Лабораторная работа №1

1. Рассматривается задача отслеживания положения и ориентации мобильного двухколесного робота, движущегося на плоскости. Схема робота представлена на рис. 1

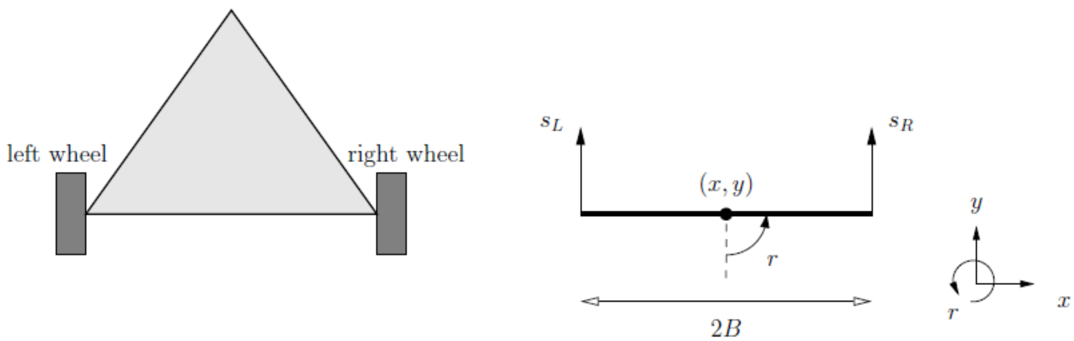

Рис. 1: Вид сверху (слева) и соответствующие физические показатели (справа): (x, y) – координаты положения (центра) робота, r – ориентация, s_R и s_L – линейные скорости правого и левого колеса.

Управляющим воздействием являются угловые скорости левого и правого колеса $u_L(t)$ и $u_R(t)$ (рад/с) соответственно, сообщаемые роботу в дискретные моменты времени $t_0 = 0, t_1 = T, t_2 = kT, ...$, где T – некоторый шаг дискретизации. Обозначим $u_R[k] = u_R(kT)$, $u_L[k] = u_L(kT)$. Тогда скорость передвижения (translational speed) робота определяется следующим уравнением

$$s_t[k] = \frac{s_R[k] + s_L[k]}{2},$$

а линейные скорости колес, в свою очередь, определяются через угловые скорости

$$s_R[k] = W_R u_R[k], \qquad s_L[k] = W_L u_L[k],$$

где W_R и W_L – радиусы колес. Скорость вращения s_r (рад/с) также определяется через линейные скорости колес

$$s_r[k] = \frac{s_R[k] - s_L[k]}{2B},$$

где B – колесная база робота (см. рис. 1).

Предполагается, что робот движется в соответствии со следующим законом:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= s_t(t)\cos(r(t)) \\ \dot{y}(t) &= s_t(t)\sin(r(t)) \\ \dot{r}(t) &= s_r(t). \end{aligned}$$

При этом соотвествующие уравнения в дискретном времени

$$\begin{aligned}
x[k+1] &= x[k] + Ts_t[k]\cos(r[k]) - \frac{1}{2}T^2 s_t[k]s_r[k]\sin(r[k]) \\
y[k+1] &= y[k] + Ts_t[k]\sin(r[k]) + \frac{1}{2}T^2 s_t[k]s_r[k]\cos(r[k]) \\
r[k+1] &= r[k] + Ts_r[k].
\end{aligned}$$

В дискретные моменты времени робот получает измерения своего положения и ориентации, которые удовлетворяют следующей статистической модели:

$$\begin{aligned}
z_x &= x + w_x \\
z_y &= y + w_y \\
z_r &= r + w_r,
\end{aligned}$$

где w_x, w_y, w_r – независимые нормальные случайные величины с нулевым средним и некоторой (известной) дисперсией.

Требуется с применением расширенного фильтра Калмана (EKF) отслеживать положение и ориентацию мобильного робота.

