



# APOSTILA FÉNIX



Material educacional  
produzido pelo Olympic Birds

# Apostila Fênix

*Olympic Birds - Astronomia*

*Edição 1.0*

*Brasil, Fevereiro 2025*

## Creative Commons License

*This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International License.*

## Prefácio

---

É com grande entusiasmo que o departamento de Astronomia do **Olympic Birds** apresenta o **Livro Fênix**, cujo nome remete tanto à constelação quanto à transformação exuberante que a educação proporciona em nossas vidas. Nossa projeto só existe graças à paixão dos voluntários pelas experiências olímpicas, e este material foi desenvolvido para apoiar estudantes na preparação para as seletivas de Astronomia. Abrangemos uma ampla gama de conteúdos, desde a fase online até as provas presenciais em Barra do Piraí (anteriormente realizadas em Vinhedo).

Esta é a primeira versão do livro, e como a próxima fase presencial acontece em apenas duas semanas, pode ser que ainda não contenha um grande número de questões. No entanto, como mencionado, o material será constantemente atualizado, trazendo novos tópicos, mais exercícios e soluções detalhadas. Além disso, planejamos desenvolver outros recursos específicos para auxiliá-los ainda mais na preparação! Fiquem ligados em nosso site para mais informações: <https://olympicbirds.com.br/>

Mesmo com um número reduzido de questões nesta versão inicial, nos preocupamos em trazer abordagens teóricas inovadoras e exercícios diferenciados. Caso encontre algum erro ou tenha sugestões, entre em contato conosco através do seguinte link: <https://forms.gle/HJFJqfRpZnk5qpAf7>.

Estamos felizes em fazer parte da sua jornada e desejamos muito sucesso nas seletivas! Quem sabe nos encontramos por lá, **passarinho olímpico?**

# **Autores**

---

- Ana Luiza Franco de Araujo
- Davi Lucas Marques de Freitas
- Felipe Maia Silva
- Maria Clara Andrade Garcia
- Natália Rosa Vinhaes
- Nicholas Lage Melo Oliveira
- Paulo Isidro Reis de Lima
- Tiago Rocha Moraes de Santiago
- Gabriel Gaio Dorigon
- Maria Beatriz Mesquita Ximenes

# **Organização Geral**

---

- Davi Lucas Marques de Freitas
- Felipe Maia Silva
- Leon Luca de Araujo Calheira
- Alexandre Monte Mitoso Ribeiro
- Tiago Rocha Moraes de Santiago

# **Autores dos capítulos**

---

- |   |                                 |
|---|---------------------------------|
| 1. Noções de Mecânica                     | 4. Noções de Física Moderna     |
| • Escrita: Gabriel, Maria Beatriz e Tiago | • Escrita: Nicholas             |
| • Revisão: Tiago                          | • Revisão: Tiago                |
| 2. Mecânica Celeste                       | 5. Fotometria                   |
| • Escrita: Ana e Felipe                   | • Escrita: Isidro e Maria Clara |
| • Revisão: Felipe                         | • Revisão: Davi                 |
| 3. Astronomia de Posição                  | 6. Sistemas Binários            |
| • Escrita: Isidro e Natália               | • Escrita: Ana e Isidro         |
| • Revisão: Davi e Felipe                  | • Revisão: Davi                 |



## Sumário

<b>1 Noções de Mecânica</b>	<b>8</b>
1.1 Cinemática . . . . .	8
1.1.1 Definições cinemáticas . . . . .	8
1.1.2 Referenciais . . . . .	10
1.1.3 Movimento retilíneo uniforme . . . . .	12
1.1.4 Movimento retilíneo uniformemente variado . . . . .	13
1.1.5 Lançamentos . . . . .	15
1.1.6 Problemas . . . . .	18
1.1.7 Soluções . . . . .	19
1.2 Leis de Newton . . . . .	20
1.2.1 Primeira lei: A Lei da Inercia . . . . .	20
1.2.2 Segunda lei: A Lei fundamental da Dinâmica . . . . .	20
1.2.3 Terceira lei: A Lei da Ação e Reação . . . . .	21
1.2.4 Exemplos de forças . . . . .	21
1.2.5 Vínculos geométricos . . . . .	28
1.2.6 Bizus . . . . .	31
1.2.7 Problemas . . . . .	32
1.2.8 Soluções . . . . .	37
1.3 Momento linear . . . . .	40
1.3.1 Centro de massa . . . . .	40
1.3.2 Momento linear propriamente dito . . . . .	42
1.3.3 Impulso . . . . .	43
1.3.4 Momento linear em um sistema de partículas . . . . .	43
1.3.5 Conservação do momento linear . . . . .	44
1.4 Colisões . . . . .	45
1.4.1 Colisões perfeitamente inelásticas . . . . .	45

1.4.2	Colisões elásticas . . . . .	46
1.4.3	Coeficiente de restituição . . . . .	47
1.4.4	Colisões parcialmente inelásticas . . . . .	48
1.4.5	Problemas . . . . .	50
1.4.6	Solucionário . . . . .	55
1.5	Energia . . . . .	58
1.5.1	Conservação da energia unidimensional . . . . .	58
1.5.2	Teorema da Energia Cinética . . . . .	60
1.5.3	Trabalho e energia potencial . . . . .	61
1.5.4	Exemplos de trabalhos de forças . . . . .	63
1.5.5	Conservação de energia em três dimensões . . . . .	65
1.5.6	Problemas . . . . .	67
1.5.7	Soluções . . . . .	72
1.6	Mecânica das rotações . . . . .	76
1.6.1	Introdução . . . . .	76
1.6.2	Cinemática angular . . . . .	76
1.6.3	Torque . . . . .	80
1.6.4	Momento angular . . . . .	83
1.6.5	Momento de inércia . . . . .	85
1.7	Referenciais não inerciais . . . . .	87
1.7.1	A força de inércia . . . . .	87
1.7.2	Força centrífuga . . . . .	89
1.8	Movimento Harmônico Simples (MHS) . . . . .	90
1.8.1	Movimentos periódicos . . . . .	90
1.8.2	Aparecendo o MHS . . . . .	93
1.8.3	Análise energética . . . . .	96
1.9	Técnicas especiais . . . . .	99
1.9.1	Analise dimensional . . . . .	99
1.9.2	Intuição física . . . . .	102
1.9.3	Quebra de idealização . . . . .	104
<b>2</b>	<b>Mecânica celeste</b>	<b>106</b>
2.1	Força Gravitacional . . . . .	106
2.2	Leis de Kepler . . . . .	108
2.2.1	Lei das Órbitas . . . . .	108

2.2.2	Lei das Áreas . . . . .	113
2.2.3	Lei Harmônica . . . . .	114
2.3	Órbitas e suas energias . . . . .	114
2.3.1	Órbitas Elípticas . . . . .	115
2.3.2	Órbitas Parabólicas . . . . .	116
2.3.3	Órbitas Hiperbólicas . . . . .	117
2.3.4	Excentricidade e energia . . . . .	117
2.4	Potencial Efetivo de uma órbita . . . . .	119
2.5	Transferência orbital . . . . .	125
2.5.1	Velocidade de Escape . . . . .	125
2.5.2	Órbitas com pontos em comum . . . . .	125
2.5.3	Transferência de Hohmann . . . . .	128
2.5.4	Transferência bielíptica . . . . .	131
2.5.5	Estilingue gravitacional . . . . .	135
2.6	Força de maré . . . . .	138
2.6.1	Referencial não inercial e força de Einstein . . . . .	138
2.6.2	Força de maré . . . . .	138
2.6.3	Espagueticização e Limite de Roche . . . . .	142
2.7	Pontos de Lagrange . . . . .	144
2.8	Tempo em órbitas . . . . .	148
2.8.1	Método Geométrico . . . . .	148
2.8.2	Equação de Kepler . . . . .	150
2.8.3	Elipse degenerada . . . . .	154
2.9	Problemas . . . . .	157
2.10	Solucionário . . . . .	162
<b>3</b>	<b>Astronomia de posição</b>	<b>181</b>
3.1	Esfera Celeste . . . . .	181
3.1.1	Sistemas de Coordenadas . . . . .	181
3.1.2	Apéx Solar . . . . .	193
3.2	Movimento dos astros . . . . .	193
3.2.1	Sentido dos Sistemas de Coordenadas . . . . .	194
3.2.2	Nascer, Ocaso e Passagem meridiana . . . . .	195
3.2.3	Culminação e Circumpolaridade . . . . .	196
3.3	Trigonometria esférica . . . . .	199

3.3.1	Relações fundamentais do triângulo esférico . . . . .	200
3.4	Escala de tempo . . . . .	207
3.4.1	Medição do Tempo: . . . . .	207
3.4.2	Tempo Sideral: . . . . .	207
3.4.3	Tempo Solar Verdadeiro: . . . . .	208
3.4.4	Tempo Solar Médio: . . . . .	209
3.4.5	Equação do Tempo: . . . . .	211
3.4.6	Fusos Horários: . . . . .	214
3.4.7	Dia Juliano . . . . .	216
3.4.8	Época J2000 . . . . .	217
3.5	Relógio de Sol . . . . .	218
3.5.1	O Relógio: . . . . .	218
3.5.2	Elementos do Relógio: . . . . .	218
3.5.3	Tipos de Relógio: . . . . .	218
3.5.4	Correções no Relógio de Sol: . . . . .	221
3.5.5	Inclinação do Gnômon: . . . . .	221
3.6	Problemas . . . . .	225
3.7	Solucionário . . . . .	232
<b>4</b>	<b>Noções de Física Moderna</b>	<b>256</b>
4.1	Desenvolvimento da Física Moderna . . . . .	256
4.1.1	História da Física Moderna . . . . .	256
4.1.2	Radiação Térmica . . . . .	256
4.1.3	Corpo Negro . . . . .	258
4.1.4	Lei de Stefan-Boltzmann . . . . .	259
4.1.5	Lei de Wien . . . . .	260
4.1.6	Castástrofe UV - Lei de Rayleigh-Jeans . . . . .	262
4.1.7	Lei de Planck . . . . .	264
4.2	Analizando os resultados . . . . .	267
4.2.1	Recapitulando . . . . .	267
4.2.2	A lei de Planck e suas derivações . . . . .	268
4.2.3	Stefan-Boltzmann . . . . .	270
4.3	O fóton . . . . .	271
4.4	Dualidade onda-partícula . . . . .	281
4.4.1	Comportamento da luz . . . . .	281

4.4.2	Hipótese de de Broglie . . . . .	283
4.5	Problemas . . . . .	285
4.6	Solucionário . . . . .	286
<b>5</b>	<b>Fotometria</b>	<b>287</b>
5.1	Fluxo . . . . .	287
5.2	Magnitudes . . . . .	295
5.2.1	Equação de Pogson . . . . .	296
5.2.2	Soma de Magnitudes . . . . .	298
5.2.3	Magnitude Limite . . . . .	300
5.2.4	Magnitude Superficial . . . . .	302
5.2.5	Distribuição do Brilho Superficial em Galáxias . . . . .	305
5.2.6	Magnitude Absoluta . . . . .	307
5.2.7	Relações entre Magnitudes . . . . .	308
5.3	Velas Padrão . . . . .	311
5.3.1	Estrelas Variáveis . . . . .	311
5.3.2	Supernovas do Tipo Ia . . . . .	312
5.3.3	Galáxias com brilho superficial fixo . . . . .	312
5.4	Sistemas de Magnitudes . . . . .	313
5.4.1	Correção Bolométrica . . . . .	315
5.4.2	Sistema UBV . . . . .	316
5.4.3	Índice de Cor . . . . .	316
5.4.4	Avermelhamento e Excesso de Cor . . . . .	317
5.5	Extinção . . . . .	321
5.5.1	Profundidade óptica . . . . .	322
5.5.2	Influência na Magnitude Aparente . . . . .	326
5.5.3	Módulo de Distância Corrigido . . . . .	327
5.6	Fotometria planetária . . . . .	329
5.6.1	Temperatura na Superfície . . . . .	329
5.6.2	Excentricidade e condição de vida . . . . .	333
5.6.3	Fases de corpos celestes . . . . .	335
5.6.4	Fotometria Lambertiana . . . . .	340
5.6.5	Atmosfera e Efeito Estufa . . . . .	344
5.6.6	Libração . . . . .	347
5.7	Eclipses . . . . .	349

5.7.1	Classificações . . . . .	349
5.7.2	Análise Geométrica . . . . .	351
5.7.3	Duração total de um eclipse . . . . .	353
5.8	Problemas . . . . .	361
5.9	Solucionário . . . . .	364
<b>6</b>	<b>Sistemas Binários</b>	<b>374</b>
6.1	Órbitas Circulares . . . . .	374
6.1.1	Relações entre Velocidade, Distância e Massa . . . . .	376
6.2	Forma Generalizada . . . . .	376
6.2.1	Geometria . . . . .	377
6.2.2	Excentricidade mínima . . . . .	378
6.3	Inclinação orbital . . . . .	380
6.3.1	Relações com $i$ . . . . .	380
6.4	Tipos de Sistemas Binários . . . . .	384
6.4.1	Binárias Visuais . . . . .	384
6.4.2	Binárias Astrométricas . . . . .	386
6.4.3	Binárias Espectroscópicas . . . . .	388
6.4.4	Binárias Eclipsantes . . . . .	391
6.5	Órbita Relativa . . . . .	395
6.6	Problemas . . . . .	400
6.7	Solucionário . . . . .	407
<b>7</b>	<b>Apêndice A: Cálculo</b>	<b>421</b>
7.1	Derivadas . . . . .	421
7.2	Integrais . . . . .	425
7.3	Aproximações . . . . .	427
7.4	Tabela úteis . . . . .	429
7.4.1	Derivadas . . . . .	429
7.4.2	Integrais . . . . .	430
7.4.3	Aproximações . . . . .	431
<b>8</b>	<b>Apêndice B: Iteração</b>	<b>431</b>

# 1 Noções de Mecânica

## 1.1 Cinemática

A cinemática é a descrição do movimento dos corpos e tem, como objetos de estudo, o tempo e as distâncias, ou o tempo e as variações das distâncias.

### 1.1.1 Definições cinemáticas

Toda a cinemática que será abordada nas seletivas presenciais de astronomia e em olimpíadas internacionais é derivada a partir de duas equações, sendo essas as definições de velocidade e aceleração.

Antes de prosseguirmos, vale ressaltar ao leitor que seguiremos a seguinte dinâmica: deixaremos, em primeira análise, a necessidade de usar Cálculo Diferencial e Integral para deduzir as fórmulas de lado, visando familiarizá-lo com esses novos conceitos e intuições. Entretanto, após isso, mostraremos as mesmas demonstrações, mas dessa vez com o uso de ferramentas matemáticas mais complexas.

Tanto nas olimpíadas internacionais quanto nas seletivas presenciais, ter conhecimento de Cálculo é muito importante, pois auxilia na resolução das questões de alto nível que costumam ser cobradas. Caso o leitor não tenha familiaridade com Cálculo, recomenda-se e-book "Cálculo I para Olimpíadas", disponível em [nossa site](#). Porém, caso queira uma revisão rápida do assunto, consulte o nosso apêndice de cálculo presente no fim do livro. Ele também contém tabelas de derivadas e integrais que podem ser úteis para iniciantes nesse conteúdo.

Com isso em mente, introduziremos os principais conceitos que estruturam a cinemática: as grandezas vetoriais velocidade e aceleração.

Nas grandezas vetoriais, costuma-se usar **versores**, que são vetores unitários cuja função é indicar posições em um espaço vetorial. Por exemplo, em três dimensões, um determinado objeto tem sua localização definida por uma distância em relação aos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Para facilitar a visualização, considere a imagem abaixo.

Nela, percebe-se que o vetor que localiza o corpo no espaço tem componentes nos três eixos. As componentes do vetor  $\vec{s}$ , nos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente, correspondem a  $2m$ ,  $3m$  e  $1m$ . Matematicamente, expressamos isso da seguinte maneira:  $\vec{s} = 2\hat{x} + 3\hat{y} + 1\hat{z}$ .

Reforçando essa ideia, podemos generalizá-la da seguinte forma:  $\vec{s} = s_x\hat{x} + s_y\hat{y} + s_z\hat{z} = s\hat{s}$ , medida em metros, representa a posição do corpo estudado a um ponto arbitrário escolhido como origem. Perceba que essa grandeza fornece todas as informações necessárias sobre a localização espacial de um corpo, pois expressa a distância do corpo à origem em cada direção ( $s_x$ ,  $s_y$  e  $s_z$ ), e tem como módulo a distância do corpo à origem, ou seja;  $|\vec{s}| = \sqrt{s_x^2 + s_y^2 + s_z^2} = s$ , é a distância entre o objeto estudado e a origem. Vale ressaltar também que os escalares  $s_x$ ,  $s_y$  e  $s_z$  são as magnitudes das projeções ortogonais de  $\vec{s}$  sobre os eixos cartesianos  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente. Recomendo para o leitor estudar o apêndice de vetores do livro, caso não esteja familiarizado com os termos e conceitos matemáticos usados aqui.

Definimos a velocidade média e a aceleração média de um corpo como sendo, respectivamente, a variação do espaço em função do tempo e a variação da velocidade em função do tempo, sendo representados por:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} ; \quad a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

No limite em que  $\Delta t$  tende a zero, surge o que chamamos de **velocidade instantânea** e de **aceleração instantânea**, pois avaliamos a variação de espaço em um intervalo de tempo muito curto, e isso faz com que os valores de velocidade e de aceleração não sejam mais uma média, mas sim o valor exato naquele instante. Esse limite é a própria definição da derivada do espaço ( $s$ ) e da velocidade ( $v$ ) em relação ao tempo ( $t$ ), podendo ser escritas na forma:

$$v_{inst} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} ; \quad a_{inst} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

Na forma vetorial:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt} ; \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Após multiplicarmos por  $dt$  ambos os lados, conseguimos integrar:

$$\vec{s} = \int \vec{v} dt + \vec{s}_0 ; \quad \vec{v} = \int \vec{a} dt + \vec{v}_0$$

A velocidade e a aceleração (medidas em m/s e m/s<sup>2</sup>, respectivamente) são as grandezas mais importantes ao se trabalhar com a variação da posição, e também podem ser representadas de maneira semelhante à posição:

$$\vec{v} = v_x \hat{x} + v_y \hat{y} + v_z \hat{z} = v \hat{v} ; \quad \vec{a} = a_x \hat{x} + a_y \hat{y} + a_z \hat{z} = a \hat{a}$$

### Exemplo 1: Uma função posição diferenciada...

Dada a função temporal para o espaço  $\vec{s}(t) = \log(\alpha t) \hat{x} + 5\hat{y} + 0\hat{z}$ , encontre os vetores velocidade e a aceleração do movimento em função da constante  $\alpha$  e do tempo  $t$ .

#### Solução 1

As expressões para a velocidade e para a aceleração podem ser encontradas pela derivação da função  $\vec{s}(t)$  em função do tempo:

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt} \left( \log(\alpha t) \hat{x} + 5\hat{y} + 0\hat{z} \right) = \frac{1}{\alpha t} \hat{x} + 0\hat{y} + 0\hat{z}$$

Para encontrar a aceleração, derivamos  $\vec{v}(t)$  em função do tempo:

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\alpha t} \hat{x} + 0\hat{y} + 0\hat{z} \right) = -\frac{1}{\alpha t^2} \hat{x} + 0\hat{y} + 0\hat{z}$$

Possuindo apenas  $\vec{v}$ , não é possível encontrar  $\vec{s}$ , assim como não é possível encontrar  $\vec{v}$  partindo apenas de  $\vec{a}$ . Algumas informações serão perdidas, isso é uma limitação da integração de funções.

### Ideia 1: Encontrando $\vec{s}$ a partir de $\vec{v}$

Simplesmente resolver a equação integral

$$\vec{s} = \int \vec{v} dt$$

não resolve o problema, pois integrais indefinidas geram uma constante  $+C$  desconhecida, o que nos dá infinitas possibilidades para uma função original  $\vec{s}(t)$ . Devemos então integrar a função de forma definida, isto é, resolver a seguinte equação integral:

$$\vec{s} - \vec{s}_0 = \int_{t_0}^t \vec{v} dt \Rightarrow \vec{s} = \vec{s}_0 + \int_{t_0}^t \vec{v} dt$$

Assim, podemos encontrar  $\vec{s}$ , contanto que saibamos também as condições iniciais do problema, ou seja, devemos conhecer  $\vec{s}_0 = \vec{s}(t_0)$  para encontrar a função  $\vec{s}(t)$

#### 1.1.2 Referenciais

Para resolver um problema de cinemática, escolhe-se um referencial, um corpo ou ponto que tem suas características tomadas como referência (daí o nome referencial) para a medida das grandezas de outros corpos.

Um exemplo famoso de como funcionam referenciais é o exemplo dos carros na estrada e das árvores nos seus arredores; Imagine dois carros se movendo lado a lado em uma estrada cercada por árvores. Para quem estiver dentro de um dos carros, as árvores apareceram estar se movimentando rapidamente do lado de fora, enquanto o outro carro parece estar parado. Já para um observador sentado na beira da estrada, as árvores apareceram estar imóveis, enquanto os dois carros se movimentam pela estrada com a mesma velocidade.

Uma das coisas mais importantes ao se trabalhar com referenciais diversos, é saber transitar entre os diferentes referenciais que podem aparecer em um problema, e também saber como "traduzir" as informações de um referencial para outro.

Dados dois corpos a e b, a posição de b no referencial de a é

$$\vec{s}_{ab} = s_{abx}\hat{x} + s_{aby}\hat{y} + s_{abz}\hat{z}$$

É encontrada simplesmente tomando a como a origem do sistema de coordenadas. A imagem a seguir ajuda a visualizar o descrito.

Note que  $\vec{s}_{ba} = s_{bax}\hat{x} + s_{bay}\hat{y} + s_{baz}\hat{z} = -\vec{s}_{ab}$  O mesmo será válido para grandezas derivadas de  $\vec{s}$ :

$$\vec{v}_{ab} = -\vec{v}_{ba} ; \quad \vec{a}_{ab} = -\vec{a}_{ba}$$

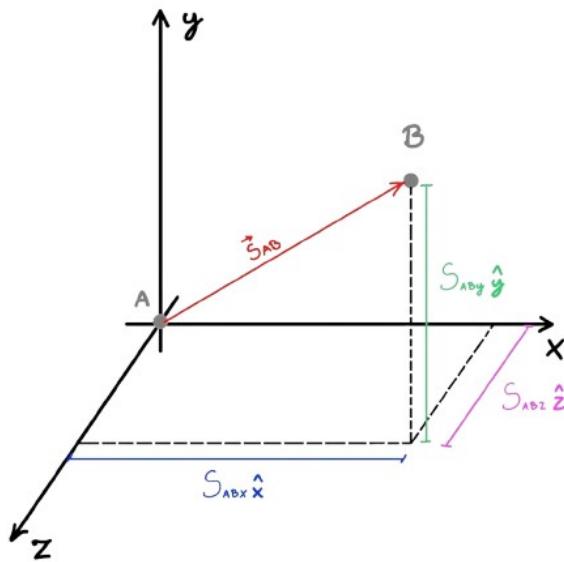


Figura 1: Vetores da posição de um corpo

Escolhendo um referencial qualquer "c", é interessante ver que

$$\vec{s}_{ab} = \vec{s}_{cb} - \vec{s}_{ca}$$

Num plano ilustrativo, segue o seguinte modelo:

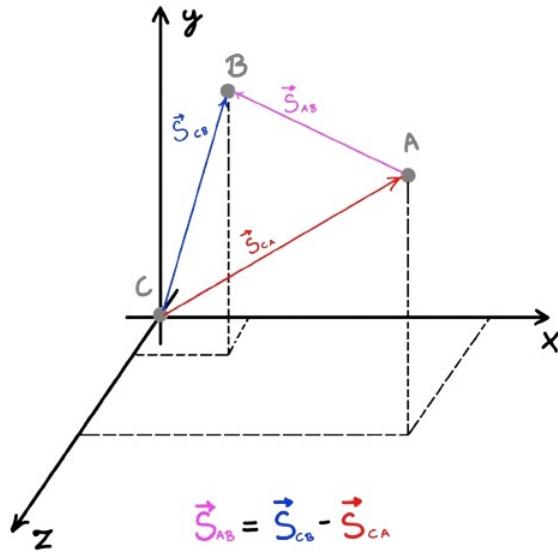


Figura 2: Sistema alternativo

Relações similares à relação acima são verdadeiras para as velocidades e acelerações relativas entre a, b e c.

O "referencial inercial" é um referencial que não possui aceleração, e, por isso, facilita as contas. Perceba que é contraditório dizer que um referencial não possui aceleração, já que se um corpo

qualquer tem aceleração, ele pode ser escolhido como referencial, daí todos os outros corpos do sistema terão uma aceleração. Existem definições melhores para um referencial inercial, como você verá no futuro do livro. Na prática, o referencial inercial é o referencial "do laboratório" ou o referencial que serve de base para definir os outros. Exemplos disso são: trabalhando com lançamentos oblíquos, o referencial inercial é o do solo. Trabalhando com os planetas do sistema solar, o referencial inercial é o referencial do Sol. Para maior simplificação dos cálculos, dado um referencial inercial a e um corpo b, os vetores  $\vec{s}_{ab}$ ,  $\vec{v}_{ab}$  e  $\vec{a}_{ab}$  podem ser tratados apenas como  $\vec{s}_b$ ,  $\vec{v}_b$  e  $\vec{a}_b$ . Referenciais não iniciais serão abordados mais à frente.

### Exemplo 2: Determinando a velocidade relativa

Dois móveis, p e q têm as seguintes velocidades constantes(todas em m/s):

$$\vec{v}_p = 4\hat{x} + 5\hat{y} + 2\hat{z}$$

$$\vec{v}_q = -1\hat{x} + -7\hat{y} + 2\hat{z}$$

Encontre a velocidade relativa entre os dois móveis.

### Solução 2

A velocidade relativa entre p e q é

$$\vec{v}_{pq} = \vec{v}_p - \vec{v}_q = (4 - (-1))\hat{x} + (5 - (-7))\hat{y} + (2 - 2)\hat{z} = 5\hat{x} + 12\hat{y} + 0\hat{z}$$

É interessante calcular o módulo da velocidade relativa, que pode nos dar uma ideia mais clara sobre o movimento:

$$|\vec{v}_{pq}| = \sqrt{5^2 + 12^2 + 0^2} = \sqrt{169} = 13m/s$$

### 1.1.3 Movimento retilíneo uniforme

O movimento retilíneo uniforme, ou MRU, é o primeiro caso específico da cinemática que será abordado aqui, e é caracterizado pela sua aceleração nula, ou seja,  $a(t)=0$ .

Se a aceleração do movimento é nula, sua velocidade não varia com o tempo, apenas o espaço. A primeira fórmula pode ser obtida como sendo uma extensão da fórmula da velocidade média de um corpo. Assuma, por simplicidade, que  $t_0 = 0$ . Sem Cálculo, a demonstração segue a seguinte dinâmica:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad \therefore \quad v = \frac{s - s_0}{t - t_0} \quad \therefore \quad vt = s - s_0 \quad \therefore \quad \boxed{s = s_0 + vt} \quad (1)$$

Logo, conclui-se que apenas manipulamos algebricamente uma relação que conhecíamos anteriormente, visando facilitar a substituição e contas com as diferentes variáveis.

Utilizando Cálculo, a dedução fica:

$$v = \frac{ds}{dt} \quad \therefore \quad ds = vdt \quad \therefore \quad \int ds = \int vdt \quad \therefore \quad s = vt + C$$

Para determinar a constante C, pensaremos que, em  $t = 0$ , o corpo está no espaço inicial  $s_0$ , ou seja,  $C = s_0$ . Substituindo, temos que:

$$s = s_0 + vt \quad (1)$$

### Exemplo 3: Perseguição

Em uma perseguição, dois carros estão inicialmente a 30m de distância um do outro. Considerando que o carro mais à frente se move a uma velocidade de 30m/s e o carro que está tentando o alcançar está a 40m/s, em quanto tempo os carros vão colidir?

### Solução 3

Para resolver este problema, basta encontrar a velocidade relativa  $v_r$  entre os dois carros e a aplicar na equação do MRU:

$$v_r = 40 - 30 = 10\text{m/s} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta s}{v_r} = \frac{30}{10} = 3\text{s}$$

#### 1.1.4 Movimento retilíneo uniformemente variado

O movimento retilíneo uniformemente variado (MRUV) é outro caso específico que será estudado mais a fundo. Ele é importante por dois motivos: É o movimento mais simples entre os que possuem aceleração e é o movimento descrito por corpos próximos à superfície da terra, ou seja, ações do nosso dia a dia, como chutar uma bola ou derrubar uma caneta da mesa, são descritas matematicamente pelas equações dessa seção.

O MRUV é caracterizado por ter uma aceleração constante e diferente de zero,  $a(t)=a$ . Serão deduzidas 5 equações que descrevem o MRUV.

A primeira equação, chamada de função horária da velocidade, é derivada diretamente da definição de aceleração. Sem Cálculo, fica:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad \therefore \quad a = \frac{v - v_0}{t - t_0} \quad \therefore \quad at = v - v_0 \quad \therefore \quad v = v_0 + at \quad (2)$$

Perceba que, novamente, apenas manipulamos algebraicamente uma relação anteriormente conhecida, com o fito de auxiliar nos exercícios e na visualização do problema.

Com Cálculo, a dedução segue a forma:

$$a = \frac{dv}{dt} \quad \therefore \quad dv = adt \quad \therefore \quad \int dv = \int adt \quad \therefore \quad v = at + C$$

Fazendo  $t_0 = 0$ , percebe-se que  $C$  será equivalente à velocidade no instante inicial, ou seja, a velocidade inicial  $v_0$ :

$$v = v_0 + at \quad (2)$$

Uma segunda equação pode ser encontrada da seguinte maneira:

$$v = \frac{ds}{dt} \quad \therefore \quad ds = vdt$$

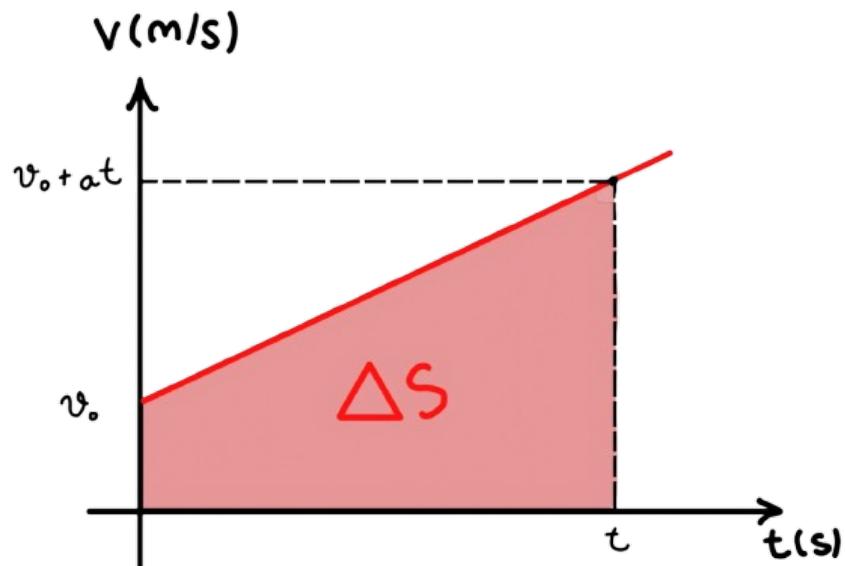
Agora, substituiremos  $v$  por  $v_0 = at$ , resultado que foi expresso a equação 2.

$$\int ds = \int (v_0 + at)dt \quad \therefore \quad s = \int v_0 dt + \int at dt \quad \therefore \quad s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 + C$$

Fazendo  $t = 0$ , concluímos que  $C = s_0$ . Logo:

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \quad (3)$$

Outra forma mais simples de encontrar essa equação reside no fato de que uma das funções da integral é calcular a área abaixo de determinada função num gráfico. Logo, se plotarmos um gráfico de velocidade por tempo, no qual a velocidade varia linearmente com o tempo, poderemos deduzir a equação 3 sem o uso direto de Cálculo.



A área abaixo desse gráfico equivale ao espaço percorrido pelo corpo e podemos calculá-lo pela fórmula da área de um trapézio ( $\Delta s = A_{\text{trapézio}}$ ).

$$\Delta s = \frac{(v_0 + at + v_0)t}{2} \quad \therefore \quad \Delta s = \frac{2v_0t}{2} + \frac{at^2}{2} \quad \therefore \quad \boxed{s = s_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2} \quad (3)$$

Com a regra da cadeia, podemos encontrar a chamada "equação de Torricelli":

$$\begin{aligned} a &= \frac{dv}{dt} = \frac{ds}{dt} \cdot \frac{dv}{ds} = v \frac{dv}{ds} \Rightarrow ads = vdv \\ \int_{s_0}^s a ds &= \int_{v_0}^v v dv \\ \therefore a \cdot (s - s_0) &= \frac{v^2 - v_0^2}{2} \Rightarrow v^2 = v_0^2 + 2a(s - s_0) \end{aligned}$$

Finalmente, como em um MRUV a velocidade tem caráter linear (como será mostrado melhor na seção de análise gráfica), a velocidade média do movimento é a média aritmética da velocidade inicial e da velocidade final do movimento, assim:

$$\frac{\vec{v} + \vec{v}_0}{2} = \frac{\vec{s} - \vec{s}_0}{\Delta t}$$

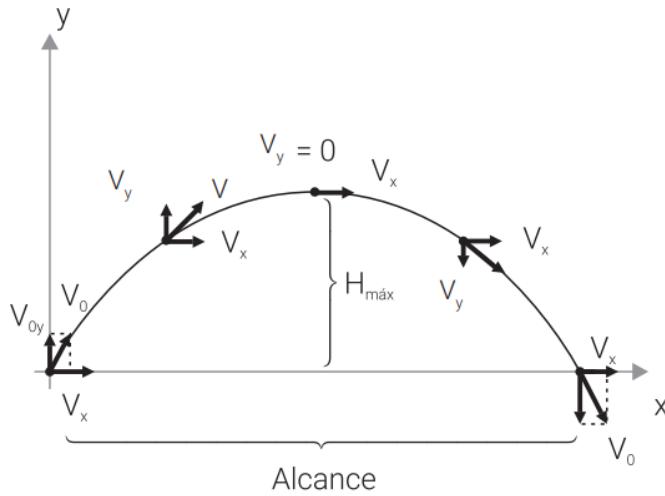
Assim, as equações encontradas aqui foram:

1.  $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$
2.  $\vec{s} = \vec{s}_0 + \vec{v}_0t + \vec{a}\frac{t^2}{2}$
3.  $\vec{s} = \vec{s}_0 + \vec{v}t - \vec{a}\frac{t^2}{2}$
4.  $\vec{v}^2 = \vec{v}_0^2 + 2\vec{a}(\vec{s} - \vec{s}_0)$
5.  $\frac{\vec{v} + \vec{v}_0}{2} = \frac{\vec{s} - \vec{s}_0}{\Delta t}$

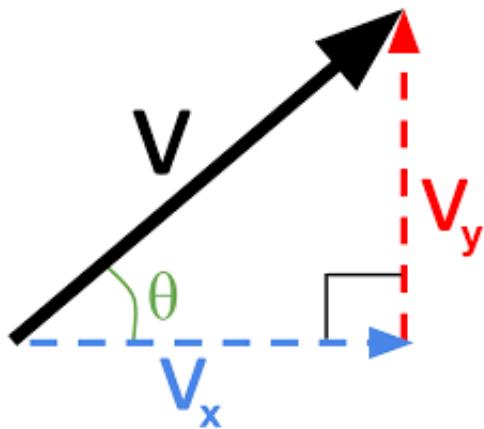
Todas essas equações são igualmente úteis, porém usadas em casos diferentes. A memorização de pelo menos 3 delas é necessária para que se consiga resolver qualquer problema de MRUV sem grande dificuldade (geralmente é prática da maioria das pessoas decorar as equações 1, 2 e 4), mas todas serão utilizadas e podem poupar tempo. É interessante indicar que  $\Delta t$  e  $t$  podem ser trocados um pelo outro nas equações com um termo temporal, mas que para o uso de  $t$  como variável,  $t_0$  precisa ser zero.

### 1.1.5 Lançamentos

A aplicação mais comum dos conhecimentos de cinemática são os lançamentos oblíquos, ou "arremessos". Na superfície de um planeta, a atração gravitacional causa uma aceleração constante "para baixo", e não existe (com exceção de casos específicos, como no problema 3 deste capítulo) aceleração no plano horizontal. Isso gera trajetórias parabólicas, como na imagem a seguir:



Para uma abordagem mais fácil e intuitiva, vamos escolher a origem do nosso espaço cartesiano como o ponto de lançamento e alinhar nossos eixos para que o lançamento esteja contido no plano  $xy$ . Também vamos escolher  $t_0$  como o momento em que o objeto estudado é lançado, e arbitrariamente o escolher como 0. Assim, não precisamos nos preocupar com a trajetória na direção  $z$ , temos  $s_0$  e  $t_0$  iguais a zero e só trabalharemos com medidas positivas para o tempo. Além disso, será útil decompor a velocidade de acordo com a figura a seguir:



Você já conhece a descrição básica de um lançamento oblíquo; No eixo  $x$  a partícula realiza um MRU e no eixo  $y$  a partícula realiza um MUV. vamos aqui encontrar algumas relações particulares de lançamentos oblíquos, como relações entre o alcance horizontal e o ângulo de lançamento(ângulo entre a velocidade inicial do objeto lançado e o plano horizontal), relações entre  $x(s_x)$  e  $y(s_y)$ , e relações entre a altura máxima atingida em um lançamento e o ângulo de lançamento.

Antes de iniciar as contas e mostrar as equações do lançamento oblíquo, gostaria de definir o alcance horizontal como "A", a duração do lançamento como "T", a velocidade inicial do lançamento como " $v_0$ ", a altura máxima atingida em um lançamento como "H", a aceleração da gravidade como "g" e o ângulo de lançamento como " $\theta$ ".

Finalmente, para encontrar H, A e relações com  $\theta$ , devemos encontrar uma relação entre  $s_x$  e  $s_y$ , que além de útil para encontrar estas informações, descreverá a trajetória da partícula. Para isso, devemos eliminar o termo "t" das expressões de  $s_x$  e  $s_y$ , já que uma distância horizontal está associada a apenas uma altura, independendo do tempo. Devemos então formar uma função  $s_y(s_x)$ :

$$s_x = v_{x0}t = v_0 \cos(\theta)t \Rightarrow t = \frac{s_x}{v_0 \cos(\theta)}$$

Substituindo t na equação  $s_y = v_0 \sin(\theta) - \frac{gt^2}{2}$  pela expressão encontrada, temos:

$$s_y = \frac{v_0 \cdot \sin(\theta)s_x}{v_0 \cos(\theta)} - \frac{gs_x^2}{2v_0^2 \cos^2(\theta)} = \tan(\theta)s_x - \frac{gs_x^2}{2v_0^2 \cos^2(\theta)}$$

A expressão nos mostra que a trajetória é uma *parábola*! Isso nos diz algumas coisas, a mais importante delas: A trajetória é *simétrica* em relação a um eixo perpendicular à horizontal e que passa pelo seu ponto máximo, essa simetria nos mostra que o tempo de subida e de descida de um objeto em lançamento oblíquo são iguais, e consequentemente são iguais a  $\frac{T}{2}$ .

Com esta função, podemos facilmente descobrir o alcance do lançamento, note que o ponto de lançamento e o ponto de aterrissagem são os dois únicos no solo, ou seja, os dois únicos pontos onde  $s_y = 0$ , e devem ser então as raízes da equação polinomial:

$$\tan(\theta)s_x - \frac{gs_x^2}{2v_0^2 \cos^2(\theta)} = 0 \Rightarrow \tan(\theta)s_x = \frac{gs_x^2}{2v_0^2 \cos^2(\theta)}$$

Multiplicando os dois lados da igualdade por  $\frac{2v_0^2 \cos^2(\theta)}{g \cdot s_x}$ , para  $s_x \neq 0$ , temos:

$$s_x = \frac{v_0^2 \cdot 2\sin(\theta)\cos(\theta)}{g}$$

Como  $s_x$  é uma raiz não-nula da equação, deve ser igual a A. Usando também a relação  $2\sin(\theta)\cos(\theta) = \sin(2\theta)$ , temos:

$$A = \frac{v_0^2 \cdot \sin(2\theta)}{g}$$

### 1.1.6 Problemas

1. (**Fácil**) Um asteroide se movimenta rapidamente em direção a Caronte, um satélite natural de Plutão. Se em primeira aproximação, a velocidade de aproximação entre o asteroide e Caronte é constante e igual a 30 km/s, qual deve ser a distância inicial entre os dois para que o impacto aconteça em 2 dias? R:  $5,184 \cdot 10^6$  km

2. (**Fácil**) Duas partículas, j e k, têm suas velocidades descritas pelas seguintes funções:

$$\vec{v}_j = 3at^2\hat{x} + 3bt\hat{y} + 2c\hat{z}$$

$$\vec{v}_k = -at^2\hat{x} + 2bt\hat{y} + 3c\hat{z}$$

Qual o módulo da aceleração relativa entre j e k em t=1?

3. (**Média**) Dois trens estão em rota para colidir. Os dois se movem a 45km/h e estão inicialmente a 90km um do outro. Se um pássaro muito rápido fica voando da frente de um trem até a frente do outro sem parar e mudando de direção instantaneamente ao tocar em um trem, com velocidade constante e igual a 120km/h, qual será a distância percorrida pelo pássaro antes de ser esmagado? R: 120km

4. (**Difícil**) Uma ventania estranha e muito forte está fazendo com que objetos livres no ar sejam acelerados na direção positiva do eixo x antes de atingir o chão, com uma aceleração de módulo igual à da gravidade. Sabendo disso, qual é o ângulo necessário para que um lançamento oblíquo contido ao plano xy seja de alcance máximo?

5. (**Difícil**) Mostre que separando uma queda livre em intervalos iguais de tempo, as distâncias percorridas nestes intervalos estão em progressão geométrica. Encontre também a distância percorrida no N-ésimo intervalo, em função da distância x percorrida no primeiro.

### 1.1.7 Soluções

#### Problema 1

Pela equação do MRU:

$$\Delta s = v\Delta t \rightarrow \Delta s = 30 \times 2 \times 24 \times 3600 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

Fazendo a conta, tem-se o resultado esperado.

#### Problema 2

Fazendo a aceleração relativa como mostrado na teoria:

$$\vec{v}_j - \vec{v}_k = (3 + 1)at^2\hat{x} + (3 - 2)bt\hat{y} + (2 - 3)c\hat{z} = 4at^2\hat{x} + bt\hat{y} - c\hat{z}$$

Tirando o módulo, temos:

$$v_j - v_k = \sqrt{16a^2 + b^2 + c^2}$$

#### Problema 3

A velocidade relativa entre os trens é de 90km/h. Assim, o tempo até eles se encontrarem é:

$$\Delta t = \frac{90\text{km}}{90\text{km/h}} = 1\text{h}$$

Assim, a distância percorrida pelo pássaro será:

$$\Delta s = v_p\Delta t = 120\text{km}$$

#### Problema 4

Em Breve

#### Problema 5

Em Breve

## 1.2 Leis de Newton

Primeiramente, é interessante deixar explícito que agora inicia a parte da física que estuda como agentes externos podem alterar o movimento de um corpo: a dinâmica. Vale também destacar que é recomendada a leitura do apêndice A antes desse capítulo; portanto, se ainda estiver devendo isto, apresse-se.

Dito isso, Newton não era só um gênio sentado debaixo de uma macieira – ele era o cara que, em 1687, deu as ferramentas para entendermos como o mundo físico funciona. Devemos desvendar suas três leis, com exemplos que você nunca vai esquecer (espero!).

### 1.2.1 Primeira lei: A Lei da Inércia

**Todo corpo permanece em repouso ou em movimento retilíneo uniforme (MRU), a menos que uma força externa atue sobre ele.** Destaca-se que essa lei apenas funciona em referenciais específicos, os inerciais - a ideia deve ser desenvolvida no capítulo 1.6.

Imagine um patinete em um asfalto liso. Se você o empurrar e soltar, ele não deve parar - vai continuar indo para sempre. Isso é a inércia: os objetos querem continuar fazendo o que já estavam fazendo, tendem a isso.

Entretanto, considere que agora este mesmo patinete está no mesmo asfalto liso, mas dessa vez ele fica posicionado exatamente no limite da pista e de uma praia e, quando empurrado, é para lá que se dirige. Ao entrar em contato com a areia, o patinete vai começar a parar até ter seu movimento cessado de uma vez e, provavelmente, cair para o lado. Todo esse drama só acontece porque a monotonia do patinete foi rompida com uma força externa - o atrito.

### 1.2.2 Segunda lei: A Lei fundamenta da Dinâmica

A força resultante aplicada sobre um corpo é igual à variação temporal de seu momento linear.

$$\vec{F}_{res} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{v}\frac{dm}{dt} + m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

Caso a massa do corpo seja constante,  $\frac{dm}{dt} = 0$  e vale que:

$$\boxed{\vec{F}_{res} = m\vec{a}}$$

Note que a força e a aceleração apontam na mesma direção.

### 1.2.3 Terceira lei: A Lei da Ação e Reação

Tudo tem um preço. A lei afirma que para toda força de ação há uma de reação, com mesmas intensidades, mesmas origens, porém em corpos diferentes e sentidos opostos.

Quando você empurra uma porta, ela empurra você de volta com a mesma intensidade. Isso é intrigante, mas às vezes irritante - como quando você tropeça e bate o dedo do pé em uma mesa.

Um exemplo disso é a tecnologia que a maioria dos foguetes atuais usa para subir. Basicamente, eles expelem gases quentes para baixo, e os gases empurram o foguete para cima.

#### Lembrete 1

De modo mais formal, a terceira lei afirma que o momento linear total de um sistema isolado é conservado (não depende do tempo). Considere duas partículas isoladas que interagem apenas entre si:

$$\frac{d\vec{p}_{total}}{dt} = \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

Como estamos definindo que o momento linear é conservado:

$$\frac{d\vec{p}_{total}}{dt} = 0 \therefore 0 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \therefore \vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

Assim, se o momento linear se conserva, a terceira lei é válida e o mesmo vale para o contrário.

### 1.2.4 Exemplos de forças

#### Peso

De forma simples, pode-se definir como a força que a Terra exerce sobre um corpo. Sendo a aceleração da gravidade constante:

$$\vec{P} = m\vec{g}$$

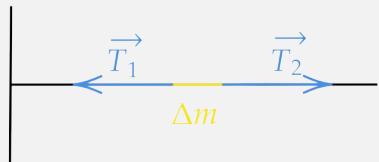
Apontando sempre para o centro da Terra. O peso não é constante no universo – ele varia dependendo da força gravitacional do planeta em questão. Por exemplo, na Lua, onde um objeto ”pesa” menos do que na Terra.

### Tração

O motivo pelo qual, quando puxamos cordas ou fios, o objeto não se arrebenta de uma vez, define-se como uma força agindo ao longo do objeto: a tração, tendo sua origem na interação molecular do material do fio, que responde às forças aplicadas com tensões internas que se distribuem ao longo do cabo.



Caso a massa do fio seja desprezível, a tração se mantém constante ao longo dele:



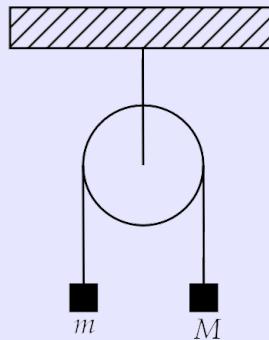
Considerando a direção x (para direita) como positiva:

$$T_2 - T_1 = \Delta m \cdot a$$

Entretanto, se  $\Delta m \rightarrow 0$ , o termo da direita também tende a zero de modo que  $T_2 = T_1$ .

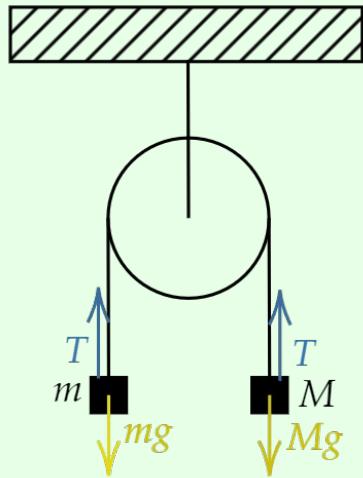
### Exemplo 4: Aceleração em uma polia

Na polia a seguir, determine a aceleração das massas.



### Solução 4

Adicionando as forças no esquema (chamamos isso de **diagrama de corpo livre**):



Sendo  $mg = \text{Peso}$  e  $T = \text{tração}$ . A tração é  $T$  para os dois blocos é a mesma, porque se trata de um fio ideal. Portanto considere daqui para frente que sempre que você tiver um fio, a tração é a mesma em qualquer ponto do fio.

Considerando a direção  $y$ , ou seja para cima, como se fosse a direção positiva, equacionando:

- Sistema 1(com massa  $m$ ):  $T - mg = ma$
- Sistema 2(com massa  $M$ ):  $T - Mg = MA$

Agora perceba, que se um bloco sobe o outro obviamamente deve descer, isso é algo que já deve partir da sua propria intuição. Considere que  $m$  que sobe e  $M$  desce, puramente porque eu quis, você poderia ter decidido o contrario se quisesse. Assim pode se dizer que:

$$a = -A$$

Dai,

$$T - mg = ma$$

$$T - Mg = -Ma \therefore Mg - T = Ma$$

Somando as duas equações e isolando o  $a$ :

$$a = \frac{M - m}{M + m}g$$

### Exemplo 5

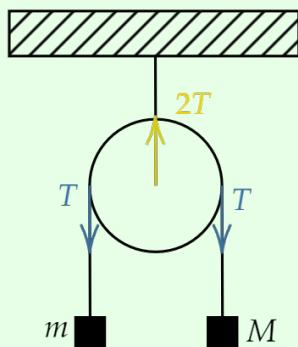
Ainda sobre o sistema do exemplo anterior, descubra a "massa equivalente" do sistema"

### Solução 5

Encontrando a aceleração a partir da aceleração descoberta:

$$T - mg = ma \therefore T = m(a - g) \therefore \boxed{T = \frac{2Mm}{M + m}g}$$

Agora, fazendo o diagrama de corpo livre da propria polia:



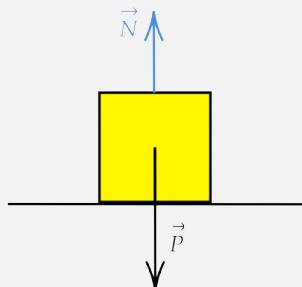
Fica claro que a força de sustentação da polia é  $2T$ , isso é praticamente um peso equivalente para a polia:

$$2T = \frac{4Mm}{M + m}g = m_{equivalente}g \therefore \boxed{m_e = \frac{4Mm}{M + m}}$$

Essa é a **massa equivalente da polia**.

### Normal

A força normal é a resposta de uma superfície que impede que um objeto penetre nela. Sua origem está na interação eletromagnética entre os átomos do corpo e os átomos da superfície, que gera uma força perpendicular ao plano de contato.

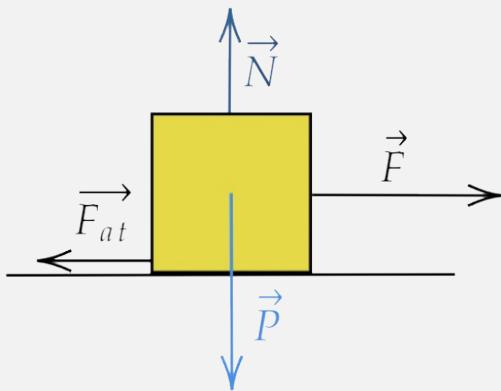


Nesse caso, note que o corpo está em repouso  $\therefore \sum \vec{F}_y = 0 \therefore \vec{N} = -\vec{P}$

## Atrito

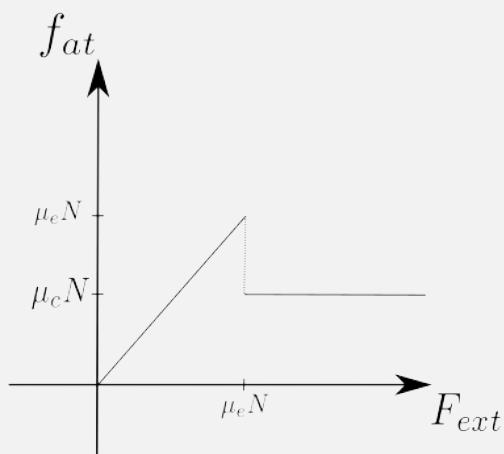
O atrito é uma força que se opõe ao movimento ou à tentativa de movimento de uma superfície sobre a outra. Ele surge devido às irregularidades microscópicas nas superfícies de contato, mesmo que essas superfícies pareçam lisinhas.

Imagine que cada superfície é como um velcro em miniatura: os "ganchinhos" e "lachinhos" microscópicos interagem, dificultando o movimento.



- **Atrito estático:** É o atrito que atua antes que o movimento aconteça. Você sente ele toda vez que tenta empurrar aquele móvel pesado, que parece colado ao chão. O móvel não se move porque o atrito estático está gritando: "Você vai ter que me vencer primeiro!". Ele aumenta até um valor máximo de  $\vec{F}_{at}^{máx} = \mu_e \vec{N} \therefore \vec{F}_{at}^{est} \leq \mu_e \vec{N}$
- **Atrito cinético:** Surge quando há movimento relativo entre as superfícies, ele não varia. Pensa naquele mesmo móvel. Quando ele começa a deslizar, fica um pouco mais fácil empurrar porque o atrito cinético está assumindo o controle. Seu valor é  $\vec{F}_{fat}^{cin} = \mu_c \vec{N}$ .

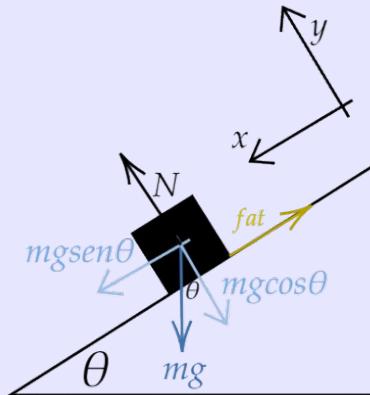
A relação gráfica entre os dois atritos é:



Por fim, a soma vetorial entre a normal e a força de atrito é comumente chamada de força de contato.

### Exemplo 6: Plano inclinado

Considere a seguinte configuração, onde um corpo de massa  $m$  está na superfície de um plano inclinado de um ângulo  $\theta$ , com coeficiente de atrito cinético  $\mu_c$  e de atrito estático  $\mu_e$ . Determine a aceleração do bloco.



### Solução 6

- Se o bloco estiver em repouso:

$$\sum F_y = 0 \therefore N = mg\cos\theta$$

$$\sum F_x = 0 \therefore mgsen\theta = fat = \mu_e N = \mu_e mg\cos\theta.$$

Dividindo as equações é trivial encontrar que  $\mu_e = \tan\theta$

- Se o bloco **não** estiver em repouso: Como de todo modo o bloco não deve atravessar a superfície da cunha, vez que dois corpos não podem ocupar o mesmo espaço  $\sum F_y = 0$ , dai,

$$\sum F_y = 0 \therefore N = mg\cos\theta$$

$$\sum F_x \neq 0 \therefore mgsen\theta - fat = ma \Rightarrow mgsen\theta - \mu_c mg\cos\theta = ma$$

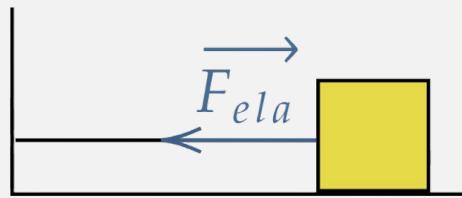
Manipulando essas equações é fácil encontrar a aceleração:

$$a = g(\operatorname{sen}\theta - \mu_c \operatorname{cos}\theta)$$

### Elástica

Descrita pela Lei de Hooke, a força elástica surge da deformação de materiais elásticos. Ela é originada pelas interações entre os átomos que tentam retornar à sua posição de equilíbrio, ou seja, é uma força de restauração:

$$\vec{F}_{elastica} = k \cdot \Delta \vec{x} = k(\vec{x} - \vec{x}_0)$$



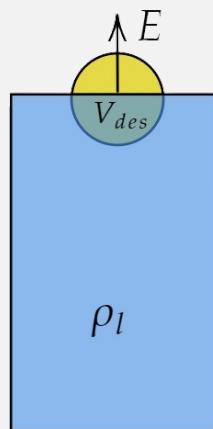
Sendo:

- $k$ : constante elástica, que é diferente para cada material.
- $x_0$ : comprimento inicial, o comprimento natural do material elástico.

### Empuxo

O empuxo é uma força exercida por um fluido sobre um corpo imerso, devido à diferença de pressão em diferentes profundidades. Sua origem está nos princípios hidrostáticos descritos por Arquimedes, que diz que o empuxo é igual ao peso do líquido deslocado:

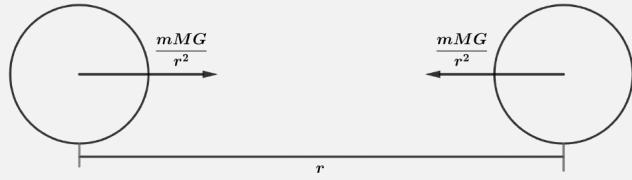
$$E = \rho_l \cdot V_{deslocado} \cdot g$$



### Gravitacional

A força gravitacional é como a "cola cósmica" que mantém as coisas no lugar no universo. É a força de atração entre dois corpos com massa. Quanto maior a massa, maior a força. Considerando  $\vec{r}$  o vetor radial que tem como referência o centro de cada planeta, podemos utilizar a seguinte fórmula de Newton:

$$\vec{F}_g = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{r} = \frac{G m_1 m_2}{r^3} \vec{r}$$



- $G$ : constante gravitacional =  $6,67 \cdot 10^{-11} Nm^2 kg^{-2}$
- $m_1$  e  $m_2$ : são as massas dos corpos
- $r$ : é a distância entre os centros dos corpos

### Elétrica

Se a gravidade é a "cola cósmica", a força elétrica é mais como "amizades e rivalidades elétricas". Cargas iguais se repelem, e cargas opostas se atraem. É como ímãs, mas aqui estamos falando de partículas carregadas. A fórmula é a lei de Coulomb:

$$\vec{F}_{el} = k_e \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^3} \vec{r}$$

Onde:

- $k_e$ : é a constante eletrostática no vácuo =  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 Nm^{-2} C^{-2}$
- $q_1$  e  $q_2$ : as cargas
- $r$ : distância entre os centros dos corpos

### 1.2.5 Vínculos geométricos

Imagine que você está brincando com um carrinho em uma pista de brinquedo. Você pode empurrá-lo para frente ou para trás, mas ele não pode sair da pista. Esse é o poder dos vínculos geométricos: eles dizem para as coisas do universo, "Você pode fazer isso, mas não aquilo". Um vínculo é qualquer característica do sistema (ou da vizinhança com a qual interage) que impõe restrições ao movimento do mesmo. Perceba que são denominados vínculos somente ao que se refere a restrições puramente cinemáticas: relações entre acelerações obtidas por meio do tratamento dinâmico do sistema (leis de Newton) não são ditos vínculos.

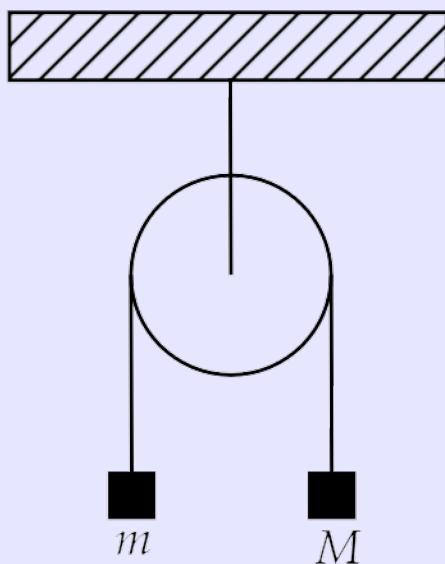
Matematicamente, os vínculos geométricos podem ser expressos como equações da forma:  $f(q_1, q_2, \dots, q_n, t) =$

0 onde  $q_i$  são as coordenadas generalizadas do sistema.

Até agora, já usamos de ideias providas de vínculos geométricos de uma maneira não tão direta, mas agora seguem exemplos da aplicação direta desse raciocínio para resolução de problemas.

### Exemplo 7

Descubra a relação entre as acelerações dos blocos



### Solução 7

Sabe-se que o comprimento da corda é constante (pelo menos se for garantido que ela é inextensível, como na maioria dos casos). Assim, sendo  $x_p$  a coordenada do centro da polia ideal,  $x_1$  do bloco a esquerda e  $x_2$  do bloco a direita, o comprimento da corda pode ser expressado por:

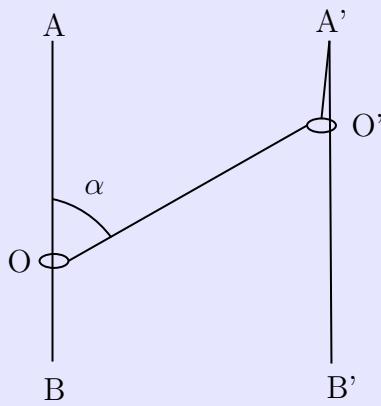
$$x_p - x_1 + x_p - x_2 = cte$$

Derivando duas vezes em relação ao tempo é fácil achar que:

$$\ddot{x}_1 = -\ddot{x}_2$$

### Exemplo 8

Na figura abaixo, um fio inextensível passa por dois anéis. Os anéis podem se movimentar sem atrito ao longo de dois trilhos verticais. A distância entre os trilhos vale  $b$ . Se o ponto  $O'$  desce com velocidade  $v$  constante, qual é a velocidade do anel  $O$ ? Assuma que o fio esteja fixado no ponto  $A'$ .



### Solução 8

Seja  $y$  a distancia  $A'O'$  e  $y'$  a distancia  $AO$ , como o tamanho do fio é constante:

$$y + \frac{b}{\operatorname{sen}\alpha} = \text{cte}$$

$$\dot{y} = \frac{bcos\alpha\dot{\alpha}}{\operatorname{sen}^2\alpha}$$

Sendo que  $\dot{\alpha} = \omega$ .

Por pura geometria e analise da figura é trivial que:

$$y' = y + \frac{b}{\operatorname{tan}\alpha}$$

$$\dot{y}' = \dot{y} - \frac{b\omega}{\operatorname{sen}^2\alpha}$$

Resolvendo o sistema:

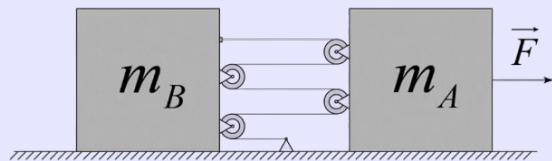
$$\boxed{\dot{y}' = v(1 - \frac{1}{\operatorname{cos}\alpha})}$$

### Lembrete 2: Dica

Existe uma maneira mais "roubada" de descobrir as relações entre vínculos geométricos sem envolver geometria diretamente. Na pratica você só deve analisar o numero de, por exemplo, trações que atuam no objeto e o coeficiente das acelerações de cada bloco será o mesmo que os de suas trações totais. Devo desenvolver de onde vem esse fato: Como a tração é uma força interna e então não transfere trabalho por unidade de tempo, deve ter sua potencia total como nula. Em seguida vou aplicar isso, para ficar mais claro o que estou tentando dizer.

**Exemplo 9**

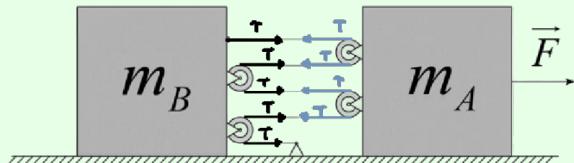
Para a configuração abaixo



Encontre a relação entre as acelerações do bloco A e B

**Solução 9**

Fazendo o diagrama de corpo livre:



Seguindo a maneira tradicional de analise de vínculos, adotando a direita como  $x$  positivo, pode-se concluir:

- Para  $m_A$  :  $F - 4T = m_A a_A$
- Para  $m_B$  :  $5T = m_B a_B$

Agora aplicamos a dica dada acima para definição dos coeficientes da aceleração para encontrar a ultima equação necessária para o sistema:

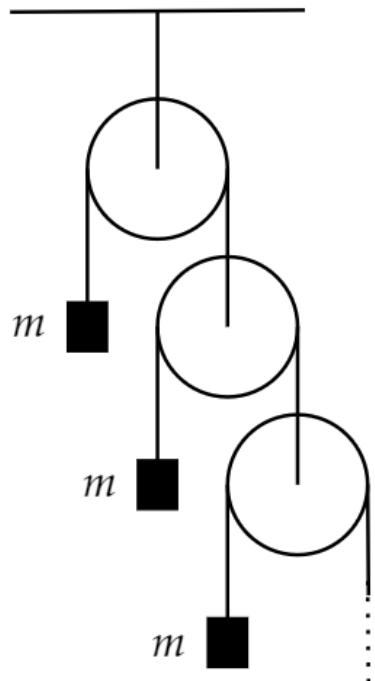
- $-4a_A + 5a_B = 0 \therefore 4a_A = 5a_B$

**1.2.6 Bizus**

- Em um exercício de dinâmica sempre tome como primeiro passo a definição dos sentidos de cada direção e os mantenha até o final.
- Tente escolher sistemas de modo que não seja necessário adicionar forças que não foram pedidas ou dadas.
- Para checagem de erros pratique analisar os casos limites, que você consegue prever o que deve acontecer, para ver se sua resposta está correta.
- Ainda para checar possíveis erros, veja se sua resposta está dimensionalmente correta.
- Sempre resolva os problemas de maneira literal primeiro (usando letras) para depois substituir os valores se necessário.

### 1.2.7 Problemas

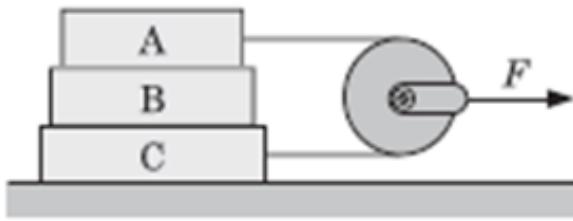
**Problema 1.** (Fácil) Calcule a aceleração da massa a extrema esquerda.



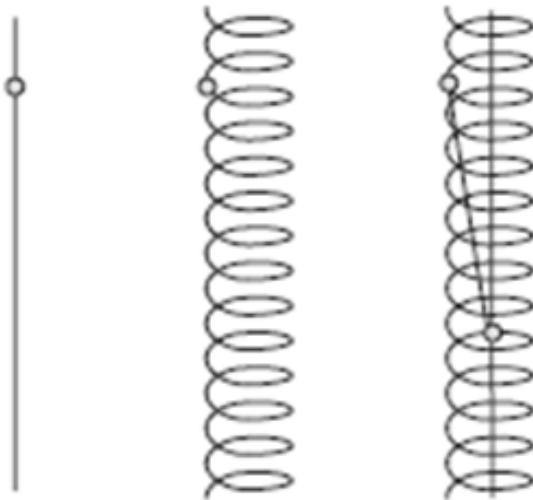
**Problema 2.** (Pathfinder) (Médio) Um alter é construído colando duas bolinhas idênticas as pontas de um leve bastão de comprimento  $l$ . O alter repousa verticalmente no canto de uma parede e um piso liso. Depois da parte de baixo é puxada um pouco para direita, o alter começa a deslizar. Qual das quantidades a seguir tem seu valor nulo quando a bola de cima abandona a parede:

- (a) Tensão do bastão
- (b) Aceleração da bolinha de baixo
- (c) Aceleração da bolinha de cima
- (d) Força normal do chão na bolinha de baixo

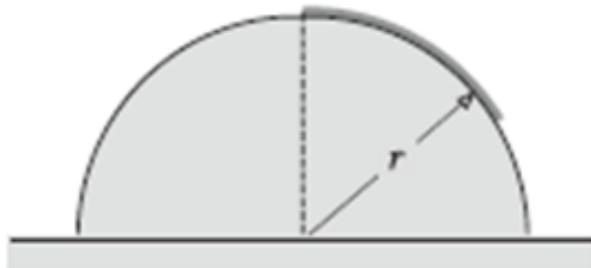
**Problema 3.** (Pathfinder) (Fácil) Na seguinte configuração, uma barra B é sanduichada entre uma barra A e B que são conectadas por uma leve e inextensível linha, que passa por uma polia ideal. A massa de cada barra é  $m$ , o coeficiente de atrito entre as barras é  $\mu$  e o chão é liso. A aceleração da gravidade é  $g$ . Se uma força horizontal  $F$  é aplicada da polia, encontre a aceleração da barra  $B$ .



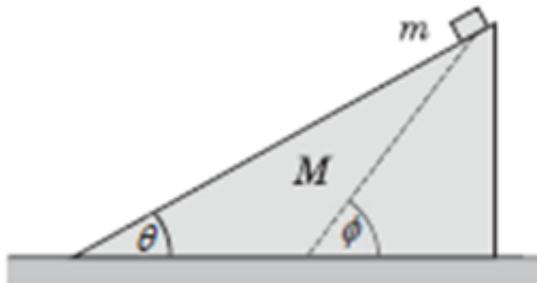
**Problema 4.** (Pathfinder) (Difícil) Uma bolinha desliza uma altura  $h$  em um bastão vertical e rígido em um tempo  $T_1$  e a mesma altura ema hélice rígida em um tempo  $T_2$ . Agora uma barra é rigidamente fixada ao longo do eixo da hélice e uma bolinha que pode deslizar ao longo da hélice é amarrada por uma leve e inflexível linha a outra bolinha idêntica que pode deslizar ao longo da bastão como ilustrado na figura. O sistema contendo as duas bolinhas e a linha é liberado do repouso. Quanto tempo demora até que o sistema deslize a mesma altura  $h$ ? Negligencie o atrito e a resistência do ar assuma que o raio da hélice é tao pequeno comparado com o tamanho da linha que a linha pode ser assumida praticamente vertical.



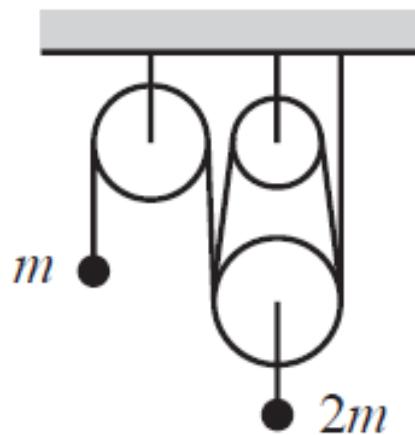
**Problema 5.**(Pathfinder) (Difícil) Uma corda uniforme de comprimento  $l$  é mantido parado em um hemisfério liso de raio  $r$  com um dos fins da corda no topo do hemisfério. O hemisfério é colado em um piso horizontal. Encontre onde tensão máxima é desenvolvida logo depois da corda ter sido soltada.



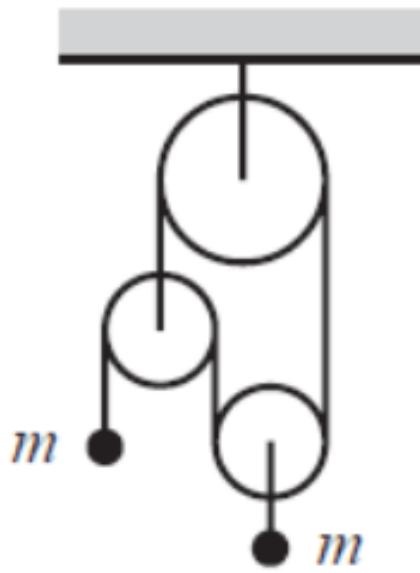
**Problema 6.** (Pathfinder) (Médio) A cunha mostrada na imagem pode deslizar sem atrito em um piso horizontal. A massa da cunha é  $M$  e o ângulo de inclinação é  $\theta = 30^\circ$ . Um bloco de massa  $m$  desliza para baixo da cunha sem atrito quando solto na sua face inclinada. Se o caminho do bloco em relação ao piso faz um ângulo  $\phi = 60^\circ$  com a horizontal, encontre  $\frac{m}{M}$ .



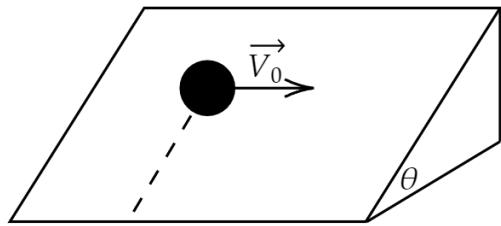
**Problema 7.** (Morin) (Médio) Assuma que as partes dos fios que conectam as polias são essencialmente verticais. Encontre a aceleração das massas.



**Problema 8.** (Morin) (Fácil) Calcule aceleração das massas considerando as polias como ideais.

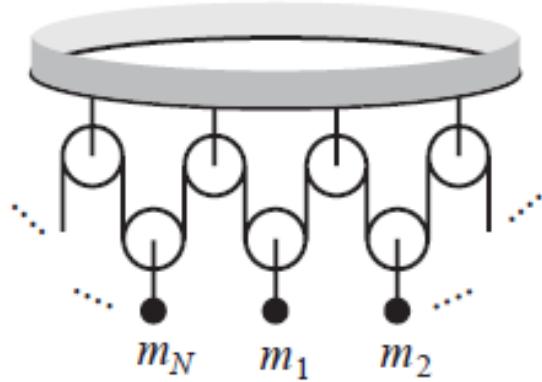


**Problema 9.** (Médio) Considere um bloco na superfície de um plano inclinado com inclinação  $\theta$ . O coeficiente de atrito é tal que o bloco desce com velocidade constante após ser colocado no plano e receber um leve impulso na direção da linha tracejada na figura a seguir.



Considere agora que, ao invés de aplicar um impulso na direção de declive do plano inclinado, imponha-se uma velocidade  $v_0$  na direção horizontal e que após a aplicação desse impulso o bloco inicie o seu movimento de deslizamento no plano inclinado. Determine qual será a velocidade terminal do bloco nesse movimento

**Problema 10.** (Difícil) Considere um arranjo de  $N$  polias moveis conectadas a  $N$  polias fixas, dispostas ao redor de um anel. A polia móvel  $i$  é conectada a uma massa  $m_i$ , onde  $i = 1, 2, \dots, N$ . As polias são todas conectadas por uma corda de comprimento inextensível e massa desprezível O



sistema é mantido inicialmente com todas as massas em repouso e então é liberado, considere a gravidade local como  $g$ . Calcule a aceleração  $a_i$  de cada uma das  $N$  massas.

### 1.2.8 Soluções

#### Problema 1

Como o sistema se estende ao infinito, tirar uma massa não afeta a configuração. Logo, o sistema equivalente, com apenas a massa me é equivalente ao sistema onde a polia fixa sustenta as massas me e a massa  $m$  mais da esquerda.

$$m_e = \frac{4m_e m}{m + m_e} = 3m$$

$$a = \frac{m_e - m}{m_e + m} \therefore \boxed{a = \frac{g}{2}}$$

#### Problema 2

- (a) e (b)

#### Problema 3

$$\begin{cases} F, & F \leqslant 6\mu mg \\ \frac{3m^i}{F+2\mu mg}, & 6\mu mg \leqslant F \leqslant 10\mu mg \\ \frac{4m}{3\mu g}; & F \geqslant 10\mu mg \end{cases}$$

#### Problema 4

$$\sqrt{\frac{T_1^2 + T_2^2}{2}}$$

#### Problema 5

Do topo na posição angular  $\theta = ^{-1} \left[ \frac{r}{l} \left( 1 - \cos \left( \frac{l}{r} \right) \right) \right]$

**Problema 6**

$$\frac{m}{M} = \frac{\tan \theta - \tan \theta}{\tan \theta} = 2$$

**Problema 7**

Observe que neste caso há dois fios. Enumerando as polias de 1, 2 e 3 (1 e 2 fixas e 3 móvel) e as massas de 1 e 2, temos

$$x_{p1} - x_1 + x_{p1} - x_{p3} + H - x_{p3} + 2(x_{p2} - x_{p2}) = \text{constante}$$

onde  $H$  é a altura do teto.  $x_{p1}$ ,  $x_{p2}$  e  $H$  são constantes, assim como  $H$ , logo, para as acelerações

$$a_1 = -4a_2$$

**Problema 8**

Perceba que um único cabo interliga as três roldanas e conecta os dois corpos. Nesse cenário, a força de tração no cabo deve ser uniforme em toda sua extensão. Se houvesse variação na tração, um elemento infinitesimal do cabo apresentaria aceleração ilimitada, conforme a relação  $\frac{\partial T}{\partial m} = a$ . Ao examinar a roldana situada à esquerda, aplica-se a condição de equilíbrio de forças ( $F = ma = 0$ ):

$$2T = T$$

Dessa igualdade, deduz-se que  $T = 0$ . Com isso, conclui-se que as roldanas não exercem influência mecânica, e ambos os corpos deslocam-se exclusivamente sob ação da gravidade, caracterizando um movimento de queda livre.

**Problema 9**

$$v_t = \frac{v_0}{2}$$

**Problema 10**

Nessa montagem, um único cabo percorre todas as roldanas e conecta  $N$

corpos de massa idêntica. Aplicando a abordagem sistêmica (note que todas as roldanas fixas superiores estão alinhadas na altura  $h$ ):

$$2(h - x_1) + 2(h - x_2) + \cdots + 2(h - x_N) = \text{constante}$$

Para determinar as acelerações (derivando a equação anterior duas vezes em relação ao tempo):

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_N = 0$$

## 1.3 Momento linear

*Conteúdo emprestado pelo departamento de física do projeto*

### 1.3.1 Centro de massa

O centro de massa é um ponto específico de um corpo em que pode-se considerar que todas as forças externas a esse sistema estão sendo aplicadas. Além disso, em relação ao referencial desse ponto, o sistema analisado possui um momento total nulo. Esse ponto varia de acordo com a geometria do objeto, o que significa que dois objetos podem possuir a mesma massa, mas seus centros de massa serem diferentes. Para um sistema de partículas, suas coordenadas são encontradas usando a seguinte expressão (essas expressões utilizadas para o eixo X também podem ser utilizadas para as coordenadas do eixo y e do eixo z):

$$X_{CM} = \frac{m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2 + \dots + m_n \cdot x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} \quad (1.1)$$

Supondo  $M = m_1 + m_2 + \dots + m_n$ , pode-se encontrar a expressão usada para o centro de massa de corpos extensos, os quais são formados por infinitas partículas de massa infinitesimal:

$$X_{CM} = \frac{1}{M} \cdot \int dm \cdot x \quad (1.2)$$

Agora nos falta calcular  $dm$ , o qual pode ser encontrado considerando a densidade volumétrica  $\rho$  do sistema analisado:

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{dm}{dV} \\ dm &= \rho \cdot dV \end{aligned}$$

Onde  $dV$  representa um pedaço do volume total do objeto que é muito pequeno. Substituindo esse resultado na 1.2:

$$X_{CM} = \frac{1}{M} \int x \rho dV \quad (1.3)$$

Para se encontrar o vetor posição do centro de massa, basta substituir a coordenada  $x$  pelo vetor posição de cada partícula:

$$\vec{R}_{cm} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_n \vec{r}_n}{M}$$

Por fim, para encontrar a velocidade e aceleração do centro de massa, é necessário derivar essa relação em função do tempo, obtendo:

$$\vec{V}_{cm} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \cdots + m_n\vec{v}_n}{M}$$

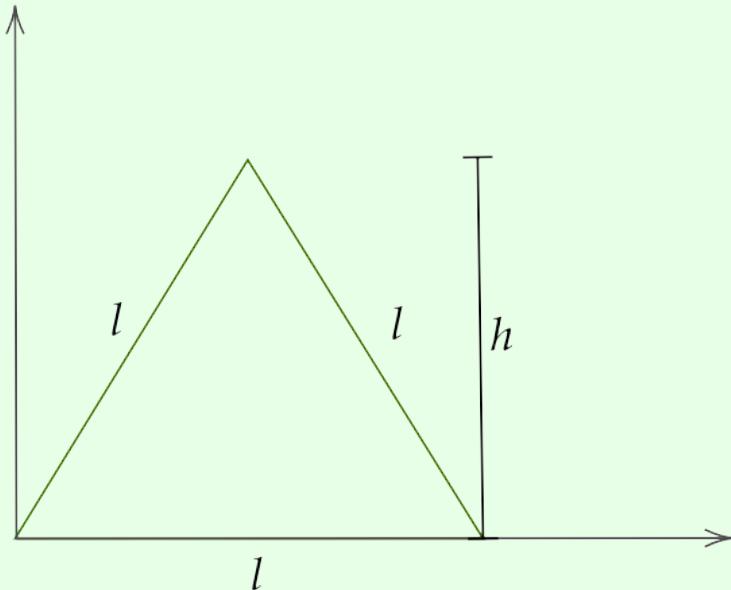
$$\vec{A}_{cm} = \frac{m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + \cdots + m_n\vec{a}_n}{M}$$

### Exemplo 10: Baricentro de um triângulo equilátero

A partir da expressão para as coordenadas do centro de massa de um sistema de partículas, pode-se localizar o baricentro de figuras geométricas, pois o baricentro é o centro de massa dessa figura. Para isso, basta considerar que em cada vértice do polígono existem partículas que possuem o mesmo peso. Com isso, encontre o baricentro de um triângulo equilátero.

### Solução 10

Para encontrar o centro de massa do triângulo equilátero, consideraremos um sistema de coordenadas com origem em um dos vértices do triângulo, e com seu eixo  $x$  paralelo à base do triângulo. A figura resultante será:



Utilizando a expressão para as coordenadas do centro de massa, tem-se que a altura do baricentro será:

$$Y_{cm} = \frac{mh}{3m} = \frac{h}{3}$$

Agora, para a coordenada  $x$  do centro de massa:

$$X_{cm} = \frac{ml + m\frac{l}{2}}{3m} = \frac{l}{2}$$

Assim, sabendo que a altura do triângulo equilátero é igual a  $\frac{l\sqrt{3}}{2}$ , o baricentro será dado pelo ponto  $P\left(\frac{l}{2}, \frac{l\sqrt{3}}{6}\right)$ .

### 1.3.2 Momento linear propriamente dito

O momento, também chamado de quantidade de movimento, é uma grandeza física que pode expressar o movimento resultante de um sistema de um ou mais corpos. Podemos usar, para descrever essa grandeza algebraicamente, a equação:

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v} \quad (1.4)$$

O momento linear tem sua unidade de medida no sistema internacional (SI) em  $kg \cdot m/s$ .

Usando o conceito de momento linear, pode-se escrever a 2<sup>a</sup> lei de Newton de outra forma além da mais conhecida:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Para encontrar esse novo formato, deve-se derivar o momento em relação ao tempo, e, considerando um sistema de partículas em que a massa não varia:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F}_r$$

Então, a expressão para a força resultante agindo sobre um corpo pode ser escrito como:

$$\vec{F}_r = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (1.5)$$

Dessa equação, obtemos que quando  $F_{res} = 0$ ,  $d\vec{p} = 0$ , o que significa que se não houver uma força resultante, o momento linear de um instante  $t_1$  qualquer será igual ao momento linear de outro instante  $t_2$  qualquer.

Em realidade, esse formato foi o utilizado por Newton em seu livro “Principia” para enunciar sua 2<sup>a</sup> Lei. Utilizando-se uma terminologia moderna, a Segunda Lei de Newton é escrita como: “A taxa de variação do momento de um corpo é igual a força resultante atuante sobre ele e está na direção dessa força”.

### 1.3.3 Impulso

A partir da 1.5, pode-se encontrar um teorema muito importante e bastante conhecido: o Teorema do Impulso, que diz:

$$\vec{J} = \Delta \vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i \quad (1.6)$$

Onde,  $\vec{J}$  é o impulso realizado sobre um objeto. Para provar essa expressão, utiliza-se a definição de impulso como:

$$\vec{J} = \int \vec{F} dt$$

$$\vec{J} = \int \frac{d\vec{p}}{dt} dt$$

$$\vec{J} = \Delta \vec{p}$$

#### Exemplo 11: Descendo a montanha

Dois amigos estavam brincando de descer a montanha em um carrinho de madeira. Nessa brincadeira, um dos amigos empurra o outro que está no carrinho. Em um momento, o carrinho com o amigo estava com uma velocidade de  $1,5 \text{ m/s}$  e o outro empurrou o sistema amigo-carrinho com uma força de  $5 \text{ N}$  por  $0,4 \text{ s}$ . Qual a velocidade do amigo no carrinho após o impulso dado? (Considere que a massa do sistema é de  $80 \text{ kg}$ )

#### Solução 11

Para encontrar a velocidade do sistema após a força aplicada pelo amigo, pode-se utilizar o Teorema do Impulso:

$$J = F \Delta t = mv_f - mv_i$$

$$v_f = v_i + \frac{F \Delta t}{m} = 1,525 \text{ m/s}$$

### 1.3.4 Momento linear em um sistema de partículas

Ao considerar um sistema formado por  $N$  partículas, o momento linear total, denominado  $\vec{P}$ , é escrito como a soma dos momentos de cada partícula individualmente. Ou seja, escrevendo uma equação para descrever isso:

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \cdots + \vec{p}_n$$

Ao substituir, cada momento por  $m_i \vec{v}_i$ , pode-se chegar a uma expressão para o momento total, em função da velocidade do centro de massa:

$$\vec{P} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + \cdots + m_n \vec{v}_n$$

$$\boxed{\vec{P} = M \vec{V}_{cm}} \quad (1.7)$$

### 1.3.5 Conservação do momento linear

Quando se trata de conservação do momento linear, dizemos que  $\vec{F}_r = 0$ , isso implica  $\vec{p} = cte$ , o que resulta na lei da conservação do momento linear:

$$\vec{P}_{t_1} = \vec{P}_{t_2}$$

Se uma das componentes da força for nula, não haverá variação do momento linear apenas nessa componente, enquanto que as outras podem variar caso exista força nas respectivas direções.

#### Exemplo 12: Equação dos foguetes

Um foguete de massa inicial  $M$ , ejeta combustível com uma taxa constante  $\eta$  e velocidade  $u$ , em relação ao foguete, fazendo com que ele ganhe velocidade e se move. Encontre uma expressão para a velocidade do foguete em função do tempo. Essa equação é a chamada equação dos foguetes quando a taxa de ejeção de combustível é constante.

#### Solução 12

Primeiro, deve-se conservar o momento do sistema formado pelo foguete e um infinitesimal  $dm$  de combustível ejetado por ele em um tempo muito pequeno:

$$\begin{aligned} mv &= (m - dm)(v + dv) + dm(v - u) \\ mv &= mv + mdv - vdm + vdm - udm \\ u \frac{dm}{m} &= dv \end{aligned}$$

Então, para encontrar uma expressão para  $v$  em função de  $t$ , é preciso integrar essa expressão, sendo que os limites para a massa serão,  $M - \eta t$  e  $M$ , pois seu valor está aumentando na notação utilizada, em que a massa do combustível ejetado é positiva, e para a velocidade serão 0 e  $v(t)$ :

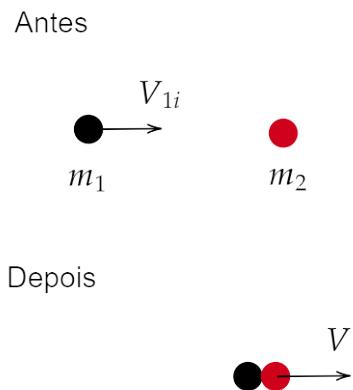
$$\begin{aligned} \int_M^{M-\eta t} u \frac{dm}{m} &= \int_0^{v(t)} dv \\ v(t) &= u \ln \frac{M}{M - \eta t} \end{aligned} \quad (1.8)$$

## 1.4 Colisões

As colisões são situações físicas em que há o contato entre mais de um corpo, como uma batida, o que resulta na alteração da velocidade de cada um e pode alterar a energia do sistema dependendo do tipo de colisão. Nessa seção abordaremos sobre os três principais tipos de colisões: perfeitamente inelásticas, elásticas e parcialmente inelásticas.

### 1.4.1 Colisões perfeitamente inelásticas

Em colisões perfeitamente inelásticas, os objetos após a colisão possuem a mesma velocidade, ou seja, eles passam a andar colados, como representado na imagem a seguir:



Nesse tipo de colisão a energia mecânica do sistema não é conservada, pois há perda de energia, causada pela interação entre os corpos, os quais perdem energia a partir do som ou do calor gerado pela colisão. Agora iremos encontrar algumas relações importantes desse fenômeno.

Aplicando a lei da conservação do momento linear para uma colisão entre dois corpos resulta em:

$$P_{1i} + P_{2i} = P_{1f} + P_{2f}$$

Substituindo os momentos das partículas pelos valores representados na imagem e isolando a velocidade final, pode-se encontrar uma expressão para a velocidade após a colisão em função da velocidade inicial da partícula que estava em movimento:

$$m_1 \cdot \vec{V}_{1i} = (m_1 + m_2) \vec{V}$$

$$\vec{V} = \frac{m_1 \cdot \vec{V}_{1i}}{m_1 + m_2}$$

(1.9)

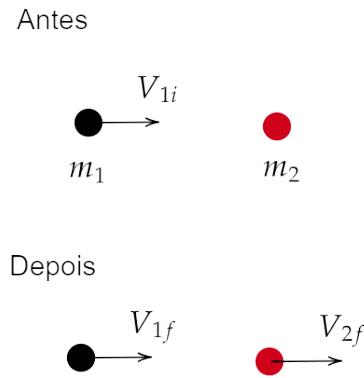
Como em qualquer colisão inelástica  $\vec{V} < \vec{V}_{1i}$  podemos afirmar que:

$$\frac{m_1}{m_1 + m_2} < 1$$

### 1.4.2 Colisões elásticas

Em colisões elásticas, a energia mecânica do sistema é conservada. Além disso, normalmente elas são divididas em duas categorias: quando o alvo da colisão é estacionário ou quando o alvo está em movimento

Alvo estacionário



Quando o alvo está estacionário, podemos, pela conservação da energia, descobrir que:

$$\frac{1}{2}m_1 \cdot \vec{v}_{1i}^2 = \frac{1}{2}m_1 \cdot \vec{v}_{1f}^2 + m_2 \cdot \vec{v}_{2f}^2$$

Usando que  $m_1(v_{1i} - .; 0 ; l. - 0987654'123456789v_{1f}) = m_2v_{2f}$ :

$$\vec{v}_{2f} = \vec{v}_{1i} + \vec{v}_{1f}$$

Desenvolvendo, finalizamos em:

$$V_{1f} = \left[ \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right] V_{1i} \quad (1.10)$$

$$V_{2f} = \left[ \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \right] V_{1i} \quad (1.11)$$

Considerando o caso em que as massas dos corpos são iguais, pode-se chegar em alguns resultados notáveis:

$$\begin{cases} V_{2f} = V_{1i} \\ V_{1f} = 0 \end{cases}$$

Alvo em movimento

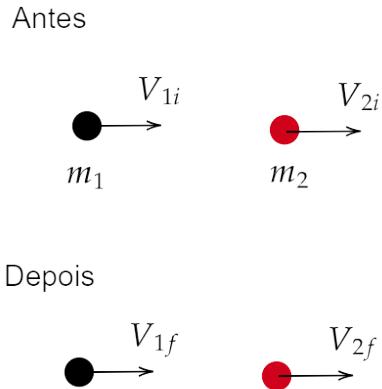


Figura 3: Colisão elástica com alvo em movimento

Quando o alvo está em movimento, podemos, assim como na parte do alvo estacionário, utilizar a conservação de energia e do momento linear, mas considerando que a outra massa também possui energia, já que agora a massa-alvo possui velocidade e, portanto, energia cinética. Assim:

$$\begin{aligned} m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} &= m_1 V_{1f} + m_2 V_{2f} \\ \frac{1}{2} m_1 \cdot \vec{v}_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot \vec{v}_{2i}^2 &= \frac{1}{2} m_1 \cdot \vec{v}_{1f}^2 + m_2 \cdot \vec{v}_{2f}^2 \end{aligned}$$

Juntando essas duas equações, obtemos os seguintes resultados:

$$V_{1f} = \left[ \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right] V_{1i} + \left[ \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \right] V_{2i} \quad (1.12)$$

$$V_{2f} = \left[ \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \right] V_{2i} + \left[ \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \right] V_{1i} \quad (1.13)$$

### 1.4.3 Coeficiente de restituição

Uma quantidade extremamente importante para as colisões que não foi abordada ainda, mas é muito útil e será utilizada na análise do próximo tipo de colisão, é o coeficiente de restituição ( $e$ ). Ele é definido como a razão entre a velocidade de afastamento e a velocidade de aproximação. Escrevendo sua expressão com os dados da imagem 3:

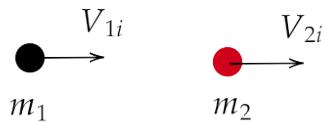
$$e = \frac{\vec{V}_{2f} - \vec{V}_{1f}}{\vec{V}_{1i} - \vec{V}_{2i}} \quad (1.14)$$

Analizando para os tipos de colisão trabalhadas, tem-se que o coeficiente de restituição para colisões inelásticas é 0 e para colisões elásticas é 1. Portanto, os valores que essa quantidade pode assumir são:

$$0 \leq e \leq 1$$

#### 1.4.4 Colisões parcialmente inelásticas

Antes



Depois



Agora, em colisões parcialmente inelásticas, a energia mecânica do sistema não é conservada, mas os corpos não permanecem juntos após a colisão.

Então, para encontrar as expressões para as velocidades de cada corpo após a colisão, utilizaremos o coeficiente de restituição, que descreverá uma relação entre as velocidades antes e após o fenômeno.

