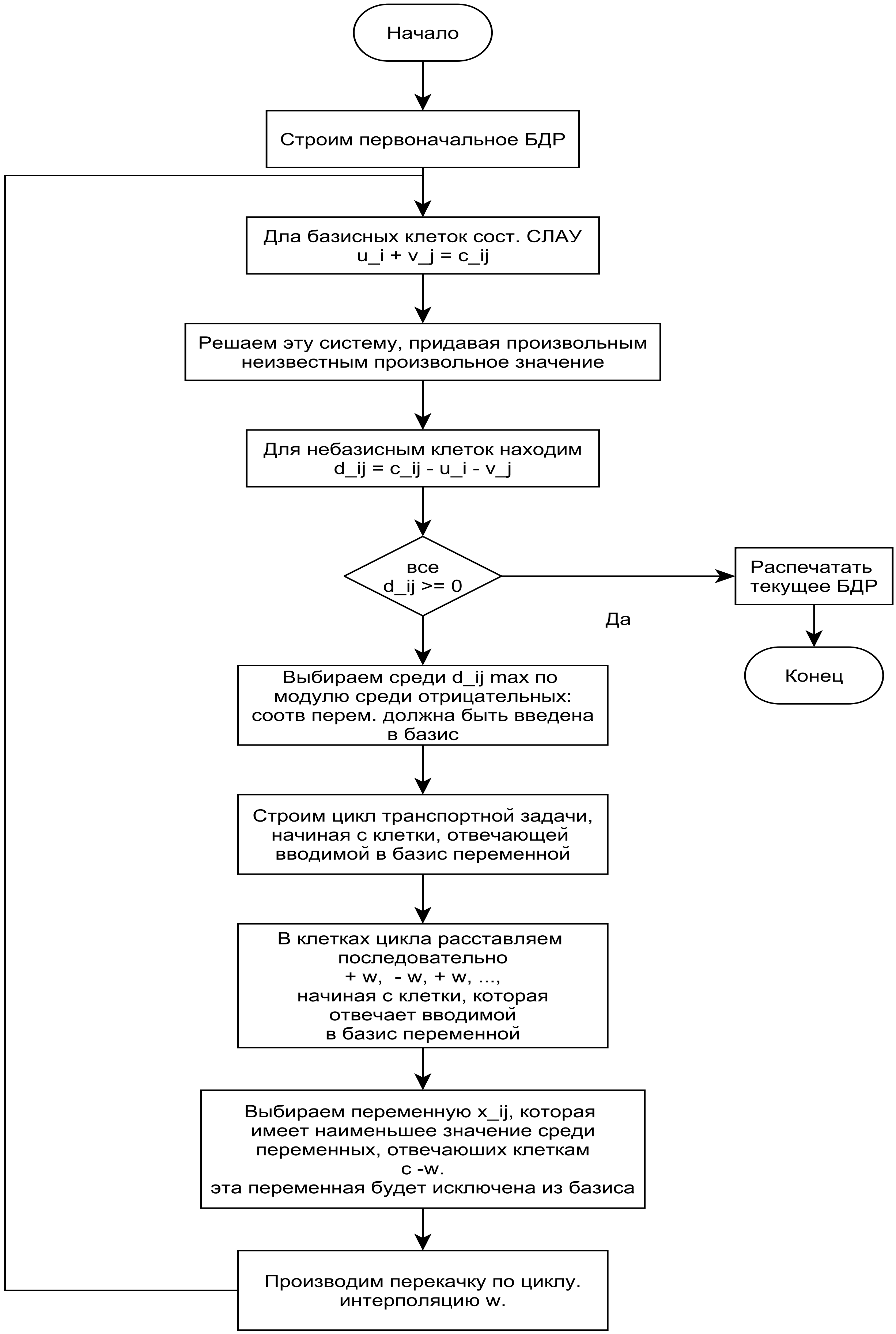
Нужно выбрать те клетки, в которых $-w$ и выбрать ту, в которой минимальное значение $x - 5$.

Если таких переменных несколько, то из базиса можно исключить любую, но только одну.

$w = 5$

5	• (небазс)	•	5
•	15	•	•
•	10	10	5

Блок схема симплексного метода


Начало
Строим первоначальное БДР
Дла базисных клеток сост. СЛАУ
u_i + v_j = c_ij
Решаем эту систему, придавая произвольным
неизвестным произвольное значение
Для небазисным клеток находим
d_ij = c_ij - u_i - v_j
все
d_ij >= 0
Да
Распечатать
текущее БДР
Конец
Выбираем среди d_ij max по
модулю среди отрицательных:
соотв перем. должна быть введена
в базис
Строим цикл транспортной задачи,
начиная с клетки, отвечающей
вводимой в базис переменной
В клетках цикла расставляем
последовательно
+ w, - w, + w, ...,
начиная с клетки, которая
отвечает вводимой
в базис переменной
Выбираем переменную x_ij, которая
имеет наименьшее значение среди
переменных, отвечаюших клеткам
с -w.
эта переменная будет исключена из базиса
Производим перекачку по циклу.
интерполяцию w.