2. Пусть положение мобильного робота в момент времени t определяется вектором (x_t, y_t, θ_t), где (x_t, y_t) – декартовы координаты на плоскости; θ_t – ориентация. При этом предполагается, что мобильный робот движется на плоскости в соответствии со следующей моделью (odometry motion model)

$$\begin{aligned}
x_t &= x_{t-1} + \delta_t\cos(\theta_{t-1} + \delta_{r1}) + e_{x,t} \\
y_t &= y_{t-1} + \delta_t\sin(\theta_{t-1} + \delta_{r1}) + e_{y,t} \\
\theta_t &= \theta_{t-1} + \delta_{r1} + \delta_{r2} + e_{\theta,t}.
\end{aligned}$$

где $(\delta_{r1}, \delta_t, \delta_{r2})$ – заданные управляющие воздействия (одометрия), значения которых приведены в файле 'sensor_data_ekf.dat'; $e_{x,t}, e_{y,t}, e_{\theta,t}$ – независимые нормальные случайные величины с нулевым средним и дисперсией 0.2.

Имеется несколько ориентиров (landmarks), координаты которых записаны в файле 'landmarks.dat'. При движении робот в каждый момент времени регистрирует несколько ориентиров, определяя расстояние до каждого них с помощью лазерного дальномера. Предполагается, что ошибка измерения расстояния распределена нормально с нулевым средним и дисперсией 0.2, при этом измерения расстояния до различных ориентиров предполагаются независимыми. Информация о наблюдаемых ориентирах в различные моменты времени представлена в файле 'sensor_data_ekf.dat'.

Задания:

(a) Реализовать расширенный и сигма-точечный фильтр Калмана для отслеживания положения мобильного робота.

(b) Реализовать алгоритм фильтр частиц в условиях предыдущей задачи для модифицированной модели движения

$$
\begin{aligned}
x_t &= x_{t-1} + \widehat{\delta}_t \cos(\theta_{t-1} + \widehat{\delta}_{r1}) \\
y_t &= y_{t-1} + \widehat{\delta}_t \sin(\theta_{t-1} + \widehat{\delta}_{r1}) \\
\theta_t &= \theta_{t-1} + \widehat{\delta}_{r1} + \widehat{\delta}_{r2} \\
\widehat{\delta}_{r1} &= \delta_{r1} + \varepsilon_{\alpha_1|\delta_{r1}|+\alpha_2\delta_t} \\
\widehat{\delta}_t &= \delta_t + \varepsilon_{\alpha_3\delta_t+\alpha_4(|\delta_{r1}|+|\delta_{r2}|)} \\
\widehat{\delta}_{r2} &= \delta_{r2} + \varepsilon_{\alpha_1|\delta_{r2}|+\alpha_2\delta_t},
\end{aligned}
$$

где $(\delta_{r1}, \delta_t, \delta_{r2})$ – заданные управляющие воздействия (одометрия), значения которых приведены в файле 'sensor_data_pf.dat'; ε_{σ^2} – центрированная нормальная случайная величина с дисперсией σ^2; $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4] = [0.1, 0.1, 0.05, 0.05]$. Информация о наблюдаемых ориентирах в различные моменты времени содержится в файле 'sensor_data_pf.dat'.

3. Магнитоэнцефалография (МЭГ)является неинвазивным функциональным методом исследования головного мозга, основанным на регистрации и анализе магнитных полей, которые возникают в результате протекания электрических процессов в головном мозге. При анализе данных МЭГ встает проблема решения так называемой обратной задачи, которая состоит в восстановлении распределения активности нейронных источников на поверхности коры головного мозга. Некоторые подходы к решению такой задачи основаны на дипольном моделировании нейронных источников.

   Рассматривается упрощенная модель отслеживания диполя [1], перемещающегося в пределах плоскости $P = \{\mathbf{r} = (r_1, r_2, 0)\}$. Система сенсоров расположена на некотором удалении h от плоскости перемещения диполя. Источник магнитного поля характеризуется четырьмя степенями свободы: декартовы координаты положения на плоскости $p = (p_1, p_2)$; две координаты $q = (q_1, g_2)$, характеризующие магнитный дипольный момент. Компонента магнитного поля, перпендикулярная плоскости P, регистрируется датчиком. Введем следующие обозначения: $x = (p, q) \in \mathbb{R}^4$; $\mathbf{q} = (q, 0) \in \mathbb{R}^3$; $\mathbf{p} = (p, 0) \in \mathbb{R}^3$. Пусть всего имеется L сенсоров. Согласно закону Био-Савара-Лапласа, регистрируемая сенсором, находящимся в точке $\mathbf{r}_j$, компонента вектора магнитной индукции определяется следующим выражением:

$$
b_j(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{e} \cdot (\mathbf{q} \times (\mathbf{r}_j - \mathbf{p}))}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{p}|^3}, \qquad j = 1, ..., L,
$$