Conservando o momento linear e escrevendo a expressão para o coeficiente de restituição:

$$m_1 V_{1i} + m_2 V_{2i} = m_2 V_{2i} + m_2 V_{2i}$$

$$e = \frac{V_{2f} - V_{1f}}{V_{1i} - V_{2i}}$$

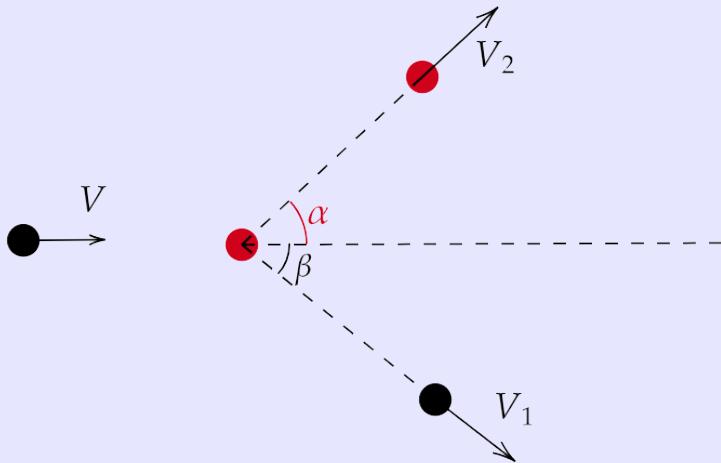
Por fim, resolvendo esse sistema de equações, encontra-se que as velocidades são:

$$V_{1f} = \left[ \frac{m_1 - m_2 e}{m_1 + m_2} \right] V_{1i} + \left[ \frac{1 + e}{m_1 + m_2} \right] m_2 V_{2i} \quad (1.15)$$

$$V_{2f} = \left[ \frac{1+e}{m_1+m_2} \right] m_1 V_{1i} + \left[ \frac{m_2-m_1e}{m_1+m_2} \right] V_{2i} \quad (1.16)$$

### Exemplo 13: Colisão com ângulo

Considere duas partículas, uma com massa  $m_1$  e velocidade  $V$ , e outra com massa  $m_2$  e em repouso. Sabendo que o ângulo formado entre a velocidade da primeira partícula e a horizontal vale  $\beta$ , e a da segunda partícula,  $\alpha$ . Como representado na imagem a seguir. Encontre uma expressão para as velocidades  $V_1$  e  $V_2$  após a colisão:



### Solução 13

Primeiro, é preciso escrever as expressões para a conservação do momento na horizontal e na vertical. Encontrando:

$$m_1 V = m_1 V_1 \cos \beta + m_2 v_2 \cos \alpha$$

$$m_1 V_1 \sin \beta = m_2 v_2 \sin \alpha$$

Resolvendo esse sistema de equações encontra-se:

$$V_1 = \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} V$$

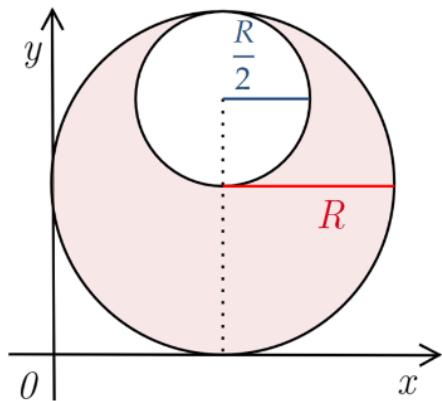
$$V_2 = \frac{m_1 \sin \beta}{m_2 \sin(\alpha + \beta)} V$$

### 1.4.5 Problemas

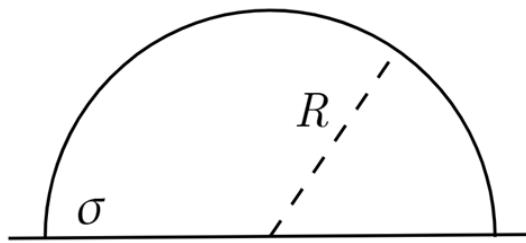
Aqui os problemas estão organizados em diversos níveis, os quais estão separados por estrelas antes dos enunciados, indo de 1 estrela, nível mais fácil até 4 estrelas, nível mais difícil do material.

Recomenda-se que tente fazer primeiro os de 1 estrela e, em seguida ir aumentando gradualmente. Ao final das questões, você estará preparado pra praticamente todas as questões que envolvam momento linear que podem aparecer. Infelizmente nessa versão não conseguimos os solucionários de todas as questões de física, por isso caso o gabarito não seja o suficiente, estaremos felizes de ajudar em nossa comunidade. Bons estudos!

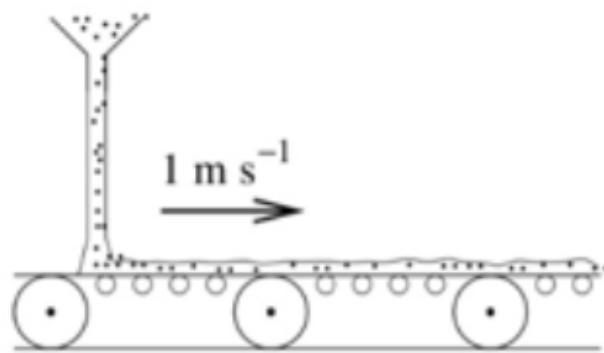
**\* Problema 1.** (Tópicos de física) Um artista plástico elaborou uma escultura que consiste de um disco metálico homogêneo de espessura constante e raio  $R$  dotado de um furo circular de raio  $\frac{R}{2}$ , conforme representado na figura. Levando-se em conta o sistema de coordenadas indicado, determine as coordenadas do centro de massa da peça.



**\*\* Problema 2.** (Morin) Encontre a localização do centro de massa de uma concha hemisférica oca, que parece um iglu, de densidade uniforme  $\sigma$  e raio  $R$ .

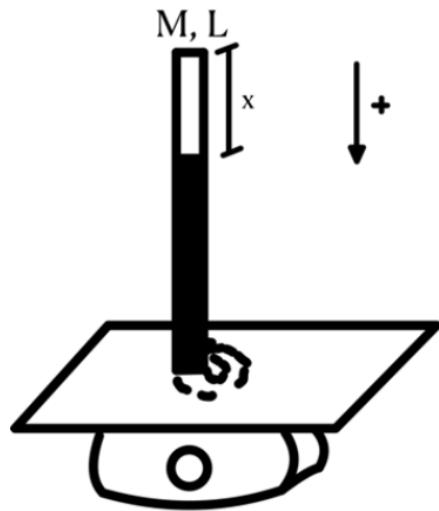


**\*\*\* Problema 3.** (200 Puzzling Physics Problems) Areia cai verticalmente numa taxa de  $50 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$  numa esteira horizontal que se move a uma velocidade de  $1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ , como esquematizado a seguir:

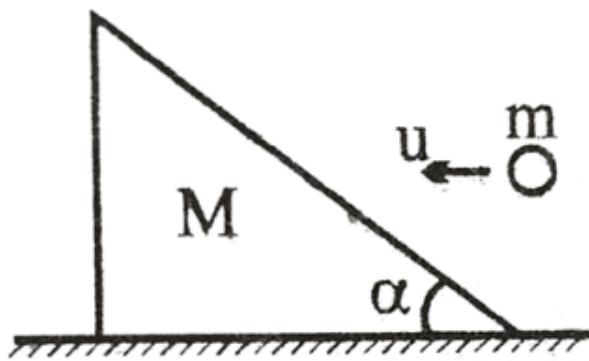


Qual a mínima potência de saída do motor que aciona a esteira? Como o trabalho feito pelo motor é contabilizado?

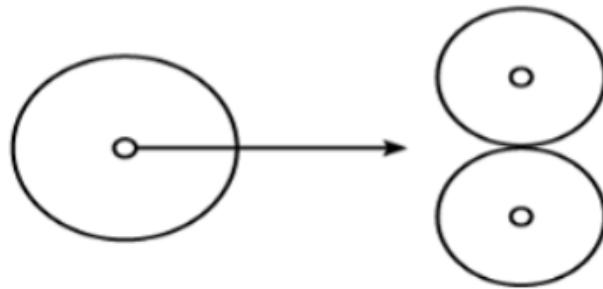
**\*\*\* Problema 4.** Uma corda fina, extensível cujo a massa é  $M$  e o comprimento total é  $L$  é suspensa em cima de uma balança ideal. Considere que esta corda é repentinamente solta e comece o movimento de queda livre. Qual a medida expressa na balança em função de  $x$ , isto é, da diferença de altura entre o nível inicial da corda para o seu instantâneo.



**\*\* Problema 5.** Uma cunha de massa  $m$  repousa numa superfície horizontal. A inclinação da cunha é  $\alpha$ . Uma bola de massa  $m$  se movendo com uma velocidade horizontal de  $u$  colide com a superfície inclinada da cunha. Encontre a velocidade da cunha despois da colisão. Ignore o atrito.



**\*\*\* Problema 6.** Dois discos iguais estão em contato numa mesa lisa. Um terceiro disco de mesma massa, mas o dobro de raio colide com eles simetricamente e permanece em repouso após o impacto. Descubra o coeficiente de reestituição.



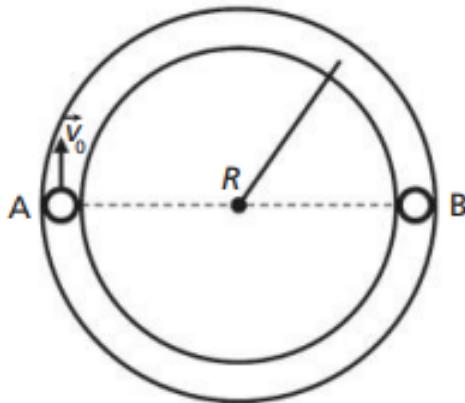
**\*\*\*\* Problema 7.** (Kevin Zhou adaptada) Duas massas estão contidas em uma linha. A massa  $m_1$  se move com velocidade  $v_1$ , e a massa  $m_2$  se move com  $v_2$ . As massas colidem elasticamente.

- (a) Encontre as suas velocidades após a colisão.
- (b) Encontre  $\theta_{max}$ .

**\* Problema 8.** (Tópicos de Física) Rogério, de massa  $40\text{kg}$ , parte do repouso de uma altura de  $10\text{m}$ , desliza ao longo de um tobogã e atinge a parte mais baixa com velocidade de  $5\frac{\text{m}}{\text{s}}$ . Admitindo a aceleração da gravidade igual a  $10\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ , calcule energia mecânica degradada pelas forças dissipativas, durante a descida do garoto.

**\*\* Problema 9.** Determine a lei de acordo com a qual a massa do foguete varia com o tempo, quando o foguete move-se com uma aceleração constante  $a$ . As forças externas são ausentes. O gás escapa com uma velocidade constante  $u$  em relação ao foguete, e sua massa no momento inicial é igual a  $m_0$ .

**\* Problema 10.** (OBC) Em uma canaleta circular, plana e horizontal, podem deslizar sem atrito duas pequenas esferas  $A$  e  $B$ , de massas iguais a  $m$ . A figura mostra o sistema no instante  $t = 0$ .

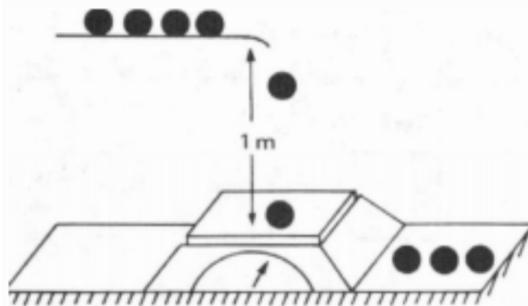


Nesse instante, a esfera  $A$  é lançada com velocidade de módulo  $v_0$ . Depois de um intervalo de tempo  $\Delta t$  ela colide com a esfera  $B$ , inicialmente em repouso. O coeficiente de restituição é igual a  $e$ . Após a primeira colisão, as esferas voltam a colidir decorrido um intervalo de tempo  $\Delta t'$ . Qual a relação entre  $\Delta t$  e  $\Delta t'$ .

**\* Problema 11.** Segundo um observador acoplado a um referencial inercial, duas partículas de massa  $m_a$  e  $m_b$  possuem velocidades  $v_a$  e  $v_b$ , respectivamente. Qual a quantidade de movimento  $p_a$  que um observador preso ao centro de massa do sistema mede para a partícula  $A$ ?

**\*\* Problema 12.** Um projétil de massa  $m$  e velocidade  $v$  atinge um objeto de massa  $M$ , inicialmente imóvel. O projétil atravessa o corpo de massa  $M$  e sai dele com velocidade  $\frac{v}{2}$ . O corpo que foi atingido desliza por uma superfície sem atrito, subindo uma rampa até a altura  $h$ . Nessas condições, podemos afirmar que a velocidade inicial do projétil era de:

**\*\*\* Problema 13.** No dispositivo da figura, bolas de gude de  $20\text{ g}$  cada uma estão caindo, a partir do repouso, de uma altura de  $1\text{ m}$ , sobre a plataforma de uma balança. Elas caem a intervalos de tempos iguais praticamente paradas, sendo imediatamente retiradas da plataforma. Sabendo que o ponteiro da balança indica, em média,  $20\text{ kg}$ , e que a aceleração da gravidade vale  $10\text{ m/s}^2$ , podemos afirmar que a frequência de queda é:



**\*\*\*\* Problema 14.** Um objeto de massa  $m_1$  é projetado no ar a  $45^\circ$  do chão horizontal com uma velocidade  $v_1$ . No ápice de sua trajetória, este objeto é interceptado por um segundo objeto, de massa  $m_2$  e velocidade  $v_2$ , que havia sido projetado verticalmente do chão. Considerando que os dois objetos "se colam" e desprezando qualquer tipo de resistência aos movimentos, determine a distância  $d$  do ponto de queda dos objetos em relação ao ponto de lançamento do segundo objeto.

**\*\* Problema 15.** Uma metralhadora dispara 200 balas por minuto. Cada bala tem  $28\text{ g}$  e uma velocidade de  $60\text{ m/s}$ . Neste caso, a metralhadora ficará sujeita a uma força média, resultante dos tiros, de:

**\*\*\* Problema 16.** É despejado em um carrinho, a uma taxa constante  $b\text{ kg/s}$ , areia. Nesse mesmo carrinho é aplicado uma força  $F$ . Determine a velocidade do mesmo em função do tempo. Considere que o carrinho parte do repouso e possui uma massa inicial de  $M_c$ .

**\*\*\* Problema 17.** Considere um foguete sofrendo atração gravitacional de um planeta, fornecendo uma força  $F$  variável, tal que  $\frac{F}{m} = g$ , onde  $g$  é uma constante e  $m$  é a massa instantânea do foguete. O foguete descreve uma trajetória se aproximando do planeta tal que sua velocidade sempre fará um ângulo  $\theta$  com o vetor força gravitacional  $F$ . Esse mesmo foguete perde massa a uma taxa  $b\text{ kg/s}$ , Considere  $v_0$  e  $m_0$  a velocidade e a massa iniciais do foguete. Determine sua velocidade em função do tempo.

**\*\* Problema 18.** Um pêndulo simples de comprimento  $l$  e massa  $m$  é posto a oscilar. Cada vez que o pêndulo passa pela posição de equilíbrio atua sobre ele, durante um pequeno intervalo de tempo  $t$ , uma força  $F$ . Essa força é constantemente ajustada para, a cada passagem, ter mesma direção e sentido que a velocidade de  $m$ . Quantas oscilações completas são necessárias para que o pêndulo forme um ângulo reto com a direção vertical de equilíbrio ?

**\*\* Problema 19.** Um objeto de massa  $m_1$  é deixado cair de uma altura  $h$ . Ao final do 1º segundo de queda, o objeto é atingido horizontalmente por um projétil de massa  $m_2$  e velocidade  $v$ , que nele se aloja. Calcule o desvio  $x$  que o objeto sofre ao atingir o solo, em relação ao alvo pretendido.

**\* Problema 20.** Um avião a jato se encontra na cabeceira da pista com sua turbina ligada e com os freios acionados, que o impedem de se movimentar. Quando o piloto aciona a máxima potência, o ar é expelido a uma razão de  $100\text{ kg}$  por segundo a uma velocidade de  $600\text{ m/s}$  em relação ao avião. Nessas condições, calcule a força resultante no avião naquele instante.

### 1.4.6 Solucionário

#### Problema 1

$$x_{CM} = R, y_{CM} = \frac{5}{6}R$$

#### Problema 2

$$x_{CM} = R, y_{CM} = \frac{R}{2}$$

#### Problema 3

Mínima potência de saída do motor =  $50J$ , metade ( $25J$ ) da potência do motor é convertida em energia cinética da areia, a sobra seria o trabalho realizado contra um possível atrito que foi convertido em calor.

#### Problema 4

$$N(x) = gM \left(1 - \frac{x}{L}\right)$$

#### Problema 5

$$v_1 = \frac{mu \sin^2 \alpha}{M + m \sin^2 \alpha}$$

#### Problema 6

$$e = \frac{9}{16}$$

#### Problema 7

$$(a) v'_1 = v_1 \frac{m_1 - m_1}{m_1 + m_2}, v'_2 = v_1 \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \quad (b) \theta_{max} = \arcsin\left(\frac{m_2}{m_1}\right)$$

#### Problema 8

$$3,5 \cdot 10^3 J$$

**Problema 9**

$$m = m_0 e^{-at/u}$$

**Problema 10**

$$\Delta t' = \frac{2\Delta t}{e}$$

**Problema 11**

$$p_{a,cm} = \frac{m_a m_b}{m_a + m_b} (\vec{v}_a - \vec{v}_b)$$

**Problema 12**

$$v_0 = \frac{2M}{m} \sqrt{2gh}$$

**Problema 13**

$$f = 10^3 \sqrt{5} \text{ Hz}$$

**Problema 14**

Caso  $m_2$  esteja subindo:  $d = \frac{m_1 v_1 \sqrt{2}}{2(m_1 + m_2)} \frac{(m_2 v_2 + \sqrt{m_2^2 v_2^2 + v_1^2 \sin^2 45^\circ (m_1 + m_2)^2})}{g(m_1 + m_2)}$

Caso  $m_2$  esteja descendo:  $d = \frac{m_1 v_1 \sqrt{2}}{2(m_1 + m_2)} \frac{(-m_2 v_2 + \sqrt{m_2^2 v_2^2 + v_1^2 \sin^2 45^\circ (m_1 + m_2)^2})}{g(m_1 + m_2)}$

**Problema 15**

$$F = 5,6 \text{ N}$$

**Problema 16**

$$v = \frac{Ft}{M_c + bt}$$

**Problema 17**

$$v(t) = v_0 \left( \frac{m_0}{m_0 + bt} \right)^{\frac{1}{b}} - \frac{m}{b} g \cos \theta$$

**Problema 18**

$$N = \frac{m\sqrt{2gl}}{2Ft}$$

**Problema 19**

$$x = \frac{m_2 v \left( \sqrt{\frac{2g}{g}} - 1 \right)}{m_1 + m_2}$$

**Problema 20**

$$F_r = 6 \cdot 10^4 \text{ N}$$

## 1.5 Energia

Se tem uma coisa pela qual os físicos são conhecidos, é a praticidade (ou, dependendo do ponto de vista, a preguiça). Em sua busca incessante por simplificar problemas, já reduziram vacas a esferas, pinguins a cilindros, e descobriram o conceito mágico da energia. Por quê? Porque ninguém quer recalcular tudo toda vez que algo se move ou interage. Energia é, essencialmente, uma quantidade inventada para ser constante (ou seja, não mudar ao longo do tempo) e ajudar a resolver problemas de forma elegante e eficiente.

A energia nos permite entender como e por que as coisas acontecem no universo, desde o movimento de um carro até a órbita de planetas. Neste capítulo, vamos explorar com rigor e clareza de onde surgem as principais expressões de energia e como aplicá-las a problemas práticos.

### 1.5.1 Conservação da energia unidimensional

Considerando uma força que age apenas em uma dimensão e depende apenas da posição —  $F = F(x)$   $\therefore F(x) = ma = m \frac{dv}{dt} = m \frac{dv}{dt} \frac{dx}{dx} \therefore F(x) = mv \frac{dv}{dx}$ . Trabalhando essa equação diferencial:

$$\int_{x_0}^x F(x') dx' = \int_{v_0}^v mv' dv' \therefore \int_{x_0}^x F(x') dx' = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

Definindo  $\frac{1}{2}mv_0^2$  como  $E$ .

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \int_{x_0}^x F(x') dx'$$

Nota-se que  $E$  depende apenas de  $v_0$   $\therefore$  depende do  $x_0$  tomado.

Estabelecendo  $V(x) = -\int_{x_0}^x F(x') dx'$  (a energia potencial que será desenvolvida ao longo do capítulo):

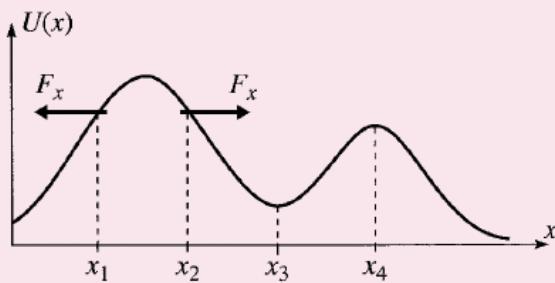
$$E = \frac{1}{2}mv^2 + V(x)$$

Que algo que é verdade para todos os pontos da trajetória de uma partícula  $\therefore$  esta soma é constante e, portanto, conservada (não varia com o tempo).

#### Lembrete 3

A fórmula diferencial da equação  $V(x) = -\int_{x_0}^x F(x') dx'$  é:

$$F(x) = -\frac{dV(x)}{dx}$$



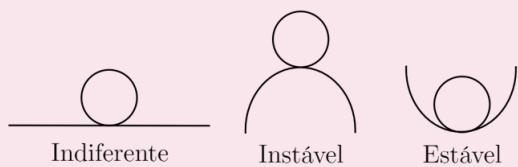
Nota-se, analisando  $F(x) = -\frac{dV(x)}{dx}$ , que a direção da força total deve ser apontando para os mínimos, ou seja, o objeto acelera nessa direção, como acontece numa montanha-russa e o carrinho acelera quando despenca para baixo.

Perceba também que os pontos de máximos e mínimos podem ser traduzidos como os pontos onde  $\frac{dV(x)}{dx} = 0$  e estes podem ser entendidos como **pontos de equilíbrio**. Estes são os pontos  $x_3$  e  $x_4$ .

Em  $x_3$ , onde  $V(x)$  é mínimo e  $\frac{d^2V(x)}{dx^2} > 0$ , se o objeto for levemente cutucado ele sai de sua posição de equilíbrio e oscila entre diversas posições tendendo a voltar pro equilíbrio. É trivial que  $x_3$  é um ponto de equilíbrio **estável**.

Enquanto isso, em  $x_4$  o objeto está em equilíbrio mas se for levemente deslocado, ele tende a cair em direção ao mínimo mais próximo e não deve voltar a  $x_4$ , isso o torna um ponto de equilíbrio **instável**.

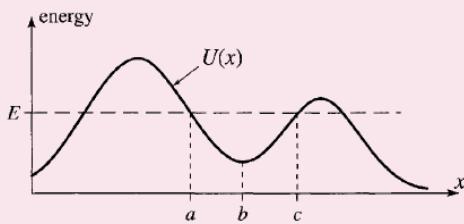
#### Lembrete 4: Estados de equilíbrio



- Equilíbrio indiferente: O sistema ao ser movido de sua posição de equilíbrio encontra outra posição de equilíbrio que não pode ser diferenciada da primeira (seu centro de massa, CM, não muda).
- Equilíbrio instável: O sistema ao ser movido da sua posição de equilíbrio encontra outro ponto de equilíbrio diferente da primeiro, ou seja, seu CM se move.
- Equilíbrio estável: O sistema ao ser movido da sua posição de equilíbrio volta a ela, portanto seu CM praticamente não se move.

### Lembrete 5

Agora analisemos o seguinte gráfico. Sendo  $U(x)$  a mesma coisa do  $V(x)$  analisado até então.



Para interpretar este gráfico, comece percebendo que existe um valor fixo de  $E$ , o que está de acordo com o princípio da conservação da energia.

Note então que em pontos onde a partícula está se movendo, existe energia cinética  $K$  e, portanto,  $E$  deve ser a soma dessa energia  $K$  com o  $U(x)$  e  $U(x) < E$ . Veja também que nas interseções de  $E$  com  $U(x)$  obviamente  $U(x) = E$  e  $K = 0$ .

Idealize um objeto partindo de um ponto próximo à esquerda de  $b$  no gráfico, isso significa que a princípio sua energia potencial é maior que  $U(b)$ . Admita que essa coisa se move até a direita de  $b$ , o que implica num aumento de energia potencial e uma queda na energia cinética até atingir o ponto  $c$  que é denominado um **turning point**, onde  $U(c) = E$  e  $K(c) = 0$ . Em  $c$  a partícula para e é novamente atraída para o ponto de equilíbrio estável  $b$ , mas ela não para até sua energia cinética ser zero novamente, o que só acontece em  $a$ . Daí o ciclo se repete.

Acabamos de analisar um caso, onde a partícula tem uma energia menor que a energia de uma das cristas do gráfico e fica presa oscilando no vale. No caso onde o objeto tem energia maior que a energia de uma das cristas, digamos maior que a da direita e menor que a da esquerda, ela pode apenas atravessar ela e a partir daí nunca parar. Dizemos que a partícula escapou quando isso acontece.

É importante destacar que de acordo com Princípio da Conservação de Energia a energia de um sistema isolado se mantém constante e, portanto, não se cria nem destrói energia. Entretanto ela pode sofrer alterações e transformar-se em outro tipo de energia, ela continua sendo **energia**.

### 1.5.2 Teorema da Energia Cinética

Considerando um deslocamento de  $x_1$  para  $x_2$ :

$$\frac{1}{2}mv^2(x_2) - \frac{1}{2}mv^2(x_1) = V(x_1) - V(x_2) = \int_{x_1}^{x_2} F(x')dx' = (Trabalho)_{x_1 \rightarrow x_2}$$

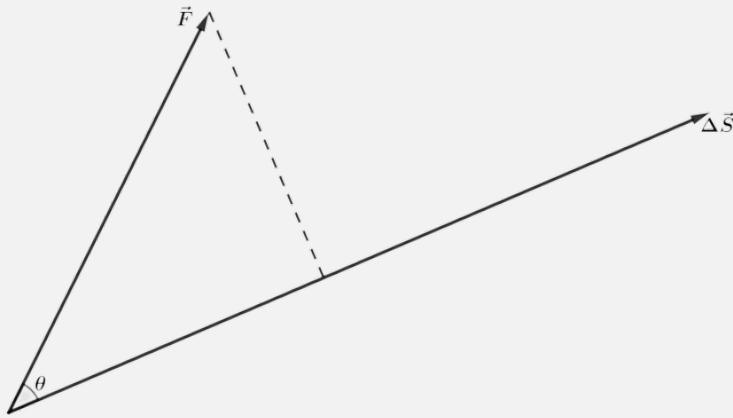
Sendo  $\frac{1}{2}mv^2 = K$  (K de Kinetics, em inglês) e  $Trabalho = W$  (W de Work, do inglês):

$$\therefore \boxed{\Delta K = W_{x_1 \rightarrow x_2}}$$

### 1.5.3 Trabalho e energia potencial

#### Trabalho

Até agora vimos a definição de trabalho como  $\int F(x')dx'$ , mas agora idealize ele como  $\vec{F} \cdot \Delta\vec{S}$ . O que eu fiz aqui foi tratar o trabalho com outra dimensão além daquela única que estávamos considerando, a demonstração desse conclusão deve estar no capítulo 1.4.5.



Assim, com um conhecimento básico sobre vetores é fácil ver que  $W = F\Delta S \cos\theta$ .

Note que não é realizado trabalho por forças perpendiculares a trajetória.

Perceba também que se a força aponta na mesma direção do movimento, o trabalho é positivo e a velocidade aumenta. Caso contrário, se a força aponta na direção contraria do movimento, o trabalho será negativo e a velocidade diminui.

Idealize a seguinte situação, um estudante de física foi instruído pelo professor a levar uma caixa de matérias que está repousando no chão para o laboratório. Assim, ele pega a caixa e a levanta, aqui ele aplica uma força vertical na caixa, portanto realiza trabalho.

Antes de começar a andar, ou seja, enquanto ele ainda está parado ele não realiza trabalho sob a caixa, porque não há deslocamento. Entretanto, ele está cansando seu braço e se esforçar.

Ao começar a se mover ele também não realiza trabalho sob a caixa, porque o deslocamento é perpendicular a força. Mesmo assim, aqui ele já deve ter começado a suar se a caixa for suficientemente pesada.

Deste modo, trabalho pode gerar esforço, mas não necessariamente o esforço vem apenas em conjunto com o trabalho.

### Lembrete 6: Trabalho vs energia potencial

Veja que até agora parece que estamos usando o termo trabalho e energia potencial de maneira meio confusa. Para que fique mais confuso ainda, proponho a situação de uma bola caindo. Nesse caso, a velocidade da bola está obviamente aumentando, mas isso acontece porque a força gravitacional está exercendo trabalho na bola ou porque sua energia potencial está decaindo? A resposta é os dois.

Trabalho e energia potencial são análogos, sinônimos e duas maneiras de se referir a mesma coisa (pelo menos para energias potenciais). Agora a dúvida provavelmente é redirecionada para qual dos dois eu devo usar, e isso depende do sistema escolhido. O teorema da energia cinética generalizado:

$$W_{ext} = \Delta K + \Delta V + \Delta K_{int}$$

- $W_{ext}$ : Trabalho aplicado no sistema por forças externas.
- $\Delta K_{int}$ : Como o calor que é o movimento aleatório de moléculas em um sistema.

Retome ao exemplo do aluno de física e sua caixa. Idealize o momento que ele levanta a caixa e considere que ele o faz a velocidade constante, ou seja, sem variação na energia cinética. Para os diferentes sistemas:

- Sistema=caixa: Tanto a gravidade quanto o aluno são forças externas, então não há nenhuma mudança na energia do livro  $\therefore W_{aluno} + W_{grav} = 0$ .
- Sistema=caixa+terra: O aluno é a única força externa. **A força gravitacional agora é uma força interna, logo produz energia potencial interna**  $\therefore W_{aluno} = \Delta V_{terra-caixa}$ .
- Sistema=caixa+terra+aluno: Nesse caso não há força externa alguma. A energia interna do sistema só muda porque a energia potencial gravitacional da terra-caixa aumenta e a energia potencial do aluno diminuiu, vez que ele está gastando alguma energia para levantar essa caixa que podemos assumir que é pesada  $\therefore 0 = \Delta V_{terra-caixa} + \Delta V_{aluno}$ .

Na prática, toda essa visualização não é muito relevante. Inconscientemente, acabamos sempre considerando o sistema terra+caixa. O moral era apenas esclarecer possíveis ambiguidades dos conceitos.

### 1.5.4 Exemplos de trabalhos de forças

#### Peso

Considere  $\vec{P} = -mg\hat{y}$ , dai:

$$\vec{P} \cdot \Delta \vec{S} = W = -mg\hat{y} \cdot \Delta \vec{S}$$

Sendo que  $\hat{y} \cdot \Delta \vec{S} = \hat{y} \cdot (\Delta x\hat{x} + \Delta y\hat{y} + \Delta z\hat{z}) = \Delta y$  Assim,

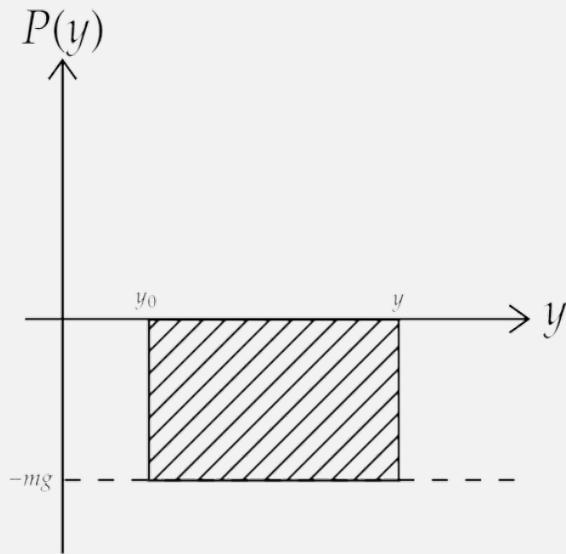
$$W = -mg\Delta y$$

Pelo teorema do trabalho:

$$W = \Delta K \therefore -mg\Delta y = \Delta K \therefore \Delta K + mg\Delta y = 0 \therefore K + mgy = cte$$

Nesse caso  $mgy$  é dito como energia potencial  $\therefore V(x) = mgy$ . Note que para corpos extensos, tomamos a altura do centro de massa como referência para calcular a sua energia potencial. Além disso, perceba que a Energia Potencial é determinada em relação a um determinado ponto de referência  $y_0$ , onde  $V(y_0) = 0$ .

Outra maneira de analisar isso, é por meio do gráfico:



A área hachurada (com linhas diagonais) também é o trabalho realizado pela força peso.

$$W = A = -mg \cdot \Delta y \therefore \Delta V = mg\Delta y$$

Esse método da área do gráfico pode ser generalizado para qualquer força com dependência parecida.

### Força elástica

A expressão da força é:  $\vec{F} = -k(x - x_0)\hat{x}$ . Tome  $x_0 = 0$  para fins de cálculo. Como  $V(x) = -\int F(x')dx'$ :

$$V(x) - V(x_0) = - \int_0^x -kx'dx' = \frac{1}{2}kx^2$$

Generalizando para qualquer  $\Delta x$ :

$$V(x)_{elastica} = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2$$

Sendo  $x_0$  o ponto de referência escolhido.

### Força gravitacional

De acordo da lei da gravitação de Newton:  $F = G\frac{Mm}{r^2}$

Dai,

$$V(r) - V(r_0) = - \int_{r_0}^r -\frac{GMm}{r'^2} dr' = -\frac{GMm}{r} + \frac{GMm}{r_0}$$

Mas normalmente escolhemos  $r_0 = \infty$ , apenas para que o segundo termo sume.

$$\therefore V(r)_{grav} = -\frac{GMm}{r}$$

### Lembrete 7: Forças conservativas

É de bom tom começar esse tópico esclarecendo que nem toda força tem uma energia potencial correspondente, as que tem são as **forças conservativas**.

Qualquer força, que dependa de x, v, t ou etc, realiza um trabalho  $W = \int F dx$  em uma partícula. Se a partícula tem um ponto inicial  $x_1$  e um final  $x_2$ , não é importante como a partícula percorre o caminho entre eles, o trabalho de todas as forças atuantes no sistema é calculável por:

$$W_{total} = \int_{x_1}^{x_2} F_{total} dx = \Delta K = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

Mas isso não é suficiente para calcular o trabalho daquela força em específico, vez que o conceito de força precisou ser generalizado para a realização da integral.

Se quisermos particularizar devemos considerar o tipo de força que tem o trabalho independente de o como a partícula se mexeu. Esse tipo depende somente da posição, vez que sua integral irá depender apenas do ponto final e ponto inicial, invocando o teorema fundamental do cálculo. Portanto, por enquanto fica estabelecido que uma das condições para a força ser considerada conservativa é depender apenas da posição da partícula.

### Lembrete 8: Forças dissipativas

São claramente as forças que não cumprem as condições que levam para ser conservativas. Forças como o atrito, tendem a dissipar energia, transformando elas, por exemplo, em energia térmica do sistema. Por isso, quando estamos com frio podemos esfregar uma mão na outra de forma que esquentem. É apenas a fricção entre elas convertendo-se em calor.

Perceba que em um sistema isolado, a energia total **sempre** se conserva, mas a energia mecânica apenas se conserva se não houver nenhuma força dissipativa atuando no sistema.

### Lembrete 9: Potencia

Aqui não é necessariamente o trabalho realizado por uma força, esta mais para a **taxa de transmissão de energia**.

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t}$$

Também, fazendo uma transformação simples:

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t} \frac{\Delta S}{\Delta S} = \frac{\Delta S}{\Delta t} \frac{\Delta E}{\Delta S}$$

Como  $\frac{\Delta E}{\Delta S} = \frac{F \Delta S}{\Delta S} = F$

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} = F v \cos \theta$$

Nesse contexto também é interessante introduzir a ideia de rendimento. Sendo  $P = P_{util} + P_{dissipada}$ :

$$\eta = \frac{P_u}{P} = 1 - \frac{P_d}{P}$$

### 1.5.5 Conservação de energia em três dimensões

Até agora analisamos as energias num plano unidimensional, mas agora analisemos o caso mais geral. A ideia é praticamente a mesma

sendo  $v^2 = \vec{v} \cdot \vec{v}$

$$\frac{dK}{dt} = \frac{1}{2} m \frac{d(\vec{v} \cdot \vec{v})}{dt} = \frac{1}{2} m (\dot{\vec{v}} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \dot{\vec{v}}) = m \dot{\vec{v}} \cdot \vec{v}$$

$$\therefore \frac{dK}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$$\frac{dK}{dt} dt = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt \therefore \boxed{dK = \vec{F} \cdot d\vec{r}}$$

Que é novamente o teorema da energia cinética, sendo  $W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$

**Lembrete 10: Generalização da condição para forças conservativas**

Para forças com mais de uma dimensão as condições para ser uma força conservativa se tornam mais rigorosas. Isso acontece porque mesmo que a força dependa apenas da posição existem infinitas formas da partícula ir de uma posição a outra, em contraste com o caso unidimensional onde só existia um caminho. Para que a energia potencial tenha algum significado, ela precisa ser bem definida.

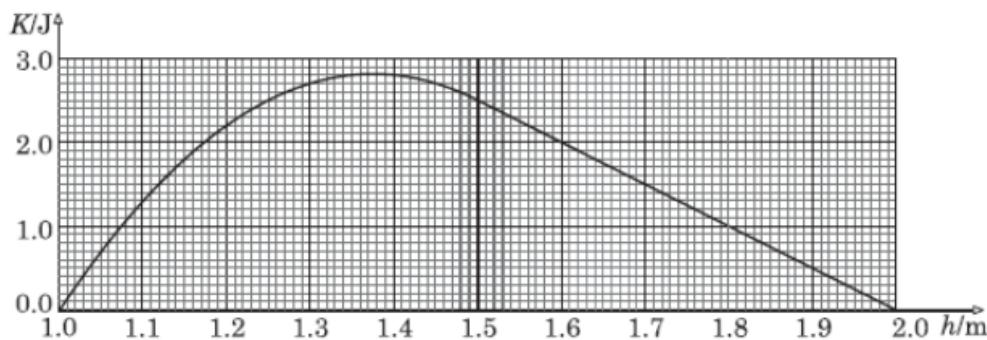
A condição para forças tridimensionais é que dada uma força  $\vec{F} = - \int_{r_0}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}'$ , para que ela seja bem definida e independente do caminho deve seguir  $\nabla \times \vec{F} = 0$

Assim para uma força ser conservativa, no geral deve seguir:

- $\vec{F}$  depende apenas da posição e de nenhuma outra variável, como tempo ou velocidade  
 $\therefore \vec{F} = \vec{F}(x)$
- Para qualquer dois pontos o trabalho precisa ser o mesmo para todos os caminhos entre esses dois pontos.
- $\nabla \times \vec{F} = 0$ .

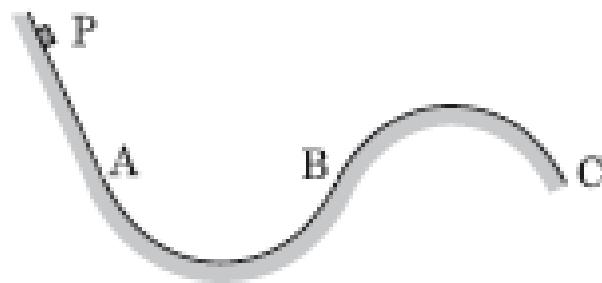
### 1.5.6 Problemas

**Problema 1.** (Pathfinder) (Médio) Uma mola é inserida em um tubo transparente de 2,0m de comprimento mantido verticalmente em um piso e então as extremidades inferiores da mola e do tubo são coladas no piso. A superfície interna do tubo é sem atrito. Uma bola é lançada no tubo. A energia cinética da bola é registrada em várias alturas acima do piso e os dados assim obtidos são mostrados no gráfico a seguir.



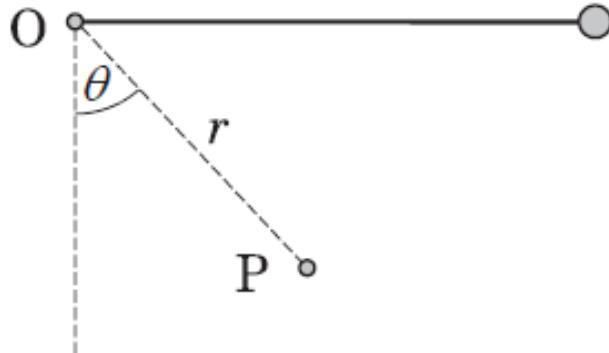
Determine o comprimento da mola relaxada, a rigidez da mola e a massa da bola. Suponha que a colisão da bola com a extremidade superior da mola seja sem perdas, a lei de Hooke seja válida para deformações da mola sob consideração e a aceleração da queda livre seja de  $10\text{m/s}^2$ .

**Problema 2.** (Pathfinder) (Médio) Uma massa pontual pode deslizar em um plano vertical em uma pista curvilínea sem atrito, como mostrado na figura. As seções AB e BC da pista são arcos circulares, cada um com envergadura angular de  $120^\circ$  e raio  $r$ . De qual altura mínima acima do fundo da seção AB um pequeno bloco P deve ser liberado para que ele certamente perca o contato com a pista?

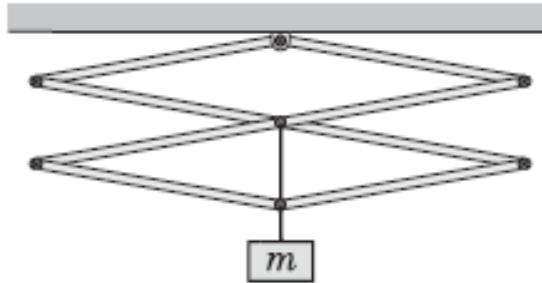


**Problema 3.** (Pathfinder) (Médio) Uma pequena bola  $P$  é suspensa de um prego fixo  $O$  com a ajuda de uma corda leve inextensível de comprimento  $l$ . Há outro prego  $P$  a uma distância  $r$  de  $O$ . A bola é puxada para o lado esticando a corda horizontalmente e liberada. No movimento subsequente, a corda se agarra ao prego  $P$  e a bola começa a girar em torno do prego  $P$ . Encontre o

intervalo de valores de  $r$ , de modo que a bola faça uma volta circular completa em torno do prego  $P$ . Ignore a resistência do ar e os raios dos pregos.



**Problema 4.** (Pathfinder) (Médio) Duas hastas de luz longas e quatro com metade do comprimento são articuladas em suas extremidades para formar um pantógrafo que consiste em dois losangos idênticos. O pantógrafo é suspenso do teto, a dobradiça mais baixa do pantógrafo é conectada à dobradiça acima dela por um cordão leve inextensível e uma carga de massa  $m$  é suspensa da dobradiça mais baixa, conforme mostrado na figura. Encontre a força de tração desenvolvida no cordão que conecta as duas dobradiças.



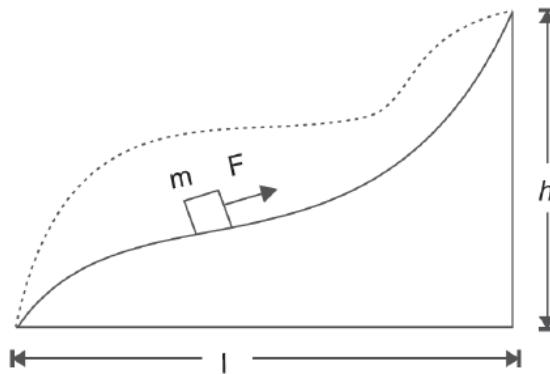
**Problema 5.** (Médio) (É interessante que você tenha resolvido o Problema 2 do capítulo de Leis de Newton que tem uma configuração igual) Um haltere construído fixando pequenas bolas idênticas, cada uma de massa  $m$ , nas extremidades de uma haste leve de comprimento  $l$  fica verticalmente em um piso sem atrito tocando uma parede sem atrito, conforme mostrado na figura. Se a bola inferior for gentilmente empurrada para longe da parede, o haltere começa a deslizar. Denotando a aceleração devido à gravidade por  $g$ , encontre a expressão para a velocidade da bola inferior, quando a bola superior está deixando a parede.

**Problema 6.** (Morin) (Difícil) Uma tigela hemisférica de massa  $M$  repousa sobre uma mesa. A superfície interna da tigela é sem atrito, enquanto o coeficiente de atrito entre o fundo da tigela e a

mesa é  $\mu = 1$ . Uma partícula de massa  $m$  é liberada do repouso no topo da tigela e desliza para baixo nela. Qual é o maior valor de  $m/M$  para o qual a tigela nunca desliza sobre a mesa?

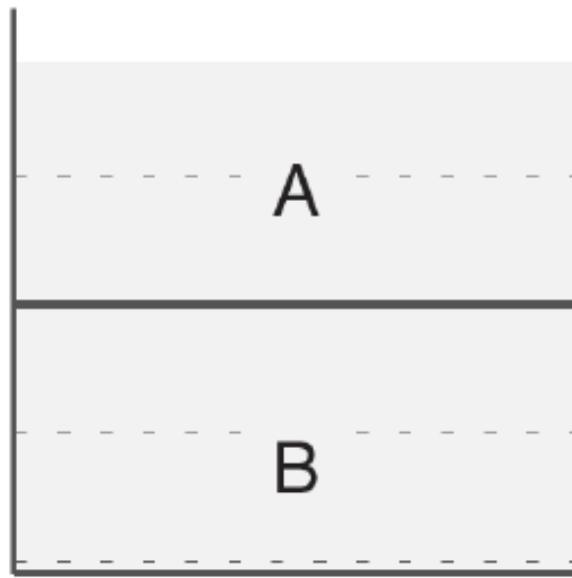
**Problema 7.** (Médio) Um corpo de massa  $m$  está sendo lentamente puxado para cima de uma colina áspera, conforme mostrado na figura, por uma força  $F$  que atua tangencialmente à trajetória em cada ponto. Encontre o trabalho realizado pela força, se a altura da colina é  $h$ , o comprimento da sua base é  $l$ , e o coeficiente de atrito cinético entre o corpo e a superfície da colina é  $\mu$ .

- a) Qual é o trabalho realizado se o corpo for movido ao longo de um caminho alternativo mostrado pela linha pontilhada, mantendo o mesmo coeficiente de atrito?



- b) Qual é o trabalho realizado por  $F$  se o corpo partiu do repouso na base e tem velocidade  $v$  ao atingir o topo?

**Problema 8.** (Médio) Dois líquidos  $A$  e  $B$ , com densidades  $2\rho$  e  $\rho$ , respectivamente, estão contidos em um recipiente cilíndrico separados por uma divisória, conforme mostrado na figura abaixo. A altura de cada líquido no recipiente é  $h$  e a área da seção transversal do recipiente é  $A$ . Agora, a divisória é removida. Calcule a mudança na energia potencial gravitacional ( $\Delta U$ ) do sistema. A aceleração da gravidade vale  $g$ .

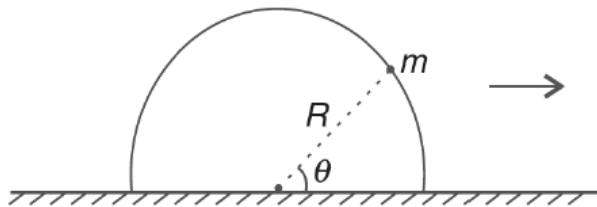


a) supondo que os dois líquidos se misturem uniformemente.

b) Supondo que os dois líquidos sejam imiscíveis.

O que você conclui a partir do sinal de  $\Delta U$  nos dois casos acima?

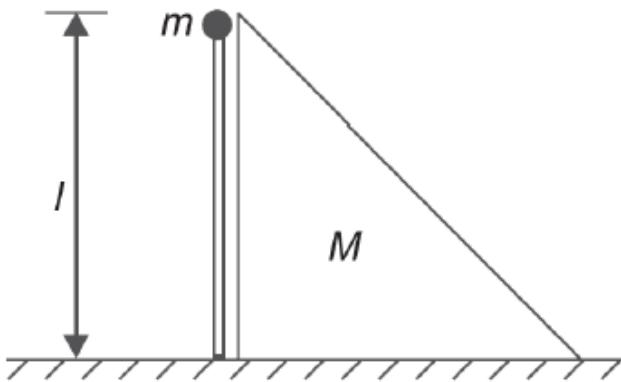
**Problema 9.(Médio)** Um arame em formato semicircular de raio  $R$  está verticalmente posicionado sobre uma mesa horizontal. Ele é puxado horizontalmente para a direita com aceleração constante. Uma conta de massa  $m$  permanece em equilíbrio (em relação ao arame semicircular) em uma posição onde o raio forma um ângulo  $\theta$  com a horizontal. Não há atrito entre o fio e a conta. A conta é deslocada um pouco na direção vertical para cima e solta. Calcule a velocidade da conta em relação ao fio no instante em que ela atinge a mesa. Assuma que durante todo o tempo o fio semicircular mantém-se movendo com aceleração constante. A aceleração da gravidade vale  $g$ .



a) Para qual razão de massas  $M/m$  a haste formará um ângulo  $\theta = \pi/3$  com a vertical no momento em que a carga se separa da cunha?

b) Qual é a velocidade da cunha neste momento?

**Problema 10.** (Fácil) Uma haste de massa desprezível e de comprimento  $l$ , com uma pequena carga de massa  $m$  em uma de suas extremidades, é mantida vertical com sua extremidade inferior articulada em uma superfície horizontal. A carga toca uma cunha de massa  $M$  nesta posição. Um leve puxão para a direita coloca o sistema em movimento (veja figura), com a haste girando livremente no plano vertical em torno de sua extremidade inferior. Despreze todos os tipos de atrito. A aceleração da gravidade vale  $g$ .



**Problema 11.** (Fácil) Uma partícula de massa  $m$  move-se sob a ação de uma força central. A função de energia potencial é dada por  $U(r) = mkr^3$ , onde  $k$  é uma constante positiva e  $r$  é a distância da partícula ao centro de atração.

- Qual deve ser a energia cinética da partícula para que ela se mova em um círculo de raio  $R$  em torno do centro de atração?
- Qual é o período deste movimento circular?

**Problema 12.** (Difícil) Lucas, uma criança de massa  $m$ , desliza a partir do repouso no ponto A, situado no topo de um escorregador curvo em uma praça. O escorregador tem a forma de um quarto de círculo de raio  $R$ , e o coeficiente de atrito cinético entre a criança e a superfície é  $\mu$ . Ao chegar ao ponto B (base do escorregador), a criança entra em uma superfície horizontal com o mesmo coeficiente de atrito e percorre uma distância  $d$  até parar completamente no ponto C. Sobre Lucas e a praça responda:

- Determine a força normal  $N(\theta)$  sobre a criança em função do ângulo  $\theta$  (medido entre a vertical e a posição de Lucas) durante o movimento no trecho curvo.
- Calcule o trabalho total realizado pela força de atrito no trecho curvo  $A \rightarrow B$ . (Dica: Expresse o trabalho como uma integral em termos de  $\theta$ , usando  $N(\theta)$ ). Não é necessário resolver a integral neste item).
- Aplicando o teorema trabalho-energia, determine a velocidade  $v_B$  de Lucas ao chegar ao ponto B.
- Qual é o trabalho realizado pela força de atrito no trecho horizontal  $B \rightarrow C$ ?
- Estabeleça a relação entre  $R$ ,  $\mu$ ,  $d$  e  $g$  para que a Lucas pare exatamente no ponto C.

### 1.5.7 Soluções

**Problema 1** Note que a partir de 1,5m a energia cinética varia em linearmente em função da altura, então pode-se concluir que provavelmente aqui a mola não atua mais e a função de energia é algo como:  $E = mgh + \frac{1}{2}mv^2$ . Assim o comprimento natural da mola deve ser  $l_0 = 1,5\text{m}$

Em  $h = 2\text{m}$ ,  $K = 0 \therefore E = mgh = 2mg$

Adotando 1,5m como nível de referência, em  $h = 1,5\text{m}$ ,  $U = 0$  e  $E = K = 2,5$

Como esse é um sistema conservativo

$$2,5 = mgh = 10 \cdot m \cdot 0,5 \therefore m = 0,5\text{m}$$

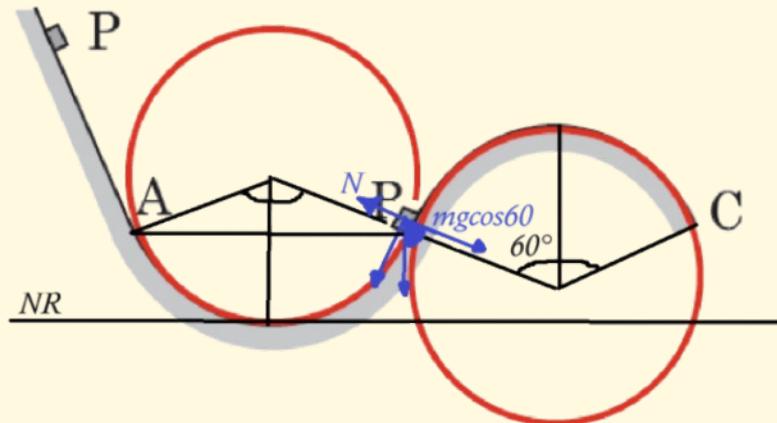
Quando  $h = 1\text{m}$  por exemplo,  $K = 0$ . Então

$$E = mgh + \frac{1}{2}k\Delta x^2 = mg + \frac{1}{2}k(1 - 1,5)^2 = mg + \frac{1}{8}k$$

$$2mg = mg + \frac{1}{8}k \therefore k = 40\text{N/m}$$

### Problema 2

i) Esquematizando essa questão: (NR para nível de referência)



ii) Sabe-se que o caso limite da altura mínima para o escape do bloco pode ser traduzido

para o bloco ter normal nula no ponto B, que é o fim do primeiro arco. Essa é a base para os próximos passos.

iii) Equacionando as forças atuando no bloco no ponto B:

$$F_{cp} = \frac{mv^2}{r} = mg\cos 60 \therefore v^2 = gr\cos 60$$

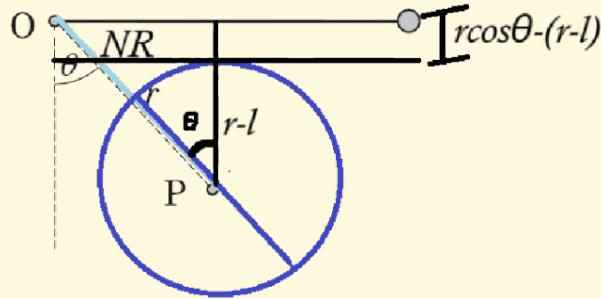
iv) Conservando a energia. em relação ao nível de referência, do ponto de partida e o ponto B

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + mgr(1 - \cos 60) \therefore h = \frac{3}{4}r = 0,75r$$

### Problema 3

i) Sabe-se que se a bolinha alcançar o ápice da volta (altura máxima do círculo) é garantido que ela completa a mesma, então essa pode ser nossa condição limite, que garante a igualdade: A bola tem energia suficiente apenas para atingir o ponto máximo da volta.

ii) Esquematizando a questão:



iii) O raio da volta como pode-se ver é  $R = l - r$

iv) No ápice a única força atuando é o peso:

$$F_{cp} = \frac{mv^2}{l-r} = mg \therefore v^2 = g(l-r)$$

v) Conservando a energia, em relação ao nível de referência, do ponto onde a bolinha é solta até o o ápice:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 \therefore mg(r \cos \theta - l + r) = \frac{mg(l-r)}{2}$$

$$r = \frac{3l}{2\cos\theta + 3}$$

Mas esse caso limite, portanto qualquer raio maior que esse também deve funcionar, dai:

$$r \geq \frac{3l}{2\cos\theta + 3}$$

**Problema 4**

$$2mg$$

**Problema 5**

$$\sqrt{\frac{8gl}{27}}$$

**Problema 6**

$$\frac{m}{M} = \frac{1}{3(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2})}$$

**Problema 7**

(a)

$$mg(h - \mu l)$$

(b)  $\frac{1}{2}mv^2 + mg(h + \mu l)$

**Problema 8**

(a)  $\Delta U = -\frac{\rho Ah^2 g}{2}$

(b)  $\Delta U = -\rho Ah^2 g$

O sinal positivo de no primeiro caso nos diz que será necessário algum trabalho externo para misturar uniformemente os dois líquidos.

**Problema 9**

$$v = \sqrt{2gR \left( \frac{1 + \cos\theta}{\sin\theta} \right)}$$

**Problema 10**

(a)  $M = 4m$

(b)  $v_c = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{gl}{2}}$

**Problema 11** (a)  $\frac{3}{2}kmR^3$ 

(b)  $T = \frac{2\pi}{\sqrt{3kR}}$

**Problema 12**

(a)

$$N(\theta) = m \left( g \cos\theta + \frac{v(\theta)^2}{R} \right)$$

(b)

$$W_{\text{attrito,curvo}} = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mu m \left( g \cos\theta + \frac{v(\theta)^2}{R} \right) R d\theta$$

(c)

$$v_B = \sqrt{2gR - \frac{2W_{\text{attrito,curvo}}}{m}}$$

(d)

$$W_{\text{attrito,horizontal}} = -\mu mgd$$

(e)  $R, \mu, d, g$ :\*\*

$$R \left( 1 - \frac{\mu(\mu e^{-\mu\pi} + 2\mu^2 + 1)}{4\mu^2 + 1} \right) = \mu d$$

## 1.6 Mecânica das rotações

### 1.6.1 Introdução

Até agora, restringimos nosso estudo de mecânica a movimentos envolvendo subir, descer, ir para os lados...mas como poderíamos descrever um movimento *com curvas*? Como por exemplo o movimento de um planeta em torno de uma estrela? Bem, vamos apresentar as ferramentas necessárias para realizar tal tarefa nessa seção, além de mostrar diferentes aplicações importantes para a astronomia.

### 1.6.2 Cinemática angular

Vamos começar, então, com a chamada "cinemática angular". Como o próprio nome já fala, ela tem bastante semelhanças com a cinemática tradicional. Porém, enquanto antes focávamos na variação da posição, aqui vamos focar na variação de **ângulos**. Então, enquanto na cinemática tínhamos MRU e MRUV, aqui vamos poder trabalhar com MCU (Movimento circular uniforme) e MCVU (Movimento circular uniformemente variável). Assim, podemos definir a velocidade angular como:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

Aonde  $\theta$  é o ângulo medido a partir de uma certa referência. Seria o equivalente a velocidade instantânea que vimos anteriormente. Então, também podemos definir uma velocidade angular média:

$$\omega_m = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

Então, analogamente, podemos definir a aceleração angular instantânea e média:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

$$\alpha_m = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

Igual como fazemos na cinemática padrão. Perceba que as equações que regem a cinemática angular no MCU e MCVU são possuem a mesma matemática da apresentada na primeira seção. Logo, podemos afirmar que elas tem as mesmas soluções, basta mudar  $x$  por  $\theta$ ,  $v$  por  $\omega$  e  $a$  por  $\alpha$ :

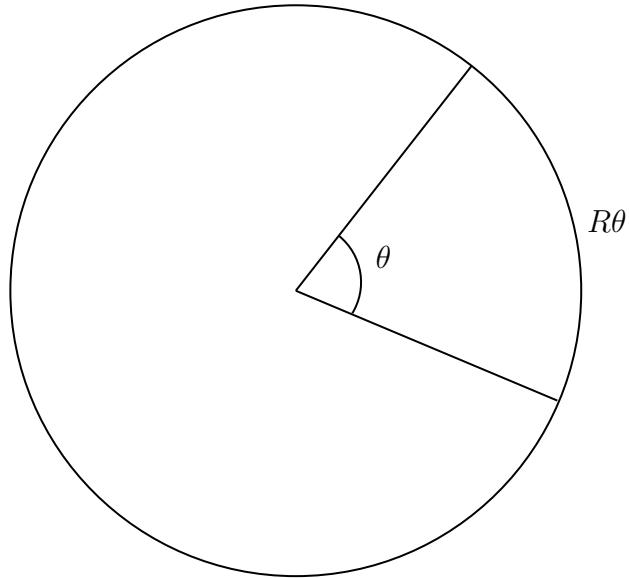
$$MCU = \begin{cases} \theta = \theta_0 + \omega t \\ \alpha = 0 \end{cases}$$

$$MCUV = \begin{cases} \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \alpha t^2/2 \\ \omega = \omega_0 + \alpha t \\ \omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\Delta\theta \end{cases}$$

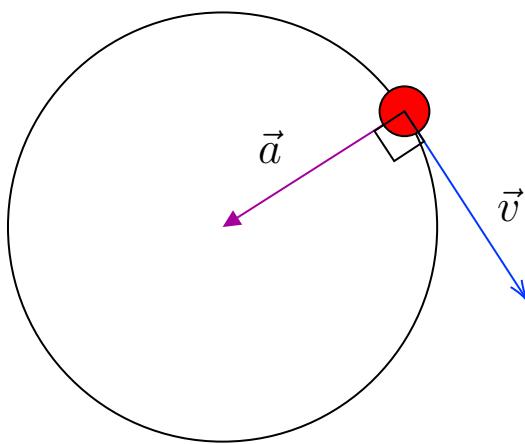
Mesmo assim, você pode facilmente deduzir elas usando o mesmo raciocínio que usamos para demonstrar as fórmulas originais. Porém, essa maneira de chegar nelas por meio das equações da cinemática é ótima para você não esquecer essas fórmulas. Agora, uma nota é importante: normalmente, o ângulo que medimos está em radianos e não em graus. Por isso, geralmente  $\omega$  tem unidades de [rad/s] e  $\alpha$  de [rad/s<sup>2</sup>]. Caso você não tenha estudado anteriormente esse conteúdo, saiba que podemos transformar ângulos de graus para radianos pela regra de três:

$$\frac{\theta(\text{graus})}{360^\circ} = \frac{\theta(\text{rad})}{2\pi}$$

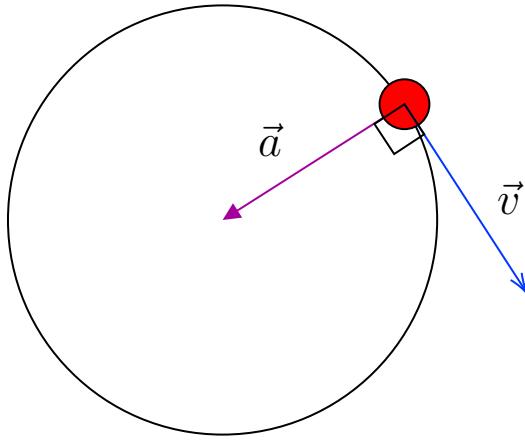
E que, por definição temos que o arco de circunferência delimitado por um ângulo  $\theta$  mede exatamente  $\theta R$ , com  $\theta$  em radianos ( $R$  é o raio da circunferência). Essa na verdade é o principal motivo de geralmente usarmos radianos, como veremos no futuro. Podemos ver melhor pela figura:



Contudo, perceba: tudo que fizemos até agora foi matemática. Sabemos que trajetórias circulares existem, mas não explicamos o motivo e muito menos o porquê deles geralmente serem MCU ou MCV. Vamos então analisar a física desses fenômenos por meio de um exemplo simples: uma partícula de massa  $m$  realiza um movimento circular em torno de um ponto  $O$  que está uma distância  $R$ , girando com  $\omega$  constante. Pede-se para encontrar o módulo da velocidade e o módulo da aceleração do movimento.



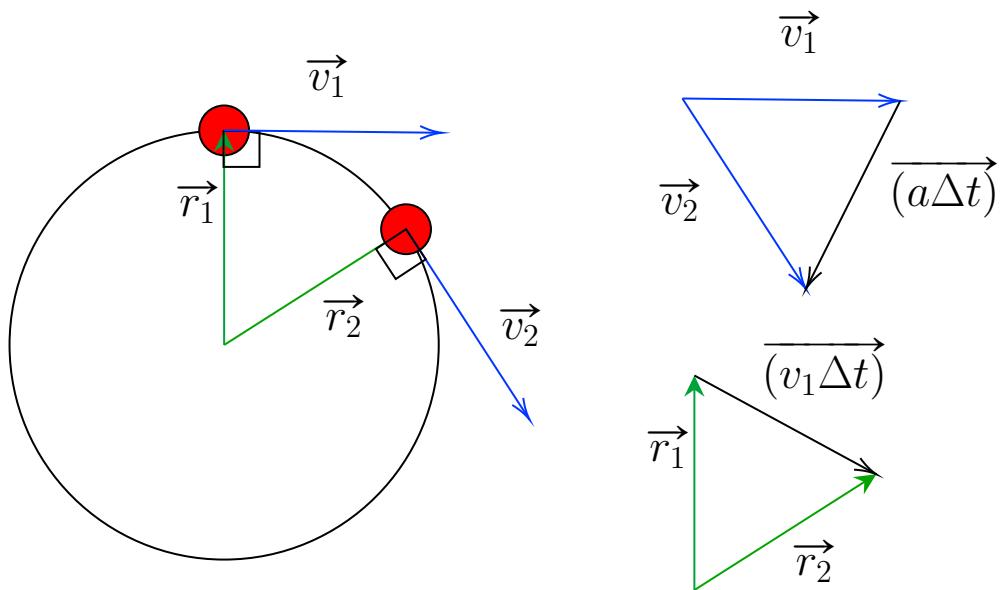
Aceleração? Pode parecer estranho comentar disso em um movimento com velocidade angular constante. Contudo, todos os movimentos com curvas apresentam aceleração; pois, se não tivessem, eles apenas andariam em linha reta com velocidade constante. O detalhe sútil aqui é que o módulo da velocidade é constante, mas não o **vetor velocidade**. O vetor velocidade aponta sempre tangencialmente (ou seja, perpendicular ao raio) à partícula, pois apenas assim ela pode continuar seu movimento tangencialmente. Podemos ver isso melhor pela figura:



Contudo, sabemos que um ângulo  $\Delta\theta$  cobre uma distância  $\Delta\theta R$ . Assim, como a velocidade é constante, podemos escrever:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta\theta R}{\Delta t} = \omega R$$

Então, primeira tarefa concluída. Agora, descobrir a aceleração é algo um pouco mais complicado. Considere que a partícula do movimento circular analisado se desloca por um pequeno ângulo  $\theta$ . Utilizando a notação vetorial geométrica, podemos fazer as seguintes figuras:



Assim, utilizando semelhança de triângulos, temos:

$$\frac{a\Delta t}{v} = \frac{v\Delta t}{R} \rightarrow \boxed{a = \frac{v^2}{R}}$$

Chamamos esse valor de **aceleração centrípeta**. Perceba que, substituindo  $v = \omega R$ , temos uma outra forma de representar a aceleração. Esse resultado mostra que, em um movimento circular, uma **força centrípeta** deve ser responsável pelo movimento e deve ter seu valor igual à massa do corpo vezes a aceleração centrípeta. Porém, não se confunda, a força centrípeta é apenas uma soma de forças externas que realiza tal papel e não uma "nova força" que teríamos descoberto a origem agora.

Porém, algo que nós não contabilizamos até agora em nossa análise são as propriedades vetoriais das quantidades envolvidas, principalmente o vetor  $\omega$ . Tal vetor é sempre perpendicular ao plano do movimento e seu sentido é determinado pela regra da mão direita. Com sua mão direita, gire sua mão no sentido do movimento e levante o polegar. O polegar aponta no mesmo sentido que o vetor velocidade angular. Assim, temos a seguinte relação vetorial:

$$\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}$$

Onde  $\mathbf{r}$  é o vetor posição com respeito ao centro do movimento.

#### Exemplo 14

Considere um disco de raio  $r$  desliza sobre uma superfície em um movimento que vamos chamar de "rolamento puro". Ele possui uma velocidade angular  $\omega$  com respeito ao seu eixo de simetria e seu centro se movimenta com uma velocidade  $v_c$ .

- a) Encontre uma fórmula geral para o vetor velocidade em qualquer ponto do disco com vetor

posição com respeito ao centro definido.

- b) Determine a velocidade do ponto de contato entre o disco e a superfície a partir de conceitos anteriores. O resultado encontrado é a condição para um movimento qualquer possa ser chamado de rolamento puro.
- c) Determine a velocidade do ponto mais superior do disco.
- d) Como ficaria nossa análise caso na verdade o movimento fosse com uma bola? E se a superfície também estiver em movimento, qual seria a condição de rolamento puro?

### Solução 14

a) Primeiro, vamos para um referencial com o mesmo vetor velocidade que o centro da bola. Nele, temos apenas um movimento circular tradicional que já conhecemos, sem nenhuma velocidade horizontal. Logo, podemos escrever:

$$\mathbf{v}_c = \omega \times \mathbf{r}$$

Agora, voltando para o referencial terrestre, devemos adicionar o vetor velocidade que retiramos ao mudar de referencial. Assim, o vetor velocidade será:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_c + \omega \times \mathbf{r}$$

b) Utilizando a equação anterior e  $v(r) = \omega r$ , sabemos o módulo do segundo termo da equação. Porém, fazendo o produto vetorial, temos que o sinal é contrário ao da velocidade do centro (o sentido da velocidade angular pode ser visualizada por desenho). Assim, a velocidade nesse ponto de contato é nula.

c) Analogamente, o segundo termo tem o mesmo módulo da velocidade do centro, mas agora também possui mesmo sentido.

d) Para um esfera, todos os resultados derivados anteriormente são os mesmos. É interessante ver que agora mais uma dimensão é adicionada, porém as equações vetoriais são as mesmas; você apenas tem mais formas de aplicar elas. Sobre a superfície se mover, perceba que o que realmente importa não é a velocidade do objeto com respeito ao referencial terrestre, mas sim a velocidade relativa entre a superfície e o objeto. Por isso, a condição de rolamento puro pode ser melhor descrita como a velocidade relativa entre um objeto e seu ponto de contato com uma superfície sendo sempre nula.

### 1.6.3 Torque

Do mesmo jeito que existe a cinemática angular, em analogia com a cinemática padrão, existe a dinâmica das rotações. Com isso, podemos criar uma espécie de "força para rotações", junto com uma "massa das rotações" e um " $F=ma$  para rotações". Contudo, estes dois últimos vamos detalhar mais para frente, por serem mais complicados de se entender e menos focados para astronomia no nível em que estamos. Sendo assim, a "força para rotações" é o que definimos como **torque** ( $\tau$ ):

$$\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

Aonde  $\mathbf{F}$  é o vetor da força aplicada e  $\mathbf{r}$  é o vetor posição que localiza o ponto de aplicação com respeito a uma certa referência, cujo temos o controle de escolher. De imediato, podemos reconhecer as seguintes propriedades do torque:

### Propriedades do torque

1. Caso a força seja aplicada na referência escolhida, o torque dela é nulo. Por isso, normalmente tentamos escolher esses pontos como **nossa referência** para diminuir as contas.
2. Caso a força seja aplicada perpendicularmente ao vetor posição com respeito ao ponto escolhido, o torque dela é nulo. Por isso, tentamos escolher pontos que formem **ângulos retos** com a força (ao se traçar o vetor posição).
3. Se nenhuma força aplicada no sistema, o torque total é nulo. Contudo, **a força resultante no sistema pode nula e o torque não**, já que temos que aplicar o produto vetorial com  $\mathbf{r}_j$  para cada força  $\mathbf{F}_j$  na hora de fazer o somatório.
4. O vetor torque é sempre perpendicular tanto a força quanto ao vetor posição, já ele vem de um produto vetorial. Para encontrar sua direção e seu sentido, devemos usar a **regra da mão direita** (ver apêndice).

Como em 3, podemos ter um sistema com força resultante nula e com torque resultante não nulo. Contudo, como o torque é o análogo da força, espera-se que devemos ter torque resultante nulo para o sistema estar em equilíbrio rotacional. Então o sistema está em equilíbrio ou não? A resposta é **não**. Existe sim o equilíbrio de forças, mas devemos também ter o equilíbrio rotacional para garantir o equilíbrio total. Em problemas de estática, devemos tanto traçar a condição de força resultante nula quanto a condição de torque resultando nulo para garantir o equilíbrio.

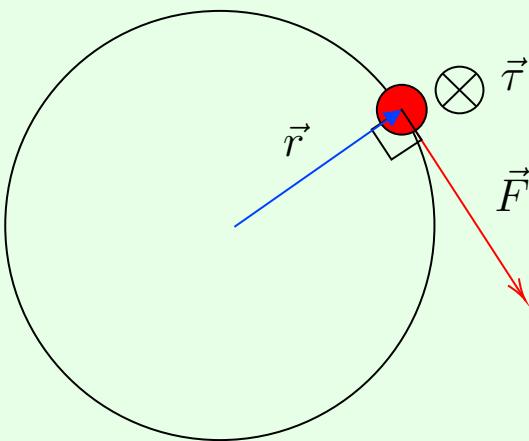
Vamos, então, aplicar nossos novos conhecimentos a alguns exemplos:

### Exemplo 15

No MCU estudo anteriormente, aponte o torque resultante do sistema. Caso o movimento fosse um MUV acelerando no sentido horário, em qual direção e sentido se aponta o torque?

### Solução 15

Como a força no MCU é radial, o produto vetorial entre ela e o vetor posição resulta em 0. Logo, o torque é nulo nesse caso. Contudo, no MUV, temos uma força tangencial constante no movimento, o que gera um torque. Pela regra da mão direita, percebe-se que o torque está "entrando" na folha. Veja a figura para entender melhor:



Em problemas de física, é bem comum usarmos o chamado **Teorema das 3 forças**, que afirma: "se um sistema está sobre a ação de 3 forças, ele apenas pode estar em equilíbrio se as forças são paralelas ou se encontram em um mesmo ponto". Não vamos detalhar muito ele aqui por ele não ser tão útil na astronomia, mas ele é uma aplicação interessante desse nosso conteúdo.

### Exemplo 16: Teorema das 3 forças

Demonstre o Teorema das 3 forças. Como ele se expande para um número n de forças? Discuta para n=2 e n=4.

### Solução 16

O torque total do sistema deve ser nulo. Para isso, temos duas opções: ou o produto vetorial entre cada uma das forças com o vetor posição é nulo, ou a soma destes produtos é nula. Vamos analisar então o problema por casos.

**Caso 1:** Todas as forças se encontrarão em um mesmo ponto. Essa é a única maneira de satisfazer a primeira opção, já que podemos sempre utilizar tal ponto como referência para o torque.

**Caso 2:** Se nenhuma das 3 forças não forem paralelas e elas não forem concorrentes (se encontram em um mesmo ponto), então podemos dizer com certeza que cada linha de força contém exatamente um ponto em comum com cada outra linha. Assim, se escolhermos qualquer um desses pontos como torque, a outra linha de força gerará um torque, que não pode ser cancelado já que eliminamos o torque das outras forças escolhendo um ponto pertencente às suas linhas. Assim, não ocorre o equilíbrio.

**Caso 3:** Duas forças são paralela, mas a outra não. Nesse caso, ainda podemos escolher um ponto concorrente entre duas linhas de força para usar como referência. Assim, utilizando a mesma argumentação do caso 2, aqui não ocorre o equilíbrio.

**Caso 4:** As três forças são paralelas. Nesse caso, os problemas vistos nos casos 2 e 3 não ocorrem. Então, é totalmente possível escolhermos o ponto de uma linha de força como referência e os outros dois torques se cancelarem. No entanto, aqui não há garantia de que eles

se cancelam como tivemos em. Estamos dizendo apenas que é possível, da mesma maneira que fala o enunciado do teorema.

Podemos tirar algo interessante sobre o último exemplo. Se nosso sistema fosse apenas um corpo pontual, não precisaríamos descrever a condição de torque. Logo, precisamos usar bastante o conceito de **corpo rígido** durante o nosso estudo sobre o torque.

### Lembrete 11

Existem problemas que podemos apenas resolver apenas por força, outros que precisamos usar força e torque, outros que podemos resolver por qualquer um dos dois jeitos...as possibilidades são ilimitadas. Isso sem contar outros recursos que podemos usar, como conservação de energia, teorema das 3 forças, trabalho virtual...existem realmente muitas maneiras diferentes de resolver um problema de estática. Com a realização de exercícios e o ganho de experiência, você vai ficando especialista em saber qual técnica é a melhor a se usar apenas lendo o enunciado, mas até lá tente ter pelo menos as principais(força, torque e energia) no seu arsenal.

#### 1.6.4 Momento angular

De maneira análoga a como vimos o momento linear na dinâmica tradicional, podemos definir o chamado **momento angular(L)**:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

Aonde  $\mathbf{p}$  é o momento linear que já conhecemos e  $\mathbf{r}$  é o vetor posição com respeito a uma referência, que escolhemos. Para facilitar nossa análise, normalmente escolhemos a mesma referência que usamos no torque(usaremos essa convenção durante o livro). Para um corpo de massa  $m$  e velocidade  $\mathbf{v}$ , podemos expandir a expressão como:

$$\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v}$$

Da mesma maneira que fizemos com o torque, podemos escrever propriedades análogas para o torque, mas não vamos repetir tudo aqui de novo, até porque queremos destacar outras propriedades especialmente importantes.

Vamos então derivar a definição de momento angular com respeito ao tempo, lembrando da regra da cadeia:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

Porém, como  $d\mathbf{r}/dt$  é a própria velocidade do corpo, seu produto vetorial com  $\mathbf{p}$  é nulo(já que ambos possuem mesma direção). Além disso,  $\tau = d\mathbf{L}/dt$  é o análogo do  $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$  para dinâmica rotacional. Logo, podemos compilar nossa análise na equação:

$$\tau = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

Um resultado que na verdade já tínhamos, já que é nossa definição de torque trazida no nosso capítulo anterior. Porém, aqui queremos trazer o foco para o momento angular, por isso vamos usar uma abordagem diferente. Para isso, definimos aqui forças centrais como forças da forma:

$$\mathbf{F} = A\hat{\mathbf{r}}$$

Aonde A é um escalar qualquer de dimensões adequadas. Então, aplicando uma força central na equação encontrada, percebemos que forças centrais não geram torque. Então, como não há torque resultante, o momento angular se conserva. Logo, podemos concluir:

Forças centrais conservam momento angular e não produzem torque

O que é algo muito importante para esse livro, já que **a força gravitacional é uma força central**. Ou seja, ao longo de sua órbita com respeito a uma estrela, podemos dizer que o momento angular de um planeta é uma constante, algo que nos ajuda a descobrir informações sobre pontos específicos de sua trajetória.

Contudo, além de tudo isso, podemos trazer uma discussão acerca dos efeitos de torques internos e externos no momento angular, que funcionam da mesma maneira que os efeitos que discutimos na seção de momento linear. Então, podemos dizer que o torque de um sistema se conserva quando não há torques externos, o que é basicamente o que já falamos antes.

**Keplener-** Adaptada Uma partícula de massa m está conectada ao fim de uma corda em uma região sem efeitos gravitacionais. Inicialmente, a corda está estendida e seu outro fim conectado dentro de um cilindro de raio R(ver figura a)). Uma força impulsiva é aplicada em m, que começa a rotacionar no plano da corda de forma que a distância x entre a massa e o centro do cilindro diminua.

a) Assumindo que inicialmente  $x=r$  e  $v=v_0$ , qual será a velocidade da partícula em função de de x? Explique se tanto a energia quanto o momento angular são conservados.

b) Se agora a corda fosse amarrada como na figura b), explique se tanto a energia quanto o momento angular são conservados.

Questão:

Considere uma mesa de sinuca que está no plano xy. Uma bola com seu centro localizado na origem do sistema de coordenadas possui massa m e raio R. Um força impulsiva(vinda de um taco) no eixo y é aplicada na bola, que sai com velocidade  $v_x \hat{x}$ . O rolamento é puro.

a) Sabendo que  $v_x$  é positivo, calcule o vetor velocidade angular da bola caso a força seja aplicada apontando para o centro da bola

- b) Indique o que acontecerá com a velocidade angular da partida e  $v_x$  se a força fosse aplicada, ao invés disso, aplicada em um ponto de coordenada x diferente de 0 e y ainda 0.
- c) Indique o que acontecerá com a velocidade angular da partida e  $v_x$  se a força fosse aplicada, ao invés disso, aplicada em um ponto de coordenada y diferente de 0 e x ainda 0.

### 1.6.5 Momento de inércia

Agora, finalmente vamos mostrar a "massa das rotações" e o "F=ma" para rotações. No entanto, eles não costumam cair muito em astronomia no nível estudado... por isso, não vamos nos prender muito a eles. Definimos o F=ma das rotações como:

$$\tau = I\alpha$$

Aonde  $\alpha$  é a já estudada aceleração angular e I é o que vamos chamar de **momento de inércia**. Ele possui o mesmo papel da massa na dinâmica tradicional, representando um elemento de inércia em relação a uma tentativa de mudança de estado de movimento. Porém, o momento de inércia é uma grandeza determinada pela maneira como a massa é distribuída pelo sistema, dependendo então também de distâncias com respeito a uma origem. Seguindo essa lógica, podemos também escrever o momento angular em função do momento de inércia:

$$\mathbf{L} = I\omega$$

Aonde  $\omega$  é já conhecida velocidade angular. Perceba que derivando com relação ao tempo essa última equação, voltamos para o "F=ma das rotações".

Os valores do momento de inércia podem ser definidos para vários sólidos diferentes, sendo alguns exemplos:

Corpo Rígido	Momento de Inércia
Círculo fino de raio $R$ , eixo central	$I = MR^2$
Cilindro homogêneo de raio $R$ , eixo central	$I = \frac{1}{2}MR^2$
Cilindro oco de paredes finas, eixo central	$I = MR^2$
Esfera homogênea de raio $R$ , eixo central	$I = \frac{2}{5}MR^2$
Haste fina de comprimento $L$ , eixo no centro	$I = \frac{1}{12}ML^2$
Haste fina de comprimento $L$ , eixo na extremidade	$I = \frac{1}{3}ML^2$

O cálculo desses momentos de inércia provavelmente não devem ser necessários nas fases mais inciais seletiva de astronomia, espera-se que eles sejam dados pela prova. Porém, vamos mostrar as

ferramentas de como calcular momentos de inércia apenas para melhor compreensão do conteúdo. Para partículas pontuais, podemos afirmar

$$I = \sum_i m_i r_i^2$$

Nesses casos, calcular o momento de inércia é até uma tarefa simples. Contudo, para corpos extensos, temos que estender a equação anterior para uma integral:

$$I = \int r^2 dm$$

Aonde  $dm$  é um diferencial de massa. É a partir dessa fórmula que calculamos os momentos de inércia mostrados como exemplo anteriormente. Como essas integrais são feitas para sólidos, geralmente é necessário utilizar um sistema de coordenadas diferente do usual para fazer as integrais, como o esférico, o cilíndrico e o polar. Nas próximas atualizações do livro, vamos colocar um apêndice para mostrar o assunto...depois disso, vamos adicionar exemplos práticos de cálculo desses momentos de inércia mais complicados.

### Exemplo 17: Apenas um aro

Determine o momento de inércia de um aro(ou anel) que possui massa  $M$  e raio  $R$  com respeito ao seu eixo de simetria. Considere a espessura do objeto desprezível.

### Solução 17

No começo, pode parecer que resolver esse problema deve precisar do uso de nosso segundo método para determinar momentos de inércia, o método da integração. E, realmente, você pode fazer o problema por isso, basta definir  $dm$  como a densidade linear de massa vezes o arco  $rd\theta$  e integrar  $\theta$  de 0 a  $2\pi$ . Substituindo tal densidade como  $M$  dividido pelo comprimento  $2\pi R$ , tem-se  $I=MR^2$ , que é a resposta correta. Porém, essa questão também pode ser resolvida sem cálculo facilmente...assuma que vamos realizar o somatório. Assuma que cada massa somada é  $\Delta m$ . Como cada uma está a uma mesma distância  $R$  do centro, a resposta é simplesmente a soma de todas as massas vezes  $R^2$ . Ou seja,  $I=MR^2$ , como esperado.

### Exemplo 18: P3 2022- Adaptada

Durante o tempo de vida na Sequência Principal, estrelas como o Sol perdem pouca massa devido ao vento estelar. No entanto, durante as fases posteriores da evolução de uma estrela, a taxa de perda de massa associada ao vento estelar pode aumentar significativamente.

Quando o Sol estiver nos seus estágios finais antes de se transformar em uma anã branca, espera-se que ele tenha apenas 55% de sua massa atual.

Suponha que o núcleo restante do Sol, no início do processo de colapso em uma Anã Branca,

tenha densidade  $\rho = 1,7 \times 10^5 \text{ kg/m}^3$  e período de rotação  $T = 8$  dias

Assinale a opção que apresenta o período aproximado de rotação da Anã Branca resultante, se ela tiver o raio final:

$$R = 8.500 \text{ km.}$$

Dado:

$$M_{\odot} = 1,99 \times 10^{30} \text{ kg.}$$

- a) 63 min
- b) 48 min
- c) 149 min
- d) 58 min
- e) 108 min

### Solução 18

Para resolver esse problema, vamos utilizar a conservação de momento angular. Vamos então, escrever o momento angular como  $L = I\omega$ . Como você talvez não lembra-se o momento de inércia de uma esfera, podemos supôr que ele será da forma  $\beta MR^2$ , onde o coeficiente  $\beta$  é  $2/5$ , porém não vamos precisar do valor dele. Perceba que tal fórmula, sem o coeficiente numérico, pode ser obtida por análise dimensional, já que o momento de inércia de uma esfera pode depender apenas de seu raio e sua massa.

Para um estudo mais detalhado sobre momento de inércia, veja o material específico sobre o assunto já produzido pelo [Olympic Birds!!!](#)

## 1.7 Referenciais não inerciais

### 1.7.1 A força de inércia

Voltando para os nossos conhecimentos de Leis de Newton, sabemos que um referencial inercial é um que não está acelerando. Porém, uma forma mais formal de definir um referencial não-inercial é dizer que, neles, **as Leis de Newton não funcionam como esperado**. Isso pode parecer algo surpreendente, já que boa parte da dinâmica que conhecemos depende das Leis de Newton. Porém, adicionando um novo termo na expressão da força, podemos "retomar" ao estado de normalidade e equacionar as forças na maneira que esperamos. Essa termo é o que chamamos de **força fictícia**, que possui esse nome por não existir nos referenciais inerciais. Porém, não se confunda: essas forças fictícias ainda são forças e você pode senti-las da mesma maneira (a nomenclatura pode gerar certo desentendimento às vezes).

Porém, como podemos descrever matematicamente essas forças? Bem, vamos começar imaginando um cenário: um corpo está sob a influência de várias forças, que culminam em uma resultante  $\mathbf{F}$ . No referencial terrestre, temos que o corpo acelera por meio de  $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$ . Porém, no referencial do próprio

corpo, o mesmo não acelera, mesmo que a força  $\mathbf{F}$  se mantenha a mesma. Então, chamando o nosso termo extra de  $\mathbf{F}'$ , temos:

$$\mathbf{F}' + \mathbf{F} = 0 \rightarrow \boxed{\mathbf{F}' = -m\mathbf{a}}$$

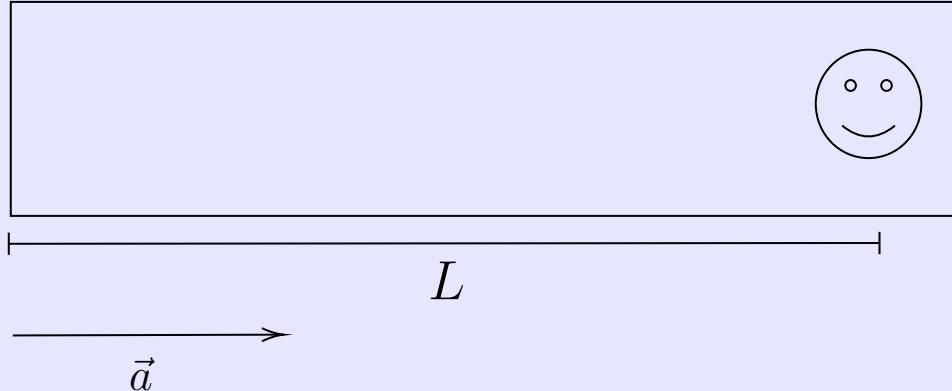
Uma fórmula que já vai servir para a muitos dos nossos problemas envolvendo forças não inerciais.

### Lembrete 12

Perceba que em nossa demonstração, supomos que  $\mathbf{F}$  é invariante frente à mudança de referencial. Fizemos isso pelo fato de quase todas as forças seguirem esse modelo, já que dependem apenas de variáveis também invariantes (como deslocamento, carga...). Porém, caso já tenha estudado eletromagnetismo, perceba que existe uma exceção: a força magnética, que depende de um produto vetorial da velocidade. E, realmente, a força magnética muda com o referencial. Porém, conseguimos sim adaptar esse caso para modelar problemas de magnetismo em diferentes referenciais, porém isso envolve muita relatividade e eletromagnetismo, que não são foco desse livro.

### Exemplo 19: Késsya na nave

A astronauta Késsya está em uma nave preste a acelerar, de maneira constante (mas que começa instantaneamente), para frente no meio do espaço sideral. Ela, infelizmente, estava flutuando na hora do lançamento, o que fez ela ser jogada para trás pela força de inércia (o certo era ficar em um assento com cinto de segurança, porém ela não sofreu ferimentos graves).



- Descreva a visualização do movimento consequente nos referenciais do vácuo, da Nave e de Késsya.
- Encontre o tempo que Késsya demora até chegar ao outro lado da nave, em função da aceleração da nave  $a$  e o comprimento  $L$  entre a parede da nave e a astronauta (considere que Késsya possui dimensões desprezíveis).
- Como o movimento seria se o mesmo fosse visto por um observador no Planeta Terra?

### Solução 19

a) No momento imediatamente antes da aceleração, todos os referenciais tem a mesma visualização. Quando a aceleração começa, apenas o estado da nave muda de estado, então os referenciais do vácuo e da astronauta são iguais. Neles, a nave está se movendo em direção à Késsya com aceleração  $a$ . Porém, no referencial da nave, a força não inercia faz com que Késsya e o vácuo é que estejam se aproximando com aceleração  $a$ .

b) O tempo pode ser encontrado pela equação de um MRUV,  $t = \sqrt{\frac{2L}{a}}$ .

c) É importante ter muito cuidado nesse item, pois a Terra possui um movimento próprio(tanto de rotação quanto de translação) que impede ele de ser um referencial igual ao vácuo. Por isso, outras forças não-iniciais podem ser envolvidas e a análise pode ficar bem complicada. Porém, fatores muito relevantes aqui são os valores numéricos da aceleração da nave e de sua velocidade no momento, já que eles vão competir com os parâmetros da Terra no sistema de forças. Por isso, não podemos afirmar muito sobre a visualização do movimento, mas é muito interessante pensar sobre como a visão de um movimento pode mudar tanto dependendo do referencial escolhido. Então, tal mudança pode tanto complicar muito a dinâmica do problema quanto facilitar muito as equações e visualizações.

### 1.7.2 Força centrífuga

A força centrífuga é a força não-inercial que aparece quando estamos diante de curvas, como quando o um passageiro sente ser jogado para um canto quando um carro realiza uma curva. Usando a expressão para aceleração centrípeta que encontramos anteriormente, podemos juntar com o que aprendemos na última seção para obter a aceleração centrífuga:

$$\mathbf{a}_{\text{centrífuga}} = -\mathbf{a}_{\text{centrípeta}} = v^2/R\hat{\mathbf{r}} = \omega^2 R\hat{\mathbf{r}}$$

Onde  $\hat{\mathbf{r}}$  é o versor radial,  $v$  é a velocidade tangencial e  $R$  é o raio de curvatura. Percebe que a força aponta radialmente, o que gera uma tendência de jogar os corpos para posições mais distantes do centro(daí vem seu nome). Então, vamos realizar alguns problemas para aprender sobre como aplicar essa força.

#### Exemplo 20: O Balde de Newton

Considere um recipiente cilíndrico muito longo com água em seu interior. Ele gira com uma velocidade angular  $\omega$  em torno de seu eixo axial. Seja  $r$  a distância até o centro e  $z$  a altura do líquido com respeito ao ponto mais baixo(onde  $z=0$ ).

- a) Obtenha uma expressão para a energia potencial centrífuga de um pequeno volume de água com massa  $m$ , quando analisamos o sistema no referencial girante
- b) Sabendo que a superfície de água deve ser uma equipotencial de energia, obtenha  $z$  como função de  $r$ . Que formato o líquido faz dentro do cilindro?

## Solução 20

a)

Usando o fato da força ser potencial, podemos escrever:

$$F = -\frac{dU}{dx} \rightarrow U = - \int_0^r m\omega^2 x = -\frac{m\omega^2 r^2}{2}$$

b) Podemos igualar a energia no ponto analisado com a do ponto  $r=z=0$ . Assim:

$$-\frac{m\omega^2 r^2}{2} + mgz = 0 \rightarrow z = \frac{\omega^2 r^2}{2g}$$

O que, em 2D, é uma equação de parábola. Porém, considerando a tridimensionalidade do sistema, temos que a água forma um paraboloide.

Existem várias formas de forças não inerciais, como a força de Coriolis, que possuem ótimas aplicações em astronomia. Porém, se alguma delas aparecer, o problema muito provavelmente deve te guiar sobre as fórmulas e conceitos, já que tais conhecimentos não são normalmente aprendidos/necessários no nível estudado

## 1.8 Movimento Harmônico Simples (MHS)

### 1.8.1 Movimentos periódicos

O Movimento Harmônico Simples(MHS) é um movimento que aparece frequentemente em problemas de física e algumas vezes em problemas de astronomia. Ele é um movimento totalmente diferente dos quais o que já estudamos pelo fato dele ser **periódico**. Então, antes de estuda-lo, devemos primeiro conhecer as propriedades de um movimento periódico. Movimentos periódicos são muito importantes na física, principalmente no estudo de ondas, então não se surpreenda em encontrar parte do que vamos aprender em outros conteúdos

Podemos, então, definir um movimento periódico através da seguinte propriedade: cada configuração  $y(t)$  do movimento se repete a cada tempo  $T$ :

$$y(t + T) = y(t)$$

Aonde  $T$  é o que vamos chamar de **período** do movimento. Ou seja, é o tempo que demora para o movimento realizar um ciclo. Além disso, chamamos o inverso do período de **frequência**:

$$f = \frac{1}{T}$$

Fornecemos esse nome pelo fato da frequência significar o número de ciclos dentro de um segundo(quando em Hz, como vamos ver).

