Отчёт по лабораторной работе №1
по курсу
Методы вычислений

Косюра Ольга Владиславовна
Группа ИУ7-27
Вариант №8

2015 г.

1 Постановка задачи

1.1 Формулировка задачи

Найти температуру $u(x,t)$ тонкого стержня длиной l с теплоизолированной боковой поверхностью, на концах которого задан температурный режим. Коэффициент теплопроводности K меняется в зависимости от температуры по заданному закону $K = K(u)$. В начальный момент времени $t = 0$ стержень находится при фиксированной температуре u_0 по всей длине. Найти момент времени T, в который температура в середине стержня будет максимальной.

1.2 Исходные данные

1. Длина стержня $l = 1$
2. Плотность массы $den = 1$
3. Удельная теплоёмкость стержня $c = 2$
4. Начальная температура стержня $u_0 = 0.2$
5. Постоянные: $a = 0.5$, $b = 2$, $\sigma = 1.25$
6. Коэфициент теплопроводности $K(u) = a + bu^{\sigma} = 0.5 + 2 * u^{1.25}$
7. Начальное распределение температуры $\varphi(x) \equiv u_0$
8. Тепловой поток на правом конце стержня

$$W_4(t) = \begin{cases} 2Qt, & 0 \leqslant t < 0.5 * t_0 \\ 2Q(t_0 - t), & 0.5 * t_0 \leqslant t < t_0 \\ 0, & t_0 \leqslant t \end{cases} \qquad (1)$$

9. $t_0 = 0.5$, $Q = 10$
10. Тепловой поток на левом конце стержня равен 0.

2 Теоретические сведения

2.1 Краевая задача

$$\begin{cases} c\rho\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(K(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad x \in (0; L), \quad t > 0 \\ u(x,0) = u_0 \\ K(u)\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0 \\ K(u)\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l} = W_4(t) \end{cases}$$

2.2 Разностная схема

Для численного решения данной краевой задачи используется неявная разностная схема.

Введём сетку W_t^τ с узлами $w_i^j = (x_i, t_j)$, $i = \overline{0:N}$, $j = \overline{0:M}$; где $x_i = ih$, $t = j\tau$

Используем неявную схему:

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} = \frac{K_{i+}^{j+1}(u_{i+1}^{j+1} - u_i^{j+1}) - K_{i-}^{j+1}(u_i^{j+1} - u_{i-1}^{j+1})}{h^2} \tag{2}$$

где

$$K_{i+}^{j+1} = \frac{K_{i+1}^{j+1} + K_i^{j+1}}{2}; \qquad K_{i-}^{j+1} = \frac{K_i^{j+1} + K_{i-1}^{j+1}}{2} \tag{3}$$

Преобразовывая уравнение получаем:

$$u_i^j = (1 + \alpha(K_{i+}^{j+1} + K_{i-}^{j+1}))u_i^{j+1} - \alpha K_{i+}^{j+1}u_{i+1}^{j+1} - \alpha K_{i-}^{j+1}u_{i-1}^{j+1}; \tag{4}$$

Следовательно:

$$u_i^j = a_i u_{i-1}^{j+1} + b_i u_i^{j+1} + c_i u_{i+1}^{j+1}; \tag{5}$$

где

$$a_i = -\alpha K_{i-}^{j+1}; \qquad b_i = (1 + \alpha(K_{i+}^{j+1} + K_{i-}^{j+1})); \qquad c_i = -\alpha K_{i+}^{j+1}; \qquad \alpha = \frac{\tau}{h^2};$$

Начальное условие: $u_i^0 = u_0$.

Граничные условия:

$$K_{0+}^{j+1}\frac{u_1^{j+1} - u_0^{j+1}}{h} = W|_{x=0} = 0; \qquad K_{N-}^{j+1}\frac{u_N^{j+1} - u_{N-1}^{j+1}}{h} = W|_{x=l} = W_4(t); \tag{6}$$

Следовательно:

$$u_1^{j+1} - u_0^{j+1} = 0; \qquad u_N^{j+1} - u_{N-1}^{j+1} = \frac{W_4 h}{K_{0+}^{j+1}}; \tag{7}$$

Тогда для $j+1$-го слоя получим уравнение $Au^{j+1} = F$
Где

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & b_2 & c_2 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & b_3 & ... & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & b_{N-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ ... \\ f_{N-1} \\ \frac{W_2^{j+1}h}{K_{0+}^{j+1}} \end{pmatrix}$$

2.3 Устойчивость

Условие устойчивости для параметрической схемы с параметром α и $K = K(u(x))$

$$(\frac{1}{2} - \alpha) \max_{0 \le x \le l} K(u(x)) \frac{\tau}{h^2} \le 1 \tag{8}$$

Для неявной схемы это условие выполняется при любых соотношениях h и τ .