где μ_0 – магнитная постоянная; $\mathbf{e}$ – единичный вектор, перпендикулярный плоскости P. Обозначим вектор наблюдений

$$b(x) = (b_1(x), ..., b_L(x)).$$

Предполагается, что фазовый вектор меняется в соответствии со следующим разностным уравнением

$$x_{k+1} = x_k + w_{k+1},$$

где w_{k+1} – центрированный гауссовский случайный вектор (независимый от x_k) с матрицей ковариаций

$$C = \mathrm{diag}(\lambda^2, \lambda^2, \delta^2, \delta^2).$$

Предполагается, что модель наблюдения имеет следующий вид

$$y_k = b(x_k) + V_k,$$

где шум V_k не зависит от $x_j,\ j \leq k$, распределен нормально с нулевым средним и некоторой матрицей ковариаций Γ.

Ввиду того, что относительно дипольного момента $q = (q_1, q_2)$ модель наблюдения является линейной:

$$y_k = g(p)q_k + V_k,$$

можно воспользоваться модификацией фильтра частиц, основанной на теореме Рао-Блэкуэлла (RBPF – Rao-Blackwellized particle filters) [2, 3]. Совместное распределение представимо в следующем виде:

$$\pi(p_k, q_k | y_{1:k}) = \pi(p_k | y_{1:k}) \pi(q_k | p_k, y_{1:k}),$$

где первое распределение в правой части аппроксимируется с помощью фильтра частиц, а второе рассчитывается аналитически с помощью фильтра Калмана.

Задание:

Требуется реализовать процедуру отслеживания состояния диполя с помощью RBPF.

4. Рассматривается приложение калмановской фильтрации к задаче определения ориентации абсолютно твердого тела на основе измерений, регистрируемых акселерометром и гироскопом. Требуется реализовать расширенный фильтр Калмана, в рамках следующей модели пространства состояний [4]:

   - Ориентация тела в момент времени t описывается единичным кватернионом $q(t) = (q_0(t), q_1(t), q_2(t), q_3(t))^T$. Пусть $\omega(t) = (\omega_x(t), \omega_y(t)), \omega_z(t))^T$ –

угловая скорость объекта, тогда динамика изменения ориентации описывается следующим законом

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{1}{2} q \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\Omega(\omega) q = \frac{1}{2}\Xi(q)\omega, \end{aligned} \tag{1}$$

где

$$\Omega(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_x & -\omega_y & -\omega_z \\ \omega_x & 0 & \omega_z & -\omega_y \\ \omega_y & -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_z & \omega_y & -\omega_x & 0 \end{pmatrix}, \quad \Xi(q) = \begin{pmatrix} -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & q_0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & q_0 \end{pmatrix}.$$

Предполагается, что угловая скорость ω_k, регистрируемая в моменты времени $t_k = kT$, где T – шаг дискретизации, наблюдается на фоне гауссовского шума w_k с заданной матрицей ковариаций. Тогда дискретный аналог уравнения (1) примет следующий вид

$$q_{k+1} = e^{\frac{T}{2}\Omega(\omega_k + w_k)} q_k \tag{2}$$

$$\approx (I_{4\times 4} + \frac{1}{2}\Omega(\omega_k)T) q_k + \frac{T}{2}\Xi(q_k) w_k. \tag{3}$$

- Предполагается, что измерения акселерометра подчиняются следующей статистической модели

$$y_k^a = Q^T(q_k)(g^0 + F_k) + e_k^a,$$

где $g^0 = (0, 0, g)^T$, g – ускорение свободного падения; F_k – внешняя сила, воздействующая на объект (можно допустить ее отсутствие); e_k^a – гауссовский шум с заданной матрицей ковариаций; $Q(q)$ – матрица поворота, соответствующая кватерниону q:

$$Q(q) = \begin{pmatrix} 2q_0^2 - 1 + 2q_1^2 & 2q_1q_2 - 2q_0q_3 & 2q_1q_3 + 2q_0q_2 \\ 2q_1q_2 + 2q_0q_3 & 2q_0^2 - 1 + 2q_2^2 & 2q_2q_3 - 2q_0q_1 \\ 2q_1q_3 - 2q_0q_2 & 2q_2q_3 + 2q_0q_1 & 2q_0^2 - 1 + 2q_3^2 \end{pmatrix}.$$

