

Отчёт по лабораторной работе №3
Вариант 8

Косюра Ольга Владиславовна
ИУ7-27

2015 г.

1 Постановка задачи

1.1 Краевая задача

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= -f(x, y), \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b \\ u|_{x=0} &= \varphi_0(y) \quad u|_{x=a} = \varphi_a(y) \\ u|_{y=0} &= \psi_0(x) \quad u|_{y=b} = \psi_b(x)\end{aligned}$$

1.2 Исходные данные

1. Размеры области решения $a = 2$, $b = 1$
2. $\varphi_0(y) = 10y$, $\varphi_a(y) = 10 \cos \frac{\pi y}{2}$
3. $\psi_0(x) = 10 \sin \frac{\pi x}{2}$, $\psi_b(x) = 10(1 - x)$
4. $f(x, y) = 0$

2 Решение

2.1 Разностные уравнения

На заданом поле решения выбирается сетка из N равноотстоящих узлов по каждой координате.

$$\begin{aligned}\frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h_x^2} + \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{h_y^2} &= -f(x_i, y_j) \\ u_{1j} &= \varphi_0(y_j), u_{Nj} = \varphi_a(y_j), u_{i1} = \psi_0(x_i), u_{iN} = \psi_b(x_i) \\ &, \text{ где } i = \overline{1, N-1}, \quad j = \overline{1, N-1}\end{aligned}$$

Выбранная схема является абсолютно устойчивой, поэтому нет ограничений на выбор шагов по переменным. Шаг влияет исключительно на величину невязки при счёте. Используются шаги $h_x = \frac{a}{N}$, $h_y = \frac{b}{N}$, $N = 50$.

2.2 Метод верхней релаксации

Для решения получившейся СЛАУ используется итерационный метод верхней релаксации. В координатной форме для нашей СЛАУ он выглядит так:

$$u_{ij}^{k+1/2} = \frac{h_y^2}{2(h_x^2 + h_y^2)}(u_{i-1,j}^{k+1} + u_{i+1,j}^k) + \frac{h_x^2}{2(h_x^2 + h_y^2)}(u_{i,j-1}^{k+1} + u_{i,j+1}^k) + \frac{h_x^2 h_y^2}{2(h_x^2 + h_y^2)} f_{ij}$$
$$u_{ij}^{k+1} = \omega u_{ij}^{k+1/2} + (1 - \omega) u_{ij}^k$$

Величина параметра метода релаксации влияет на скорость его сходимости. Оптимальным является значение:

$$\omega_{opt} = \frac{2}{1 + \sin \frac{\pi}{N-1}}$$

Если на выходе требуется, чтобы выполнялось $\|u^{k+1}\|_1 < \epsilon$, итерации метода прекращаются при выполнении следующего условия:

$$\|u^{k+1} - u^k\|_1 < (2 - \omega)\epsilon$$

2.3 Устойчивость разностной схемы

Данная разностной схемы является устойчивой.

2.4 Порядок аппроксимации разностной схемы

Аппроксимация разностной схемы "Крест" оценивается как $O(h_x^2 + h_y^2)$.

2.5 Определение ошибки

Для определения ошибки воспользуемся формулой Рунге

$$z^I \approx \frac{|u^I - u^{II}|}{r^2 - 1}$$

один раз, приняв $r = 2$. При этом используется обычная сетка ω^I с шагами τ и h и сгущённая сетка ω^{II} . Поскольку порядок аппроксимации счёта по переменным одинаковый, шаги у сгущённой сетки ω^{II} будут соответственно h_x/r и h_y/r . Формула применяется для совпадающих узлов двух сеток.

2.6 График

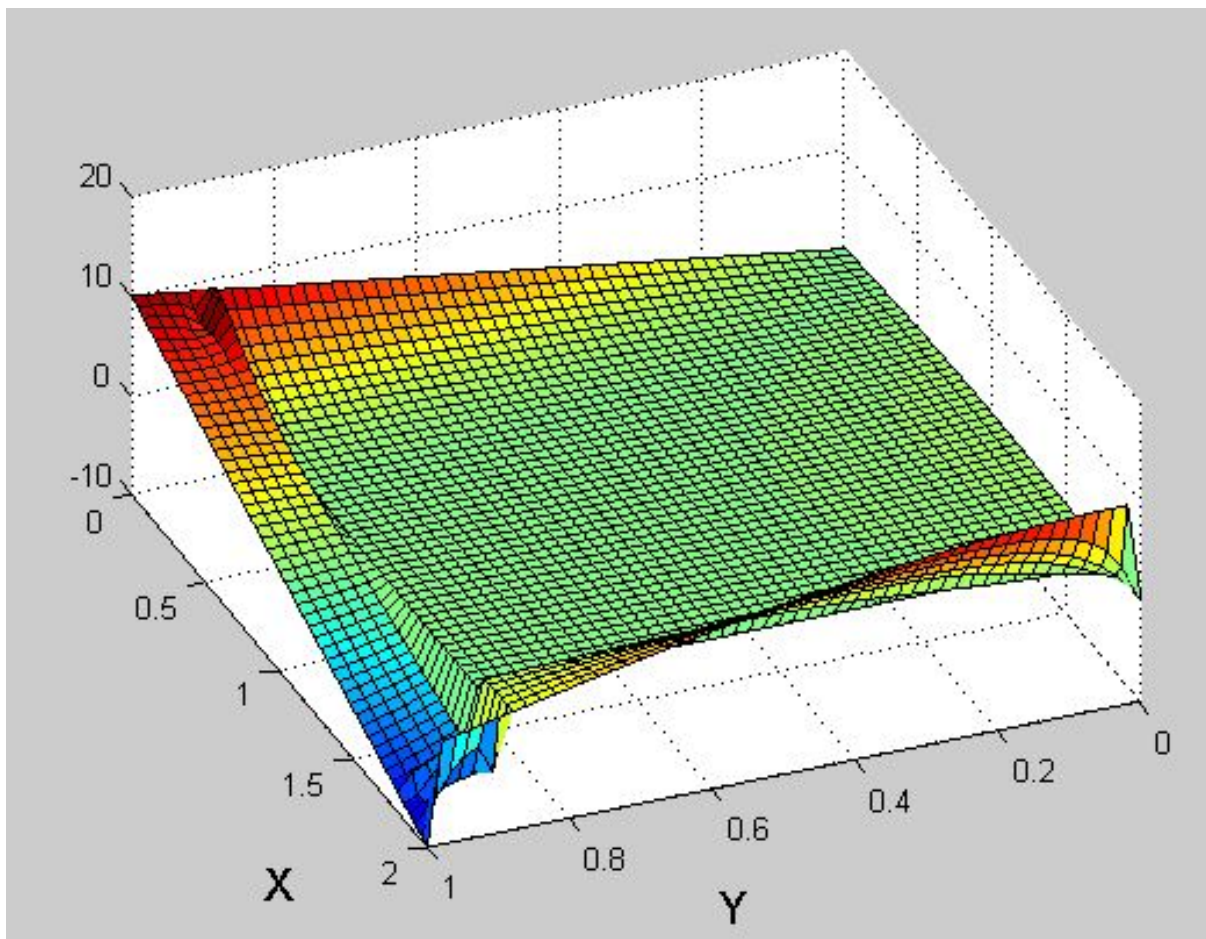


Рис. 1: Результаты