•	5	25	10	10
10	5 | 3	| 3	| 5	5 | 1
15	| 4	15 | 6	| 7	| 8
25	| 1	10 | 2	10 | 3	5 | 4

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 3 \\ u_1 + v_4 = 1 \\ u_2 + v_2 = 6 \\ u_3 + v_2 = 2 \\ u_3 + v_3 = 3 \\ u_3 + v_4 = 4 \end{cases}$$

$u_3 = 0$

$$\begin{cases} u_1 = -3 \\ u_2 = 4 \\ u_3 = 0 \\ v_1 = 6 \\ v_2 = 6 \\ v_3 = 3 \\ v_4 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_{12} = 3 + 3 - 2 = 4 \\ d_{13} = 5 + 3 - 3 = 5 \\ d_{21} = 4 - 4 - 6 = \text{-6} \\ d_{23} = 7 - 4 - 3 = 0 \\ d_{24} = 8 - 4 - 4 = 0 \\ d_{31} = 1 - 0 - 6 = -5 \end{cases}$$

•	5	25	10	10
10	5 - w | 3	| 3	| 5	5 + w | 1
15	+w | 4	15 -w| 6	| 7	| 8
25	| 1	10 + w| 2	10 | 3	5 - w | 4

Исключим x_{34}, w = 5. $x_{11} = 0$, $x_{34} = 0$.

•	5	25	10	10
10	0 | 3	| 3	| 5	10 | 1
15	5 | 4	10 | 6	| 7	| 8
25	| 1	15 | 2	10 | 3	| 4

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 3 \\ u_1 + v_4 = 1 \\ u_2 + v_1 = 4 \\ u_2 + v_2 = 6 \\ u_3 + v_2 = 2 \\ u_3 + v_3 = 3 \end{cases}$$

$u_1 = 0$

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_2 = 1 \\ u_3 = -3 \\ v_1 = 3 \\ v_2 = 5 \\ v_3 = 6 \\ v_4 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_{12} = 3 - 0 - 5 = -2 \\ d_{13} = 5 - 0 - 6 = -1 \\ d_{23} = 7 - 1 - 6 = 0 \\ d_{24} = 8 - 1 - 1 = 6 \\ d_{31} = 1 + 3 - 3 = 1 \\ d_{34} = 4 + 3 - 1 = 6 \end{cases}$$

x_{12} в базис

•	5	25	10	10
10	0 - w | 3	+w | 3	| 5	10 | 1
15	5 + w | 4	10 - w | 6	| 7	| 8
25	| 1	15 | 2	10 | 3	| 4

w = 0

x_{11} можно из базиса исключить.

•	5	25	10	10
10	| 3	0 | 3	| 5	10 | 1
15	5 | 4	10 | 6	| 7	| 8
25	| 1	15 | 2	10 | 3	| 4

Итерация 4

$$\begin{cases} u_1+v_2=3 \\ u_1+v_4=1 \\ u_2+v_1=4 \\ u_2+v_2=6 \\ u_3+v_2=2 \\ u_3+v_3=3 \end{cases}$$

$v_2=0$

$$\begin{cases} u_1=3 \\ u_2=6 \\ u_3=2 \\ v_1=-2 \\ v_2=0 \\ v_3=1 \\ v_4=-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_{11}=3-3+2=2 \\ d_{13}=5-3-1=1 \\ d_{23}=7-6-1=0 \\ d_{24}=8-6+2=4 \\ d_{31}=1-2+2=1 \\ d_{34}=4-2+2=4 \end{cases}$$

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ТРАНСПОРТНОГО ТИПА

Мы рассмотрим некоторые содержательные задачи, которые могут быть сведены к ТЗ.

1 Задача о назначениях.

n работ, n исполнителей. Каждый исполнитель может выполнять любую работу, но только одну. c_{ij} - стоимость выполнения i-й работы j-м.

Необходимо распределить работы таким образом, чтобы общая стоимость выполнения всех работ была минимальной.