5. Задача окулографии (отслеживание глаз) состоит в определение координат взора на плоскости зрительного разражителя (например, изображения). Однако получить точную оценку координат может быть затруднительно из-за различных источников шума, присущих получению такого рода измерений. В файле 'eyetracking.npz' содержатся записи траекторий взгляда нескольких человек при рассматривании различных изображений (см. пример на рис. 2). Требуется на основе данных для фиксированного человека (subject) и фиксированного изображения (stimuli) с помощью EM-алгоритма обучить линейную модель пространства состояний. Затем на основе обученной модели сгладить траекторию для другого набора данных с помощью процедуры Рауха-Тунга-Стрибела.

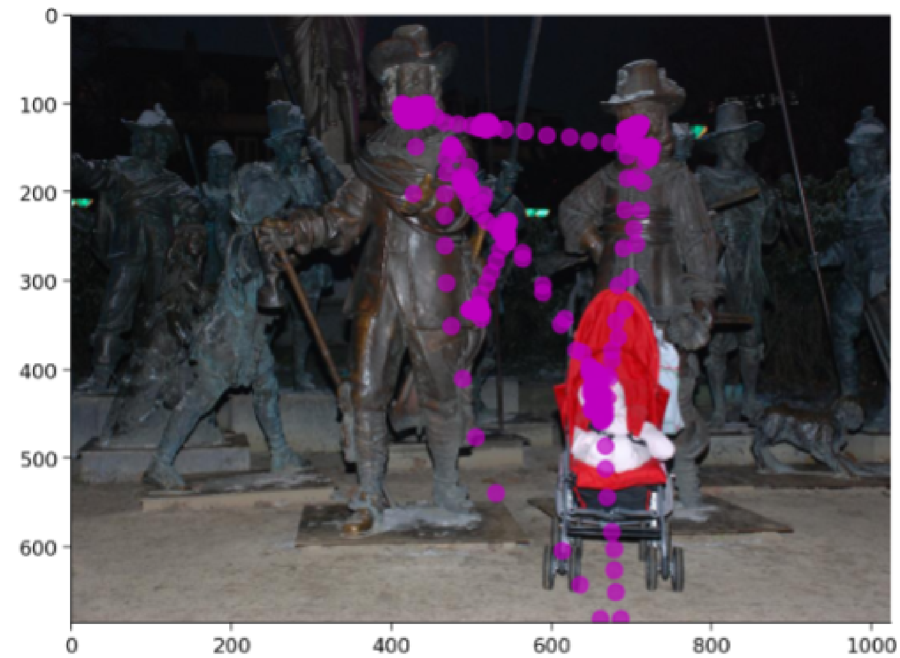

Рис. 2: Пример траектории взгляда.

6. В верхних четырех углах комнаты размера $20 \times 20 \times 10$ футов расположены громкоговорители (loudspeakers) так, как показано на рис. 1. В пределах комнаты передвигается некоторый объект с микрофоном.

   - Передатчик одновременно передает четыре некоррелированных акустических сигнала $s_i(t)$, $i = 1, ..., 4$ на каждый громкоговоритель (см. рис. 3)
   - Частота дискретизации составляет 100000 отсчетов в секунду.
   - Сигнал с микрофона $r(t)$ поступает на принимающее устройство (receiver), в котором вычисляются и хранятся координаты x, y, z объекта.
   - Скорость звука c в комнате полагается равной 1125 футов в секунду.
   - Предполагается следующая модель, связывающая подаваемый на громкоговоритель сигнал $s(t)$ и сигнал $r(t)$, принимаемый микрофоном:

     $$r(t) = \alpha s(t - T) + \eta(t), \tag{4}$$

     где η – шум, некоррелированный с передаваемым сигналом $s(t)$; $T = R/c$; R – расстояние от микрофона до громкоговорителя.

