

Olympic Birds

Matemática



Coletânea de Sequências

Sérgio Carneiro Bittencourt



Olympic Birds

Sequências I

1 Introdução

Esta coletânea, elaborada pela equipe de matemática do Olympic Birds, reúne problemas de sequências e seus gabaritos, devidamente separados em níveis de dificuldade, sendo eles o fácil (questões de 1 a 5), o médio (questões de 6 a 10) e o difícil (questões de 11 a 15). No decorrer dos exercícios, você desenvolverá seu raciocínio matemático e aplicará diferentes ideias.

Visando a um melhor entendimento do conteúdo, recomendamos os seguintes materiais:

1. Banco de Questões da OBMEP

Essa é sem dúvidas uma das melhores fontes de problemas com soluções voltados para quem está estudando para a OBMEP.

2. Provas antigas da OBMEP

Aqui, é possível encontrar diversas questões, que já caíram na OBMEP, permitindo ao estudante conhecer melhor como o assunto de sequências é cobrado na prova.

Ao final do material, temos uma seção de gabaritos para a conferência das respostas. Boa sorte na resolução dos problemas e divirtam-se!

2 Problemas

2.1 Problema 1 - Qual o padrão?

Considere a sequência: 1,3,4,7,11,18,... Qual o seu 9º termo?

- a) 29
- b) 47
- c) 62
- d) 76
- e) 123

2.2 Problema 2 - Qual a altura?

Em 2020, um menino tinha 1,30m de altura; em 2021, 1,35m; em 2022, 1,40m. Qual é a sua altura em 2025?

- a) 1,45m
- b) 1,50m
- c) 1,55m
- d) 1,60m
- e) 1,65m

2.3 Problema 3 - Agrupamentos mágicos (OBMEP 2014)

A sequência -6, 12, -18, 24, -30, 36, ... é obtida a partir dos múltiplos positivos de 6, multiplicando-se os termos nas posições ímpares por -1. Observe na figura que a soma dos dois primeiros termos da sequência é igual a 6 e a soma dos três primeiros termos é igual a -12. Quantos termos consecutivos dessa sequência devemos somar, a partir do primeiro, para obter 180 como resultado?

- A) 30
- B) 60
- C) 90
- D) 120
- E) 180

2.4 Problema 4 - Produto milagroso

A sequência 1, -2, 4, -8, 16, -32,... é obtida a partir das potências de -2 com expoente natural. Quantos termos consecutivos da sequência devemos somar, a partir do primeiro, para obtermos 10923 como resultado?

- a)15
- b)16
- c)17
- d)18
- e)19

2.5 Problema 5 - Resolvendo equações

Se "a" e "b", com $b \geq a$, são termos consecutivos de uma progressão aritmética de razão 15 e $a+b=705$. Qual o valor de $2a-b$?

- a) 310
- b) 320
- c) 330
- d) 340
- e) 350

2.6 Problema 6 - Sequência do Gabriel (OBMEP 2018)

Gabriel brinca com números de dois ou mais algarismos. Ele substitui os dois primeiros algarismos à esquerda do número pela soma desses algarismos, e repete esse procedimento até obter um número de um algarismo. Por exemplo, partindo do número 2018 ele obtém o número 2, pois $2018 \rightarrow 218 \rightarrow 38 \rightarrow 11 \rightarrow 2$. Quantos são os números de três algarismos a partir dos quais Gabriel pode obter o número 1?

- A) 9
- B) 10
- C) 56
- D) 80
- E) 100

2.7 Problema 7 - Sequências SEQUENLADAS (Banco de Questões OBMEP)

Uma sequência numérica é chamada de SEQUENLADA quando, a partir do segundo número, o elemento seguinte é formado pelas regras:

I) se tem mais de 2 algarismos, passa-se o último algarismo para a 1ª posição e depois soma-se os dois últimos algarismos;

II) se tem dois algarismos, soma-se estes 2 até obter 1 algarismo apenas.

A sequência termina quando chegamos em um número com apenas um algarismo. Um exemplo de uma SEQUENLADA é:

$12.345 \rightarrow 5.127 \rightarrow 753 \rightarrow 312 \rightarrow 24 \rightarrow 6$.

- a) Escreva a SEQUENLADA que começa com 246.831.
- b) Quantas SEQUENLADAS de três números terminam com 1?

2.8 Problema 8 - Distância entre pontos (IME 2011)

São dados os pontos P_0 e P_1 distantes 1 cm entre si. A partir destes dois pontos são obtidos os demais pontos P_n , para todo n inteiro maior do que um, de forma que:

- 1) o segmento $P_n P_{n-1}$ é 1 cm maior do que o segmento $P_{n-1} P_{n-2}$

2) o segmento $P_n P_{n-1}$ é perpendicular a $P_0 P_{n-1}$.
Determine o comprimento do segmento $P_0 P_{24}$.

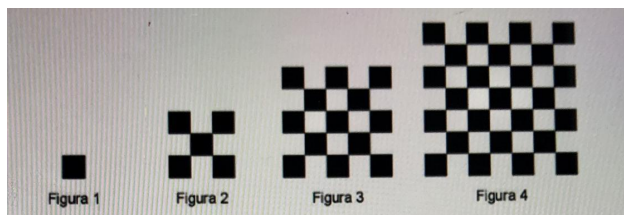
- a) 48
- b) 60
- c) 70
- d) 80
- e) 90

2.9 Problema 9 - Visão além do alcance

Encontre o valor da soma: $\frac{1}{1 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 17} + \cdots + \frac{1}{993 \cdot 1001}$

2.10 Problema 10 - Notando padrões

Considere a seguinte a sequência de tabuleiros:



Qual a diferença entre o número de casas pretas do 10º tabuleiro com o número de casas brancas do 9º tabuleiro?