Введём матрицу $X=(x_{i,j})_{i,j=\overline{1:n}}$, для которой определено условие

$$x_{i,j}=\begin{cases} 1, & \text{если i-ю работу выолняет j-й исполнитель} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Тогда общая стоимость выполнения работ $f=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_j x_{ij}$

Каждая строка матрицы X должна содержать ровно 1 единицу, т.к. каждую работу выполняет ровно 1 исполнитель.

$\sum_{j=1}^n x_{ij}=1$, где $i=\overline{1:n}$

Каждый столбец матрицы X должен содержать ровно 1 единицу:

$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1$, где $j = \overline{1:n}$

Таким образом приходим к математической постановке:

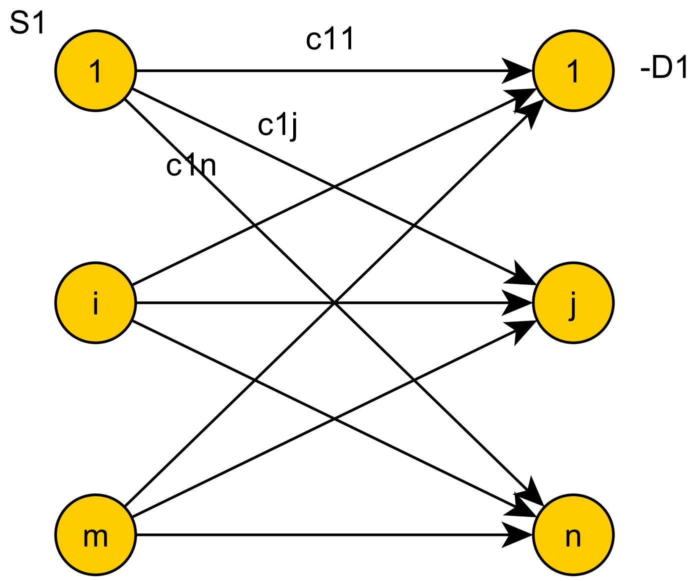
$$\begin{cases} f = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_j x_{ij} \to min \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \text{ где } i = \overline{1:n} \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \text{ где } j = \overline{1:n} \\ x_{ij} \in \{0, 1\} \end{cases}$$

Задача о назначениях является частным случаем транспортной задачи для m = n, $S_i = D_i = 1$. Условие $x_{ij} \in \{0, 1\}$ можно заменить условием $x_{ij} \geq 0$, т.к. мы показали ранее, что если все мощности $S_i, D_j \in \mathbb{Z}$, то $x_{ij} \in \mathbb{Z}$.

Замечание: Любое БДР задачи о назначениях будет вырождено, т.к. баз. переменных 2n - 1, а любое допустимое решение содержит лишь n единиц $\Rightarrow$ некоторые баз. перем. будут = 0.

2 Транспортные задачи с промежуточными пунктами.

В (обычной) ТЗ были m источников и n стоков. Условие этой задачи можно сформулировать с использованием орграфа, или, как принято говорить в ИО, ориентированной сети.



Замечание Мы намеренно указываем мощность стоков со знаком -, чтобы показать, что в соотв. пункта продукция выводится из транспортной системы.

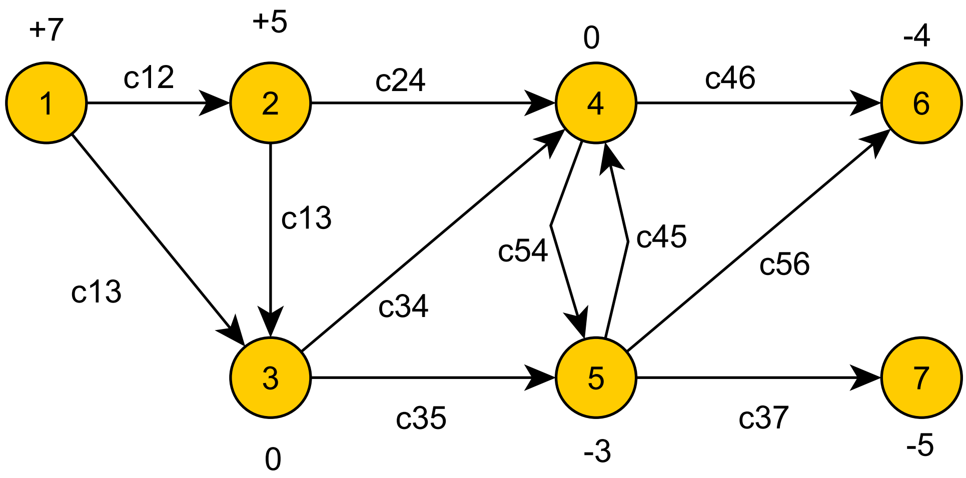
Соответственно, этим обозначением ограничения ТЗ удобно записывать в виде:

$x_{i1} + ... + x_{in} = S_i$, $i = 1..m$

$-x_{ij} - ... - x_{nj} = -D_j$, $j = 1..n$

В ТЗ с промежуточными пунктами помимо пунктов, из которых продукция может только вывозиться, и пунктов, в которые она может только ввозиться, могут присутствовать пункты, в которые продукция может как ввозиться, так и вывозиться.