   В файле «Transmitter.txt» записана матрица, каждая строка которой представляет собой сигнал, подаваемый на соответствующий громкоговоритель. В файле «Receiver.txt» записан сигнал r, поступаемый с микрофона. Требуется определить координаты объекта.

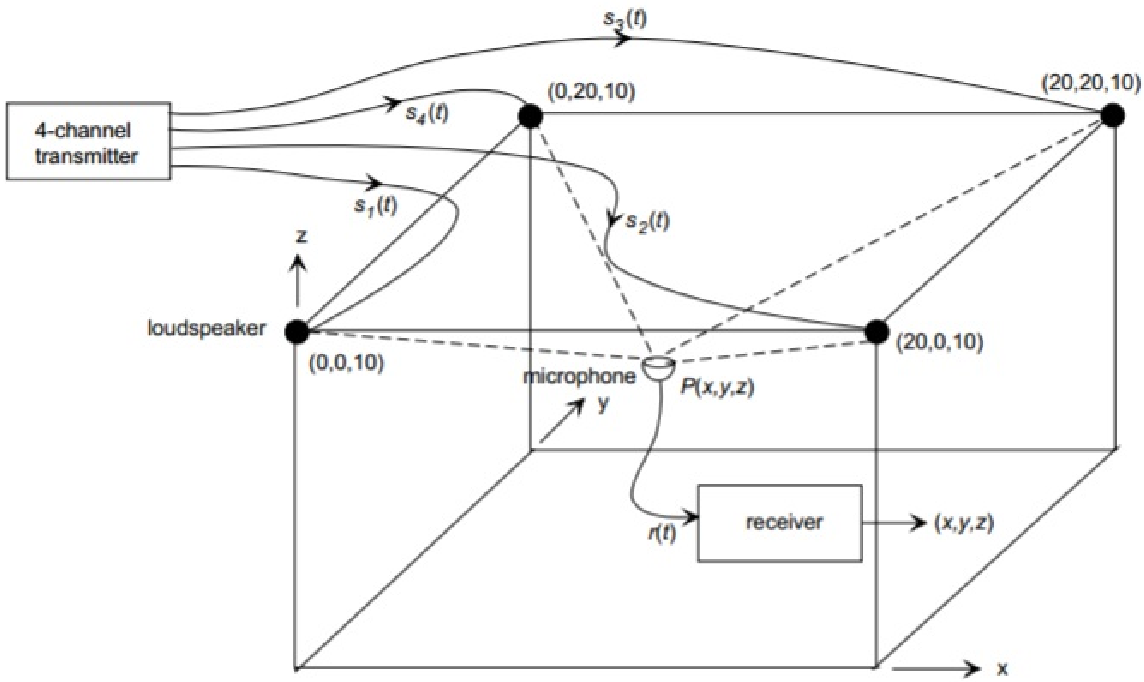

Рис. 3: Схема комнаты.

Указания:

- Рассмотреть взаимную корреляционную функцию между $r(t)$ и $s(t)$. Далее по имеющимся данным оценить параметр T в выражении (4).
- Задача является переопределенной (достаточно трех громкоговорителей). Поэтому решение находится с помощью МНК, в результате чего получается задача нелинейной оптимизации, решение которой может быть найдено численно.

Литература:

[1] *E. Somersalo, A. Voutilainen, J.P. Kaipio.* Non-stationary magnetoencephalography by Bayesian filtering of dipole models. Inverse Probl., 19 (2003) 1047-1063. doi: 10.1088/0266-5611/19/5/304

[2] *A. Sorrentino.* Particle Filters for Magnetoencephalography. Archives of Computational Methods in Engineering, 17 (2010) 213—251. doi: 10.1007/s11831-010-9047-0

[3] *A. Sorrentino et al.* Particle filters for the magnetoencephalography inverse problem: increasing the efficiency through a semi-analytic approach (Rao–Blackwellization). 2008. Journal of Physics: Conference Series, 124 012046. doi: 10.1088/1742-6596/124/1/012046

[4] M. Kok, J. D. Hol and T. B. Schön (2017). Using Inertial Sensors for Position and Orientation Estimation. Foundations and Trends in Signal Processing: Vol. 11: No. 1-2, pp 1-153. doi: 10.1561/2000000094