2.11 Problema 11 - Soma infinita

João desenhou, em uma folha de papel, um quadrado ABCD de aresta 1 cm. Depois, ele desenhou um quadrado de aresta $\frac{1}{2}$ exterior ao primeiro. E, assim, João foi construindo infinitos quadrados nunca sobrepostos com arestas sempre iguais à metade do anterior.

- a) Qual o valor da área do primeiro quadrado?
- b) Qual o valor da área total de N quadrados sucessivos partindo do primeiro?
- c) Qual o valor da área total da figura contendo os infinitos quadrados?

2.12 Problema 12 - O poder de somar 0

Determine o termo geral da sequência $A_{n+2} = 3A_{n+1} - 2A_n$, sabendo que $A_1=1$ e $A_2=3$.

2.13 Problema 13 - Sequência da Janete (Banco de Questões OBMEP)

Janete brinca com os números criando sequências a partir de um número de 4 algarismos:

- I) Primeiro ela divide o número em duas partes, sendo a primeira formada pelos dois primeiros algarismos, e a segunda, pelos dois últimos.
- II) Se o número de uma das partes é par, ela divide-o por 2, mas, se for ímpar, ela soma 1.

III) Em seguida, ela junta os dois resultados (na ordem original).

IV) Se continuar com 4 algarismos, repete o processo; se o novo número tiver 3 algarismos, ela o separa em duas partes, sendo a primeira com apenas o primeiro algarismo e a segunda com os dois últimos, e repete o processo; se tiver 2 algarismos, ela repete o processo, sem dividir o número.

V) Esse processo é repetido até chegar em um número com apenas 1 algarismo, quando encerra a sequência.

Por exemplo, vamos construir a sequência que começa com 1.617: $1617 \rightarrow 16-17 \rightarrow 818 \rightarrow 8-18 \rightarrow 49 \rightarrow 50 \rightarrow 25 \rightarrow 26 \rightarrow 13 \rightarrow 14 \rightarrow 7$.

Portanto, a sequência é:

$1617 \rightarrow 818 \rightarrow 49 \rightarrow 50 \rightarrow 25 \rightarrow 26 \rightarrow 13 \rightarrow 14 \rightarrow 7$.

a) Qual a sequência que começa com 2.020?

b) Qual o 5º termo da sequência que começa com 8.998?

c) Vamos chamar de subsequência os 5 últimos números de uma sequência. Quantas subsequências diferentes existem que terminam em 7, mas que todos os seus termos sejam formados por números de 2 algarismos, com exceção do 7?

2.14 Problema 14 - Comprimentos de sequências

Começando com qualquer número natural não nulo é sempre possível formar uma sequência de números que termina em 1, seguindo repetidamente as instruções a seguir:

1. se o número for múltiplo de 3, divide-se por 3;
2. se o número deixar resto 1 na divisão por 3, subtrai-se 1;
3. se o número deixar resto 2 na divisão por 3, soma-se 1.

Por exemplo, começando com o número 76, forma-se a seguinte sequência:

$76 \rightarrow 75 \rightarrow 25 \rightarrow 24 \rightarrow 8 \rightarrow 9 \rightarrow 3 \rightarrow 1$.

Nessa sequência aparecem 8 números, por isso, dizemos que ela tem comprimento 8.

a) Escreva a sequência que começa com 100.

b) Quais sequências têm comprimento 4?

c) Quantas sequências têm comprimento 6?

2.15 Problema 15 - Sequências ABSURDAS

Uma sequência numérica é chamada ABSURDA quando, a partir do segundo número, o elemento seguinte é formado pelas seguintes regras:

I) Se o número tiver três ou mais algarismos, inverte-se o primeiro e o último, soma-se 100 ao número formado e apagam-se os dígitos das dezenas e das unidades, nessa ordem.

II) Se após uma inversão de algarismos, um 0 ficar na frente do número, iremos apagá-lo.

III) Se o número tiver menos de três algarismos, a sequência acaba.

a) Construa a sequência cujo primeiro termo é 2082285.

b) Quantas sequências ABSURDAS formadas por números de 6 dígitos terminam em 1?

3 Gabarito

1.d

2.c

3.b

4.s

5.c

6.e

7.a) $246.831 \rightarrow 124.611 \rightarrow 11.247 \rightarrow 5.443 \rightarrow 358 \rightarrow 88 \rightarrow 16 \rightarrow 7$. b) 20

8.c

9. $\frac{125}{1001}$

10.37

11.a) 1 cm^2 b) $\frac{4-(\frac{1}{4})^{N-1}}{3} \text{ cm}^2$ c) $\frac{4}{3} \text{ cm}^2$ 12. $A_n = 2^n - 1$ 13.a) $2020 \rightarrow 1010 \rightarrow 55 \rightarrow 56 \rightarrow 28 \rightarrow 14 \rightarrow 7$ b) 2326 c) 414.a) $100 \rightarrow 99 \rightarrow 33 \rightarrow 11 \rightarrow 12 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 1$. b) $27 \rightarrow 9 \rightarrow 3 \rightarrow 1$, $10 \rightarrow 9 \rightarrow 3 \rightarrow 1$, $8 \rightarrow 9 \rightarrow 3 \rightarrow 1$, $12 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 1$, $6 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$. c) 2115.a) $2082285 \rightarrow 50823 \rightarrow 309 \rightarrow 10$ b) 18900