Пример Крупная торговая компания имеет сеть складов в регионе, структура которой изображена на рисунке.



Из п.1. продукцию можно только вывозить $\Rightarrow$ п.1 называется источником.

В п.п. 6, 7 можно только завозить $\Rightarrow$ они называются стоками.

Остальные пункты называются промежуточными.

$c_{ij} \geq 0$ - стоимость перевозки педингицы продукции из i-го в j-й.

Каждый пункт характеризуется числом, которое мы бдуем называть величиной "чистого запаса"в этом пункте и обозначим T_k, где k - номер пункта.

Величина $T_k > 0$ означает, что в соответствующем пункте имеется избыток продукции

$T_k < 0 \Rightarrow$ недостаток. Значение $T_k = 0$ означает, что после всех перевозок объём продукции в k-м пункте не должэен измениться.

В нашем примере

$$\left.\begin{array}{r} \sum_{k:T_k>0} T_k = 7+5 = 12 \\ \sum_{T_k<0} = -3-4-5 = -12 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{сбаланисированная}$$

Пусть $x_{ij} \geq 0$ - объём продукции, перевозимой из i-го пункта в j-й.

Тогда стоимость перевозок $f = \sum_{(i,j)\in \text{ сети}} c_{ij}x_{ij} \to min.$

Каждое ограничение имеет вид:

-{объём продукции, ввозимой в k-й пункт} $+$ {объём продукции, вывозимой из k-го пункта} $= T_k$, $k = 1..7$

В нашем примере получаем систему ограничений.

Пункт	x_{12}	x_{13}	x_{23}	x_{24}	x_{34}	x_{35}	x_{45}	x_{46}	x_{54}	x_{56}	x_{57}	
1	1	1										$+7$
2	-1		1	1								$+5$
3		-1	-1		1	1						0
4				-1	-1		1	1	-1			0
5						-1	-1		1	1	1	-3
6								-1		-1		-4
7											-1	-5

Таким образом приходим к ЗЛП.

Эту задачу можно решить симплекс-методом, но мы покажем, как свести её к ТЗ.

Основная идея:

- Если пункт только источник $\Rightarrow$ останется источкником.
- Если только сток $\Rightarrow$ останется стоком.
- Если и источник и сток $\Rightarrow$ два новых пункта источник и сток, соединённые связью 0 в оба направления.

<u>Алгоритм сведения к ТЗ</u>

1. Для каждого источника k резервируем в транспортной таблице строку, можность соответствующего источника $S_i = T_k$
2. Для каждого стока k задачи с промежуточными пунктами резервируем в транспортной таблице столбце, мощность соответствующего стока $D_j = T_k + B$, где B - общий объём перевозимой в системе продукции(в нашем примере B = 12).
3. Для каждого промежуточного пункта резервируем в транспортной таблице и строку и столбец. Мощность соотвтствующего источника $S_i = -T_k$, мощность соответствующего стока $D_j = B$
4. Ввести переменные $x_{ij} \geq 0$ только для тех дуг, которые существуют в исходной сети, соответствующие стоимости c_{ij} принять равными стоимостям перевозок по соответствующим дугам исходной сети. Для промежуточных пунктов также ввести переменные x_{kk}, $c_{kk} = 0$.

•	Стоки	12	12	12	12	4	5
Мощности	Пункт	2	3	4	5	6	7
$S_1 = 7$	1	$\mid c_{12}$	$\mid c_{13}$	•	•	•	•
$S_2 = 5 + 12 = 17$	2	$\mid 0$	$\mid c_{23}$	$\mid c_{24}$	•	•	•
$S_3 = 0 + 12 = 12$	3	•	$\mid 0$	$\mid c_{34}$	$\mid c_{35}$	•	•
$S_4 = 0 + 12 = 12$	4	•	•	$\mid 0$	$\mid c_{45}$	$\mid c_{46}$	•
$S_5 = -3 + 12 = 9$	5	•	•	$\mid c_{54}$	$\mid 0$	$\mid c_{56}$	$\mid c_{57}$

<u>Замечание</u>

1. Заштрихованные клетки можно интерпретировать кака случай $c_{ij} = +\infty$, $+\infty * 0 = 0$.
2. В исходной задаче ЛП 7 уравнений и 11 переменных, в полученной ТЗ. 11 уравнений и 15 переменных. Увеличение размерности связано с тем, что некоторые пункты являются промежуточными.
3. Можно показать, что полученная ТЗ эквивалентная задаче ЛП.
4. Величина B играет роль т.н. "буферного"запаса
5. Многие операционные модели, содержательная постановка которых не имеет ничего общего с перевозкой продукции, приводятся к ТЗ с промежуточными пунктами, а, следовательно и к ТЗ.