Para entender melhor esses conceitos, pense por exemplo em um movimento com  $T = 0,5$  s. Então, a cada 1 segundo, 2 ciclos são realizados. Por isso, afirmamos que a frequência é 2/s. Chamamos então 1/s de uma nova unidade: Hertz(Hz). É importante frisar que a frequência não precisa estar em Hz, existem outras unidades para ela, como o RPM(Rotações Por Minuto). Contudo, em astronomia, geralmente apenas o Hz é usado.

Agora que entendemos os conceitos básicos sobre movimentos periódicos, surge a pergunta: *quais funções  $y(t)$  seguem tal propriedade?* Podemos atacar o problema por **funções trigonométricas**. Olhando para o ciclo do trigonométrico, sabemos que uma volta completa significa um ângulo de  $2\pi$  radianos. Logo, podemos escrever para qualquer função trigonométrica:

$$f(\theta + 2\pi) = f(\theta)$$

O que satisfaz o tipo de função que estávamos procurando. Porém, ainda há um problema: funções trigonométricas devem ser tiradas por meio de ângulos, que não possuem unidades de medida. Ou seja, se quisermos trocar a função para ficar em função de t, devemos adicionar uma constante para acompanhar t que tenha dimensão de 1/s rad. Chamamos esta constante de **velocidade(ou frequência) angular( $\omega$ )**. Surge, é claro, o questionamento: por que usamos os mesmos nomes e símbolos que vimos no capítulo de rotações? Porque na verdade, estamos descrevendo o mesmo fenômeno, mas de maneiras diferentes. Podemos descrever um movimento circular por meio de velocidades, podem também escrever-lo por meio da posição como função do tempo. Porém, esse também é um movimento periódico! Por isso, podemos escrever que a posição de uma partícula em movimento circular pode ser dada por uma função trigonométrica dependente do tempo multiplica por uma amplitude! Você pode tentar visualizar isso melhor por meio do exemplo:

### Exemplo 21: Coordenadas de um movimento circular

Para o movimento circular descrito na figura abaixo(que começa em  $t=0$  s), determine as coordenadas da partícula  $x(t)$  e  $y(t)$  caso ela:

- Comece seu movimento no ponto A.
- Comece seu movimento em um ponto B qualquer que se localiza por um ângulo  $\phi_0$  com respeito ao ponto A.

### Solução 21

- Vamos supor que em um certo tempo t a partícula se localiza em um ponto P, localizado por um ângulo  $\theta$  com respeito ao ponto A. Logo, podemos decompor o vetor posição da partícula por meio de trigonometria padrão:

$$x(t) = R \cos \theta$$

$$y(t) = R \sin \theta$$

Então, basta descobrir  $\theta$  como função do tempo para encontrar as coordenadas. Lembrando

da cinemática angular, podemos escrever

$$\Delta\theta = \omega\Delta t \rightarrow \theta = \omega t$$

Então, podemos escrever:

$$x(t) = R\cos(\omega t)$$

$$y(t) = R\sin(\omega t)$$

De mesma maneira que vimos na nossa análise sobre movimentos oscilatórios.

b)

Aqui, a única mudança é que  $\Delta\theta = \theta - \phi_0$ . Logo, o resultado será:

$$x(t) = R\cos(\omega t + \phi_0)$$

$$y(t) = R\sin(\omega t + \phi_0)$$

Aonde  $\phi_0$  é o que conhecemos como **fase inicial**, enquanto  $\theta$  é chamado apenas de **fase**. Perceba que a fase inicial normalmente não altera a física do problema: as funções continuam a apresentar o mesmo comportamento, a fase apenas é uma maneira de ajustá-las às condições de contorno do problema.

Algo interessante de se comentar é que se as amplitudes de cada eixo fossem diferentes, teríamos uma elipse! Por curiosidade, saiba que você pode descobrir propriedades importantes da elipse (como semi-eixo maior e menor) a partir dessas informações.

Então, podemos concluir que em Movimentos Harmônicos Simples devemos esperar um função da forma:

$$x(t) = A\sin(\omega t + \phi_0)$$

Aonde A é que vamos chamar de **Amplitude**, o valor máximo que a função pode assumir. Você também poderia se perguntar o porquê usamos seno para descrever a função, quando, pela nossa análise, uma função cosseno também seria possível. Nesse caso, perceba que esse detalhe é ajustado pela fase inicial, o que nos permite supor qualquer uma das duas funções no começo da nossa análise. Se, por exemplo, encontrarmos  $\phi_0 = 90^\circ$ , a função será dada por  $\text{Acos}(\omega t)$ , como podemos descobrir olhando o ciclo trigonométrico ou desenvolvendo a fórmula do cosseno da soma de ângulo.

Contudo, como podemos calcular  $\omega$ ? Bem, podemos fazer isso por condições de contorno. Em  $t = T$ , temos que  $\omega T = 2\pi$ , já que é dada uma volta no ciclo trigonométrico. Então, podemos sempre calcular  $\omega$  pela equação:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

### Exemplo 22: Estudando ondas

Dentro da física, ondas normalmente são definidas como perturbações que transportam energia, mas não matéria. Uma onda pode se movimentar ao longo do eixo x como mostrado na figura:

a) Mostre que a velocidade de propagação da onda é dada por  $v = \lambda f$ , aonde  $\lambda$  que está mostrado na figura é chamado de comprimento de onda.

b) Em ondas, é comum definirmos o número de onda como  $k = 2\pi/\lambda$ . Escreva, então a velocidade de propagação da onda como função de k e  $\omega$ .

### Solução 22

a) A velocidade de propagação da onda é a sua velocidade no eixo x. A velocidade média da onda por ser facilmente descoberta como o comprimento de onda(distância) sobre período(tempo). Como a velocidade da onda é constante, a velocidade média é a velocidade de propagação(para aparecer a frequência, use o fato que  $f=1/T$ )

b) Multiplicando  $\omega$  e  $k$ , os fatores de  $2\pi$  se cancelam formando  $\lambda f$ . Logo,  $v = \omega k$

Contudo, em nossos estudos de MHS, esse conceito de velocidade de propagação não será tão útil. Ao invés disso, estamos mais interessado na velocidade na direção de oscilação em cada instante do movimento(seria o  $v_y$  do nosso último exemplo). Para isso, podemos apenas derivar a posição com respeito ao tempo:

$$x = A \sin(\omega t + \phi_0) \rightarrow v = \dot{x} = \omega A \cos(\omega t + \phi_0)$$

Aonde x. é a notação que vamos usar para "derivada de x com respeito a tempo". Se, então, derivamos x duas vezes com respeito ao tempo, teríamos x.. e assim por diante. Essa notação é amplamente usada por físicos e matemáticos, então se surpreenda em encontrar-la em vários outros locais. Contudo, não precisávamos ter derivado a função: olhando nossa analogia com ciclo trigonométrico, poderíamos decompor a velocidade tangencial em x e y para assim obter o mesmo resultado. Porém, a notação com cálculo é mais abrangente e direta: você não precisa pensar muito, basta fazer a derivada da função e o problema já está resolvido(além de treinar a assimilação de cálculo na solução de problemas). O mesmo vale para aceleração, que podemos escrever:

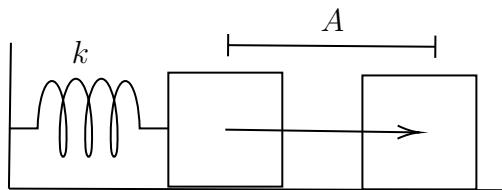
$$\ddot{x} = \dot{v} = -\omega^2 A \sin(\omega t + \phi_0)$$

Mas que também pode ser demonstrada decompondo a aceleração radial de um movimento circular. Inclusive, o uso desse exemplo é uma ótima maneira de demonstrar derivadas de seno e cosseno, caso você ainda não tenha se acostumado com elas.

#### 1.8.2 Aparecendo o MHS

O Movimento Harmônico Simples pode ser definido como qualquer movimento periódico que siga os padrões que vimos na seção passada. Assim, já temos muito conhecimento sobre tal movimento. Por isso, o foco desta seção será na verdade responder **como surge** um MHS na física. Vamos, então, para o caso mais básico: uma massa m está ligada a uma mola de constante elástica k, que

também está conectada a uma parede fixa, tudo em uma região sem atrito. Inicialmente, a mola está relaxada. Porém, o bloco é distanciado em A de sua posição inicial, sendo depois liberado do repouso nesta mesma posição. Como podemos descrever a posição do bloco como função do tempo? Olhe a figura:



Podemos então escrever a Segunda Lei de Newton para o sistema, usando a notação de derivada apresentada:

$$m\ddot{x} = -kx \rightarrow \ddot{x} = -\frac{k}{m}x$$

Contudo, reveja a equação da aceleração de um MHS. Perceba que uma função trigonométrica com  $\omega^2 = k/m$  soluciona perfeitamente a equação mostrada. Além disso, usando a condição inicial de  $x=A$  em  $t=0$ , vemos que a fase inicial é ajustada de forma que a função seja um cosseno. Logo, temos:

$$x(t) = A\cos(\omega t), \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Que é o resultado que queríamos. Porém, perceba: resolvemos aqui uma equação da forma  $\ddot{x} = -\alpha^2 x$ , mas x não precisava ser necessariamente a posição de uma partícula. Ela poderia ser **qualquer** variável, o que faz a nossa solução ser bem geral. Assim, para qualquer problema físico nos qual nos deparamos com uma equação desse tipo, já temos a solução dela na mão. Podemos, informalmente, dizer que é "um MHS na variável x". Porém, voltando apenas para analogias na posição, podemos então definir um "k equivalente" para cada caso, aonde este seria a constante que acompanharia a posição na força resistiva.

Além disso, se derivarmos a expressão com respeito ao tempo, temos a velocidade de uma MHS:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d(\omega t)} \frac{d(\omega t)}{dt} = -A\omega \operatorname{sen}(\omega t)$$

Isso além da aceleração, que pode ser obtida tanto derivando a velocidade quanto partindo da equação dinâmica do MHS:

$$a = \omega^2 x = -A\omega^2 \operatorname{sen}(\omega t)$$

### Exemplo 23: Pêndulo simples

Demonstre que o período de um pêndulo simples de comprimento  $l$  em pequenas oscilações é  $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ , onde  $g$  é a aceleração da gravidade.

### Solução 23

A coordenada onde ocorre o movimento harmônico é o ângulo  $\theta$  com respeito com a vertical. Decompondo a gravidade a partir dos ângulos em componentes radiais e tangenciais, temos o seguinte sistema de equações do movimento:

$$T - mg\cos\theta = m\omega^2 l$$

$$mg\sin\theta = ml \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Porém, apenas a segunda equação será necessária(nela, a aceleração tangencial foi substituída pelo resultado encontrado em cinemática das rotações). Aproximando  $\sin\theta$  para  $\theta$  já que as oscilações são pequenas, temos:

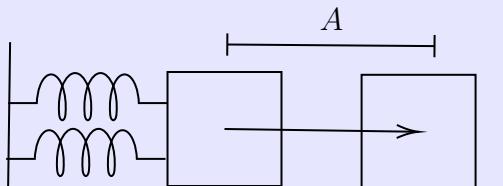
$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\theta$$

Comparando com o que aprendemos, encontramos o  $\omega$  de oscilação como sendo a raiz quadrada da divisão entre  $g$  e  $l$ . Usando a relação entre velocidade angular e período, encontra-se o resultado desejado

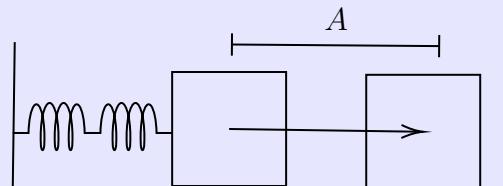
### Exemplo 24: Associações de molas

Um bloco de massa  $m$  está distante em  $A$  de sua posição de equilíbrio, no problema da mola conectada à parede, dentro de uma região plana e sem atrito. Diante desta situação, Ramanuja irá tentar investigar a associação de molas através de seus conhecimentos sobre MHS. A constante elástica de todas as molas vale  $k$ .

*Arranjo 1*



*Arranjo 2*



a) Calcule o período de oscilações do movimento em cada arranjo. Qual seria o "k equivalente" de cada situação?

b) Faça, agora, para 3 molas em paralelo(arranjo 1 modificado) e 3 molas em série(arranjo 2 modificado). Depois, generalize para  $n$  molas em paralelo e  $n$  molas em série.

c) Como ambas as análises ficariam para os "comprimentos relaxados" equivalentes? Generalize

os resultados.

### Solução 24

a) No arranjo 1, cada mola realiza a sua força elástica de maneira igual e independente. Assim, a força total será apenas a soma das duas forças. Por isso, o "k equivalente" seria  $2k$ . Contudo, no arranjo 2, temos que as forças são iguais e os deslocamentos se somam. Assim:

$$\frac{1}{keq} = -\frac{x}{F} = -\frac{x_1 + x_2}{F} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \rightarrow keq = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} = \frac{k}{2}$$

b) Repetindo o mesmo processo, temos que no arranjo 1,  $keq=3k$ . Assim, considerando que  $k$  é o mesmo para todas as molas, temos que  $keq=nk$ . Se cada  $k$  fosse diferente, é interessante ressaltar que basta somar cada  $k$ . Porém, no arranjo 2, temos:

$$\frac{1}{keq} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \dots = n \frac{1}{k} \rightarrow keq = \frac{k}{n}$$

Para  $n=3$ , tem-se o caso particular pedido. Perceba que se cada  $k$  fosse diferentes, realiza tal soma poderia ser uma tarefa bem mais complicada.

c) Como cada mola é independente no aparato 1, o comprimento relaxado equivalente é simplesmente o comprimento relaxado padrão. Porém, no aparato 2, os comprimentos relaxados devem somar até obter o comprimento equivalente, já que a mola equivalente vai preencher o mesmo espaço da série de molas.

### 1.8.3 Análise energética

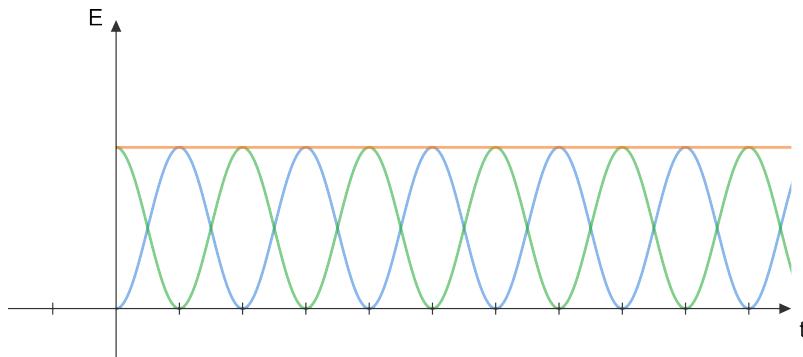
Aqui, fizemos toda nossa análise por meio de forças. Porém, também podemos descobrir essas informações por meio de energia. Então, voltemos para o problema da massa com a mola que vimos anteriormente. Para isso, escrevamos a energia mecânica do sistema:

$$E_m = E_c + E_p = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2}$$

Assim, como consideramos que não existem dissipações energéticas, podemos fazer um gráfico representando cada energia como função da posição da massa (lembrando dos resultados para posição e posição de um MHS). Veja:

Onde o traço verde representa a energia potencial, o traço azul a energia cinética e o traço laranja a energia mecânica do sistema. Analisando um máximo verde e comparando com um máximo azul e com a energia mecânica, podemos perceber que:

$$E_m = \frac{kA^2}{2} = \frac{mv_{max}^2}{2}$$



Aonde  $v_{max}$  seria a velocidade máxima atingida pela partícula. Então, conhecendo a energia mecânica, muitas vezes conseguimos descobrir imediatamente a amplitude e velocidade máxima do movimento. Lembre-se que, pela equação da velocidade,  $v_{max} = \omega A$ , então com essas duas informações podemos também obter a frequência angular do movimento. Porém, queremos uma equação mais direta para obter a frequência angular. Perceba, que para toda força resistiva da forma  $-bx$ , podemos integrar a força para obter sua energia potencial na forma:

$$U = \frac{bx^2}{2}$$

Para *qualquer* b, que é o nosso "k equivalente" que vimos anteriormente. Porém, caso fossemos derivar essa energia duas vezes com respeito a posição (usemos a notação U'' para isso), podemos escrever:

$$U'' = b = k_{eq}$$

Logo, podemos escrever a frequência angular de oscilações como sendo:

$$\omega = \sqrt{\frac{U''}{m}}$$

O que é uma fórmula muito útil em diversas situações.

### Lembrete 13: Demonstração por série de Taylor (conteúdo do apêndice)

Considere um objeto unidimensional sujeito a um potencial  $V(x)$ . Se ele está inicialmente a um mínimo local e é cutucado, agora está sujeito a oscilações ao redor do ponto de equilíbrio, existem algumas coisas que podemos concluir sobre esse movimento. Para a aproximação de pequenas oscilações o movimento é um MHS e a frequência pode ser facilmente achada. Expandindo a série de Taylor ao redor do ponto de equilíbrio  $x_0$ :

$$V(x) = V(x_0) + V'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}V''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{3!}V'''(x_0)(x - x_0)^3 + \dots$$

Mas  $V(x_0)$  é uma constante irrelevante e tende a zero.  $V'(x_0) = 0$  por definição de ponto de equilíbrio. Dai, além de  $\frac{1}{2!}V''(x_0)(x - x_0)^2$  os outros termos são desprezíveis devido ao fator  $(x - x_0)$  que vai se tornando maior. Sobra:

$$V(x) \approx \frac{1}{2}V''(x_0)(x - x_0)^2$$

Que pode ser comparado com  $V_{elastica} = \frac{1}{2}kx^2$ . Analogamente  $k = V''(x_0)$  e como  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{V''(x_0)}{m}}}$$

## Ideia 2: Condição de estabilidade

Perceba que o  $\omega$  apenas pode existir se  $V''$  for maior que 0. Essa é a condição de **estabilidade do sistema**. Porém, o que um sistema estável? É um sistema que, após passar por mudança, tende a tentar reverte-la. Então, no caso básico da mola por exemplo, ao mudarmos sua posição(mudança) ela tenta voltar para seu estado de equilíbrio(reverter mudança). É por isso que a força em um sistema massa-mola tenta sempre apontar para a posição de equilíbrio! Essa ideia também pode ser interpretada pelo gráfico do potencial pela "mudança"(geralmente, a posição). Se o gráfico possuir um mínimo, então o sistema pode ser estável(pelo menos em uma certa região), já que existe um estado de equilíbrio do qual o sistema quer alcançar(um mínimo de potencial). Perceba que saindo disso, encontramos que a segunda derivada da função deve maior que 0 como esperado(pelo menos da região de interesse!).

Essa ideia é muito importante para o estudo do **potencial efetivo** de uma órbita, presente no capítulo 2. Isso além de se complementar bem com o lembrete 4 da seção 1.4.1.

## Exemplo 25: Pêndulo novamente

Demonstre a novamente a equação do pêndulo simples, mas agora por análise energética.

## Solução 25

A energia potencial, usando como referência o ponto mais inferior do pêndulo, é  $mgl(1-\cos\theta)$ . Derivando-se duas vezes com respeito ao ângulos e usando a aproximação, temos  $U''$  como  $mgl$ . Porém, aplicando na fórmula encontrada, não aparece o resultado desejado...qual é o problema? O problema é que a fórmula anterior trata sobre uma oscilação em coordenada espacial, por isso o termo debaixo da fração é apenas  $m$ . O mais geral seria dizer que tal termo é o coeficiente que acompanha o quadrado da derivada da coordenada no tempo dividida por 2. Como  $v=o.l$ , esse termo é  $ml^2$ . Aplicando agora a expressão com nossa correção, chegamos no resultado para  $\omega$ . Fazendo  $T=2\pi/\omega$ , chega-se no resultado desejado.

## 1.9 Técnicas especiais

### 1.9.1 Análise dimensional

Desde do começo do estudo em física, entende-se que "as dimensões devem concordar". Ou seja, não podemos somar metros com gramas, ou Kelvin com segundo...isso simplesmente não faz sentido, já que o resultado final teria dimensão indefinida. Porém, com as devidas transformações de unidades, podemos sim somar metros com quilômetros, ou Kelvin com Graus Celsius...o que diferenciam ambos os casos? Para compreender isso, precisamos primeiro aprender as **unidade fundamentais da física**. Elas possuem esse nome pelo fato da dimensão de qualquer quantidade física poder se expressar a partir de uma combinação desses fatores independentes, sem preocupações com fatores adimensionais. Essas quantidades, junto com seus símbolos quando usado em análise dimensional e importância, estão na tabela:

Unidade Fundamental	Símbolo
Metro (Comprimento)	m ou L
Segundo (Tempo)	s ou T
Quilograma (Massa)	kg ou M
Kelvin (Temperatura)	K
Ampère (Corrente Elétrica)	A
Mol (Quantidade de Substância)	mol
Candela (Intensidade Luminosa)	cd

Tabela 1: As 7 Unidades Fundamentais do Sistema Internacional

Então, podemos representar qualquer dimensão física como:  $k[M]^a[L]^b[T]^c[K]^d[A]^e[mol]^f[cd]^g$  onde a, b, c, d, e, f e g são constantes a descobrir e k é uma constante adimensional. Na maioria dos problemas, podemos por motivos lógicos já zerar a maioria desses expoentes, então você não precisa se preocupar em sempre escrever todos(nesse caso, podemos omitir as [] com expoente nulo). Logo, nessa notação, podemos dizer que a velocidade é  $v = [L]^1[T]^{-1}$ , um Newton é  $N = [M]^1[L]^1[T]^{-2}$  e assim por diante.

### Ideia 3: Coerência das dimensões

As dimensões, na notação apresentada, devem sempre concordar se forem dois lados de uma equação, além de concordar na soma ou subtração. Por isso, sempre checar as dimensões em suas contas é uma ótima maneira de evitar erros. Essa ideia é fácil de visualizar, mas caso você queira provar mais formalmente, suponha que os lados possuem dimensões diferentes. Assim, você poderia cortar dimensões semelhantes em ambos os lados, chegando no resultado que uma combinação de dimensões fundamentais com expoentes não nulos é algo adimensional, o que não faz sentido.

Porém, como podemos usar isso para nos ajudar na resolução de problemas? Bem, dependendo da quantidade de valores físicos que a questão entrega, as vezes apenas uma única combinação destes é dimensionalmente correta com a o valor pedido. Ou seja, o valor pedido é uma constante adimensional vezes essa combinação de variáveis, o que já nos permite encontrar bastante informações úteis e até descobrir a constante adimensional no futuro.

### Exemplo 26

A partir da dimensão da Constante Gravitacional G, mostre que a força gravitacional deve ser inversamente proporcional ao quadrado da distância. Por que nenhum físico usou esse fato para descobrir a Lei da Gravitação Universal?

### Solução 26

Primeiramente, vamos encontrar a dimensão de G, por meio da fórmula que já conhecemos:

$$G = \frac{F \cdot r^2}{Mm} = N[L]^2[M]^{-1} = [M]^{-1}[L]^3[T]^{-2}$$

Então, agora vamos pensar no problema de maneira reversa, sabendo apenas que G deve aparecer na expressão da força por ser uma constante importante. Como não existe outra constante física fundamental relevante para o problema(como velocidade da luz, constante de plank...), podemos dizer que as dimensões extras de massa e comprimento aparecem por causa de características envolvendo os corpos envolvidos. Assim, fica fácil ver que a força deve ser inversamente proporcional ao quadrado da distância, já que, para corpos muitos distantes, essa é a única com quantia com tal dimensão que poderia ser relevante. Porém, nenhum físico usou esse argumento por eles não saberem que G era uma constante física fundamental antes da gravitação de Newton. Analogamente, poderíamos também demonstrar a terceira Lei de

Kepler por esse raciocínio(é um ótimo exercício).

### Exemplo 27: Ondas em cordas(F=ma 2018 - Adaptada)

Um círculo formado por corda gira com uma velocidade angular  $\omega_0$ . As ondas na corda têm velocidade  $v_0$  em um certo referencial. Se a velocidade angular da corda for duplicada, qual será a nova velocidade das ondas?

#### Solução 27

Podemos assumir, tanto por intuição física quanto pelos dados fornecidos pela questão, que a velocidade dependerá apenas de  $\omega$  e  $L$ . Então, por análise dimensional, chegamos na equação:

$$v = \alpha\omega L$$

Onde  $\alpha$  é uma constante adimensional. Logo, a como  $L$  é constante, a razão entre as velocidades será a razão entre as velocidades angulares, o que resulta em  $v = 2v_0$ .

### Exemplo 28: Frequênciade uma estrela(Kevin Zhou - Adaptado)

Sabe-se que a frequência característica  $f$  de uma estrela vibrante pode depender apenas da constante gravitacional  $G$ , do raio  $R$  da estrela e da densidade  $\rho$  da estrela.

a) Estime uma fórmula para a frequência característica.

b) Estime o valor da frequência característica do sol. Utilize os valores:  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} Nm^2kg^{-2}$ ,  $R = 695700km$  e  $\rho = 1,41g/cm^3$

#### Solução 28

a) Como queremos apenas uma estimativa, vamos apenas descobrir a dependência da frequência com as quantias dadas(como desvantagem, não vamos obter com precisão a constante adimensional relacionada). Então anotemos as dimensões:

$$R = [L]$$

$$\rho = [M][L]^{-3}$$

$$G = Nm^2kg^{-2} = \frac{m^2kgm}{kg^2s^2} = \frac{m^3}{kg s^2} = [M]^{-1}[L^3][T]^{-2}$$

Porém sabemos que  $f = G^a \cdot R^b \cdot \rho^c = [M]^0[L]^0[T]^{-1}$ . Logo, usando as dimensões que já obtemos, encontramos o sistema:

Resolvendo, obtemos  $a=1/2$ ,  $b=0$  e  $c=1/2$ .

b) Realizando a conta, temos:

$$f = 3,07 \cdot 10^{-4} Hz$$

Para os curiosos, a questão 1 da IPHO(Olimpíada Internacional de Física) de 2007 trata de diversas aplicações da análise dimensional em buracos negros. No geral, a questão não cobra conceitos de física avançados, sendo focada principalmente nessa parte da análise dimensional, então ela é ótima para treinar esse conteúdo.

### 1.9.2 Intuição física

#### Exemplo 29: Resistência do ar

Trucas Laça, um cientista do mau, prende você em um laboratório. Para sair dele, você deve responder corretamente algumas perguntas. Assuma que a força de resistência do ar se apresenta da forma  $\mathbf{F} = -bv$ , aonde  $b$  é uma constante de dimensões adequadas.

- a) Para um corpo de massa  $m$ , encontre a velocidade terminal em um movimento de queda livre(com velocidade inicial nula). Considere que a queda dura infinitamente(não se preocupe com um possível encontro entre a massa e o chão).
- b) Trucas pede para você calcular a velocidade como função do tempo. Porém, ele decidiu ser gentil com você e disse que a função é uma entre essas:

$$v(t) = \frac{mg}{b}$$

$$v(t) = \frac{mg}{b}(1 - e^{-bt/m})$$

$$v(t) = \frac{2mg}{b}(1 - e^{-bt/m})$$

Encontre e explique qual é a função correta.

#### Solução 29

- a) No momento inicial, a força de resistência é nula, já que não há velocidade. Porém, ela começa a crescer junto com a velocidade do corpo, o que faz com que o corpo comece a acelerar menos. Assim, o processo continua até a força peso se igualar com a força de resistência, gerando um movimento retilíneo uniforme. Para isso:

$$mg = bv_t \rightarrow v_t = \frac{mg}{b}$$

- b) Vamos analisar cada função partindo de nossa técnica sobre análise de funções.
- I) A função obedece as condições de contorno para  $t = \infty$ , mas não para  $t = 0$ (aonde  $v$  deve ser 0). Além disso, sabemos pela física do problema que a dependência funcional ao longo do tempo não é satisfeita para uma função constante
- II) A função obedece as condições de contorno para  $t = \infty$  e  $t = 0$ , além de apresentar uma

dependência com um tempo coerente com a física esperada. Podemos explicar isso da seguinte forma: pela dependência exponencial, a velocidade cresce muito no começo, mas depois vai aumentando cada vez menos até convergir em um valor terminal, que é exatamente aquele que calculamos no item a).

Já no último problema, experimentamos um dos costumes mais bem estabelecidos na física: os **testes de resultado**. Ao realizar uma questão e obter um resultado final, que será uma função de outras variáveis, este deve concordar com a física do mundo real em torno de todos os valores possíveis a serem dados às variáveis. Então, testar o seu resultado de diferentes maneiras é uma ótima forma de conferir que ele está correto. Por outro lado, esta a maior vantagem dessa técnica é detectar **respostas erradas**, algo que pode ser crucial durante provas. Em alguns momentos, você pode errar uma questão simples por um simples erro de interpretações, então arranjar formas eficientes de checar se você entendeu o problema corretamente é por meio destes testes. Contudo, para realizar os testes, você precisa ter em sua mente **intuição física e casos particulares conhecidos**. Para isso, resolver muitas questões é algo que ajuda muito, pois elas são ótimas para ampliar seu conhecimento de mundo.

#### Lembrete 14

Para quase todo conteúdo, existem questões com vários possíveis objetivos diferentes. Por exemplo, elas podem focar em: ampliar seu conhecimento, *testar* seu conhecimento, melhorar o seu método de resolução ou apenas treinar treinar você para provas específicas, aonde poupar tempo é essencial. Assim, é importante identificar qual é o estilo da questão no momento que você a vê para encontrar a solução buscada. Porém, também é importante entender qual é o tipo de questão que *você* mais busca treinar para assim se manter mais focado em seus objetivos. Contudo, no geral, recomenda-se você tentar desenvolver todas essas habilidades desenvolvidas pelos diferentes tipos de questões, já que, no geral, todas são úteis durante as provas da seletiva de astronomia.

#### Exemplo 30: Força de resistência (Morin-Adaptado)

Uma partícula de massa  $m$  e velocidade inicial  $v$  está sujeita a uma força de amortecimento dependente da velocidade da forma  $bv^n$ .

- Para  $n = 0, 1, 2, \dots$ , determine como o tempo de parada e a distância de parada dependem de  $m$ ,  $v$  e  $b$ .
- Verifique se esses resultados fazem sentido ao variar  $m$ ,  $v$  e  $b$  para alguns valores de  $n$ . Você deve encontrar algo intrigante. (Dica: para resolver o problema, pode ser útil encontrar o tempo de parada explicitamente em alguns exemplos.)

#### Solução 30

- As dimensões de  $b$  podem ser encontradas usando:

$$[b] = \left[ \frac{F}{v^n} \right] = \text{kg} \cdot \text{m}^{1-n} \cdot \text{s}^{-2+n}.$$

Para obter um tempo de parada ou a distância de parada, o termo de massa deve ser cancelado. Assim, trabalhamos com:

$$\frac{b}{m} = m^{1-n} s^{-2+n}, \quad [v] = \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

O tempo de parada  $t$  pode ser encontrado cancelando a dimensão de comprimento. Se  $t \propto \left(\frac{b}{m}\right)^\alpha v^\beta$ , então:

$$\alpha(1 - n) + \beta = 0,$$

$$\alpha(-2 + n) - \beta = 1.$$

Resolvendo o sistema, obtemos:

$$\alpha = -1, \quad \beta = 1 - n.$$

Portanto,

$$t \propto \frac{mv^{1-n}}{b}.$$

Fazendo o mesmo para a distância de parada  $x$ :

$$x \propto \frac{mv^{2-n}}{b}.$$

b)

Os resultados obtidos podem parecer estranhos à primeira vista, pelos seguintes motivos:

1. Para  $n = 1$ , o tempo de parada não depende de  $v$ . Isso não parece correto, pois o tempo de parada deveria aumentar com a velocidade.
2. Para  $n > 1$ , o tempo de parada diminui com a velocidade, o que é ainda mais contraintuitivo.
3. Problemas semelhantes ocorrem para a distância de parada em  $n \geq 2$ .

A resolução é que, nesses casos, o tempo e a distância de parada são, na verdade, infinitos, o que pode ser verificado explicitamente. Em outras palavras, a análise dimensional funcionou, mas o fator adimensional oculto era infinito.

### 1.9.3 Quebra de idealização

Em alguns problemas de física, temos que lembrar que não vivemos em um mundo ideal. Em alguns momentos, pode parecer que podemos ter uma total descrição do universo a partir dos modelos apresentados, porém isso não é verdade. Podemos até trabalhar com Leis corretas, mas isso não significa que a matemática dos problemas nos permita resolvê-lo de maneira trivial. Um bom exemplo é o "problema dos 3 corpos", que tenta descrever a interação gravitacional entre 3 planetas, o que

tecnicamente poderíamos resolver apenas com as Leis de Newton, certo? Sim, até existem várias soluções particulares para o problema, mas a matemática complicada da situação nos impede de encontrar uma solução geral, que até hoje é o objetivo de diversos pesquisadores. Então, devemos sempre focar em satisfazer essas Leis, mesmo que isso signifique abandonar modelos conhecidos como os de tensão em cordas e força de contato se isso for necessário para manter a coerência física do problema. Por isso, se atente: nem toda questão irá dizer que você deve esquecer um modelo conhecido ou ignorar a idealidade estabelecida nos problemas. Logo, em muitos momentos, *você* é quem deve perceber isso.

## 2 Mecânica celeste

### 2.1 Força Gravitacional

A **força gravitacional** é uma força central atrativa que surge a partir de uma interação mútua entre dois corpos, sendo sua direção radial e sua magnitude calculada a partir da **Lei da Gravitação Universal**, enunciada pelo físico Isaac Newton em 1687 e dada por:

$$F = \frac{GMm}{r^2}$$

onde G é a constante de gravitação universal, M e m são as massas dos corpos que sofrem atração gravitacional e r é a distância entre esses corpos.

A partir dessa ideia, é possível entender o conceito de **gravidade**, descrito como uma interação fundamental que ocasiona uma atração mútua entre tudo aquilo que possui massa.

#### Exemplo 31: Cálculo da gravidade

A partir da fórmula apresentada, encontre uma expressão para o campo gravitacional gerado por um planeta de raio R esférico, maciço e de densidade uniforme em três diferentes casos: na superfície do planeta, a uma determinada altitude h e a uma dada profundidade p medida da superfície do astro. Desconsidere o efeito da rotação do planeta no cálculo da gravidade.

#### Solução 31

##### Caso 1: Na superfície do planeta:

Igualando a força gravitacional à força peso, temos:

$$\begin{aligned} F &= P \\ \frac{GMm}{R^2} &= mg_{Sup} \\ g_{Sup} &= \frac{GM}{R^2} \end{aligned}$$

##### Caso 2: A uma determinada altitude h acima da superfície do planeta:

Igualando a força gravitacional à força peso, temos:

$$\begin{aligned} \frac{GMm}{(R+h)^2} &= mg_h \\ g_h &= \frac{GM}{(R+h)^2} \end{aligned}$$

##### Caso 3: A uma dada profundidade p abaixo da superfície do planeta:

Igualando a força gravitacional à força peso:

$$\frac{GM'm}{(R-p)^2} = mg_p$$

Como a densidade do planeta é uniforme, temos que:  $M' = \frac{M \cdot (R-p)^3}{R^3}$ . Logo:

$$g_p = \frac{GM \cdot (R-p)^3}{R^3 \cdot (R-p)^2}$$

$$g_p = \frac{GM \cdot (R-p)}{R^3}$$

Quando o problema envolver corpos celestes que não possuem uma distribuição uniforme de massa, é necessário utilizar outras estratégias para encontrar o campo gravitacional, como a Lei de Gauss.

### Lembrete 15

A Lei de Gauss, diz que para um campo gravitacional pode ser descrito da seguinte maneira,

$$\oint \mathbf{g} \cdot d\mathbf{S} = -4\pi GM_{in}$$

Onde  $M_{in}$  é a massa contida dentro da superfície  $\mathbf{S}$ . Embora a lei de gauss não seja cobrada na fase de Barra do Piraí, é interessante saber da onde vem as fórmulas que utilizamos no dia a dia. No caso de uma esfera, por exemplo,

$$\oint \mathbf{g} \cdot d\mathbf{S} = -g(4\pi r^2) = -4\pi GM_{in}$$

Na superfície,  $M_{in} = M$ ,

$$g = \frac{GM}{R^2}$$

Já, caso tivéssemos um planeta cilíndrico por exemplo,

$$\oint \mathbf{g} \cdot d\mathbf{S} = -g(2\pi rL) = -4\pi GM_{in}$$

Onde  $L$  é o comprimento do cilíndrico. Em sua superfície,

$$g = \frac{2GM}{RL}$$

Além disso, vale a pena também lembrar a energia potencial gravitacional:

$$V = - \int \frac{GMm}{r^2} dr$$

Definindo como referência o potencial do infinito(nosso 0 de potencial), podemos colocar os limites na integral:

$$V = - \int_r^{\infty} \frac{GMm}{r^2} dr = -\frac{GMm}{r}$$

Essa é a energia potencial gravitacional **com respeito ao infinito**. Lembrando que, como explicado na seção de energia do capítulo 1, o que importa mesmo no uso da energia é a **diferença de energia potencial entre dois casos** e não a energia potencial em si. Por isso, temos essa escolha de calibre sobre o potencial de referência; caso a referência não fosse o infinito, apenas uma constante seria adicionada na equação anterior.

## 2.2 Leis de Kepler

Kepler é o principal astrônomo quando o assunto é órbitas. Dentre as suas contribuições, há 3 principais Leis: a *Lei das Órbitas*, a *Lei das Áreas* e a *Lei Harmônica*. Vamos, então, explicar e definir de cada uma das leis.

### 2.2.1 Lei das Órbitas

A lei das Órbitas diz que toda órbita de um corpo em relação a um ponto central conduzido por um potencial da forma  $V(r) = C/r$  é uma cônica. Há quatro tipos de cônicas, como a imagem a seguir descreve:

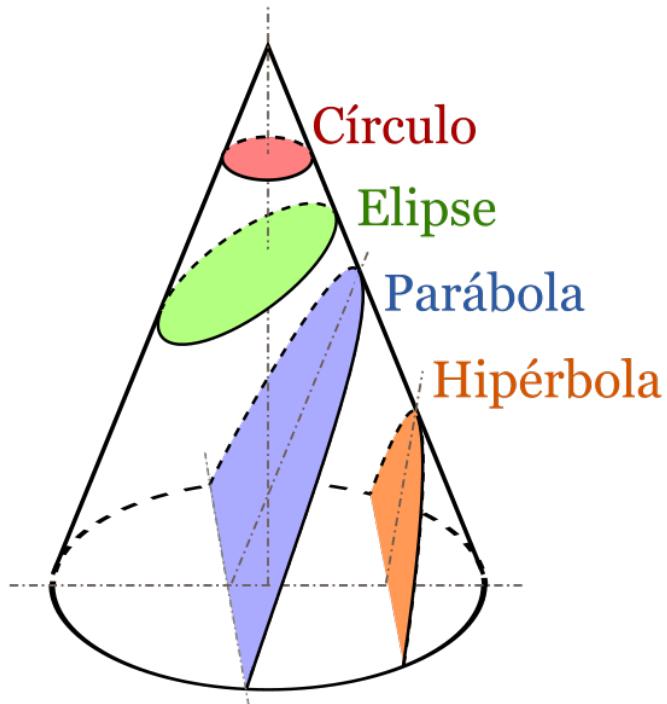


Figura 4: Fonte Wikipedia

De modo geral, as órbitas podem ser elípticas (com a órbita circular sendo um caso especial dessa), parabólica ou hiperbólica. O que as difere é a energia mecânica total do corpo orbitado, assunto a ser tratado na próxima seção. Resumidamente, elipses possuem energia total negativa, parábolas possuem energia total nula e hipérboles possuem energia total positiva.

Focando na construção geométrica, a elipse é definida como o conjunto de pontos cuja soma das distâncias aos pontos fixos  $F_1$  e  $F_2$  (focos) é constante e igual a  $2a$  (eixo maior). A explicação formal pode parecer um pouco mais complicada, então vamos observar a seguinte imagem:

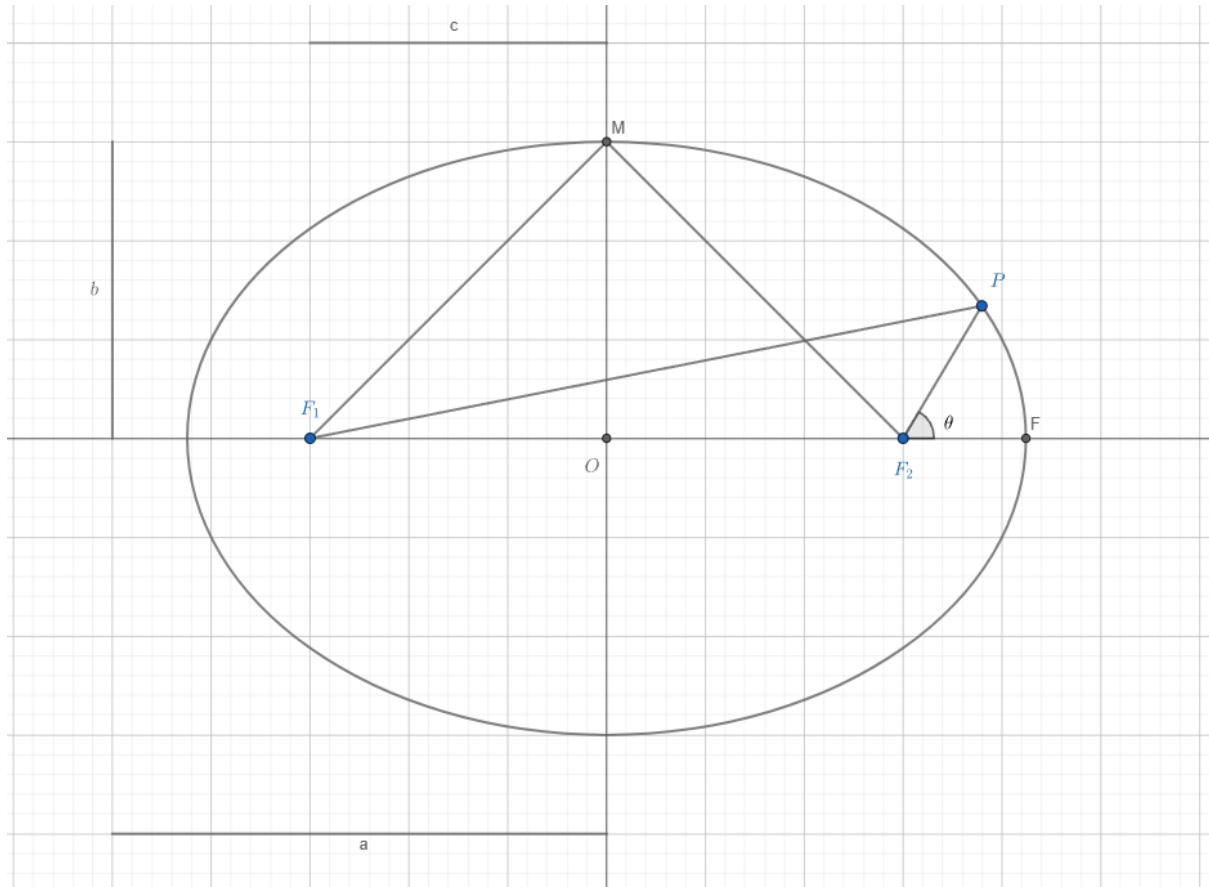


Figura 5: Elipse

Nosso interesse é descobrir propriedades especiais da elipse, então vamos analisar os triângulos  $\Delta F_2MF_1$  e  $\Delta F_2PF_1$ . Primeiro, olhando para o  $\Delta F_2MF_1$ , temos, da definição da elipse, que

$$F_1M + F_2M = 2a$$

Por simetria, temos  $F_1M = F_2M$ , ou seja,  $F_1M = F_2M = a$ , logo,  $\Delta F_2OM$  é um triângulo retângulo de hipotenusa  $a$  e catetos  $b$  e  $c$ , e, com isso, temos a primeira fórmula importante do estudo das elipses:

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

Agora, vamos falar da excentricidade. A excentricidade é, por definição, a razão entre a distância focal e o semi-eixo maior,

$$e = \frac{c}{a}$$

Para elipses,  $0 \leq e < 1$ , com o caso  $e = 0$  correspondendo a um círculo. Agora, analisando  $\Delta F_1PF_2$ , temos

$$F_2P + F_1P = 2a$$

$$F_1F_2 = 2c = 2ae$$

Nosso objetivo é definir a distância  $F_2P$  em função de  $\theta$ . No nosso esquema, o corpo central estaria localizado no ponto  $F_2$  e  $\theta$  corresponderia a anomalia verdadeira. O jeito mais prático de fazer isso é utilizando uma lei dos cossenos:

$$F_1P^2 = F_1F_2^2 + F_2P^2 - 2(F_1F_2)(F_2P) \cos(\pi - \theta)$$

Usando que  $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$ , escrevendo  $F_2P = r$ ,  $F_1F_2 = 2ae$  e  $F_1P = 2a - F_2P = 2a - r$ , temos:

$$(2a - r)^2 = 4a^2e^2 + r^2 + 4rae \cos\theta$$

Expandindo e simplificando:

$$4a^2 - 4ar = 4a^2e^2 + 4rae \cos\theta$$

$$a - r = ae^2 + re \cos\theta$$

Resolvendo para  $r$ :

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos\theta}$$

Essa fórmula é conhecida como equação polar da elipse.

De modo semelhante à elipse, a parábola é definida como o conjunto de pontos do plano que equidistam de um ponto fixo  $F$  (foco) e de uma reta fixa  $d$  (diretriz). O esquema abaixo ilustra alguns elementos da parábola.

No esquema,  $p$  é o parâmetro da parábola, definido como a distância entre a reta diretriz e o foco da parábola.

Usando as relações trigonométricas para encontrarmos a equação polar da parábola, temos:

$$\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta = \frac{AF}{r}$$

Mas, pela definição:

$$BC = BA = r$$

$$AF = FD - AD = BC - AD = r - p$$

Logo:

$$-\cos\theta = \frac{r - p}{r} = 1 - \frac{p}{r}$$

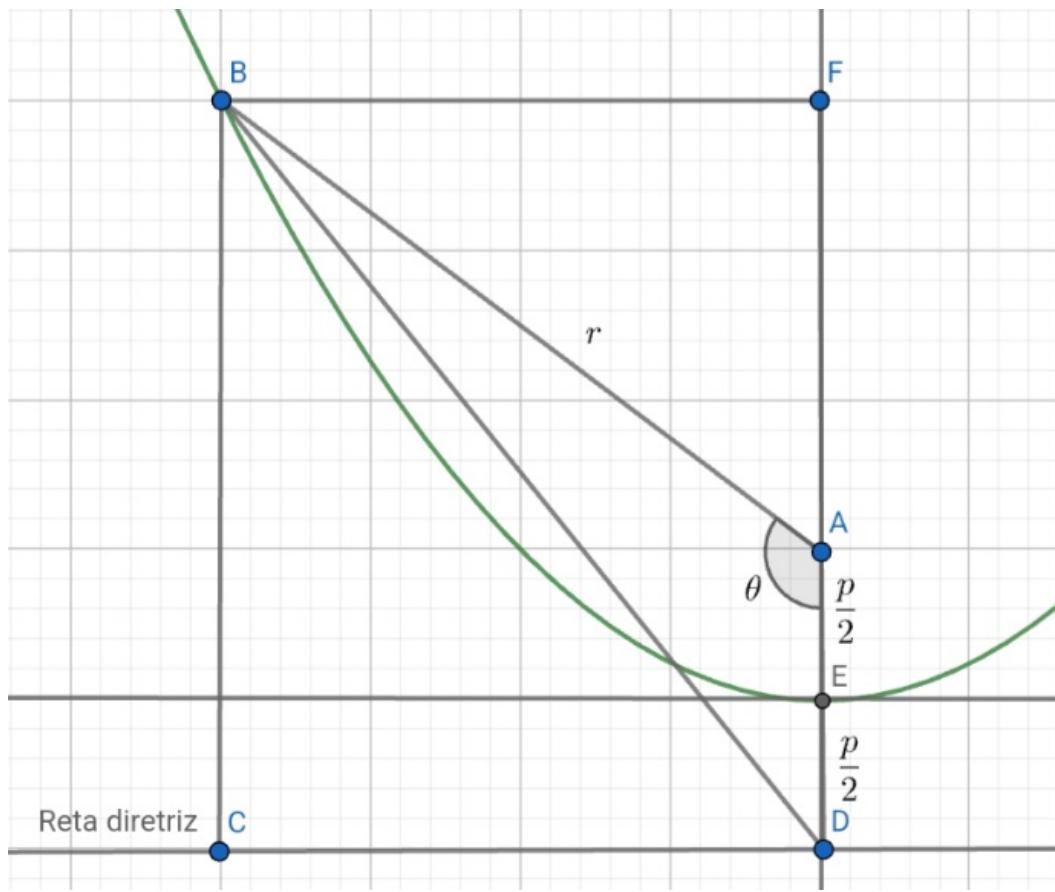


Figura 6: Parábola

$$r = \frac{p}{1 + \cos \theta}$$

Vale ressaltar que o sinal do termo  $\cos \theta$  depende do ângulo adotado na figura, ou seja, se tivéssemos usado o ângulo suplementar ao que convencionamos, teríamos o termo  $-\cos \theta$ . Além disso, a excentricidade de uma parábola sempre é  $e = 1$ .

Por fim, temos a hipérbole, definida como o conjunto de pontos do plano cujo valor absoluto da diferença das distâncias aos dois pontos fixos  $F_1$  e  $F_2$  (focos) é constante e igual a  $2a$  (eixo imaginário). Utilizando os procedimentos anteriores e a imagem abaixo, conseguimos obter importantes relações da hipérbole, incluindo sua forma polar. Analisando o triângulo  $\Delta ABC$ , temos, pelo Teorema de Pitágoras, que:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Assim como definido anteriormente, a excentricidade é dada por:

$$e = \frac{c}{a}$$

Como na hipérbole temos  $c > a$ , isso implica que  $e > 1$  para toda órbita hiperbólica.

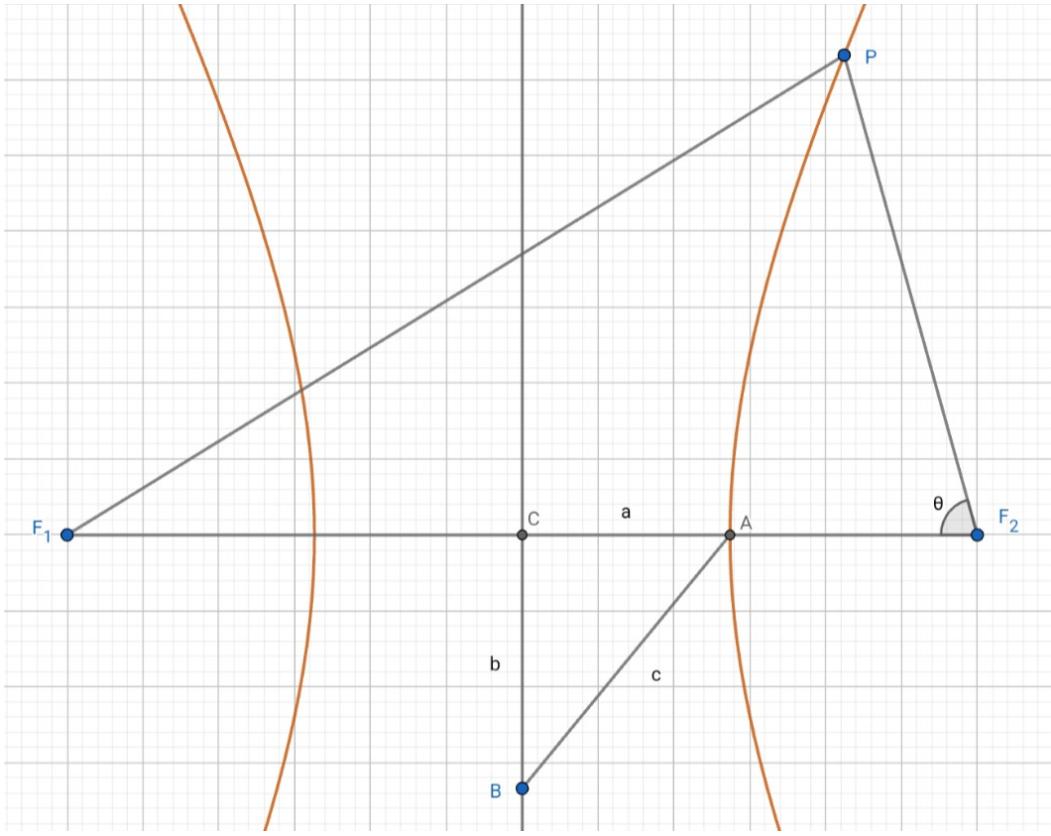


Figura 7: Hipérbole

Agora, analisando o triângulo  $\Delta PF_1F_2$ , temos, da definição da hipérbole:

$$|PF_1 - PF_2| = 2a$$

Assumindo que o corpo central está localizado no foco  $F_2$  e que  $\theta$  seja a anomalia verdadeira, temos, pela lei dos cossenos:

$$PF_1^2 = PF_2^2 + F_1F_2^2 - 2(PF_2)(F_1F_2) \cos \theta$$

Sendo  $PF_2 = r$ ,  $PF_1 = 2a + r$  e  $F_1F_2 = 2c = 2ea$ , temos:

$$(2a + r)^2 = r^2 + 4e^2a^2 - 4rae \cos \theta$$

$$4a^2 + 4ar + r^2 = r^2 + 4e^2a^2 - 4rae \cos \theta$$

$$a + r = e^2a - er \cos \theta$$

Logo:

$$r = \frac{a(e^2 - 1)}{1 + e \cos \theta}$$

Novamente, é importante frisar que o sinal do termo  $\cos \theta$  depende do ângulo convencionado e adotado.

### 2.2.2 Lei das Áreas

Agora vamos provar a segunda Lei de Kepler, também conhecida como a Lei das áreas. A sua prova é rápida e utiliza apenas o fato de que o momento angular é constante. Da sua definição,  $L = mr^2 \frac{d\theta}{dt}$ . O elemento infinitesimal de área, em coordenadas cilíndricas  $(r, \theta)$  é dado por  $dA = r dr d\theta \equiv \frac{r^2}{2} d\theta$ . Para maior adesão, observe a figura:

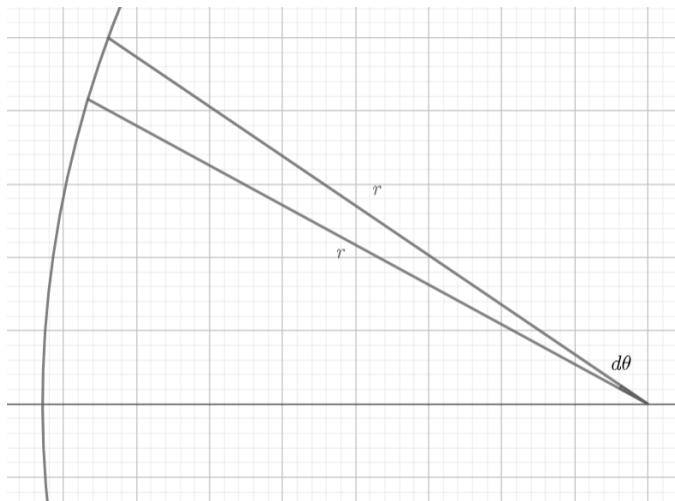


Figura 8: Elemento de Área

De modo ”simplificado”, o que falamos no parágrafo acima pode ser explicado analisando a figura. Note que o elemento de área  $dA$  pode ser aproximado para um triângulo isósceles, com dois lados  $r$  separados por um ângulo  $d\theta$ . A área desse triângulo será dada por:

$$dA = \frac{r \cdot r \cdot \sin d\theta}{2}$$

Mas como  $d\theta$  é muito pequeno, podemos utilizar a aproximação para pequenos ângulos,  $\sin x \approx x \quad \forall x \ll 1$ . Desse modo:

$$dA = \frac{r^2 d\theta}{2}$$

Assim,

$$\frac{dA}{dt} = \frac{r^2}{2} \frac{d\theta}{dt}$$

Isolando  $d\theta/dt$  na expressão do momento angular:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{mr^2}$$

Substituindo isso:

$$\boxed{\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m}}$$

Essa quantidade é denominada **velocidade areolar** e é constante, o que significa que áreas iguais são varridas em tempos iguais.

### 2.2.3 Lei Harmônica

A Terceira Lei de Kepler, ou Lei Harmônica, é a lei que relaciona o período e o semi-eixo maior de corpos celestes. Separando os termos da segunda lei e integrando, temos que:

$$\int_0^T dt = \frac{2m}{L} \int_0^{\pi ab} dA$$

$$T = \frac{2\pi mab}{L}$$

Das propriedades geométricas da elipse, podemos escrever  $b = a\sqrt{1 - e^2}$ . E, utilizando  $L = m\sqrt{GMa(1 - e^2)}$ , temos:

$$T = \frac{2\pi a^2 \sqrt{1 - e^2}}{\sqrt{GMa(1 - e^2)}}$$

Elevando ambos os lados ao quadrado e simplificando:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GM} \rightarrow \boxed{\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}}$$

Assim, estão demonstradas as três leis de Kepler.

## 2.3 Órbitas e suas energias

Nessa seção, vamos revisitar os 3 tipos de órbitas e analisar as suas energias. Para uma introdução básica, vamos olhar o caso mais simples possível, uma órbita circular. Nela, temos:

$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{a}$$

Onde  $K$  e  $U$  representa a energia cinética e potencial, respectivamente.

Para achar  $v$ , vamos igualar a força gravitacional a força centrípeta. Assumindo que a órbita tenha raio  $a$ ,

$$\frac{GMm}{a^2} = \frac{mv^2}{a} \rightarrow v^2 = \frac{GM}{a} \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{GM}{a}}}$$

Substituindo na fórmula da energia,

$$E = \frac{GMm}{2a} - \frac{GMm}{a} \Rightarrow \boxed{E = -\frac{GMm}{2a}}$$

Como o esperado.

### 2.3.1 Órbitas Elípticas

A análise em órbitas elípticas começa a ser mais complicada. Nós sabemos que a energia é uma quantidade que se conserva, o que significa que, na mesma órbita, a energia no afélio e no periélio é a mesma. Desse modo, observe a imagem a seguir:

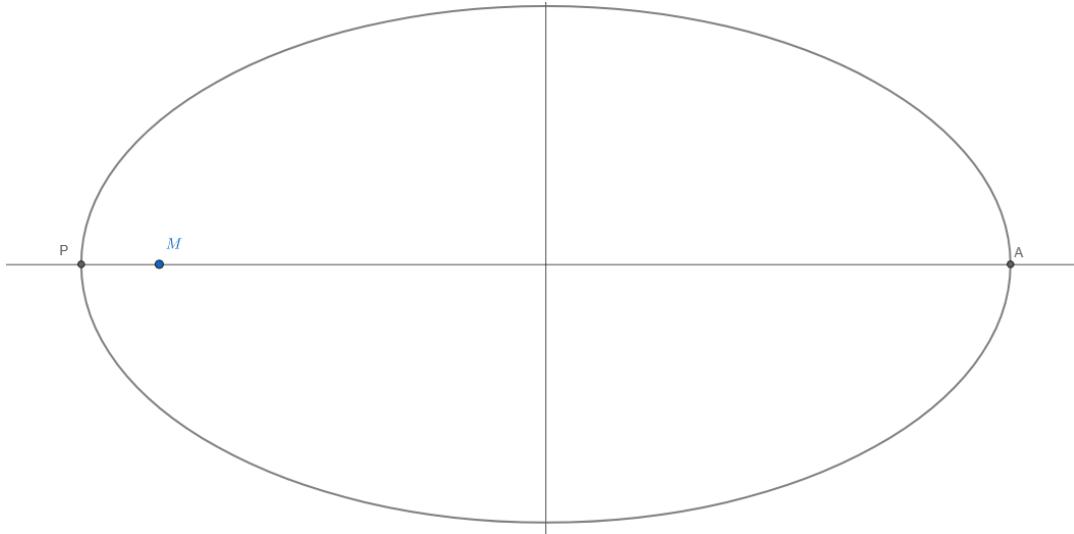


Figura 9: Representação do Periélio e Afélio

Considere que a massa central esteja no ponto  $M$ , assim  $P$  e  $A$  representam o periélio e o afélio, respectivamente. As distâncias  $PM$  e  $MA$  podem ser calculadas facilmente utilizando as propriedades geométricas da elipse.

$$PM = a - c = a(1 - e), \quad AM = a + c = a(1 + e)$$

Denotando por  $v_p$  e  $v_a$  as velocidades em  $P$  e  $A$ , temos

$$E = \frac{1}{2}mv_p^2 - \frac{GMm}{a(1-e)} = \frac{1}{2}mv_a^2 - \frac{GMm}{a(1+e)}$$

Utilizando conservação do momento angular

$$a(1-e)v_p = a(1+e)v_a \rightarrow \frac{v_a}{v_p} = \frac{1-e}{1+e}$$

Substituindo  $v_a$

$$\frac{E}{m} = \frac{v_p^2}{2} - \frac{GM}{a(1-e)} = \frac{v_p^2}{2} \left( \frac{1-e}{1+e} \right)^2 - \frac{GM}{a(1+e)}$$

Reorganizando os termos

$$v_p^2 \left( 1 - \left( \frac{1-e}{1+e} \right)^2 \right) = \frac{2GM}{a} \left( \frac{1}{1-e} - \frac{1}{1+e} \right)$$

Expandindo os termos

$$v_p^2 \left( \frac{4e}{(1+e)^2} \right) = \frac{4GMe}{a(1-e^2)}$$

Resolvendo para  $v_p^2$

$$v_p^2 = \frac{GM}{a} \frac{(1+e)^2}{1-e^2} = \frac{GM}{a} \frac{1+e}{1-e}$$

Substituindo na fórmula para a energia

$$E = \frac{GMm}{2a} \frac{1+e}{1-e} - \frac{GMm}{a(1-e)} = \frac{GMm(1+e-2)}{2a(1-e)}$$

Finalmente,

$$E = -\frac{GMm}{2a}$$

Esse é um resultado ótimo. Perceba que a energia apenas depende das massas e da geometria da órbita, e esse resultado coincide com o resultado da órbita elíptica, em que  $a \rightarrow r$ . Com esse resultado, podemos obter várias equações importantes, sendo a principal delas sendo a equação "vis-viva".

Temos, também, que a velocidade  $v$  em uma órbita elíptica é dada por essa equação "vis-viva", cuja fórmula é:

$$v^2 = GM \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

Para um ponto  $P'$  orbitando um ponto central de massa  $M$  á uma distância  $r$  do mesmo. Para demonstrar essa equação, vamos partir da energia mecânica:

$$E = -\frac{GMm}{2a} = \frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{r} \rightarrow \frac{v^2}{2} = GM \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{2a} \right) = GM \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

### 2.3.2 Órbitas Parabólicas

Pela definição, nas órbitas parabólicas, temos  $a \rightarrow \infty$  então, utilizando a fórmula obtida anteriormente,

$$E = -\frac{GMm}{2a} \rightarrow 0$$

Pois  $a$  tende ao infinito. Assim, para qualquer ponto da órbita, vale

$$K = -U$$

Explicitamente:

$$\frac{v^2}{2} = \frac{GM}{r}$$

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

**NOTA:** essa velocidade é conhecida como velocidade de escape, que é a velocidade que um corpo precisa ter para conseguir escapar do campo gravitacional causado por uma massa  $M$  localizado a uma distância  $r$ .

### 2.3.3 Órbitas Hiperbólicas

Para órbitas hiperbólicas, o valor do semi eixo maior é negativo, então,  $a = -|a|$ . Desse modo:

$$E = -\frac{GMm}{2a} = \frac{GMm}{2|a|}$$

Note a seguinte relação,  $E_{elipse} < 0$ ,  $E_{parabola} = 0$  e  $E_{hiperbole} > 0$ .

### 2.3.4 Excentricidade e energia

De forma geral da energia temos:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r}$$

Podemos decompor a velocidade em radial e tangencial, de modo que  $v^2 = v_r^2 + v_t^2 = \dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2$ , definindo  $\varepsilon = E/m$

$$\varepsilon = \frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{r^2\dot{\theta}^2}{2} - \frac{GM}{r}$$

Utilizando a definição de momento angular

$$L = mr^2\dot{\theta} \rightarrow \dot{\theta} = \frac{L}{mr^2}$$

Assim:

$$\varepsilon = \frac{L^2}{2m^2r^2} + \frac{\dot{r}^2}{2} - \frac{GM}{r}$$

Resolvendo para  $\dot{r}$ :

$$\dot{r}^2 = 2\varepsilon + \frac{2GM}{r} - \frac{L^2}{m^2r^2}$$

Definindo  $u = 1/r$ :

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{du} \frac{du}{dt} = -r^2 \frac{du}{dt}$$

Substituindo na expressão anterior:

$$u^{-4}\dot{u}^2 = 2\varepsilon + 2GMu - \frac{L^2}{m^2}u^2$$

Escrevendo  $L/m = h$  e  $GM = \alpha$  nossa expressão se torna:

$$\dot{u}^2 = 2\varepsilon u^4 + 2\alpha u^5 - h^2 u^6$$

Fazendo uma pequena substituição:

$$\frac{du}{dt} = \frac{du}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{Lu^2}{m} \frac{du}{d\theta}$$

Assim:

$$h^2 u^4 \left( \frac{du}{d\theta} \right)^2 = 2\varepsilon u^4 + 2\alpha u^5 - h^2 u^6$$

Simplificando:

$$\left( \frac{du}{d\theta} \right)^2 = \frac{2\varepsilon}{h^2} + \frac{2\alpha}{h^2} u - u^2$$

Aqui, utilizar o método de completar quadrado, somando e subtraindo o termo  $\alpha^2/h^4$ .

$$\left( \frac{du}{d\theta} \right)^2 = \frac{2\varepsilon}{h^2} - \left( \frac{\alpha^2}{h^4} - \frac{2\alpha}{h^2} u + u^2 \right) + \frac{\alpha^2}{h^2}$$

$$\left( \frac{du}{d\theta} \right)^2 = \frac{2\varepsilon}{h^2} + \frac{\alpha^2}{h^4} - \left( \frac{\alpha}{h^2} - u \right)^2$$

Seja

$$x = u - \frac{\alpha}{h^2} \quad y = \sqrt{\frac{2\varepsilon}{h^2} + \frac{\alpha^2}{h^4}}$$

E usando que  $\frac{du}{d\theta} = \frac{dx}{d\theta}$ , temos:

$$\left( \frac{dx}{d\theta} \right)^2 = y^2 - x^2 \rightarrow \frac{dx}{d\theta} = \sqrt{y^2 - x^2}$$

Resolvendo essa E.D.O:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{y^2 - x^2}} = \int d\theta$$

Definindo  $x = y \cos z$ , temos  $dx = y \sin z dz$ , assim:

$$\int \frac{y \sin z dz}{\sqrt{y^2(1 - \cos^2 z)}} = \int d\theta$$

Utilizando  $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ , temos:

$$\int dz = \int d\theta \rightarrow z = \theta + C$$

Assim,  $x = y \cos(\theta + C)$ , igualando essas expressões:

$$u - \frac{\alpha}{h^2} = \sqrt{\frac{2\varepsilon}{h^2} + \frac{\alpha^2}{h^4}} \cos(\theta + C)$$

$$u = \frac{\alpha}{h^2} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2\varepsilon h^2}{\alpha^2}} \cos(\theta + C) \right)$$

Lembrando a definição de  $u$ , temos:

$$u = \frac{1}{r} = \frac{1 + e \cos(\theta + C)}{h^2/\alpha}$$

Temos:

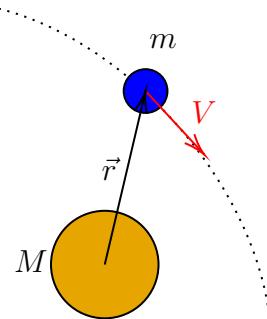
$$1 + e \cos(\theta + C) = 1 + \sqrt{1 + \frac{2\varepsilon h^2}{\alpha^2}} \cos(\theta + C)$$

Assim

$$e = \sqrt{1 + \frac{2\varepsilon h^2}{\alpha^2}}$$

## 2.4 Potencial Efetivo de uma órbita

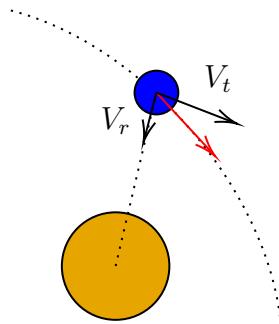
Para aprender o conceito e a importância da energia potencial efetiva, analisaremos uma órbita genérica com um corpo de massa  $m$  orbitando uma estrela de massa  $M$  a uma velocidade  $V$  e distância  $r$ :



Podemos escrever a energia do corpo como:

$$E = \frac{mV^2}{2} - \frac{GMm}{r}$$

Decompondo a velocidade nas componentes radial  $V_r$  e tangencial  $V_t$ , conforme ilustrado na imagem abaixo:



Temos que  $V^2 = V_r^2 + V_t^2$ . Substituindo essa relação na expressão da energia, obtemos:

$$E = \frac{mV_r^2}{2} + \frac{mV_t^2}{2} - \frac{GMm}{r}$$

### Lembrete 16: Momento Angular e a Velocidade Tangencial

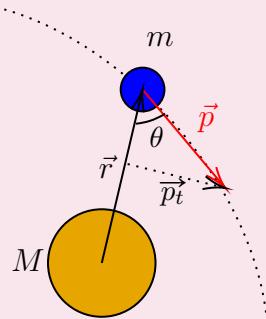
Lembrando da definição de momento angular apresentada no último capítulo, temos:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

O módulo desse produto vetorial é dado por:

$$L = rp \cdot \sin \theta$$

Essa fórmula demonstra que o momento angular depende do módulo do vetor posição  $\vec{r}$ , do momento linear  $\vec{p}$  e do ângulo  $\theta$  entre eles. Para ilustrar melhor essa relação, podemos esquematizar a situação:



Decompondo o momento, percebemos que  $p \sin \theta = p_t$ , o que nos leva à seguinte expressão:

$$L = p_t r$$

Substituindo o momento linear  $p = mv$ , temos:

$$L = mV_t r$$

Essa equação evidencia que o momento angular depende exclusivamente da velocidade tangencial  $v_t$  e do raio  $r$ . Além disso, fica claro que qualquer mudança na velocidade radial  $v_r$  não afeta o momento angular da órbita!

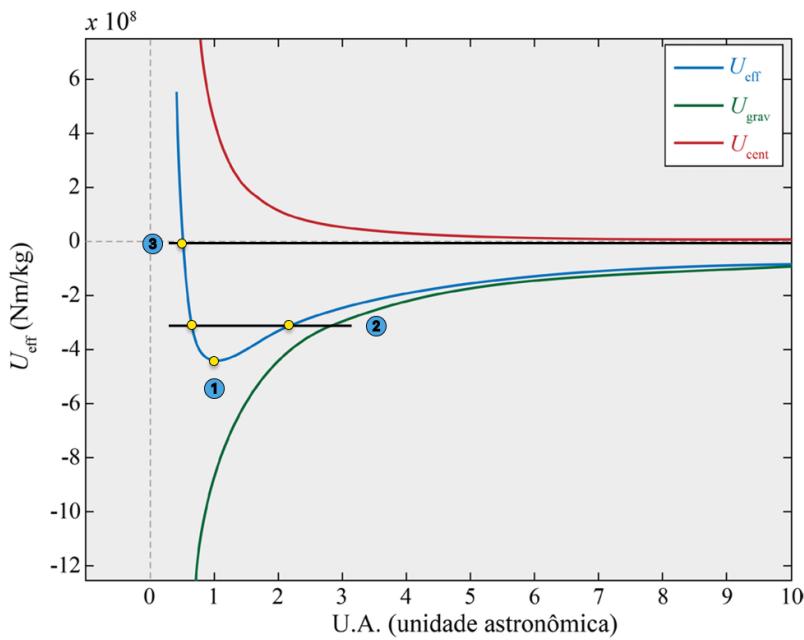
Lembrando que  $L = mV_t r$ , podemos reescrever a energia como:

$$E = \frac{mV_r^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}$$

Note que agora apenas o termo  $\frac{mV_r^2}{2}$  independe do vetor posição. Por outro lado, os termos  $\frac{L^2}{2mr^2}$  e  $-\frac{GMm}{r}$ , por dependerem da posição, são classificados como uma energia potencial. No nosso

caso, essa é uma **energia potencial efetiva**, pois a velocidade tangencial contribui para a energia potencial além do termo gravitacional tradicional.

Podemos representar graficamente a energia potencial efetiva em função da distância  $r$ . A curva resultante corresponde à soma dos efeitos de cada termo, onde convencionamos que  $U_{cent} = \frac{L^2}{2mr^2}$  representa o termo centrífugo e  $U_{grav} = -\frac{GMm}{r}$  corresponde ao potencial gravitacional:



As bolinhas amarelas no gráfico representam pontos de retorno, nos quais a velocidade radial é igual a zero. Nesse instante, a energia mecânica é completamente equivalente à energia potencial efetiva, o que nos ajuda a compreender o significado físico por trás desse conceito. Note que o ponto 1 corresponde à condição de menor energia potencial, sendo também a de maior estabilidade. Além disso, observe que a única órbita em que a velocidade radial é sempre zero é a órbita circular, o que confirma que ela é a mais estável! Assim como discutido na **Ideia 2** no estudo do Movimento Harmônico Simples (MHS) no capítulo anterior, esse ponto está localizado em uma região onde  $U'_{eff} = 0$ , ou seja, um extremo do gráfico de potencial, e  $U''_{eff} > 0$ , caracterizando um mínimo. Essa ideia é especialmente interessante, pois a estabilidade surge do fato de que qualquer força ou perturbação que altere a energia potencial dessa órbita tende a trazer o sistema de volta ao estado 1, que corresponde precisamente a uma órbita circular.

Agora, analisemos o ponto 2. Ele corresponde a uma região de maior energia potencial e apresenta dois pontos de retorno, caracterizando uma órbita elíptica. O ponto de retorno mais próximo do eixo  $y$ , que corresponde ao menor  $r$ , é o periastro, enquanto o mais afastado é o apoastro. Essa órbita não é a mais estável e, se possível, se deslocaria para o menor potencial, representado pelo ponto 1. Isso pode ser comparado a um pêndulo, que sempre tende a retornar à posição de equilíbrio, mas não consegue permanecer nela pelo excedente de energia. No entanto, neste caso, estamos tratando de um astro orbitando outro.

Agora, analisemos o ponto 3. Nesse caso, a energia mecânica é zero, tornando impossível a existência

de dois pontos de retorno. Assim, essa configuração resulta em uma órbita parabólica, que representa uma transição entre a órbita elíptica e a órbita hiperbólica. Por fim, partindo para a órbita mais instável, a órbita hiperbólica ocorre para qualquer valor de energia acima do ponto 3, caracterizando trajetórias de escape em que o objeto nunca retorna ao corpo central.

Para verificar se você conseguiu compreender a importância e o sentido da energia potencial efetiva, resolveremos o seguinte exemplo:

### Exemplo 32: Kleppner-Kolenkow 9.4

Para quais valores de  $n$  as órbitas circulares são estáveis no potencial energético  $U(r) = -\frac{A}{r^n}$ ?

### Solução 32

Note que órbitas circulares só podem existir se a força for atrativa. Isso implica que  $A$  deve ter o mesmo sinal que  $n$ . O potencial efetivo é dado por:

$$U_{\text{eff}}(r) = -Ar^{-n} + \frac{L^2}{2mr^2}$$

Em uma órbita circular,  $r$  é constante, então a partícula simplesmente permanece em um mínimo do potencial efetivo. Logo:

$$U'_{\text{eff}}(r) = 0$$

Derivando:

$$Anr^{-n-1} - \frac{L^2}{mr^3} = 0$$

Resolvendo para  $r_0$ :

$$r_0^{2-n} = \frac{L^2}{Anm}$$

A órbita é estável se  $U''_{\text{eff}}(r_0) > 0$ , ou seja,

$$-An(n+1)r_0^{-n-2} + \frac{3L^2}{mr_0^4} > 0$$

Passando para o outro lado e multiplicando por  $r_0^{n+2}$ , temos:

$$r_0^{n-2} > \frac{An(n+1)}{3L^2}$$

Como esperado, para forças inversamente proporcionais ao quadrado da distância ( $n = 1$ ) e forças elásticas ( $n = -2$ ) as órbitas podem ser estáveis.

### Exemplo 33: Kevin Zhou - Adaptado

Pela relatividade geral, temos uma correção na energia potencial gravitacional de um corpo de massa  $m$  em torno de um buraco negro de massa  $M$ :

$$V(r) = -\frac{GMm}{r} - \frac{GML^2}{mc^2r^3}$$

Um detalhe importante que o segundo termo dessa expressão ainda não considera o potencial efetivo do sistema.

- (a) Explique como a adição desse novo termo permite que partículas caiam no centro do buraco negro ( $r=0$ ), enquanto no modelo clássico isso seria impossível.
- (b) Para um certo  $L$  constante, determine os possíveis raios de órbitas circulares a partir do potencial.
- (c) Encontre o menor raio possível, considerando que o  $L$  pode ser variado para optimizar o valor. O que acontece se você tenta orbitar o buraco negro mais perto que isso?
- (d) Encontre o menor raio possível de aproximação de um objeto não vinculado. Ou seja, dentre todas as trajetórias que começam e terminam muito longe do buraco negro (isto é, sem cair nele), determine o menor valor possível para o mínimo de  $r$ .  
Assuma que a partícula move de maneira não relativística (a relatividade entra apenas no potencial).

### Solução 33

- (a) O potencial efetivo adiciona um termo  $\frac{L^2}{2mr^2}$  ao termo da energia potencial, o que faz com que o potencial efetivo tenda a  $+\infty$  quando  $r \rightarrow 0$ . Portanto, seria necessário uma quantidade infinita de energia para alcançar  $r = 0$  na gravidade Newtoniana (a menos que  $L = 0$ ). No entanto, a adição do termo  $-\frac{GML^2}{mc^2r^3}$  faz com que o potencial efetivo tenda a  $-\infty$  quando  $r \rightarrow 0$ , permitindo que as partículas possam cair no centro.
- (b) Órbitas circulares ocorrem quando  $V'_{\text{eff}}(r) = 0$ :

$$\begin{aligned} \frac{L^2}{mr^3} &= \frac{GMm}{r^2} + \frac{3GML^2}{mc^2r^4} \\ r + \frac{3GML^2}{mc^2} &= 0 \end{aligned}$$

Resolvendo para  $r$ :

$$r = \frac{L^2 \pm \sqrt{L^4 - 12(GMmL/c)^2}}{2GMm^2}$$

Note que não existem extremos quando o discriminante é negativo. Isso significa que órbitas circulares só existem quando:

$$L > \sqrt{12GMm/c}$$

(c) A partir da parte (a), sabemos que:

$$\lim_{r \rightarrow 0} V_{\text{eff}}(r) = -\infty.$$

E a partir da parte (b), sabemos que há dois extremos (máximos ou mínimos). Porém, claramente um deve ser máximo e outro mínimo; pois, entre dois máximos deve existir um mínimo (e o mesmo vale para entre dois mínimos). Isso é algo mais explicado em nosso apêndice de cálculo, porém você pode conferir por um desenho se quiser. Sejam  $k_1$  e  $k_2$  os valores de  $V''_{\text{eff}} r^3$  para cada raio, sendo o raio 2 maior que o raio 1. Sabemos que um é maior que 0 e outro é menor que 0, já que um é de máximo e outro é de mínimo. Derivando duas vezes, temos:

$$V''_{\text{eff}} = -\frac{2GM}{r^3} + \frac{3L^2}{mr^4} - \frac{12GML^2}{mc^2r^5} \rightarrow k = \frac{3L^2}{mr} - \left( 2GM + \frac{12GML^2}{mc^2r^2} \right)$$

Perceba que, quanto maior o  $r$ , o termo negativo cai mais que o positivo, assim fazendo que  $k$  seja positivo. Logo, o raio 2 é estável, enquanto o raio 1 não é. Então, o menor raio de uma órbita circular é o menor valor possível de  $r_2$ , que ocorre quando  $L = \sqrt{12GM/c^2}$ . Nesse caso, tem-se:

$$r_2 = \frac{L^2}{2GMr^2} \rightarrow \boxed{r_2 = \frac{6GM}{c^2}}$$

Se uma órbita circular ocorre em um raio menor que este, ela é necessariamente instável, o que significa que qualquer perturbação levará a partícula a cair no buraco negro ou a escapar para longe dele. Caso o objeto possua propulsores, é possível evitar isso com ajustes contínuos na órbita. (Claro, se a órbita for menor que o raio de Schwarzschild  $2GM/c^2$ , não há escolha: a partícula deve cair no buraco negro. No entanto, esse efeito não é visível em nossa análise Newtoniana simples.)

(d) Para que isso aconteça, o potencial efetivo precisa possuir um máximo, de modo que a partícula possa “rebater” nele e retornar para  $r \rightarrow \infty$ . Assim, precisamos que:

$$L > \sqrt{12GMr/c}.$$

Para cada valor de  $L$ , a distância mais próxima que ainda permite a reflexão corresponde ao menor valor crítico de  $V_{\text{eff}}(r)$ , que foi mostrado na parte (b) como:

$$r_{\min}(L) = \frac{L^2 - \sqrt{L^4 - 12(GMr/c)^2}}{2GMr^2}$$

Essa função é minimizada quando  $L \rightarrow \infty$  (ou seja, quando a partícula é lançada de um parâmetro de impacto muito grande), de modo que o raio de aproximação mais próximo possível é dado por:

$$\lim_{L \rightarrow \infty} r_{\min}(L) = \frac{6(GMr/c)^2}{2GMr^2} \rightarrow \boxed{r_{\min} = \frac{3GM}{c^2}}$$

onde usamos o teorema binomial no primeiro passo.

(Novamente, seria possível se aproximar ligeiramente mais, mas, para escapar, seria necessário disparar um foguete para sair da região.)

## 2.5 Transferência orbital

### 2.5.1 Velocidade de Escape

A **velocidade de escape** é definida como a mínima velocidade necessária para que um objeto, lançado da superfície de um planeta ou de outro astro, atinja uma distância grande o suficiente para que não haja mais interação gravitacional entre eles.

Como a energia mecânica do objeto no infinito será nula, podemos usar a ideia da **conservação de energia** para encontrar a expressão da velocidade necessária para se "escapar" da influência de um objeto de massa M e raio R. Assim:

$$K_i + U_i = K_\infty + U_\infty \rightarrow \frac{mv_{esc}^2}{2} - \frac{GMm}{R} = 0 \rightarrow v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

Note que essa expressão é igual à expressão da velocidade que já conhecemos da órbita parabólica, sendo a única diferença o fato de que, no lugar da distância r entre os corpos, aqui temos o raio do próprio corpo celeste. Dessa forma, todo objeto que adquirir uma velocidade superior à velocidade de escape de um dado corpo celeste não estará sujeito ao campo gravitacional produzido por este e, consequentemente, não entrará em órbita ao redor desse astro.

Entretanto, quando um corpo tiver uma velocidade inferior à respectiva velocidade de escape do planeta ou da estrela que se encontra, ele não consegue "escapar" gravitacionalmente desse astro, entrando em órbita. Com base nessa ideia, muitas questões de astronomia abordam sobre **manobras orbitais** efetuadas com o objetivo de transferir um objeto de uma órbita para a outra e buscando sempre economizar combustível e tempo.

Por esse motivo, nos próximos tópicos dessa seção, nos dedicaremos a estudar sobre diferentes tipos de manobras orbitais, como a **transferência de Hohmann**, a **transferência bielíptica** e o **estilingue gravitacional**, e a entender como elas são geralmente cobradas em questões das seletivas. Mas, inicialmente, devemos ter algumas ideias em mente.

### 2.5.2 Órbitas com pontos em comum

Se um determinado objeto espacial mudar o módulo ou a direção da sua **velocidade instantânea**, sua órbita será alterada, mas sua distância ao corpo central permanecerá a mesma naquele instante. Por exemplo, se o objeto estiver em órbita circular, ele poderá entrar em uma órbita elíptica caso sofra um impulso instantâneo em seu movimento. No ponto em que o impulso for aplicado, a distância ao corpo orbitado será a mesma, o que facilitará os cálculos, já que essa distância é conhecida.

A partir dessa ideia, conseguimos resolver várias questões, uma vez que, se o impulso certo for aplicado em um ponto específico da órbita original, é possível colocar o objeto espacial em uma **nova órbita com novos parâmetros**, mas com o mesmo foco da órbita original. Contudo, em questões desse tipo, é fundamental analisar a geometria da situação para facilitar a resolução do problema. O exemplo abaixo ilustra uma possível questão sobre o assunto.

#### Exemplo 34: IOAA 2007

Um satélite orbita a Terra em uma órbita circular. A quantidade do movimento inicial do satélite é dado pelo vetor  $\vec{p}$ . Num determinado momento, uma carga explosiva é acionada, o que dá ao satélite um impulso adicional  $\Delta\vec{p}$ , igual em magnitude a  $|\vec{p}|$ .

Seja  $\alpha$  o ângulo entre os vetores  $\vec{p}$  e  $\Delta\vec{p}$ , e  $\beta$  entre o vetor raio do satélite e o vetor  $\Delta\vec{p}$ . Ao pensar na direção do impulso adicional  $\Delta\vec{p}$ , considere se for possível alterar a órbita para cada um dos casos abaixo. Se sim, forneça valores de  $\alpha$  e  $\beta$  para os quais isso é possível. Se a órbita não é possível, marque NÃO.

- uma hipérbole com perigeu no local da explosão.
- uma parábola com perigeu no local da explosão.
- uma elipse com perigeu no local da explosão.
- um círculo.
- uma elipse com apogeu no local da explosão.

#### Solução 34

Para resolver a questão, analisaremos o caso geral e, depois, iremos enquadrá-lo em cada item. A seguinte figura ilustra a situação:

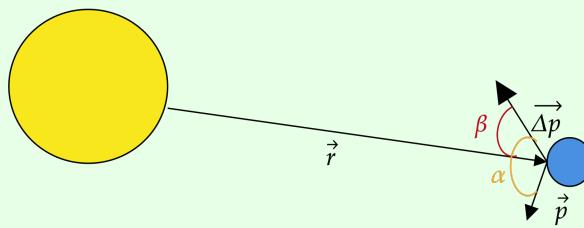


Figura 10: Ilustração da situação

O problema reside no fato de que os vetores  $\vec{p}$  e  $\Delta\vec{p}$  estão contidos em planos distintos, ou seja, o impulso não ocorre no plano da órbita original.

Sendo  $\vec{p}'$  o vetor quantidade de movimento final, após a aplicação do impulso, podemos escrever

que:

$$\vec{p}' = \vec{p} + \Delta\vec{p}$$

Assim, fazendo a decomposição desse vetor e lembrando que  $\Delta\vec{p}$  e  $\vec{p}$  possuem a mesma magnitude:

$$p'_{tangencial} = p + p \operatorname{sen} \beta \cos \alpha$$

$$p'_{radial} = p \cos \beta$$

$$p'_z = p \operatorname{sen} \beta \operatorname{sena} \alpha$$

Como quase todos os itens consideram o perigeu ou o apogeu da nova órbita como o local em que ocorreu a explosão, o impulso radial deverá ser nulo, uma vez que a velocidade radial no perigeu e no apogeu é nula. Ou seja:  $p'_{radial} = p \cos \beta = 0 \rightarrow \beta = 90^\circ$  ou  $\beta = 270^\circ$ . Vale ressaltar que essa condição para  $\beta$  deverá ser atendida em todos os itens.

Com esse valor de  $\beta$ , teremos:

$$p'^2 = (p'_{tangencial})^2 + (p'_z)^2$$

$$p'^2 = p^2(1 + \cos \alpha)^2 + p^2 \operatorname{sena} \alpha^2$$

$$p'^2 = 2p^2(1 + \cos \alpha)$$

Note que, como  $\cos \alpha = \cos(\frac{a}{2})^2 - \operatorname{sen}(\frac{a}{2})^2$  e  $\operatorname{sen}(\frac{a}{2})^2 = 1 - \cos(\frac{a}{2})^2$ , podemos escrever que:

$$\cos \alpha = 2 \cos(\frac{a}{2})^2 - 1 \rightarrow 1 + \cos \alpha = 2 \cos(\frac{a}{2})^2$$

Com isso:

$$p' = 2p \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Para órbitas circulares, a velocidade não será alterada; logo, o momento linear permanecerá o mesmo, ou seja:  $2p \cos(\frac{\alpha}{2}) = p \rightarrow \cos(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1}{2} \rightarrow \alpha = 120^\circ$  ou  $\alpha = 240^\circ$ .

Para órbitas parabólicas, a velocidade será  $v' = \sqrt{2}v_{circ}$ ; logo, a quantidade de movimento final será  $p' = \sqrt{2}p$ , o que nos dá:  $\cos(\frac{\alpha}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \alpha = 90^\circ$  ou  $\alpha = 270^\circ$ .

Para órbitas elípticas, a velocidade da órbita final será maior que da órbita circular, porém menor que da órbita parabólica. Porém, note que, se  $\alpha = 180^\circ$ ,  $p' = 0$  e o satélite, consequentemente, cairá na Terra. Além disso, se o perigeu da órbita elíptica for o local da explosão, os possíveis valores de  $\alpha$  deverão estar compreendidos dentro do intervalo que contém os valores de  $\alpha$  nas órbitas circular e parabólica, ou seja,  $\alpha$  deverá estar entre  $90^\circ$  e  $120^\circ$  ou entre  $240^\circ$  e  $270^\circ$ . Se o apogeu da órbita elíptica for o local da explosão, por sua vez, como a velocidade é menor no apogeu, os possíveis valores de  $\alpha$  estarão entre  $120^\circ$  e  $180^\circ$  ou entre  $180^\circ$  e  $240^\circ$ .

Por fim, para órbitas hiperbólicas, a velocidade final da órbita será maior que da órbita parabólica, ou seja, os valores de  $\alpha$  deverão ser menores que  $90^\circ$  ou maiores que  $270^\circ$ .

Com isso, basta colocarmos os intervalos de  $\alpha$  em cada item, lembrando que todas as órbitas listadas são possíveis.

- a)  $\alpha \in [0^\circ, 90^\circ] \cup (270^\circ, 360^\circ]$ .  
 b)  $\alpha = 90^\circ$  ou  $\alpha = 270^\circ$ .  
 c)  $\alpha \in (90^\circ, 120^\circ) \cup (240^\circ, 270^\circ)$ .  
 d)  $\alpha = 120^\circ$  ou  $\alpha = 240^\circ$ .  
 e)  $\alpha \in (120^\circ, 180^\circ) \cup (180^\circ, 240^\circ)$ .

### 2.5.3 Transferência de Hohmann

Já analisamos o exemplo das órbitas inicial e final conectadas por pontos em comum. Porém, quando isso não acontecer e as órbitas não tiverem pontos de intersecção, deveremos usar uma **órbita de transferência** para atingirmos o objetivo desejado. Nesse sentido, uma manobra muito comum de ser efetuada é chamada de **transferência de Hohmann**. Para entender essa manobra, imagine que um objeto está em uma órbita circular de raio orbital  $r_1$  e que desejamos colocá-lo em uma nova órbita circular de raio orbital  $r_2$ . Para isso, deveremos usar uma órbita de **transferência elíptica** que possui periastro e apoastro nas órbitas circulares inicial e final. A imagem abaixo ilustra melhor essa situação:

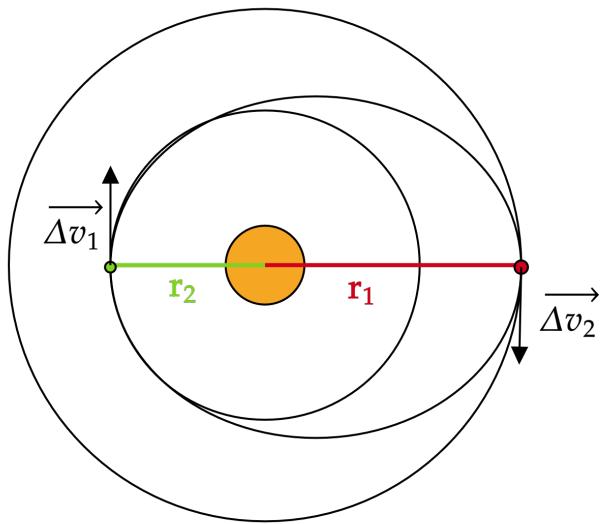


Figura 11: Transferência de Hohmann

Pela figura, nota-se que é necessário aplicar **dois impulsos**, também chamados de "bursts", para que seja possível realizar a transferência. O primeiro impulso  $\Delta\vec{v}_1$  deve ser aplicado para transferir o objeto da órbita 1 para a órbita de transferência elíptica, enquanto o impulso  $\Delta\vec{v}_2$  deve ser aplicado para transferir o objeto da órbita elíptica para a órbita 2, cumprindo nosso objetivo.

Mas, note que, em nenhum momento, o objeto "escapa" da influência gravitacional do corpo que ele orbita, ou seja, sua velocidade em todas as órbitas sempre será menor que a velocidade de escape do

corpo orbitado.

A maioria das questões que cobram essa manobra pedem para calcular o módulo dos dois impulsos e o tempo necessário para a transferência ocorrer. Assim, iremos deduzir todas essas expressões.

