

Olympic Birds

Matemática



Coletânea de Sequências II
Sérgio Carneiro Bittencourt



Olympic Birds

Sequências II

1 Introdução

Esta coletânea, elaborada pela equipe de matemática do Olympic Birds, reúne problemas de sequências e suas soluções, devidamente separados em níveis de dificuldade, sendo eles o fácil (questões de 1 a 5), o médio (questões de 6 a 10) e o difícil (questões de 11 a 15). Com o desenrolar dos exercícios, você desenvolverá seu raciocínio matemático e aplicará diferentes ideias para a resolução de cada problema.

Visando a um melhor entendimento do conteúdo, recomendamos os seguintes materiais:

1. Banco de Questões da OBMEP

Esse portal é uma excelente fonte de problemas com soluções voltados para quem está estudando para a OBMEP.

2. Provas antigas da OBMEP

Aqui, é possível encontrar diversas questões, que já caíram na OBMEP, permitindo ao estudante conhecer melhor como o assunto de sequências é cobrado na prova.

3. Portal da OBMEP

Na página do Portal da OBMEP, é possível encontrar aulas e materiais sobre sequências.

4. POTI

Esse é um dos mais famosos portais de treinamento para olimpíadas de matemática no Brasil. Lá é possível achar teoria, com videoaulas e listas, e exercícios para vários assuntos, incluindo sequências.

Ao final do material, temos uma seção de gabaritos para a conferência das respostas. Boa sorte na resolução dos problemas e divirtam-se!

2 Problemas

2.1 Problema 1 - Qual o padrão?

Considere a sequência: $1, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{27}, \dots$ Qual o seu 5º termo?

- a) $\frac{5}{81}$
- b) $\frac{5}{243}$
- c) 2
- d) $\frac{2}{43}$
- e) $\frac{1}{27}$

2.2 Problema 2 - Qual o termo?

Considere a sequência: 1, 4, 11, 29, 76... Qual o seu 7º termo?

- a) 199
- b) 253
- c) 360
- d) 439
- e) 521

2.3 Problema 3 - Termos esquecidos da PA (Banco de Questões da OBMEP)

Uma progressão aritmética, costumeiramente chamada de P.A., é uma sequência em que cada termo, a partir do segundo, é igual à soma do termo anterior com um valor fixo r chamado de diferença comum ou razão da progressão. Por exemplo, a sequência abaixo é uma progressão aritmética com termo inicial 3 e diferença comum 4.

$$a_1 = 3, a_2 = 7, a_3 = 11, a_4 = 15, a_5 = 19, a_6 = 23, a_7 = 27, a_8 = 31, a_9 = 35, \dots$$

Veja que estamos denotando o número da posição i pelo símbolo a_i . a) Se o primeiro termo de uma progressão aritmética é 2 e sua diferença comum é 3, qual é o valor do quarto termo?

b) A professora de João pediu que ele calculasse o décimo primeiro termo de uma progressão aritmética. Infelizmente, ele esqueceu qual era o termo inicial e a diferença comum. As únicas informações das quais ele lembrava eram:

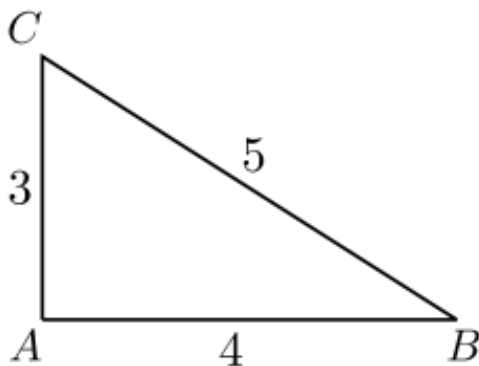
$$a_4 + a_7 + a_{10} = 207$$

$$a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} = 553$$

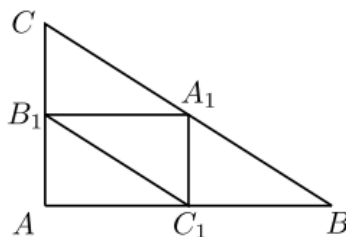
Quanto vale o décimo primeiro termo?