③ Модель выбора кратчайшего пути

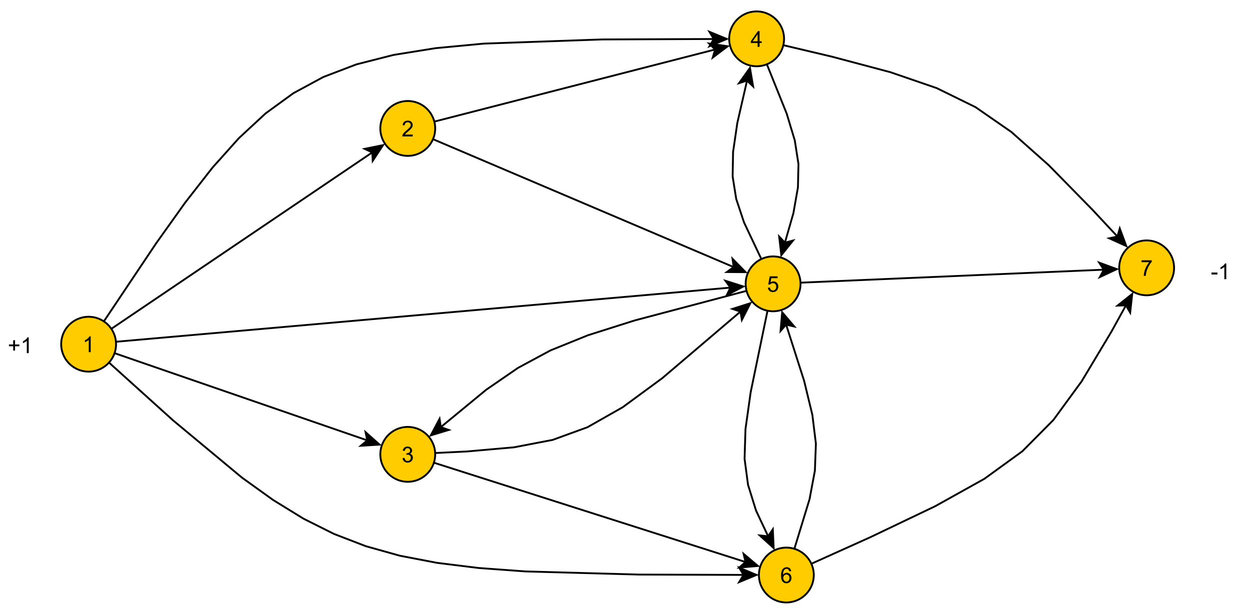
Дано

1. орграф(сеть), каждой дуге (i, j) которого поставлено в соответствие число $c_{ij} \geq 0$. Это число интерпретируется как длина этой дуги или стоимость её прохождения.

2. В этой сети выделено 2 узла, один из которых мы будем называть источником, а другой – стоком.

Требуется найти длину кратчайшего пути из источника в сток.

Пример Найти кратчайший путь из узла 1 в узел 7.



Будем рассматривать граф как транспортную сеть.

Узел 1 – источник. $T_1 = +1$

Узел 7 – сток. $T_7 = -1$

Остальные пункты промежуточные.

$T_k = 0, k = \{2, 3, 4, 5, 6\}$

Замечание

1. При сведении этой задачи к ТЗ будет работать правило "Если мощности целочислены, то и x_{ij} целочислено $\Rightarrow x_{ij} \in \{0, 1\}$

2. Значение целевой функции $f = \sum c_{ij}x_{ij}$, где $x_{ij} \in \{0, 1\}$ на любом БДР будет равно длине некоторого пути. Значение функции на оптимальном решении равно длине кратчайшего пути

3. У полученной ТЗ мощности всех источников и стоков будут $= 1 \Rightarrow$ её можно рассмотреть как вариант задачи о назначении, в которой некот. работники и не могут выполнить некот. работы (некот $c_{ij} = +\infty$).