Primeiramente, note que o periastro da órbita de transferência corresponde ao ponto 1 da imagem e o apoastro corresponde ao ponto 2. Logo, o semieixo maior da órbita elíptica será:

$$a = \frac{r_a + r_p}{2} = \frac{r_1 + r_2}{2}$$

A velocidade do objeto na órbita circular 1 é:  $v_0 = \sqrt{\frac{GM}{r_1}}$ . Após a aplicação do primeiro impulso, o objeto entrará na órbita elíptica e sua velocidade será  $v_1 = v_0 + \Delta v_1$ . Como, nesse ponto, a distância do objeto ao corpo central é  $r = r_1$ , temos:

$$\begin{aligned}\Delta v_1 &= v_1 - v_0 \\ \Delta v_1 &= \sqrt{GM \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)} - \sqrt{\frac{GM}{r_1}} \\ \Delta v_1 &= \sqrt{GM \left( \frac{2}{r_1} - \frac{2}{r_1 + r_2} \right)} - \sqrt{\frac{GM}{r_1}} \\ \boxed{\Delta v_1 = \sqrt{\frac{GM}{r_1}} \left( \sqrt{\frac{2r_2}{r_1 + r_2}} - 1 \right)}\end{aligned}$$

Analogamente, quando o objeto for da órbita elíptica para a órbita circular 2, ele deverá adquirir uma velocidade  $v' = v_2 + \Delta v_2$ . Como a velocidade na órbita circular 2 é  $v' = \sqrt{\frac{GM}{r_2}}$  e o objeto estará a uma distância  $r' = r_2$  do corpo central no ponto em que o segundo impulso for aplicado (apoastro da órbita de transferência), temos:

$$\begin{aligned}\Delta v_2 &= v' - v_2 \\ \Delta v_2 &= \sqrt{\frac{GM}{r_2}} - \sqrt{GM \left( \frac{2}{r'} - \frac{1}{a} \right)} \\ \Delta v_2 &= \sqrt{\frac{GM}{r_2}} - \sqrt{GM \left( \frac{2}{r_2} - \frac{2}{r_1 + r_2} \right)} \\ \boxed{\Delta v_2 = \sqrt{\frac{GM}{r_2}} \left( 1 - \sqrt{\frac{2r_1}{r_1 + r_2}} \right)}\end{aligned}$$

Usando manipulação algébrica, podemos concluir que, quando  $\Delta v_1 > 0$ , teremos obrigatoriamente  $\Delta v_2 > 0$  e  $r_2 > r_1$ . Ou seja, quando desejamos ir de uma órbita circular para outra de maior raio orbital, assim como representado na figura, os dois impulsos aplicados deverão ser **positivos**. Entretanto, quando  $\Delta v_1 < 0$ , teremos obrigatoriamente  $\Delta v_2 < 0$  e  $r_2 < r_1$ . Ou seja, quando

desejamos ir de uma órbita circular para outra de menor raio orbital, os dois impulsos aplicados deverão ser **negativos**. Por fim, se  $\Delta v_1 = 0$ , teremos obrigatoriamente  $\Delta v_2 = 0$  e  $r_1 = r_2$ , o que condiz com o esperado, já que, nesse caso, não ocorre a transferência e a órbita inicial corresponde com a órbita final.

Para finalizar nossa análise, é fundamental calcularmos o **tempo necessário** para essa transferência ocorrer. A partir da figura apresentada, concluímos que esse tempo é a metade do período orbital da órbita elíptica. Pela Terceira Lei de Kepler, temos:

$$\frac{P^2 \cdot 2^3}{(r_1 + r_2)^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \rightarrow P = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}} \cdot \left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

Logo, o tempo necessário para ocorrer a manobra é:

$$\boxed{\Delta t = \frac{\pi}{\sqrt{GM}} \cdot \left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Dessa forma, obtemos as expressões mais cobradas em questões sobre transferência de Hohmann.

### Exemplo 35: Pequeno impulso Vinhedo 2022

Um satélite em uma órbita circular com velocidade  $v$  sofre um pequeno impulso instantâneo na direção de seu movimento. Assim, sua velocidade sofre um incremento  $\Delta v \ll v$ , alterando a órbita.

Utilize a aproximação  $(1 + x)^n \approx 1 + nx$ , para  $x \ll 1$  e defina  $\beta = \frac{\Delta v}{v}$ .

(a) Mostre que a excentricidade da órbita resultante é aproximadamente:

$$e \approx 2\beta.$$

(b) Mostre que o incremento no período orbital é aproximadamente:

$$\Delta T \approx 3T_0\beta.$$

onde  $T_0$  é o período da órbita inicial.

### Solução 35

a) Perceba que essa perturbação é análoga a uma transferência de Hohmann, com a única diferença sendo que o segundo impulso não ocorre (a órbita se mantém elíptica). Então, usando o mesmo desenho que o de tal transferência, temos que  $r_0 = a(1 - e)$ . Assim, substituindo na fórmula da velocidade em uma elipse, temos:

$$(v + \Delta v)^2 \frac{1}{GM} = \frac{2}{r_0} - \frac{1}{a} = \frac{1 + e}{r_0}$$

Usando que  $v_0 = \sqrt{GM/r_0}$  e aproximação binomial no impulso, temos:

$$1 + 2\beta = 1 + e \rightarrow e = 2\beta$$

b) Utilizando a Terceira Lei de Kepler e a expressão para a:

$$\frac{T_o^2}{r_0^3} = \frac{T_0^2(1 + \Delta T/T_0)^2}{a^3} \rightarrow \frac{1}{(1 - e)^3} = (1 + \Delta/T_0)^2$$

Substituindo com o resultado do item anterior e usando a aproximação binomial:

$$1 + 6\beta = 1 + 2\Delta T/T_0 \rightarrow \boxed{\frac{\Delta T}{T_0} = 3\beta}$$

#### 2.5.4 Transferência bielíptica

Nesse tipo de manobra, usamos **duas órbitas elípticas de transferência** no lugar de uma. Para isso, devemos escolher um ponto no espaço a uma distância  $r$  do corpo central e que corresponderá ao apoastro de ambas as órbitas de transferência. Para entender melhor essa manobra, analise a figura abaixo.

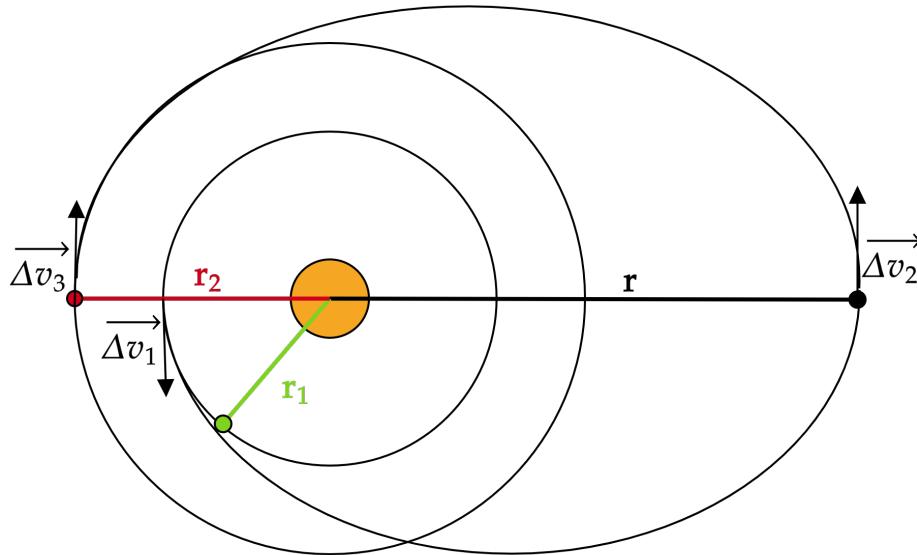


Figura 12: Transferência bielíptica

Assim, concluímos que, nesse tipo de transferência, deverão ser aplicados **três impulsos** para que o objeto possa sair da órbita de raio orbital  $r_1$  e entrar na órbita de raio  $r_2$ . O primeiro impulso deve ser aplicado para o objeto sair da órbita inicial 1 e entrar na primeira órbita elíptica de transferência. O segundo, por sua vez, deve ser aplicado para o objeto sair da primeira órbita elíptica e entrar na segunda órbita de transferência. Por fim, o terceiro e último impulso deve ser aplicado para o objeto sair da segunda órbita elíptica e entrar na órbita circular final 2.

Assim como fizemos com a transferência de Hohmann, determinaremos, nessa seção, as expressões dos três impulsos e o tempo necessário para que a manobra seja realizada.

Inicialmente, note que o semieixo maior da primeira órbita de transferência é:

$$a_1 = \frac{r_{a1} + r_{p1}}{2} = \frac{r_1 + r}{2}$$

O semieixo maior da segunda órbita de transferência, por sua vez, é:

$$a_2 = \frac{r_{a2} + r_{p2}}{2} = \frac{r_2 + r}{2}$$

Logo, o módulo do primeiro impulso é:

$$\begin{aligned}\Delta v_1 &= v_{p1} - v_o \\ \Delta v_1 &= \sqrt{GM \left( \frac{2}{r_1} - \frac{1}{a_1} \right)} - \sqrt{\frac{GM}{r_1}} \\ \Delta v_1 &= \sqrt{GM \left( \frac{2}{r_1} - \frac{2}{r_1 + r} \right)} - \sqrt{\frac{GM}{r_1}} \\ \boxed{\Delta v_1 = \sqrt{\frac{GM}{r_1}} \left( \sqrt{\frac{2r}{r_1 + r}} - 1 \right)}\end{aligned}$$

O módulo do segundo impulso é:

$$\begin{aligned}\Delta v_2 &= v_{a2} - v_{a1} \\ \Delta v_2 &= \sqrt{GM \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a_2} \right)} - \sqrt{GM \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a_1} \right)} \\ \Delta v_2 &= \sqrt{GM \left( \frac{2}{r} - \frac{2}{r_2 + r} \right)} - \sqrt{GM \left( \frac{2}{r} - \frac{2}{r_1 + r} \right)} \\ \boxed{\Delta v_2 = \sqrt{\frac{2GM}{r}} \left( \sqrt{\frac{r_2}{r_2 + r}} - \sqrt{\frac{r_1}{r_1 + r}} \right)}\end{aligned}$$

Por fim, o módulo do terceiro e último impulso é:

$$\begin{aligned}\Delta v_3 &= v_{p2} - v \\ \Delta v_3 &= \sqrt{GM \left( \frac{2}{r_2} - \frac{1}{a_2} \right)} - \sqrt{\frac{GM}{r_2}} \\ \Delta v_3 &= \sqrt{GM \left( \frac{2}{r_2} - \frac{2}{r_2 + r} \right)} - \sqrt{\frac{GM}{r_2}}\end{aligned}$$

$$\Delta v_3 = \sqrt{\frac{GM}{r_2}} \left( \sqrt{\frac{2r}{r_2 + r}} - 1 \right)$$

Note que, quando  $r_2 = r$ , temos que:

$$\Delta v_3 = \sqrt{\frac{GM}{r_2}} \left( \sqrt{\frac{2r_2}{2r_2}} - 1 \right) \rightarrow \Delta v_3 = 0$$

Ou seja, nesse caso, recaíremos na transferência de Hohmann, já que teremos apenas dois impulsos. Isso nos mostra que a manobra da seção anterior é um caso específico da transferência bielíptica. Além disso, quando  $r = \infty$ , isto é, quando a distância  $r$  é tão grande que tende ao infinito, teremos uma **transferência biparabólica**, pois usaremos duas órbitas parabólicas para realizarmos a transferência orbital. Contudo, os tipos de transferência mais comuns são a bielíptica e a de Hohmann.

Para finalizar, vamos calcular o **tempo necessário** para realizar essa manobra orbital. Perceba que, assim como na transferência estudada na seção anterior, o intervalo de tempo para transferir o objeto de uma órbita circular para outra é a metade do período orbital de cada órbita elíptica. Pela Terceira Lei de Kepler, temos:

$$P_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}} \left( \frac{r_1 + r}{2} \right)^{\frac{3}{2}}$$

$$P_2 = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}} \left( \frac{r_2 + r}{2} \right)^{\frac{3}{2}}$$

Portanto, o tempo para realizar a transferência é:

$$\Delta t = \frac{\pi}{\sqrt{GM}} \left( \frac{r_1 + r}{2} \right)^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{\sqrt{GM}} \left( \frac{r_2 + r}{2} \right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\Delta t = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{1}{2GM}} ((r_1 + r)^{\frac{3}{2}} + (r_2 + r)^{\frac{3}{2}})$$

### Exemplo 36: Lista dos treinamentos 2020

Uma nave em órbita circular de  $1UA$  de raio ao redor do Sol pretende se deslocar até possuir uma órbita semelhante a de Marte. O capitão decide lhe fornecer alguns planos e você deve analisar qual deles é o melhor para chegar ao planeta com a menor razão gasto de combustível/ tempo de viagem possível. Considerando que Marte tem órbita circular de  $1,52UA$  de raio, forneça a referida razão  $\sum \frac{|\Delta \vec{v}|}{P}$   $((km/s)/ano)$  para as seguintes órbitas de transferência. Lembre-se que a órbita final da nave é a de Marte.

- a) Transferência de Hohmann.
- b) Transferência bielíptica com afélio a  $2,5UA$ .
- c) Conclua qual das opções é a melhor para o propósito da missão.

### Solução 36

a) Sabendo que  $r_1 = 1UA$  e  $r_2 = 1,52UA$ , basta substituirmos os valores nas fórmulas já deduzidas. Assim:

$$\begin{aligned}\Delta v &= \Delta v_1 + \Delta v_2 \\ \Delta v &= \sqrt{\frac{GM}{r_1}} \left( \sqrt{\frac{2r_2}{r_1 + r_2}} - 1 \right) + \sqrt{\frac{GM}{r_2}} \left( 1 - \sqrt{\frac{2r_1}{r_1 + r_2}} \right) \\ \Delta v &= 5,566 \text{ km/s}\end{aligned}$$

O intervalo de tempo  $P$ , presente na expressão  $\sum \frac{|\Delta \vec{v}|}{P}$  corresponde ao tempo necessário para a realização da manobra. Como esse tempo é a metade do período da órbita de transferência, para simplificar as contas, temos, pela Terceira Lei de Kepler para o sistema Solar:

$$(2P(\text{ano}))^2 = a(\text{UA})^3$$

$$\begin{aligned}P &= \frac{1}{2} \left( \frac{r_1 + r_2}{2} \right)^{\frac{3}{2}} \\ P &= 0,707 \text{ ano}\end{aligned}$$

Logo:

$$\sum \frac{|\Delta \vec{v}|}{P} = \frac{5,566}{0,707} = 7,9 \text{ km/s/ano}$$

b) Novamente, basta usarmos as fórmulas já deduzidas. Nesse caso, note que  $r = 2,5UA$ .

$$\Delta v = \Delta v_1 + \Delta v_2 + \Delta v_3$$

$$\begin{aligned}\Delta v &= \sqrt{\frac{GM}{r_1}} \left( \sqrt{\frac{2r}{r_1 + r}} - 1 \right) + \sqrt{\frac{2GM}{r}} \left( \sqrt{\frac{r_2}{r_2 + r}} - \sqrt{\frac{r_1}{r_1 + r}} \right) + \sqrt{\frac{GM}{r_2}} \left( \sqrt{\frac{2r}{r_2 + r}} - 1 \right) \\ \Delta v &= 10,732 \text{ km/s}\end{aligned}$$

Considerando o período em anos e usando os raios orbitais em UA, o intervalo de tempo necessário para a manobra ocorrer é:

$$\begin{aligned}P &= \frac{1}{2} \sqrt{\left( \frac{r_1 + r}{2} \right)^3} + \frac{1}{2} \sqrt{\left( \frac{r_2 + r}{2} \right)^3} \\ P &= 2,582 \text{ ano}\end{aligned}$$

Portanto:

$$\sum \frac{|\Delta \vec{v}|}{P} = \frac{10,732}{2,582} = 4,2 \text{ km/s/ano}$$

c) Como a razão combustível/tempo é maior para a transferência de Hohmann, concluímos que, nesse caso, a opção mais vantajosa é a transferência bielíptica.

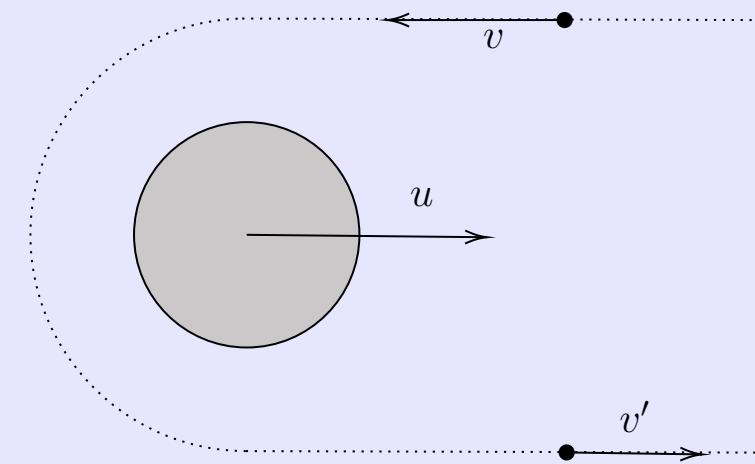
### 2.5.5 Estilingue gravitacional

Para finalizar nosso estudo sobre transferências orbitais, uma última manobra importante de ser mencionada e já usada em sondas espaciais, como as Voyagers e a Galileu, é o **estilingue gravitacional**. Essa técnica pode ser resumida como um tipo de "**colisão gravitacional**", em que uma nave que se encontra nas imediações de um planeta utiliza o campo gravitacional produzido por este para aumentar sua velocidade com o mínimo gasto de combustível. É claro que ambos os corpos não colidem entre si, assim como em uma colisão convencional, mas eles trocam energia cinética e momento linear entre si. Por esse motivo que, para resolver problemas envolvendo o estilingue gravitacional, é interessante trabalhar com as ideias de **conservação de energia** e de **quantidade de movimento**, conforme pode ser visto nos exemplos abaixo.

#### Exemplo 37: OBF 2011

O efeito estilingue gravitacional já foi bastante usado para impulsionar naves e sondas espaciais sem gasto de combustível, apenas aproveitando-se do movimento de planetas. A sonda Cassini, lançada em 15 de outubro de 1997, aproveitou muito deste efeito, sendo acelerada duas vezes por Vênus, depois pela Terra e Júpiter, segundo para Saturno, seu destino final, chegando lá em 11 de Julho de 2004.

Consideremos um modelo simples para entender o mecanismo. Suponha uma nave se aproximando com velocidade  $v$  de um planeta (muito mais pesado que a nave) que se move em sua direção com uma velocidade  $u$ . Estas velocidades estão sendo medidas em relação a um referencial inercial. Para simplificar, assuma que a nave apenas inverta o sentido de sua velocidade ao contornar o astro e que seus motores permaneçam desligados, isto é, ela contorna o planeta somente devido a atração gravitacional dele. A nave é então lançada com velocidade  $v'$ , contrária à sua velocidade inicial.



Calcule então  $v'$  em função de  $v$  e  $u$ , assumindo que todas essas velocidades são paralelas.

### Solução 37

Esse é um exemplo mais simples, em que as velocidades são paralelas.

Sendo  $m$  a massa da nave,  $M$  a massa do planeta e  $u'$  a velocidade do planeta após o efeito, temos, por conservação do momento linear:

$$\begin{aligned} mv - Mu &= mv' + Mu' \\ u' &= u - \frac{m}{M}(v + v') \end{aligned}$$

Por conservação da energia mecânica:

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Mu^2 = \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}Mu'^2$$

Note que desprezamos a energia potencial gravitacional na expressão anterior, pois o efeito do estilingue começa e termina quando a nave está situada a uma distância significativamente alta do planeta.

Juntando ambas as expressões, temos que:

$$\begin{aligned} mv^2 + Mu^2 &= mv'^2 - M \left( u - \frac{m}{M}(v + v') \right)^2 \\ mv^2 &= mv'^2 - 2um(v + v') + \frac{m^2}{M}(v + v')^2 \end{aligned}$$

Como  $M \gg m$ , podemos desprezar o termo  $\frac{m^2}{M}(v + v')^2$ . Assim:

$$(v + v')(v - v') = -2u(v + v') \rightarrow \boxed{v' = v + 2u}$$

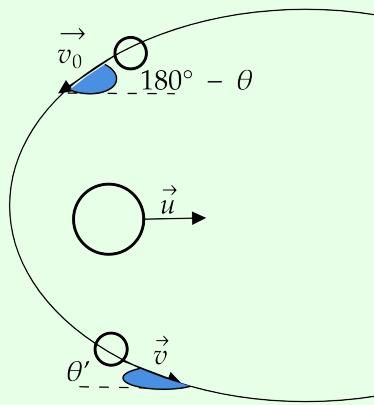
Na questão anterior, as velocidades eram paralelas. Entretanto, existem casos em que essas velocidades não são paralelas entre si. Para entender esse exemplo, veja a questão abaixo.

### Exemplo 38

Obtenha uma expressão para a velocidade final de uma nave após passar pelo efeito do estilingue gravitacional ao contornar um determinado planeta. Considere que a nave tenha uma velocidade inicial  $v_0$  que faz um ângulo  $\theta$  com a velocidade orbital do planeta e que o planeta tenha uma velocidade orbital  $u$ .

### Solução 38

Resolveremos o problema (representado na figura abaixo) considerando o referencial da estrela orbitada pelo planeta



A velocidade do planeta pode ser decomposta nas direções vertical e horizontal. Consideraremos  $\hat{x}$  como a direção horizontal e  $\hat{y}$  a direção vertical. Pela simetria da situação, temos que  $v_{0y} = v_y$ , ou seja, apenas a velocidade no eixo horizontal se altera durante o efeito do estilingue. Por conservação do momento linear:

$$Mu - mv_{0x} = mv_x + Mu' \rightarrow -m(v_{0x} + v_x) = M(u - u')$$

Por conservação da energia:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}Mu^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Mu'^2$$

Como  $v_0^2 = v_{0y}^2 + v_{0x}^2$  e  $v^2 = v_x^2 + v_y^2$ , temos que:

$$m(v_{0x}^2 + v_{0y}^2) + Mu^2 = m(v_x^2 + v_y^2) + Mu'^2 \rightarrow m(v_{0x}^2 - v_x^2) = M(u^2 - u'^2)$$

Dividindo as duas expressões que obtivemos:

$$-\left(\frac{v_{0x}^2 - v_x^2}{v_{0x} + v_x}\right) = \frac{u^2 - u'^2}{u - u'}$$

$$v_x - v_{0x} = u + u' \rightarrow v_x = v_{0x} + u + u'$$

Como a massa do planeta é muito maior que a da nave,  $u' \approx u$ . Além disso, decompondo a velocidade  $v_0$ , temos:  $v_{0x} = v_0 \cos(180^\circ - \theta) = -v_0 \cos \theta$  e  $v_{0y} = v_0 \sin \theta = v_0 \sin(180^\circ - \theta) = v_0 \sin \theta$ . Logo:

$$v_x = 2u - v_0 \cos \theta$$

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 \rightarrow v^2 = (2u - v_0 \cos \theta)^2 + (v_0 \sin \theta)^2 = v_0^2 + 4u^2 - 4uv_0 \cos \theta$$

Portanto:

$$v = \sqrt{v_0^2 + 4u^2 - 4uv_0 \cos \theta}$$

Perceba que, quando  $\theta = 180^\circ$ , temos a máxima velocidade, dada por:

$$v = \sqrt{(v_0 + 2u)^2} \rightarrow v = v_0 + 2u$$

Assim, recaímos no exemplo anterior, quando as velocidades são paralelas.

## 2.6 Força de maré

### 2.6.1 Referencial não inercial e força de Einstein

Já sabemos do capítulo anterior que o **referencial não inercial** é aquele que está acelerado em relação a um referencial inercial. Mais precisamente é um referencial em que não são válidas as leis de Newton. É por esse motivo que definimos a **força fictícia**, também chamada de **força inercial**, para resolvemos de maneira mais fácil problemas que envolvem esses tipos de referenciais.

Essa força, na realidade, existe e é sentida por aqueles que estão no referencial não inercial, mas ela possui essa nomenclatura por não surgir de uma interação entre os corpos. Um exemplo dessa força é a **força de Einstein**.

Para você entender melhor, basta pensar no exemplo do capítulo anterior da nave espacial que se move com uma aceleração  $\vec{A}$  constante em relação a um referencial inercial e que possui um astronauta em seu interior. Como já estudado, ele observará estrelas distantes e paradas (referencial inercial) se movendo com uma aceleração  $-\vec{A}$ , pois o astronauta estará se movendo junto com a nave e terá a sensação de estar parado e dos outros objetos fora da nave estarem se movendo.

Ainda usando esse exemplo, quando essa pessoa solta, inicialmente do repouso, um objeto dentro da nave, ela verá - em seu referencial - o objeto percorrer um arco de parábola com aceleração  $-\vec{A}$ , até atingir o chão da nave. Mas, quando analisamos essa situação de um referencial inercial, percebemos que o objeto permanecerá em equilíbrio, pois não há gravidade e, consequentemente, força atuando sobre ele, porém, como a nave está subindo com aceleração constante  $\vec{A}$ , o chão do veículo espacial irá se aproximar do objeto conforme o tempo passa.

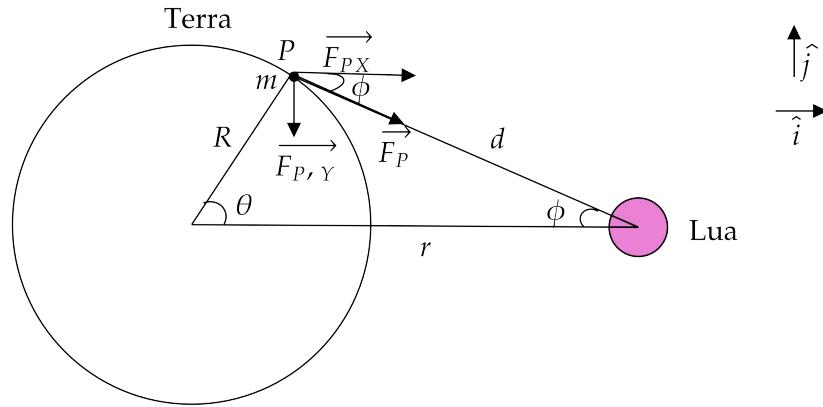
Isso nos traz um questionamento interessante: por quê, para o observador dentro da nave, o objeto "cai", sendo que ambos não estão submetidos à aceleração gravitacional? Devido à ação de uma força inercial ou força de Einstein! Em outras palavras, é como se uma força  $\vec{F}_{in} = -m\vec{A}$  agisse sobre esse objeto, criando a sensação de que ele está "caindo" acelerado para a pessoa dentro da nave espacial.

Considerando a Terra um referencial não inercial, devido à interação com outros astros celestes e ao movimento de rotação, uma consequência das forças de Einstein são as **forças de maré**.

### 2.6.2 Força de maré

Na maioria dos problemas, tratamos os astros celestes como corpos pontuais. Entretanto, eles são **corpos extensos** e, por esse motivo, dois pontos distintos de um corpo celeste estão sujeitos a **acelerações gravitacionais distintas** quando esse astro interage gravitacionalmente com outro. Em virtude dessa diferença e da interação gravitacional entre a Terra e a Lua e entre a Terra e o Sol, temos o **fenômeno das marés**!

Nesse sentido, a **força de maré** é definida como a força associada à diferença da aceleração gravitacional entre dois pontos de um determinado astro celeste em razão da interação com outro corpo celeste. Assim, considerando o sistema Terra-Lua, iremos deduzir a expressão da força de maré. A figura abaixo ilustra a situação.



Vale ressaltar que, na imagem, os vetores  $\hat{i}$  e  $\hat{j}$  são vetores unitários. Como, em algumas situações, é mais fácil trabalhar com vetores, usaremos os vetores unitários para definirmos as direções e os sentidos e calcularmos a força de maré  $\Delta\vec{F}$  e seu módulo.

Iremos analisar a situação no referencial da Terra. Por conta da atração gravitacional da Lua, o planeta acelera para a direita com uma aceleração de módulo  $\frac{GM_L}{r^2}$ . Assim como explicado anteriormente, nós, aqui da Terra, veremos os corpos se movendo com uma aceleração extra  $-\frac{GM_L}{r^2}$ . Analogamente ao nosso exemplo da nave espacial, é como se uma força inercial  $\vec{F}_{in}$  agisse sobre os corpos do planeta. Sendo  $M_L$  a massa da Lua, o valor dessa força que atua sobre o corpo de massa  $m$  da figura vale:

$$\vec{F}_{in} = -\frac{GmM_L}{r^2}\hat{i}$$

Decompondo a força gravitacional  $\vec{F}_P$ :

$$\begin{aligned}\vec{F}_{PX} &= \frac{GmM_L}{d^2} \cos\phi\hat{i} \\ \vec{F}_{PY} &= -\frac{GmM_L}{d^2} \sin\phi\hat{j}\end{aligned}$$

Portanto, a força de maré será:

$$\begin{aligned}\Delta\vec{F} &= \vec{F}_P + \vec{F}_{in} = \vec{F}_{PX} + \vec{F}_{PY} + \vec{F}_{in} \\ \Delta\vec{F} &= \frac{GmM_L \cos\phi\hat{i}}{d^2} - \frac{GmM_L\hat{i}}{r^2} - \frac{GmM_L \sin\phi\hat{j}}{d^2} \\ \Delta\vec{F} &= GmM_L \left( \frac{\cos\phi}{d^2} - \frac{1}{r^2} \right) \hat{i} - \frac{GmM_L \sin\phi\hat{j}}{d^2}\end{aligned}$$

Para calcularmos o valor de  $d$ , temos, pelo Teorema de Pitágoras:

$$d^2 = (R \sin\theta)^2 + (r - R \cos\theta)^2 = r^2 - 2Rr \cos\theta + R^2$$

Como  $R \ll r$ , temos:

$$d^2 \approx r^2 - 2rR \cos \theta = r^2 \left(1 - \frac{2R \cos \theta}{r}\right)$$

Logo:

$$\Delta \vec{F} = \frac{GmM_L}{r^2} \left[ \cos \phi \left(1 - \frac{2R \cos \theta}{r}\right)^{-1} - 1 \right] \hat{i} - \frac{GmM_L}{r^2} \left(1 - \frac{2R \cos \theta}{r}\right)^{-1} \sin \phi \hat{j}$$

Podemos usar a aproximação binomial  $(1 + x)^n \approx 1 + nx$ , para  $x \ll 1$ . Assim:

$$\Delta \vec{F} = \frac{GmM_L}{r^2} \left[ \cos \phi \left(1 + \frac{2R}{r} \cos \theta\right) - 1 \right] \hat{i} - \frac{GmM_L}{r^2} \left(1 + \frac{2R}{r} \cos \theta\right) \sin \phi \hat{j}$$

Essa expressão pode parecer um pouco assustadora, mas, na grande parte das questões, usamos  $\phi$  muito pequeno, o que nos permite fazer aproximações. Com isso:

$$\cos \phi \approx 1$$

$$R \sin \theta \approx r \sin \phi \rightarrow \sin \phi \approx \frac{R \sin \theta}{r}$$

A expressão de reduz a:

$$\Delta \vec{F} = \frac{GmM_L}{r^2} \frac{2R \cos \theta}{r} \hat{i} - \frac{GmM_L}{r^2} \frac{R \sin \theta}{r} \hat{j}$$

$$\boxed{\Delta \vec{F} = \frac{GmM_L R}{r^3} (2 \cos \theta \hat{i} - \sin \theta \hat{j})}$$

Vamos calcular o módulo de  $\Delta \vec{F}$ :

$$\Delta F^2 = \left( \frac{GmM_L R}{r^3} \right)^2 (4 \cos^2 \theta \hat{i}^2 - 4 \cos \theta \sin \theta \hat{i} \hat{j} + \sin^2 \theta \hat{j}^2)$$

$$\Delta F^2 = \left( \frac{GmM_L R}{r^3} \right)^2 (4 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta)$$

$$\boxed{\Delta F = \frac{GmM_L R}{r^3} \sqrt{3 \cos^2 \theta + 1}}$$

A partir dessa fórmula, note que, quando  $\theta = 0^\circ$  e  $\theta = 180^\circ$ , a intensidade da força de maré é  $\Delta F = \frac{2GmM_L R}{r^3}$  e, quando  $\theta = 90^\circ$  e  $\theta = 270^\circ$ ,  $\Delta F = \frac{GmM_L R}{r^3}$ .

### Exemplo 39: IOAA 2015

A atividade vulcânica de Io, cujo período de rotação é sincronizado com seu período orbital, foi proposta como o resultado do aquecimento devido, principalmente, à maré provocada por

Júpiter. A força de maré resultante sobre um corpo é a diferença das forças gravitacionais experimentadas pelos lados próximos e distantes deste corpo, provocadas por outro corpo. Medidas das distorções da superfície de Io feitas por mapeamento de satélite com altímetro de radar indicam que a superfície sobe e desce em até 100 m durante meia órbita. Apenas as camadas superficiais se movem desta quantidade. As camadas internas se movem menos, de modo que assumiremos que, na média, toda a massa de Io se move por 50 m. Considere Io como composto por dois hemisférios, cada um deles tratado como uma partícula pontual. Calcule a potência média do aquecimento de maré devido à força gravitacional de Júpiter sobre Io.

**Dica:** use a aproximação  $(1 + x)^n \approx 1 + nx$ , para pequenos valores de x. São dados:

Massa de Io:  $m_{Io} = 8,931938 \times 10^{22} kg$ .

Perijove (distância mínima até Júpiter):  $r_{peri} = 420000 km$ .

Apojove (distância máxima até Júpiter):  $r_{apo} = 423400 km$ .

Período orbital de Io:  $152853 s$ .

Raio de Io:  $R_{Io} = 1821,6 km$ .

Massa de Júpiter:  $M_J = 1,89813 \times 10^{27} kg$ .

### Solução 39

Assumindo que a massa pontual do hemisfério está localizada em  $\frac{R_{Io}}{2}$ , temos que:

$$\begin{aligned} F &= \frac{GM_J m_{Io}}{2 \left( r + \frac{R_{Io}}{2} \right)^2} - \frac{GM_J m_{Io}}{2 \left( r - \frac{R_{Io}}{2} \right)^2} \\ F &= GM_J \frac{m_{Io}}{2} \left[ \frac{1}{\left( r + \frac{R_{Io}}{2} \right)^2} - \frac{1}{\left( r - \frac{R_{Io}}{2} \right)^2} \right] \\ F &= \frac{GM_J m_{Io}}{2r^2} \left( \frac{-2R_{Io}}{r} \right) \\ F &= -\frac{GM_J m_{Io} R_{Io}}{r^3} \end{aligned}$$

Desse modo, a diferença entre a força experimentada no perijove e no apoijove será:

$$\begin{aligned} \Delta F &= GM_J m_{Io} R_{Io} \left( \frac{1}{r_{peri}^3} - \frac{1}{r_{apo}^3} \right) \\ \Delta F &\approx 6,65 \cdot 10^{18} N \end{aligned}$$

Portanto, a potência média do aquecimento da maré por conta da força gravitacional de Júpiter é:

$$\bar{P} = \frac{\bar{E}}{\Delta t} = \frac{\Delta F d}{\Delta t}$$

Considerando  $d = 50 m$  e  $\Delta t = \frac{1}{2} T_{Io}$  (tempo de meia órbita), temos que:

$$\bar{P} = \frac{2\Delta F d}{T_{Io}} \rightarrow \boxed{\bar{P} = 4,35 \cdot 10^{15} W}$$

Ademais, conforme dito anteriormente, essa força ocasiona o **movimento periódico das águas do mar**, conhecido como marés. Além da atração gravitacional da Lua, temos, ainda que em menor intensidade, a atração gravitacional do Sol, gerando as **marés solares e lunares**. Dessa forma, quando ocorre um alinhamento entre Sol, Terra e Lua, as forças da maré provocadas pela Lua e pelo Sol estão no mesmo sentido e se somam, resultando em um efeito das marés mais intenso, conhecido como **marés vivas**. Quando a Lua está em quadratura, as forças estão no sentido contrário, ocasionando marés mais atenuadas, chamadas de **marés mortas**. As figuras abaixo ilustram melhor esse fenômeno. Elas estão fora de escala e as deformações da maré estão exageradas.

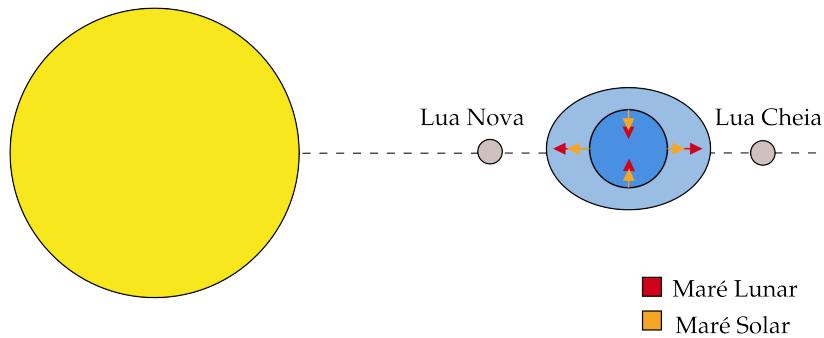


Figura 13: Marés vivas

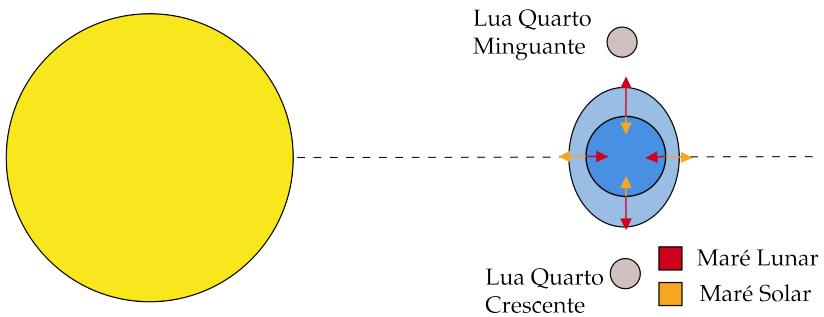


Figura 14: Marés mortas

### 2.6.3 Espagueticização e Limite de Roche

A **espaguetificação**, também conhecida como **"evento de ruptura das marés"**, caracteriza-se pelo alongamento vertical e compressão horizontal de objetos em formas alongadas quando passam em um campo gravitacional muito intenso. Esse evento é causado justamente pelas forças de maré.

Possivelmente, você já deve ter escutado esse termo, associado, principalmente, aos buracos negros. De fato, quando objetos se encontram nas proximidades do horizonte de eventos de um buraco negro, as forças gravitacionais de maré "esticam" o corpo, separando as partes mais próximas do centro daquelas mais distantes, ou seja, alongando-o e rompendo sua integridade física.

Assim como no exemplo do buraco negro, quando corpos celestes ou satélites se aproximam de outros astros de tal maneira que as **forças de maré** são mais intensas que a **força de atração**

**gravitacional** gerada pela massa do próprio corpo, ele se despedaça. É por esse motivo que definimos o **Límite de Roche** como a distância mínima que dois corpos podem se aproximar sem que haja o **rompimento** de algum deles pela ação das forças de maré. Iremos deduzir a expressão do Límite de Roche para **satélites rígidos ou rochosos**. Veja a seguinte imagem:

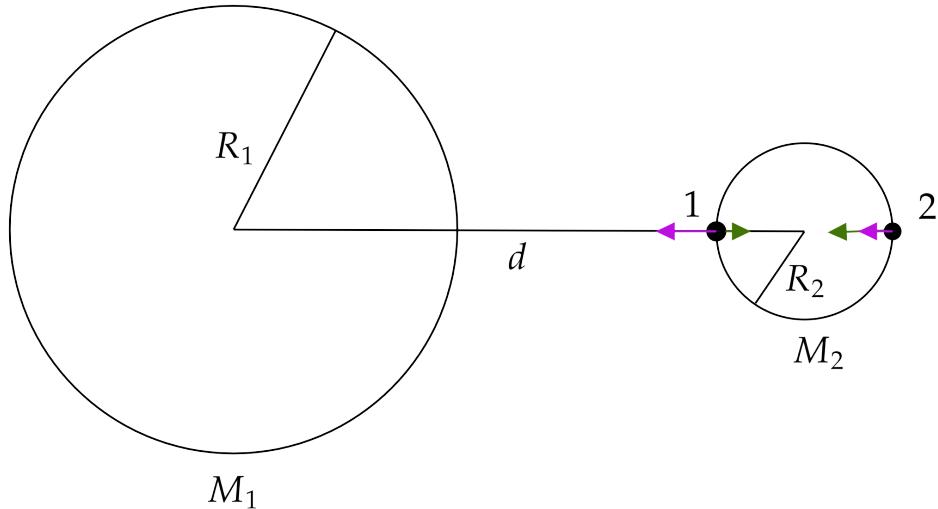


Figura 15: Límite de Roche

A partir da definição apresentada:

$$\begin{aligned} g_1 &= g_2 \\ \frac{GM_1}{(d - R_2)^2} - \frac{GM_2}{R_2^2} &= \frac{GM_1}{(R_2 + d)^2} + \frac{GM_2}{R_2^2} \\ \frac{GM_1}{d^2 \left(1 - \frac{R_2}{d}\right)^2} - \frac{GM_1}{d^2 \left(1 + \frac{R_2}{d}\right)^2} &= \frac{2GM_2}{R_2^2} \end{aligned}$$

Como  $R_2 \ll d$ , usaremos a aproximação binomial:

$$\begin{aligned} \frac{GM_1}{d^2} \left[ 1 + \frac{2R_2}{d} - \left( 1 - \frac{2R_2}{d} \right) \right] &= \frac{2GM_2}{R_2^2} \\ \frac{4R_2M_1}{d^3} &= \frac{2M_2}{R_2^2} \\ d &= R_2 \left( \frac{2M_1}{M_2} \right)^{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

Contudo, podemos expressar essa fórmula em função das densidades dos dois corpos. Como  $\rho_1 = \frac{3M_1}{4\pi R_1^3}$  e  $\rho_2 = \frac{3M_2}{4\pi R_2^3}$ , temos que:  $M_1 = \frac{4\pi R_1^3 \rho_1}{3}$  e  $M_2 = \frac{4\pi R_2^3 \rho_2}{3}$ . Portanto:

$$d = R_2 \left( \frac{2R_1^3 \rho_1}{R_2^3 \rho_2} \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$d = R_1 \left( \frac{2\rho_1}{\rho_2} \right)^{\frac{1}{3}}$$

Deduzimos a expressão para corpos rígidos. Quando trabalhamos com **corpos deformáveis (fluidos)**, é necessário estimar a deformação elíptica ocasionada no corpo em decorrência das forças de maré. Nesse caso, a fórmula será:

$$d = 2,44R_1 \left( \frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^{\frac{1}{3}}$$

Perceba que a única diferença para a fórmula anterior é a constante numérica, já que  $2^{\frac{1}{3}} \approx 1,26$ .

## 2.7 Pontos de Lagrange

Os pontos de Lagrange são definidos como os pontos em que um objeto, no referencial da Terra, se encontra em equilíbrio estático, em outras palavras, são os locais em que um corpo consegue orbitar o Sol com a mesma velocidade angular que a Terra. Existem no total 5 pontos de Lagrange, observe a figura a seguir

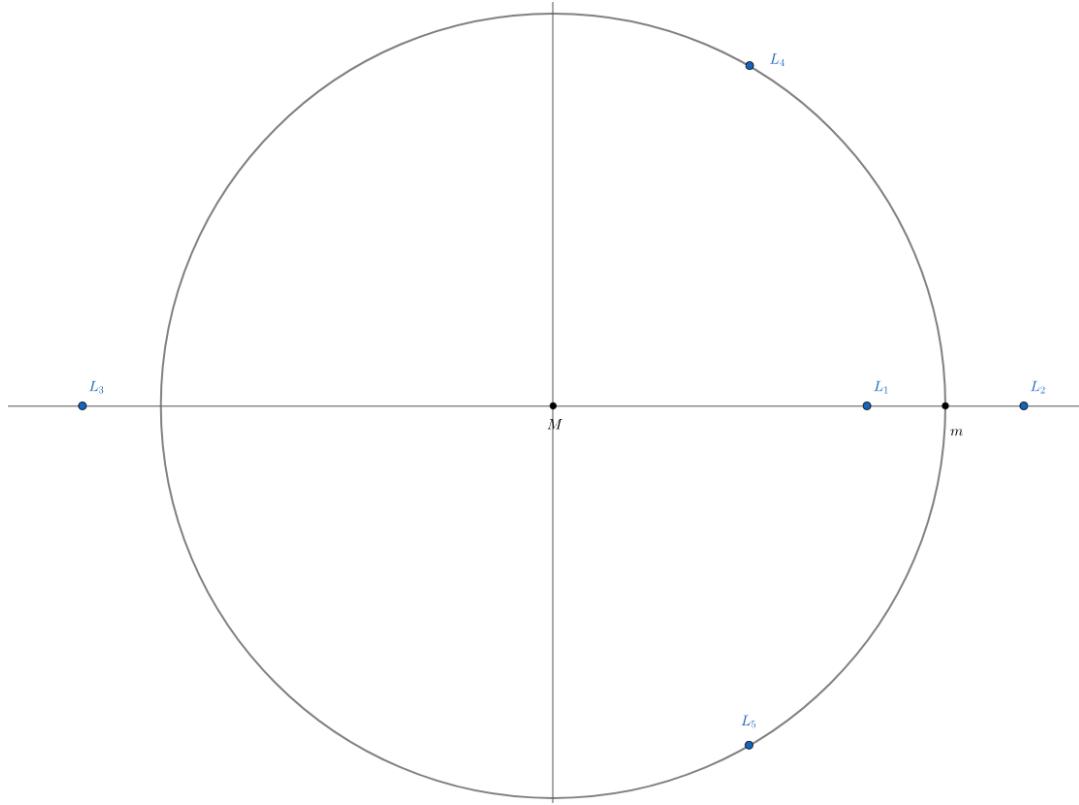


Figura 16: Esquema dos pontos de Lagrange

A seguir, vamos deduzir a expressão para os pontos, de antemão, já podemos ressaltar que os pontos  $L_1$ ,  $L_2$  e  $L_3$  se encontram na mesma linha, enquanto os pontos  $L_4$  e  $L_5$  formam triângulos equiláteros

com as massas  $M$  e  $m$ . Em primeira aproximação, vamos considerar que a massa  $m$ , orbita a massa  $M$  em uma órbita circular de raio  $a$ , onde  $m \ll M$ .

Primeiro, vamos considerar o ponto  $L_2$  e mudar para o referencial em que a Terra está parada. Neste referencial á uma força fictícia  $\mathbf{F} = -\mu\omega^2\mathbf{r}$ , onde  $\mu$  é a massa do corpo orbitando o ponto  $L_2$ , observe o esquema

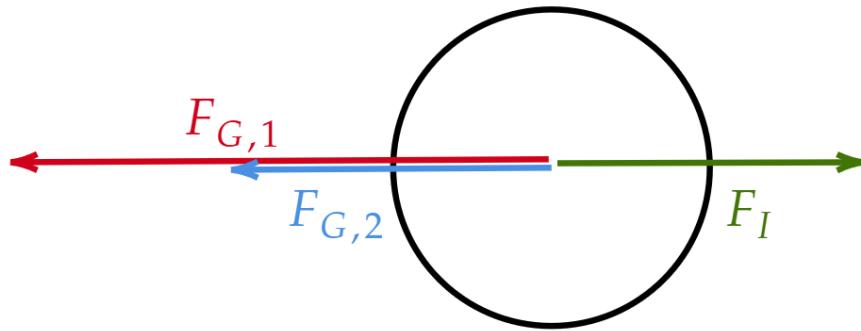


Figura 17: Forças de Lagrange

Aqui,  $F_{G,1}$  e  $F_{G,2}$  são as forças gravitacionais e  $F_I$  é a força fictícia. A soma de todas essas forças deve ser nula, uma vez que nesse referencial, o corpo está parado. Denotando por  $x$  a distância entre a órbita da Terra e o ponto  $L_2$ :

$$\frac{GM\mu}{(a+x)^2} + \frac{Gm\mu}{x^2} = \mu\omega^2(a+x)$$

É fácil de provar que a velocidade angular da Terra é dada por:

$$\omega^2 = \frac{GM}{a^3}$$

Dividindo a expressão por  $G\mu$  e simplificando:

$$\frac{M}{a^2} \left(1 + \frac{x}{a}\right)^{-2} + \frac{m}{x^2} = \frac{M}{a^2} \left(1 + \frac{x}{a}\right)$$

A distância  $x$  é muito menor do que  $a$ , então temos que  $a/x \ll 1$ , logo podemos utilizar a aproximação

$$\left(1 + \frac{x}{a}\right)^n = 1 + \frac{nx}{a}$$

Utilizando essa aproximação, temos:

$$\frac{M}{a^2} \left(1 - \frac{2x}{a}\right) + \frac{m}{x^2} = \frac{M}{a^2} \left(1 + \frac{x}{a}\right)$$

Reorganizando e isolando  $x$

$$\frac{m}{x^3} = \frac{3M}{a^3} \rightarrow x = \left(\frac{m}{3M}\right)^{1/3} a$$

Fica a cargo do leitor o cálculo da distância do ponto  $L_3$  para a órbita da Terra.

**Lembrete 17:** Por que os pontos  $L_4$  e  $L_5$  formam um triângulo equilátero com a Terra e o Sol?

Para resolver essa questão, vamos utilizar vetores e suas propriedades. Observe a seguinte figura de apoio:

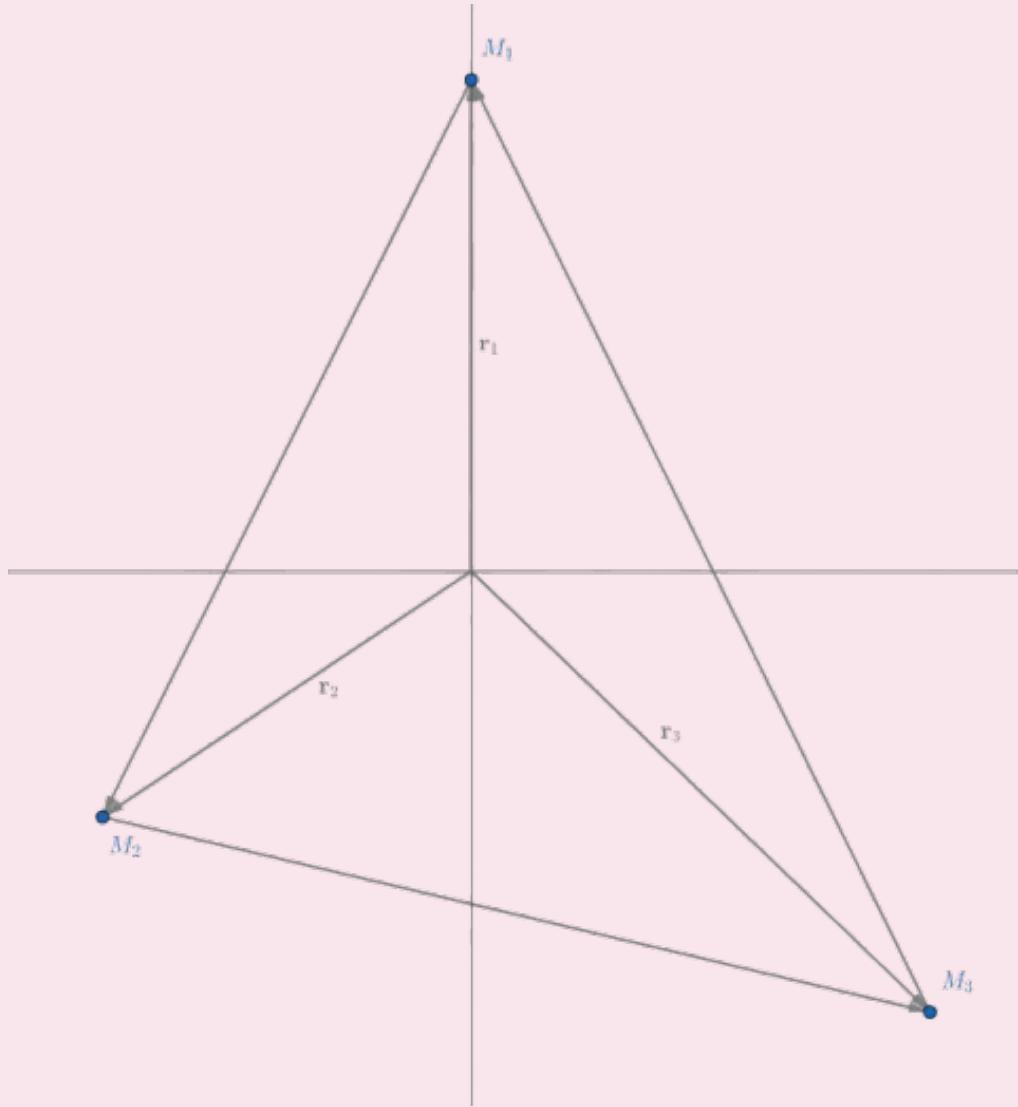


Figura 18: Sistemas de três corpos

Aqui, consideraremos a origem do sistema no centro de massa. A força gravitacional na forma vetorial é

$$\mathbf{F}_{1,2} = \frac{GM_1M_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$$

Todos os corpos devem rotacionar em torno do  $CM$  com a mesma velocidade angular,  $\omega$ . Como estão em equilíbrio

$$\mathbf{F}_{1,2} + \mathbf{F}_{1,3} = M_1\omega^2\mathbf{r}_1$$

$$\mathbf{F}_{2,1} + \mathbf{F}_{2,3} = M_2\omega^2\mathbf{r}_2$$

$$\mathbf{F}_{3,1} + \mathbf{F}_{3,2} = M_3\omega^2\mathbf{r}_3$$

E pelo teorema do centro de massa

$$M_1\mathbf{r}_1 + M_2\mathbf{r}_2 + M_3\mathbf{r}_3 = 0$$

Escrevendo explicitamente as forças

$$\frac{GM_1M_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) + \frac{GM_1M_3}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3|^3}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3) = M_1\omega^2\mathbf{r}_1$$

$$\frac{GM_2M_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) + \frac{GM_2M_3}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3|^3}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3) = M_2\omega^2\mathbf{r}_2$$

$$\frac{GM_3M_1}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1|^3}(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1) + \frac{GM_3M_2}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2|^3}(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2) = M_3\omega^2\mathbf{r}_3$$

Para facilitar, vamos definir  $a_{i,j} = a_{j,i} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$ . Reorganizando as expressões,

$$\left( \omega^2 - \frac{GM_2}{a_{1,2}^3} - \frac{GM_3}{a_{1,3}^3} \right) \mathbf{r}_1 + \frac{GM_2}{a_{1,2}^3} \mathbf{r}_2 + \frac{GM_3}{a_{1,3}^3} \mathbf{r}_3 = 0$$

$$\frac{GM_1}{a_{1,2}^3} \mathbf{r}_1 + \left( \omega^2 - \frac{GM_1}{a_{1,2}^3} - \frac{GM_3}{a_{2,3}^3} \right) \mathbf{r}_2 + \frac{GM_3}{a_{2,3}^3} \mathbf{r}_3 = 0$$

$$\frac{GM_1}{a_{1,3}^3} \mathbf{r}_1 + \frac{GM_2}{a_{2,3}^3} \mathbf{r}_2 + \left( \omega^2 - \frac{GM_1}{a_{1,3}^3} - \frac{GM_2}{a_{2,3}^3} \right) \mathbf{r}_3 = 0$$

Note a semelhança disso com o teorema do centro de massa, a única maneira disso ser possível é se os coeficientes dos vetores  $\mathbf{r}_i$  forem proporcionais a  $M_i$ , desse modo, pegando como exemplo a primeira equação

$$\frac{\omega^2 - \frac{GM_2}{a_{1,2}^3} - \frac{GM_3}{a_{1,3}^3}}{M_1} = \frac{G}{a_{1,2}^3} = \frac{G}{a_{1,3}^3}$$

$$\frac{G}{a_{1,2}^3} = \frac{\omega^2 - \frac{Gm_1}{a_{1,2}^3} - \frac{Gm_3}{a_{2,3}^3}}{m_2} = \frac{G}{a_{2,3}^3}$$

$$\frac{G}{a_{1,3}^3} = \frac{G}{a_{2,3}^3} = \frac{\omega^2 - \frac{Gm_1}{a_{1,3}^3} - \frac{Gm_2}{a_{2,3}^3}}{m_3}$$

Analisando as equações a seguir, podemos concluir que  $a_{1,2} = a_{1,3} = a_{2,3}$ , logo os corpos formam um triângulo equilátero. Podemos também resolver para  $\omega$  chegando em:

$$\omega = \sqrt{\frac{G(m_1 + m_2 + m_3)}{a^3}}$$

## 2.8 Tempo em órbitas

Medir o tempo em órbitas é uma tarefa super importante para a astronomia, pois podemos calcular quando devemos fazer determinados lançamentos, se vamos ser atingidos por um cometa, etc.

Há dois principais métodos para calcular o tempo em órbitas, o primeiro deles sendo o **método geométrico**, utilizando a Segunda Lei de Kepler, já o segundo utiliza a chamada **Equação de Kepler**, que vamos derivar nessa seção.

### 2.8.1 Método Geométrico

Já sabemos da seção 1.2 que a Segunda Lei de Kepler nos diz que a velocidade areolar, isto é, a "área varrida" por unidade de tempo é constante e vale:

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{L}{2m}$$

O método geométrico consiste em calcular a "área varrida" e utilizar a famosa *regra-de-três*. Vamos para alguns exemplos:

#### Exemplo 40

Calcule a razão entre o tempo necessário para um planeta cruzar o Semi-eixo-menor duas vezes seguidas, cruzando o afélio e o período da órbita.

Deixe sua resposta em função do período da órbita,  $T$ , semi eixo maior  $a$  e excentricidade  $e$ .

#### Solução 40

O esquema da situação é o seguinte

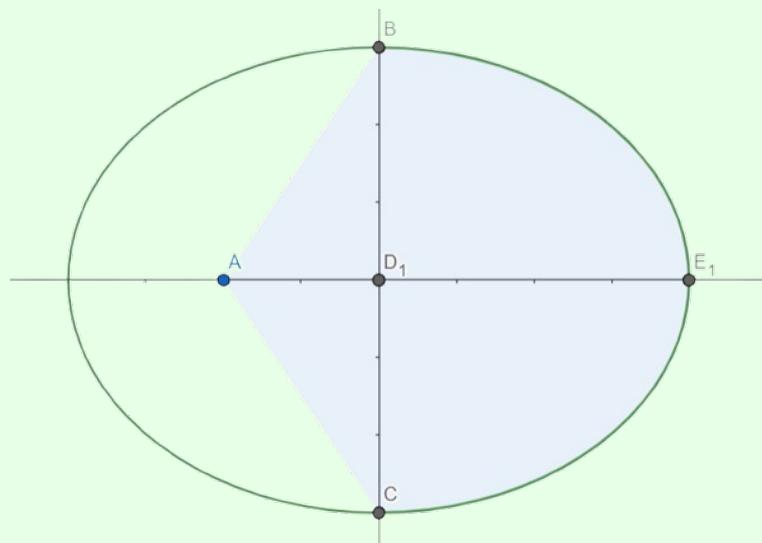


Figura 19: Esquema da Situação

O que precisamos para resolver esse problema é calcular a área varrida pelo planeta, a área sombreada. Podemos dividir essa área em figuras que sabemos calcular a área. Nessa questão é meio óbvio que a figura é formada por dois triângulos iguais ( $\Delta ABD_1 = \Delta ACD_1$ ) e metade da área de uma elipse. Ao definirmos por  $a$  o semi eixo maior,  $b$  o semi eixo menor e  $c$  a distância dos focos a origem, a área varrida é dada por:

$$A = 2 \left( \frac{cb}{2} \right) + \frac{1}{2}(\pi ab)$$

Expressando apenas em termos de  $a$  e  $e$ , temos  $c = ae$ ,  $b = a\sqrt{1 - e^2}$

$$A = a^2 e \sqrt{1 - e^2} + \frac{\pi}{2} a^2 \sqrt{1 - e^2} \equiv a^2 \sqrt{1 - e^2} \left( e + \frac{\pi}{2} \right)$$

Utilizando a regra de três, temos:

$$\begin{array}{rcl} A_{total} & - & T \\ A & - & \Delta t \end{array}$$

Assim,  $\frac{\Delta t}{T} = \frac{A}{A_{total}}$ . Utilizando que a área total de uma elipse é  $A_{total} = \pi ab = \pi a^2 \sqrt{1 - e^2}$

$$\frac{\Delta t}{T} = \frac{a^2 \sqrt{1 - e^2} \left( e + \frac{\pi}{2} \right)}{\pi a^2 \sqrt{1 - e^2}}$$

Simplificando

$$\boxed{\frac{\Delta t}{T} = \frac{e}{\pi} + \frac{1}{2}}$$

Note que, para uma elipse  $1 > e > 0$  esse tempo é um pouco maior do que metade de um período, o que faz sentido, uma vez que o planeta é mais devagar nas proximidades do afélio.

### Lembrete 18

Todos os Problemas de tempo em órbitas que podem ser resolvidos utilizando o método geométrico consistem no mesmo passo a passo.

1. Desenhar a situação
2. Calcular a área varrida
3. Utilizar que  $\frac{\Delta t}{T} = \frac{\Delta A}{A}$

### Exemplo 41: PPP 88 - Adaptado

Um foguete é lançado de um planeta esférico de raio  $R$  e retorna a ele de tal forma que seu vetor velocidade no retorno é paralelo ao vetor velocidade no lançamento. A separação angular no centro do planeta entre os pontos de lançamento e chegada é  $\theta$ .

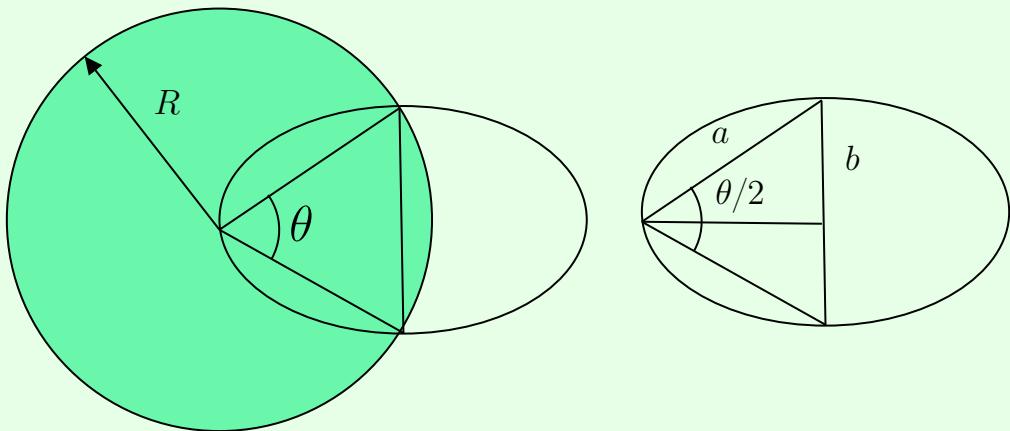
Quanto tempo dura o voo, se o período de um satélite orbitando o planeta logo acima de sua superfície é  $T_0$ ?

### Solução 41

Note que os pontos de início e fim da trajetória são as duas extremidades do eixo menor dessa trajetória. Assim, a distância do foco até uma extremidade do eixo menor é  $R$ . Então, a soma das distâncias dos dois focos até uma extremidade do eixo menor é  $2R$ , logo:

$$2a = 2R \Rightarrow a = R.$$

Veja a figura:



Vendo ela, percebe-se que a área varrida é:

$$A = \frac{1}{2}A_0 + a^2 \sin(\theta/2) \cos(\theta/2)$$

onde  $A_0 = \pi ab = \pi a^2 \sin \frac{\theta}{2}$  é a área total da elipse. Assim, a razão entre os períodos é dada por:

$$\frac{T}{T_0} = \frac{A}{A_0} = \boxed{\frac{1}{2} + \frac{\cos(\theta/2)}{\pi}}$$

### 2.8.2 Equação de Kepler

Para casos gerais, em que é difícil calcular a área, nós devemos usar a equação de Kepler, dada por:

$$M = E - e \sin E$$

Onde  $M$  é a anomalia média,  $E$  a anomalia excêntrica e  $e$  a excentricidade da órbita. Agora, vamos deduzir essa equação e entender cada um desses ângulos presentes na fórmula. Assim como veremos na próxima página, este método simplifica o nosso cálculo pois utiliza de uma órbita circular imaginária de raio  $a$  e brinca com a geometria.

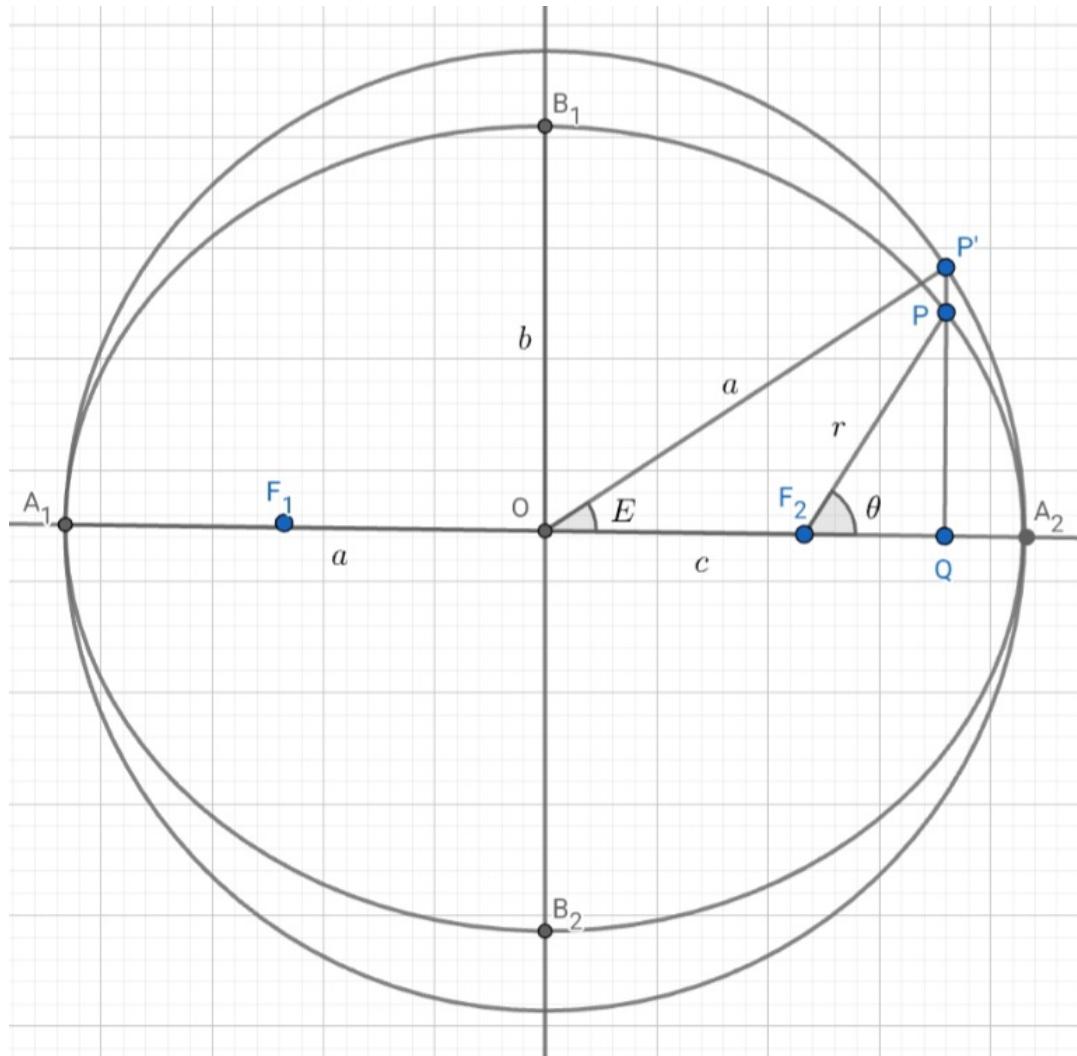


Figura 20: Anomalia excêntrica

Para começar, visualize na imagem acima que apresenta uma elipse de semieixo maior  $a$  e uma circunferência de raio  $a$  circunscrita à elipse os ângulos que representam a anomalia excêntrica  $E$  e a anomalia verdadeira  $\theta$ .

Pela figura, temos que:

$$\cos \theta = \frac{F_2 Q}{F_2 P} = \frac{F_2 P}{r} \rightarrow F_2 Q = r \cos \theta$$

Logo:

$$\cos E = \frac{c + F_2 Q}{a} = \frac{c + r \cos \theta}{a} = \frac{ea + r \cos \theta}{a}$$

Mas, como  $r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$ :

$$\cos\theta = \frac{a(1-e^2)}{er} - \frac{1}{e}$$

Assim:

$$\cos E = e + \frac{1-e^2}{e} - \frac{r}{ea}$$

Multiplicando toda a expressão por  $ea$  e reorganizando-a, concluímos que:

$$r = a(1 - e \cos E)$$

A partir dessa importante expressão, conseguimos calcular a anomalia excêntrica:

$$\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta} = a(1 - e \cos E)$$

Isolando  $E$ :

$$E = \cos^{-1} \left( \frac{e + \cos\theta}{1 + e \cos\theta} \right)$$

Agora, devemos encontrar uma forma de relacionarmos a anomalia média e a anomalia excêntrica. Pela segunda Lei de Kepler, sabemos que a velocidade areolar da órbita é constante; por isso, para usarmos essa proporcionalidade entre área e tempo, iremos calcular a área varrida entre o periastro e o ponto P da órbita. Essa área é obtida reduzindo a área correspondente do círculo de raio  $a$  circunscrito à elipse por uma razão axial  $b/a$ . Usando os colchetes para representar as áreas, temos:

$$\begin{aligned}[F_2PA_2] &= \frac{b}{a} [F_2P'A_2] \\ [F_2PA_2] &= \frac{b}{a} ([OP'A_2] - [OP'F_2]) \\ [F_2PA_2] &= \frac{b}{a} \left( \frac{1}{2} a \cdot aE - \frac{1}{2} ae \cdot a \sin E \right)\end{aligned}$$

Portanto:

$$[F_2PA_2] = \frac{ba}{2} (E - e \sin E)$$

Como a área da elipse é  $A = \pi ab$ , temos que  $\frac{ba}{2} = \frac{A}{2\pi}$ . Desse modo, sendo  $t$  o tempo decorrido desde a última passagem do corpo orbitante pelo periastro, podemos definir a anomalia média (em radianos) como:

$$M(t) = \frac{2\pi}{P} t$$

Uma maneira análoga de pensar na anomalia média é como se ela fosse o ângulo percorrido por uma órbita circular de raio igual ao semieixo maior, em um determinado período de tempo.

O fato mais importante sobre  $M$  é que a sua taxa de crescimento é constante, isto é,  $M \propto t$ .

Portanto, chegamos na famosa Equação de Kepler:

$$M = E - e \sin E$$

Conforme queríamos demonstrar!

### Exemplo 42: IOAA 2022

A órbita de Mercúrio possui uma excentricidade consideravelmente alta. Ademais, seu período de rotação é 2/3 de seu período sideral. Como resultado destes fatores, o Sol apresentará movimento retrógrado no céu de Mercúrio nas proximidades do periélio. Calcule a duração total desse movimento retrógrado aparente durante uma órbita de Mercúrio em torno do Sol. Escreva sua resposta em dias terrestres.

**Dados:**

1. Semi eixo mercúrio, 0,38 UA
2. excentricidade mercúrio,  $e = 0,2056$

### Solução 42

Na iminência do movimento retrógrado do Sol, a velocidade angular de rotação de mercúrio, é a mesma velocidade angular com que o mesmo orbita o Sol. Primeiramente, o exercício nos informa que:

$$T_{rot} = \frac{2}{3}T_s$$

Como  $\omega = 2\pi/T$ , logo:

$$\omega_{rot} = \frac{2\pi}{T_{rot}} = \frac{2\pi}{2T_s}3 = \frac{3\pi}{T_s}$$

Pela terceira lei de Kepler:

$$\omega_{rot} = 3\pi\sqrt{\frac{GM}{4\pi^2a^3}} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{GM}{a^3}}$$

A velocidade angular na translação pode ser calculada utilizando a equação vis-viva, e utilizando que  $\omega_t = v/r$ :

$$v^2 = GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) \rightarrow \omega_t^2 = \frac{GM}{r^2}\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$$

Contudo, igualando as velocidades angulares:

$$\frac{9GM}{4a^3} = \frac{2GM}{r^3} - \frac{GM}{r^2a}$$

$$\frac{9}{4a^3} = \frac{2}{r^3} - \frac{1}{r^2a}$$

Reorganizando, temos:

$$9r^3 + 4a^2r - 8a^3 = 0$$

Essa expressão pode ser resolvida utilizando a formula da equação cúbica, ou por iteração. Como  $a = 0,38$  UA, temos:

$$r = \left(\frac{8a^3 - 4a^2r}{9}\right)^{1/3} \approx 0,307 \text{ UA}$$

A excentricidade de Mercúrio é de  $e = 0,2056$ , podemos agora colocar isso na equação excêntrica da elipse:

$$r = a(1 - e \cos E) \rightarrow \cos E = \frac{1}{e} - \frac{r}{ae} = 0,934 \rightarrow E = 0,364 \text{ rad}$$

Agora, utilizando a equação de Kepler:

$$M = E - e \sin E$$

Por simetria, teremos que  $E_1 = 17,21^\circ$ ,  $E_2 = -E_1$  obtemos:

$$M_1 = 0,291 \text{ rad} \quad , M_2 = -0,291 \text{ rad}$$

Com isso, temos  $\Delta M = 0,582$ . Por definição:

$$\boxed{\Delta t = \frac{\Delta M}{2\pi} T \approx 8,3 \text{ dias}}$$

### 2.8.3 Elipse degenerada

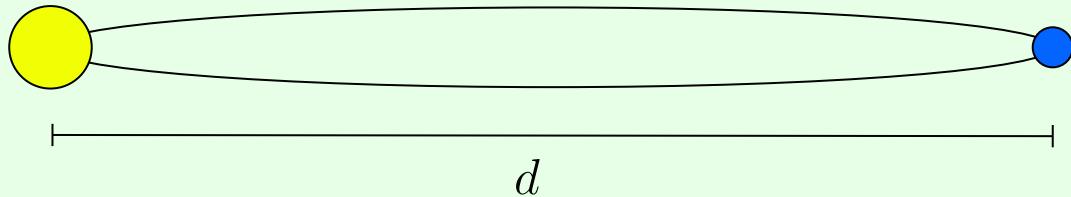
Outro método para realizar problemas de tempo em órbitas é por meio da **elipse degenerada**. Porém, o que é uma elipse degenerada? É uma elipse comum no limite em que o **semieixo menor b tender a 0**. Ou seja, ela é praticamente "uma reta" ao se observar a trajetória do corpo. Em muitas situações, certos movimentos na astronomia podem ser representados por uma elipse degenerada. Porém, como a trajetória ainda é uma elipse, as **Segunda e Terceira Lei de Kepler** ainda valem normalmente, o que nos permite encontrar o tempo do movimento. Vamos, então, entender as aplicações desse movimento por meio de alguns exemplos:

#### Exemplo 43: Colisão insana

Em um sistema astronômico, um planeta orbita normalmente sua estrela em uma órbita elíptica. Porém, de repente, o planeta para de se mover completamente por algum motivo desconhecido. Quanto tempo irá demorar para o planeta se colidir com a estrela? Considere que a massa  $M$  da estrela seja muito maior que a massa do planeta e que o planeta para seu movimento a uma distância  $d$  da estrela.

### Solução 43

Sabemos, pelas Leis de Kepler, que essa trajetória será uma elipse...porém, como não há componentes tangenciais de movimento (como forças e velocidades), a elipse será degenerada (ou seja, o movimento será de uma reta). Então, metade da elipse será percorrida durante o movimento, o que nos permite determinar o tempo como sendo o período sobre 2. Veja a imagem de uma elipse com  $b=0$  para visualizar melhor (ao tender  $b$  a 0, perceba que temos praticamente uma reta!):



Onde a estrela é representada pela esfera amarela e o planeta pela esfera azul. Perceba que, quando  $b=0$ ,  $a=c$ . Por isso, o foco se localiza no próprio contorno da elipse, como mostrado no desenho.

Então, pela Terceira Lei de Kepler, temos que o período é:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \rightarrow T = 2\pi\sqrt{(d/2)^3/GM}$$

Então, o tempo é:

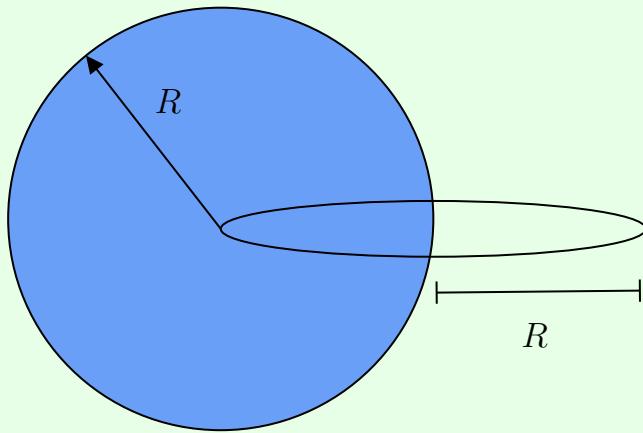
$$t = \frac{T}{2} = \pi\sqrt{d^3/8GM}$$

### Exemplo 44: Não é um MRUV

Um objeto é lançado de uma altura  $R$  da superfície de um planeta de raio  $R$  e massa  $M$ . Calcule o tempo que o objeto demora para encostar o chão. Desconsidere qualquer movimento externo que o planeta possa realizar até o objeto chegar em seu destino.

### Solução 44

A elipse degenerada pode ser entendida pela figura:



Fez-se o desenho com  $b$  não tão pequeno para que você entenda a situação, porém saiba que na prática você apenas veria uma trajetória reta mesmo. Então, percebe-se que a área percorrida pela elipse é de  $\pi ab/4 + ab/2$ . Então, pela Segunda Lei de Kepler, tem-se:

$$\frac{t}{A'} = \frac{T}{A} \rightarrow t = T \frac{ab(\pi/4 + 1/2)}{\pi ab} = T(1/4 + 1/2\pi)$$

Agora, basta encontrar o período  $T$  pela Terceira Lei de Kepler:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \rightarrow T = 2\pi\sqrt{R^3/GM}$$

Substituindo, temos que o tempo é:

$$t = 2\pi\sqrt{R^3/GM}(1/4 + 1/2\pi) \rightarrow \boxed{t = \left(\frac{\pi}{2} + 1\right)\sqrt{R^3/GM}}$$

## 2.9 Problemas

1. (IOAA 2014) Em uma catástrofe gravitacional, a massa do sol subitamente diminui para metade do seu valor atual. Encontre o novo período orbital da Terra se a catástrofe ocorreu em:

**Dados:** Excentricidade orbital da Terra: 0.0167

- (a) 3 de Julho
- (b) 3 de Janeiro

2. (Competitive Physics)

Uma partícula move-se em um círculo de raio  $R$  sob a influência de uma força central. Se suas velocidades mínima e máxima são  $v_1$  e  $v_2$ , qual é o período  $T$ ?

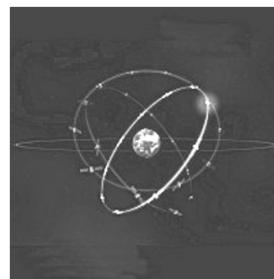
3. (IPHO 2005 Q1)

### Parte A

As manobras orbitais mais frequentes realizadas por espaçonaves consistem em variações de velocidade ao longo da direção do voo, ou seja, acelerações para alcançar órbitas mais altas ou frenagens para iniciar a reentrada na atmosfera. Neste problema, estudaremos as variações orbitais quando o impulso do motor é aplicado em uma direção radial.

Para obter valores numéricos, use: raio da Terra  $R_{\oplus} = 6.37 \cdot 10^6$  m, gravidade na superfície da Terra  $g = 9.81$  m/s<sup>2</sup> e considere a duração do dia sideral como  $T_0 = 24.0$  h.

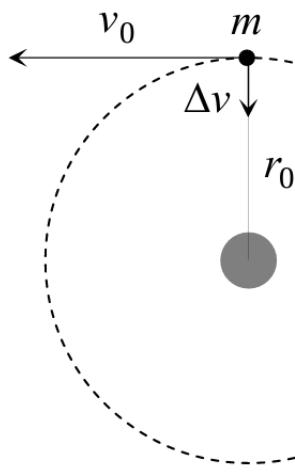
Consideramos um satélite geoestacionário de massa  $m$  colocado em uma órbita circular equatorial de raio  $r_0$ . Esses satélites possuem um "motor de apogeu" que fornece os impulsos tangenciais necessários para alcançar a órbita final.



- (a) Calcule o valor numérico de  $r_0$ .
- (b) Encontre a expressão da velocidade  $v_0$  do satélite em função de  $g$ ,  $R_T$  e  $r_0$ , e calcule seu valor numérico.
- (c) Obtenha as expressões do momento angular  $L_0$  e da energia mecânica  $E_0$ , em função de  $v_0$ ,  $m$ ,  $g$  e  $R_T$ .

### Parte B

Uma vez que esta órbita circular geossíncrona foi alcançada (consulte a figura abaixo), o satélite foi estabilizado na localização desejada e está sendo preparado para realizar seu trabalho. Um erro dos controladores terrestres faz com que o motor de apogeu seja acionado novamente. O impulso acaba sendo direcionado para a Terra e, apesar da rápida reação da equipe terrestre para desligar o motor, uma variação de velocidade indesejada  $\Delta v$  é aplicada ao satélite.



Caracterizamos esse impulso pelo parâmetro  $\beta = \Delta v / v_0$ . A duração da queima do motor é sempre insignificante em relação a qualquer outro tempo orbital, de modo que pode ser considerada instantânea. Suponha  $\beta < 1$ .

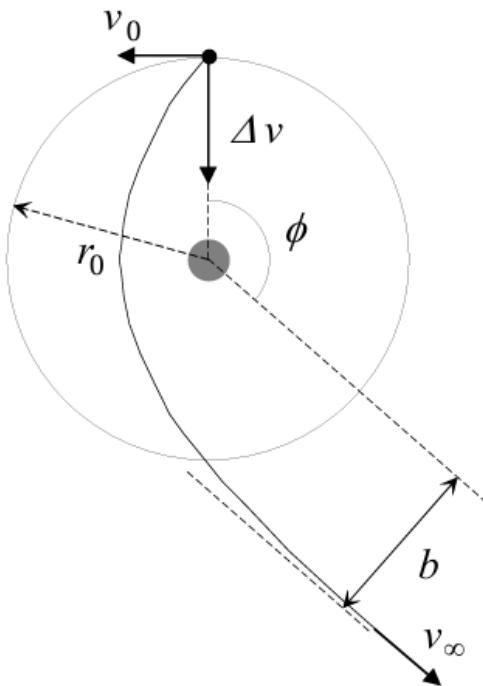
- Determine os parâmetros da nova órbita, semi-latus-rectum  $l$  e excentricidade  $\varepsilon$ , em termos de  $r_0$  e  $\beta$ .
- Calcule o ângulo  $\theta$  entre o eixo maior da nova órbita e o vetor posição no momento do disparo accidental.
- Forneça as expressões do perigeu  $r_{min}$  e do apogeu  $r_{max}$  em relação ao centro da Terra, como funções de  $r_0$  e  $\beta$ , e calcule seus valores numéricos para  $\beta = \frac{1}{4}$ .
- Determine o período da nova órbita,  $T$ , como uma função de  $T_0$  e  $\beta$ , e calcule seu valor numérico para  $\beta = \frac{1}{4}$ .

### Parte C

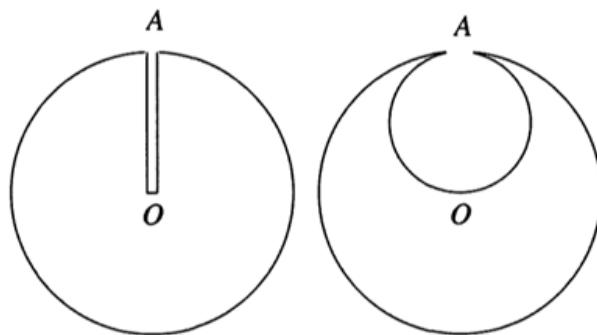
- Calcule o parâmetro de impulso mínimo,  $\beta_{esc}$ , necessário para que o satélite escape da gravidade da Terra.
- Determine, neste caso, a maior aproximação do satélite ao centro da Terra na nova trajetória,  $r'_{min}$ , como uma função de  $r_0$ .

**Parte D** Suponha o caso em que  $\beta > \beta_{esc}$  assim como mostrado na imagem abaixo e resolva os seguintes itens:

- Determine a velocidade residual no infinito,  $v_\infty$ , como uma função de  $v_0$  e  $\beta$



- (b) Obtenha o “parâmetro de impacto”  $b$  da direção de escape assintótica em termos de  $r_0$  e  $\beta$ .
- (c) Determine o ângulo  $\phi$  da direção de escape assintótica em termos de  $\beta$ . Calcule seu valor numérico para  $\beta = \frac{3}{2}\beta_{esc}$
4. (PPP 110) Uma nave espacial feita de titânio, devoradora de pequenos homenzinhos verdes, encontrou um asteroide perfeitamente esférico e homogêneo. Um estreito poço experimental foi perfurado a partir do ponto  $A$  em sua superfície até o centro  $O$  do asteroide. Nesse ponto, um dos pequenos homenzinhos verdes caiu da superfície do asteroide para dentro do poço experimental. Ele caiu, sem qualquer resistência, até alcançar  $O$ , onde morreu no impacto.

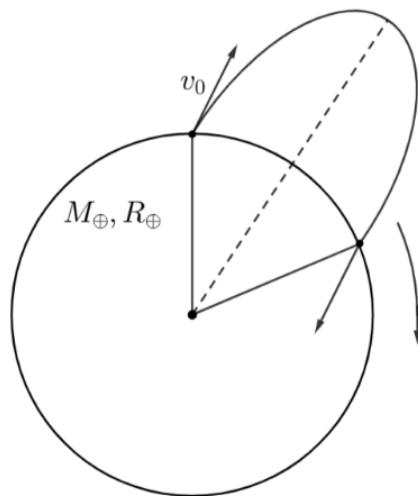


No entanto, o trabalho continuou e os pequenos homenzinhos verdes começaram uma escavação secreta do titânio, durante a qual formaram uma cavidade esférica de diâmetro  $AO$  dentro

do asteroide. Então, ocorreu um segundo acidente: outro pequeno homenzinho verde caiu da mesma forma do ponto  $A$  até o ponto  $O$  e morreu.

Encontre a razão entre as velocidades de impacto e os tempos totais até o impacto dos dois pequenos homenzinhos verdes.

5. **(Introduction to Classic Mechanics - Morin)** Uma partícula de massa  $m$  move-se sob a ação de um potencial  $V(r) = \beta r^k$ . Seja o momento angular  $L$ .
  - (a) Determine o raio  $r_0$  da órbita circular.
  - (b) Determine a frequência angular  $\omega_r$  das pequenas oscilações em torno desse raio.
  - (c) Agora, considere uma órbita circular ligeiramente perturbada. Explique por que a órbita permanece uma curva fechada se a razão entre o período das pequenas oscilações e o período da órbita circular original for um número racional. Encontre os valores inteiros de  $k$  para os quais isso ocorre.
6. **(IPHO 2012 Adaptada - Estudando Protoestrelas)** Vamos modelar a formação de uma estrela da seguinte forma. Uma nuvem esférica de gás interestelar esparsa, inicialmente em repouso, começa a colapsar devido à sua própria gravidade. O raio inicial da esfera é  $r_0$  e a massa é  $m$ . Considere que a energia térmica do gás é desprezível e que o colapso é dominado apenas por efeitos gravitacionais.
  - (a) Estime o tempo  $t$  necessário para que o raio diminua de  $r_0$  para  $r_1 = 0.95r_0$ . Negligencie a variação do campo gravitacional na posição de uma partícula de gás em queda.
  - (b) Supondo que a pressão permaneça desprezível, determine o tempo  $t_{r \rightarrow 0}$  necessário para que a esfera colapse de  $r_0$  para um raio muito menor, utilizando as Leis de Kepler.
7. **(Vinhedo 2024 - Adaptada)** Em um universo paralelo, a Terra é oca, de modo que sua massa superficial é  $M = M_\oplus$ , seu raio é  $R = R_\oplus$  e sua velocidade angular de rotação é extremamente alta, com  $\omega = 30\omega_\oplus$ . Paulinho, residente desse universo que se situava no equador terrestre, decidiu um dia lançar um foguete de sua casa até a moradia de seu amigo Mychel, que também se localizava no equador terrestre. Sabe-se que, contando a partir do meridiano de Greenwich, a longitude de Paulinho é  $\lambda_P$  e a de Mychel  $\lambda_M$ , e que o foguete é lançado com velocidade  $v_0$  no referencial do centro da Terra. Contudo, em seus cálculos, Paulinho esqueceu de considerar o movimento relativo de Mychel devido à rotação terrestre, que nesse universo, não era desprezível. Assim, seu modelo se tornou extremamente simplificado e falho. Sabendo disso, determine o tempo  $t_0$  que o foguete levaria para atingir Mychel, ignorando a rotação da Terra. Deixe sua resposta em função de  $a$ ,  $e$ ,  $M_\oplus$ ,  $R_\oplus$ ,  $\lambda_P$  e  $\lambda_M$ .



8. Responda as seguintes questões:

- Demonstre a distância do L4 ao Sol é igual a distância do L4 a Terra. Em outras palavras, mostre que o triângulo é isósceles.
  - Agora demonstre que essas distâncias são iguais a uma U.A. Em outras palavras, mostre que o triângulo é equilátero.
9. **(IOAA 2008)** As forças gravitacionais do Sol e da Lua levam a movimentos de subida e descida das superfícies das águas marinhas. Seja  $\phi$  a diferença de longitude entre os pontos A e B, onde ambos os pontos estão no equador e A está na superfície do mar, encontre a aceleração horizontal da água do mar na posição A devido a força gravitacional da Lua no momento em que ela está acima do ponto B, de acordo com observadores na Terra (expresse em função de  $\phi$ , do raio da Terra  $R_{\oplus}$  e da distância Terra-Lua  $a_{\oplus}$ ).

## 2.10 Solucionário

### Problema 1

Primeiramente, deve-se ter em mente que 3 de Julho é o dia que a Terra está no afélio e 3 de Janeiro no periélio. Assim, para a letra (a), começamos definindo:

$$r_A = a(1 + e)$$

$$v_A^2 = GM \left( \frac{2}{r_A} - \frac{1}{a} \right) = \frac{GM}{a} \frac{1 - e}{1 + e}$$

Agora, devemos perceber que, no momento logo após a catástrofe, a distância Terra-Sol e a velocidade da Terra não serão alteradas. Dessa forma, podemos encontrar a energia da órbita após a catástrofe:

$$\frac{E_A}{m} = \frac{v_A^2}{2} - \frac{GM_\odot}{2r_A} = \frac{GM_\odot}{2a} \cdot \frac{1 - e}{1 + e} - \frac{GM_\odot}{2a} \cdot \frac{1}{1 + e} = -\frac{GM_\odot e}{2a(1 + e)} < 1$$

Logo,  $E_A < 1$ , e a órbita continua sendo elíptica. Para calcular o período, devemos encontrar o novo semi-eixo maior igualando a velocidade atual à velocidade do vis-visa para a nova órbita:

$$GM_\odot \left( \frac{2}{r_A} - \frac{1}{a} \right) = \frac{GM_\odot}{2} \left( \frac{2}{r_A} - \frac{1}{a'} \right)$$

$$a' = \frac{a(1 + e)}{2e}$$

Agora, pela Lei de Kepler:

$$\frac{T^2}{a'^3} = \frac{4\pi^2}{GM_\odot/2}$$

$$T = 2\pi \left( \frac{2a'^3}{GM_\odot} \right)^{1/2} = 2\pi \left( \frac{a^3}{GM_\odot} \right)^{1/2} \cdot \left( \frac{1 + e}{e} \right)^{3/2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$T = \frac{T_0}{2} \left( \frac{1 + e}{e} \right)^{3/2} \rightarrow T \approx 237,5 \text{ anos}$$

Ou seja, 237 anos e meio. Para a letra (b), definimos:

$$r_P = a(1 - e)$$

$$v_P^2 = GM \left( \frac{2}{r_P} - \frac{1}{a} \right) = \frac{GM}{a} \frac{1+e}{1-e}$$

Assim, a energia fica:

$$\frac{E_P}{m} = \frac{v_P^2}{2} - \frac{GM_\odot}{2r_P} = \frac{GM_\odot}{2a} \cdot \frac{1+e}{1-e} - \frac{GM_\odot}{2a} \cdot \frac{1}{1-e} = \frac{GM_\odot e}{2a(1-e)} \rightarrow [E_p > 1]$$

Ou seja, a energia passa a ser positiva e a órbita vira uma hipérbole, onde o período não é definido/tende ao infinito.

### Problema 2

À primeira vista, o enunciado pode parecer confuso, até percebermos que a origem não precisa estar no centro do círculo; ela deve estar deslocada.

Seria complicado determinar a trajetória para uma lei de força central geral, mas podemos inferir  $T$  considerando a taxa de variação da área varrida, conforme a segunda lei de Kepler. Isso funciona porque a conservação do momento angular é válida para todas as leis de força central, não apenas para a força inversamente proporcional ao quadrado da distância.

Nos pontos mais afastado e mais próximo, as distâncias da origem devem ser  $r_1$  e  $r_2$ . Pela conservação do momento angular, as velocidades  $v_1$  e  $v_2$  nesses pontos satisfazem:

$$r_1 v_1 = r_2 v_2,$$

$$r_1 + r_2 = 2R$$

A taxa de variação da área varrida é:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r_1 v_1$$

Usando as duas primeiras equações, podemos resolver para  $r_1$  e substituí-lo na terceira:

$$r_1 = \frac{2R}{1 + v_1/v_2}$$

Portanto,

$$\frac{dA}{dt} = \frac{R}{1/v_1 + 1/v_2}$$

Sabemos que  $\frac{dA}{dt} = \frac{\pi R^2}{T}$ , então obtemos:

$$T = \pi R \left( \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} \right)$$

### Problema 3

#### Resolução - Parte A

- (a) Por ser um satélite geoestacionário, seu período de translação ao redor da Terra é igual ao período de rotação da Terra em torno de seu próprio eixo, ou seja, o satélite cobre a mesma região na Terra durante todo o tempo.