2.4 Problema 4 - Triângulo dentro de triângulo (Banco de questões da OBMEP)

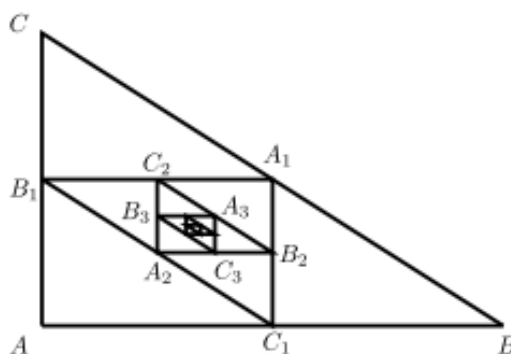
Dona Bete desenha um triângulo de lados 3, 4 e 5, como mostra a figura abaixo:



Em seguida, Dona Bete marca os pontos médios de cada lado e desenha um novo triângulo, como mostra a figura abaixo.



- Calcule a área do triângulo $A_1B_1C_1$.
- Seu Maurício nota um interessante padrão e repete o processo, como mostra a figura, sempre marcando e ligando os pontos médios de cada novo triângulo.



Calcule a área do triângulo $A_{2014}B_{2014}C_{2014}$.

2.5 Problema 5 - Uns e mais uns (Banco de Questões da OBMEP)

Calcule a soma:

$$1 + 11 + 111 + 1111 + \cdots + \underbrace{1111 \dots 11}_{n \text{ uns}}$$

2.6 Problema 6 - Soma de termos de uma PA

A soma do 10º ao 19º termo de uma PA, com todos os termos inteiros e maiores que 0, é 145. Qual o valor da razão dessa sequência?

2.7 Problema 7 - Soma de termos de uma PG

Sabe-se que o primeiro termo de uma PG é 1 e que a soma do 4º até o 6º termo dessa sequência é 3 vezes maior que o 5º termo. Se a razão dessa PG é positiva, qual o seu valor?

2.8 Problema 8 - Soma dos termos de uma PAG

Quanto vale a soma $1 + \frac{2}{5} + \frac{3}{25} + \frac{4}{125} + \dots$?

2.9 Problema 9 - Sequência de triângulos (OBMEP 2012)

Renata montou uma sequência de triângulos com palitos de fósforo, seguindo o padrão indicado na figura:



Um desses triângulos foi construído com 135 palitos de fósforo. Quantos palitos formam o lado do triângulo maior?

- a) 6
- b) 7
- c) 8
- d) 9
- e) 10

2.10 Problema 10 - PA e PG simultaneamente

Sabe-se que a_1 e a_2 são número naturais e também que são os dois primeiros termos de uma PA de razão 23 e de uma PG, cuja razão é um número primo. Qual o valor de cada um desses números?

2.11 Problema 11 - PA, PG e sistemas de equações (IME 2016)

Sejam uma progressão aritmética $(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots)$ e uma progressão geométrica $(b_1, b_2, b_3, b_4, \dots)$ de termos inteiros, de razão r e razão q , respectivamente, onde r e q são inteiros positivos, com $q > 2$ e $b_1 > 0$. Sabe-se, também, que $a_1 + b_2 = 3$, $a_4 + b_3 = 26$. O valor de b_1 é:

- a) 1
- b) 2
- c) 3
- d) 4
- e) 5

2.12 Problema 12 - Soma infinita

Calcule a soma: $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6} + \dots$

2.13 Problema 13 - Encontre o termo geral

Determine o termo geral da sequência $A_{n+2} - 3A_{n+1} - 4A_n = 0$, sabendo-se que $A_1 = 1$ e $A_2 = 19$.

2.14 Problema 14 - Progressões simultâneas (IME 2013)

Entre os números 3 e 192 insere-se igual número de termos de uma progressão aritmética e de uma progressão geométrica com razão r e q , respectivamente, onde r e q são números inteiros. O número 3 e o número 192 participam destas duas progressões. Sabe-se que o terceiro termo de $(1 + \frac{1}{q})^8$, em potências crescentes de $\frac{1}{q}$, é $\frac{r}{9q}$. O segundo termo da progressão aritmética é:

- a) 12
- b) 48
- c) 66
- d) 99
- e) 129

2.15 Problema 15 - Duas progressões

Sabe-se que $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$ formam uma PA e que (a_2, a_4, a_6) formam uma PG de razão a_5 . Determine a_3 .

3 Gabarito

1.a

2.e

3.a) $a_4 = 11$ b) $a_{11} = 109$ 4.a) $\frac{3}{2}$ b) $\frac{3}{2^{4047}}$ 5. $\frac{10}{81}(10^n - 1) - \frac{n}{9}$

6.1

7.1

8. $\frac{25}{16}$

9.d

10. $a_1 = 23$ e $a_2 = 46$

11.a

12. $\frac{1}{4}$ 13. $A_n = 4^n + 3 \cdot (-1)^n$

14.c

15.1