2.4 Аппроксимация

Выбранная разностная схема имеет порядок аппроксимации $O(\tau + h^2)$ для ДУ и $O(h)$ - для граничных условий.

3 Результаты

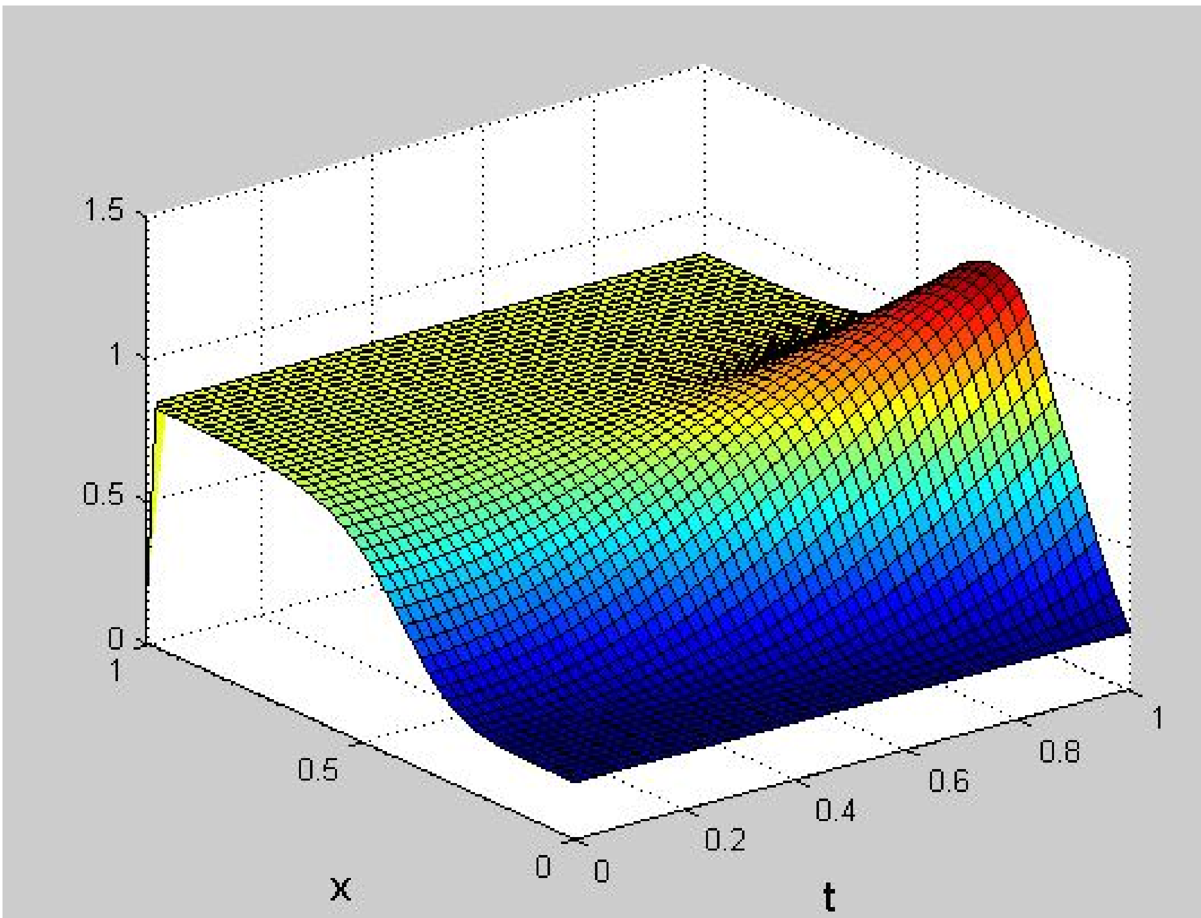

Рис. 1: Температурное поле