Assim, podemos aplicar a 3<sup>a</sup> Lei de Kepler, sabendo o período e buscando determinar o raio  $r_0$  da órbita:

$$\frac{T_0^2}{r_0^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

Perceba que não temos o valor da massa da Terra nem o da constante gravitacional  $G$ , pois não foram fornecidos no enunciado. Assim, devemos expressá-los em termos de alguma grandeza dada.

Sabemos que a gravidade na superfície da Terra é a aceleração causada pela massa da Terra em um objeto a uma distância  $R_\oplus$  do centro, ou seja:

$$g = \frac{GM}{R_\oplus^2}$$

Substituindo essa relação na 3<sup>a</sup> Lei de Kepler:

$$gR_\oplus^2 = GM$$

Chegamos em:

$$r_0 = \left( \frac{T_0^2 g R_\oplus^2}{4\pi^2} \right)^{\frac{1}{3}} \approx 4.22 \cdot 10^7 \text{ m}$$

- (b) Como o satélite está em uma órbita circular, a força centrípeta é fornecida pela força

gravitacional, ou seja,  $F_{cp} = F_g$ :

$$\frac{mv_0^2}{r_0} = \frac{GMm}{r_0^2}$$

$$v_0^2 = \frac{GM}{r_0}$$

Substituindo  $GM = gR_\oplus^2$ :

$$v_0^2 = \frac{gR_\oplus^2}{r_0}$$

$$v_0 = R_\oplus \sqrt{\frac{g}{r_0}} \approx 3071 \text{ m/s}$$

- (c) A expressão do momento angular é dada por  $L = \vec{r} \times \vec{p}$ , onde  $\vec{r}$  é o vetor posição e  $\vec{p}$  o vetor momento linear. Como o ângulo entre esses vetores é  $90^\circ$ , o produto vetorial resulta apenas em  $rp$ , logo o momento angular de uma órbita circular é:

$$L_0 = mv_0 r_0$$

Substituindo  $r_0$  pela expressão encontrada anteriormente:

$$L_0 = mv_0 \frac{R_\oplus^2 g}{v_0^2}$$

Assim, encontramos a expressão do momento angular  $L_0$ :

$$L_0 = \frac{mgR_\oplus^2}{v_0}$$

A energia mecânica de uma órbita é a soma da energia potencial gravitacional e da energia cinética:

$$E_m = E_g + E_c$$

$$E_m = -\frac{GMm}{r_0} + \frac{mv_0^2}{2}$$

Substituindo  $GM = gR_\oplus^2$ :

$$E_m = -\frac{mgR_\oplus^2}{r_0} + \frac{mv_0^2}{2}$$

Como  $v_0^2 = \frac{gR_\oplus^2}{r_0}$ , temos:

$$E_m = -mv_0^2 + \frac{mv_0^2}{2}$$

Portanto:

$$E_m = -\frac{mv_0^2}{2}$$

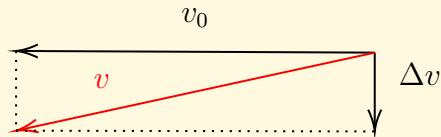
### Resolução - Parte B

- (a) Sabemos que, como o impulso é radial, o momento angular da órbita se mantém constante. Isso ocorre porque o momento angular pode ser escrito como  $L = \vec{r} \times \vec{p} = mvr \sin \theta$ . Como  $v_{\text{tangencial}} = v \sin \theta$ , temos que  $L = mv_{\text{tangencial}}r$ . Dessa forma, **impulsos radiais não alteram o momento angular da órbita**. Note que estamos analisando uma situação em que o impulso foi aplicado quase instantaneamente, de modo que o raio  $r$  não mudou. A partir deste ponto, qualquer variação em  $r$  será compensada por uma mudança em  $v_{\text{tangencial}}$ , mantendo a nova órbita (que não é circular) com um momento angular constante.

Também sabemos, conforme deduzido na seção 1.3.4 Órbitas e Energia, que a partir da energia generalizada para uma órbita dada por  $E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{mr^2\dot{\theta}^2}{2} - \frac{GMm}{r}$ , podemos derivar expressões para a excentricidade e o semi-latus rectum, utilizando  $\alpha = GM$ ,  $h = \frac{L}{m}$  e  $\varepsilon = \frac{E}{m}$ :

$$e = \sqrt{1 + \frac{2\varepsilon h^2}{\alpha^2}} \quad \text{e} \quad l = \frac{h^2}{\alpha}$$

Perceba que não sabemos a energia da nova órbita, e ela não equivale à energia inicial, pois o impulso  $\Delta v$  adicionou energia cinética. Pela soma vetorial, podemos encontrar que a velocidade atual  $v$  é dada por  $v^2 = v_0^2 + \Delta v^2$ :



Assim, a energia  $E$  da nova órbita é:

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{r_0}$$

$$E = \frac{mv_0^2}{2} + \frac{m\Delta v^2}{2} - \frac{GMm}{r_0}$$

Como a energia inicial era  $E_0 = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{GMm}{r_0} = -\frac{mv_0^2}{2}$ , temos:

$$E = -\frac{mv_0^2}{2} + \frac{m\Delta v^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} \left( \frac{\Delta v^2}{v_0^2} - 1 \right)$$

$$E = \frac{mv_0^2}{2}(\beta^2 - 1)$$

Agora que conhecemos a energia da nova órbita, podemos calcular o semi-lactus rectum. O momento angular é dado por  $L_0 = \frac{mgR_\oplus^2}{v_0}$  (conforme encontrado na parte A do problema). Substituímos nas fórmulas generalizadas:

$$l = \frac{L_0^2}{GMm^2} = \frac{m^2g^2R_\oplus^4}{v_0^2} \cdot \frac{1}{gR_\oplus^2m^2} = \frac{R_\oplus^2g}{v_0^2}$$

Como encontrado no item B da parte A, isso equivale a  $r_0$ . Portanto, o semi-lactus rectum é igual à posição atual:

$$l = r_0$$

Para determinar a excentricidade, utilizamos:

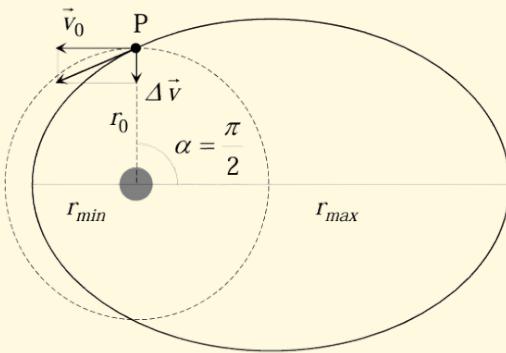
$$e^2 = 1 + \frac{2EL_0^2}{G^2M^2m^3} = 1 + \frac{\frac{2mv_0^2}{2}(\beta^2 - 1) \frac{m^2g^2R_\oplus^4}{v_0^2}}{G^2M^2m^3}$$

Simplificando, obtemos:

$$e = \beta < 1$$

Concluímos, portanto, que a órbita resultante é **elíptica**.

- (b) O seguinte esquema nos auxilia nas próximas alternativas:



Perceba que  $r_0$  equivale ao semi-lactus rectum, logo o ângulo entre o vetor posição e o eixo maior equivale a  $\theta = 90^\circ$

- (c) Sabemos que o semi-lactus rectum é  $l = a(1 - e^2) = a(1 + e)(1 - e)$ , enquanto  $r_{min} = a(1 - e)$  e  $r_{max} = a(1 + e)$ . Dessa forma, considerando que  $e = \beta$  e  $l = r_0$ , encontramos que:

$$r_{min} = \frac{r_0}{1 + \beta}, \quad r_{max} = \frac{r_0}{1 - \beta}$$

Substituindo para  $\beta = \frac{1}{4}$ :

$$r_{\min} \approx 3.38 \cdot 10^7 \text{m}, \quad r_{\max} \approx 5.63 \cdot 10^7 \text{m}$$

- (d) Para resolver este item, utilizaremos a 3<sup>a</sup> lei de Kepler. No entanto, primeiramente precisamos determinar o valor do semi-eixo maior da nova órbita,  $a$ . Sabemos que:

$$a = \frac{r_{\min} + r_{\max}}{2} = \frac{r_0}{2} \left( \frac{1}{1 - \beta} + \frac{1}{1 + \beta} \right) = \frac{r_0}{1 - \beta^2}$$

Aplicando a 3<sup>a</sup> lei de Kepler:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{T_0^2}{r_0^3}$$

temos:

$$T^2 = a^3 \cdot \frac{T_0^2}{r_0^3}$$

Substituindo o valor de  $a$ :

$$T^2 = \frac{r_0^3}{(1 - \beta^2)^3} \cdot \frac{T_0^2}{r_0^3}$$

Simplificando:

$$T^2 = \frac{T_0^2}{(1 - \beta^2)^3}$$

Portanto:

$$T = \frac{T_0}{(1 - \beta^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Substituindo  $\beta = \frac{1}{4}$ :

$$T \approx 26.44 \text{ h}$$

### Resolução - Parte C

- (a) Perceba que a órbita em que o satélite escapa da Terra com a energia mais próxima da atual é a parabólica. A órbita hiperbólica também é uma órbita aberta (isto é, caracterizada pelo escape do satélite) porém como possui energia positiva, significativamente maior do que a da órbita elíptica (que tem energia negativa), não representa o caso mínimo. Nesse contexto, a parábola caracteriza o caso mínimo de escape, em que a energia é igual a zero. Isso ocorre quando  $\beta_{\text{esc}} = e = 1$ .

O mesmo resultado pode ser obtido analisando a velocidade de escape ou o momento angular. Porém a análise do tipo de órbita traz um resultado muito mais facilmente.

(b) Pela equação polar da parábola:

$$r = \frac{l}{1 - e \cos \theta}$$

Substituindo  $l = r_0$  e  $e = 1$  percebemos que o caso mínimo ocorre quando  $\cos \theta = -1$ , logo temos:

$$r'_{\min} = \frac{r_0}{2}$$

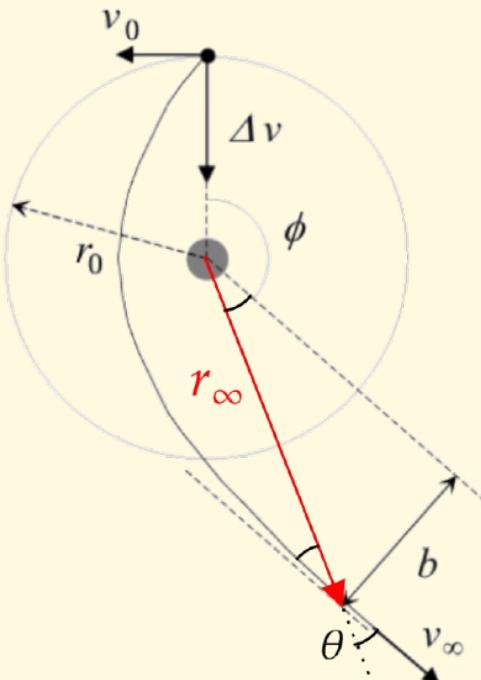
### Resolução - Parte D

(a) Conservando energia entre o ponto em que o impulso foi aplicado ( $E = \frac{mv_0^2}{2}(\beta^2 - 1)$  encontrado na letra A da parte B) e o ponto no infinito:

$$\frac{mv_\infty^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2}(\beta^2 - 1)$$

$$v_\infty = v_0 \sqrt{\beta^2 - 1}$$

(b) Analisando o esquema abaixo, temos que o vetor posição no infinito é  $r_\infty = \frac{b}{\sin \theta}$ :



**(OBS:** É claro que  $r_\infty \rightarrow \infty$ , o que torna impossível visualizá-lo. No entanto, realizamos este passo para destacar que, nesses casos, a geometria confirma que o fator determinante para o momento angular é o parâmetro de impacto!) Desse modo a

partir da conservação de momento angular entre o ponto em que o impulso foi aplicado e o ponto no infinito:

$$mv_0 r_0 = mv_\infty r_\infty \sin \theta$$

$$v_0 r_0 = v_\infty b$$

$$v_0 r_0 = b v_0 \sqrt{\beta^2 - 1}$$

$$r_0 = b \sqrt{\beta^2 - 1}$$

$$\boxed{b = \frac{r_0}{\sqrt{\beta^2 - 1}}}$$

- (c) A partir do seguinte esquema, percebemos que  $\phi = \theta_{\text{asym}} + 90^\circ$ . Portanto, basta determinar  $\theta_{\text{asym}}$  a partir da equação polar para resolvemos o problema.

Note que, no infinito,  $r_\infty \rightarrow \infty$ . Assim, podemos aplicar essa tendência à equação polar:

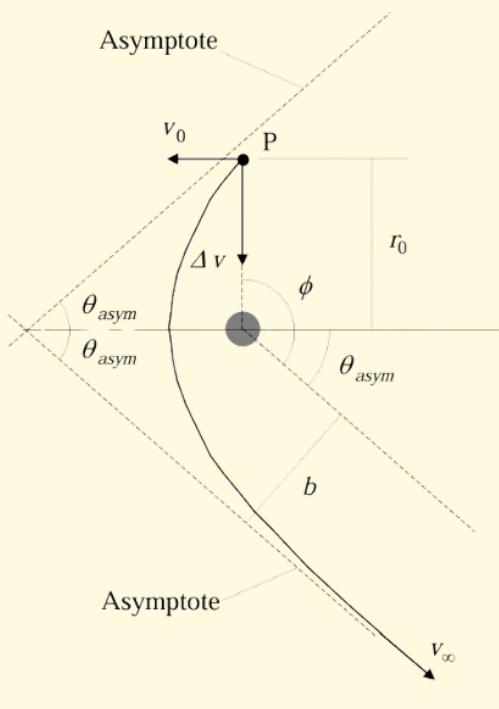
$$r_\infty = \frac{r_0}{1 - \beta \cos \theta_{\text{asym}}} \rightarrow \infty$$

Como  $r_0$  obviamente não é zero, o denominador deve ser zero, ou seja:

$$1 - \beta \cos \theta_{\text{asym}} = 0$$

Portanto:

$$\theta_{\text{asym}} = \arccos \left( \frac{1}{\beta} \right)$$



Como dissemos anteriormente,  $\phi = \theta_{\text{asym}} + 90^\circ$ , logo:

$$\phi = \arccos\left(\frac{1}{\beta}\right) + 90^\circ$$

Substituindo  $\beta = \frac{3}{2}\beta_{\text{esc}} = \frac{3}{2}$ , obtemos:

$$\phi \approx 138.2^\circ$$

#### Problema 4

Para resolver a questão, precisamos usar a Lei de Gauss em conjunto com o princípio da superposição. A partir disso, existem várias maneiras de se fazer a questão. Vamos fazer a solução mais completa. Pela Lei de Gauss, temos a gravidade, no caso 1, a uma distância  $r$  do centro:

$$a = -\frac{GMr}{R^3}$$

Fazendo uma substituição de

$$a = \frac{dv}{dt} \frac{dr}{dr} = v \frac{dv}{dr}$$

Separando as variáveis e integrando de 0 a  $v$  e de  $R$  a 0:

$$\frac{v^2}{2} = \frac{GM}{2R}$$

Logo, a velocidade  $v_1$  é  $\sqrt{\frac{GM}{R}}$ . O mesmo resultado pode ser obtido pela conservação de energia. Usando o centro da esfera como referência de potencial, a energia potencial a uma posição  $r$  é:

$$U = \int_0^r \frac{GMmr}{R^3} dr = \frac{GMmr^2}{2R^3}$$

Aplicando o resultado para  $r = R$  e fazendo a conservação de energia, chega-se no resultado esperado.

Agora, para o caso 2, vamos sobrepor o caso de uma esfera homogênea de raio  $R$  com uma negativa de raio  $R/2$ , localizada de forma que, ao realizar a superposição, uma área sem massa seja gerada. Como já temos o resultado da esfera positiva, basta apenas estudarmos o outro. Por conservação de energia no planeta negativo (ou por integração, se preferir, usando o método anterior), a velocidade em  $A$  seria a mesma que a  $O$  (ou seja, 0). Logo, ao fazer a superposição,  $v_1 = v_2$ .

Sobre o tempo, podemos ir para uma abordagem interessante. Perceba que a aceleração é diretamente proporcional ao negativo do vetor posição, logo o comportamento é o mesmo que o de um movimento harmônico simples (até antes do impacto). O  $\omega$  da esfera positiva é  $\sqrt{\frac{GM}{R^3}}$  e o tempo total é um quarto do período:

$$\Delta t = \frac{1}{4} 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$

Para uma posição  $r$ , temos a gravidade do caso de superposição dada por:

$$-k\rho Gr + k\rho G(r - R/2) = k\rho G \frac{R}{2}$$

Onde  $k = \frac{4\pi}{3}$ . Perceba que apenas somamos vetorialmente as acelerações causadas por cada esfera (onde a aceleração da esfera negativa pode ser obtida de maneira análoga à positiva). Então, percebe-se que o movimento é um MRUV, logo o tempo é:

$$v_2 = a't_2 \rightarrow t_2 = 2\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$

Logo,

$$t_1/t_2 = \pi/4$$

### Problema 5

O potencial efetivo é dado por

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + \beta r^k$$

O raio da órbita circular é determinado pela condição de minimização do potencial efetivo, ou seja, resolvendo  $V'_{\text{eff}}(r) = 0$ . Derivando, obtemos

$$\frac{L^2}{2m}(-2)r_0^{-3} + k\beta r_0^{k-1} = 0$$

Isolando  $r_0$ , encontramos

$$r_0 = \left( \frac{L^2}{mk\beta} \right)^{\frac{1}{k+2}}$$

Para determinar a frequência angular das pequenas oscilações em torno do raio  $r_0$ , expandimos o potencial efetivo  $V_{\text{eff}}(r)$  em série de Taylor em torno de  $r_0$ . Para pequenos deslocamentos  $|r - r_0|$ , temos a aproximação

$$V_{\text{eff}}(r) \approx V_{\text{eff}}(r_0) + \frac{1}{2}U''(r_0)(r - r_0)^2$$

onde  $U''(r) = \frac{d^2V_{\text{eff}}}{dr^2}$ . A frequência angular das pequenas oscilações é então dada por

$$\omega_r = \sqrt{\frac{U''(r_0)}{m}}$$

Derivando  $U''(r)$ , obtemos

$$U''(r) = \frac{3L^2}{m}r^{-4} + k(k-1)\beta r^{k-2}$$

Substituindo  $r_0$ , temos

$$U''(r_0) = \frac{L^2}{mr_0^4}(k+2)$$

Portanto, a frequência angular é

$$\omega_r = \frac{L}{mr_0^2} \sqrt{k+2}$$

Para que a órbita perturbada permaneça uma curva fechada, a razão entre os períodos das pequenas oscilações e da órbita circular original deve ser um número racional. Isso equivale a exigir que a razão  $\omega_r/\omega_\theta$  seja racional, onde  $\omega_\theta$  é a velocidade angular da órbita circular. Sabemos que  $mr^2\dot{\theta} = L$ , de modo que

$$\omega_\theta = \frac{L}{mr_0^2}$$

Assim, a razão entre as frequências é

$$\frac{\omega_r}{\omega_\theta} = \sqrt{k+2}$$

Para que essa razão seja racional,  $k+2$  deve ser um quadrado perfeito, ou seja,  $k = n^2 - 2$ . Os valores inteiros de  $k$  que satisfazem essa condição são

$$k = -1, 2, 7, 14, \dots$$

### Problema 6

- (a) O enunciado considera o campo gravitacional constante, pois a distância ao centro gravitacional varia pouco. Isso configura um exemplo físico de queda livre. Sabemos que a velocidade inicial é zero, portanto, podemos usar a equação do movimento retilíneo uniformemente acelerado:

$$r_0 - r_1 = \frac{gt^2}{2}$$

Substituímos  $r_1 = 0.95r_0$ , então:

$$r_0 - 0.95r_0 = 0.05r_0 = \frac{gt^2}{2}$$

Resolvendo para  $t^2$ :

$$t^2 = \frac{2 \cdot 0.05r_0}{g}$$

Para  $g$ , utilizamos a expressão aproximada da aceleração gravitacional na superfície da esfera:

$$g \approx \frac{Gm}{r_0^2}$$

Substituindo  $g$  na equação do tempo:

$$t^2 = \frac{2 \cdot 0.05r_0}{\frac{Gm}{r_0^2}} = \frac{0.1r_0^3}{Gm}$$

Assim, o tempo é dado por:

$$t = \sqrt{\frac{0.1r_0^3}{Gm}}$$

- (b) Neste caso, estamos lidando com um colapso gravitacional que pode ser modelado como uma **elipse degenerada**, ou seja, uma elipse onde  $e \rightarrow 1$  e  $b \rightarrow 0$ . Isso significa que a trajetória é praticamente uma linha reta, com os focos correspondendo às extremidades do movimento. Em particular:

- Um dos focos é a posição inicial,  $r_0$ , de uma partícula qualquer na superfície da nossa nuvem;
- O outro foco é a massa pontual  $m$  no centro da nuvem, algo que é válido devido ao **teorema da casca esférica**, que permite tratar a massa total como concentrada no centro.

O tempo  $t_{r \rightarrow 0}$  é equivalente a metade do período da elipse degenerada com semieixo maior  $a = \frac{r_0}{2}$ . Assim:

$$\Delta t = \frac{T}{2}$$

Aplicamos a terceira lei de Kepler, que relaciona o período  $T$  ao semieixo maior  $a$ :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{Gm}$$

Substituímos  $a = \frac{r_0}{2}$  e isolamos  $T^2$ :

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{Gm} = \frac{4\pi^2 \left(\frac{r_0}{2}\right)^3}{Gm}$$

Expandindo:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 \frac{r_0^3}{8}}{Gm}$$

Logo:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r_0^3}{8Gm}}$$

O tempo de colapso é metade do período:

$$\Delta t = \frac{T}{2} = \pi \sqrt{\frac{r_0^3}{8Gm}}$$

Portanto:

$$\boxed{\Delta t = \pi \sqrt{\frac{r_0^3}{8Gm}}}$$

### Problema 7

Primeiro, encontraremos o tempo até alcançar o ponto mais alto do trajeto. Depois, por simetria, é só dobrar o tempo. Pelas relações da órbita:

$$r = a(1 - e \cos E)$$

Ou seja, para o momento inicial:

$$E = \arccos \left( \frac{a - R_{\oplus}}{ea} \right)$$

Pela equação de Kepler:

$$M = \Delta t \frac{2\pi}{T} = E - eE$$

$$\Delta t = \frac{T}{2\pi}(E - eE)$$

Entretanto, esse tempo é o tempo gasto do periastro até a casa de Paulinho. Para encontrar o tempo gasto da casa de Paulinho até o ponto mais alto da trajetória, basta pegar meio período e subtrair o tempo encontrado.

$$\Delta t' = \frac{T}{2} - \Delta t = \frac{T}{2} \left( 1 - \frac{E - eE}{\pi} \right)$$

Como dito anteriormente, o tempo total seria o dobro do tempo encontrado. Dobrando e substituindo T:

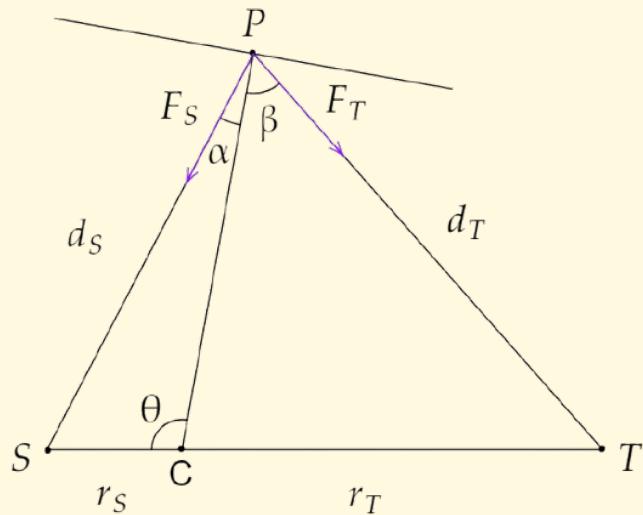
$$\Delta t_F = T \left( 1 - \frac{E - e \sin E}{\pi} \right) = 2 \left( \frac{a^3}{GM_{\oplus}} \right)^{1/2} (\pi - E + e \sin E)$$

Substituindo E (e tendo em mente que  $\sin(\arccos(k)) = \sqrt{1 - k^2}$  no intervalo da questão):

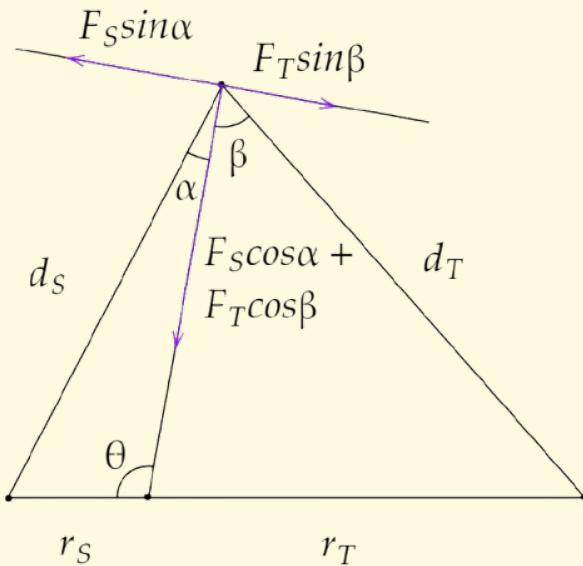
$$t_F = 2 \left( \frac{a^3}{GM_\oplus} \right)^{1/2} \left( \pi - \arccos \left( \frac{a - R_\oplus}{ea} \right) - \frac{\sqrt{2aR_\oplus - R_\oplus^2 - a^2(1 - e^2)}}{a} \right)$$

### Problema 8

(a) Primeiro, devemos desenhar a configuração.



Onde S, T e C são o Sol, a Terra e o Centro de Massa do sistema, respectivamente.  
Decompondo as forças do Sol e da Terra:



Como as forças devem ser centrais,  $F_S \sin\alpha = F_T \sin\beta$ .

$$\frac{GM_S m}{d_S^2} \sin\alpha = \frac{GM_T m}{d_T^2} \sin\beta$$

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \left(\frac{d_S}{d_T}\right)^2 \frac{M_T}{M_S}$$

Pela lei do senos:

$$\frac{\sin\theta}{d_S} = \frac{\sin\alpha}{r_S}$$

$$\frac{\sin(\pi - \theta)}{d_T} = \frac{\sin\theta}{d_T} = \frac{\sin\beta}{r_T}$$

Igualando as duas equações encontradas para  $\sin\theta$ :

$$\frac{d_S}{r_S} \sin\alpha = \frac{d_T}{r_T} \sin\beta$$

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{d_T r_S}{d_S r_T}$$

Igualando à fração que achamos mais cedo:

$$\left(\frac{d_S}{d_T}\right)^2 \frac{M_T}{M_S} = \frac{d_T r_S}{d_S r_T}$$

$$\left(\frac{d_S}{d_T}\right)^3 = \frac{M_S r_S}{M_T r_T}$$

Mas, pela definição do Centro de Massa,  $M_S r_S = M_T r_T$ . Assim:

$$\left(\frac{d_S}{d_T}\right)^3 = 1$$

$d_S = d_T$

(b) Agora usando as componentes radiais da força:

$$F_S \cos\alpha + F_T \cos\beta = F_{CP}$$

$$\frac{GM_S m}{d_S^2} \cos \alpha + \frac{GM_T m}{d_T^2} \beta = mw^2 d$$

Lembrando que  $\sin \alpha / \sin \beta = (d_S/d_T)^2 \cdot M_T/M_S = M_T/M_S$ :

$$\frac{G}{d_S^2} \left( M_S \cos \alpha + M_S \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \cos \beta \right) = \frac{GM_S}{d_S^2} \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \beta} = w^2 d$$

Chamando de  $\theta$  o ângulo  $\angle STP$  e usando lei dos senos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{\sin \theta} &= \frac{r_T}{\sin \beta} \\ \frac{d_S}{\sin \theta} &= \frac{r_T + r_S}{\sin(\alpha + \beta)} \end{aligned}$$

Isolando  $\sin \theta$  nas duas equações e igualando:

$$\begin{aligned} \frac{ds \sin \beta}{r_T} &= \frac{d_S \sin(\alpha + \beta)}{r_T + r_S} \\ \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \beta} &= \frac{d(r_T + r_S)}{d_S r_T} \end{aligned}$$

Usando a força centrípeta do Sol

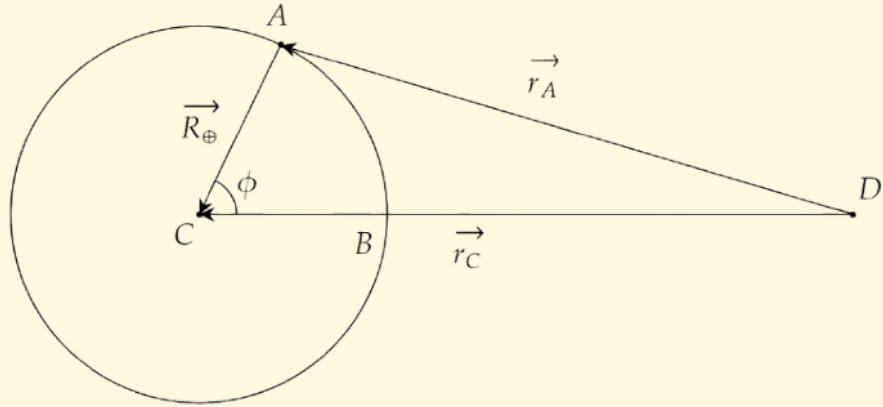
$$\begin{aligned} \frac{GM_S M_T}{(r_T + r_S)^2} &= M_T w^2 r_T \\ w^2 &= \frac{GM_S}{r_T (r_T + r_S)^2} \end{aligned}$$

Substituindo  $w^2$  e  $\sin(\alpha + \beta)/\sin \beta$ :

$$\begin{aligned} \frac{GM_S}{d_S^2} \frac{d(r_T + r_S)}{d_S r_T} &= \frac{GM_S}{r_T (r_T + r_S)^2} d \\ d_S^3 &= (r_T + r_S)^3 \\ d_S &= r_T + r_S \end{aligned}$$

### Problema 9

Primeiramente, devemos montar os raios vetores.



Sabendo que a força de maré é o resultado da diferença de atuação da força gravitacional da lua no ponto A e no ponto C, calculemos a aceleração de maré:

$$\vec{a}_M = \vec{a}_{DA} - \vec{a}_{DC} = -\frac{GM_L}{r_A^2}\hat{r}_A + \frac{GM_L}{r_C^2}\hat{r}_C = -GM_L\left(\frac{\hat{r}_A}{r_A^2} - \frac{\hat{r}_C}{r_C^2}\right)$$

Entretanto, devemos encontrar uma forma de colocar essa aceleração em componentes radiais e tangenciais. Uma boa sacada é perceber que  $\vec{r}_A = \vec{r}_C - \vec{R}_\oplus$ . Dessa forma:

$$\begin{aligned}\vec{a}_M &= -GM_L\left(\frac{\hat{r}_A}{r_A^2} - \frac{\hat{r}_C}{r_C^2}\right) = -GM_L\left(\frac{\vec{r}_A}{r_A^3} - \frac{\vec{r}_C}{r_C^3}\right) \\ \vec{a}_M &= -GM_L\left(\left(\frac{1}{r_A^3} - \frac{1}{r_C^3}\right)\vec{r}_C - \frac{1}{r_A^3}\vec{R}_\oplus\right)\end{aligned}$$

No entanto, o segundo termo é completamente radial e pode ser desprezado. Sobre  $\vec{r}_C$ , sabe-se que seu módulo é  $a_\oplus$ , e sua componente na direção horizontal vale  $a_\oplus \operatorname{sen}\phi$ , assim:

$$a_{M_{hor}} = GM_L a_\oplus \operatorname{sen}\phi \left( \frac{1}{a_\oplus^3} - \frac{1}{r_A^3} \right)$$

Pela lei dos cossenos, conseguimos encontrar  $r_A$ :

$$r_A^2 = a_\oplus^2 + R_\oplus^2 - 2a_\oplus R_\oplus \cos \phi$$

Assim, finalmente:

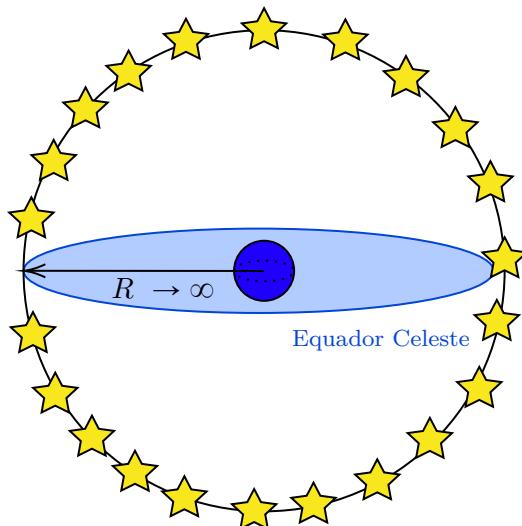
$$a_{M_{hor}} = GM_L a_\oplus \operatorname{sen}\phi \left( \frac{1}{a_\oplus^3} - \frac{1}{(a_\oplus^2 + R_\oplus^2 - 2a_\oplus R_\oplus \cos \phi)^{3/2}} \right)$$

### 3 Astronomia de posição

A astronomia de posição é o ramo da astronomia dedicado ao estudo da localização dos astros no céu, de seus movimentos, bem como dos sistemas de referência utilizados para descrever e registrar essas posições.

#### 3.1 Esfera Celeste

Ao observar o céu noturno, em razão das limitações humanas na percepção de profundidade para objetos muito longínquos, a ideia de distância perde significado; todos os astros aparecem estar equidistantes do observador. Essa ideia deu origem ao conceito da Esfera Celeste, uma esfera imaginária cuja convenção estabelece o centro no observador e o raio tendendo ao infinito — uma aproximação que busca representar as vastas distâncias astronômicas, muito superiores às escalas que vivenciamos no cotidiano. É importante destacar que muitos dos conceitos que exploraremos a seguir, como polos, equador e outros elementos, seguem a mesma orientação da Terra, mas são projetados para a Esfera Celeste. Por exemplo, o equador terrestre e o equador celeste possuem as mesmas propriedades, conforme ilustrado abaixo, ainda que seus raios sejam diferentes.



Em resumo, podemos sintetizar da seguinte forma:

**Esfera Celeste:** Superfície esférica fictícia em que são projetadas as posições dos diferentes astros. Normalmente, considera-se seu centro coincidente com o observador, mas isso pode variar.

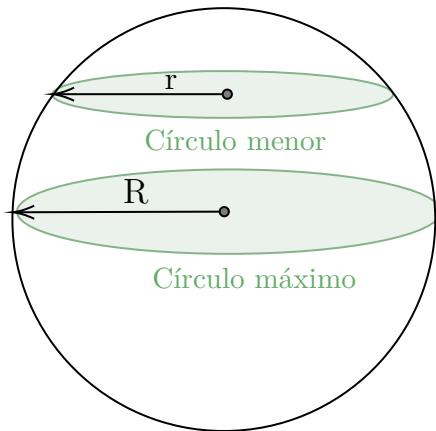
##### 3.1.1 Sistemas de Coordenadas

Na Astronomia de Posição, é essencial determinar a localização de pontos na Esfera Celeste. Para tanto, foram criados diferentes sistemas bidimensionais de coordenadas que, a depender das necessidades do astrônomo, permitem identificar a posição de um astro.

Antes de nos aprofundarmos nos estudos, é importante recordar alguns conceitos:

- (1) **Círculos Máximos:** Planos que dividem a Esfera Celeste em dois hemisférios, geralmente denominados Norte e Sul. Uma exceção a essa divisão é o Horizonte, que separa a esfera nos hemisférios Zenital e Nadiral.

**OBS:** É importante destacar que todo círculo máximo passa obrigatoriamente pelo centro da Esfera Celeste. Caso isso não ocorra, ele é um círculo menor, assim como mostrado na figura:



Além disso, os polos são definidos pela interseção de uma reta perpendicular ao círculo máximo que passa pelo centro da esfera. Os dois pontos de interseção dessa reta com a superfície da Esfera Celeste correspondem aos polos, cuja nomenclatura segue a do hemisfério ao qual pertencem. Por exemplo, o Polo Galáctico Sul está localizado no Hemisfério Galáctico Sul.

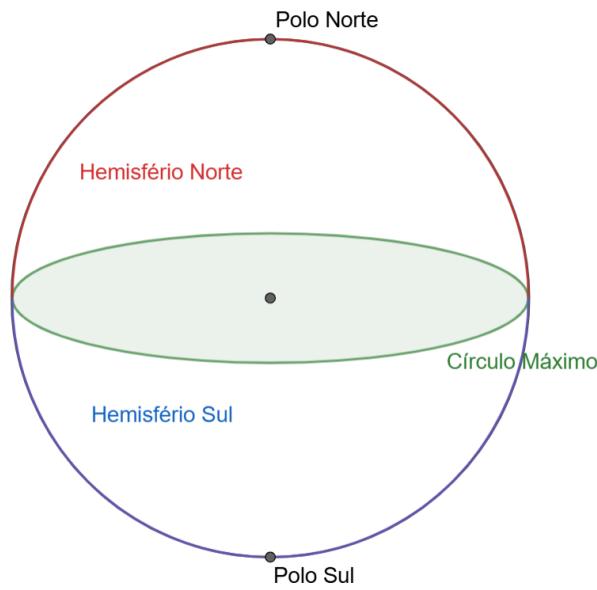


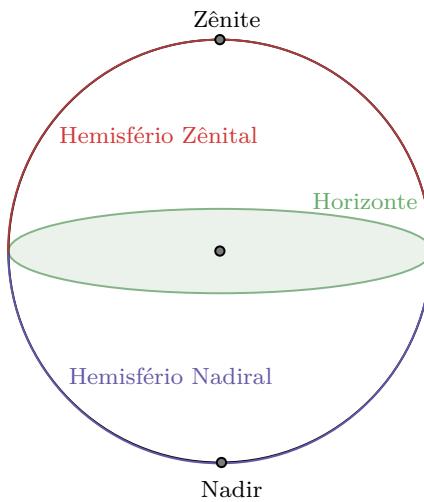
Figura 21: Na imagem, pode-se perceber a divisão da Esfera Celeste nos Hemisférios Norte e Sul. Além dessa função, o círculo exerce importante papel na determinação das coordenadas esféricas.

Alguns dos principais círculos máximos:

(a) **Plano do Horizonte:** idealização do Horizonte Real

O Horizonte divide a Esfera Celeste no Hemisfério Zenital, observável, e no Hemisfério Nadiral, não observável.

A reta perpendicular ao plano do Horizonte, denominada Vertical do Lugar, intercepta a Esfera em dois pontos antípodas: Zênite, no Hemisfério visível e Nadir, no oposto. Observe a imagem abaixo:



**OBS:** O zênite é o ponto diretamente acima de você, que pode ser visualizado ao olhar para o céu, a  $90^\circ$  de inclinação em relação ao horizonte.

Nos próximos planos, não incluiremos os desenhos, pois trata-se basicamente de substituir as definições do plano e dos polos. Contudo, não se preocupe: ao estudarmos as coordenadas definidas em cada um desses planos, apresentaremos as imagens necessárias para facilitar seu entendimento.

(b) **Plano do Equador:** é a extensão do plano equatorial terrestre - definido pelo Equador Geográfico - até a Esfera Celeste.

Esse plano divide a Esfera nos Hemisférios Norte e Sul, similar à divisão geográfica da própria Terra.

O eixo perpendicular a esse plano é o Eixo de Rotação da Terra, interceptando a Esfera Celeste nos Polos Celestes Norte e Sul;

(c) **Plano da Eclíptica:** É o plano da órbita da Terra projetado na Esfera Celeste, ou seja, o círculo máximo percorrido pelo Sol em seu movimento anual. Perceba que o movimento do Sol é distinto dos outros astros, pois, além de estarmos em translação, estamos muito mais perto do Sol do que das outras estrelas. Essa diferença será melhor abordada na próxima seção sobre o movimento dos astros. O plano da eclíptica apresenta uma obliquidade de aproximadamente  $23,5^\circ$  em relação ao Equador.

Sua reta perpendicular fura a Esfera Celeste nos Polos Eclípticos Norte e Sul.

O Polo Eclíptico Norte se encontra na constelação **Draco** e o Sul, na **Dorado**.

- (d) **Plano Galáctico:** idealização da projeção da Via Láctea observada no céu noturno.

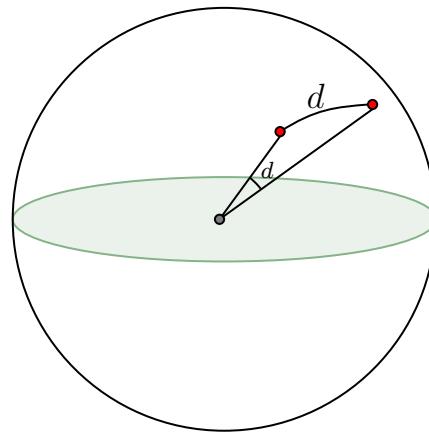
Seus polos Norte e Sul se encontram nas constelações **Coma Berenices** e **Sculptor**, respectivamente.

- (e) **Plano Supergaláctico:** plano que se baseia na disposição de grandes estruturas como galáxias e seus aglomerados. Em outras palavras, ele determina o plano pelo qual há um arranjo preferencial de estruturas galácticas próximas.

Seus polos Norte e Sul estão nas constelações **Hercules** e **Canis Major**, respectivamente.

- (2) **Ângulos:** Na Esfera Celeste, os "lados" de uma figura ou intervalo não são medidas lineares, como em um objeto físico, mas sim medidas angulares. Isso ocorre porque estamos lidando com uma esfera que, por convenção, possui raio infinito, e os objetos celestes, como estrelas, estão projetados nela. Consequentemente, todas as medições na Esfera Celeste são angulares.

Assim, ao nos referirmos aos "lados" de um triângulo ou qualquer outra figura na Esfera Celeste, estamos falando de arcos de círculo, expressos como ângulos medidos a partir do centro da esfera. Por exemplo, se quisermos medir a distância angular entre duas estrelas na Esfera Celeste, determinamos o arco formado entre elas:



- (3) **Plano Meridiano:** o plano meridiano é perpendicular ao Horizonte, contendo eixo Norte-Sul, Zênite, Nadir e observador. Sua intersecção com a esfera celeste delimita a circunferência conhecida como Meridiano Local.

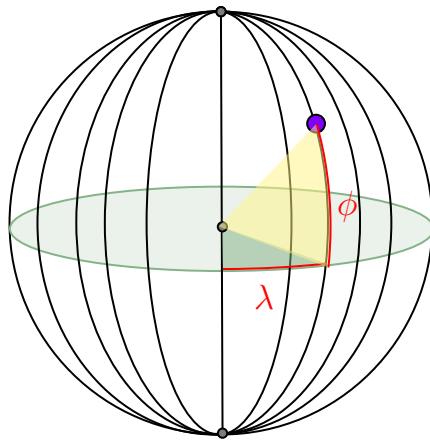
O horizonte divide o Meridiano Local em duas semicircunferências: a visível, no Hemisfério Zenital e a invisível, no Nadiral.

**Observação:** apesar da nomenclatura similar à Geografia, o Meridiano Local na Astronomia de Posição não se limita à semicircunferência que liga o Polo Celeste Norte ao Sul passando pelo Zênite, em vez disso, comprehende toda a circunferência.

- (4) **Ponto Vernal:** um dos pontos de intersecção da Linha do Equador com a da Eclíptica. Corresponde à localização do Sol no dia do Equinócio de Outono para o Hemisfério Sul.

Depois de revisados esses conceitos, pode-se aprofundar os estudos dos Sistemas de Coordenadas:

- **Sistema Geográfico:** Apesar de não ser um Sistema de Coordenadas Celestes, é de extrema importância entender como funciona a disposição de pontos na superfície terrestre:



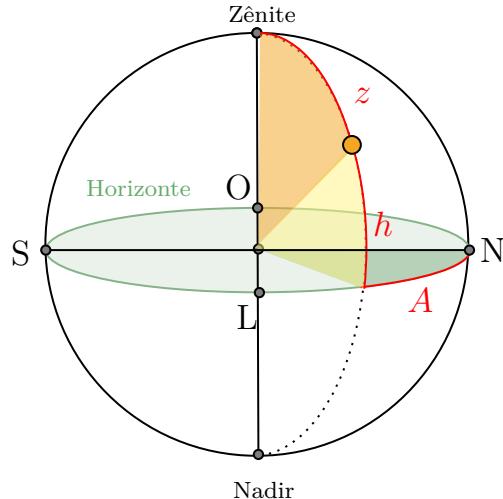
- **Latitude ( $\phi$ ):** medida angular entre a projeção de um ponto no Equador terrestre e o ponto em si. Por convenção, a latitude é positiva no Hemisfério Norte e, no Sul, negativa.

$$-90^\circ \leq \phi \leq +90^\circ$$

- **Longitude ( $\lambda$ ):** ângulo medido no plano equatorial terrestre entre o Meridiano de Greenwich e a projeção do astro no Equador. Esse ângulo é positivo a Leste de Greenwich e negativo a Oeste.

$$-180^\circ < \lambda < +180^\circ$$

- **Sistema Horizontal Local:** é o sistema mais simples e intuitivo utilizado na Astronomia de Posição, uma vez que tem como base a experiência cotidiana humana.



Suas coordenadas são:

- **Altura (h):** é o ângulo medido a partir da projeção do astro no Horizonte até sua posição na esfera celeste. Sua medida é positiva no Hemisfério Zenital e negativa no Nadiral;

$$-90^\circ \leq h \leq +90^\circ$$

- **Distância Zenital (z):** é uma opção em relação à altura, posto que, na prática, ambas trazem a mesma ideia. Dessa forma, distância zenital é o ângulo medido a partir do Zênite até a posição do astro na esfera celeste;

$$0^\circ \leq z \leq 180^\circ$$

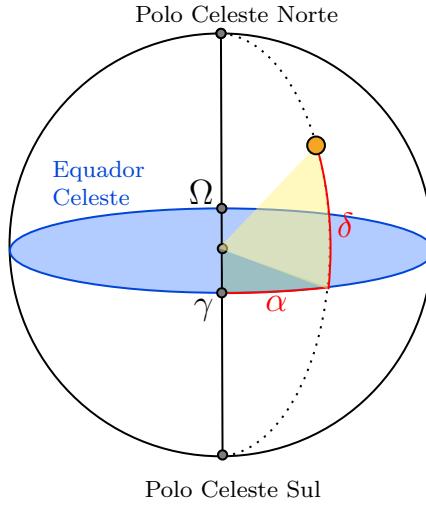
Note que altura e distância zenital são complementares;

- **Azimute (A):** é o ângulo medido no plano do Horizonte que parte do ponto cardeal Norte até a projeção do astro no Horizonte. Suas medições ocorrem no sentido Norte, Leste, Sul, Oeste.

$$0^\circ \leq A < 360^\circ$$

Algumas literaturas consideram o Azimute com início no ponto cardeal Sul e sentido Sul, Oeste, Norte, Leste. Apesar disso, as questões das seletivas adotam seu início no Norte, salvo se estiver explícito o contrário.

- **Sistema Equatorial:** surge com a proposta de tornar as coordenadas de um astro constantes em função do tempo, problema apresentado pelo Sistema Horizontal Local.



Ele utiliza como base para suas medições:

- **Declinação ( $\delta$ ):** ângulo medido entre a projeção de um astro no Equador e sua posição na Esfera Celeste. Por convenção, astros no Hemisfério Norte apresentam declinação positiva e no Hemisfério Sul, negativa;

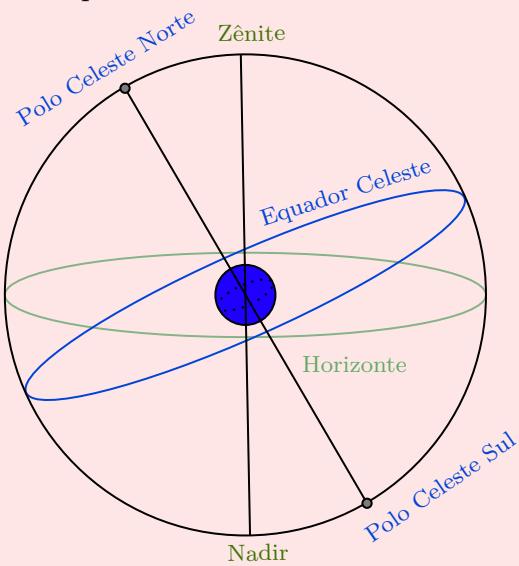
$$-90^\circ \leq \delta \leq +90^\circ$$

- **Ascensão Reta( $\alpha$ ):** é o ângulo medido no Plano do Equador a partir do Ponto Vernal até a projeção do astro no Equador. Seu sentido é dado da seguinte maneira: supondo um observador externo à Esfera Celeste e com vista para o Polo Celeste Norte, a Ascensão Reta aumenta no sentido anti-horário.

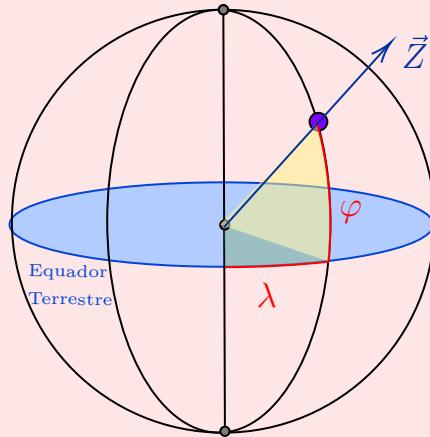
$$0^\circ \leq \alpha < 360^\circ / 0h \leq \alpha < 24h$$

#### Ideia 4: A Latitude é a altura do Polo Celeste elevado

Esquematizando o horizonte do nosso observador genérico, juntamente com o zênite, o nadir, o equador celeste e os polos celestes:

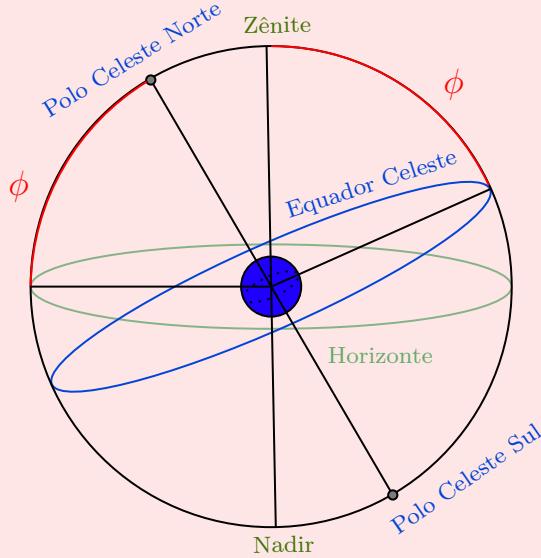


Para clarificar nossas ideias, representaremos o sistema geográfico com o vetor zênite  $\vec{Z}$ , que nada mais é do que um vetor apontando para  $90^\circ$  acima da cabeça do observador. Seu sentido é direcionado para fora da Terra, já que ele representa a direção em que você está olhando para o céu.



Aqui percebemos que a latitude geográfica,  $\phi$ , nada mais é do que o ângulo formado entre o plano do equador celeste e o vetor zênite. Aplicando essa definição ao nosso

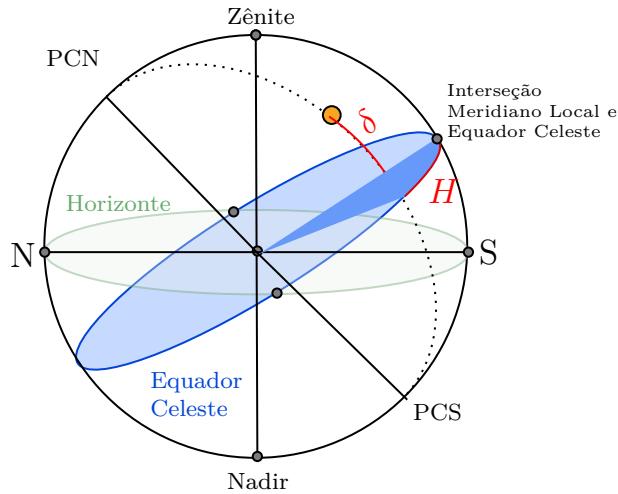
esquema inicial e lembrando que o ângulo entre o equador celeste e o polo celeste é de  $90^\circ$ , podemos esquematizar da seguinte forma:



Finalmente, concluímos que a latitude geográfica corresponde à altura do polo celeste elevado em relação ao horizonte:

$$\phi = h_{\text{Polo Elevado}}$$

- **Sistema Equatorial Horário:** a única diferença entre este sistema e o Equatorial é a mudança da Ascensão Reta pelo Ângulo Horário. Essa modificação permitiu que apenas uma das coordenadas do astro variasse em função do tempo. Analise o esquema abaixo:



Desse modo, podemos definir que:

- **Ângulo Horário (H):** é o ângulo medido sobre o Equador a partir do Meridiano Local até a projeção equatorial do astro. Existem duas possíveis formas para a medição dessa

coordenada:

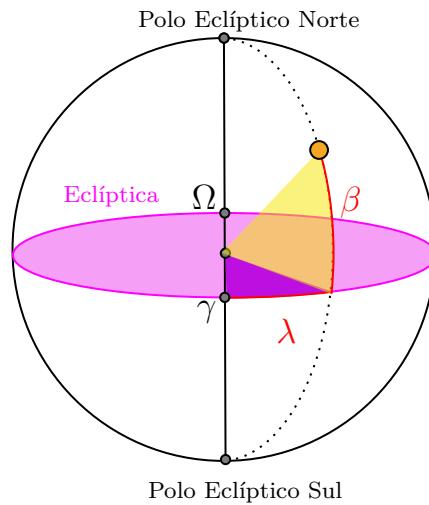
$$0^\circ \leq H < 360^\circ / 0h \leq H < 24h$$

Ou

$$-180^\circ \leq H \leq +180^\circ / -12h \leq H \leq +12h$$

Em ambos os casos, o Ângulo Horário cresce em sentido oposto ao da Ascensão Reta, ou seja, dado um observador externo à Esfera Celeste com vista para o Polo Celeste Norte, ele percebe o Ângulo Horário Crescendo em sentido horário. Além disso, temos que, para o segundo caso, adotando o Ângulo Horário como nulo durante a passagem meridiana superior do astro, ele será positivo a Oeste do Meridiano Local e negativo a Leste.

- **Sistema de Coordenadas Eclípticas:** apesar de sua similaridade com o Equatorial, este novo sistema utiliza a Eclíptica como plano fundamental para suas medições.



Portanto, suas coordenadas são:

- **Latitude Eclíptica ( $\beta$ ):** ângulo medido a partir da projeção do astro na Eclíptica e a posição do corpo na Esfera Celeste. Por convenção, sua medida é positiva no Hemisfério Eclíptico Norte e negativa no Sul.

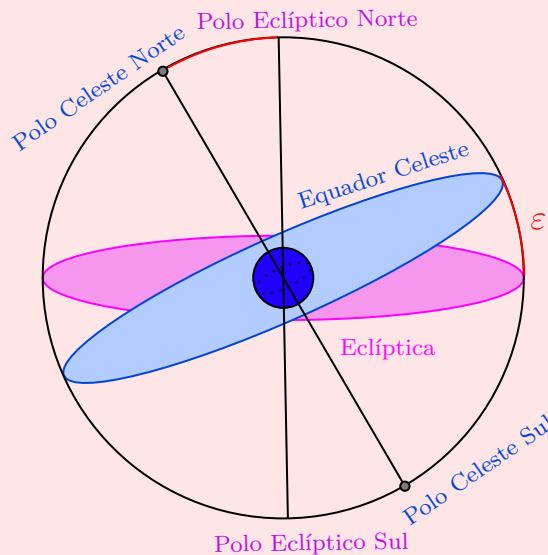
$$-90^\circ \leq \beta \leq +90^\circ$$

- **Longitude Eclíptica ( $\lambda$ ):** ângulo medido na Eclíptica entre o Ponto Vernal e a projeção eclíptica do astro. Seu sentido segue o do movimento anual do Sol, em outras palavras, dado um observador externo à Esfera Celeste com vista para o Polo Eclíptico Norte, a longitude eclíptica aumenta no sentido anti-horário.

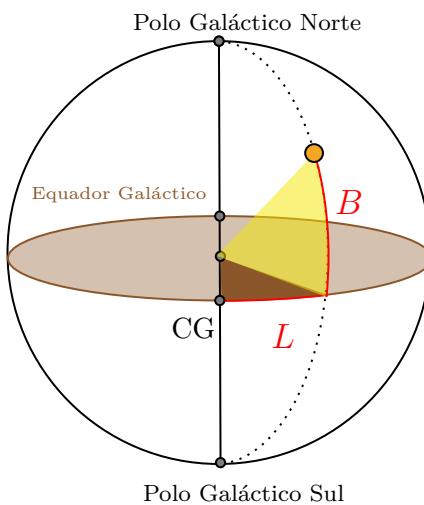
$$0^\circ \leq \lambda < 360^\circ / 0h \leq \lambda < 24h$$

### Ideia 5: Diferenças entre sistema equatorial e eclíptico

Como o sistema equatorial se baseia na projeção do equador terrestre na Esfera Celeste, enquanto o sistema eclíptico se baseia na eclíptica, existe uma diferença angular entre os dois devido à inclinação da Terra em relação ao plano do Sistema Solar. Essa inclinação, conhecida como obliquidade da eclíptica, é de  $\epsilon = 23,5^\circ$ . Assim, a diferença entre esses dois sistemas está justamente nesse ângulo.



- Sistema de Coordenadas Galácticas:** é um sistema centrado no Sol que utiliza o Plano Galáctico como base para suas medições.



Dessa forma, pode-se descrever suas coordenadas:

- **Latitude Galáctica (b):** ângulo medido a partir da projeção do astro no Plano Galáctico e a posição do corpo na Esfera Celeste. Similar aos outros sistemas, sua medida é positiva

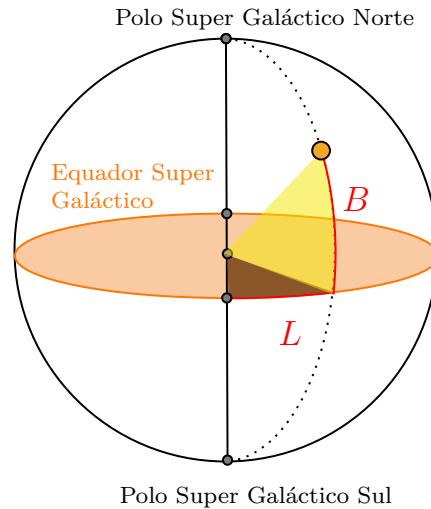
no Hemisfério Galáctico Norte e negativa no Sul;

$$-90^\circ \leq l \leq +90^\circ$$

- **Longitude Galáctica (l):** é o ângulo medido ao longo do plano galáctico. Ele se inicia no ponto que demarca o centro da Via Láctea, presente na constelação de **Sagittarius**, até a projeção do astro no plano. Seu sentido é anti-horário para um observador externo com vista para o Polo Celeste Norte Galáctico, ou seja, contrário ao movimento diurno dos astros.

$$0^\circ \leq b < 360^\circ$$

- **Sistema Supergaláctico:** baseado na disposição de galáxias próximas, esse sistema permitiu o desenvolvimento de diversos estudos acerca de aglomerados galácticos, dentre os quais, o próprio Grupo Local.



Dessa maneira, é fundamental estudar seus aspectos:

- **Latitude Supergaláctica (B ou SGB):** medida angular entre a projeção do astro no Plano Galáctico e a posição do astro em si. Similar aos sistemas anteriores, sua medida é positiva no Hemisfério Norte e negativa no Sul;

$$-90^\circ \leq SGB \leq +90^\circ$$

- **Longitude Supergaláctica (L ou SGL):** ângulo formado entre o ponto de encontro do Plano Galáctico e do Supergaláctico na constelação de **Cassiopeia** e a projeção do astro no Plano Supergaláctico. Seu sentido é anti-horário sob a perspectiva de um observador externo que enxerga o Polo Celeste Norte Supergaláctico.

$$0^\circ \leq SGL < 360^\circ$$

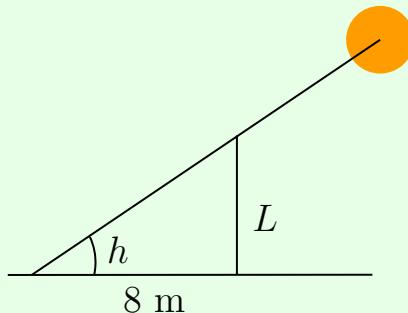
Agora que já aprendemos os sistemas de coordenadas, podemos resolver os problemas que apenas necessitam de uma visualização 2D, assim como o exemplo abaixo:

### Exemplo 45: OBCM 2024 - Relógio de Sol

Uma das formas de se construir um relógio de sol é fixando uma estaca perpendicularmente a uma superfície, podendo ser o chão, ou uma parede. Dessa forma é construída com uma mesma estaca 2 relógios solares, um no chão e um na parede, onde é medido os comprimentos das sombras, 8m no chão e 2m na parede, no dia 21 de março. Calcule o tamanho da estaca e o módulo da latitude local.

### Solução 45

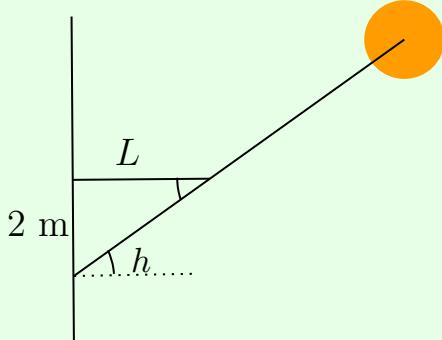
Esquematizando o relógio de sol no chão, denominando  $L$  o tamanho da estaca e  $h$  a altura do sol:



Pelo esquema, temos que:

$$\tan h = \frac{L}{8} \rightarrow h = \arctan\left(\frac{L}{8}\right)$$

Agora, vamos esquematizar o relógio de sol na parede:



Pelo esquema, temos que:

$$\tan h = \frac{2}{L} \rightarrow h = \arctan\left(\frac{2}{L}\right)$$

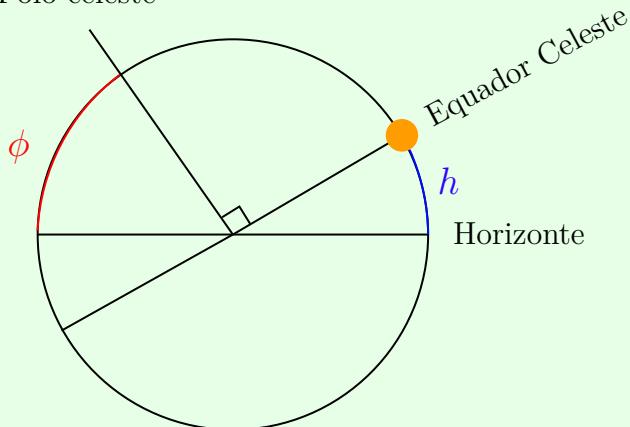
Como ambos os relógios estão no mesmo momento, a altura  $h$  do Sol é a mesma. Logo:

$$\frac{2}{L} = \frac{L}{8} \rightarrow L^2 = 16$$

$L = 4 \text{ m}$

Como o dia 21 de março é o equinócio de março, temos  $\delta_{\odot} = 0^\circ$ , ou seja, o Sol está no equador celeste. Definindo  $\phi$  como a latitude, vamos esquematizar a situação:

Polo celeste



Pelo esquema, temos que  $\phi + h = 90^\circ$ . Substituindo a altura encontrada anteriormente:

$$|\phi| = 90^\circ - \arctan\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$|\phi| = 63^\circ 26' 58,16''$$

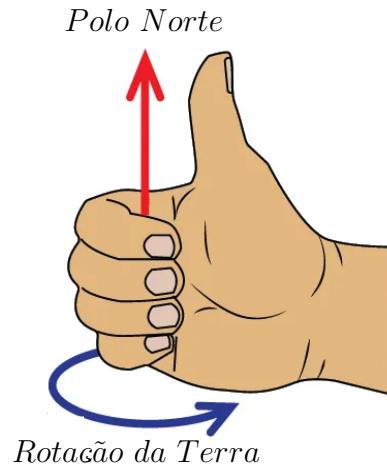
### 3.1.2 Apéx Solar

O Sol não está parado na Via Láctea. Ele segue uma órbita ao redor do centro galáctico com uma velocidade média de 220 km/s, completando uma volta em cerca de 225 milhões de anos. No entanto, dentro dessa órbita, ele também se move em relação às estrelas próximas, criando o conceito de apéx e antiapéx solares. O apéx solar é o ponto no céu para onde o Sol está se movendo em sua trajetória ao redor do centro da Via Láctea. Em outras palavras, é a direção do deslocamento do Sol em relação às estrelas próximas. Enquanto isso, o ponto oposto ao apéx solar na esfera celeste é o antiapéx solar.

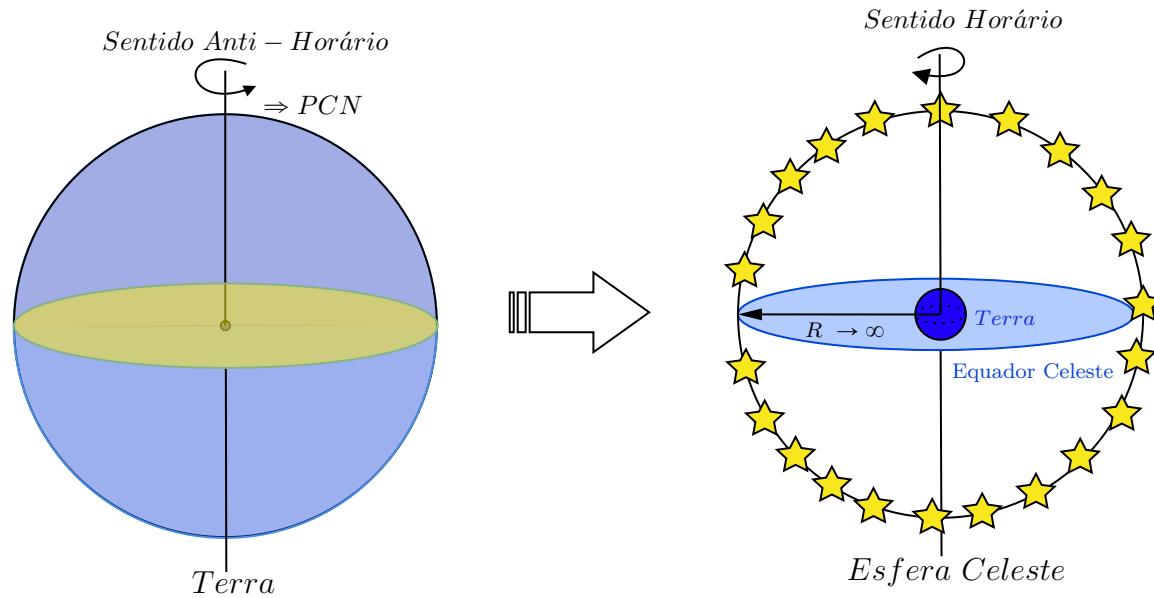
## 3.2 Movimento dos astros

Como um observador terrestre percebe a rotação da esfera celeste no sentido anti-horário ao olhar na direção Sul-Norte, é possível concluir que as estrelas descrevem um movimento ao redor do **PCN** nesse mesmo sentido, enquanto no **PCS** elas giram no sentido horário.

É fundamental entender que a esfera celeste e os astros nela fixados giram no sentido oposto ao da rotação da Terra. Esse movimento pode ser compreendido utilizando a regra da mão direita: ao apontar o polegar para o **PCN**, os astros se deslocam no sentido contrário ao fechamento dos dedos da mão.



Isso implica que, ao longo de um dia, um observador na Terra vê as estrelas surgirem no horizonte próximos ao ponto cardeal leste (azimute  $0^\circ < A < 180^\circ$ ), percorrerem círculos diurnos paralelos ao Equador Celeste e, por fim, desaparecerem no horizonte no hemisfério ocidental (azimute  $180^\circ < A < 360^\circ$ ), perceba:



Perceba a mudança de referencial aplicada na situação, na figura à esquerda, visualiza-se a terra rotacionando e a esfera celeste parada, fixa. Já na figura à direita, é como se a terra estivesse parada e a esfera celeste que está a rotacionar, no sentido contrário ao da terra, pois foi mudado o referencial.

### 3.2.1 Sentido dos Sistemas de Coordenadas

De forma análoga, podemos utilizar dessas regras de mão, esquerda ou direita, para facilitar a fixação e entendimento da variação de coordenadas em diferentes sistemas. Dessa forma, o sentido de giro da mão indica o sentido no qual o valor da coordenada cresce, veja:

- Sistema Altazimutal → Horário (Mão Esquerda);  
⇒ Polegar aponta para o **Zênite** e a variável em questão é o **Azimute**
- Sistema Geográfico → Horário (Mão Esquerda);  
⇒ Polegar aponta para o **Polo Norte Geográfico** e a variável em questão é a **Longitude Geográfica**
- Sistema Horário → Horário (Mão Esquerda);  
⇒ Polegar aponta para o **PCN** e a variável em questão é o **Ângulo Horário**
- Sistema Equatorial → Anti-Horário (Mão Direita);  
⇒ Polegar aponta para o **PCN** e a variável em questão é o **Ascensão reta**
- Sistema Eclíptico → Anti-Horário (Mão Direita);  
⇒ Polegar aponta para o **Polo Norte Eclíptico** e a variável em questão é a **Longitude Eclíptica**
- Sistema Galáctico → Anti-Horário (Mão Direita);  
⇒ Polegar aponta para o **Polo Norte Galáctico** e a variável em questão é a **Longitude Galáctica**

### 3.2.2 Nascer, Ocaso e Passagem meridiana

O **nascer** de um astro ocorre no instante em que sua altura atinge  $h = 0^\circ$  e começa a aumentar, ou seja, quando seu azimute está entre  $0^\circ$  e  $180^\circ$ . Em termos simples, esse é o momento em que o astro se torna visível na linha do horizonte.

Da mesma forma, o **ocaso** de um astro acontece quando sua altura atinge  $h = 0^\circ$  e passa a diminuir, o que ocorre quando seu azimute está entre  $180^\circ$  e  $360^\circ$ . Em outras palavras, é o instante em que ele desaparece no horizonte.

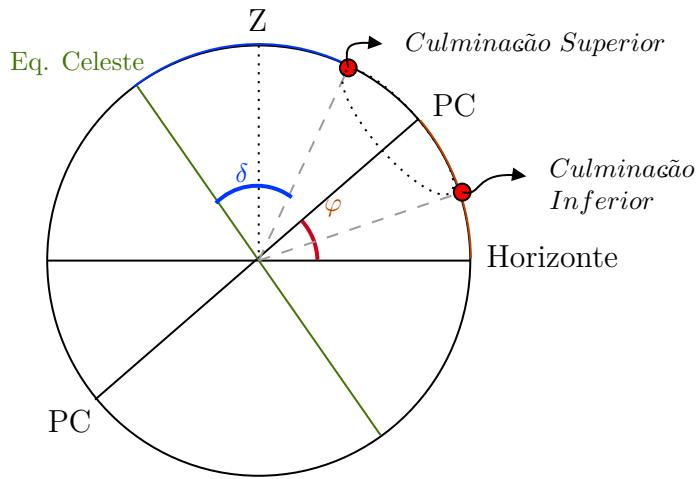
Já a **passagem meridiana** de um astro corresponde ao momento em que ele cruza o meridiano local. Por simetria, esse instante marca exatamente o ponto médio entre o nascer e o ocaso. Isso significa que o intervalo de tempo do nascer até a passagem meridiana é o mesmo que entre essa passagem e o ocaso. (Vale ressaltar que a passagem meridiana do sol, em específico, é exatamente o instante conhecido como **meio dia solar verdadeiro**.)

Vale a ressalva de que o intervalo de tempo que uma estrela demora para dar uma volta completa em seu círculo diurno é denominado **dia sideral** e possui duração de  $D_{sid} = 23^h 56^m 04^s$ .

### 3.2.3 Culminação e Circumpolaridade

Durante o movimento diurno, um astro passa duas vezes pelo meridiano. A passagem meridiana na qual ele atinge sua maior altura é denominada **culminação superior**, enquanto a passagem meridiana em que ele atinge sua menor altura é chamada de **culminação inferior**.

A distância zenithal  $z$  de um astro em sua **culminação superior** pode ser determinada a partir de sua declinação  $\delta$  e da latitude do observador  $\phi$ . Perceba:



Relacionando os ângulos contidos na geometria da situação, conseguimos chegar na seguinte relação:

$$\Rightarrow [z = \pm(\delta - \phi)]$$

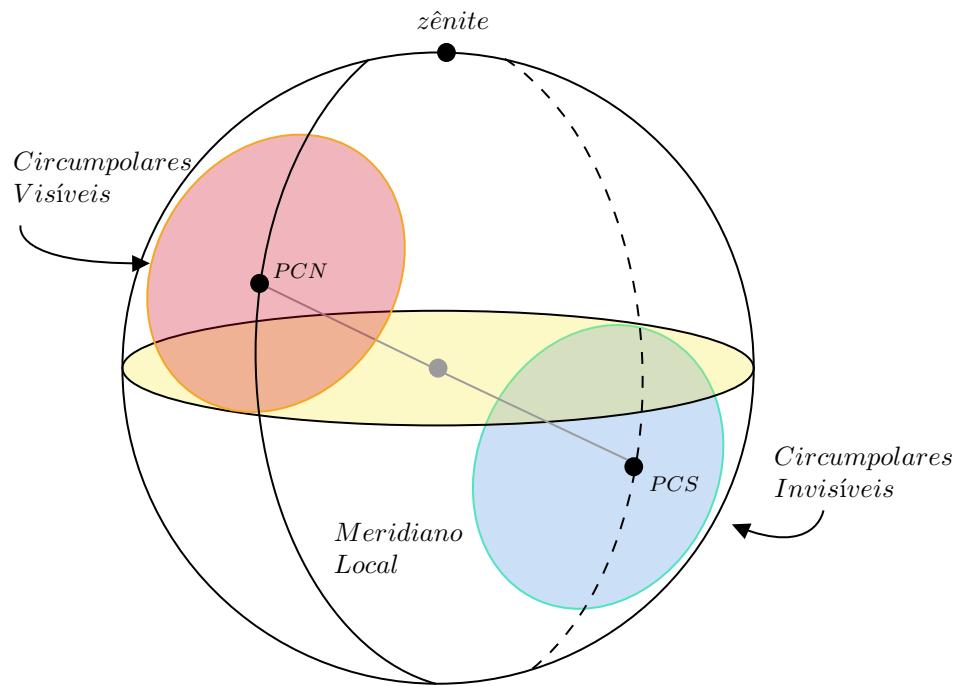
### Estrelas Circumpolares

Você pode perceber na figura anterior que, dependendo da latitude do observador, as estrelas **próximas ao polo celeste visível** traçam círculos diurnos **inteiramente acima do horizonte**. Da mesma forma, estrelas **próximas ao polo oculto** podem permanecer **sempre abaixo do horizonte** para determinados observadores. Essas estrelas são chamadas de **estrelas circumpolares**.

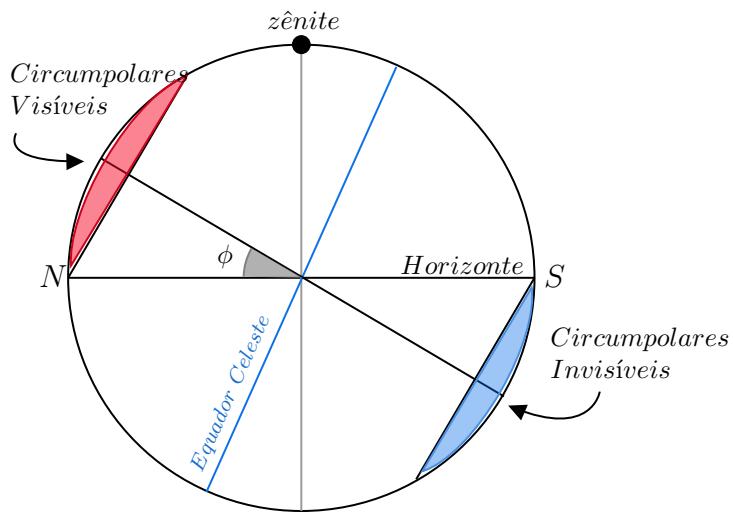
Se as culminações superior e inferior de um astro ocorrem acima do horizonte, ele é denominado **circumpolar visível**.

Se as culminações superior e inferior de um astro ocorrem abaixo do horizonte, ele é denominado **circumpolar invisível**.

A ilustração abaixo mostra as regiões onde se encontram as estrelas circumpolares **visíveis** e **invisíveis** para um observador no **HN**. Caso estivesse no **HS**, a situação seria equivalente.



Agora, vamos encontrar a relação algébrica entre a latitude de um observador e a declinação de um astro para que ele seja circumpolar. Para isso, é útil analisarmos o corte da esfera celeste, conforme ilustrado na seguinte imagem:



De maneira semelhante ao que foi feito para as culminações superior e inferior, é necessário considerar dois casos distintos:

- Para um observador no Hemisfério Norte ( $\phi > 0$ )
- Para um observador no Hemisfério Sul ( $\phi < 0$ )

Em ambas as situações, uma estrela será circumpolar visível se sua altura atingir no máximo  $2|\phi|$  e no mínimo  $|\phi|$  durante sua culminação superior. Dessa forma, astros cuja altura satisfaça a condição

$|\phi| \leq h \leq 2|\phi|$  em sua culminação superior serão classificados como circumpolares visíveis.

Com isso, é possível determinar o módulo da declinação mínima necessário para que uma estrela seja circumpolar visível. A partir da figura a seguir, temos:

$$90^\circ = |\phi| + |\delta_{\text{mín}}| \Rightarrow |\delta_{\text{mín}}| = 90^\circ - |\phi|$$

Esse resultado também é válido para observadores no Hemisfério Sul, pois estamos considerando o módulo da declinação.

Seguindo um raciocínio similar ao das estrelas circumpolares visíveis, podemos realizar um procedimento análogo. Observando a figura anterior percebemos que o ângulo entre o plano do horizonte e o equador celeste à direita do zênite é  $|\phi|$ . Além disso, o ângulo entre o horizonte e o polo oculto (*PCS*) à direita do zênite também é  $|\phi|$ . Assim, temos a relação:

$$90^\circ = |\phi| + |\delta_{\text{mín}}| \Rightarrow |\delta_{\text{mín}}| = 90^\circ - |\phi|$$

Com isso, fica evidente que a equação para  $|\delta_{\text{mín}}|$  é a mesma tanto para estrelas circumpolares visíveis quanto para as invisíveis. Dessa forma, podemos generalizar:

$$|\delta| \geq 90^\circ - |\phi|$$

Uma vez que ambas as incógnitas aparecem em módulo, identificamos dois intervalos possíveis para  $\delta$  a partir de um valor fixo de  $\phi$ , assim como dois intervalos possíveis para  $\phi$  a partir de um valor fixo de  $\delta$ . Esse resultado é coerente com o esperado, já que essa expressão se aplica tanto às circumpolares visíveis quanto às invisíveis.

Assim, as duas soluções obtidas ao utilizar essa fórmula permitem uma análise mais detalhada para determinar as condições que diferenciam a circumpolaridade visível da invisível.

### 3.3 Trigonometria esférica

Nesta seção, vamos derivar as equações da trigonometria esférica. Embora essas deduções não sejam necessárias durante a prova, apresentá-las ajudará você a desenvolver um raciocínio lógico e dedutivo. Após a demonstração, forneceremos as leis essenciais que você pode memorizar para resolver os problemas de forma mais direta.

Um triângulo esférico é uma figura formada pela interseção de três grandes círculos em uma esfera. Chamamos de grande círculo aquele cujo centro coincide com o centro da esfera.

Um triângulo esférico se parece com

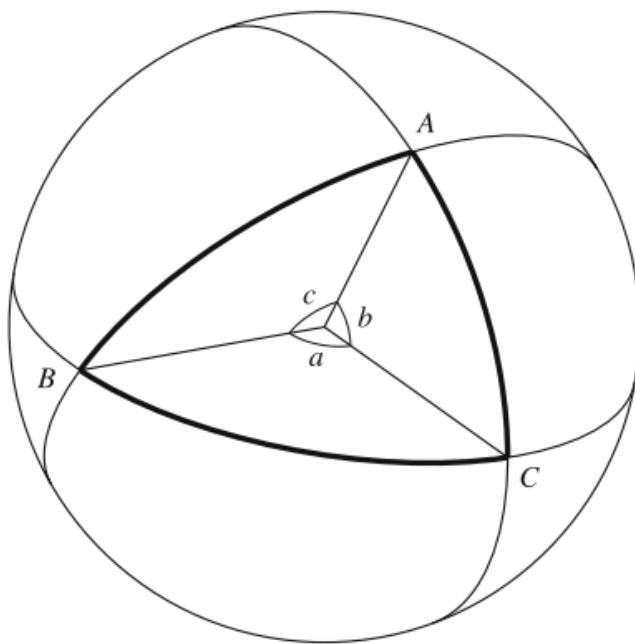


Figura 22: Fonte: "Fundamental Astronomy"

Note que, em radianos e sendo  $R$  o raio da esfera, esse triângulo possuí ângulos  $A$ ,  $B$  e  $C$  e "lados"  $Ra$ ,  $Rb$  e  $Rc$ . Por conta de sua geometria não ser Euclidiana, os ângulos de um triângulo esférico somam mais do que  $180^\circ = \pi[\text{rad}]$ . Com isso, definimos o excesso  $E$  como:

$$E = A + B + C - \pi$$

A área de um triângulo esférico se relaciona com o excesso de uma maneira bem simples:

$$\text{Área} = ER^2$$

Em outras palavras, o excesso é exatamente o ângulo sólido,  $\Omega$ , compreendido pelo triângulo esférico, uma vez que  $\Omega = A/R^2$ .

### 3.3.1 Relações fundamentais do triângulo esférico

Nós podemos deduzir todas as fórmulas de trigonometria esférica, apenas utilizando conceitos básicos de geometria plana. A maneira mais fácil de fazer isso é analisar como um certo sistema de coordenadas se comporta mediante a rotações.

Partiremos do seguinte, Imagine dois sistemas de coordenadas,  $S$  e  $S'$ . Queremos saber como escrever as coordenadas do ponto  $P$  no referencial  $S'$  partindo dos valores de suas coordenadas no referencial  $S$ . Observe a imagem:

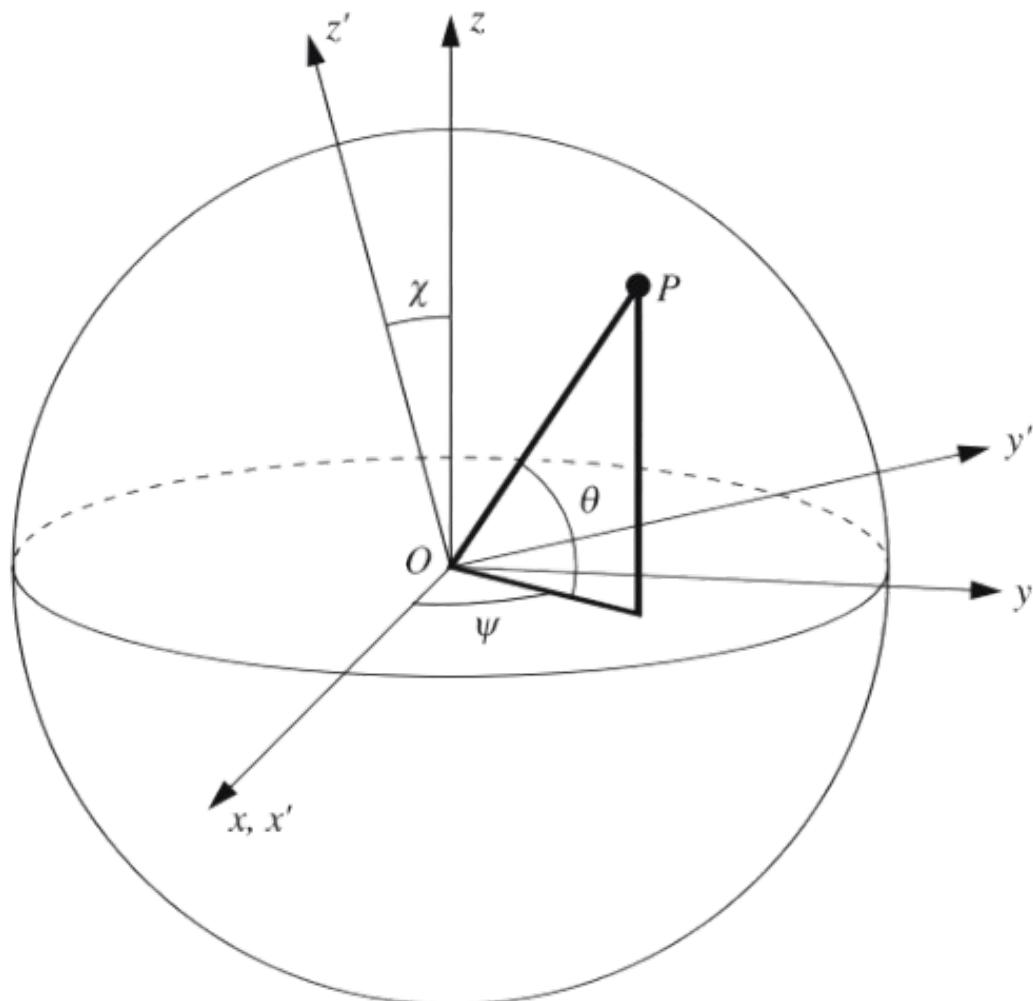


Figura 23: Fonte: "Fundamental Astronomy"

Aqui realizamos uma rotação em torno do eixo  $x$ , ou seja,  $x = x'$ . Analisando as mudanças para  $y, z$  e  $y', z'$  temos o seguinte:

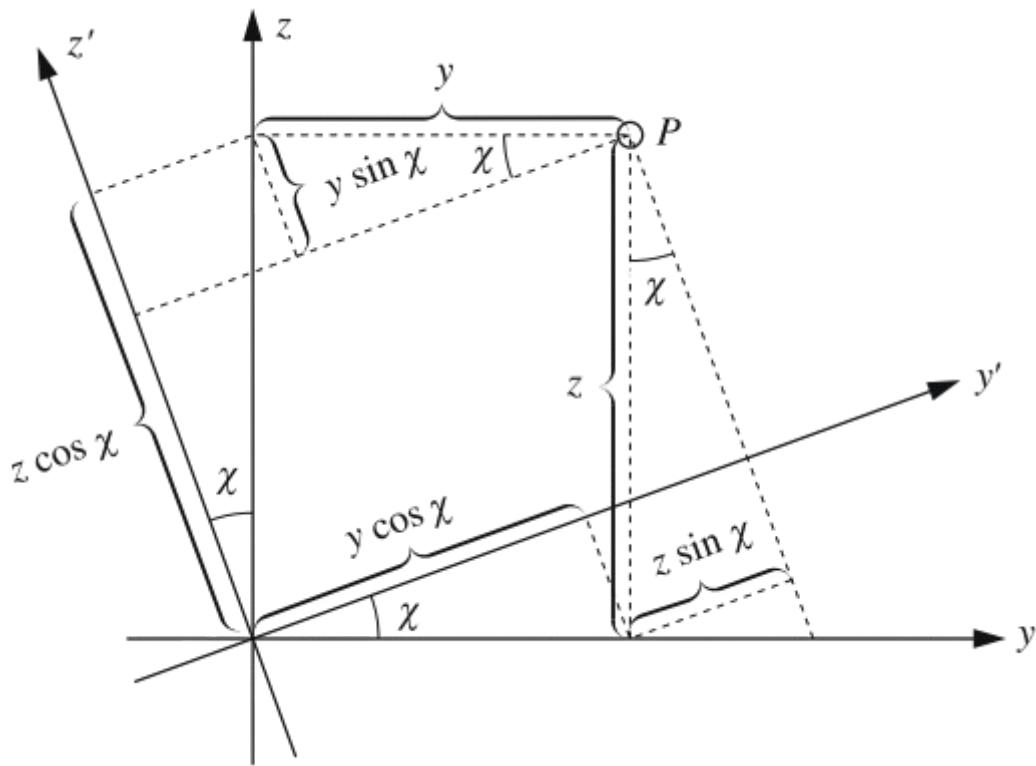


Figura 24: Fonte: "Fundamental Astronomy"

Utilizando a figura, podemos perceber que as coordenadas de  $P$  no referencial  $S'$  são:

$$x' = x$$

$$y' = y \cos \chi + z \sin \chi$$

$$z' = -y \sin \chi + z \cos \chi$$

Se considerarmos a esfera como tendo  $R = 1$ , podemos escrever as coordenadas cartesianas em termos dos ângulos  $\theta$  e  $\psi$ :

$$x = \cos \theta \cos \psi$$

$$y = \cos \theta \sin \psi$$

$$z = \sin \theta$$

$$x' = \cos \theta' \cos \psi'$$

$$y' = \cos \theta' \sin \psi'$$

$$z' = \sin \theta'$$

Mas nós acabamos de descobrir como  $x, y, z$  se relacionam com  $x', y', z'$ . Substituindo uma expressão na outra, temos:

$$(x) : \cos \psi' \cos \theta' = \cos \psi \cos \theta$$

$$(y) : \sin\psi' \cos\theta' = \sin\psi \cos\theta \cos\chi + \sin\theta \sin\chi$$

$$(z) : \sin\theta' = -\sin\psi \cos\theta \sin\chi + \sin\theta \cos\chi$$

Eu sei que esse monte de ângulos ficaram confusos na sua cabeça, então para facilitar, observe a seguinte imagem

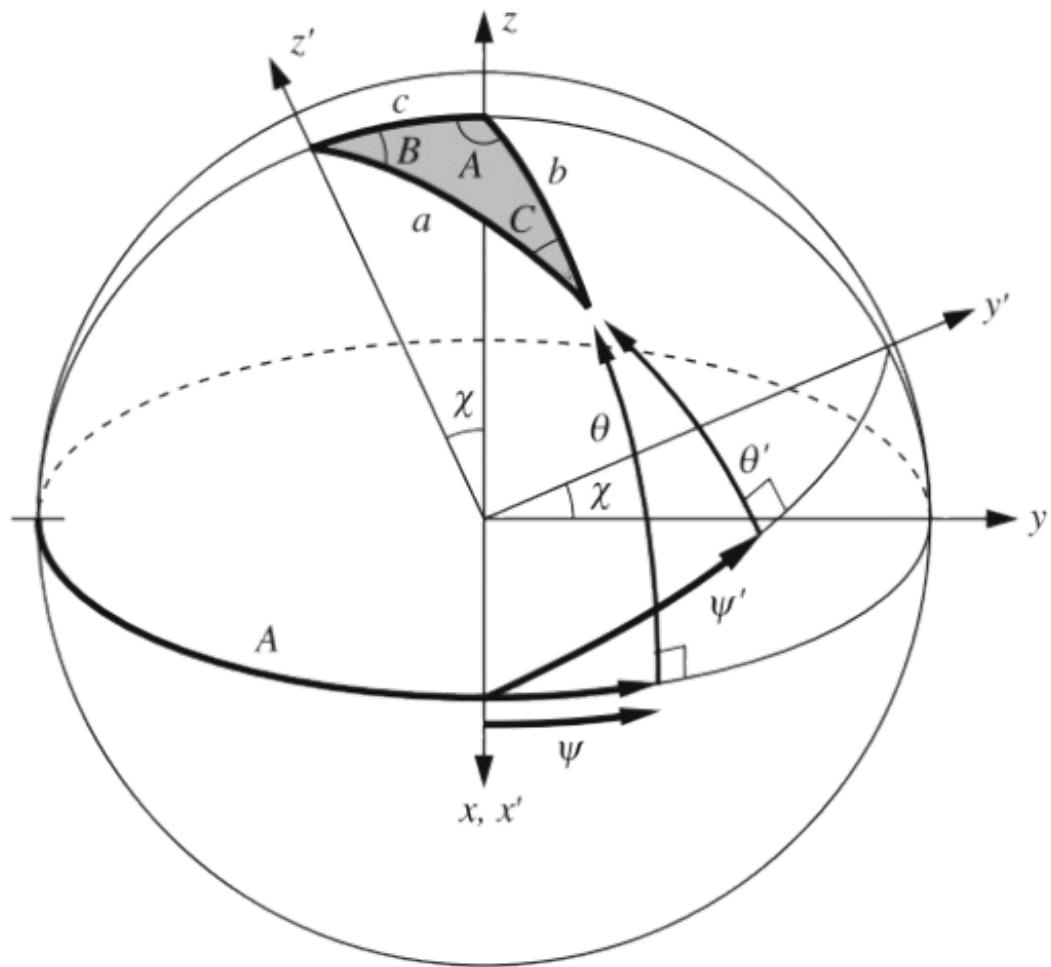


Figura 25: Fonte "Fundamental Astronomy"

Aqui podemos perceber as seguintes relações entre os ângulos

$$\psi = A - 90^\circ,$$

$$\theta = 90^\circ - b,$$

$$\chi = c$$

$$\psi' = 90^\circ - B,$$

$$\theta' = 90^\circ - a,$$

Substituindo esses resultados nas equações encontradas anteriormente, e usando que  $\sin(90^\circ - x) = \cos x$  e  $\cos(90^\circ - x) = \sin x$ , chegamos em:

$$(x) : \sin B \sin a = \sin A \sin b$$

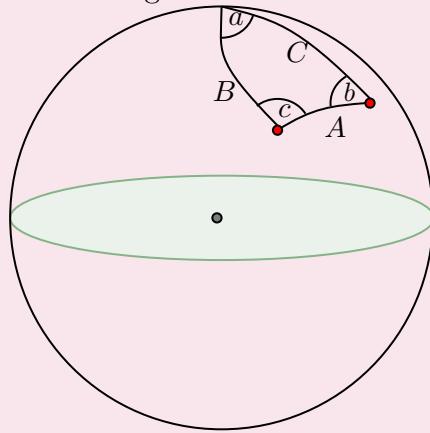
$$(y) : \cos B \sin a = -\cos A \sin b \cos c + \cos b \sin c$$

$$(z) : \cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

Essas três equações são respectivamente, a *Lei dos Senos*, *Lei dos 4 elementos* e *Lei dos Cossenos*.

### Lembrete 19: Equações da Trigonometria esférica

Dado qualquer sistema de coordenadas estudado no capítulo anterior, caso o problema não possa ser resolvido em apenas 1 plano, isto é a situação não é coplanar(2D) e necessita de uma análise 3D, podemos criar um triângulo esférico assim como o abaixo:



E aplicar qualquer uma das seguintes leis:

**Lei dos Senos:**

$$\frac{\sin(a)}{\sin(A)} = \frac{\sin(b)}{\sin(B)} = \frac{\sin(c)}{\sin(C)}$$

**Lei dos Cossenos:**

$$\cos A = \cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a$$

$$\cos B = \cos A \cos C + \sin A \sin C \cos b$$

$$\cos C = \cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c$$

**Lei dos Quatro Elementos (ou Cotangentes):** Aqui, uma música legal pra decorar a mais extensa das regras é: *"cotangente seno cotangente seno cosseno cosseno lado lado ângulo ângulo lado ângulo externo interno externo interno interno interno"* Por exemplo:

$$\cot B \sin C = \cot b \sin a + \cos C \cos a$$

### Ideia 6: Distância Angular entre Astros:

Dados dois astros na Esfera Celeste, é possível encontrar a distância angular entre eles por meio das suas coordenadas Equatoriais:

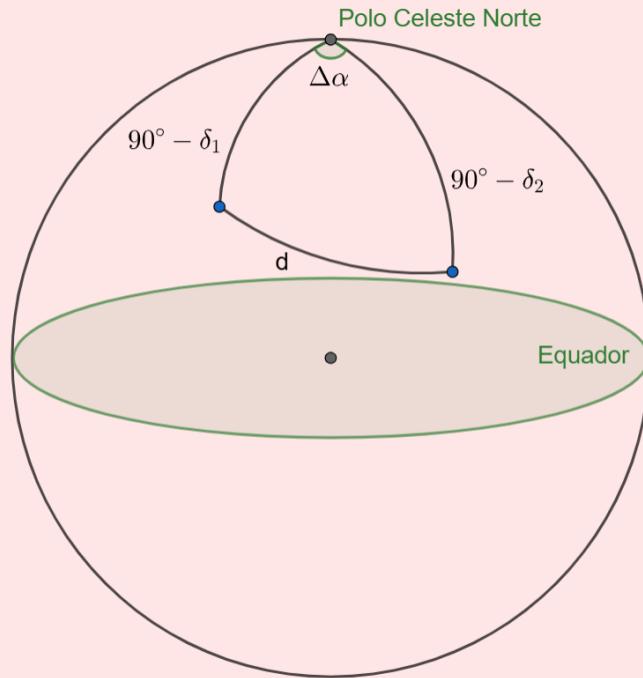


Figura 26: Distância Angular entre Dois Astros

A partir da **Lei dos Cossenos** da Trigonometria Esférica:

$$\cos d = \sin \delta_1 \cdot \sin \delta_2 + \cos \delta_1 \cdot \cos \delta_2 \cdot \cos \Delta\alpha$$

### Ideia 7: Triângulo de Posição:

O Triângulo de Posição consiste em um triângulo esférico com vértices no astro, no Polo Elevado e no Zênite:

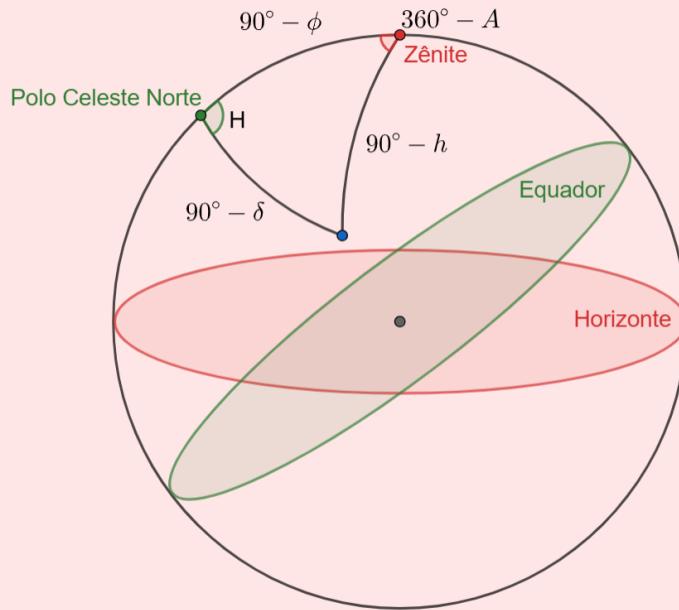


Figura 27: Triângulo de Posição

A partir da representação, pode-se aplicar as principais leis da Trigonometria Esférica:

**Lei dos Cossenos:**

$$\sin h = \sin \delta \cdot \sin \phi + \cos \delta \cdot \cos \phi \cdot \cos H$$

ou

$$\sin \delta = \sin \phi \cdot \sin h + \cos \phi \cdot \cos h \cdot \cos A$$

**Lei dos Senos:**

$$\frac{\cos h}{\sin H} = -\frac{\cos \delta}{\sin A}$$

**Lei dos Quatro Elementos:**

$$\tan \delta \cdot \cos \phi = -\cotg A \cdot \sin H + \cos H \cdot \sin \phi$$

ou

$$\tan h \cdot \cos \phi = -\cotg H \cdot \sin A + \cos A \cdot \sin \phi$$

### Ideia 8: Mudança entre Sistemas de Coordenadas:

Quando estudados separadamente, os sistemas não parecem apresentar relação entre si, contudo, com uma simples disposição geométrica, é possível entender como intercambiar entre eles. Como exemplo, pode-se utilizar a mudança entre os sistemas Equatorial e Eclíptico:

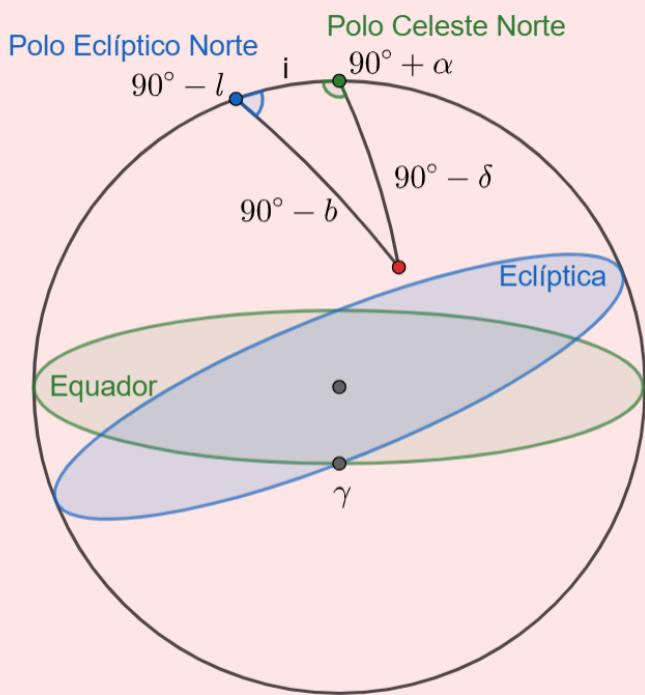


Figura 28: Sistemas Eclíptico e Equatorial

Similar ao Triângulo de Posição, pode-se encontrar as diferentes relações de acordo com a Lei da Trigonometria Esférica utilizada:

**Lei dos Cossenos:**

$$\sin b = \cos i \cdot \sin \delta - \sin i \cdot \cos \delta \cdot \sin \alpha$$

ou

$$\sin \delta = \cos i \cdot \sin b + \sin i \cdot \cos b \cdot \sin l$$

**Lei dos Senos:**

$$\cos \delta \cdot \cos \alpha = \cos b \cdot \cos l$$

**Lei dos Quatro Elementos:**

$$\tan \delta \cdot \sin i = \tan l \cdot \cos \alpha - \sin \alpha \cdot \cos i$$

ou

$$\tan b \cdot \sin i = -\tan \alpha \cdot \cos l + \sin l \cdot \cos i$$

## 3.4 Escala de tempo

### 3.4.1 Medição do Tempo:

A medição da passagem do tempo se tornou fundamental para a espécie humana quando ela percebeu a necessidade da organização de suas atividades. Exercícios básicos para uma vida em sociedade, como a agricultura, a caça, a pesca e o comércio, começaram a ser realizados em sincronia com uma rígida escala determinada pelos fenômenos naturais. Dessa forma, com o intuito de simplificar essa tarefa, um dos fenômenos mais acessíveis e conhecidos foi utilizado como base da medição: o padronizado movimento dos astros na Esfera Celeste.

Nesse capítulo, portanto, serão apresentados conceitos aparentemente triviais, mas que possuem uma face astronômica a ser aprendida pelos estudantes das seletivas. Em outras palavras, a partir de agora, não confie tanto no seu relógio.

### 3.4.2 Tempo Sideral:

O movimento diário das estrelas na Esfera Celeste é perfeito para a medição da passagem do tempo. Desse modo, foi cunhado o conceito de Tempo Sideral, o qual pode ser dividido em: **Tempo Sideral Local (TSL)**: consiste no Ângulo Horário do Ponto Vernal. Em tese, qualquer estrela distante poderia ser escolhida, contudo, por convenção, o Ponto Vernal tornou-se o indicador desse Tempo. **Tempo Sideral de Greenwich (TSG)**: é o Tempo Sideral para localidades em que o Meridiano Local coincide com o Meridiano de Greenwich. Com uma análise geométrica básica, consegue-se demonstrar que:

$$\lambda = TSG - TSL$$

Em que  $\lambda$  indica a Longitude Geográfica do local. Além disso, percebe-se a existência do **Dia Sideral**, intervalo de tempo entre duas passagens do Ponto Vernal pelo Meridiano Superior Local. Note que, ao contrário do esperado, a mudança de data ocorre quando o Ponto está acima do Horizonte.

#### Ideia 9: Medição do Tempo Sideral a partir das coordenadas de um astro

À primeira vista, pode parecer complicado determinar o Tempo Sideral Local, posto que o Ponto Vernal não é observável na Esfera Celeste, mas, com uma simples análise da disposição dos astros, pode-se perceber a configuração da imagem abaixo.

Dessa maneira, ao admitir a existência de um corpo celeste qualquer com Ascensão Reta e Ângulo Horário bem definidos, pode-se facilmente calcular que: Para  $H + \alpha < 360^\circ$ :

$$TSL = H + \alpha$$

Para  $H + \alpha > 360^\circ$ :

$$TSL = H + \alpha - 360^\circ$$

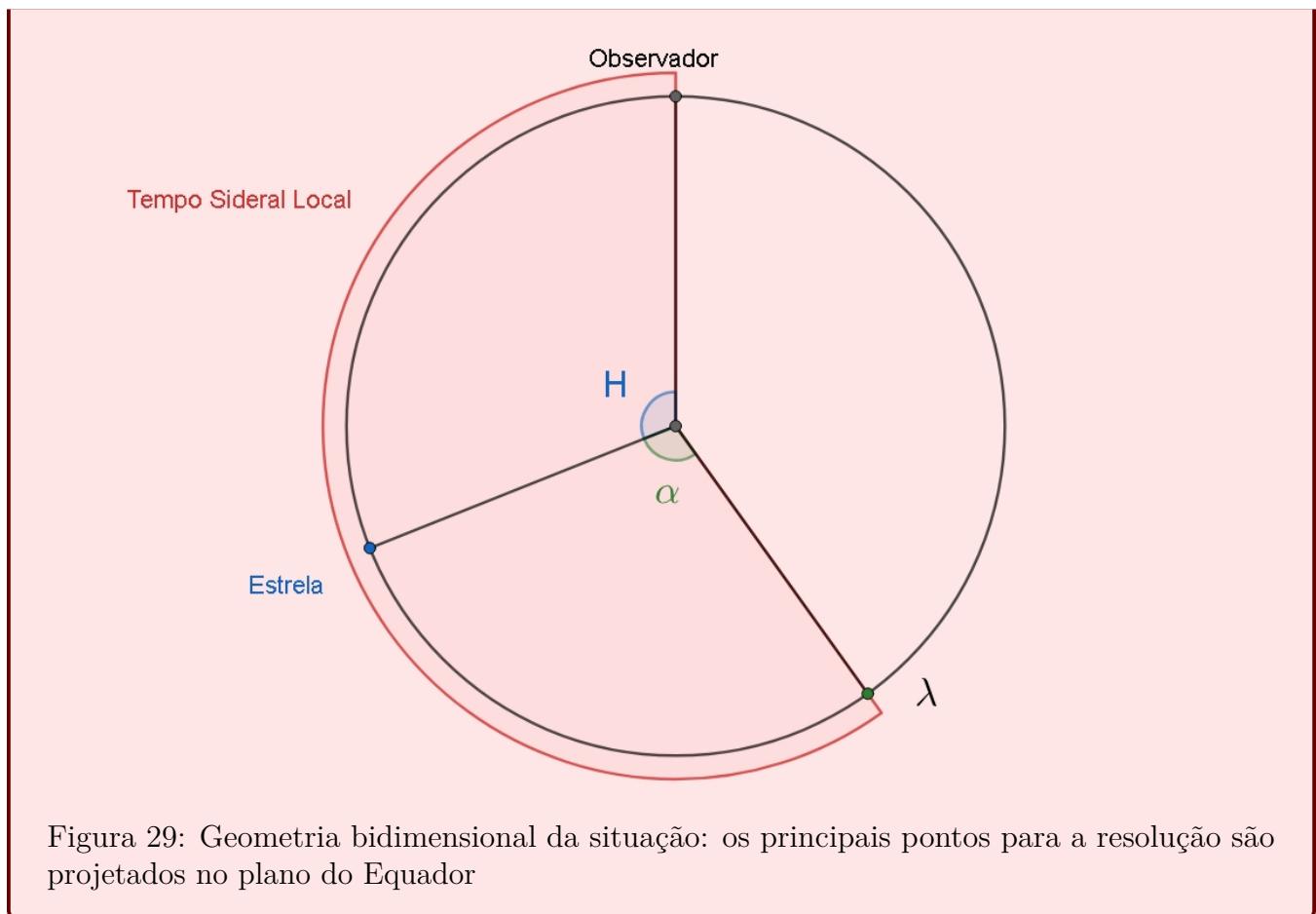


Figura 29: Geometria bidimensional da situação: os principais pontos para a resolução são projetados no plano do Equador

### 3.4.3 Tempo Solar Verdadeiro:

Desde tempos remotos, o ser humano percebeu a padronização do movimento solar na Esfera Celeste. Assim, como meio de associar a medição da passagem do tempo com os ciclos naturais seguidos pelas sociedades humanas, foi criado o Tempo Solar Verdadeiro:

**Tempo Solar Verdadeiro Local (TVL):** corresponde ao Ângulo Horário do centro do Sol Verdadeiro acrescido de 12h. Dessa forma, a mudança de dia ocorre durante a passagem meridiana inferior do astro, tornando essa medição preferível para a organização das atividades humanas.

$$TVL = H_{sol} + 12h$$

**Tempo Solar Verdadeiro de Greenwich (TVG):** trata-se da medição do Tempo Solar Verdadeiro para o caso em que o Meridiano Local coincide com o Meridiano de Greenwich. Logo, similar ao Tempo Sideral, é válida a relação:

$$\lambda = TVG - TVL$$

Em que  $\lambda$  faz referência à Longitude Geográfica do local.

O fato de que, para a medição deste Tempo, são acrescidas 12h ao Ângulo Horário do Sol Verdadeiro, favorece seu uso. Assim, o **Dia Solar Verdadeiro** tem seu início à meia-noite, momento da

passagem meridiana inferior do Sol.

**Observação:** o uso da expressão "Sol Verdadeiro", apesar de parecer redundante, apenas enfatiza que o astro abordado corresponde ao Sol real, sem idealizações. Dessa maneira, quando o estudante iniciar o estudo de astros fictícios, como Sol Médio, irá perceber a necessidade de tal nomenclatura para evitar confusões na leitura.

### 3.4.4 Tempo Solar Médio:

**Problemas do Tempo Solar Verdadeiro:** o uso do Sol Verdadeiro traz algumas dificuldades para a criação de uma medida universal de tempo, uma vez que seu movimento na Esfera Celeste segue algumas particularidades:

- (1) **Órbita elíptica:** uma das características de uma órbita com excentricidade não nula é a inconstância na velocidade do astro. Dessa forma, no referencial terrestre, o Sol aparenta ter velocidade variável em seu percurso anual;
- (2) **Obliquidade da eclíptica:** o Tempo Solar Verdadeiro é uma função do Ângulo Horário do Sol, ou seja, uma função do ângulo entre o Meridiano Local e a projeção do astro no Equador. Por isso, para trabalhar com esse Tempo, é necessário projetar a velocidade angular do Sol nesse plano. Como a Eclíptica apresenta uma inclinação com o Equador (cerca de  $23,5^\circ$ ), a velocidade equatorial do Sol não apresenta uma constância, o que torna as medições imprecisas.

Para encerrar tais limitações, foi criado o conceito de **Sol Médio**.

**Sol Médio:** O Sol médio é um astro fictício, baseado no Sol verdadeiro, mas que apresenta certas diferenças em sua trajetória na Esfera Celeste:

- (1) **Velocidade angular constante:** em contraposição ao Sol Verdadeiro, o Médio apresenta velocidade angular constante em sua trajetória anual;
- (2) **Trajetória equatorial:** o círculo máximo percorrido pelo Sol Médio em um ano, o círculo análogo à Eclíptica, é coincidente com o Equador; a inclinação entre ambos é nula.

A partir dessa ideia, surgiu o **Tempo Solar Médio**.

**Tempo Solar Médio Local (TL):** similar ao Tempo Solar Verdadeiro Local, consiste no Ângulo Horário do Sol Médio acrescido de 12h.

$$TV = H_{Sol\ M} + 12h$$

Em que  $H_{Sol\ M}$  trata-se do Ângulo Horário do Sol Médio.

**Tempo Universal (UT):** é o Tempo Solar Médio medido a partir do Meridiano de Greenwich. Novamente, é válida a relação:

$$\lambda = UT - TL$$

Sendo  $\lambda$  a Longitude Geográfica de certa localidade.

Um **Dia Solar Médio** corresponde ao intervalo de tempo entre duas passagens consecutivas do Sol Médio pelo Meridiano Inferior Local. Assim, a duração desse dia é de exatas **24h**.

### Ideia 10: Duração dos dias:

No decorrer da leitura, o estudante foi apresentado a diferentes conceitos de Dia (Dia Sideral, Dia Solar Verdadeiro e Dia Solar Médio). Apesar de todos apresentarem ideias similares, é importante frisar suas diferentes durações. Dessa forma, pode-se classificá-los em dois grupo:

#### Dias de duração variável:

- (1) **Dia Sideral Verdadeiro;**
- (2) **Dia Solar Verdadeiro.**

#### Dias de duração fixa:

- (1) **Dia Sideral Médio:** o Dia Sideral Verdadeiro apresenta duração variável em virtude da Nutação e de outras irregularidades no movimento terrestre. Por isso, foi criado o Dia Sideral Médio, uma média das distintas durações do Dia Sideral Verdadeiro. Sua duração é de 23h 56 min 04s, aproximadamente;
- (2) **Dia Solar Médio:** apresenta 24h de duração.

**Observação:** fica implícito que, ao ser afirmada a duração de um período de tempo, por exemplo, a duração do Dia Sideral Médio, a unidade de medida será baseada na Hora Solar Média.

### Ideia 11: Diferença entre o Dia Solar Médio e o Dia Sideral Médio:

A diferença entre ambos os dias decorre de um fato simples: em virtude da translação terrestre, quando o planeta finaliza uma rotação, ou seja, completa um Dia Sideral Médio, ele apresenta um deslocamento em sua órbita. Esse deslocamento torna necessário que a Terra rotacione mais um pequeno ângulo para que o Sol aparente ter retornado ao Meridiano Local do observador. Esse fenômeno gera a movimentação anual do Sol entre as estrelas fixas, ou seja, sua trajetória na Eclíptica.

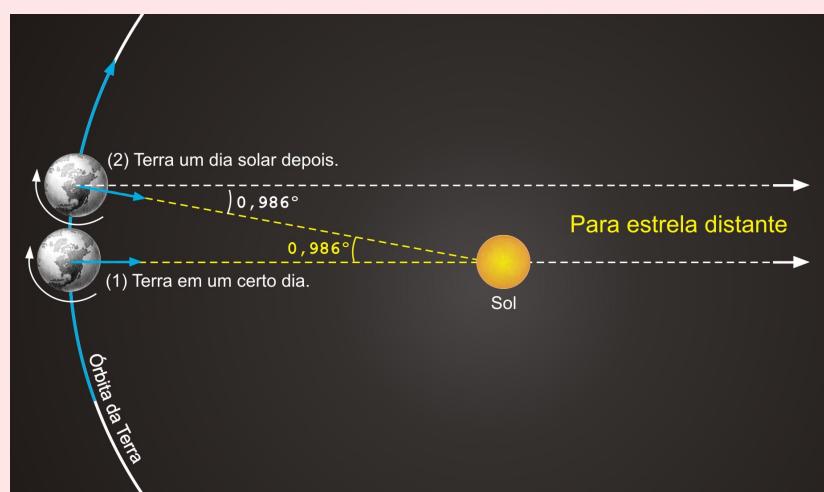


Figura 30: Observe como a translação terrestre torna necessário que o planeta rotacione mais um pequeno ângulo para completar um Dia Solar. Fonte: "Astronomia e Astrofísica"

### 3.4.5 Equação do Tempo:

O Sol Verdadeiro e o Sol Médio, em razão de suas particularidades, geralmente apresentam localizações distintas na Esfera Celeste. Esse fato gera uma discrepância entre ambos os Tempos. Assim, chama-se de **Equação do Tempo** à diferença entre o Tempo Solar Verdadeiro Local e o Médio:

$$ET = TSV - TL$$

Tendo em vista suas definições, pode-se reescrever a expressão como função do Ângulo Horário e Ascensão Reta do Sol:

$$ET = H_{Sol\ V} - H_{Sol\ M}$$

$$ET = \alpha_{Sol\ M} - \alpha_{Sol\ V}$$

A Equação do Tempo pode ser entendida como resultado da combinação dos dois fatores que diferenciam o Sol Verdadeiro do Médio: a excentricidade orbital do planeta e a obliquidade da Eclíptica. A seguir, são apresentados os gráficos de contribuição desses fenômenos e, por fim, a soma de ambos, o gráfico da Equação do Tempo:

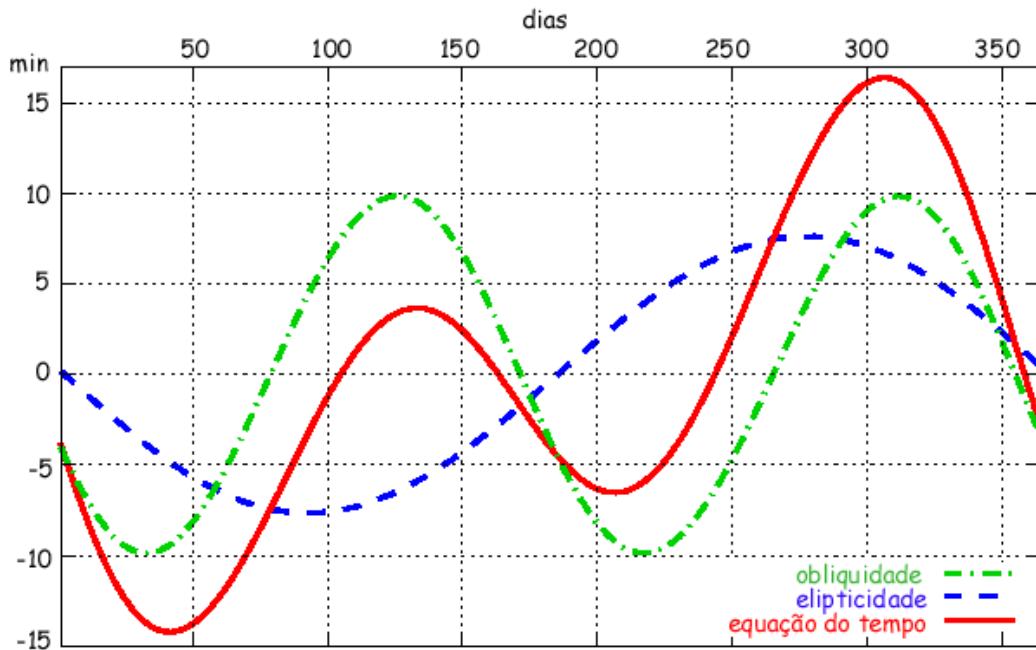


Figura 31: Em azul, gráfico resultante da excentricidade orbital. Em verde, da obliquidade da Eclíptica. Por fim, em vermelho, verifica-se o gráfico final da Equação do Tempo. Fonte: Wikipédia

A partir desses gráficos, é interessante realizar um detalhamento de como tais fenômenos influenciam na Equação do Tempo:

#### (1) Excentricidade orbital:

O gráfico da excentricidade orbital retrata uma função com um máximo e com um mínimo e período de um ano, sendo nula em dois pontos. Essa configuração resulta do movimento orbital terrestre: ao longo de um ano, o Sol aparenta ter, para um referencial fixo na Terra, um mínimo e um máximo de velocidade, relacionados ao afélio e ao periélio da órbita do planeta. Uma vez que os pontos de máxima diferença de velocidade entre os sóis apresentam mínima diferença de Ângulo Horário entre eles, ou seja, a função se anula, seu gráfico deve apresentar dois pontos nulos referentes ao afélio e periélio terrestres, tal como explícito no gráfico;

## (2) Obliquidade da Eclíptica:

O gráfico da obliquidade da Eclíptica, por sua vez, apresenta dois máximos e dois mínimos, anulando-se em quatro pontos. Pode-se entender essa configuração a partir do movimento do Sol na Esfera Celeste. Durante seu percurso, o astro deve apresentar uma velocidade equatorial (projetada no Equador) máxima e mínima que, pela simetria esférica da situação, apresenta-se duas vezes no decorrer de um ano. Desse modo, o gráfico deve exibir os quatro pontos de função nula coincidentes com os Equinócios e Solstícios do planeta.

A adição de ambos esses processos resulta no já conhecido gráfico da Equação do Tempo. Ele apresenta quatro pontos de variação nula, os quais, é importante frisar, **não** coincidem com os pontos de Solstício e de Equinócio. Uma consequência da Equação do Tempo é o **analema**. Caso um astrotógrafo capturasse imagens do Sol Verdadeiro ao longo de um ano com intervalos de um Dia Solar Médio (todas as imagens feitas no mesmo Tempo Solar Médio), as diversas posições do astro formariam uma figura similar a um 8 assimétrico, um analema.

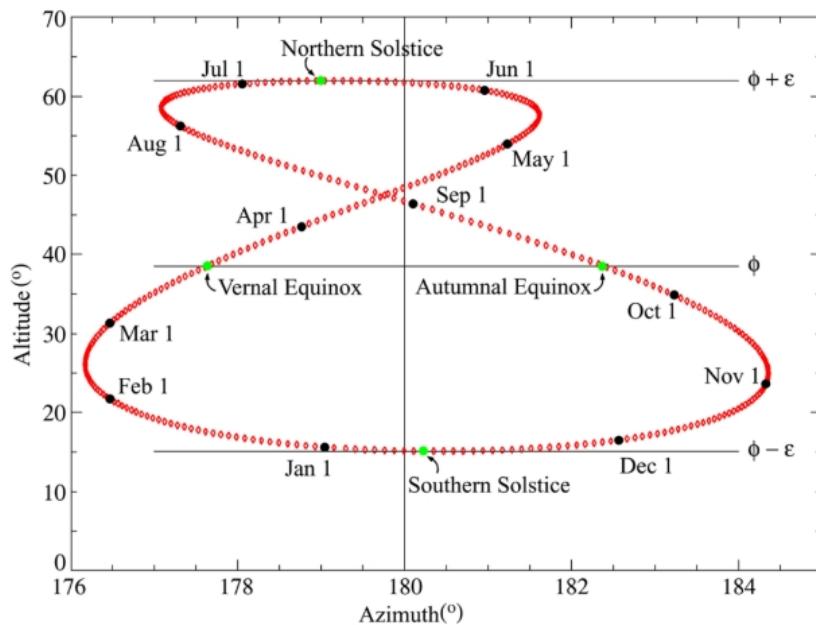


Figura 32: Analema. Fonte: Wikipédia

Na imagem, percebe-se que o Sol Verdadeiro apresenta dois eixos de movimentação com relação ao

Médio. O primeiro, paralelo ao Equador e o segundo, paralelo ao meridiano em que se localiza o Sol Médio. O primeiro movimento é consequência direta da Equação do Tempo; o Sol varia sua Ascensão Reta tal como descrito pelo gráfico estudado, anulando-se em quatro pontos. O outro, por sua vez, consiste na variação de Declinação do Sol, oriunda da Obliquidade da Eclíptica. A combinação de ambos resulta na figura do analema.

### Ideia 12: Equação do Tempo em função do tempo

Sabe-se que a Equação do Tempo pode ser dada como:

$$ET = \alpha_M - \alpha_V$$

Assumindo a aproximação de que o Sol apresenta velocidade constante na Eclíptica, ou seja, que a órbita terrestre apresenta excentricidade nula, pode-se encontrar a Ascensão Reta do Sol Verdadeiro a partir de uma análise da seguinte configuração:

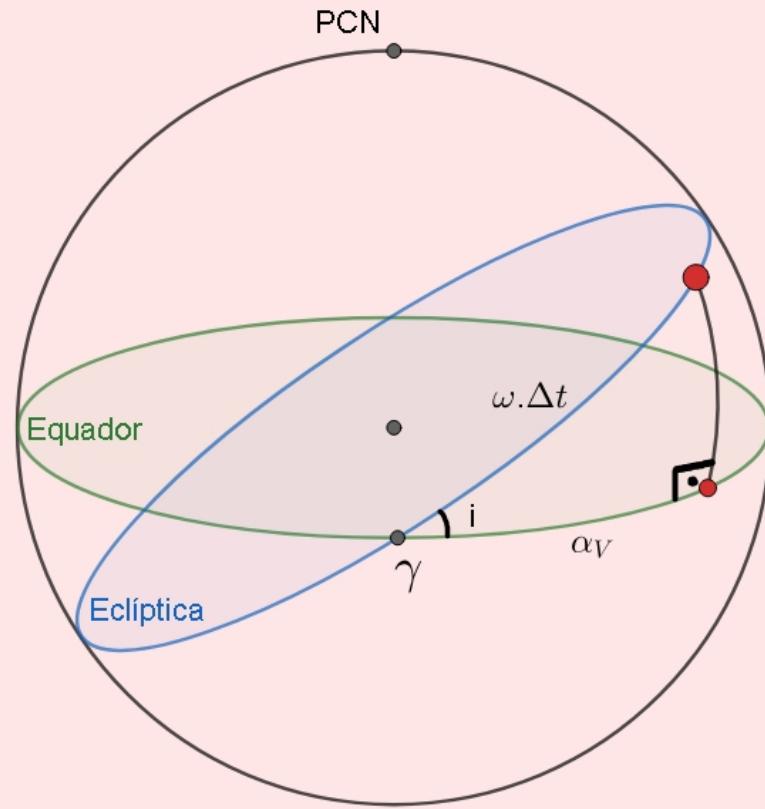


Figura 33: Projeção do Sol Verdadeiro no Equador. É interessante ressaltar que, nessa figura, não está representado o Sol Médio.

Aplicando a **Lei dos Quatro Elementos** da Trigonometria Esférica ao triângulo da figura, a expressão a seguir pode ser obtida:

$$\cotg (\omega. \Delta t) \cdot \sin \alpha_V = \cotg 90^\circ \cdot \sin i + \cos i \cdot \cos \alpha_V$$

Isolando o  $\alpha_V$ :

$$\alpha_V = \arctan(\cos i \cdot \tan(\omega \cdot \Delta t))$$

Como a velocidade angular anual do Sol é dada por:

$$\omega = 2\pi/T$$

Em que T corresponde à duração de um ano. Pode-se reescrever a expressão como:

$$\alpha_V = \arctan \left( \cos i \cdot \tan \left( \frac{2\pi}{T} \Delta t \right) \right)$$

Agora, é necessário determinar a Ascensão Reta do Sol Médio, a qual pode ser encontrada por meio de uma simples regras de três (lembre-se de que velocidade do Sol Médio no Equador é constante):

$$\alpha_M = \frac{2\pi}{T} \Delta t$$

Finalmente:

$$ET = \frac{2\pi}{T} \Delta t - \arctan \left( \cos i \cdot \tan \left( \frac{2\pi}{T} \Delta t \right) \right)$$

Que consiste em uma fórmula aproximada para a Equação do Tempo.

### 3.4.6 Fusos Horários:

O uso do Tempo Local, ou seja, o uso do Tempo baseado no Meridiano Local do observador, não consiste na melhor opção para a vida cotidiana. Imagine o seguinte cenário: um estudante morador da cidade do Rio de Janeiro é convidado para realizar as provas presenciais em Barra do Piraí; apesar da distância pequena entre ambas, o aluno seria obrigado a, sempre que fosse participar dos treinamentos, acertar a hora de seu relógio em poucos minutos. Deveras complicado! Com o intuito de impedir as dificuldades que a adoção do Tempo Local traria aos participantes das seletivas, criou-se o conceito de **Fuso Horário**:

**Fuso Horário:** para evitar distinções pequenas, da ordem de minutos, entre duas localidades, foi adotado que a diferença de Tempo entre ambas deveria ser um múltiplo inteiro de uma hora. Nesse sentido, a Terra foi fatiada em 24 fusos esféricos de  $15^\circ$  cada. Todos os pontos pertencentes a um determinado fuso apresentam a mesma hora, determinada pelo Tempo Solar Médio do Meridiano Central.

**Tempo Civil (TF):** ou Tempo do Fuso, corresponde ao Tempo Solar Médio do Meridiano Central.

**Tempo Universal(UT):** consiste no Tempo Civil para o fuso em que o Meridiano Central é o de Greenwich.

Os fusos são organizados a partir do Meridiano de Greenwich, o fuso UTC +0. A oeste dele, os fusos são numerados negativamente, e a leste, positivamente, variando de  $UTC - 12$  a  $UTC + 12$ . Em que o número ao lado da sigla UTC corresponde à Correção Zonal ( $\Delta Z$ ). Dessa forma, O Tempo

Civil de qualquer região pode ser determinado por meio da seguinte fórmula:

$$TF = UT + \Delta Z$$

### Ideia 13: Como determinar os Tempos Locais

#### (1) Tempo Solar Médio Local:

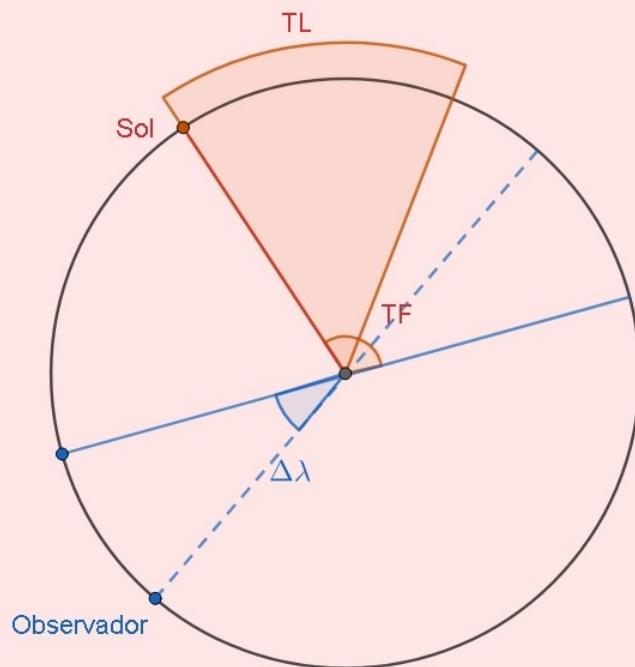


Figura 34: Esquema normalmente utilizado pelos estudantes para a resolução de questões que envolvam pontos contidos no Equador.  $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_{Central}$

Por meio dessa imagem, pode-se montar a expressão:

$$TL = TF + (\lambda - \lambda_{Central})$$

Em que  $\lambda_{Central}$  corresponde à longitude do Meridiano Central do Fuso.

#### (2) Tempo Solar Verdadeiro Local:

Nesse caso, é necessário incluir a Equação do Tempo.

Assim:

$$TVL = TF + (\lambda - \lambda_{Central}) + ET$$

Na prática, a determinação dos fusos é um pouco mais complexa, pois leva em consideração diversos fatores políticos, econômicos e sociais. Por exemplo, apesar da sua vasta extensão territorial, a China apresenta apenas um fuso horário, como está visível na figura:

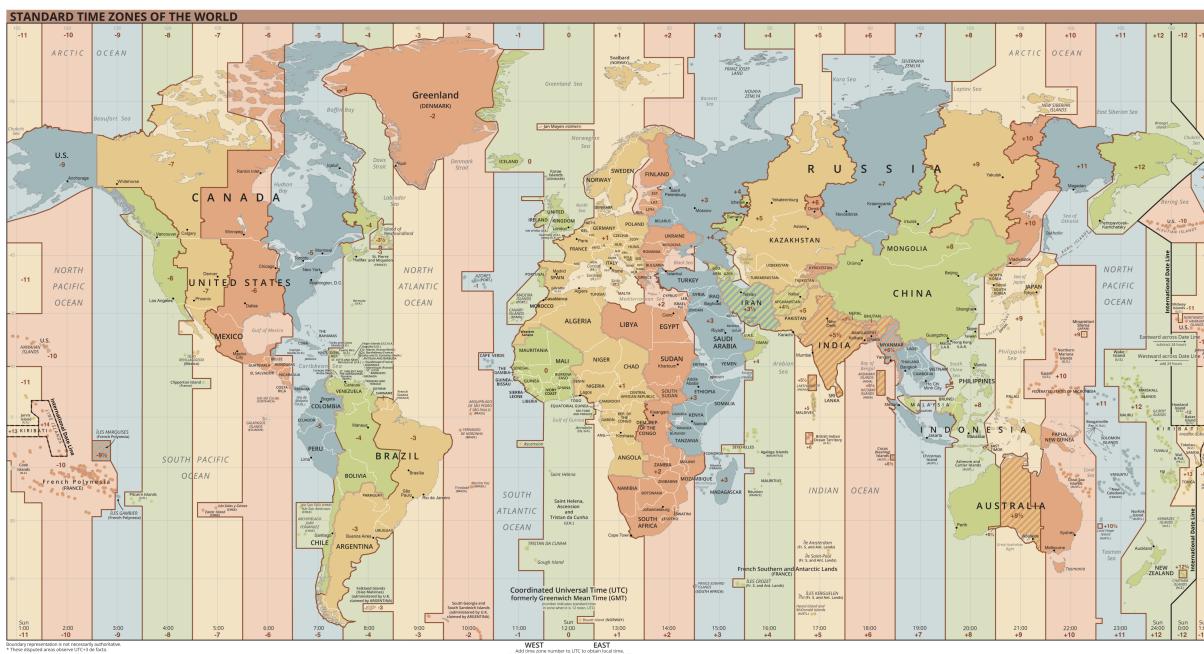


Figura 35: Fusos horários ao redor do mundo. Fonte: Wikipédia

**Fusos Horários Brasileiros:** Atualmente, o Brasil apresenta quatro fusos (UTC-2, UTC-3, UTC-4 e UTC-5). Eles são conhecidos como os Horários Padrões de Fernando de Noronha, de Brasília, do Amazonas e do Acre, respectivamente.

### 3.4.7 Dia Juliano

Primeiro, vamos começar com conceito de **Dia Juliano(JD)** padrão. O Dia Juliano é um sistema de contagem contínua de dias utilizado principalmente para registrar eventos de forma precisa, sem possíveis ambiguidades causadas por horários ou calendários tradicionais. O Dia Juliano é definido como o número de dias(incluindo frações de dia) que se passaram desde o meio-dia de primeiro de janeiro de 4713 a.C no calendário juliano, sendo criado pelo astrônomo e historiador Joseph Scaliger em 1583.

Tal escolha para definir o Dia Juliano 0 foi baseada na interseção de três ciclos cronológicos usados na época:

1. Ciclo Solar(28 anos) - O tempo necessário para que os dias da semana coincidam com as mesmas datas do ano.
2. Ciclo Lunar(19 anos) - O período após o qual as fases da Lua retornam ao mesmo dia do ano.
3. Indicação Romana(15 anos) - Um ciclo de tributação do Império Romano.

A escolha do ano 4713 a.C. garante que qualquer data histórica conhecida terá um número positivo no sistema de Dias Julianos. Tal sistema de contagem é amplamente estudada por astrônomos e por isso é importante que ela seja estudada.

Porém, além do Dia Juliano padrão, existe o **Dia Juliano Heliocêntrico(HJD)**, que consiste basicamente numa correção para o sistema anterior considerando a posição da Terra com respeito ao Sol. Isso é útil pelo fato da Terra se mover ao redor do Sol a uma velocidade média de 30 km/s, o que causa variações na hora de chegada da luz de eventos astronômicos. Se um evento, como o trânsito de um exoplaneta ou a explosão de uma supernova, for observado de um ponto diferente no espaço (por exemplo, do Sol em vez da Terra), a luz levará um tempo ligeiramente diferente para chegar. O Dia Juliano Heliocêntrico corrige esse efeito, garantindo que os tempos dos eventos sejam medidos como se fossem observados do centro do Sol (heliocentro). A conversão entre os dois sistemas é feita na forma:

$$HJD = JD + \frac{\Delta R}{c} \quad (3.1)$$

Onde  $\Delta R$  é a projeção da distância da Terra ao Sol na direção do objeto observado(em segundos-luz) e  $c$  é a velocidade da luz. A correção normalmente pode variar de -8,3 a +8,3 minutos, dependendo da posição da Terra na órbita.

Além do Dia Juliano (JD) e do Dia Juliano Heliocêntrico (HJD), existe o Dia Juliano Bariocêntrico (BJD), que corrige não apenas para a posição da Terra, mas também para o centro de massa do Sistema Solar (bariocentro). O BJD é ainda mais preciso, sendo usado para medições extremamente rigorosas.

### 3.4.8 Época J2000

Outro conceito importante é o de **Época J2000**. Ele define uma época padrão para coordenadas astronômicas e efemérides(conjunto de posições relativas de um astro), servindo como ponto de referência para medir posições de objetos celestes. A época J2000 corresponde exatamente à data:

**1º de janeiro de 2000, 12 : 00 UTC**

ou, em Dia Juliano:

$$JD = 2451545.0$$

O "J"em J2000 indica que se trata de uma época juliana, seguindo a convenção das efemérides astronômicas. A época J2000 é necessária pelo fato que as coordenadas equatoriais da estrela mudam levemente com o passar do tempo; então, tal época é apenas uma referência para padronizar os dados sobre tais coordenadas(medidos na data mostrada). Muitos sites, como Stelarrium, usam/dão a opção de usar tal sistema. Então, seu conceito é bem importante de ser aprendido!!!

## 3.5 Relógio de Sol

### 3.5.1 O Relógio:

O relógio de Sol surge com a percepção humana da aproximada periodicidade do movimento solar na Esfera Celeste: todos os dias o Sol nasce a Leste, passa um certo tempo acima do Horizonte e se põe a Oeste. Com essa observação, surgiu a ideia de associar tal fenômeno com a passagem do tempo.

Dessa forma, utilizando a sombra projetada por um objeto para marcar as horas, surgiu o **Relógio de Sol**.

### 3.5.2 Elementos do Relógio:

Basicamente, o Relógio de Sol é composto por um **gnômon**, haste que terá sua sombra projetada para marcação do tempo, e por um **mostrador**, superfície que, além de servir de suporte ao aparato, permite a leitura das horas.

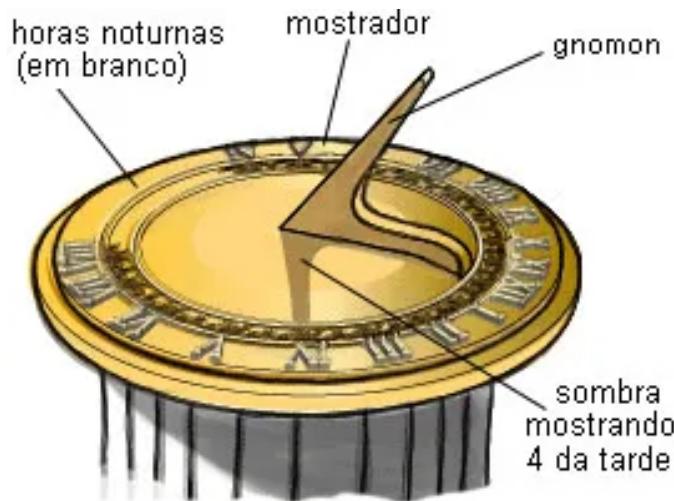


Figura 36: Componentes Relógio de Sol. Fonte: Brasil Escola

### 3.5.3 Tipos de Relógio:

#### (1) Horizontal:

Sem dúvidas o modelo mais comum de Relógio de Sol. Sua base se alinha com o Plano do Horizonte e seu gnômon aponta para o Polo Celeste Elevado, formando um ângulo com o Horizonte igual à latitude do local.



Figura 37: Relógio Horizontal. Fonte: Wikipédia

## (2) Vertical:

O relógio vertical apoia-se em um plano perpendicular ao Horizonte e, ao contrário do modelo horizontal, seu gnômon aponta para o Polo Celeste Oculto. Desse modo, um relógio vertical voltado para o Ponto Cardeal Norte pertence ao Hemisfério Sul e vice-versa.

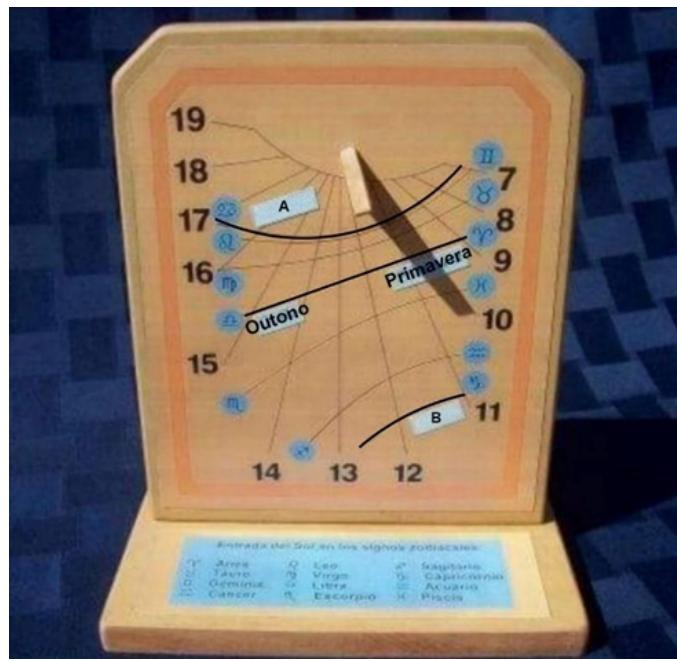


Figura 38: Relógio de Vertical. Fonte: Olimpíada Brasileira de Astronomia e Astronáutica

## (3) Declinante:

Extremamente similar ao Relógio de Sol Vertical, o Declinante também se apoia

em um plano perpendicular ao Horizonte, contudo não aponta necessariamente para um ponto Cardeal em específico.

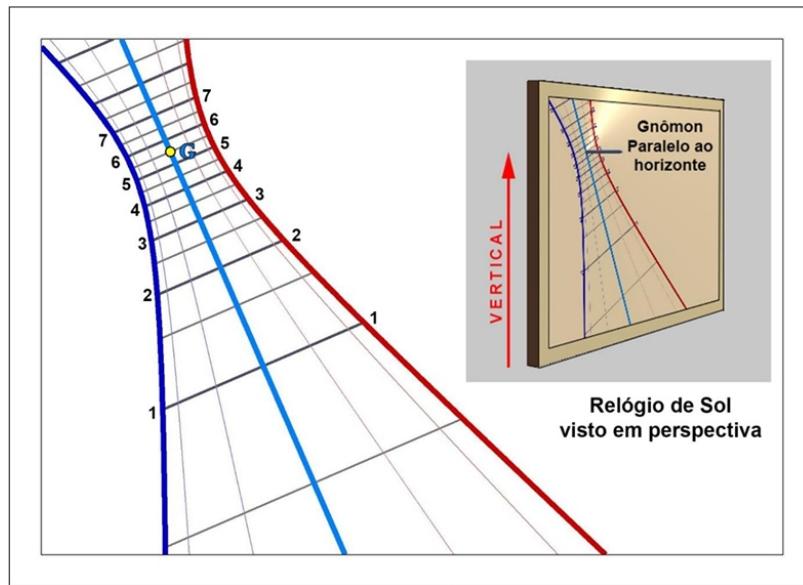


Figura 39: Relógio de Sol Declinante, tema de questão das Seletivas Online. Fonte: Olimpíada Brasileira de Astronomia e Astronáutica

- (4) **Equatorial:** O relógio de Sol Equatorial tem sua base no Plano Equatorial e gnômon apontando para o Polo Celeste Elevado, formando um ângulo reto com o mostrador.



Figura 40: Relógio de Sol Equatorial, apesar de ser um pouco diferente do relógio equatorial convencional, este modelo sem um gnômon usual tem comportamento similar aos dos estudados. Fonte: Monumentos do Rio

### 3.5.4 Correções no Relógio de Sol:

Cotidianamente, a Hora Solar Verdadeira Local, a marcada pelo Relógio de Sol não tem muita utilidade prática. Por conta disso e para não tornar os relógios de Sol obsoletos, é necessário fazer algumas correções nos dados obtidos.

- (1) **Correção de Longitude:** consiste no uso do Relógio para marcar o Tempo Solar Verdadeiro de outra Longitude, normalmente a do Meridiano Central do Fuso. Para isso, os marcadores de hora devem ser rotacionados de modo proporcional à diferença de longitude entre as localidades.

**Ideia 14: Quanto rotacionar os mostradores de um relógio de Sol vertical para a correção de longitude?**

Para esse cálculo, utilizaremos como base o horário de mais fácil aferição, meio-dia. Um relógio vertical sem a correção de longitude apresenta o medidor do meio-dia alinhado com a vertical do lugar. Suponhamos agora que exista outra longitude ( $\lambda$ ) com base na qual queremos realizar as medidas do nosso relógio. Adotando nossa longitude como ( $\lambda_0$ ):

$$\Delta\theta = |\lambda - \lambda_0|$$

- (2) **Correção pela Equação do Tempo:** apesar de pouco usual, alguns relógios apresentam o gráfico da Equação do Tempo em sua estrutura. Essa ideia, apesar de gerar resultados poucos precisos, auxilia na aferição correta do Tempo Solar Médio de um determinado local.

### 3.5.5 Inclinação do Gnômon:

Em geral, o gnômon tende a ser alinhado com o eixo de rotação terrestre. Apesar disso, alguns modelos, como o Relógio Declinante, não seguem este rigor.

A seguir será apresentada ao leitor uma questão dos Treinamentos de 2024 que aborda este assunto, mostrando a importância da Geometria na construção do Relógio.

**Exemplo 46: Questão Lista 01, Treinamentos 2024:**

**Relógio de Sol:** Considere um relógio de Sol composto por um mostrador vertical e um gnômon, conforme representado na figura.

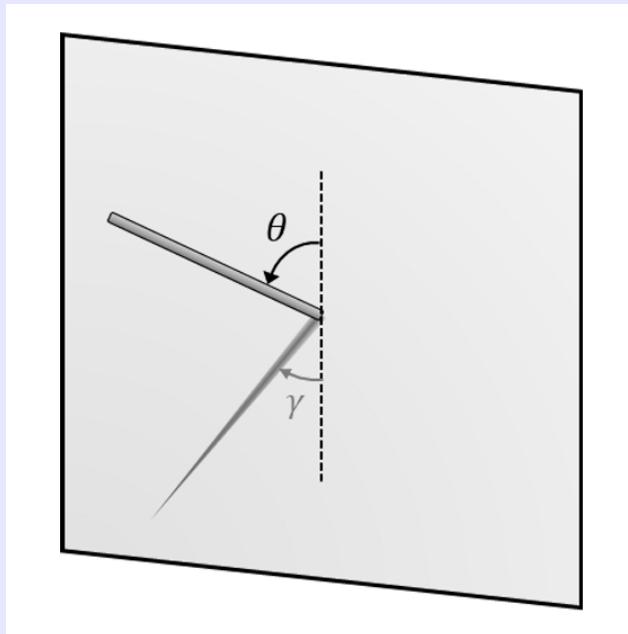


Figura 41

- Suponha um relógio de Sol vertical cujo gnômon esteja corretamente apontado para o sul. Seja  $\phi$  a latitude do observador,  $H$  o ângulo horário do Sol e  $\delta$  a declinação solar. Determine a relação entre  $\theta$  e  $\gamma$  em função dessas variáveis.
- Com base no item anterior, qual deve ser o valor de  $\theta$  para que o relógio funcione o ano todo?
- Utilizando o valor correto para  $\theta$ , determine a relação entre  $\gamma$  e  $H$ , em função apenas de  $\phi$ .

### Solução 46

(a) Vamos construir uma esfera com centro no ponto em que o gnômon está apoiado. Na figura, consideramos o azimute do ponto cardeal norte em direção ao ponto cardeal leste.

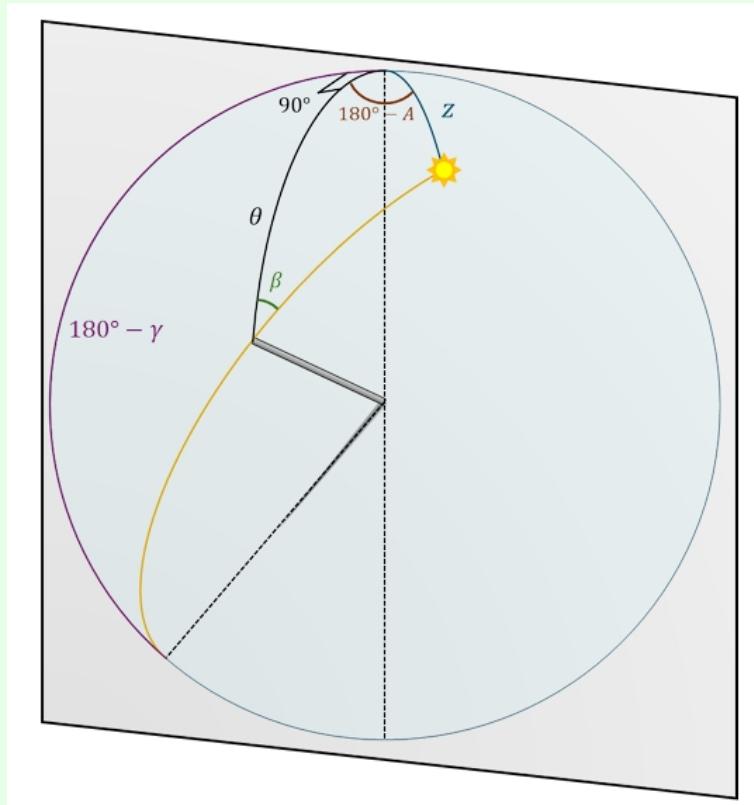


Figura 42

Vamos aplicar a lei dos quatro elementos nos triângulo com o Sol, o gnômon e o zênite:

$$\cos \beta = \frac{\cos \theta \cdot \cos A \cdot \sin z + \sin \theta \cdot \cos z}{\sin A \cdot \sin z}$$

Mas, pela transformação de coordenadas altazimutais em equatoriais, sabemos que:

$$\cos A \cdot \sin z = \frac{\sin \delta - \sin \phi \cdot \cos z}{\cos \phi}$$

$$\cos z = \sin \phi \cdot \sin \delta + \cos \phi \cdot \cos \delta \cdot \cos H$$

$$\sin A \cdot \sin z = -\sin H \cdot \cos \delta$$

Assim:

$$\cot \beta = \frac{\sin \phi \cdot \sin (\phi - \theta) - \cos \theta}{\sin H \cdot \cos \phi} \tan \delta + \cot H \cdot \sin (\phi - \theta)$$

Aplicando a lei dos Quatro Elementos no triângulo com o gnômon, a sombra e o zênite:

$$\sin \theta \cdot \cot \gamma = \cot \beta$$

$$\cot \gamma = \frac{\sin \phi \cdot \sin (\phi - \theta) - \cos \theta}{\sin H \cdot \cos \phi \cdot \sin \theta} \tan \delta + \frac{\cot H \cdot \sin(\phi - \theta)}{\sin \theta}$$

**(b)** Se queremos que o relógio funcione o ano todo, o termo que depende de  $\delta$  precisa zerar:

$$\sin \phi \cdot \sin (\phi - \theta) - \cos \theta = 0$$

$$\sin^2 \phi \cdot \cos \theta - \sin \phi \cdot \cos \phi \cdot \sin \theta - \cos \theta = 0$$

$$\cos \theta \cdot \cos \phi + \sin \phi \cdot \sin \theta = 0$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} + \phi$$

Assim, o gnômon fica apontado "para baixo", com seu eixo paralelo ao polo.

**(c)** Para encontrar o ângulo  $\gamma$ , basta substituir na equação do item (a):

$$\cot \gamma = \frac{\cot H}{\cos \phi}$$

### 3.6 Problemas

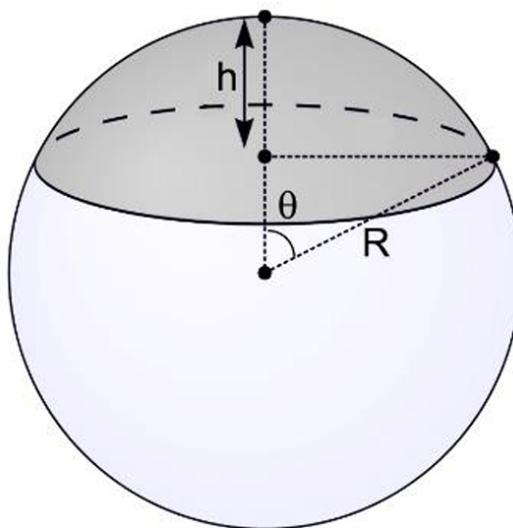
1. (Barra do Piraí 2020) Vamos considerar que há cerca de 6000 estrelas, em todo o céu, visíveis a olho nu.

Considere também, em primeira aproximação, que as 6000 estrelas estejam distribuídas uniformemente pelo céu.

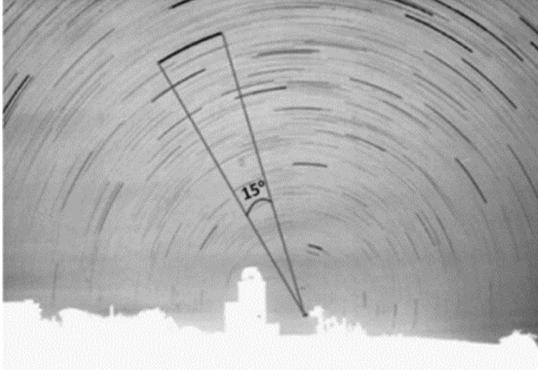
Sendo assim, estime quantas estrelas visíveis são circumpolares:

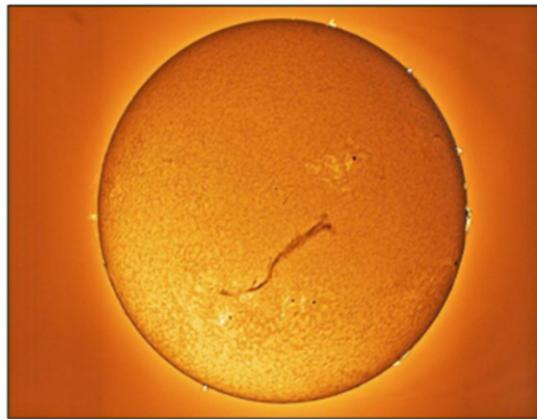
- (a) Se você está a  $1^\circ$  do Polo Norte.
- (b) Se você está a  $1^\circ$  do Equador, no Hemisfério Sul.

**Dica:** a área superficial de uma calota esférica vale  $A = 2\pi hR$ .



2. (OBCM 2024- Adaptada) O astrônomo Glosmall está no monte Neverest e ele quer que você calcule o tamanho (em função do raio da Terra) do monte para que o dia (período com o Sol acima do horizonte) no topo dessa montanha dure 20h. Assim, qual é esse valor?
3. (OLAA 2014 - Adaptada) Em um lugar do hemisfério Sul, cuja latitude se desconhece, sabe-se que a estrela  $\alpha$  Centauri é circumpolar. Um observador determinou a distância zenital máxima e mínima da estrela, encontrando os seguintes valores:  $z_{\max} = 81^\circ$ ,  $z_{\min} = 22^\circ 40'$ .
- (a) Calcule a latitude do lugar.
  - (b) Calcule a declinação da estrela.
  - (c) Calcule sua ascensão reta, sabendo que no momento de atingir a altura máxima o tempo sideral local é 14h40min.
4. (OLAA 2009) Manágua, capital da Nicarágua, encontra-se a  $12^\circ$  de latitude Norte e  $86^\circ$  de longitude Oeste, enquanto Montevidéu acha-se a  $35^\circ$  de latitude Sul e  $56^\circ$  de longitude Oeste. Um observador situado na cidade de Montevidéu observa uma estrela às 20h no zênite.

- (a) Qual será a hora para o observador de Montevidéu quando o observador de Manágua estiver observando a culminação superior da estrela?
- (b) Qual a altura na qual o observador de Manágua vê a estrela culminar superiormente?
5. (OLAA 2009 - Adaptada) É Lua Cheia e é passada uma hora de um equinócio. A Lua se encontra na constelação da Virgem.
- (a) Em qual estação acaba de entrar o hemisfério Sul da Terra?
- (b) Em que momento do dia nasceu a Lua nessa data?
6. (OLAA 2010) Responda ao que se pede sobre um dia de Equinócio:
- (a) Com que velocidade um viajante deve avançar sobre a linha do Equador terrestre, e em que direção, para manter o Sol sempre no seu zênite?
- (b) Compare o valor obtido acima com a velocidade do som.
- (c) Que veículo é mais apropriado para obter essa velocidade?
- (d) Repetindo a primeira pergunta nas mesmas condições, mas estando o viajante na Lua, qual deve ser a sua velocidade?
7. (OLAA 2012) Sobre a imagem abaixo, responda:
- 
- (a) Se o polo visível do observador é o polo celeste Norte, em que hemisfério terrestre está situado o observador da imagem?
- (b) Estime o tempo de exposição da astrotografia.
- (c) Indique, sobre a figura, o sentido do movimento diurno aparente dos astros.
- (d) Estime o comprimento médio, em metros, do filamento solar que aparece na imagem abaixo sabendo que o diâmetro angular aparente do Sol é de 32,1 minutos de arco e que o comprimento angular aparente do filamento é de 13,2 minutos de arco.
8. (OLAA 2013) Em um determinado lugar na superfície da Terra, o Sol cruza o meridiano em um ponto cujo azimute é  $180^\circ$  maior que o do polo elevado, com uma distância zenital que é



igual à altura do polo elevado. Considerando a convenção de azimute NESW, quais serão as coordenadas horizontais do Sol:

- (a) Para um observador localizado em uma longitude de  $90^\circ$  a oeste do local inicial de observação?
- (b) No polo Sul?

9. (OLAA 2017) Responda ao que se pede:

- (a) Hiparco mediu, em 141 a.C., a posição de  $\alpha$  Virginia (Spica), encontrando uma longitude eclíptica de  $174^\circ 7' 30''$ . Maskeline, em 1802 d.C., encontrou um valor correspondente de  $201^\circ 4' 41''$  para a mesma estrela. Com base nessas medidas, estime o deslocamento anual do ponto vernal.
  - (b) Compare o sentido de rotação do ponto vernal, do eixo polar da Terra, das estrelas fixas em seu movimento diário, do Sol em relação às estrelas fixas, e da Lua em relação às estrelas fixas para um observador na Terra. Todos giram no mesmo sentido?
  - (c) Suponha que as 12 constelações do zodíaco se projetem sobre a eclíptica de modo uniforme. Estime quantos graus se deslocou a constelação de Leão desde a época de Hiparco até o ano de 2017.
10. (Barra 2021) Em uma certa noite, Gigirotto, ao estudar melhor o movimento do satélite Gelecaio-42, percebe que este logo passará por seu meridiano local. Ela decide então descobrir a que distância, naquele momento, Gelecaio-42 estará do Kennedy Space Center, na Flórida ( $\phi = 28^\circ 31' 27'' N$ ), onde ela está passando suas férias. Gigirotto sabe que o satélite se move em uma órbita circular de altura  $h = 420$  km, e, ao analisar dados de um almanaque astronômico, descobre que, em uma certa noite, ele terá, em momentos diferentes, as mesmas coordenadas geocéntricas de 2 estrelas: Arcturus ( $\alpha_A = 14^h 15^m 38^s$ ;  $\delta_A = 19^\circ 10' 19''$ ) e Markab ( $\alpha_M = 23^h 04^m 46^s$ ;  $\delta_M = 15^\circ 12' 19''$ ). Por coincidência, ela percebe que Gelecaio-42 passará pelo seu meridiano local exatamente quando estiver no ponto de sua órbita com maior declinação. Qual a distância que Gigirotto deverá encontrar, em km, no momento desse fenômeno?

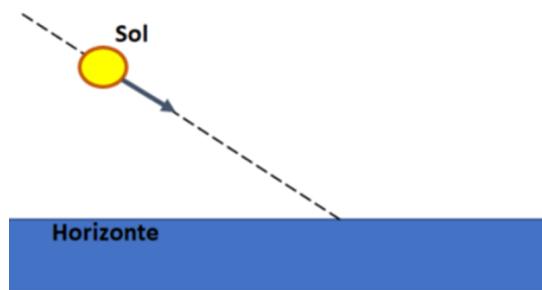
11. (**Barra 2022 - Relógio Rice**) Em junho, Giulia foi visitar sua faculdade, Rice, que se localiza em Houston ( $\phi = 29,7^\circ \text{ N}$ ). Como boa astrônoma (e não engenheira como outros membros da comissão), ela logo se encantou com os relógios de Sol lá presentes e resolveu fotografá-los para montar questões para a seletiva de astronomia.



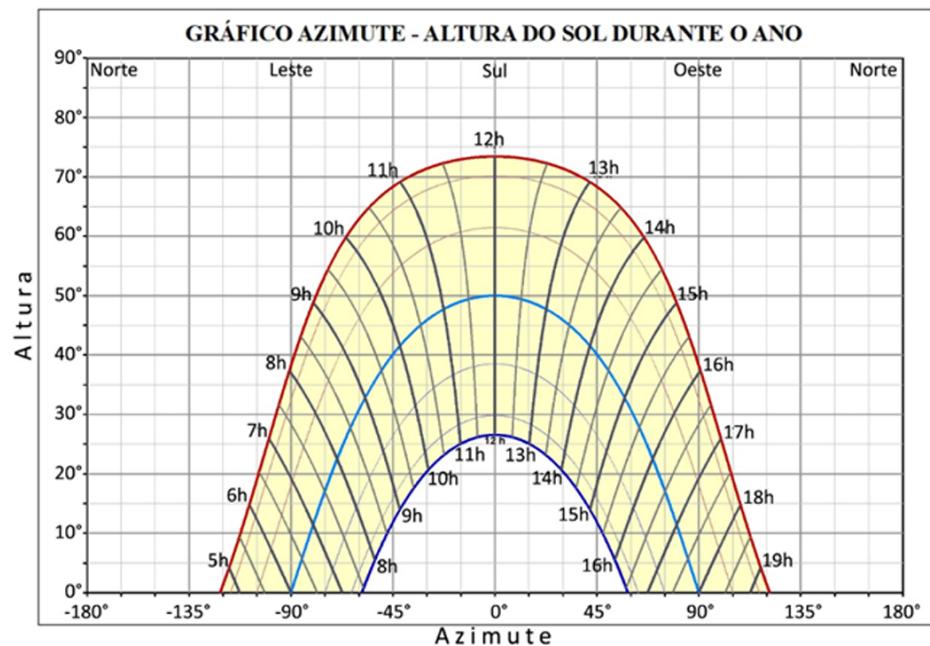
Figura 43: Relogio de Sol localizado em Rice, Houston, EUA

A partir dessa foto, tirada às 12h42 locais, qual a longitude de Houston? **Justifique qualquer aproximação feita.** Houston se encontra no fuso horário UTC-6 e utiliza horário de verão entre março e novembro. Note que trata-se de um relógio solar cilíndrico polar.

12. (**OLAA 2011**) Considere um barco situado em longitude de  $32^\circ \text{ W}$ , com seu relógio de tempo solar verdadeiro avariado. O marinheiro vê o Sol sobre o meridiano superior do lugar em 21 de dezembro.
- Neste instante, qual é o tempo sideral local?
  - Qual hora deveria estar indicando o relógio do marinheiro se este estivesse funcionando?
  - Desprezando a Equação do Tempo, indique a Hora Legal em Greenwich.
  - Considere o esquema abaixo, que representa o pôr do Sol visto do barco nesse dia. Estime a latitude em que se encontra o barco.



13. (Barra do Piraí 2021) O gráfico abaixo mostra a altura do Sol em função do azimute em uma determinada cidade ao longo de um ano inteiro.



Sabendo que as horas no gráfico correspondem ao Tempo Solar Verdadeiro do local, responda:

- Qual é a latitude geográfica desta cidade?
- Qual será a distância zenithal do Sol às 14h do dia do Solstício de Verão?
- Qual será o azimute do Sol às 11h do dia do Solstício de Inverno?
- A que horas o Sol estará 45° acima do Horizonte nos dias dos Equinócios?

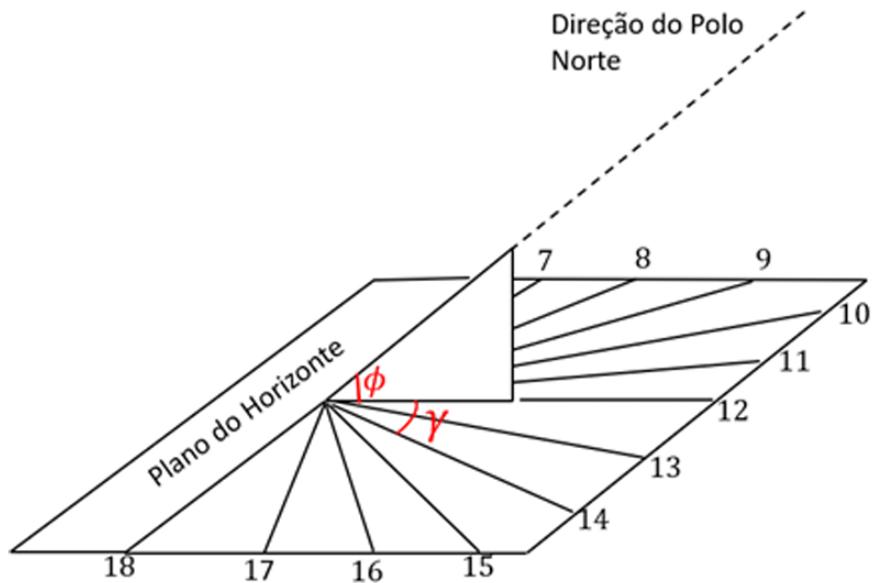
14. (Cristo Redentor - Treinamentos 2022 - Adaptado)

O Cristo Redentor, localizado no Rio de Janeiro ( $\phi = 22^{\circ}54'23''S$ ,  $\lambda = 43^{\circ}10'21''O$ , UTC-3), é uma das sete maravilhas do mundo moderno, sendo o mais célebre monumento brasileiro. A estátua encontra-se no topo do morro do Corcovado, o qual possui uma altitude de 710 m

acima do nível do mar. No dia 1 de fevereiro de 2019, às 18h 51min 04s, o Sol passa exatamente por trás do Cristo. Para simplificar, considere que, nesse momento, a borda superior do Sol aparentava “tocar” a ponta da cabeça do Cristo Redentor, enquanto a borda inferior do Sol aparentava “tocar” a base da estátua. No momento da foto em questão, a declinação do sol era  $\delta = -16^{\circ}59'49''$ , e o horário de verão estava em vigência na cidade. A partir dessas informações, calcule, em metros, a altura do Cristo Redentor em relação ao topo do morro do Corcovado - isto é, da base da estátua até sua extremidade superior. Considere que o observador estava ao nível do mar e despreze a refração atmosférica e a curvatura. No dia, a  $ET = -13min33s$

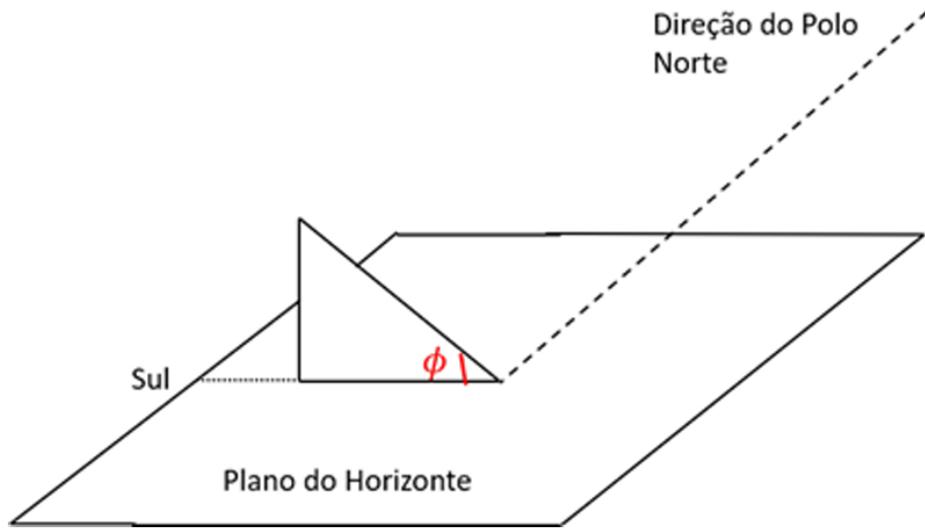
### 15. (Relógio Solar - Treinamentos 2020)

Um relógio de Sol com mostrador horizontal pode ser facilmente construído como indicado na figura abaixo (primeira figura). A segunda figura representa uma construção errônea.



- (a) Determine a relação entre os ângulos  $H$  (ângulo Horário do Sol) e  $\gamma$  (ângulo entre o plano do relógio e a marcação das horas, sobre o horizonte) para um observador no hemisfério norte, utilizando a montagem certa. Essa relação deve depender apenas de  $\phi$  (latitude).

Uma pessoa, ao tentar construir o relógio mostrado, acabou se confundindo e colocou o relógio na direção oposta ao polo elevado, como mostra a figura abaixo.



- (b) Determine a nova relação entre  $H$  e  $\gamma$  para essa situação. Uma mesma marcação de horas servirá, nesse caso, para dois dias consecutivos?

**Dica:** Quais os parâmetros associados ao Sol que poderiam ser relevantes no caso (b), mas não em (a)? Tente projetar o relógio sobre a esfera celeste para obter as equações. Usar a lei dos senos e a lei dos cossenos para trigonometria esférica é a melhor escolha?

### 3.7 Solucionário

#### Problema 1

Temos 3000 estrelas por hemisfério. Do desenho da dica, observamos que a altura da calota esférica é dada por:

$$h = R - R \cos \theta$$

Substituindo essa expressão na fórmula da área da calota esférica, obtemos:

$$A = 2\pi R^2(1 - \cos \theta)$$

Podemos considerar o raio da Esfera Celeste como  $R = 1$ . Assim, a área total da calota para  $\theta = 90^\circ$  será:

$$A = 2\pi$$

Podemos então estimar o número de estrelas por meio de uma regra de três:

$$\begin{aligned} 2\pi &\rightarrow 3000 \text{ estrelas} \\ 2\pi(1 - \cos \theta) &\rightarrow n \text{ estrelas} \end{aligned}$$

Resolvendo para  $n$ :

$$n = 3000(1 - \cos \theta)$$

A variável  $\theta$  representa a distância zenital do Equador Celeste.

- (a) Se a posição está a  $1^\circ$  do Polo, temos  $\theta = 89^\circ$ :

$$n = 3000(1 - \cos 89^\circ) \approx 2947,6$$

Arredondando, temos aproximadamente 2947 ou 2948 estrelas.

- (b) Se a posição está a  $1^\circ$  do Equador, temos  $\theta = 1^\circ$ :

$$n = 3000(1 - \cos 1^\circ) \approx 0,45$$

Como o número de estrelas deve ser um número natural, concluímos que há 0 estrelas nessa região.

**Observação:** O número de estrelas pertence ao conjunto dos números naturais. Portanto, qualquer resposta que inclua casas decimais será considerada incorreta, e o estudante perderá 1 ponto.

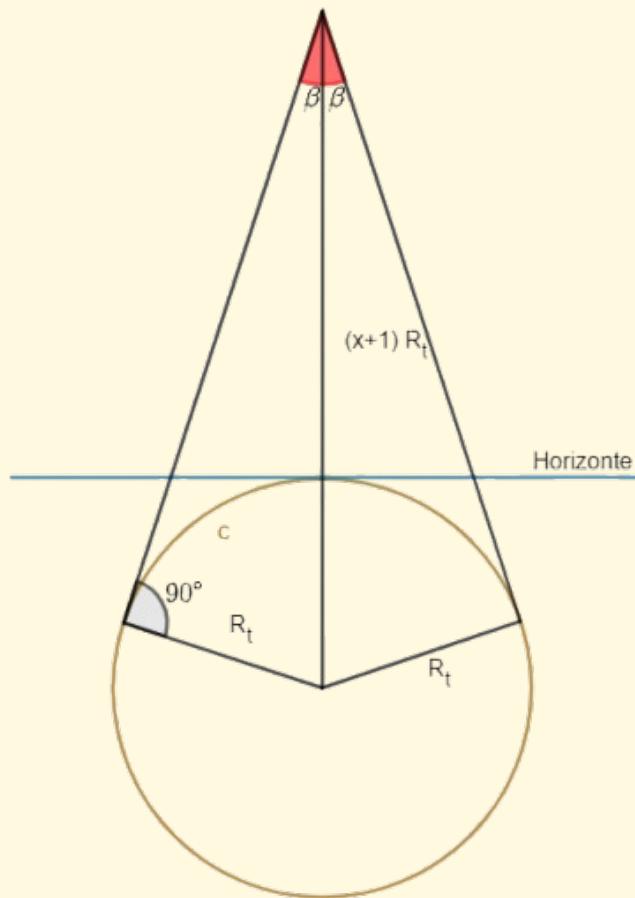
#### Problema 2

Para resolver a questão devemos inicialmente pensar em uma relação entre o tempo que o Sol passa acima do horizonte e o tanto do céu que é visível para uma pessoa. Para um observador na altura do horizonte o é possível observar  $180^\circ$  do céu, onde o Sol leva 12 horas para cruzar.

$$t \propto \theta$$

$$\frac{20}{12} = \frac{\alpha}{180} \implies \alpha = 300^\circ$$

Portanto a visualização necessária do céu para que uma pessoa veja o Sol durante 20 horas em um dia é de  $300^\circ$ . Sendo assim temos a seguinte visualização.



Onde:

$$360 = 2\beta + 300 \implies \beta = 30$$

Utilizando o valor de beta temos:

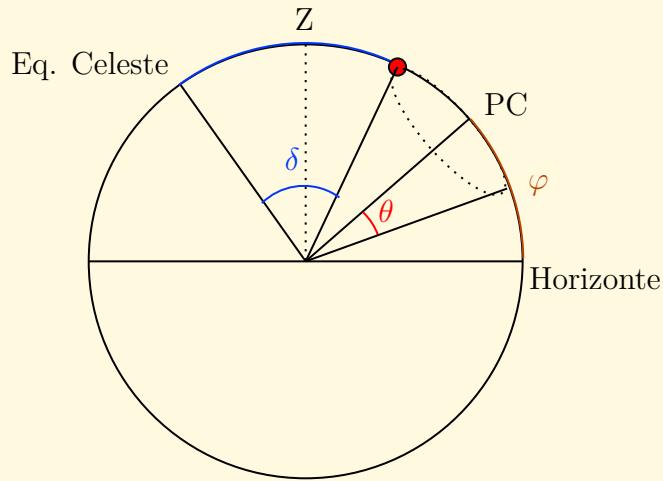
$$\sin \beta = \frac{1}{2} = \frac{R_t}{(x+1)R_t} \implies \frac{1}{2} = \frac{1}{x+1}$$

$$x = 1$$

Onde  $x$  é a altura da montanha.

### Problema 3

- (a) Observe a figura. Perceba que, como a Terra gira sobre o eixo polar, a distância da estrela ao Polo é invariável, e estando a estrela sobre meridianos coplanares, podemos aplicar geometria plana:



Denotamos as alturas na culminação superior  $h_s$  e inferior  $h_i$ . Por definição do sistema:

$$h_s = 90^\circ - z_{\min}$$

$$h_i = 90^\circ - z_{\max}$$

Analizando a figura, temos:

$$h_s = \phi + \theta$$

$$h_i = \phi - \theta$$

Somando as equações:

$$h_s + h_i = 2\phi$$

$$\phi = \frac{h_s + h_i}{2}$$

Substituindo as definições das alturas:

$$\phi = 90^\circ - \frac{z_{\min} + z_{\max}}{2}$$

Sabendo que estamos no hemisfério sul, obtemos o seguinte resultado:

$$\boxed{\phi = 38^\circ 10' \text{ S}}$$

(b) Agora, pela figura, temos que:

$$\theta + \delta = 90^\circ$$

Além disso, sabemos que:

$$h_s = 90^\circ - z_{\min} = \phi + \theta$$

Juntando ambas as equações, obtemos:

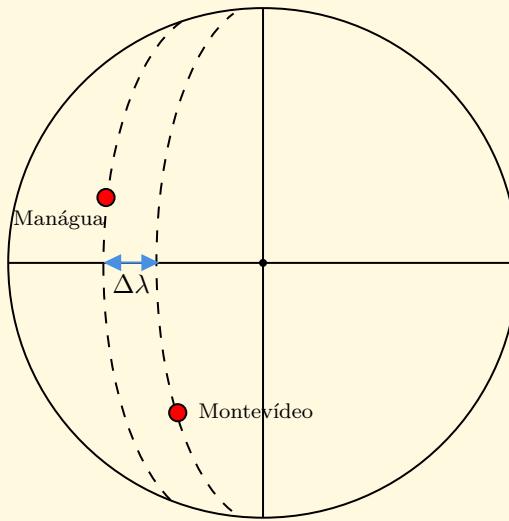
$$\delta = z_{\min} + \phi$$

$$\boxed{\delta = 60^\circ 50' \text{ S}}$$

(c) Sabemos que:  $\text{TSL} = H + \alpha$ . No momento da culminação máxima, o ângulo horário é nulo, a ascensão reta, portanto, é igual ao tempo sideral:  $\alpha = 14h40\text{min}$ .

#### Problema 4

(a) Esquematizando a situação em que as bolinhas vermelhas representam as duas cidades e as linhas tracejadas correspondem aos respectivos meridianos locais dos observadores, percebemos que, ao girar  $\Delta\lambda$  em torno do eixo polar, o céu fará com que a estrela passe a estar no meridiano local de Manágua:



Sabemos que, na realidade, não é o céu que gira, mas sim a Terra, que rota  $360^\circ$  em 24 horas no sentido de oeste para leste. Dessa forma, ao adotarmos o referencial de observadores na Terra, percebemos que o céu aparenta girar com a mesma velocidade angular, mas no sentido oposto (de leste para oeste).

Isso significa que, para a estrela sair do meridiano de Montevidéu e alcançar o meridiano de Manágua, o tempo necessário será dado por:

$$\omega = \frac{\Delta\lambda}{\Delta t}$$

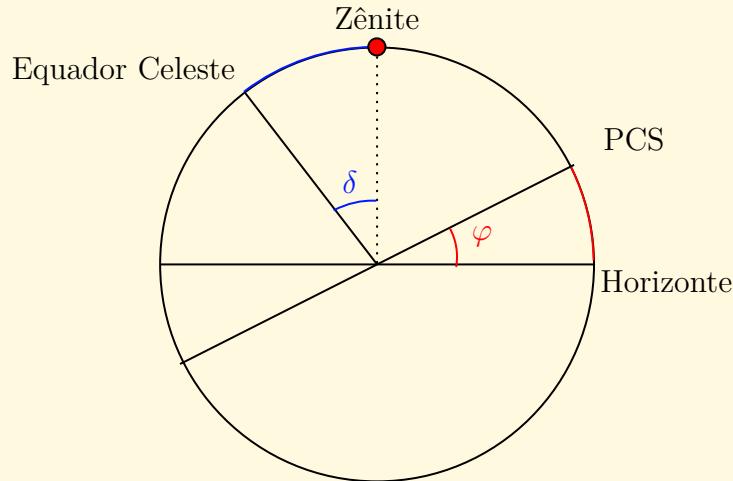
$$\frac{360^\circ}{24 \text{ h}} = \frac{30^\circ}{\Delta t}$$

$$\Delta t = 2 \text{ h}$$

Como o céu aparenta girar para o oeste, sabemos que, dentro de 2 horas, a estrela estará no meridiano de Manágua. Considerando que o horário atual em Montevidéu é 20h, basta somar o intervalo de tempo calculado:

$$T = 20 \text{ h} + 2 \text{ h} = \boxed{22 \text{ h}}$$

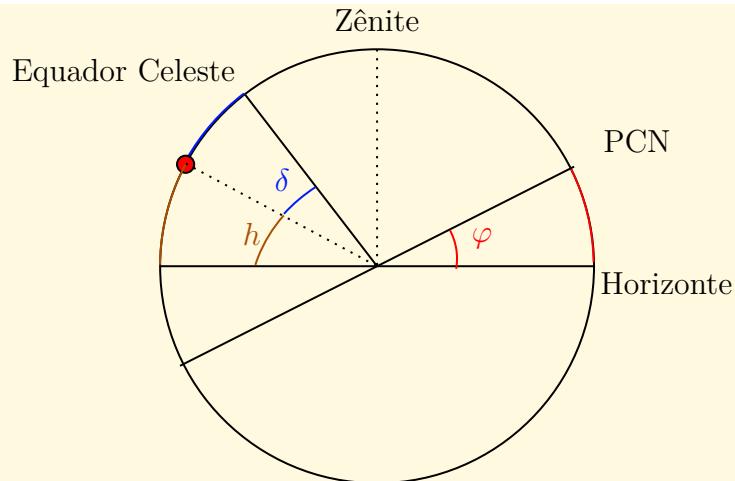
(b) Analisando o esquema em Montevidéu:



Descobrimos que a declinação da estrela é igual à latitude de Montevidéu, ou seja,

$$\delta = \varphi = 35^\circ S.$$

Com isso, podemos desenhar o esquema da estrela culminando superiormente em Manágua:



Aqui, analisando a situação em Manágua, temos a relação:

$$\varphi + \delta + h = 90^\circ$$

$$h = 90^\circ - \varphi - \delta$$

$$h = 43^\circ$$

### Problema 5

- (a) Se é Lua Cheia, então a Lua está oposta ao Sol. Se a Lua está em Virgem, então o Sol está na constelação oposta, isto é, peixes. Em peixes, há um ponto extremamente importante, o ponto vernal. O Sol em peixes em uma virada de estação significa que o outono acabou de chegar para o hemisfério sul (e a primavera para o norte).
- (b) A Lua Cheia nasce logo ao pôr do Sol. Se é um equinócio, o Sol se pôs, em horário solar, às 18h. Logo, a Lua nasceu às 18h (horário solar, não considerando fuso-horários ou a equação do tempo).

### Problema 6

- (a) Uma vez que o Sol se movimenta para o Oeste, o viajante precisaria se movimentar nessa direção também. Para manter o Sol no zênite, desprezando o movimento do Sol na Eclíptica, é necessário vencer a rotação da Terra. No Equador, essa velocidade é:

$$v = \frac{2\pi R_\oplus}{T_{dia}} = 460 \text{ m s}^{-1}$$

$$v = 1670 \text{ km h}^{-1}$$

- (b) Assumindo uma velocidade de 340 m/s para o som, o viajante teria que se deslocar com 1,4 vezes essa velocidade. Dizemos que ele teria que atingir “Mack 1,4 ( $M = 1,4$ )”.
- (c) Um jato supersônico é o veículo mais apropriado para tal.
- (d) Assumindo um dia lunar de 28 dias terrestres, para o viajante vencer a rotação da Lua, ele teria que ter velocidade:

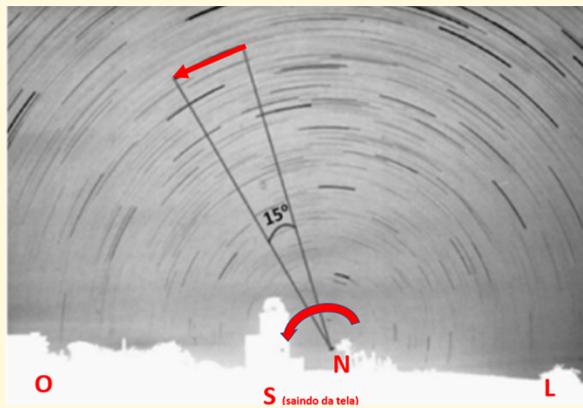
$$v = \frac{2\pi R_{\mathbb{C}}}{T_{dia\ lunar}} = 4,5\text{ m s}^{-1}$$

$v = 16,2\text{ km h}^{-1}$

Percebemos que o viajante talvez possa apenas correr.

### Problema 7

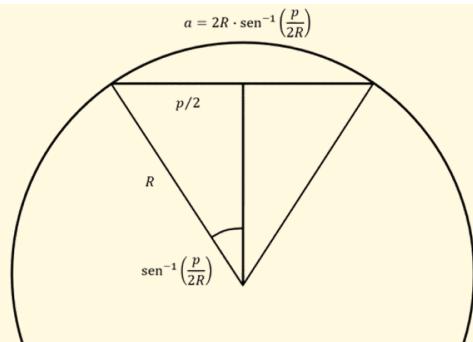
- (a) Se o polo visível é o Norte, o observador está no hemisfério norte.
- (b) Se o céu se move  $360^\circ$  em 24h, demora 1h para se mover  $15^\circ$ . Uma vez que as estrelas se moveram por volta de  $15^\circ$ , a exposição teve por volta de 1h.
- (c) Uma forma fácil de recordar em qual sentido gira cada céu é desenhar os pontos cardinais. Lembrando que os astros caminham de Leste para Oeste, deduzimos o sentido de giro.



- (d) A projeção do filamento pode ser obtida por proporção simples:

$$p = \frac{13,2'}{32,1'} \cdot D = 5,72 \cdot 10^8\text{ m}$$

O comprimento de arco com essa projeção:



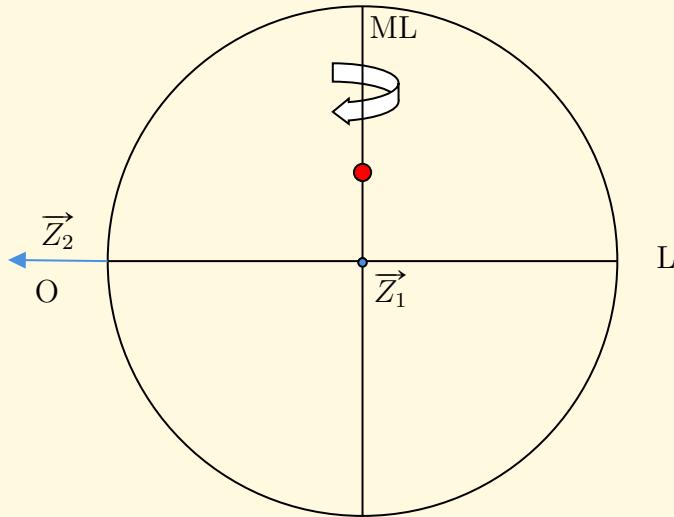
$$a = 2R \cdot \sin^{-1} \left( \frac{p}{2R} \right)$$

$$a = 5,89 \cdot 10^8 \text{ m}$$

### Problema 8

- (a) Apenas para fins didáticos, definimos o vetor zênite  $\vec{Z}$  como aquele que parte do centro da Terra em direção ao zênite de um observador. Ao analisar a situação a partir do referencial fora da Terra em cima do primeiro observador, podemos esquematizá-la da seguinte forma:

**Obs:**  $\vec{Z}_1$  está saindo da página, isto é, estamos literalmente em cima do zênite do observador 1.



Na figura acima, estamos observando a cena de um ponto externo à Terra, posicionados acima do observador 1. Dessa perspectiva, o observador 1 nos enxerga exatamente no zênite.

É importante destacar que a linha Leste-Oeste representada na imagem corresponde

ao horizonte do observador 1, enquanto o horizonte do observador 2 é perpendicular a essa linha. Para visualizar isso, basta girar a figura  $90^\circ$  no sentido horário. Nesse novo referencial, adotado pelo observador 2, o meridiano local do observador 1 passa a coincidir com seu horizonte.

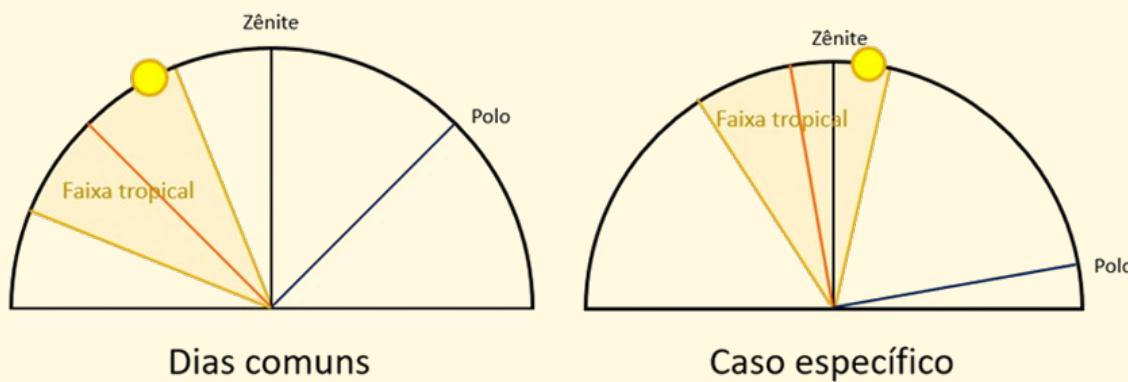
Como a única diferença entre os observadores é a longitude, ambos compartilham a mesma latitude. Isso valida nosso desenho e reforça a ideia de que o meridiano local do observador 1 coincide com o horizonte do observador 2.

Assim, para o segundo observador, o Sol está no horizonte, prestes a nascer. Em dias que não sejam de equinócio, o ponto exato do nascer do Sol varia ao longo do ano. No entanto, na situação específica do equinócio, ele nasce precisamente no ponto cardeal leste, com altura zero e azimute de  $90^\circ$ . Para visualizar isso de maneira intuitiva, considere que o Equador Celeste é um círculo máximo da esfera celeste. Isso significa que qualquer observador localizado sobre ele enxerga metade desse círculo, ou seja,  $180^\circ$ , o que equivale a 12 horas. Por simetria, isso se traduz em 6 horas para o lado oeste e 6 horas para o lado leste, exatamente onde o Equador Celeste intercepta o horizonte.

- (b) Para um observador no Polo Sul – assim como no Polo Norte – o Equador é o horizonte, uma vez que o Polo é o zênite, e o horizonte é perpendicular ao zênite assim como o Equador ao Polo. Nessa situação – Polos – inexistem pontos cardinais. No Polo Sul, qualquer direção é ir para o Norte, assim como no Polo Norte, qualquer direção é ir para o Sul. Sendo assim, o azimute é indefinido e a altura é nula.

#### Observação:

A faixa tropical é formada pela sobreposição de paralelos entre os trópicos; seu centro é o Equador. Embora ela tenha sido definida para conter o centro do Sistema Solar, podemos aproximar sem grandes desvios que ela contém sempre o centro do Sol. Como o Equador é perpendicular ao Polo, a diferença de azimute entre o Sol e o Polo costuma ser  $180^\circ$ . Todavia, se o módulo da declinação for baixo (Equador perto do zênite) e, no verão, o módulo da declinação solar estiver alto, o Sol pode se aproximar tanto do Polo que ele passa o zênite e fica com o mesmo azimute do Polo.



Quando o problema diz que a diferença de azimute entre o Sol e o Polo é  $180^\circ$ , é sinônimo de dizer que esse **caso específico está sendo excluído**.

### Problema 9

- (a) Assumindo que a estrela não se movimentou:

$$\omega_r = \frac{201^\circ 4'41'' - 174^\circ 7'30''}{1802 - (-141)}$$

$$\boxed{\omega_r = 50''/\text{ano}}$$

- (b) As direções "Leste" e "Oeste" estão diretamente relacionadas à rotação da Terra. O vetor velocidade instantânea de um observador na superfície terrestre define o Ponto Cardeal Leste, enquanto seu oposto corresponde ao Oeste. No entanto, quando analisamos o movimento dos astros no céu, essas direções continuam vinculadas à rotação da Terra, mas não necessariamente aos pontos cardinais. Se a projeção de um astro no equador celeste se move no mesmo sentido da rotação da Terra, dizemos que ele se desloca para Leste; caso contrário, seu movimento é para Oeste.

- **Ponto Vernal**

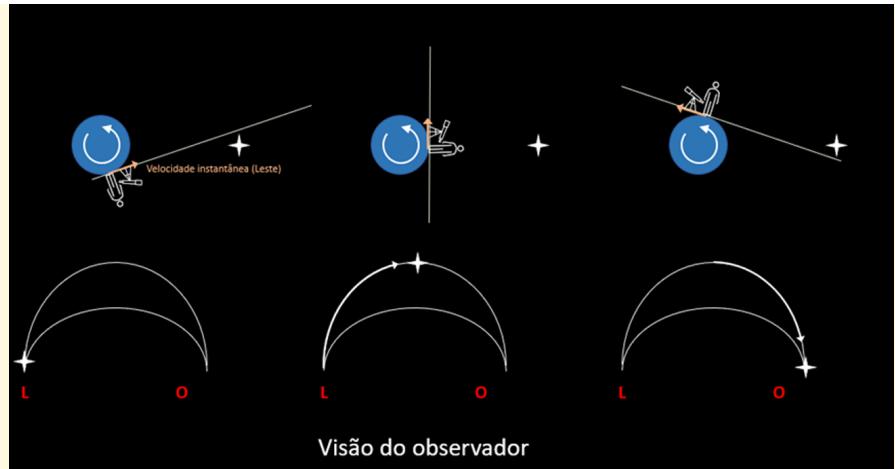
À medida que a Terra gira ao longo do dia, o ponto vernal—que marca a interseção entre o equador celeste e a eclíptica—permanece fixo no espaço. No entanto, em nosso referencial, ele aparenta se deslocar para o oeste, pois nos movemos para leste.

- **Eixo Polar**

O polo eclíptico é fixo, portanto, seu deslocamento aparente é resultado exclusivo da rotação da Terra. Como nos movemos para o leste, ele parece se deslocar na direção oposta, ou seja, para o oeste.

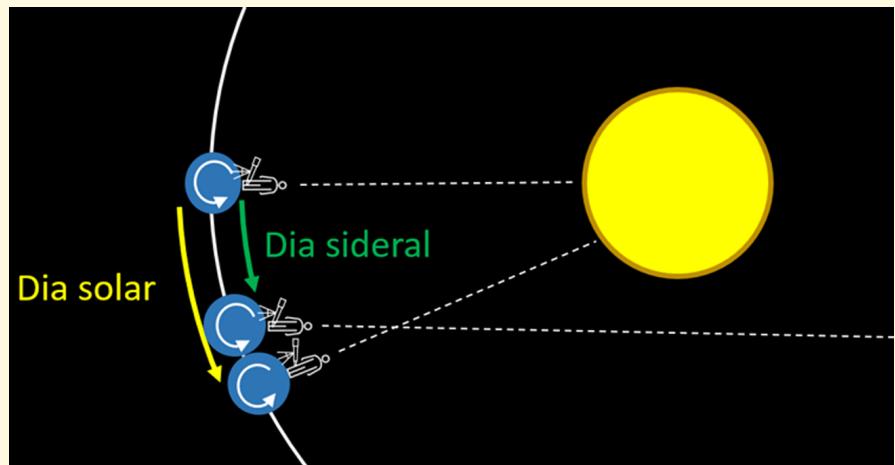
- **Estrelas Fixas no Movimento Diário**

Como a Terra gira para leste, tanto o observador quanto seu horizonte também se movem nessa direção. Consequentemente, conforme o horizonte se desloca para leste, novos astros antes invisíveis tornam-se visíveis, enquanto aqueles já observados parecem ficar para trás, movendo-se aparentemente para o oeste. A porção oeste do horizonte oculta gradualmente as estrelas que se afastam o suficiente, dando a impressão de que elas se põem no oeste. Assim, o movimento aparente das estrelas fixas é sempre em direção ao oeste.

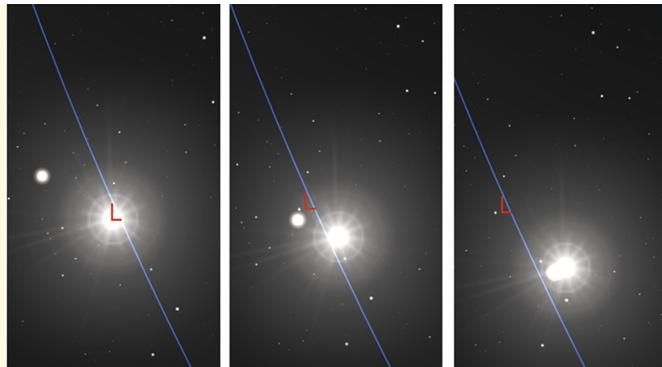


- **Sol em relação às estrelas fixas**

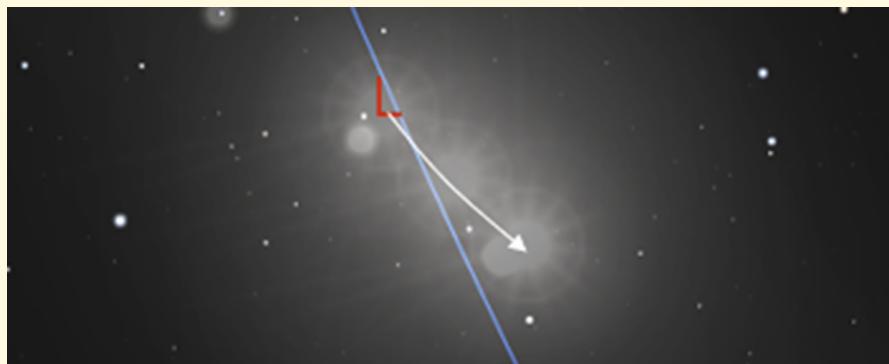
Devido à translação da Terra, o Sol aparenta se “atrasar” em relação às estrelas fixas. Isso ocorre porque, além de percorrer 360° em 24 horas devido à rotação terrestre, ele também se desloca 360° ao longo de aproximadamente 365 dias. Como o movimento aparente diário das estrelas fixas é para Oeste, esse deslocamento adicional faz com que o Sol se move para Leste em relação a elas.



As imagens a seguir foram simuladas no Stellarium com um intervalo de 5 dias siderais entre cada uma.

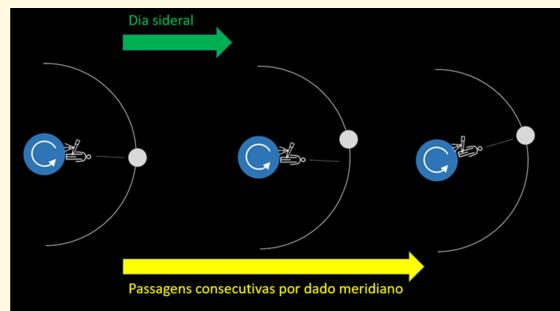


Observamos, separadamente, a sobreposição:



- **Lua em relação às estrelas fixas**

De forma semelhante, a translação da Lua em torno da Terra faz com que sua passagem por um dado meridiano ocorra com um “atraso” em relação às estrelas fixas. Consequentemente, a Lua também se desloca para Leste em relação a elas.



(c) O ângulo de deslocamento é:

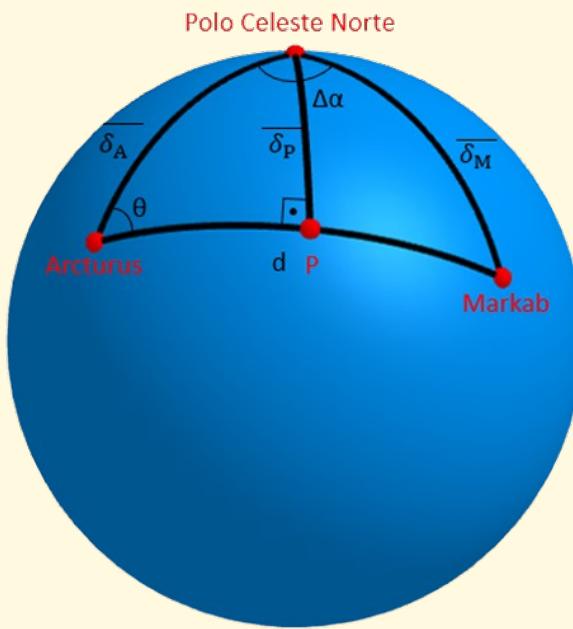
$$\theta = \omega_r \cdot t$$

$$\boxed{\theta = 29^\circ 56' 8''}$$

**Problema 10**

Para clarificar a situação, é necessário inicialmente identificar o ponto de maior declinação na órbita do satélite, pois isso nos permitirá calcular a distância entre o satélite e o Kennedy Space Center (KSC). É importante observar que essa distância só seria igual à altura  $h$  caso o satélite estivesse exatamente no zênite de um observador localizado no KSC. Como demonstraremos posteriormente, essa suposição não corresponde à realidade.

Notamos que as duas posições do satélite possuem uma diferença de aproximadamente 9 h em ascensão reta. Essa diferença é significativa o suficiente para incluir, entre elas, o ponto de maior declinação da órbita (isto é, o ponto mais próximo do polo). Nesse ponto, a declinação do satélite atinge seu valor máximo, o que implica que a taxa de variação da declinação naquele instante é zero ( $\dot{\delta} = 0$ ). Desta forma, nesse momento, a velocidade do satélite é tangente ao equador celeste e, portanto, perpendicular à direção do polo ( $90^\circ$  em relação ao eixo polar). Com essas informações, podemos esquematizar a situação:



Esquematização da situação, sendo  $\bar{\delta}$  o complementar da declinação  $\delta$

Usamos então uma combinação de leis dos senos e cossenos para encontrar a máxima declinação do satélite:

$$\cos d = \sin \delta_A \sin \delta_M + \cos \delta_A \cos \delta_M \cos \Delta\alpha$$

$$d = 121^\circ 48' 36''$$

Disso:

$$\frac{\sin d}{\sin \Delta\alpha} = \frac{\cos \delta_M}{\sin \theta}$$

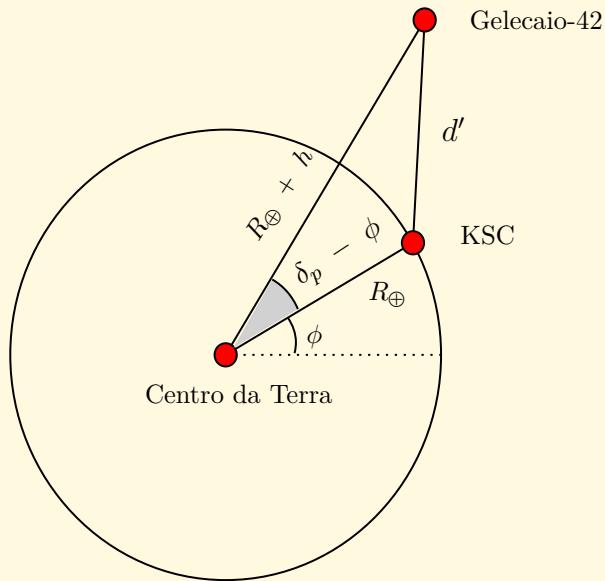
$$\theta = 57^\circ 9' 7''$$

E:

$$\frac{\cos \delta_A}{\sin 90^\circ} = \frac{\cos \delta_P}{\sin \theta}$$

$$\boxed{\delta_P = 37^\circ 29' 5''}$$

Sabendo a declinação, podemos determinar a distância entre o objeto e Gigirotto esquematizando a situação no planeta Terra:



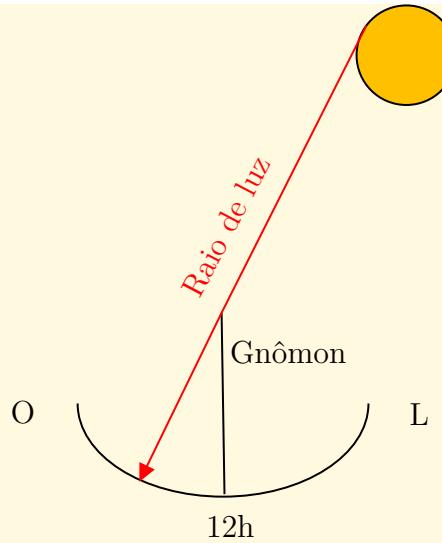
Assim, basta aplicar uma lei dos cossenos para acabar a questão:

$$d'^2 = (R_\oplus + h)^2 + R_\oplus^2 - 2 R_\oplus (R_\oplus + h) \cos(\delta_P - \phi)$$

$$\boxed{d' = 1100 \text{ km}}$$

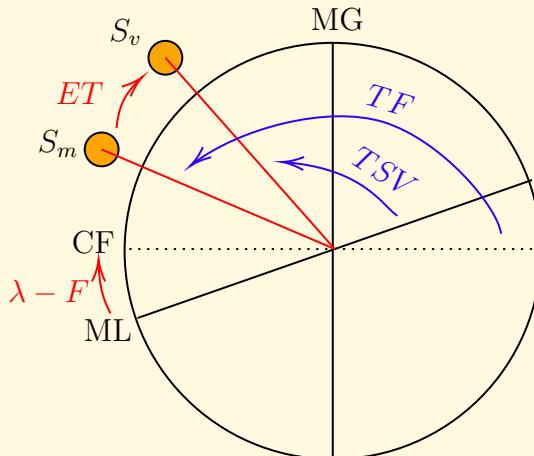
### Problema 11

Primeiramente, é importante notar que, por se tratar de um relógio de sol polar, sua haste está orientada em direção ao polo celeste, especificamente para o Norte. Com isso, podemos deduzir que o Leste está à direita da imagem. Como a sombra do Sol se projeta para a esquerda, isso indica que o Sol está à direita (Leste), ou seja, ainda não atingimos o meio-dia. Confira o raciocínio na imagem a seguir:



Observando a imagem do relógio, podemos determinar que o horário indicado pelo relógio solar é 11h20. A princípio, pode ser complicado entender que horário é esse, pois existem várias definições de tempo. No entanto, é importante notar que estamos analisando o ângulo horário do Sol verdadeiro, já que o gnomon está apontando para o meridiano local. Além disso, adotamos a convenção de que o meio-dia corresponde à culminação superior; caso contrário, o horário seria -40 minutos. Assim, como discutido na teoria, este é o tempo solar verdadeiro (TSV), logo  $TSV = 11h20m$ .

Agora surge a seguinte dúvida: **por que o horário local contrasta com o horário do Sol verdadeiro?** A resposta é simples: o horário local, para facilitar a vida das pessoas, considera o tempo no meridiano central (ou seja, para alguém na longitude de  $90^\circ O$ ), e não para quem está exatamente em Rice. Além disso, existe a equação do tempo, que descreve a diferença entre o Sol verdadeiro e o Sol médio (este último sendo uma média fictícia, usada para simplificar os cálculos). Vamos esquematizar para tornar a situação mais clara:



**Legenda da imagem**

- $\lambda - F$ : Diferença de longitude entre o observador em Rice e o centro do Fuso (CF).
- ML: Meridiano Local.
- $S_m$ : Posição do Sol Médio.
- $S_v$ : Posição do Sol Verdadeiro.
- $ET$ : Equação do Tempo.
- $TF$ : Tempo de Fuso (o horário 12h42 que aparece no relógio civil, celular, etc.).
- $TSV$ : Tempo Solar Verdadeiro, o 11h20 mostrado no relógio de Sol.

Da geometria mostrada na imagem podemos tirar a seguinte solução:

$$TF = TSV + ET + (\lambda - F)$$

É importante lembrar que como estão utilizando o horário de verão, uma hora é adicionada no tempo de fuso, logo:

$$TF = TSV + ET + (\lambda - F) + 1\text{h}$$

Uma aproximação relevante a ser feita é que, como estamos em junho, a Terra está próxima do afélio, e o solstício de verão está se aproximando. Esse período é importante porque, tanto a variação da velocidade da Terra quanto a posição do Sol na esfera celeste apresentam menores flutuações. Durante esse intervalo, a velocidade da Terra em sua órbita é mais estável, e o Sol tende a exibir menos variações ao longo do dia. Como resultado, a equação do tempo é praticamente desprezível nessa época. Assim, para resolver o problema, basta aplicar a seguinte fórmula:

$$TF = TSV + (\lambda - F) + 1\text{h}$$

Substituindo os valores conhecidos:

$$12\text{h}42\text{m} = 11\text{h}20\text{m} + (\lambda - F) + 1\text{h}$$

Logo, obtemos:

$$\lambda - F = 22\text{m}$$

Convertendo para graus e considerando  $F = 6 \cdot 15^\circ \rightarrow F = 90^\circ\text{O}$ , temos:

$$\boxed{\lambda = 95.5^\circ\text{O}}$$

### Problema 12

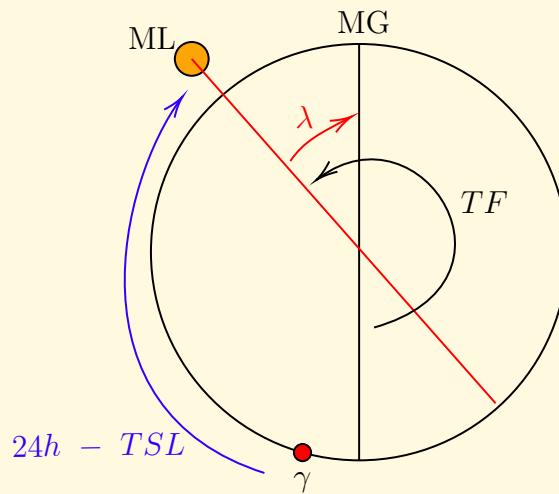
- (a) No Equinócio Vernal (março), a ascensão reta solar é nula. Ao definir o sistema de ascensão reta, é intuitivo pensar que fazemos isso de forma que a ascensão reta solar

aumente. No solstício de junho, ela é 6h, no equinócio de setembro, 12h, e no solstício de dezembro, 18h.

O Tempo Sideral Local é o ângulo horário do ponto vernal. Da forma como definimos o ângulo horário e a ascensão reta, é sempre verdadeiro, para qualquer astro dado, que  $TSL = H + \alpha$

No caso dado, se o Sol passa pelo meridiano superior (ângulo horário nulo), então o tempo sideral é a ascensão reta do Sol, 18h.

- (b) O relógio deveria apontar meio-dia (Sol sobre o meridiano local).
- (c) Esquematizando a situação:



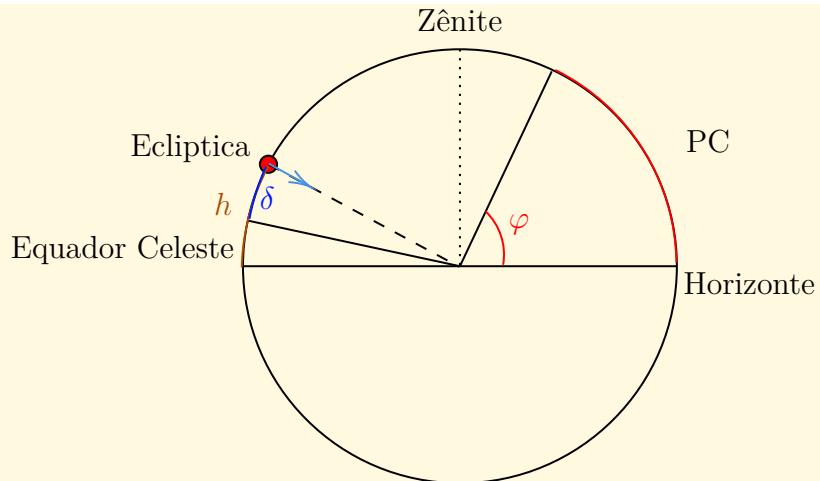
Temos que

$$TF - \lambda = 12h$$

Portanto

$$\boxed{TF = 14h8m}$$

- (d) Considerando, sem perda de generalidade, que estamos no hemisfério sul, isso significa que estamos no solstício de verão nesse hemisfério. Portanto, o Sol e, consequentemente, a eclíptica (sua trajetória aparente) estarão acima do equador celeste. Nesse caso, podemos esquematizar a situação:



A altura  $h$  pode ser determinada medindo diretamente na imagem da questão (com o auxílio de uma régua) e aplicando a tangente. Dessa forma, obtemos um valor aproximado de

$$h \approx 34^\circ$$

Pelo esquema,

$$h - \delta + \varphi = 90^\circ$$

$$\varphi = 90^\circ - h + \delta$$

$$\boxed{\varphi = 79,5^\circ S}$$

Para o hemisfério norte, analogamente temos:

$$h + \delta + \varphi = 90^\circ$$

$$\varphi = 90^\circ - h - \delta$$

$$\boxed{\varphi = 32,5^\circ N}$$

### Problema 13

- (a) A parte central do gráfico corresponde às 12h de tempo aparente, ou seja, ângulo horário do Sol nulo. Esse recorte do meridiano tem azimute oposto ao Polo (em latitudes de baixo módulo, a parte superior dele até pode ter azimute igual, mas a parte inferior ainda terá oposto, este não é caso dado que o recorte inteiro compartilha o mesmo azimute). Pela legenda dos pontos cardinais, essa faixa se localiza ao Sul, portanto o Polo visível está ao Norte; a latitude é positiva então.

A altura do Equador – faixa azul – (no cruzamento com o meridiano local) é  $50^\circ$ . Como esse valor é o complementar do módulo da latitude, a latitude é  $+40^\circ$ .

- (b) O Solstício de Verão ocorre quando o Sol tem seu módulo de declinação máximo (valor mais negativo para o Sul ou mais positivo para o Norte). No caso em que o Sol ultrapassa o zênite (baixos módulos de latitude), o solstício não é a altura máxima. Contudo, nos demais casos – este incluso –, o Solstício de Verão marca a maior altura solar, no caso, a faixa vermelha superior. Às 14h, sua altura será  $60^\circ$ , portanto sua distância zenital,  $30^\circ$ .
- (c) O Solstício de Inverno sempre acompanha a altura mínima do Sol. No gráfico, é representado pela faixa preta inferior. Às 11h, seu azimute será  $-15^\circ$ .
- (d) Nos dias de Equinócio, o Sol estará no Equador – faixa azul –, e o cruzamento dessa com a altura de  $45^\circ$  ocorre às 10h30min e às 13h30min.

#### Problema 14

Para determinar a altura do Cristo, será necessário obter a altura - ou distância zenital - do Sol, e para tanto é preciso primeiramente encontrar o ângulo horário ( $H_\odot$ ) do Sol. A conversão entre o horário marcado pelo relógio ou hora legal (HL) e a hora solar verdadeira (HS) é dada por:

$$HL = HS - \Delta\lambda + HV + ET$$

Sendo  $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_F$ , em que  $\lambda_F$  é a longitude do fuso horário da cidade e  $HV = 1$  h a correção devido ao horário de verão. Atenção para os sinais negativos! Em  $\Delta\lambda$ , note que Rio está a leste do fuso, e portanto no fuso está mais cedo; lembre-se também que a hora do meridiano central do fuso é a hora legal. Além disso,  $HS = H_\odot + 12h$ , portanto:

$$18h51min04s = H_\odot + 12h - \frac{43^\circ10'21'' - (-45^\circ)}{15}h + 13min33s + 1h \Rightarrow$$

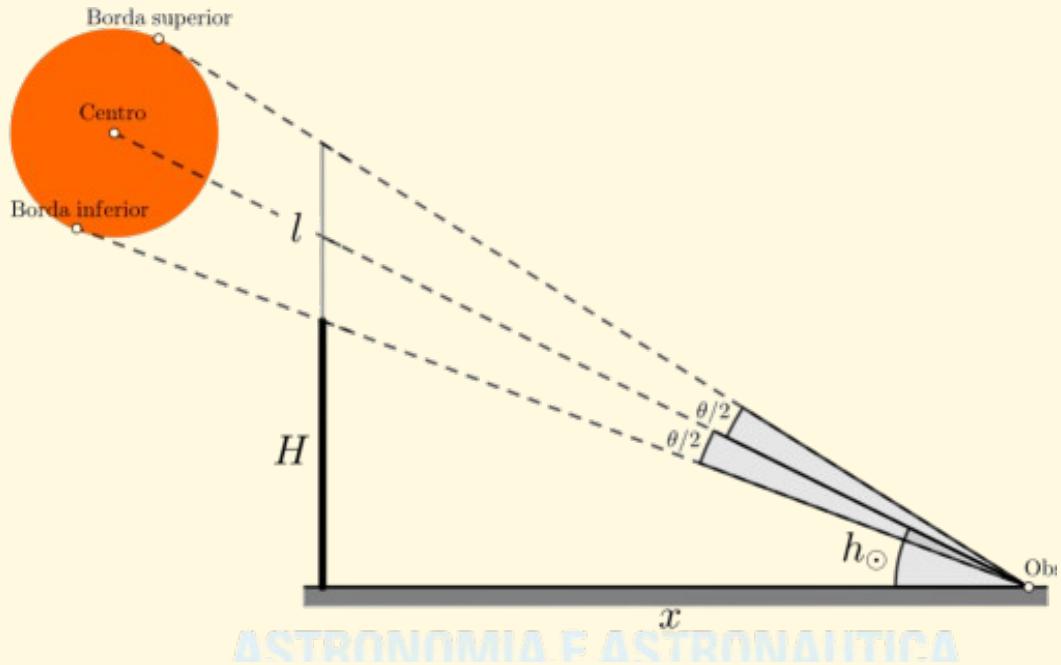
$$H_\odot = 5h44min13,33s$$

Agora, usamos o triângulo de posição para obter a altura ( $h$ ) do Sol:

$$\sin(h_\odot) = \sin(\phi) \sin(\delta_\odot) + \cos(\phi) \cos(\delta_\odot) \cos(H_\odot)$$

$$h_\odot = 10^\circ2'32,47''$$

Por fim, resta apenas visualizar a geometria da situação. Observe o esquema a seguir.



## ASTRONOMIA E ASTROFÍSICA

$\theta = 32'$  é o diâmetro angular do Sol,  $x$  é a distância entre o observador e a base do morro do Corcovado,  $H$  a altitude do morro e  $h$  a altura do Cristo Redentor relativa ao topo do Corcovado. Por trigonometria, vale que:

$$\begin{cases} \tan\left(h_{\odot} - \frac{\theta}{2}\right) = \frac{H+l}{x} \\ \tan\left(h_{\odot} + \frac{\theta}{2}\right) = \frac{H}{x} \end{cases}$$

Assim,

$$\frac{\tan\left(h_{\odot} - \frac{\theta}{2}\right)}{\tan\left(h_{\odot} + \frac{\theta}{2}\right)} = \frac{H+l}{H}$$

Substituindo os valores numéricos, temos por fim:

$$\frac{l}{710} = \frac{\tan(10^{\circ}2'32,47'' + 16')}{\tan(10^{\circ}2'32,47'' - 16')} - 1 \Rightarrow [l \approx 40m]$$

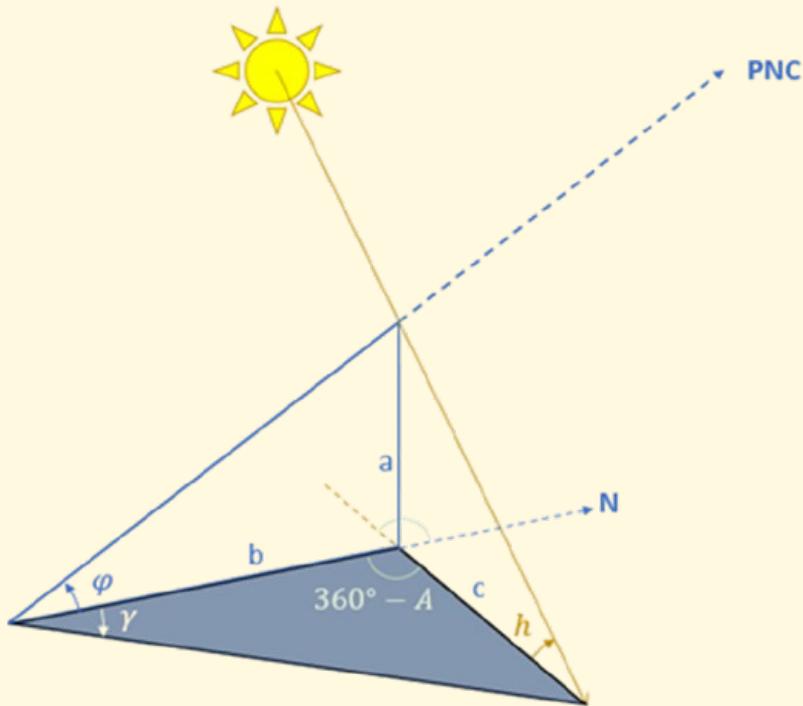
### Problema 15

- (a) Nessa resolução, usaremos dois métodos para solucionar o primeiro item. Primeiramente, uma solução longa por geometria espacial, trigonometria e sistemas de coordenadas, posteriormente, uma solução curta e pouco trabalhosa por trigonometria

esférica. É esperado, além de uma compreensão melhor sobre o funcionamento de um relógio de sol, que o(a) aluno(a) se convença da importância de dominar a trigonometria esférica.

### Solução por geometria espacial, trigonometria e sistemas de coordenadas

Observe a figura:



Observe as equações:

$$a = b \cdot \tan(\phi)$$

$$a = c \cdot \tan(h)$$

$$\frac{b}{c} = \frac{\sin(\gamma - A)}{\sin(\gamma)}$$

Dessas equações, concluímos:

$$\frac{\tan(h)}{\tan(\phi)} = \frac{\sin(\gamma - A)}{\sin(\gamma)}$$

$$\frac{\tan(h)}{\tan(\phi)} = \frac{\sin(\gamma) \cos(A) - \sin(A) \cos(\gamma)}{\sin(\gamma)}$$

$$\frac{\tan(h)}{\tan(\phi)} = \cos(A) - \sin(A) \cot(\gamma)$$

$$\cot(\gamma) = \frac{\cos(A) \tan(\phi) - \tan(h)}{\sin(A) \tan(\phi)}$$

$$\cot(\gamma) = \frac{\cos(A) \cos(h) \tan(\phi) - \sin(h)}{\sin(A) \cos(h) \tan(\phi)}$$

Sabemos, pelas transformações de coordenadas, que:

$$\sin(h) = \sin(\phi) \sin(\delta) + \cos(\phi) \cos(\delta) \cos(H)$$

$$\sin(A) \cos(h) = -\sin(H) \cos(\delta)$$

$$\cos(A) \cos(h) = \sin(\delta) \cos(\phi) - \sin(\phi) \cos(\delta) \cos(H)$$

Assim, substituímos na expressão e encontramos:

$$\cot(\gamma) = \sin(\phi) \cot(H) + \cot(\phi) \cos(\phi) \cot(H)$$

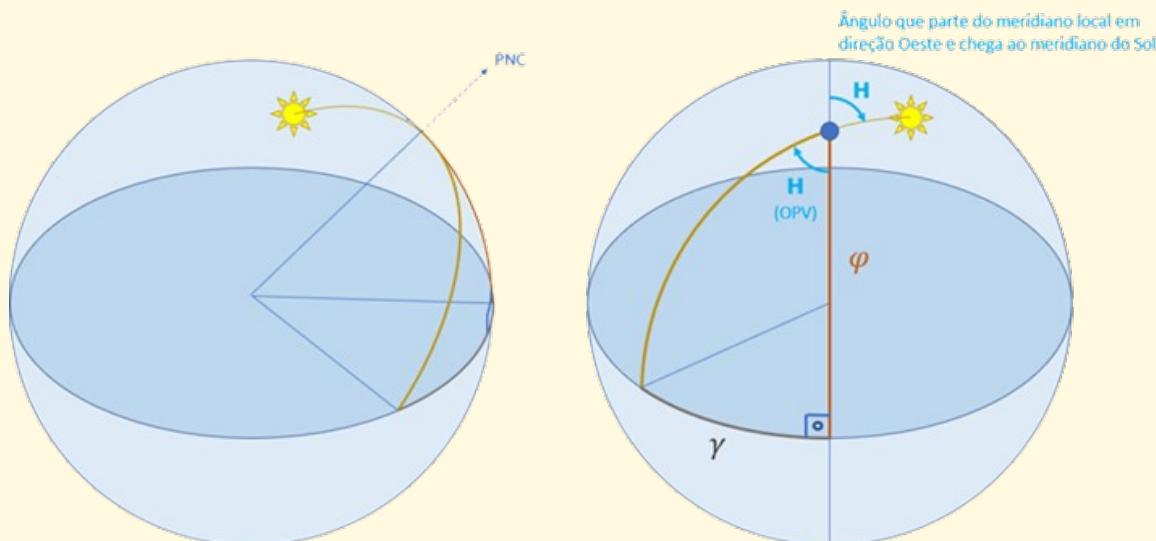
$$\cot(\gamma) = \cos(\phi) \cot(H)$$

$$\tan(\gamma) = \sin(\phi) \tan(H)$$

### Solução por trigonometria esférica

Iremos construir um triângulo esférico centrado no vértice que faz o ângulo  $\varphi$  do relógio. Perceba que, se o raio de Sol é uma linha, sua projeção a partir do centro da esfera é um arco de círculo máximo. Os meridianos são arcos de círculo máximo, assim como o horizonte. O triângulo esférico será construído para o Sol a Oeste do meridiano local, mas um análogo pode ser feito para Leste.

Observe a figura:



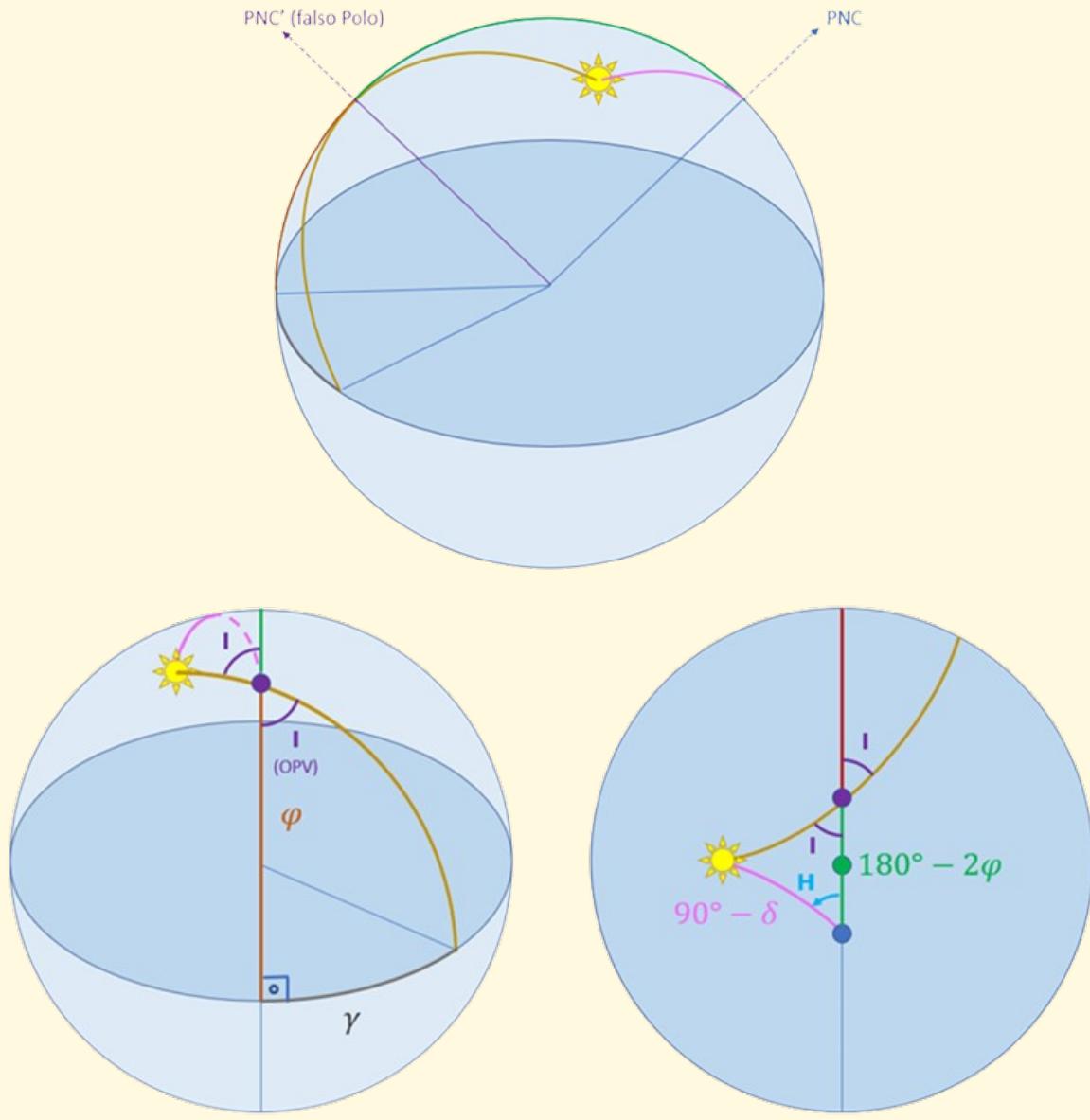
Pela lei das cotangentes:

$$\cos(90^\circ) \cos(\phi) = -\sin(90^\circ) \cot(H) + \sin(\phi) \cot(\gamma)$$

$$\boxed{\tan(\gamma) = \sin(\phi) \tan(H)}$$

Como visto, o problema pode ser solucionado em duas linhas, desde que se faça uma visualização geométrica adequada.

- (b) Esse item resolveremos apenas por trigonometria esférica. Observe a figura, que é análoga à anterior:



Pela lei das cotangentes:

$$\cos(H) \cos(180^\circ - 2\phi) = -\sin(H) \cot(I) + \sin(180^\circ - 2\phi) \cot(90^\circ - \delta)$$

$$\cot(I) = \cot(H) \cos(2\phi) + \sin(2\phi) \tan(\delta) \csc(H)$$

Pela lei das cotangentes:

$$\cos(90^\circ) \cos(\phi) = -\sin(90^\circ) \cot(I) + \sin(\phi) \cot(\gamma)$$

$$\tan(\gamma) = \sin(\phi) \tan(I)$$

$$\boxed{\tan(\gamma) = \frac{\sin(\phi)}{\cot(H) \cos(2\phi) + \sin(2\phi) \tan(\delta) \csc(H)}}$$

Encontramos uma relação entre  $H$  e  $\gamma$ . Esta, porém, depende de  $\delta$ , que varia ao longo do ano, ou seja, as marcações não poderiam ser utilizadas o ano todo.

## 4 Noções de Física Moderna

Antes de introduzirmos verdadeiramente a física moderna, seus estudos e fenômenos, é de extrema importância que cada leitor, expanda seus horizontes imaginativos, pois a física moderna que inclui: quântica, relatividade, física de partículas, dentre outras áreas; possui grandes distinções com relação a física clássica que está cravada em nossas cabeças, pois sempre tentamos resolver os fenômenos rotineiros, com a mecânica clássica ou termodinâmica (clássica) ou com o eletromagnetismo (clássico), porém para algumas ocasiões como por exemplo: partículas muito pequenas, velocidades consideráveis em relação a da luz, haverão fenômenos que não podem ser descritos pela física que foi construída durante os Séculos XVII - XIX. Portanto, estejam prontos para adentrar em uma nova forma de visualizar a física, seus questionamentos e teorias.

### 4.1 Desenvolvimento da Física Moderna

#### 4.1.1 História da Física Moderna

No final do século XIX e início do XX, alguns físicos achavam que a física estava se estagnando, por pensarem que a maior parte dos fenômenos físicas já podiam ser explicados com as teorias da época. Isso porque se pensava que apesar da dificuldade matemática de como descrever alguns sistemas, ainda assim era possível descrever-los com as leis conhecidas. Um dos físicos que acreditavam nisso era Lord Kelvin, que dizia haver somente duas questões que ainda não haviam respostas físicas, sendo elas a existência do éter e o problema da radiação do corpo negro, essas questões que o mesmo chamava de "pequenas nuvens". As tais "pequenas nuvens" acabaram por serem resolvidas depois de um certo tempo, entretanto para chegar numa solução adequada delas, formam criadas duas das maiores teorias da física, respectivamente a teoria da relatividade e da mecânica quântica. Para este livro iremos focar especialmente na questão da radiação do Corpo Negro.

#### 4.1.2 Radiação Térmica

Quando estudamos calor e seus processos de propagação, vemos que calor podem ser transmitidos por condução, convecção e radiação. Para nossos estudos abordaremos a radiação.

A radiação térmica, como podemos inferir através do nome, está intrinsecamente ligada a temperatura do corpo. Isso pois todos os corpos que estão com temperaturas superiores ao zero absoluto, estão com agitações moleculares que por sua vez emitem radiação eletromagnética, como será explicado mais a frente. Um exemplo notável disso é quando estamos em um local pequeno, porém com um grande número de pessoas e começamos a sentir um aumento significativo na temperatura, com esse aumento sendo expresso através do suor por exemplo. O exemplo do corpo humano por não ser visível pode causar um estranhamento com relação a ser uma onda eletromagnética, porém se utilizarmos outro caso de transmissão de calor por radiação como o de uma placa metálica, podemos perceber mais claramente que se trata da radiação eletromagnética. Peguemos uma placa metálica à temperatura ( $T$ ) de  $600^{\circ}\text{C}$  percebesse que mesmo que a placa não esteja emitindo nada no âmbito da luz visível (entretanto a placa está emitindo no espectro do infravermelho, assim como o corpo humano na situação anterior), ao aproximar-nos as mãos da mesma, sentiremos um fluxo de calor saindo da placa, que já caracteriza o processo de radiação. Agora aumentemos a temperatura para

$T = 700^{\circ}\text{C}$ , quando isso ocorrer, será possível ver a placa metálica brilhando levemente em um vermelho escuro, isso supondo que a placa não se fundiu no processos. Aumentando ainda mais a temperatura poderemos observar a coloração da placa em outros tons mais avermelhados, depois amarelo, até se esbranquiçar por conta das iguais porcentagens de cores do espectro visível que ao se unirem em totalidade formam a cor branca. Aumentando ainda mais a quantidade de radiação no azul, a cor branca vai se desfazer tornando-se em uma coloração azul. Com esse exemplo torna mais fácil a percepção de que a radiação térmica é somente a radiação eletromagnética emitida nas circunstâncias anteriores.

Antes de expandirmos a utilização da radiação térmica devemos explicar como ela funciona, para simplificarmos a abstração inicial de como funciona vamos usar o exemplo de um gás ideal monoatômico. Para esse gás sabemos que a energia cinética média dele é dada pela seguinte equação:

$$\langle E_c \rangle = \frac{3}{2} k_B T$$

Diatômica:

$$\langle E_c \rangle = \frac{5}{2} k_B T$$

Onde:

$k_B$  : Constante de Boltzmann

$T$  : Temperatura do gás

Portanto percebemos que para um gás o movimento dos átomos é diretamente proporcional a temperatura da mesma, o movimento de um átomo pode ser descrito por rotação, translação e vibração. Para que a visualização seja simplificada peguemos um gás de oxigênio( $\text{O}_2$ )

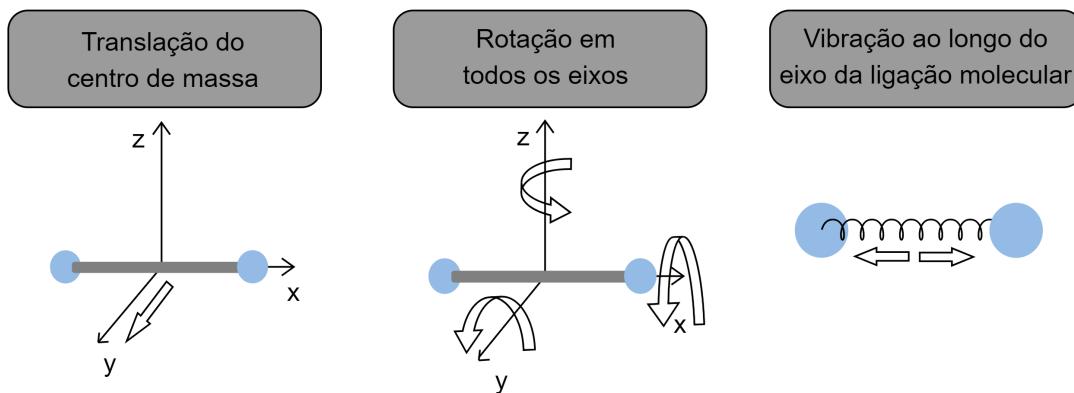
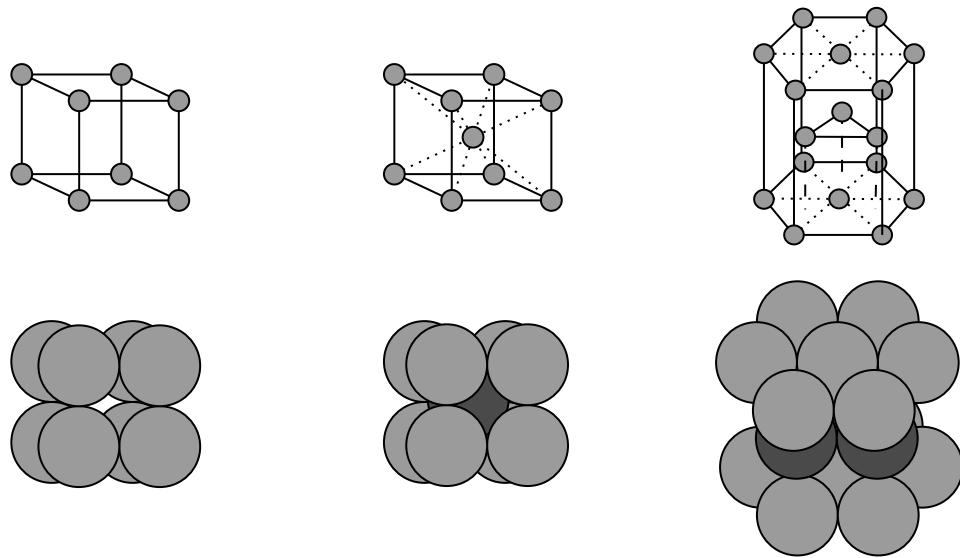


Figura 44: Movimentos dos átomos em um gás

Para um sólido que pode ser tratado como uma rede de átomos (Figura 4.1.2), só pode possuir movimentos de vibração.

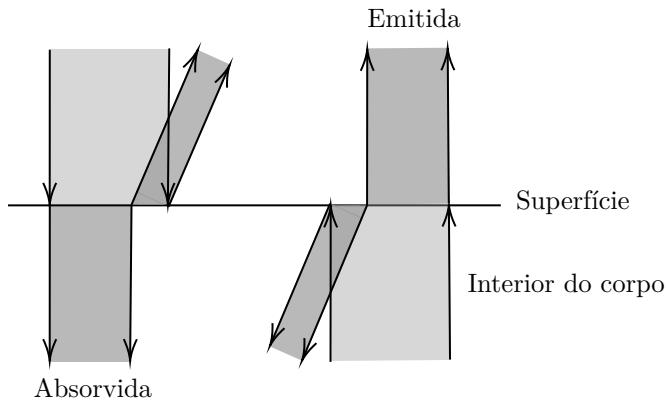
Perceba que o movimento de vibração pressupõe que a ligação entre os átomos funciona como uma mola (que forçará os átomos a inverterem o sentido do movimento), assim como na figura abaixo:



Exemplos de redes atômicas

#### 4.1.3 Corpo Negro

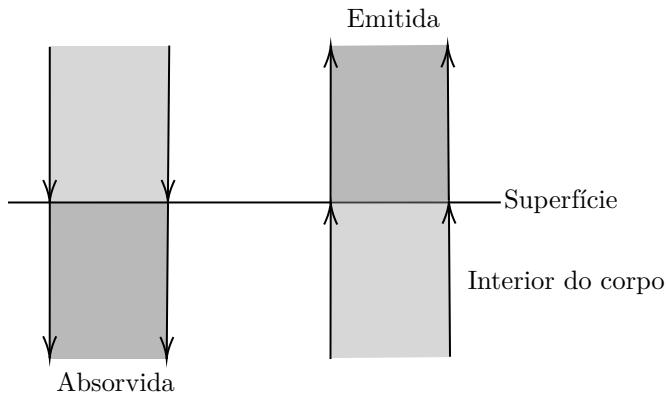
Analisemos um corpo que possua uma superfície que esteja recebendo toda a energia, radiação proveniente tanto de seu interior, como de outros corpos. Um exemplo fácil de perceber no dia a dia são os corpos opacos. Esses corpos com cores escuras, como o asfalto, que absorvem mais radiação, comparado aos corpos de cores mais claras. Segue o esquema de tal corpo genérico:



Já que os corpos opacos escuros absorvem mais radiação, isso significa que a temperatura do corpo aumenta e já que a temperatura do corpo está diretamente ligada a energia cinética dos átomos, sabemos que ao aumentarmos a temperatura a vibração em corpos sólidos é ampliada consequentemente, o que pelo estudo anterior nos faz inferir que gera mais radiação térmica, assim reduzindo a energia cinética dos átomos e também a temperatura. Quando o corpo está em equilíbrio térmico com o ambiente ao seu entorno, significa que o índice de absorção é igual ao de emissão. Considerando esses corpos podemos perceber que corpos que são bons absorvedores serão

necessariamente bons emissores.

Um corpo negro é a idealização dessa teoria, onde ele consegue absorver toda a radiação que nele incide, sendo assim considerado o absorvedor e emissor perfeito, assim como mostrado abaixo:



### Ideia 15: Nomenclatura da Física Moderna

Sabemos então que a emissão de um corpo negro é igual a sua radiação incidente, portanto é conveniente descrevermos que:

$$I(v) = R(v)$$

Onde:

- $I(v)$ : energia eletromagnética total incidente por unidade de tempo e área no corpo na faixa de  $v + dv$
- $R(v)$ : energia eletromagnética total irradiada por unidade de tempo e área no corpo na faixa de  $v + dv$

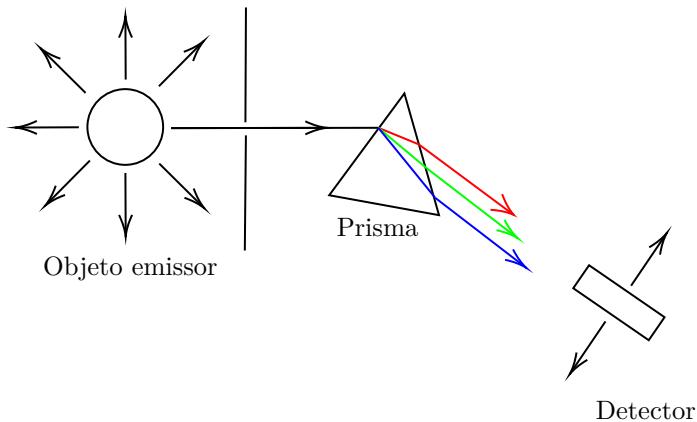
#### 4.1.4 Lei de Stefan–Boltzmann

Jozef Stefan (1835-1893) no ano 1879 descobriu experimentalmente que  $I$  de um corpo negro é diretamente proporcional à quarta potência da temperatura do corpo:

$$I \propto T^4 \iff I = \sigma T^4 \quad (4.1)$$

A constante de igualdade possui o valor de  $\sigma \approx 5,67 \cdot 10^{-8} W/m^2 K^4$ . Essa equação foi demonstrada também por Ludwig Boltzmann, 5 anos depois, utilizando somente da termodinâmica clássica. Por isso a equação 4.1, possui o nome dos dois físicos.

A irradiação total de um corpo negro pode ser descrita como a soma da radiância em cada frequência emitida pelo corpo negro, entretanto ao invés de utilizarmos um somatório, devemos utilizar uma integral em função da frequência, isso pois como é possível analisar no gráfico abaixo, de acordo com a frequência da radiação emitida, a quantidade varia para o corpo negro, além disso é possível notar que a radiância espectral também varia de acordo com a temperatura, esse gráfico pode ser medido através de sensores como o seguinte:



$$R = \int_0^{\infty} R(v) dv = \sigma T^4$$

Stefan postulou um modelo teórico em que  $R(v)$  seria descrito em função da frequência e da temperatura do corpo. Onde  $R(v)$ , de acordo com a sua hipótese advinda de observações experimentais, variaria com o cubo da frequência emitida, da seguinte forma.

$$R(v) = 8\pi h c v^3 f\left(\frac{v}{T}\right) \quad (4.2)$$

Onde  $f\left(\frac{v}{T}\right)$  é uma função que varia de acordo com essas duas incógnitas e varia de acordo com cada uma das teorias que irão ser explicitas a seguir.

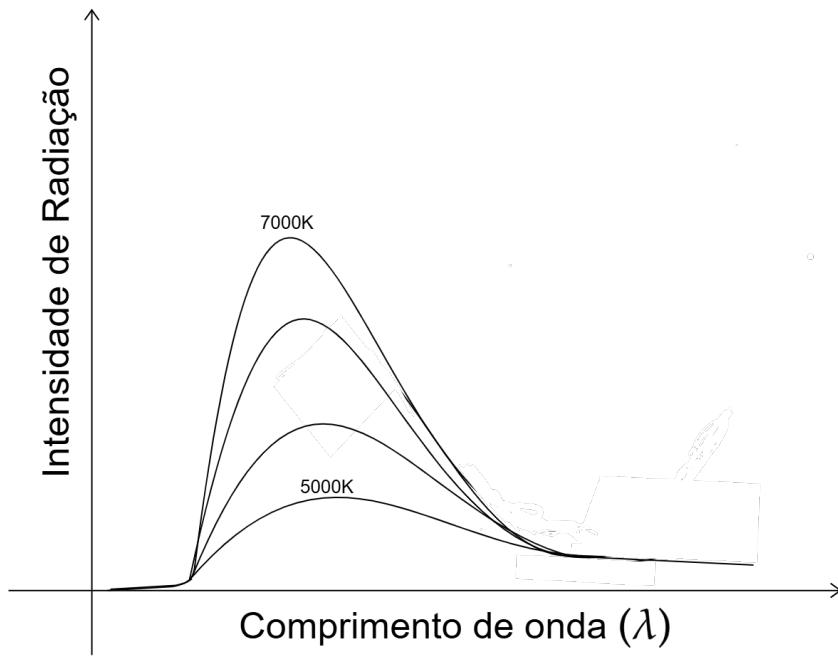
#### 4.1.5 Lei de Wien

Em 1893 Wilhelm Wien decidido a avançar com os pensamentos de Stefan, progride em busca de  $u(v)$ , conhecido como uma densidade de radiação, porém somente com suas intuições e com o empirismo de experimentos. Wien chegou na seguinte equação, chamamos de lei da distribuição de Wien:

$$u(v) = \frac{\alpha v^3}{e^{\frac{\beta v}{T}}} \quad (4.3)$$

Onde  $\alpha$  e  $\beta$  são duas constantes.

Wien percebeu que no gráfico de radiância espectral por comprimento de onda, era gerado uma curva e que os pontos de máximo (ou seja onde a radiação espectral é máxima) e que essas curvas variavam conforme era modificada a temperatura do corpo assim como na imagem abaixo:



Wien percebeu que nos pontos de máxima intensidade de radiação, a temperatura do corpo multiplicada pelo comprimento de onda são davam um valor igual, independente da temperatura do corpo negro. Isso pode ser feito através da 'plotagem' dos dados obtidos em um gráfico de  $u(\lambda)$  x  $\lambda$  ou através de uma análise matemática, onde basta pegar a função da densidade da radiância por comprimento de onda, deriva-la e igualar a zero, para achar os pontos de máximo ou mínimo, para o nosso caso, o ponto de máximo.

$$u(\lambda) = \frac{\alpha c^3}{\lambda^3} \cdot e^{-\frac{\beta c}{\lambda T}}$$

$$\frac{d(u(\lambda))}{d\lambda} = 0 \iff \frac{d}{d\lambda} \left( \frac{\alpha c^3}{\lambda^3} \cdot e^{-\frac{\beta c}{\lambda T}} \right) = 0$$

Reatribuindo os constantes para simplificação:

$$\alpha c^3 = \Omega \text{ e } \beta c = \gamma$$

$$\therefore \frac{d}{d\lambda} \left( \frac{\Omega}{\lambda^3} \cdot e^{-\frac{\gamma}{\lambda T}} \right) = 0$$

Utilizando da regra do produto das derivadas, teremos a seguinte equação:

$$\frac{d}{d\lambda} \left( \frac{\Omega}{\lambda^3} \right) \cdot e^{-\frac{\gamma}{\lambda T}} + \frac{\Omega}{\lambda^3} \cdot \frac{d}{d\lambda} \left( e^{-\frac{\gamma}{\lambda T}} \right) = 0 \implies$$

Extraindo as constantes da derivada:

$$\Omega \frac{d}{d\lambda} \left( \lambda^{-3} \right) \cdot e^{-\frac{\gamma}{\lambda T}} + \frac{\Omega}{\lambda^3} \cdot \frac{d}{d\lambda} \left( e^{-\frac{\gamma}{\lambda T}} \right) = 0$$

$$\Omega \left( \frac{-3}{\lambda^4} \right) \cdot e^{-\frac{\gamma}{\lambda T}} + \frac{\Omega}{\lambda^3} \cdot e^{-\frac{\gamma}{\lambda T}} \cdot \frac{d}{d\lambda} \left( -\frac{\gamma}{\lambda T} \right) = 0$$

$$\frac{3\Omega}{\lambda^4} \cdot e^{-\frac{\gamma}{\lambda T}} = \frac{\Omega}{\lambda^3} \cdot e^{-\frac{\gamma}{\lambda T}} \cdot \frac{d}{d\lambda} \left( -\frac{\gamma}{\lambda T} \right)$$

Dividindo as igualdades dos dois lados da equação:

$$\frac{3}{\lambda^4} = \frac{1}{\lambda^3} \cdot \frac{d}{d\lambda} \left( -\frac{\gamma}{\lambda T} \right)$$

$$\frac{3}{\lambda} = -\frac{\gamma}{T} \frac{d}{d\lambda} (\lambda^{-1})$$

$$\frac{3}{\lambda} = \frac{\gamma}{T} \cdot \frac{1}{\lambda^2}$$

$$\lambda T = \frac{\gamma}{3}$$

A partir de agora chamaremos esse  $\gamma/3$  como uma nova constante, que será denominado de constante de dispersão de Wien( $b$ ). Além disso um último ajuste para facilitar a recordação da equação é colocar  $\lambda$  como  $\lambda_{max}$ , pois como derivamos para achar o máximo, o  $\lambda$  corresponde ao comprimento de onda para que seja a máxima radiância espectral.

$$\boxed{\lambda_{max} T = b} \quad (4.4)$$

Entretanto depois de ser analisada a lei da dispersão de Wien, a equação 4.3, não era válida para todo espectro das ondas eletromagnéticas, mas somente para aquelas de altas frequências, ou seja, para baixos comprimentos de onda a distribuição de Wien funciona muito bem, entretanto ainda existia uma parte do espectro que não era contemplada.

#### 4.1.6 Castástrofe UV - Lei de Rayleigh-Jeans

Percebeu-se então uma necessidade, de um complemento para finalizar a teoria. Rayleigh e Jeans perceberam que  $f(\frac{v}{T})$  (da equação 4.2) deveria ser invariável de acordo com os mecanismos de dentro de cada modelo.

O modelo mais próximos que temos de um corpo negro, é um corpo preto com cavidade e uma pequena abertura, onde toda radiação que entra, será absorvida dentro da cavidade, já que apesar da radiação ser parcialmente refletida dentro, a probabilidade da radiação sair pela pequena abertura é mínima.

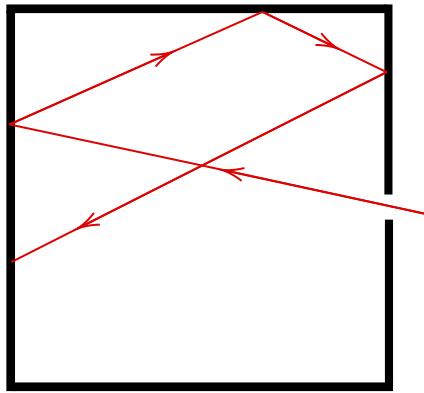


Figura 45: Cavidade absorvendo radiação

O exemplo pensado como o de maior simplificação para um corpo radiante é de um oscilador harmônico linear. Pois assim como vimos anteriormente, corpos sólidos vibram e isso ocasiona na emissão de radiação, ou seja, temperatura de acordo com a equação 4.1.

Retornando ao pensamento de um dipolo oscilante, por ser a visualização mais simplificada de um corpo que emite radiação, é possível descrever que a energia emitida em um segundo por ele é:

$$\rho_v = \frac{8\pi v^2}{c^3} \bar{\epsilon}$$

Onde  $\bar{\epsilon}$  é a energia média de um oscilador.

### Ideia 16

Para adiantar e simplificar explicações futuras, é necessário uma exposição sobre o que é esse  $\rho(v)$  e como podemos convertê-lo nas outras funções que já descrevemos.

$\rho(v)$  é chamado de densidade de energia volumétrica, para o nosso experimento com o corpo negro, será relacionada aquela cavidade.

Para que haja uma igualdade entre  $\rho(v)$  e  $R(v)$  é necessário um simples fator de conversão.

$$R(v) = \frac{c}{4} \rho(v)$$

Além disso existe um fator de conversão que não será muito apresentado nesse livro, entretanto, é necessário saber, pois já caiu anteriormente em Vinhedo e será utilizado de maneira automática no subcapítulo "A lei de Planck e suas derivações".

$$R(v)dv = u(\lambda)d\lambda$$

Através da lei da equipartição da física estatística, temos que a energia média de um oscilador é descrita pela seguinte equação:

$$\bar{\epsilon} = \frac{\int_0^{\infty} \epsilon e^{-\beta\epsilon} d\epsilon}{\int_0^{\infty} e^{-\beta\epsilon} d\epsilon}$$

Ao utilizarmos integrais para calcular o valor médio da energia do oscilador, implicasse que a energia está em um espectro contínuo, pois relembrando da diferença entre o somatório e a integral, é que na integral a soma é contínua, já no somatório a soma é discreta, de uma forma bem simplista isso significa que a energia pode ser escrita como qualquer valor existente.

Após a resolução da equação anterior, teremos:

$$\bar{\epsilon} = \frac{1}{\beta} = k_b T \quad (4.5)$$

$$\therefore \rho_v = \frac{8\pi v^3}{c^3} k_b T \quad (4.6)$$

Essa equação ficou conhecida como a Lei de Rayleigh-Jeans, que tem uma ótima teoria e deveria ser apresentada como a solução do problema do corpo negro, entretanto assim como a de Wien, essa lei não podia prever fidedignamente todo espectro, pois quando chegava no ultravioleta, essa equação dizia que um corpo negro deveria emitir energia infinita, o que para fins práticos é impossível, depois de mais uma teoria falha, esse momento ficou conhecido como catástrofe do ultravioleta.

Na imagem acima

A teoria da equação 4.6 era uma ótima teoria, porém estava completamente baseada na física clássica e por isso ocorreu sua falha, a física clássica apesar de muito bem estruturada, não era capaz de trazer bons resultados quando se tratava de situação pouco triviais.

#### 4.1.7 Lei de Planck

Para resolver e de uma vez por todas solucionar um dos maiores problemas da física da época surge então Max Planck, que em 1901, publicou sua teoria, onde já que o mesmo não havia conseguido observar erros na teoria de Rayleigh-Jeans, prosseguiu no mesmo caminho, porém com sua grande sacada, de que a energia média de um oscilador, não pode ser descrita de forma contínua e sim de forma discreta, podendo ser escrita dessa forma:

$$\begin{aligned} \epsilon &= n\epsilon_o / n \in \mathbb{N}^* \\ \epsilon_o &= h\nu \\ \therefore \epsilon &= nh\nu \end{aligned} \quad (4.7)$$

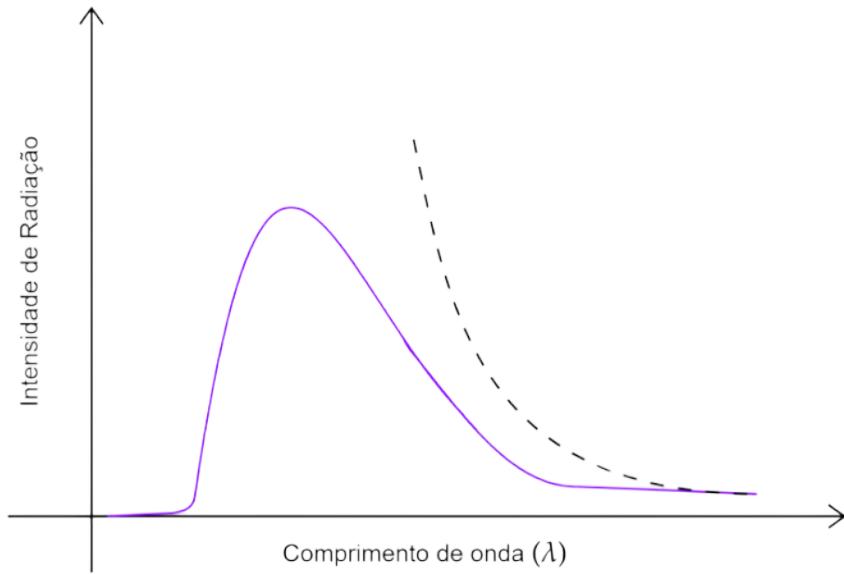


Figura 46: Comparação entre Rayleigh-Jeans e Planck

Onde:

$\epsilon_o$  : energia elementar

$h$  : constante de Planck

Onde a princípio Planck imaginava que sua constante,  $h$ , iria sumir com o decorrer das operações matemáticas, pensando ser somente uma necessidade matemática para que a equação funcionasse.

Para Planck a energia média de um oscilador então teria de ser escrita da seguinte forma:

$$\bar{\epsilon} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \epsilon e^{-\beta\epsilon}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\epsilon}} \implies \bar{\epsilon} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n\epsilon_o e^{-\beta n\epsilon_o}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta n\epsilon_o}} \quad (4.8)$$

Resolvendo inicialmente o denominador temos que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta n\epsilon_o} = \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-\beta\epsilon_o})^n$$

Reescrevendo dessa forma é visível como uma soma de P.G., onde o  $a_1 = 1$  e  $q = e^{-\beta\epsilon_o}$ , pensando assim temos que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (e^{-\beta\epsilon_o})^n = \frac{1}{1 - e^{-\beta\epsilon_o}}$$

Agora resolvendo o numerador:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\epsilon_o e^{-\beta n\epsilon_o} = \epsilon_o \sum_{n=0}^{\infty} ne^{-\beta n\epsilon_o}$$

Fazendo a seguinte substituição:

$$\beta\epsilon_o = \alpha$$

$$\epsilon_o \sum_{n=0}^{\infty} ne^{-n\alpha} \quad (4.9)$$

Para fazermos com que a expressão acima se torne uma P.G. novamente pra simplificar as contas. Para quem leu o livro de cálculo do OB pode perceber que a expressão interna ao somatório pode ser reescrita como:

$$ne^{-n\alpha} = -\frac{\partial}{\partial \alpha} e^{-n\alpha}$$

Sabendo que a soma das derivas é igual a derivada das somas podemos escrever a expressão 4.9, da seguinte forma:

$$\epsilon_o \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{\partial}{\partial \alpha} e^{-n\alpha} = -\epsilon_o \frac{\partial}{\partial \alpha} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha}$$

Novamente caímos em uma soma de P.G. infinita.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (e^{-\alpha})^n = \frac{1}{1 - e^{-\alpha}} = (1 - e^{-\alpha})^{-1}$$

Voltando a resolução da expressão 4.9:

$$\begin{aligned} -\epsilon_o \frac{\partial}{\partial \alpha} (1 - e^{-\alpha})^{-1} &= \epsilon_o (1 - e^{-\alpha})^{-2} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} (1 - e^{-\alpha}) \implies \\ \epsilon_o (1 - e^{-\alpha})^{-2} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} (1 - e^{-\alpha}) &= \epsilon_o (1 - e^{-\alpha})^{-2} \cdot e^{\alpha} \end{aligned}$$

Reescrevendo a expressão 4.8 com as simplificações anteriores:

$$\bar{\epsilon} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n\epsilon_o e^{-\beta n\epsilon_o}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta n\epsilon_o}} = \frac{\frac{ne^{-\beta\epsilon_o}}{(1 - e^{-\beta\epsilon_o})^2}}{\frac{1}{1 - e^{-\beta\epsilon_o}}}$$

$$\bar{\epsilon} = \epsilon_o \frac{e^{-\beta\epsilon_o}}{1 - e^{-\beta\epsilon_o}} = \epsilon_o \frac{1}{e^{\beta\epsilon_o} - 1}$$

$$\therefore \bar{\epsilon} = h\nu \cdot \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}$$

Portanto podemos escrever a lei de Planck das seguintes formas:

$$\rho(v) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} \iff R(v) = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}$$

Com a hipótese de Planck podemos obter um resultado adequado com forte base experimental, mas para alguns dos mais perspicazes questionadores podem estar se questionando o por que de vemos a luz como um espectro contínuo e não como algo discreto. Essa dúvida é muito pertinente pois já que a ideia de Planck está certa isso significa que a luz não é efetivamente contínua, entretanto como as razões entre as frequências permitidas pelos harmônicos de vibração de um corpo para a luz visível é muitíssimo pequena, para nossos olhos, a percepção que temos é de que a luz é emitida de forma continua, por conta da nossa visualização tanto com olhos, como com aparelhos já que as diferenças são tão irrisórias que nem mesmo aparelhos muito precisos poderiam dizer que não é somente um percentual de erro, o espectro percebido é considerado efetivamente contínuo.



Figura 47: Espectro visual

## 4.2 Analisando os resultados

### 4.2.1 Recapitulando

Após essa breve introdução à física moderna, podemos determinar as funcionalidades das descobertas primordiais dessa nova física para a astronomia e astrofísica.

Relembrando os conceitos anteriormente descritos, deve estar claro para todos que corpos emitem radiação e as estrelas estão inclusas nesse conjunto e que essas mesmas podem ser descritas como corpos muito próximos da idealização do corpo negro, portanto toda a descrição de radiação do corpo negro é válida para as estrelas e nossos estudos sobre elas.

#### 4.2.2 A lei de Planck e suas derivações

Sabemos que a lei de Planck é a mais correta, já que sua teoria é coerente com os experimentos realizados, além do que somente com a teoria de Planck que tivemos a abertura para o mundo quântico. Então já que a lei de Planck é experimentalmente validada, devemos partir dela e tentar identificar certos padrões que já foram detectados anteriormente, porém agora com a equação certa teremos a certeza de que as teorias anteriores a de Planck estavam certas.

Para encontrarmos os pontos de máximo da função de densidade por comprimento de onda, basta realizarmos a mesma derivada feita por Wien inicialmente, mas agora com a função correta.

$$u(\lambda) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1}$$

Seja x o valor de:

$$x = \frac{hc}{\lambda k_B T}$$

Assim, fazendo a substituição de variável em x:

$$I = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^x - 1}$$

Para o máximo do gráfico:

$$\frac{dI}{d\lambda} = 0 = \frac{d}{d\lambda} \left[ \frac{2hc^2}{\lambda^5} \cdot (e^x - 1)^{-1} \right]$$

$$\frac{d}{d\lambda} [\lambda^{-5} \cdot (e^x - 1)^{-1}] = 0$$

Vamos, então, aplicar a regra da cadeia e depois fazer uma substituição de variável em  $e^x - 1$ :

$$-5\lambda^{-6}(e^x - 1)^{-1} + \lambda^{-5} \frac{d(e^x - 1)^{-1}}{d(e^x - 1)} \frac{d(e^x - 1)}{d\lambda} = 0$$

Partindo da definição de x e diferenciando em ambos os lados, encontramos  $dx = -hcd\lambda/\lambda^2 k_B T$ . Então vamos substituir o  $d\lambda$  por dx na expressão, multiplicar tudo por  $\lambda^6$ :

$$-5(e^x - 1)^{-1} + (e^x - 1)^{-2} \lambda \frac{hc}{k_B T \lambda^2} \frac{d(e^x - 1)}{dx} = 0$$

Multiplicando tudo por  $-(e^x - 1)^{-1}$ , usando a definição de x e desenvolvendo a derivada:

$$(e^x - 1)^{-1} xe^x = 5 \implies x = \frac{5e^x}{e^x - 1} = \frac{5}{1 - e^{-x}}$$

Está é uma equação transcendental. Ou seja, não podemos resolver ela analiticamente. Porém, ainda podemos resolver ela numericamente por meio do uso de um simulador. Fazendo isso, chega-se que:

$$x = \frac{hc}{\lambda_m k_B T} \approx 4,965 \implies \lambda_m T = \frac{hc}{k_B \cdot 4,965} = b$$

Usando os valores das constantes física já conhecidas, encontra-se  $b \approx 2,89 \cdot 10^{-3}$  m · K. Essa é a tão famosa **Lei de Wien**. Ela afirma que o produto entre o comprimento de onda mais emitido de uma estrela e sua temperatura é uma constante(que acabamos de calcular). É interessante que uma Lei experimental tão importada tenha sua demonstração feita por um caminho tão inesperado; eu aposto que você não também não esperava essa origem para a Lei de Wien nos começos de estudo de astronomia! Essa dedução pode cair em algum aspecto na seletiva de Vinhedo, principalmente, então é importante que você tenha entendido. Porém, agora que vimos a demonstração, vamos visualizar algumas aplicações da Lei de Wien em astronomia.

### Ideia 17: Utilidades da Lei de Wien

A lei de Wien demonstra que o comprimento de onda no máximo de emissão de um corpo negro ou no nosso caso uma estrela e a temperatura da mesma estão diretamente interligadas. Sendo assim o mais comumente utilizado em provas é que ao obter o pico de emissão da estrela, teremos o seu comprimento de onda máximo e assim descobrir a sua temperatura ou vice-versa, a ideia da Lei de Wien é pouco complicada, o que pode dificultar nas questões é como serão obtidos o valor de um para conseguir o outro. Podendo variar entre análise fotométrica ou até mesmo efeito Doppler.

$$b = \lambda T$$

### Exemplo 47: Lei de Wien

Para o Sol,  $\lambda_{max} = 5100\text{\AA}$  e para a Estrela do Norte,  $\lambda_{max} = 3500\text{\AA}$ . Encontre a temperatura da superfície das estrelas e indique se está ou não no visível.

### Solução 47

Usando a Lei de Wien, chegamos em:

$$T_{\odot} = \frac{2,9 \times 10^6}{5100} \rightarrow T_{\odot} \approx 5700 \text{ K}$$

Para a Estrela do Norte ( $\lambda_{max} = 3500 \text{ \AA}$ ):

$$T_{norte} = \frac{2,9 \times 10^6}{3500} \rightarrow T_{norte} \approx 8300 \text{ K}$$

Ambos os picos estão no **visível** (Sol → amarelo, Estrela do Norte → azul-branco)

De forma similar também é possível obtermos a equação de Rayleigh-Jeans, entretanto como a visão a partir da nossa visualização física do processo de criação, podemos largar tais métodos e visar na aplicação para a astronomia e tendo em vista isso podemos nos desvincular da lei de Rayleigh-Jeans e focarmos de forma mais exclusiva com as equações de Planck e de Wien.

Entretanto para os leitores mais assíduos fica como teste a derivação da lei de Rayleigh-Jeans a partir da equação de Planck.

**Dica:** utilize a aproximação da série de Taylor para  $e^x$ .

#### 4.2.3 Stefan-Boltzmann

A lei de Stefan Boltzmann foi descrita por nós como a radiação total emitida por um corpo negro e também indicamos que estrelas podem ser tratadas com certa similaridade aos corpos negros, entretanto para casos não tão convenientes onde um corpo é distinto de um corpo negro, deve haver um trabalho maior com aquela equação e já que estrelas são corpos reais e não hipóteses científicas como o corpo negro essas pequenas interferências na teoria e na equação descreverão ainda mais perfeitamente as estrelas.

Inicialmente demonstremos apartir da equação de Planck que é nossa verdade fundamental agora, que a equação de Stefan-Boltzmann está correta e o valor de sua constante.

Retornando ao pensamento primordial, temos que:

$$R_T = \int_0^\infty R(v) dv$$

$$R_T = \int_0^\infty \frac{2\pi h}{c^2} \frac{v^3}{e^{\frac{hv}{k_B T}} - 1} dv$$

Modificando a variável por  $x$

$$x = \frac{hv}{k_B T} \iff \frac{k_B T}{h} \cdot x = v$$

Ao diferenciar em ambos os lado teremos:

$$dx = \frac{h}{k_B T} dv \iff \frac{k_B T}{h} dx = dv$$

Substituindo os valores, ficamos com

$$R_T = \frac{2\pi h}{c^2} \left( \frac{k_B T}{h} \right)^4 \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx \quad (4.10)$$

Essa integral é resolvível, entretanto é apenas uma ideia matemática, sendo algo dispensável para os requisitos físicos da astronomia, portanto iremos apenas colocar o seu resultado.

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15} \quad (4.11)$$

Substituindo a equação 4.11 na 4.10 obteremos a seguinte expressão:

$$R_T = \frac{2\pi h}{c^2} \left( \frac{k_B T}{h} \right)^4 \frac{\pi^4}{15}$$

Isolando a temperatura a quarta potência na expressão a direita da igualdade obteremos

$$R_T = \frac{2\pi k_B^4 \pi^4}{c^2 h^3 15} \cdot T^4$$

Dessa maneira encontramos novamente a equação de Stefan-Boltzmann descrita como:

$$R_T = \sigma \cdot T^4 \quad (4.12)$$

Onde  $\sigma$  é descrito desta forma:

$$\frac{2\pi k_B^4 \pi^4}{c^2 h^3 15} = \sigma$$

Como  $\sigma$  é dado por valores de constantes físicas, agora nos resta somente substituir seus valores e obter que:

$$\sigma \approx 5,67 \times 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$$

Entretanto a equação 4.12 só descreve corpos considerados corpos negros, retrabalhemos como será descrita a equação da radiação emitida. Ao primeiro ponto de vista, nós sabemos que a intensidade pode ser descrita por:  $R \propto \sigma T^4$ , porém nos falta agora para validarmos essa equação para qualquer tipo de corpo uma nova constante que é conhecida por  $e$ , ou emissividade, uma grandeza adimensional que depende somente das características intrínsecas a superfície do corpo, como por exemplo, formato, estado físico entre outros, podendo assumir valores entre 1 e 0, onde se  $e = 1$ , isso significa que esse corpo é um corpo negro.

Portanto a novas descrição que é válida para todo e qualquer corpo, independente de ser negro ou não, é:

$$R = e \sigma T^4 \quad (4.13)$$

Após a discussão sobre a identidade outro termo bastante utilizado na astronomia é a potência que é muito conhecida pelo nome de luminosidade aqui no Brasil. A Potência emitida por uma estrela é descrita como a energia total de radiação emitida pela superficial da mesma por tempo.

$$\therefore P = A \cdot R$$

$$P = A \cdot e \sigma T^4 \quad (4.14)$$

### 4.3 O fóton

Desde a antiguidade, a luz tem intrigado filósofos e cientistas. Hoje, sabemos que ela é uma forma de radiação eletromagnética e que, em certas condições, pode ser detectada por nossos olhos no espectro visível. Mas, afinal, o que é luz? Essa pergunta nos leva a um dos pilares da física moderna: os fótons.

No século XIX, James Clerk Maxwell demonstrou que a luz era uma onda eletromagnética, cuja velocidade,  $c$ , é determinada por duas constantes fundamentais: a permissividade elétrica ( $\epsilon_0$ ) e a permeabilidade magnética ( $\mu_0$ ) do vácuo. Essa relação é expressa matematicamente como:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 299\,792\,458 \text{ m/s} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

Porém, no início do século XX, experimentos como o efeito fotoelétrico desafiaram a visão da luz como uma simples onda. Foi então que Max Planck introduziu uma ideia revolucionária: a luz também se comporta como uma partícula. Nascia, assim, o conceito de fóton.

O fóton é uma partícula elementar que representa o menor "pacote" ou *quantum* de energia associado à radiação eletromagnética. Ele possui propriedades notáveis, como massa de repouso nula e carga elétrica nula, o que o torna uma entidade única no mundo da física. Sua energia é diretamente proporcional à frequência ( $f$ ) da radiação, sendo descrita pela relação fundamental:

$$E = hf$$

Essa quantização de energia explica diversos fenômenos da física moderna, como o efeito fotoelétrico, em que fótons interagem com materiais, transferindo sua energia para liberar elétrons. Além disso, o fóton não apenas carrega energia, mas também momento, sendo descrito como uma partícula sem massa que ainda assim pode exercer força e transmitir impulso.

### Ideia 18: Partícula sem massa? Que carteação é essa?

Antes de compreendermos por que o fóton não tem massa, precisamos esclarecer o próprio conceito de massa. Quando aplicamos uma força  $F$  a um corpo, sua velocidade pode ser continuamente aumentada, conforme descrito pela Segunda Lei de Newton:

$$F = m\dot{v}$$

No entanto, segundo a Teoria da Relatividade, à medida que um corpo se aproxima da velocidade da luz no vácuo, torna-se progressivamente mais difícil acelerá-lo. Isso ocorre porque a velocidade da luz representa um limite fundamental, impossível de ser ultrapassado. Esse fenômeno indica que a inércia do corpo aumenta com sua velocidade. Em outras palavras, quanto mais rápido ele se move, maior será sua resistência a novas variações de movimento. Como a massa é justamente uma medida dessa resistência, corpos mais massivos são naturalmente mais difíceis de acelerar. Se um corpo pudesse atingir exatamente a velocidade da luz, sua massa tenderia ao infinito, tornando qualquer aceleração adicional impossível.

Para levar esse efeito em consideração, definimos a **massa relativística**  $m$ , dada pela relação:

$$m = \gamma m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

onde  $m_0$  é a **massa de repouso** do corpo, e  $\gamma$  é o **fator de Lorentz**, que quantifica o impacto da velocidade na massa do corpo.

Podemos agora analisar a energia total de um corpo, que se divide em duas componentes principais: a **energia de repouso** e a **energia cinética**. A famosa equação de Einstein,  $E_r = m_0 c^2$  expressa a energia de repouso de um objeto. A partir dela, podemos reescrever a massa de repouso como:

$$m_0 = \frac{E_r}{c^2}$$

Aqui entra um ponto crucial: segundo a Teoria da Relatividade, a velocidade da luz  $c$  é uma constante universal e independe do referencial adotado. Mesmo que um objeto esteja viajando a 99% da velocidade da luz ( $0,99c$ ), qualquer fóton emitido por ele ainda será observado como se movendo a  $c$ . Isso significa que não há um referencial no qual um fóton esteja em repouso. Se um objeto não pode estar em repouso, sua energia de repouso deve ser zero:

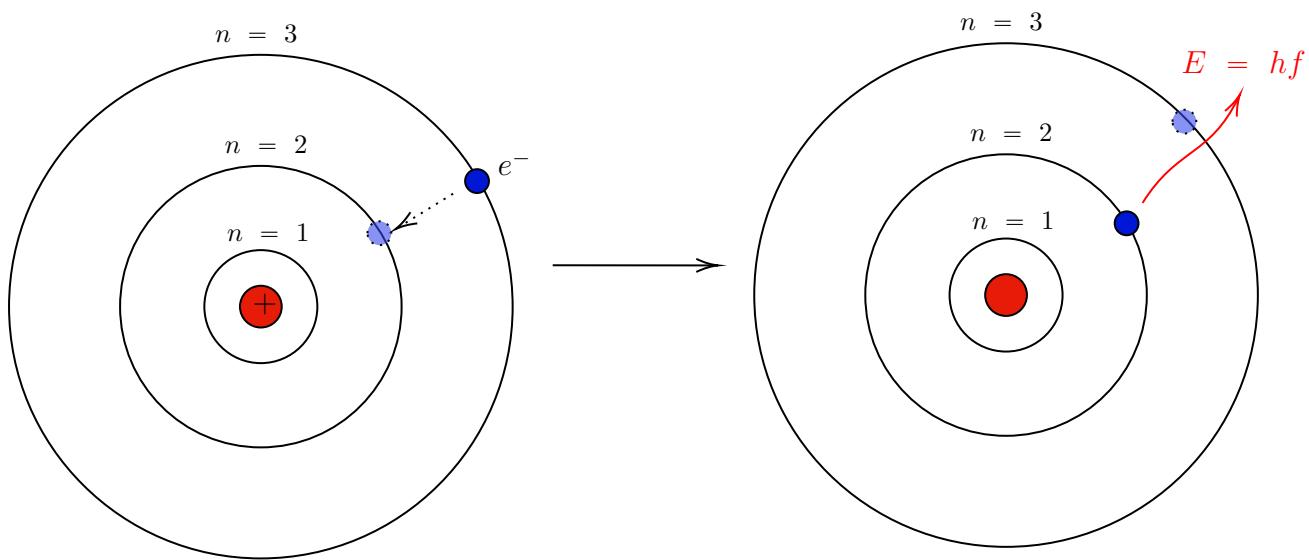
$$E_r = 0$$

Utilizando a relação  $m = \frac{E_r}{c^2}$ , concluímos que o fóton possui **massa de repouso igual a zero**:

$$m_f = 0$$

Essa característica é fundamental para o comportamento do fóton, permitindo que ele se move sempre à velocidade da luz e atue como mediador das interações eletromagnéticas. Se ele tivesse massa de repouso diferente de zero, não poderia viajar a  $c$ , o que violaria as leis da Relatividade.

Agora que compreendemos o fóton, podemos aprofundar nosso entendimento sobre como essas partículas fundamentais interagem com a matéria e influenciam a estrutura dos átomos. A quantização da energia, proposta por Max Planck e posteriormente desenvolvida por Albert Einstein ao explicar o efeito fotoelétrico, introduziu a ideia de que a luz e outras formas de radiação eletromagnética são compostas por pequenos pacotes de energia chamados fótons. Esse conceito foi essencial para o avanço da física moderna e teve um impacto direto na formulação do modelo atômico de Niels Bohr. No modelo de Bohr, os elétrons orbitam um núcleo positivamente carregado em trajetórias circulares bem definidas, associadas a níveis discretos de energia. Diferentemente dos modelos anteriores, que pressupunham que os elétrons poderiam assumir qualquer valor de energia, Bohr demonstrou que a transição entre esses níveis ocorre exclusivamente por meio da emissão ou absorção de fótons com uma energia correspondente à diferença entre os estados inicial e final do elétron. Esse mecanismo explica fenômenos como os espectros de emissão e absorção dos elementos, permitindo uma compreensão mais profunda da estrutura da matéria e servindo de base para o desenvolvimento da mecânica quântica. Um exemplo desse processo é ilustrado na imagem abaixo, onde um elétron decai do nível 3 para o nível 2, liberando a diferença de energia na forma de um fóton:



Isso é intuitivo de compreender: se um fóton atinge um elétron e transfere energia para ele, é natural que o elétron se excite e passe para um nível de energia mais alto. Ou seja, a absorção de um fóton fornece energia ao elétron, elevando seu nível energético. O mesmo ocorre no processo inverso: quando o elétron retorna a um nível mais baixo, a energia excedente é liberada na forma de um fóton.

#### Exemplo 48:

A figura abaixo mostra o espectro de emissão do gás neônio. Se a temperatura do gás for aumentada, observar-se-á:



- (a) Não haverá mudança no espectro
- (b) Menos linhas vermelhas e mais azuis
- (c) Mais linhas vermelhas
- (d) Linhas de absorção fracas

#### Solução 48:

**A.** O espectro de emissão de um gás como o neônio é característico dos seus níveis de energia eletrônica. Cada elemento químico tem níveis de energia fixos, e os fótons emitidos correspondem às transições eletrônicas entre esses níveis. A temperatura pode influenciar a quantidade de átomos excitados, mas não alterar as energias dos níveis eletrônicos do átomo. Como as transições ocorrem sempre entre os mesmos níveis, os comprimentos de onda emitidos continuam os mesmos, e o espectro de emissão não muda qualitativamente. O que pode acontecer é um aumento na intensidade das linhas devido ao maior número de átomos excitados, mas as cores e posições das linhas não mudam.

## Extra: Aprofundamento do modelo atômico de Bohr

O modelo atômico de Bohr foi desenvolvido para explicar os espectros de emissão dos átomos, combinando ideias da mecânica clássica com a quantização da energia. Seus principais postulados afirmam que:

- Os elétrons orbitam o núcleo em trajetórias circulares sem irradiar energia.
- O momento angular dos elétrons é quantizado, assumindo valores múltiplos de  $\hbar$  (constante de Planck reduzida):  $L = n\hbar$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$
- Os elétrons podem transitar entre esses níveis ao absorver ou emitir fótons, cuja energia é dada por:  $E_f - E_i = hf$  onde  $h$  é a constante de Planck e  $f$  é a frequência da luz emitida ou absorvida.

A estabilidade das órbitas no modelo de Bohr é explicada pelo equilíbrio entre duas forças opostas:

- A **força eletrostática**, que atrai o elétron em direção ao núcleo devido à interação com a carga positiva do próton.
- A **força centrípeta**, que mantém o elétron em movimento circular ao redor do núcleo.

Essa relação pode ser expressa pela equação:

$$\frac{ke^2}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$$

Onde  $k$  é a constante eletrostática de Coulomb,  $e$  é a carga do elétron,  $m$  é sua massa,  $v$  é sua velocidade e  $r$  é o raio da órbita.

Utilizando a quantização do momento angular ( $mvr = n\hbar$ ), podemos substituir  $v = \frac{n\hbar}{mr}$  e encontrar os raios das órbitas permitidas:

$$r_n = n^2 a_0, \quad a_0 = \frac{\hbar^2}{m k e^2}$$

Onde  $a_0$  é o **raio de Bohr**, que representa a menor órbita possível para o elétron no átomo de hidrogênio. A energia total do elétron é composta pela soma da energia cinética ( $K$ ) e da energia potencial ( $U$ ):

$$E = K + U = \frac{ke^2}{2r} - \frac{ke^2}{r} = -\frac{ke^2}{2r}$$

Substituindo  $r_n = n^2 a_0$ , obtemos a equação para os níveis de energia:

$$E_n = \frac{E_0}{n^2}, \quad E_0 = -\frac{ke^2}{2a_0} \approx -13.6 \text{ eV}$$

### Ideia 19: CCD e Eficiência Quântica

Para captar e estudar a luz, utilizamos o CCD (Charge-Coupled Device), um sensor eletrônico capaz de detectar radiação luminosa, sendo amplamente empregado em câmeras digitais, telescópios e espetrômetros.

O funcionamento desse dispositivo baseia-se no **efeito fotoelétrico**, no qual fôtons de luz atingem uma matriz de pixels sensíveis, gerando cargas elétricas proporcionais à intensidade da luz incidente. Essas cargas são então transferidas e convertidas em sinais digitais, formando uma imagem.

Entretanto, nem todos os fôtons incidentes são efetivamente captados e registrados na imagem. Assim, definimos a **eficiência quântica**  $Q$  de um sensor como a razão, expressa em porcentagem, entre o número de fôtons detectados e o número total de fôtons incidentes:

$$Q = \frac{N_{\text{detectados}}}{N_{\text{incidentes}}}$$

Essa eficiência varia com o comprimento de onda da luz, pois certos materiais absorvem melhor determinados tipos de radiação. Por exemplo, CCDs padrão possuem baixa eficiência no ultravioleta. Em astronomia e espectroscopia, sensores com alta eficiência quântica são fundamentais para detectar luz fraca proveniente de estrelas e galáxias distantes.

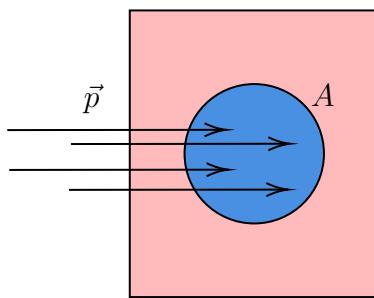
Agora que já entendemos o conceito de fôtons, uma dúvida natural pode surgir: eles não têm massa, mas ainda assim possuem momento, certo? Sim! Vamos explorar isso em mais detalhes na próxima seção. Por ora, vale destacar um fato curioso: apesar de não terem massa, os fôtons carregam momento. Isso tem uma consequência interessante—quando um feixe de fôtons incide sobre uma superfície, ele exerce uma pressão  $P$ , definida como:

$$P = \frac{F}{A}$$

Onde  $F$  é a força aplicada e  $A$  é a área sobre a qual essa força atua. Como essa pressão é resultado da interação dos fôtons com a superfície, ela é conhecida como **pressão de radiação**. Para visualizar esse efeito de maneira qualitativa, imagine um fluxo de fôtons colidindo com uma parede. Durante a colisão, os fôtons transferem uma parte do seu momento  $\vec{p}$  para a superfície. De acordo com a segunda lei de Newton:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Essa variação do momento ao longo do tempo gera uma força  $\vec{F}$ , que, distribuída sobre a área  $A$ , resulta na pressão de radiação:



Agora que já entendemos qualitativamente o que ocorre no fenômeno, iniciaremos a dedução da pressão de radiação quantitativa de forma simplificada, desconsiderando qualquer tipo de albedo  $\alpha$  ou inclinação dos feixes incidentes.

A energia total de um corpo relativístico é dada pela equação de Einstein:

$$E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$$

onde  $E$  é a energia total,  $p$  é o momento linear,  $c$  é a velocidade da luz e  $m$  é a massa do corpo.

Para um fóton, como citamos na ideia 3, a energia de repouso é nula ( $E_r = 0$ ), pois ele nunca pode estar em repouso, logo a equação é reduzida para:

$$E = pc$$

Como buscamos expressar a pressão, que está diretamente relacionada à força, utilizamos a segunda lei de Newton na forma geral:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Substituindo a relação acima na definição de pressão  $P = \frac{F}{A}$ :

$$P = \frac{dp}{A \cdot dt}$$

A partir da relação  $E = pc$ , diferenciamos ambos os lados e, como  $c$  é constante, encontramos:

$$dp = \frac{dE}{c}$$

Substituindo essa expressão na equação da pressão:

$$P = \frac{dE}{A \cdot c \cdot dt}$$

A luminosidade  $L$  é definida como a taxa de variação da energia:

$$L = \frac{dE}{dt}$$

Substituindo na equação anterior:

$$P = \frac{L}{A \cdot c}$$

Por fim, como o fluxo de energia é definido por  $F = \frac{L}{A}$ , obtemos a equação fundamental da pressão de radiação:

$$P = \frac{F}{c}$$

Agora que você sabe os conceitos principais envolvidos no fenômeno, para aprender a dedução de um caso generalizado com albedo e inclinação dos feixes, resolva o seguinte exemplo:

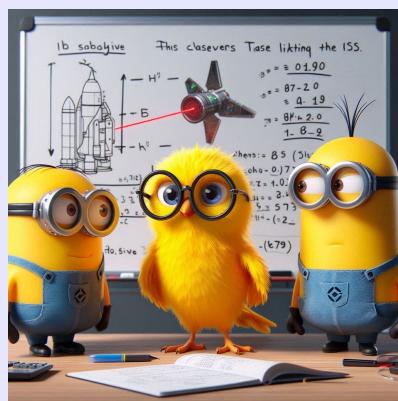
### Exemplo 49: Olympic Birds - Semana 3

Os Minions estão de volta em grande estilo no filme "Meu Malvado Favorito 4". Desta vez, Kevin, Stuart e Bob têm um plano audacioso: destruir a Estação Espacial Internacional (ISS) e iniciar uma nova corrida espacial. Para realizar essa missão, eles estão se dedicando a calcular a potência necessária de um laser capaz de causar o caos na ISS.



Gru acabou ouvindo a conversa e sugeriu que, para destruir a ISS, a pressão da radiação do laser precisaria ser maior do que a pressão que as paredes da estação podem suportar. No entanto, ele não pôde ajudar mais, pois precisava cuidar de algumas coisas para suas filhas.

Infelizmente, os Minions não possuem conhecimento suficiente de física para elaborar esse plano sozinhos. Por isso, eles recorreram a você, o Pássaro Olímpico, para ajudá-los nessa missão.



a) Considerando que o laser incide na nave com um ângulo  $\gamma$  em relação à normal, que a atmosfera é equivalente a uma fina camada com albedo  $\beta$ , que o albedo da parede da nave é  $\alpha$ , que o albedo do solo terrestre é 0, que a densidade volumétrica de fôtons é  $\eta$ , que o momento médio de um fóton é  $\bar{p}$ , e que a área atingida na nave é  $A$ . Em função desses parâmetros, determine a variação de momento  $dp$  na colisão dos fôtons com a nave em um intervalo  $dt$ .

**Aviso:** Não entendeu nada? Tente com as dicas abaixo ou leia o gabarito, entenda-o e resolva o problema dias depois para relembrar. Este é um exemplo mais para aprender do que para te testar!

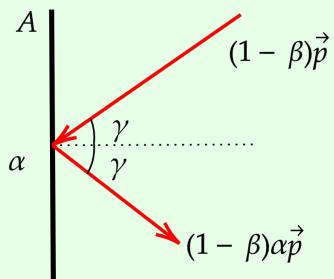
**Dicas:**

- Esquematize a situação, os vetores momento e os devidos ângulos.
- Identifique qual componente do momento que causa força na parede.
- Encontre a variação do momento para apenas um fóton.
- Encontre o número de fôtons que incidem num intervalo de tempo.

b) Manipule a expressão anterior e encontre a potência do laser em função da pressão máxima que a parede suporta  $P_{max}$  e de  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $A$ .

### Solução 49: Minions em: A destruição da ISS

a) Observe que a luz incide com o ângulo  $\gamma$ , conforme mencionado no enunciado. Primeiramente, considerando que a atmosfera possui um albedo  $\beta$ , parte da potência do laser emitido é refletida de volta e não alcança a ISS devido à atmosfera. Além disso, como o albedo do solo terrestre é zero, não ocorrem reflexões simultâneas entre a atmosfera e o solo. Dessa forma, a potência incidente na nave é dada por  $(1 - \beta)P_{emitida}$ , e o momento transferido também segue essa relação linear. Podemos sintetizar a situação pela seguinte figura:



Após a "colisão", a potência refletida, que causa uma força na nave, deve levar em conta o albedo da parede  $\alpha$ . Por fim, perceba que o único momento que exercerá força na parede da nave é aquele na direção normal. Sendo  $\bar{p}$  o momento médio de um fóton e  $dN$  o número infinitesimal de fôtons que atingem a parede em um intervalo  $dt$ , a variação de momento é:

$$dp = (1 - \beta)\bar{p} \cos \gamma dN - (-\alpha(1 - \beta)\bar{p} \cos \gamma dN)$$

$$dp = (1 + \alpha)(1 - \beta)\bar{p} dN \cos \gamma$$

O número infinitesimal de fôtons  $dN$  que atingem a parede pode ser expresso em função da densidade volumétrica de fôtons  $\eta$ , da área da parede  $A$ , da velocidade da luz  $c$  e do intervalo de tempo  $dt$ :

$$dN = \eta A c dt$$

Assim, a variação do momento pedida é:

$$dp = (1 + \alpha)(1 - \beta)\bar{p}\eta A c dt \cos \gamma$$

b) Manipulando a expressão:

$$\frac{dp}{A \cdot dt} = (1 + \alpha)(1 - \beta)\bar{p}\eta c \cos \gamma$$

Encontramos que a pressão  $P$  é:

$$P = (1 + \alpha)(1 - \beta)\bar{p}\eta c \cos \gamma$$

No entanto, agora, para expressar a pressão  $P$  em função das variáveis do problema, analisaremos o fluxo de fôtons:

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{1}{A} \frac{dN}{dt} \\ \phi &= \eta c\end{aligned}$$

Com o fluxo de fôtons determinado, podemos expressar o fluxo de energia  $F$  em função da energia média de um fôton  $\bar{\varepsilon}$ :

$$F = \phi \bar{\varepsilon}$$

$$F = \eta c \bar{\varepsilon}$$

Sabendo que  $\bar{\varepsilon} = \bar{p}c$ :

$$\begin{aligned}F &= \eta \bar{p} c^2 \\ \eta \bar{p} c &= \frac{F}{c}\end{aligned}$$

Substituindo isso na expressão para a pressão, obtemos:

$$P = (1 + \alpha)(1 - \beta) \cos \gamma \frac{F}{c}$$

Relembrando que o fluxo é  $F = \frac{L}{A}$ :

$$P_{max} = (1 + \alpha)(1 - \beta) \cos \gamma \frac{L}{Ac}$$

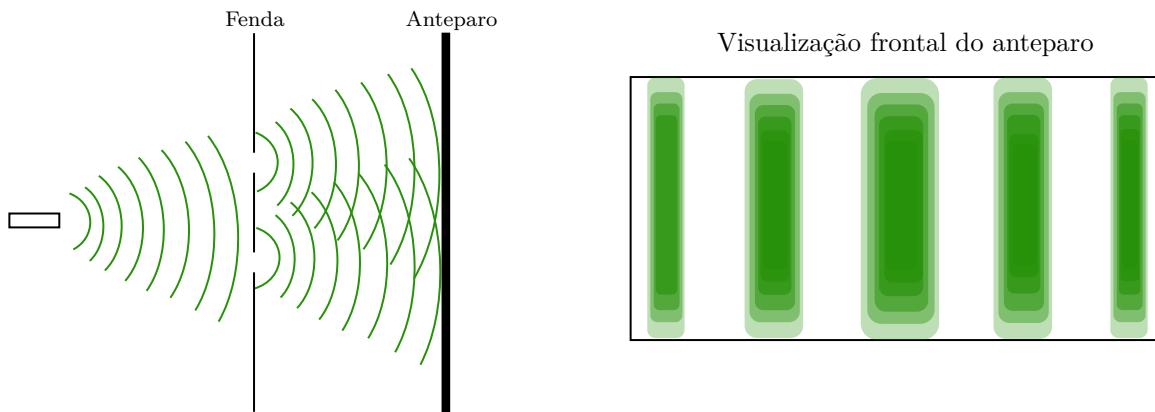
Descobrimos a potência:

$$L = \frac{P_{max} Ac}{(1 + \alpha)(1 - \beta) \cos \gamma}$$

## 4.4 Dualidade onda-partícula

### 4.4.1 Comportamento da luz

No subcapítulo anterior discutimos sobre o fóton, que é a representação particular da luz, entretanto como também já afirmamos a luz não foi sempre tratada como uma partícula, em verdade ela era tratada como uma onda até algumas décadas atrás, por cientistas muito importantes, como Maxwell que descreveu a luz em seu conjunto de equações com propriedades ondulatórias, equações essas que são os pilares do eletromagnetismo até os dias de hoje, além de Maxwell, existe um outro cientista que realizou um experimento que demonstrou as características ondulatórias da luz, Thomas Young muito conhecido pelo seu experimento de dupla fenda, onde apesar da ideia de que a luz formaria uma simplesmente duas áreas iluminadas no anteparo, o que o experimento mostrou foi um padrão de organização muito estranho para o imaginário da luz como partícula, pois a luz apresentava o seguinte padrão de formação.



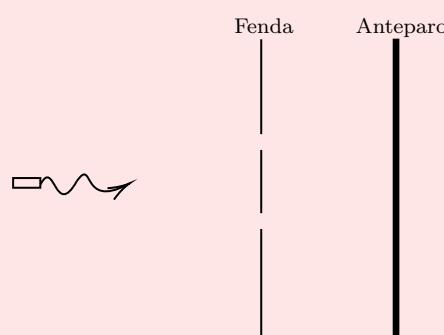
Com um pico de intensidade na franja central, e as franjas seguintes com redução gradual de intensidade.

#### Ideia 20: Experimento da dupla fenda

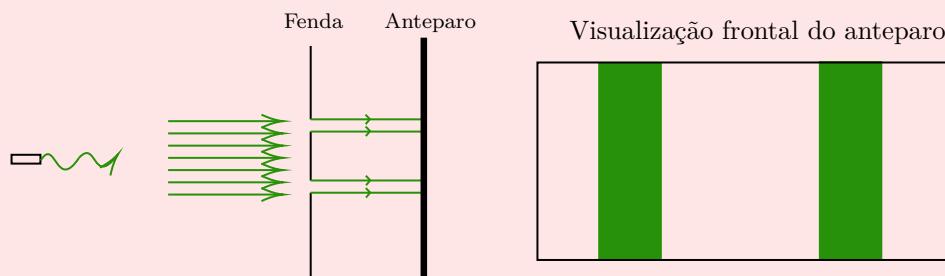
Esse experimento serve como método para determinar o comportamento de um objeto do mundo microscópico, pois diferente do mundo macro, que nós conseguimos perceber com nossos 5 sentidos, o micro não é de tão fácil acesso assim para a nossa percepção limitada.

O experimento de dupla é composto pelos seguintes aparatos:

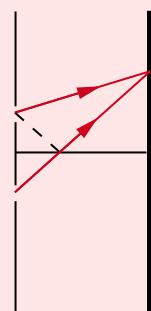
- Fonte de luz monocromática
- Duas fendas muito pequenas e próximas.
- Anteparo



Onde o que for lançado e passar pela dupla fenda criará uma imagem no anteparo e a depender do padrão formado no mesmo, poderemos distinguir se aquilo que foi jogado é uma partícula ou uma onda. Quando o que for lançado dentro da fenda for partícula tenderá a formar um padrão no anteparo visualizado como algo similar a duas listras sólidas como na imagem abaixo, isso ocorre quando as partículas vierem perpendicular as fendas, caso contrario haverá outro padrão de imagem, mas que dispensaremos por agora.

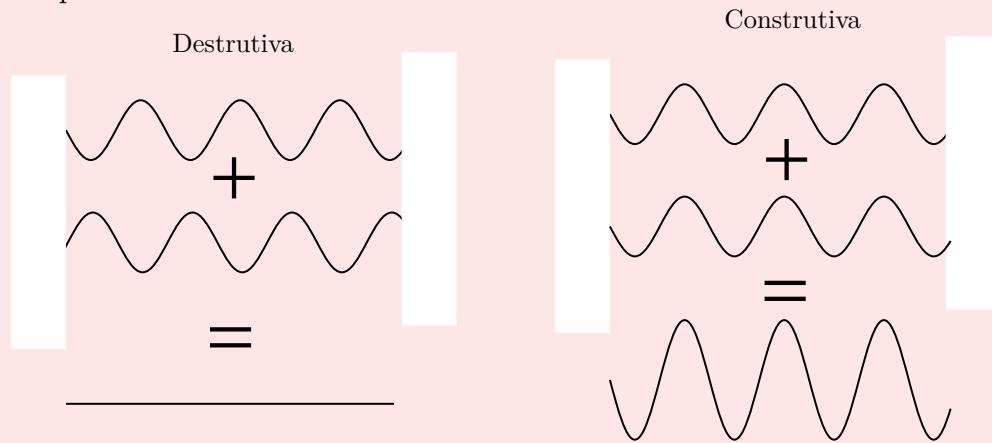


Já quando uma onda for lançada em direção as fendas, obteremos um padrão distinto, isso por conta dos distintos caminhos que a onda que se iniciou na fenda de cima e a de baixo realizaram, o que ocasiona uma diferença de fase entre as duas ondas geradas.



Essa diferença nos faz com que as onda realizem interferência, sendo ela destrutiva em alguns pontos que são as chamadas franjas escuras, que na nossa imagem está destacada como as partes sem nenhuma coloração e as franjas claras, são onde há formação de imagem, que para nós é onde possui uma figura esverdeada.

As interferências destrutivas acontecem quando o vale de uma onda interfere com a crista da outra, já a construtiva quando duas cristas, ou dois vales se encontram, como esquematizado abaixo.



Apesar dessas comprovações a luz ser tratada como onda nos causava alguns problemas como na descrição do corpo negro, onde como vimos a única forma de solucionar esse problema foi quando Planck "decidiu" por um simples ato de desespero quantizar a luz, mostrando que a matemática do problema só seria resolvida quando a luz era tratada como algo subdividido em pacotes de energia, os conhecidos fótons, a partícula da luz. Portanto na época em que esse teoria, muito bem aceita no meio científico atual, e o experimento de Young, que também é sabido da sua veracidade, se encontraram existia uma grande dúvida, afinal o que é a luz que vemos todos os dias de nossa vida, do que ela é realmente feita.

Entretanto como ambos estavam corretos e como um era experimental e o outro uma teoria que se baseava em gráficos e dados experimentais, para a física que é uma ciência essencialmente experimental(já que seu objetivo é compreender o mundo em que vivemos), a única opção que restou como análise física para tais experimentos tão contraditórios, estavam juntamente corretos e que ambos descreviam parcialmente as características da luz, ou seja a luz se comporta tanto como onda, como partícula.

#### 4.4.2 Hipótese de de Broglie

Louis de Broglie, propôs em sua tese de doutorado que o dualismo onda-partícula, não seria um caso especial na natureza para a radiação eletromagnética, pois até então era conhecida e tratada somente as mesmas, contudo para esse francês o dualismo se referia a toda matéria no universo, em especial os elétrons.

Essa teoria de de Broglie foi a base para as ideias de Schrödinger e foi comprovada experimentalmente utilizando o mesmo experimento de dupla fenda, que foi utilizado para comprovar as características

ondulatórias da luz, porém apesar de feixes de luz, foram utilizados feixes de elétrons e tudo correu de acordo com a teoria de De Broglie, onde os feixes de elétrons geraram um padrão de interferência assim como ondas se comportariam no mesmo experimento.

### Ideia 21: Igualdade momento x frequência

De Broglie desenvolveu algumas das equações dadas pela relatividade de Einstein, mostrando que elas eram válidas para partículas com massa de repouso diferente de zero. Onde a energia da partícula pode ser descrita como:

$$E = hf$$

Ou também:

$$E = pc$$

Igualando as duas formas de descrever a energia obtemos a seguinte equação:

$$\begin{aligned} pc = hf &\implies p = h \cdot \frac{f}{c} \\ p = \frac{h}{\lambda} &\longleftrightarrow p = \frac{h}{2\pi} \cdot \frac{2\pi}{\lambda} = \hbar \cdot k \end{aligned} \quad (4.15)$$

Através dessa equação notasse a proporcionalidade entre momento linear, uma característica corpuscular e comprimento de onda, propriedade ondulatória. Portanto através da equação 4.15 é possível correlacionar as duas interpretações da partícula, utilizando cada uma de acordo com a necessidade e com as instruções das questões.

### Exemplo 50

Qual é o comprimento de onda de uma bola de pingue-pongue de 2,0 g ao ser rebatida com uma velocidade de 5 m/s?

### Solução 50

Usamos a equação de De Broglie:

$$\lambda = \frac{h}{mv}$$

Substituindo os valores:

$$\lambda = \frac{6,63 \times 10^{-34}}{(2,0 \times 10^{-3}) \times 5}$$

$$\boxed{\lambda = 6,63 \times 10^{-32} \text{ m}}$$

## 4.5 Problemas

**(T1 2024)** Em relação à radiação e à lei de Planck para a radiação, marque verdadeiro ou falso, e justifique com uma ou duas frases:

A fórmula para a lei de Planck para a radiação pode ser útil:

$$B(\nu, T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

- (a) Sabemos que para um corpo negro (uma estrela idealizada) de temperatura T, o comprimento de onda no qual temos maior intensidade específica é  $\lambda_{max} = b/T$ . Assim, podemos concluir que a frequência na qual temos maior intensidade específica é  $\nu_{max} = c/\lambda_{max}$ , onde c é a velocidade da luz no vácuo.
- (b) Se aumentarmos a temperatura do corpo negro, a intensidade específica aumenta para todos os comprimentos de onda.
- (c) Se aumentarmos a temperatura do corpo negro, a intensidade específica aumenta para todas as frequências.
- (d) Para altas energias, a lei de Planck para a radiação pode ser aproximada pela aproximação de Rayleigh-Jeans,  $B(\nu, T) = 2\nu^2 k_B T / c^2$ , onde  $k_B$  é a constante de Boltzmann.
- (e) Para altas energias, a lei de Planck para a radiação pode ser aproximada pela aproximação de Wien,  $B(\nu, T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} e^{-h\nu/k_B T}$ , onde h é a constante de Planck não reduzida.

## 4.6 Solucionário

### Problema 1

- (a) Falso. Outra distribuição deve ser obtida para a frequência, e a partir disso, se obtém uma expressão para a moda dessa distribuição.
- (b) Verdadeiro. Ao aumentar o T, a fração  $h\nu/kT$  vai diminuir, levando uma diminuição da expressão  $e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1$  e ao aumento do seu inverso, o que vai aumentar também a intensidade específica para qualquer  $\nu$ .
- (c) Verdadeiro. Como visto anteriormente, aumentar a temperatura resulta em um aumento da intensidade específica, independente da frequência ou comprimento de onda.
- (d) Falso. Essa aproximação só funciona para baixas energias. Como  $E = h\nu$ , quando a energia é baixa,  $e^{\frac{h\nu}{kT}} \approx 1 + \frac{h\nu}{kT}$ , de forma que a fórmula se aproxima da apresentada.
- (e) Verdadeiro. Como  $E = h\nu$ , para altas energias,  $e^{\frac{h\nu}{kT}} \gg 1$ , de forma que o 1 fica desprezível e a fórmula se aproxima da apresentada.

## 5 Fotometria

### 5.1 Fluxo

No último capítulo, vimos como determinar a luminosidade de uma estrela—ou seja, a potência (energia por segundo) que ela emite—usando a **lei de Stefan-Boltzmann**:  $L = A\sigma T^4$

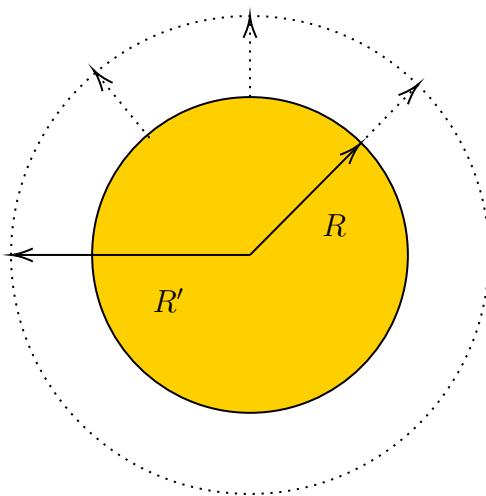
Sabemos que as estrelas são aproximadamente esféricas, com raio  $R$ . Assim, sua área superficial é  $4\pi R^2$ , o que nos dá a luminosidade como:

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4$$

Mas o que isso significa para quem observa a estrela? Pense em um farol de carro: quanto mais perto você estiver, mais intensa será a luz. Esse brilho percebido é chamado de **fluxo**, que basicamente mede quanta energia chega a uma determinada área. Definimos o fluxo como:

$$F = \frac{L}{A'}$$

Supondo que a estrela emite luz igualmente em todas as direções, ou seja, é **isotrópica**, a energia se espalha sobre a superfície que tem o mesmo formato que a estrela, uma esfera. Logo, se você estiver a uma distância  $R'$ , a luz que chega em você é a luz que saiu da estrela e se distribui em uma área  $A' = 4\pi R'^2$



#### Lembrete 20: Por que existem as áreas $A$ e $A'$ ?

Enquanto a área  $A$  representa a própria superfície da estrela—usada na lei de Stefan-Boltzmann para calcular sua luminosidade a partir da temperatura  $T$ , assumindo um comportamento semelhante ao de um corpo negro—a área  $A'$  está relacionada a um observador a uma distância  $R'$ . Como a estrela emite luz de forma isotrópica, essa radiação se espalha esfericamente ao seu redor. Portanto,  $A$  está ligada às propriedades intrínsecas da estrela, enquanto  $A'$  considera a relação entre a estrela e o observador.

Algo que você já deve ter visto no capítulo anterior é que, ao considerarmos o observador na superfície da própria estrela, ou seja,  $A = A'$ , obtemos que o fluxo é dado por  $F = \sigma T^4$ . Esse é um resultado interessante quando se pergunta qual é o fluxo da estrela e pode facilitar algumas contas.

A distribuição da luz em esferas pode ser entendida por meio do conceito de ângulo sólido. O maior ângulo sólido possível é  $\Omega_{\max} = 4\pi$  esterradianos, pois corresponde a toda a esfera ao redor da fonte emissora.

Se um observador com uma área receptora  $A_{\text{obs}}$  estiver a uma distância  $R'$ , o ângulo sólido correspondente a essa área será:

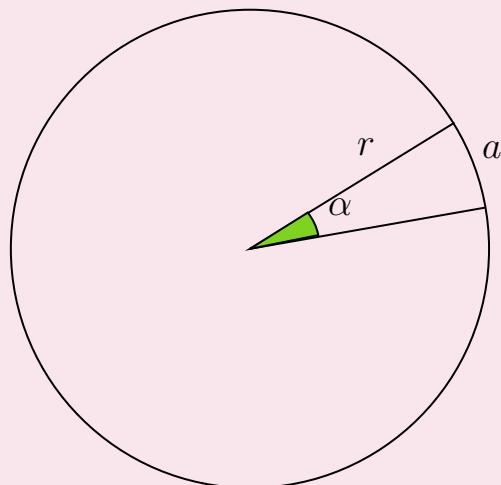
$$\Omega = \frac{A_{\text{obs}}}{R'^2}$$

Faz sentido, então, que a energia recebida seja proporcional à fração do ângulo sólido coberto pelo observador em relação ao ângulo sólido total. Assim, a energia recebida é dada por:

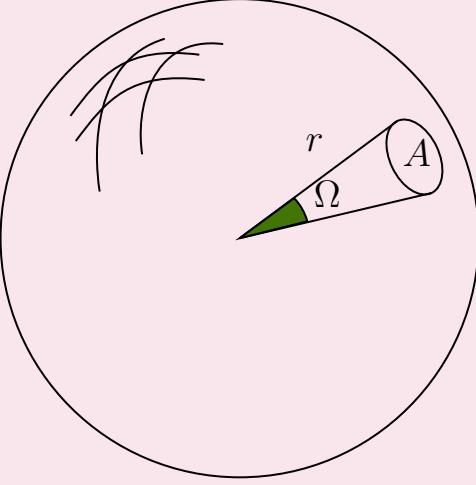
$$E_{\text{obs}} = L \cdot \frac{\Omega}{\Omega_{\max}}$$

### Lembrete 21: Ângulo Sólido

Assim como um ângulo plano está associado a um setor do círculo, sendo dado pela razão entre o comprimento do arco e o raio, o ângulo sólido está associado a um setor da esfera, sendo dado pela razão entre a área da superfície esférica e o quadrado do raio.



$$\alpha = \frac{a}{r}$$



$$\Omega = \frac{A}{r^2}$$

Substituindo os valores:

$$E_{\text{obs}} = L \cdot \frac{\frac{A_{\text{obs}}}{R'^2}}{4\pi}$$

$$E_{\text{obs}} = L \cdot \frac{A_{\text{obs}}}{4\pi R'^2}$$

Reorganizando, obtemos:

$$E_{\text{obs}} = \frac{L}{4\pi R'^2} \cdot A_{\text{obs}}$$

Como já sabemos que  $F = \frac{L}{4\pi R'^2}$  é o fluxo, podemos escrever:

$$E_{\text{obs}} = F \cdot A_{\text{obs}}$$

Sim, essa expressão é intuitiva e poderia ser compreendida sem tantos cálculos. No entanto, a analogia com o ângulo sólido é uma ferramenta útil para reforçar a ideia de que o fluxo nada mais é do que a energia que chega em um único ponto a uma distância  $R'$  de uma estrela com raio  $R$  e luminosidade  $L$ . Vamos conferir se tudo o que foi estudado até agora realmente está claro resolvendo um exercício que já caiu em Barra do Piraí.

### Exemplo 51: Barra do Piraí 2018 - Adaptada

Suponha que o que mata o vampiro não seja a luz do Sol, propriamente dita, mas o valor da irradiância ( $\text{W m}^{-2}$ ) que o atinge. Calcule a irradiância da luz do Sol refletida na Lua cheia que chega até nós.

**Dados:**

Raio da Lua ( $r_{\mathbb{C}}$ ) =  $1.74 \times 10^6 \text{ m}$

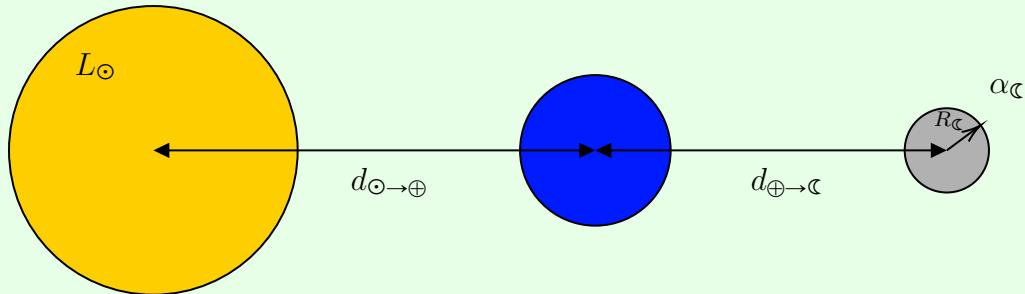
Distância média Terra-Lua ( $d_{\oplus-\mathbb{C}}$ ) =  $3.84 \times 10^8 \text{ m}$

Albedo da Lua ( $a_{\mathbb{C}}$ ) = 0,11

*Nota:* Albedo, ou coeficiente de reflexão, é a relação entre a quantidade de radiação refletida (luz) e a quantidade de radiação incidente.

### Solução 51

Podemos esquematizar a situação da Lua cheia:



Perceba que a Lua não é uma estrela capaz de emitir radiação. Na realidade, a luz que vemos dela é luz do Sol que foi refletida na superfície lunar. Por isso, antes de calcular o que chega à Terra, devemos determinar o que chega do Sol até a Lua e, a partir disso, calcular o que é refletido na Lua e chega efetivamente à Terra.

De acordo com a teoria que vimos até agora, sabemos que a energia que chega à Lua é dada por  $E_{\mathbb{C}} = F \cdot A_{\mathbb{C}}$ . No entanto, como nem toda a luz que chega à Lua é

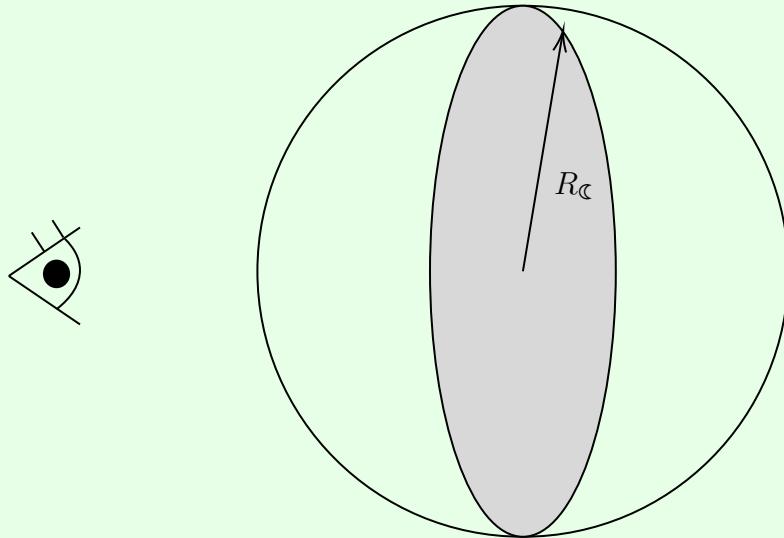
refletida, temos o fator de albedo, o qual modifica essa equação para:

$$E_{\mathbb{C}} = F \cdot A_{\mathbb{C}} \cdot \alpha_{\mathbb{C}}$$

Também sabemos que o fluxo nada mais é do que a luminosidade do Sol distribuída em uma esfera de raio  $d_{\odot \rightarrow \mathbb{C}} = d_{\odot \rightarrow \oplus} + d_{\oplus \rightarrow \mathbb{C}}$ :

$$F = \frac{L_{\odot}}{4\pi \cdot (d_{\odot \rightarrow \oplus} + d_{\oplus \rightarrow \mathbb{C}})^2}$$

Embora possa parecer que a área do observador seja a área de uma esfera com raio  $R_{\mathbb{C}}$ , isso está incorreto. O que realmente conta é a seção transversal, ou seja, uma circunferência, como ilustrado na figura abaixo. (Pense assim: quando você olha para a Lua, consegue distinguir a esfera?)



Logo, a área corresponde a uma circunferência de raio  $R_{\mathbb{C}}$ :

$$A_{\mathbb{C}} = \pi R_{\mathbb{C}}^2$$

Agora que já compreendemos tanto o fluxo quanto a área, podemos substituir na equação inicial e encontrar a energia que vem do Sol e chega à Lua:

$$E_{\mathbb{C}} = \frac{L_{\odot}}{4\pi \cdot (d_{\odot \rightarrow \oplus} + d_{\oplus \rightarrow \mathbb{C}})^2} \cdot \pi R_{\mathbb{C}}^2 \cdot \alpha_{\mathbb{C}}$$

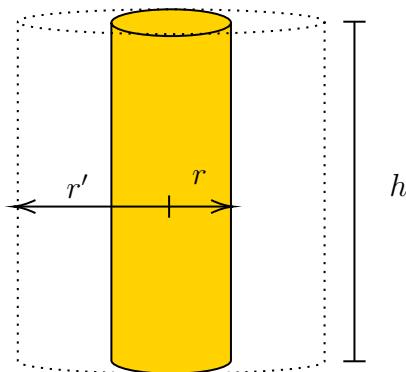
Agora, para analisar a energia que chega à Terra, basta encontrarmos o fluxo. (Perceba que não existe área de observador aqui, pois o enunciado não a descreveu. Logo, queremos a energia por área):

$$E_{\oplus} = \frac{E_{\mathbb{C}}}{4\pi(d_{\oplus \rightarrow \mathbb{C}})}$$

$$E_{\oplus} = \frac{L_{\odot}}{16\pi \cdot (d_{\odot \rightarrow \oplus} + d_{\oplus \rightarrow \mathbb{C}})^2} \cdot R_{\mathbb{C}}^2 \cdot \frac{\alpha_{\mathbb{C}}}{d_{\oplus \rightarrow \mathbb{C}}} = 7.65 \times 10^{-4} \text{ W/m}^2$$

Muito interessante! Conseguimos aprender o suficiente para determinar o fluxo de corpos esféricos. Porém, e quanto a corpos que não são necessariamente esféricos, como um cilindro? Será que algo muda?

Na realidade, desde que você consiga manter a área correta do corpo e respeitar a simetria dessa área, tudo estará de acordo. Por exemplo, considere uma estrela cilíndrica de altura  $h$ , raio  $r$  e temperatura  $T$ . Se você estiver a uma distância  $r'$  no eixo radial, teremos a seguinte situação:



Agora, sabendo que a área lateral do cilindro é o comprimento da base vezes a altura, podemos escrever a luminosidade da estrela cilíndrica como:

$$L = 2\pi rh\sigma T^4$$

Consequentemente, o fluxo  $F$  será:

$$F = \frac{L}{2\pi hr'}$$

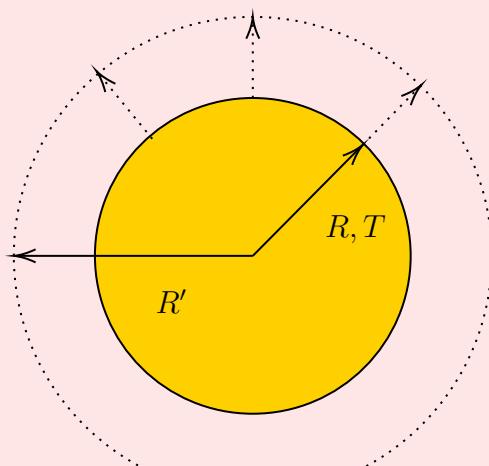
$$F = \frac{r}{r'} \cdot \sigma T^4$$

Existe uma outra abordagem sensacional para resolver problemas com geometrias diferentes, especialmente quando a situação parece impossível. Pense, por exemplo, em um cilindro de altura infinita em uma obra de ficção. Como você resolveria isso usando a área? Pois é, complica, não é? É por isso que podemos recorrer à seguinte ideia:

### Ideia 22: Conservação de energia

No cálculo do fluxo, buscamos determinar quanta energia pode alcançar um observador a uma determinada distância, considerando que a dispersão dessa energia segue o modelo do objeto emissor — no nosso caso, as estrelas. **É fundamental notar que a energia apenas se espalha, sem ser perdida ou dissipada**, o que nos leva à ideia de conservação de energia.

Observe que, ao se afastar da fonte de luz, a quantidade de energia recebida diminui, mas a área sobre a qual essa energia se distribui aumenta. Essa perspectiva pode ser útil na resolução de exercícios. Antes de permitir que o leitor explore essa ideia no Exemplo 2, vamos primeiro deduzir o resultado esperado com a seguinte abordagem. Para isso, consideremos a situação que vimos no início do capítulo:



Conservando a energia:

$$E = E'$$

$$F \cdot A = F' \cdot A'$$

Como  $F$  representa o fluxo na superfície da própria estrela, temos que  $F = \sigma T^4$ . Expandindo as áreas:

$$\sigma T^4 \cdot 4\pi R^2 = F' \cdot 4\pi R'^2 \rightarrow \sigma T^4 R^2 = F' R'^2$$

Chegamos, então, ao seguinte resultado:

$$F' = \frac{R^2}{R'^2} \sigma T^4$$

### Exemplo 52: OBOA 2024

Para resolver as questões que surgem ao longo da série *Loki*, os personagens precisam alcançar o Tear Temporal: um cilindro de comprimento infinito e raio  $R$  que representa a fusão de todas as linhas temporais. Para avaliar o impacto da energia irradiada por essas linhas no ambiente ao redor, Loki utiliza um espectrofotômetro para captar a frequência  $f$  correspondente ao pico de emissão da onda eletromagnética. No entanto, Loki não possui conhecimento suficiente em fotometria para calcular uma distância segura até o Tear Temporal, por isso precisará de sua ajuda nas próximas etapas. Supondo que tanto o Tear Temporal quanto o traje de Loki se comportam como corpos negros, responda à seguinte questão:



- (a) Determine a temperatura do Tear temporal.  
 (b) Sabendo que a temperatura máxima suportável do traje de Loki é 150°C, determine a distância mínima que ele pode manter do centro do Tear Temporal, considerando que seu traje possui formato esférico com raio  $R'$ .

### Solução 52

(a) Pela equação fundamental da ondulatória aplicada à ondas eletromagnéticas:

$$c = \lambda f$$

$$\lambda = \frac{c}{f}$$

Pela lei de Wien:

$$\lambda T = b$$

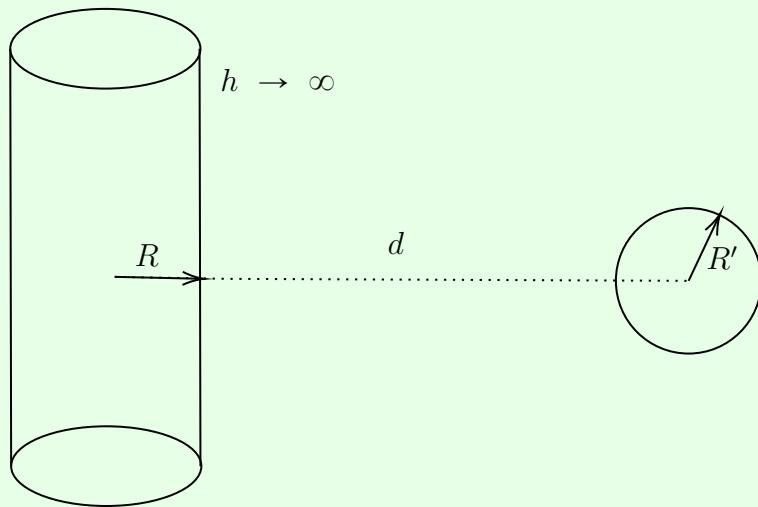
$$\frac{c}{f} T = b$$

$$T = \frac{bf}{c}$$

Substituindo  $b = 2,898 \times 10^{-3} \text{m} \cdot \text{K}$  e  $c = 3 \times 10^8 \text{m}$ :

$$T = 9.66 \times 10^{-12} f$$

(b) Aqui, a situação é um pouco diferente dos exercícios convencionais, não é? A distribuição de energia assume um formato cilíndrico, acompanhando a estrutura da linha temporal. Podemos representar essa configuração da seguinte maneira:



O primeiro ponto importante é que a energia não pode simplesmente desaparecer, logo é conservada. Como potência representa energia por unidade de tempo, a potência irradiada pelo cilindro  $P_C$  deve ser a mesma que a potência recebida  $P_L$  por pontos no cilindro de raio  $d$ :

$$P_C = P_L$$

$$F_C \cdot 2\pi Rh = F_L \cdot 2\pi dh$$

$$F_C \cdot R = F_L \cdot d$$

Sabendo que o fluxo  $F$  pode ser expresso em função da temperatura  $T$  como  $F = \sigma T^4$ :

$$\sigma T_C^4 \cdot R = \sigma T_L^4 \cdot d$$

$$T_L = T_C \cdot \left(\frac{R}{d}\right)^{1/4}$$

Como a temperatura máxima suportada por Loki é 150°C, ou 423 K, e a temperatura  $T_C$  do Tear foi determinada anteriormente como  $T_C = 9.66 \cdot 10^{-12} f$ , temos:

$$423 = 9.66 \cdot 10^{-12} f \cdot \left(\frac{R}{d}\right)^{1/4}$$

$$d = R \times (2.28 \cdot 10^{-14} f)^4$$

$$d = 2.28 \cdot 10^{-55} R f^4$$

Agora, munidos de expressões e conceitos sobre fluxo (brilho) e luminosidade, podemos explorar como realmente percebemos esses fenômenos. Ou seja, observando as estrelas diretamente, também consideraremos qualquer mecanismo dos nossos olhos. Interessante, não? Vamos então avançar para o próximo capítulo!

## 5.2 Magnitudes

Quando olhamos para o céu, notamos que algumas estrelas aparentam ser mais brilhantes que as outras. No momento, não estamos preocupados com os motivos que causam essa diferença de brilho, sejam eles distância, luminosidade ou até mesmo extinções interestelares. Tudo o que sabemos é que estrelas **aparentam** ter brilhos diferentes. Logo, é intuitivo buscar alguma maneira de quantificar esses brilhos, não?

Ao falar superficialmente sobre brilho, estamos falando sobre o **fluxo de energia** ( $F$ ), que é a energia por unidade de área e por unidade de tempo recebida pela estrela. Tal fluxo de energia pode ser medido atualmente através de instrumentos, contudo, o estudo do brilho desses objetos começou muito antes desses instrumentos!

Hiparco, astrônomo grego (190 a.C - 120 a.C) e, em seguida, Ptolomeu, cientista grego (90 d.C - 168 d.C), dividiram estrelas em seis classes de magnitudes, sendo estrelas de primeira magnitude as mais brilhantes e estrelas de sexta magnitude as mais fracas. Ao passar do tempo, quando medições acerca dessas classes foram feitas, foi descoberto que cada pulo de uma magnitude correspondia a uma constante razão entre fluxos, e não uma diferença entre eles. Por causa disso, a escala de magnitudes é essencialmente uma **escala logarítmica**.

### Escala Logarítmica

Uma escala logarítmica é uma escala não linear frequentemente usada ao analisar uma grande variedade de dados. Ao invés de aumentar em incrementos iguais, cada intervalo é aumentado por um fator da base do logaritmo. Tipicamente, são utilizadas escalas de base 10 e base  $e$ .

Uma equação básica para um gráfico logarítmico de base 10 é:

$$f(x) = \log_{10}(x)$$

Isso já é esperado, já que o olho é aproximadamente logarítmico ao interagir com a luz. Esse tipo de resposta nos permite ver em altos e baixos níveis de luz, ou seja, nosso olho possui um grande faixa dinâmica! <sup>1</sup>

Para facilitar a compreensão dessa ideia, imagine que temos  $N$  objetos luminosos, todos com a mesma potência  $P$ , em uma sala completamente sem luz externa. Na primeira situação, apenas 1 objeto está ligado. Ao acionar mais 1 objeto, você perceberá uma mudança significativa na intensidade da luz. Já na segunda situação, com 100 objetos inicialmente ligados, ao adicionar 1 objeto a mais, a mudança será quase imperceptível. Para que a alteração na luminosidade seja tão perceptível quanto na primeira situação, seria necessário acionar mais 100 objetos na segunda situação. <sup>2</sup>

<sup>1</sup>Essa grande faixa é resultado de um pequeno sacrifício da nossa habilidade de diferenciar pequenas alterações no brilho...

<sup>2</sup>É importante ressaltar que, para um detector fotossensível, não haveria diferença entre a primeira e a segunda situação, pois ele detecta a mesma variação absoluta de intensidade, independentemente do número inicial de fontes

Contudo, apenas saber que a escala de magnitudes é logarítmica não é o suficiente! Seria necessário:

- Fazer a escala contínua, para que seja descrito o brilho de uma estrela que esteja entre a magnitude 2 e 3, por exemplo.
- Estender essa escala, para que assim estrelas vistas apenas por telescópios, ou seja, magnitude acima de 6, também sejam incluídas.

Sendo assim, ao configurar a escala de magnitude, a relação que cumpre com esses requisitos é definida como equação de Pogson, obtida por Norman Pogson, em 1854.

### 5.2.1 Equação de Pogson

Foi descoberto por Norman Pogson que uma diferença de 5 magnitudes corresponde a um fator de 100 no brilho. Sendo assim, sejam  $F_1$  e  $F_2$  os fluxos aparentes de duas estrelas, e  $m_1$  e  $m_2$  as respectivas magnitudes.

$$\frac{F_1}{F_2} = 100^{\frac{-(m_1 - m_2)}{5}}$$

Perceba que essa equação garante que cada vez que  $m_1 - m_2$  aumenta por cinco,  $\frac{F_1}{F_2}$  decresce por um fator de cem. O sinal negativo em frente a  $m_1 - m_2$  indica que maiores magnitudes correspondem a menores fluxos. Lembre-se, quanto **menor** o brilho, **maior** a magnitude.

Na equação acima, a razão entre os fluxos estão em fatores de 100, contudo, usualmente trabalhamos em fatores de 10. Logo, escrevendo 100 como  $10^2$ , temos

$$\begin{aligned} \frac{F_1}{F_2} &= (10^2)^{\frac{-(m_1 - m_2)}{5}} \\ \frac{F_1}{F_2} &= 10^{\frac{-2(m_1 - m_2)}{5}} \\ \frac{F_1}{F_2} &= 10^{\frac{-(m_1 - m_2)}{2,5}} \end{aligned} \tag{5.1}$$

Aplicando o logaritmo em ambos os lados

$$\log_{10} \frac{F_1}{F_2} = \log_{10} (10^{\frac{-(m_1 - m_2)}{2,5}})$$

$$\log_{10} \frac{F_1}{F_2} = -\frac{(m_1 - m_2)}{2,5}$$

---

de luz, ao contrário do olho humano, que percebe mudanças de forma relativa!

$$m_1 - m_2 = -2,5 \log_{10} \left( \frac{F_1}{F_2} \right)$$

E assim, chegamos na **Equação de Pogson**.

### Exemplo 53

onsidere um eclipse lunar cujo máximo encobriu 70% do disco solar. Desconsiderando os efeitos de borda e sabendo que o brilho do disco solar é proporcional a área da superfície visível, calcule a magnitude do sol no momento máximo do eclipse.

### Solução 53

Durante um eclipse lunar, o máximo encobriu 70% do disco solar. Como o brilho do disco é proporcional à área visível, apenas 30% do fluxo original ( $F_\odot$ ) chega ao observador. Para determinar a nova magnitude aparente do Sol ( $m_{\text{eclipse}}$ ), utilizamos a equação de Pogson:

$$m_2 - m_1 = -2.5 \log_{10} \left( \frac{F_2}{F_1} \right) \quad (5.2)$$

Substituindo  $F_1 = F_\odot$  e  $F_2 = 0.3F_\odot$ :

$$m_{\text{eclipse}} - m_\odot = -2.5 \log_{10} \left( \frac{0.3F_\odot}{F_\odot} \right) \quad (5.3)$$

Simplificando:

$$m_{\text{eclipse}} - m_\odot = -2.5 \log_{10}(0.3) \quad (5.4)$$

Sabemos que:

$$\log_{10}(0.3) \approx -0.5229 \quad (5.5)$$

Multiplicando por  $-2.5$ :

$$m_{\text{eclipse}} - m_\odot = (-2.5) \times (-0.5229) \approx 1.31 \quad (5.6)$$

Portanto,

$$m_{\text{eclipse}} \approx m_\odot + 1.31 \quad (5.7)$$

Considerando que a magnitude aparente do Sol em condições normais é  $m_\odot \approx -26.74$ :

$$m_{\text{eclipse}} \approx -26.74 + 1.31 = -25.43 \quad (5.8)$$

Assim, no momento máximo do eclipse, a magnitude aparente do Sol aumenta para  $-25.43$ , indicando uma redução no brilho observado.

### 5.2.2 Soma de Magnitudes

Ao estudar magnitudes, podemos lidar com as seguintes perguntas:

- **Dado o fluxo individual de cada estrela em um sistema binário, como podemos calcular o fluxo total?**
- **Dada a magnitude de cada estrela em um sistema binário, como podemos calcular a magnitude combinada?**

Uma das técnicas utilizadas para medir o brilho individual de um sistema de duas ou mais estrelas é através da espectroscopia, utilizando telescópios equipados com espetrógrafos de alta resolução, separando as contribuições de luz.

Note que, por mais que estejamos falando de grandezas relacionadas ao brilho de uma estrela, somar *fluxos* **não** é a mesma coisa que somar *magnitudes*, visto que a escala de magnitudes se trata de uma escala logarítmica em função do fluxo. Nessa seção, veremos como calcular a **magnitude combinada** de um sistema de  $N$  estrelas que aparece como um único ponto brilhante para o observador.

Perceba que, por mais que não seja possível somar as magnitudes diretamente, podemos somar os fluxos. A partir da equação (5.1)

$$F_1 = 10^{-0,4(m_1-m_0)} F_0$$

$$F_2 = 10^{-0,4(m_2-m_0)} F_0$$

$$F_3 = 10^{-0,4(m_3-m_0)} F_0$$

...

$$F_n = 10^{-0,4(m_n-m_0)} F_0$$

Onde, por conveniência, adotaremos  $F_0$  e  $m_0$  como valores de referência arbitrários.<sup>3</sup>

Logo, utilizando a equação de Pogson, temos

$$m_c - m_0 = -2,5 \log \left( \frac{F_1 + F_2 + \dots + F_n}{F_0} \right)$$

Substituindo cada fluxo individual em função das magnitudes, como visto anteriormente

$$m_c - m_0 = -2,5 \log \left( \frac{10^{-0,4(m_1-m_0)} + 10^{-0,4(m_2-m_0)} + \dots + 10^{-0,4(m_n-m_0)}}{F_0} F_0 \right)$$

$$m_c - m_0 = -2,5 \log(10^{-0,4(m_1-m_0)} + 10^{-0,4(m_2-m_0)} + \dots + 10^{-0,4(m_n-m_0)})$$

---

<sup>3</sup>Por exemplo, a magnitude da estrela Vega é um valor de referência, porque marca o valor zero na escala de magnitudes. Como eliminaremos os termos  $F_0$  e  $m_0$  ao fim da dedução, não se faz necessário atribuir um valor para eles.

Colocando em evidência  $10^{(0,4m_0)}$

$$m_c - m_0 = -2,5 \log(10^{0,4m_0} \cdot (10^{-0,4m_1} + 10^{-0,4m_2} + \dots + 10^{-0,4m_n}))$$

Utilizando a propriedade dos logaritmos  $\log(a \cdot b) = \log a + \log b$

$$m_c - m_0 = -2,5 \log(10^{0,4m_0}) - 2,5 \log(10^{-0,4m_1} + 10^{-0,4m_2} + \dots + 10^{-0,4m_n})$$

Contudo,  $-2,5 \cdot \log(10^{0,4m_0}) = -2,5 \cdot 0,4m_0 = -m_0$ , logo, eliminando  $-m_0$  de ambos os lados, temos que a magnitude combinada é dada por

$$\boxed{m_c = -2,5 \log(10^{-0,4m_1} + 10^{-0,4m_2} + \dots + 10^{-0,4m_n})}$$

#### Exemplo 54: Lista 1 - Treinamentos 2019

Um sistema binário eclipsante possui magnitude aparente 10,0. Durante um eclipse, o componente de menor raio é eclipsado pelo maior, e a magnitude do sistema cai para 11,0. Calcule as magnitudes de cada um dos componentes.

#### Solução 54: Resolução

O sistema binário eclipsante possui magnitude aparente  $m_c = 10,0$ . Durante um eclipse, a magnitude do sistema cai para  $m_{\text{eclipse}} = 11,0$ , pois um dos componentes é completamente obscurecido. Para determinar as magnitudes individuais dos componentes, utilizamos a fórmula para magnitudes combinadas:

$$m_c = -2,5 \log(10^{-0,4m_1} + 10^{-0,4m_2}) \quad (5.9)$$

Durante o eclipse, apenas o componente mais brilhante permanece visível, ou seja,

$$m_1 = m_{\text{eclipse}} = 11,0 \quad (5.10)$$

Substituímos na equação da magnitude combinada:

$$10,0 = -2,5 \log(10^{-0,4 \times 11,0} + 10^{-0,4m_2}) \quad (5.11)$$

$$10,0 = -2,5 \log(3,98 \times 10^{-5} + 10^{-0,4m_2}) \quad (5.12)$$

$$10^{-4.0} = 10^{-4.4} + 10^{-0.4m_2} \quad (5.13)$$

Resolvendo para  $10^{-0.4m_2}$ :

$$10^{-0.4m_2} = 10^{-4.0} - 10^{-4.4} \quad (5.14)$$

$$10^{-0.4m_2} = 6.02 \times 10^{-5} \quad (5.15)$$

Aplicando logaritmo:

$$-0.4m_2 = \log(6.02 \times 10^{-5}) \quad (5.16)$$

$$-0.4m_2 = -4.22 \quad (5.17)$$

Resolvendo para  $m_2$ :

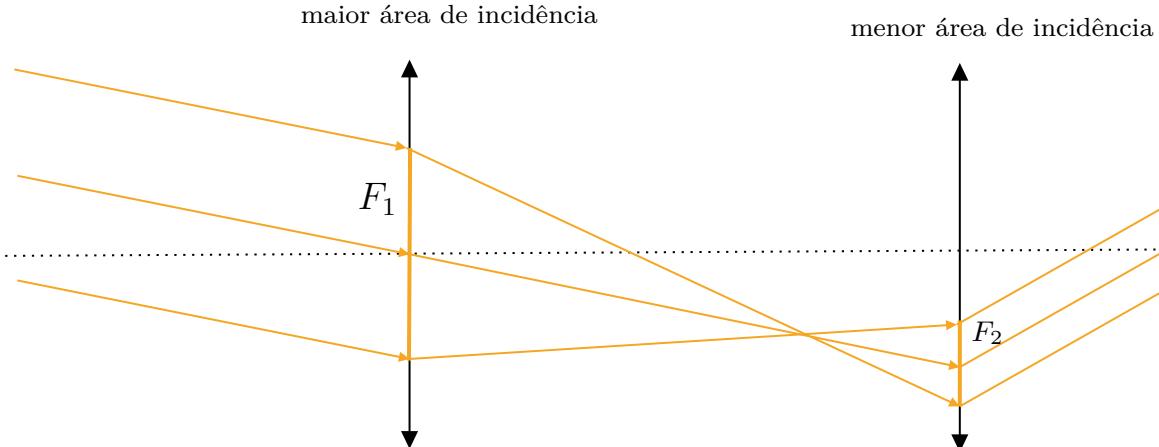
$$m_2 = \frac{-4.22}{-0.4} = 10.55 \quad (5.18)$$

Assim, as magnitudes individuais dos componentes são  $m_1 = 11.0$  e  $m_2 = 10.55$ .

### 5.2.3 Magnitude Limite

Sabe-se que o olho humano é capaz de enxergar objetos no céu de até 6 magnitudes. Logo, para essa magnitude limite, há um fluxo mínimo  $F_0$  associado. Mas, de que forma podemos **aumentar** a magnitude limite a olho nu, ou seja, como podemos ir *além* do limite?

No esquema abaixo, perceba que, através de um telescópio, podemos aumentar o **fluxo** de um mesmo objeto redirecionando os seus raios de luz, ou seja, diminuindo a **área incidente**, sabendo que o fluxo é a razão entre a potência e a área.



Perceba também que, ao somente redirecionar os raios de luz vindos do objeto, considerando que não haja nenhuma perda nesse processo, a potência continua a mesma!

objeto a  
olho nu



objeto no  
telescópio



A partir das afirmações acima, podemos utilizar a **Equação de Pogson** para encontrar um limite para  $F_1$  no qual o fluxo redirecionado  $F_2$  é igual ao fluxo associado à magnitude limite do olho humano, ou seja,  $F_0$ .

$$m_1 - m_2 = -2,5 \log \left( \frac{F_1}{F_2} \right)$$

Perceba que queremos encontrar um limite, logo,  $m_1$  ( $m_{lim}$ ) está associado ao fluxo ( $F_t$ ) que o telescópio recebe através da sua abertura e, assim,  $m_2(m_{olho})$  vai ser a magnitude limite do olho propriamente dita, que assume o valor de 6, associada ao fluxo mínimo  $F_2(F_0)$ . Portanto, reorganizando os termos

$$m_{lim} - m_{olho} = -2,5 \log \left( \frac{F_t}{F_0} \right)$$

Temos que  $F_1 = \frac{P}{A_t}$  e  $F_0 = \frac{P}{A_0}$ , e, assim, sabendo que a potência permanece a mesma

$$m_{lim} - m_{olho} = -2,5 \log \left( \frac{A_0}{A_t} \right)$$

Em ambientes com pouca luz, as pupilas dilatam entre 4 e 8 milímetros. Por fins de aproximação, podemos considerar o diâmetro da pupila com 6 milímetros. Logo, sendo  $A_t = \frac{\pi D_t^2}{4}$  e  $A_0 = \frac{\pi D_0^2}{4}$

$$m_{lim} - m_{olho} = -2,5 \log \left( \frac{6^2}{D_t^2} \right)$$

Utilizando que  $\log a^2 = 2 \cdot \log a$  e  $\log(\frac{a}{b}) = \log a - \log b$

$$\begin{aligned} m_{lim} - m_{olho} &= -5 \log 6 + 5 \log D_t \\ m_{lim} &= m_{olho} - 3,89 + 5 \log D_t \end{aligned}$$

Visto que  $m_{olho} = 6$ , então

$$m_{lim} = 2,1 + 5 \log D$$

Perceba que, a partir desta relação, podemos obter a magnitude limite de um telescópio sabendo apenas uma de suas características físicas, a **abertura**! Note que D é dado em **milímetros**.

- Exemplo 3: Encontre a maior distância possível em que pode-se distinguir um objeto interestelar através de um telescópio com abertura de 2 m localizado na terra. Considere o objeto com um albedo igual a 0,7 e raio  $r = 500$  m, que reflete somente a luz solar. Considere que o objeto, a terra e o sol estão alinhados.

### 5.2.4 Magnitude Superficial

Durante o estudo sobre o brilho de objetos no céu noturno, podemos nos questionar por que as galáxias recebem uma magnitude aparente que considera todo o seu brilho como se estivesse concentrado em um único ponto. Não seria mais prático definir um tipo de *brilho superficial médio*?

Vamos pegar como exemplo a Nebulosa da Hélix (NGC 7293). Muitos livros a atribuem uma magnitude de 7, ou seja, a magnitude que teria se a sua luz estivesse concentrada em um único ponto. Agora, comparemos com a Nebulosa de Saturno (NGC 7009), com uma magnitude de 12. A Nebulosa de Saturno, comparada com a Nebulosa da Helix, mesmo com uma magnitude maior, é de longe um alvo muito mais fácil para telescópios. Como é possível?

A resposta está no **tamanho**. Enquanto a Nebulosa da Helix cobre uma área no céu noturno equivalente a metade de uma Lua Cheia, a Nebulosa de Saturno possui um tamanho angular similar, bem, ao planeta Saturno! Pelo fato da sua luz estar mais condensada, a Nebulosa de Saturno aparece mais brilhante porque seu brilho superficial é maior.

Objeto	Magnitude Superficial
Nebulosa de Saturno	14,6
Nebulosa da Helix	20,8

A **magnitude superficial** ( $\mu$ ) mede o brilho superficial, geralmente em  $mag/arcsec^2$ . Ela também pode ser entendida como a magnitude aparente de um objeto referente a uma unidade de ângulo sólido, como podemos ver na seção 1.2.7.

$$\mu - \mu_0 = -2,5 \log \left( \frac{I}{I_0} \right)$$

O **brilho superficial** ( $I$ ) de um objeto é o fluxo recebido por unidade de ângulo sólido.

$$I = \frac{F}{\Omega}$$

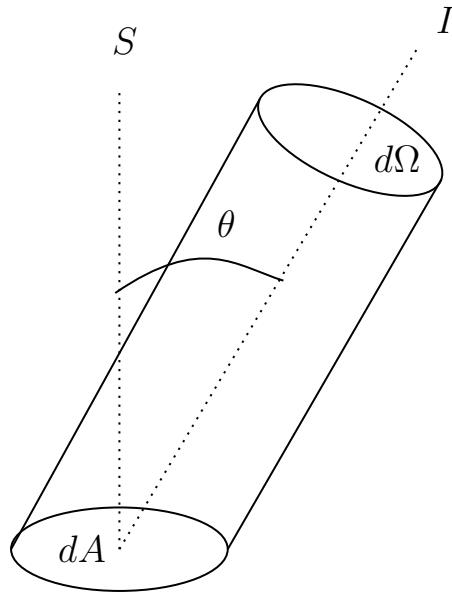
O brilho superficial é similar ao conceito de *intensidade específica*, que é a energia que atravessa a unidade de área da fonte, por unidade de tempo e por unidade de ângulo sólido. Perceba que, na intensidade específica, o diferencial de área refere-se a **área da fonte**, enquanto que no brilho superficial é a unidade de área relacionada ao fluxo do **observador**.

$$I = \frac{dE}{dt dA d\Omega}$$

Se considerarmos a energia emitida de um intervalo de frequência  $v$  até  $v + dv$ , chamamos de *intensidade específica monocromática*

$$I_v = \frac{dE}{dt dA d\Omega dv}$$

Se não houver uma distribuição isotrópica, a energia que atravessa a unidade da área não é a mesma em todas as direções, dependendo do ângulo entre a direção considerada e a normal da superfície



$$I_v = \frac{dE \cos \theta}{dt dA d\Omega dv}$$

Para obter a intensidade específica monocromática em função do comprimento de onda, note que

$$I_v dv = I_\lambda d\lambda$$

Tal que a intensidade específica integrada em todo o espectro seja

$$I = \int_0^\infty I_v dv = \int_0^\infty I_\lambda d\lambda$$

Perceba que o brilho superficial **não varia com a distância**, já que tem as mesmas dimensões de intensidade específica. Vamos analisar melhor essa relação.<sup>4</sup>

$$F = \frac{L}{4\pi r^2} \tag{5.19}$$

---

<sup>4</sup>Em escalas cosmológicas, o brilho superficial não é constante, reduzindo por  $1 + z^4$  (onde  $z$  é o redshift). Essa diminuição no brilho superficial de galáxias é o que torna galáxias de alto redshift tão difíceis de detectar.

$$\Omega = \frac{A}{r^2} \quad (5.20)$$

$$I = \frac{F}{\Omega} \quad (5.21)$$

Substituindo (5.19) e (5.20) em (5.21), teremos que ambos os fatores  $r^2$  se anularão, logo

$$I = \frac{L}{4\pi A}$$

Note que, por depender da luminosidade e da área do objeto, o brilho superficial torna-se algo intrínseco ao objeto!

A partir de (5.21), temos que  $F = I \cdot \Omega$ , logo podemos escrever a magnitude aparente em função do ângulo sólido, já que o brilho superficial de um mesmo objeto é constante!

$$m_1 - m_2 = -2,5 \log \left( \frac{\Omega_1}{\Omega_2} \right)$$

Onde  $m_1$  e  $m_2$  são as magnitudes aparentes de um mesmo objeto em função dos ângulos sólidos vistos por diferentes observadores!

### Exemplo 55: Lista 4 - Treinamentos 2021

A Nebulosa do Anel (M57) possui uma magnitude aparente igual a 9 e um diâmetro angular de  $2'$  para um observador na Terra. Qual seria a magnitude aparente do céu noturno de um planeta orbitando uma estrela exatamente no centro de M57? Lembre-se de que o gás de uma nebulosa é extremamente rarefeito e assuma que a nebulosa não absorve sua própria radiação.

Importante: Nessa questão, você deve calcular a magnitude total do céu noturno considerando que o ângulo sólido acima do horizonte do observador equivale a  $2\pi \text{ sr}$ . A resposta final não é o fundo de céu (em  $\text{mag}/\text{arcsec}^2$ ).

### Solução 55: Resolução

A chave para resolver essa questão é entender que a luminosidade superficial, medida em magnitudes por unidade de área sólida ( $\text{mag}/\text{sr}^{-2}$ ), é independente da distância do observador para objetos extensos, como vimos anteriormente.

Como a nebulosa é composta por gás extremamente rarefeito e sem absorção interna significativa, podemos considerar que essa propriedade se mantém mesmo para um observador dentro da nebulosa.

Assim, inicialmente calculamos o ângulo sólido subtendido pela nebulosa quando observada da Terra:

$$\Omega = \frac{\pi\theta^2}{4}$$

onde  $\theta$  é o diâmetro angular da nebulosa em radianos:

$$\theta = \frac{2' \times 2\pi}{60 \times 360}$$

Substituindo esse valor em  $\theta$ :

$$\Omega = 2,65 \cdot 10^{-7} sr$$

Agora, para determinar a magnitude aparente do céu noturno em um planeta dentro da nebulosa, utilizamos a relação entre as magnitudes totais vistas de diferentes ângulos sólidos.

$$m_{\text{centro}} - m_{\text{Terra}} = -2.5 \log \left( \frac{2\pi}{\Omega} \right)$$

Lembre-se que o  $2\pi$  é o ângulo sólido equivalente ao céu noturno acima do horizonte de um observador no centro da nebulosa. Substituindo os valores:

$$m_{\text{centro}} = 9 - 2.5 \log \left( \frac{2\pi}{2,65 \cdot 10^{-7} sr} \right)$$

Realizando os cálculos, obtemos:

$$m_{\text{centro}} \approx -9.4$$

Portanto, a magnitude aparente do céu noturno para um observador em um planeta dentro da Nebulosa do Anel seria aproximadamente -9.4, tornando-o um céu extremamente brilhante.

### 5.2.5 Distribuição do Brilho Superficial em Galáxias

A distribuição do brilho superficial descreve a variação do fluxo por unidade de área em diferentes regiões da galáxia. Essa medida é geralmente obtida em uma banda fotométrica particular, como B, V ou R. Já os perfis radiais detalham a mudança no brilho superficial, desde o núcleo até as bordas, e sua configuração varia conforme o tipo de galáxia.

- **Elípticas**

As galáxias elípticas tem linhas de distribuição de luz com formas de elipses que se tornam muito próximas na medida em que se aproximam do centro, o que indica a concentração de luz naquela região.

Os perfis radiais podem ser descritos pela lei de Vaucouleurs, proposta em 1948 por Gerard de Vaucouleurs

$$\log\left(\frac{I}{I_e}\right) = -3,33 \left[ \left(\frac{r}{r_e}\right)^{\frac{1}{4}} - 1 \right]$$

Onde

- $r_e$  é o raio efetivo, correspondente a metade da luminosidade total da galáxia
- $I_e$  é o brilho superficial efetivo correspondente ao raio  $r_e$

Entretanto, galáxias apresentam desvios dessa lei nas regiões muito centrais e nas regiões muito externas, ou seja, nos núcleos o brilho superficial cresce em direção ao centro mais lentamente do que estimado, analogamente para a região mais externa.

- **Espirais**

As espirais apresentam o bojo e o disco, cada um com distribuição de brilho superficial distinta. Os bojos são semelhantes a distribuição de galáxias elípticas, com seus perfis radiais da forma  $\log\left(\frac{I}{I_e}\right) \propto r^{\frac{1}{4}}$

Os discos apresentam um perfil radial exponencial

$$I = I_0 e^{-\frac{r}{r_s}}$$

Onde

- $I_0$  é o brilho superficial central extrapolado
- $r_s$  é a escala de distância, sendo a distância entre o centro e o ponto do disco no qual o brilho começa a decair por um fator de  $\frac{1}{e}$

### Exemplo 56: Treinamentos 2 - 2020

A distribuição de diminuição de brilho superficial de uma galáxia espiral é dada por:

$$I(r) = I_0 e^{-r/a}$$

onde  $I(r)$  é o brilho superficial (luminosidade por unidade de área a certa distância  $r$  do centro da galáxia) e  $a$  é uma constante de escala. A partir da relação anterior, pode-se encontrar por integração a luminosidade total do disco galáctico:

$$L = 2\pi I_0 a^2.$$

Certa galáxia com brilho superficial satisfazendo a relação anterior tem constante de escala  $a = 6,0$  kpc e luminosidade na banda B de  $L_B = 2,5 \times 10^{10} L_\odot$ .

(a) Deduzir uma expressão para  $r$  em termos de  $a$ ,  $I(r)$  e  $L$ .

### Solução 56

Rearranjando a equação da distribuição de brilho superficial e isolando  $r$ :

$$\frac{I(r)}{I_0} = e^{-r/a} \Rightarrow r = a \ln \left[ \frac{I_0}{I(r)} \right]$$

Usando a expressão para a luminosidade total na banda B:

$$I_0 = \frac{L_B}{2\pi a^2}$$

Substituindo em nossa expressão de  $r$ :

$$r = a \ln \left[ \frac{L_B}{2\pi a^2 I(r)} \right]$$

### 5.2.6 Magnitude Absoluta

Até agora, vimos magnitudes que se relacionavam com o fluxo de um objeto, que depende da sua luminosidade e da sua distância da Terra. Mas, o que acontece se a distância for constante?

Logo, é conveniente introduzir o conceito de **Magnitude Absoluta (M)**, que é a magnitude de um objeto a uma distância **fixa** de 10 parsec. Imagine que, ao obter a magnitude absoluta de uma estrela, é como se estivéssemos movendo-a no espaço até que sua distância até nós seja de 10 parsec.

Note que, fixando uma distância constante, a única variável será a luminosidade, logo, ao comparar **magnitudes absolutas** de astros, estamos efetivamente comparando as suas **luminosidades**. Seja a distância real de uma estrela igual a 10 parsec, implica que sua magnitude aparente é igual a magnitude absoluta.

Analizando a magnitude absoluta através da equação de Pogson, temos

$$M_1 - M_2 = -2,5 \log \left( \frac{F_1}{F_2} \right)$$

$$M_1 - M_2 = -2,5 \log \left( \frac{L_1}{4\pi d_1^2} \cdot \frac{4\pi d_2^2}{L_2} \right) = -2,5 \log \left( \frac{L_1}{L_2} \right)$$

Onde  $d_1 = d_2 = 10$  parsec. Assim

$$M_1 - M_2 = -2,5 \log \left( \frac{L_1}{L_2} \right)$$

### Exemplo 57

Seja  $M_0$  a magnitude absoluta de uma estrela antes de dividir-se em N estrelas iguais. Considere que, além da conservação de massa total, a densidade média e

temperatura de cada estrela seja igual a estrela inicial. Escreva a magnitude absoluta de cada estrela individual em função de  $M_0$  e  $N$ .

### Solução 57

Seja  $M_i$  a magnitude absoluta individual de cada uma das  $N$  estrelas. Logo

$$M_i - M_0 = -2,5 \log \left( \frac{L_i}{L_0} \right)$$

Sabe-se que a luminosidade de uma estrela pode ser dada através da relação de Stefan-boltzmann e Wien

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4$$

Note que, pelo enunciado,  $T_i = T_0$ . Substituindo na primeira relação, temos

$$M_i = M_0 - 2,5 \log \left( \frac{R_i^2}{R_0^2} \right)$$

Sabemos também que,  $\rho_i = \rho_0$ , assim como  $M_0 = N \cdot M_i$

$$\frac{N \cdot M_0}{4\pi R_i^3} = \frac{M_0}{4\pi R_0^3}$$

$$N = \left( \frac{R_i}{R_0} \right)^3$$

Portanto, a magnitude absoluta de cada estrela será

$$M_i = M_0 - 5 \left( \frac{R_i}{R_0} \right)$$

$$M_i = M_0 - 5 \log N$$

### 5.2.7 Relações entre Magnitudes

Visto que a magnitude aparente, magnitude superficial e magnitude absoluta são parte de uma mesma escala de magnitudes que medem  $F$  e  $I$ , então podemos compará-las e obter suas relações, sendo uma delas extremamente conhecida por **Módulo de Distância**

- Magnitude Aparente e Magnitude Absoluta ou **Módulo de Distância**

$$m - M = -2,5 \log \left( \frac{L}{4\pi d^2} \cdot \frac{4\pi 10^2}{L} \right) = -2,5 \log \left( \frac{10^2}{d^2} \right)$$

Utilizando  $\log a^b = b \cdot \log a$  e  $\log(\frac{a}{b}) = \log a - \log b$

$$m - M = -5 \log 10 + 5 \log d$$

$$\boxed{m - M = 5 \log d - 5}$$

- Magnitude Aparente e Magnitude Superficial

$$m - \mu = -2,5 \log \left( F \cdot \frac{\Omega}{F} \right)$$

$$\boxed{m = -2,5 \log(\Omega) + \mu}$$

É cabível ressaltar que, se o objeto possuir uma unidade de ângulo sólido, sua magnitude aparente será igual a magnitude superficial<sup>5</sup>

### Exemplo 58: Lista 6 - Treinamentos 2019

HD 116658 é um sistema binário com magnitude aparente na banda visível  $m_v = 0,97$ . Observações interferométricas permitiram obter as magnitudes absolutas individuais de cada componente:  $M_{V,1} = -3,50$  e  $M_{V,2} = -1,50$ . Calcule a distância até esse sistema

### Solução 58

O sistema binário HD 116658 possui uma magnitude aparente na banda V dada por  $m_V = 0.97$ . As magnitudes absolutas das componentes são  $M_{V,1} = -3.50$  e  $M_{V,2} = -1.50$ . O objetivo é calcular a distância até esse sistema.

Sabendo que a luminosidade do sistema é  $L_V = L_1 + L_2$ , a magnitude absoluta deste é:

$$M_V = M_{V,1} - 2.5 \log \left( \frac{L_V}{L_1} \right)$$

$$M_V = M_{V,1} - 2.5 \log \left( 1 + \frac{L_2}{L_1} \right)$$

A razão entre as luminosidades das estrelas, a partir da equação de Pogson em função da magnitude absoluta, é dada por:

$$\frac{L_2}{L_1} = 10^{(M_{V,1} - M_{V,2})/2.5}$$

Substituindo os valores:

$$\frac{L_2}{L_1} = 10^{(-3.50 + 1.50)/2.5}$$

---

<sup>5</sup>É a própria definição de magnitude superficial!

Portanto, a partir disso, temos que

$$M_V = -3.50 - 2.5 \log(1 + 10^{(-3.50+1.50)/2.5})$$

Utilizando a equação do módulo de distância:

$$m_V - M_V = 5 \log d - 5$$

Isolando  $d$ :

$$d = 10^{(m_V - M_V + 5)/5}$$

Substituindo os valores numéricos,

$$d \approx 84.3 \text{ pc}$$

Portanto, a distância ao sistema binário HD 116658 é aproximadamente 84.3 parsecs.

### Exemplo 59: Lista 8 - Treinamentos 2019

Na Lua Nova, o céu noturno possui um brilho superficial médio na faixa do visível de aproximadamente  $22 \text{ mag}/\text{arcsec}^2$ . Calcule a área do céu que precisa ser observada para que seu fluxo integrado seja comparável ao de uma estrela no limite de visibilidade a olho nu.

#### Solução 59

A questão pede para determinar a área do céu que deve ser observada para que seu fluxo integrado seja comparável ao de uma estrela no limite da visibilidade a olho nu, assumindo uma magnitude superficial média do céu noturno de  $22 \text{ mag}/\text{arcsec}^2$ . Sabemos que o fluxo de uma estrela de sexta magnitude, em relação ao fluxo do fundo do céu por segundo de arco quadrado, a partir da equação de Pogson, é dado por:

$$\frac{F_{lim}}{F_{fundo}} = 10^{-0.4(6-22)}$$

Resolvendo a potência:

$$\frac{F_{lim}}{F_{fundo}} = 10^{6.4}$$

Sabemos que  $F \propto \Omega$ , logo, a área necessária para que o fluxo integrado do céu seja equivalente ao fluxo dessa estrela no limite de visibilidade a olho nu é então:

$$A = 10^{6.4} \text{ arcsec}^2$$

Convertendo para  $\text{arcmin}^2$ :

$$A \approx 698 \text{ arcmin}^2$$

Como referência, esse valor corresponde a um círculo de raio aproximado de 15 minutos de arco, comparável ao tamanho aparente da Lua Cheia ou do Sol. Portanto, uma região do céu com essa área acumulada teria um fluxo luminoso total semelhante ao de uma estrela de sexta magnitude.

## 5.3 Velas Padrão

Uma vela-padrão é um objeto astronômico que possui uma luminosidade conhecida, permitindo que seja usada como uma "réguia cósmica". O nome vem da ideia de que, se soubermos a magnitude de uma vela e a observarmos de longe, conseguimos estimar a distância. Temos três exemplos principais de velas-padrão:

- Estrelas Variáveis (Cefeidas e RR Lyrae)
- Supernovas do tipo Ia
- Galáxias com brilho superficial fixo

Vamos analisar, nesta seção, esses casos.

### 5.3.1 Estrelas Variáveis

Temos várias estrelas com a Luminosidade, e, por consequência, o período, variáveis. Dentre elas, se destacam as Cefeidas (cujo nome é em homenagem à primeira estrela do tipo a ser descoberta, δ Cephei) e as RR Lyrae (de mesmo nome da primeira estrela a ser descoberta desse grupo).

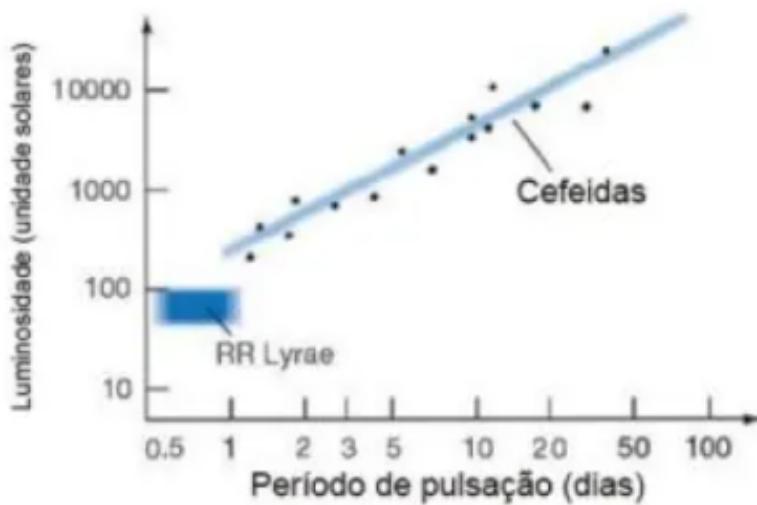
Durante uma pulsação, a Cefeida quando está com o raio menor e temperatura maior, ioniza o hidrogênio, o que aumenta o número de partículas e, portanto, a pressão. O aumento de pressão aumenta o raio e diminui a temperatura, recombinação o hidrogênio. Pela redução do número de partículas, a pressão diminui e há uma contração, o que recomeça o ciclo.

A seguinte imagem mostra um gráfico que relaciona a luminosidade da estrela com o período:

Álém disso, temos que:

$$M = a \log(d) + b$$

Onde a e b são constantes que variam com a banda que estamos visualizando (conforme será visto mais adiante). Em problemas, o valor das constantes serão fornecidos, e, se não, a questão guiará a achá-lo. Sabendo a magnitude aparente (dependendo da questão, há diversas formas de descobrir), pode-se achar a distância, relacionando as duas magnitudes.



### 5.3.2 Supernovas do Tipo Ia

As supernovas Tipo Ia são explosões estelares extremamente brilhantes que ocorrem em sistemas binários, onde uma estrela anã branca (o remanescente de uma estrela de baixa massa) acumula matéria de uma companheira estrela. Quando a massa da anã branca ultrapassa o limite de Chandrasekhar (cerca de 1,4 vezes a massa do Sol), ela não consegue mais sustentar sua própria gravidade, o que provoca uma explosão termonuclear cataclísmica. (Cálculos em relação a esses processos estão fora de escopo)

Nas supernovas do Tipo Ia, um pico de luminosidade é atingido, e acaba decaindo conforme o tempo, como no gráfico a seguir, do logaritmo da Luminosidade em função do tempo desde a explosão:

Do mesmo modo que em Estrelas Variáveis, é possível calcular a magnitude dependendo das condições do problema.

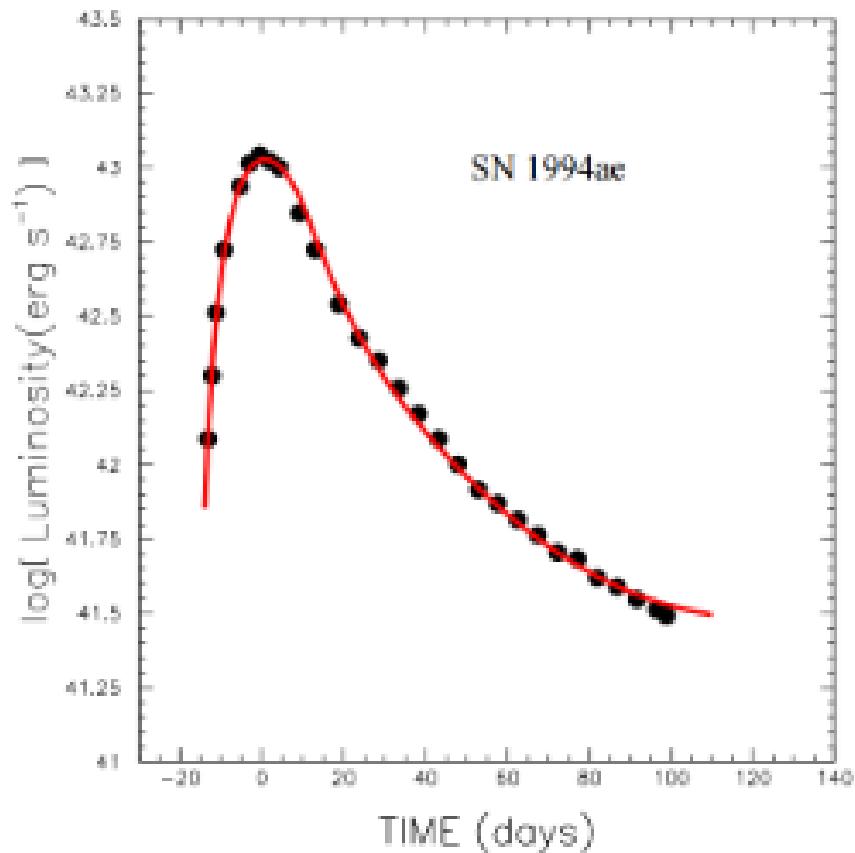
### 5.3.3 Galáxias com brilho superficial fixo

Sabe-se que:

$$\mu = m + 2.5 \log A$$

Quando vemos a área da galáxia, o ângulo sólido referente passa a ser a "área" quando vista pelo observador.

Como  $\mu$  é constante, ao obter  $m$ , podemos utilizar a relação entre magnitudes para achar a distância da galáxia. (A magnitude absoluta pode ser dada nas questões, ou ser encontrada em algum dos itens)



## 5.4 Sistemas de Magnitudes

Se fosse possível medir toda a radiação emitida por um objeto astronômico em todos os comprimentos de onda, estariamos determinando o seu brilho total, conhecido como magnitude bolométrica. No entanto, na prática, isso não é viável, pois parte da radiação é absorvida pela atmosfera da Terra, e diferentes comprimentos de onda requerem detectores específicos para serem observados.

A magnitude aparente, por sua vez, é uma medida do brilho de um objeto em um intervalo específico de comprimentos de onda. Esse intervalo faz parte do que seria coberto pela magnitude bolométrica. Como diferentes instrumentos e filtros observam em faixas distintas do espectro, surge o conceito de sistemas de magnitudes, que dependem das características do telescópio, dos filtros utilizados e dos detectores.

Cada intervalo de comprimento de onda pode ser associado a um filtro, que seleciona apenas uma faixa específica da radiação recebida. Por exemplo, filtros podem ser usados para observar apenas a luz visível, ultravioleta ou infravermelha de um objeto astronômico.

Os detectores, como câmeras CCDs ou fotodiodos, não captam toda a radiação incidente de maneira uniforme. Isso ocorre porque a eficiência dos detectores varia com o comprimento de onda, devido a fatores como a composição do material sensível à luz, limitações eletrônicas e a própria resposta do sistema óptico do telescópio. Por essa razão, define-se a eficiência espectral ( $\phi(\lambda)$ ), que quantifica

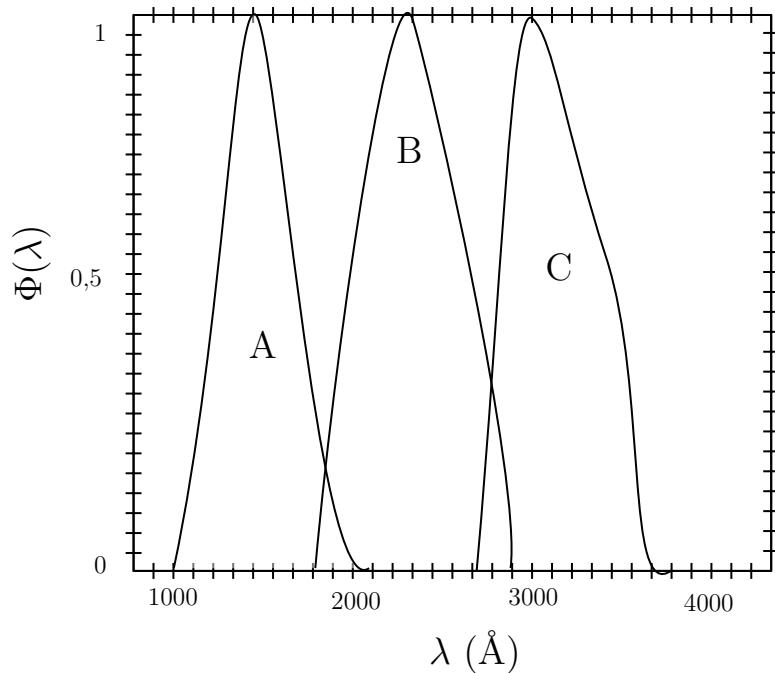
a fração da luz captada em cada comprimento de onda e permite corrigir as medições para uma interpretação mais precisa dos dados astronômicos.

Portanto, ao medir a luz de uma estrela, o fluxo observado dependerá da sensibilidade espectral do equipamento utilizado, que é composto pelo conjunto telescópio + filtro + detector. Chamando  $\phi(\lambda)$  de eficiência espectral normalizada do equipamento, o fluxo observado ( $F_{abs}$ ) pode ser expresso matematicamente pela seguinte equação:

$$F_{obs} = \int_0^{\infty} \Phi(\lambda) F(\lambda) d\lambda$$

Essa equação mostra que o fluxo medido resulta da interação entre a eficiência do equipamento e a distribuição espectral de energia do objeto observado.

Um **sistema de magnitudes** é definido por seu  $\Phi(\lambda)$  e por sua constante (*const.*).



Sistema de magnitudes arbitrário A, B, C.

Perceba que o valor do fluxo na escala zero, nos sistemas de magnitudes, vai depender do intervalo utilizado, visto que diferentes faixas estão associadas a diferentes densidades de fluxos no valor zero. Todas as magnitudes de uma estrela em diferentes faixas de comprimento de onda não são iguais, já que cada filtro cobre uma região diferente do espectro de corpo negro correspondente a temperatura de superfície.

Para determinar a constante do sistema, utilizamos estrelas padrões, ou seja, estrelas que têm magnitudes bem determinadas. Assim, a magnitude aparente na banda A, por exemplo, é

$$V = -2,5 \log F_A + const.$$

- Magnitude Visível

À luz do dia, o olho humano é mais sensível com comprimentos de onda de cerca de 500 nm. A sensibilidade ainda pode encobrir o vermelho - comprimento de onda maior e o azul (comprimento de onda menor). A magnitude correspondente a faixa do olho humano é chamada de **magnitude visível** ( $m_v$ )

- Magnitude Fotográfica

Placas fotográficas, mesmo que sejam mais sensíveis aos comprimentos de onda azul e violeta, são capazes de registrar radiação não visível ao olho humano. Assim é cabível colocar a **magnitude fotográfica** ( $m_{pg}$ ) como um intervalo que difere da magnitude visual.

Antes do advento dos fotômetros, que realizam medições apuradas do brilho de objetos astronômicos, a magnitude aparente de um objeto era obtida através de uma foto capturada por uma câmera. Essas imagens, reveladas em filme fotossensível ou placas, eram mais sensíveis ao final azul do espectro visual, comparado ao olho humano ou fotômetros modernos. Como resultado, estrelas mais azuis possuem uma magnitude fotográfica menor (ou seja, são mais brilhantes), em relação à magnitude visual moderna, pois elas parecem ser mais brilhantes em fotografias do que em fotômetros modernos. Da mesma maneira, estrelas mais vermelhas possuem uma magnitude fotográfica maior (ou seja, são mais opacas) que a magnitude visual, pois elas parecem ser menos brilhantes. Por exemplo, a estrela supergigante vermelha KW Sagitarii possui uma magnitude fotográfica de 11.0 a 13.2, mas uma magnitude visual de aproximadamente 8.5 a 11.

#### 5.4.1 Correção Bolométrica

A **correção bolométrica** ( $BC$ ) é um fator que permite derivar a magnitude bolométrica através da magnitude visual. Por definição, a correção bolométrica se iguala a zero para radiações oriundas de estrelas do tipo espectral F5, como o Sol. Quanto mais a radiação distribuída diferir desse padrão, ou seja, estrelas que irradiam maior parte de sua radiação fora do espectro visível, maior é a correção bolométrica.

$$m_{bol} = m_v - BC$$

A correção é positiva para estrelas tanto mais frias quanto mais quentes que o sol, visto que vão possuir picos de radiância espectral mais distantes do intervalo associado à faixa do visível. Entretanto, por mais que a magnitude visual e bolométrica possam ser matematicamente iguais, a densidade de fluxo correspondente a bolométrica deve ser maior.

A correção também pode ser dada através de  $m_{bol} = m_v + BC$  no caso em que é dado o valor de  $BC \leq 0$ . Contudo, vale ressaltar que  $m_{bol} \leq m_v$ , logo, cabe ao próprio leitor adaptar a equação para que essa igualdade seja sempre verdadeira.

### 5.4.2 Sistema UBV

Um dos sistemas de magnitude multicolor mais utilizado é o **Sistema UBV**, criado no início da década de 1950 por Harold L. Johnson e William W. Morgan.

As magnitudes são determinadas através de três filtros,  $U$  (ultravioleta),  $B$  (azul),  $V$  (visível)

Ao mais tardar, foram incluídas mais bandas nesse sistema, sendo o mais comumente utilizado o sistema UBVRI, que inclui  $R$  (vermelho) e  $I$  (infravermelho)

	Magnitude	Largura da Banda [nm]	Comprimento de Onda Efetivo [nm]
U	ultravioleta	66	367
B	azul	94	436
V	visível	88	545
R	vermelho	138	638
I	infravermelho	149	797

### 5.4.3 Índice de Cor

A diferença entre as **magnitudes aparentes** de uma estrela em diferentes filtros é chamada de **índice de cor**, ou simplesmente de cor da estrela. O índice de cor é comumente utilizado para medir a temperatura de superfície de uma estrela, devemos destacar essa relação ao decorrer da próxima seção.

Qualquer filtro pode ser utilizado, porém os mais comuns são os filtros  $(B - V)$  e  $(V - R)$ . Perceba que o índice de cor é dado em unidades de magnitude.

Uma estrela com  $(B - V) < 0$  possui uma maior intensidade na região azul e uma maior temperatura superficial, consequentemente. Para exemplo, uma estrela com  $B = 0,7$  e  $V = 8,2$ , a magnitude no filtro B é mais brilhante que a magnitude no filtro V.

A estrela de referência para medir índices de cor é a estrela Vega. Para essa estrela, por definição, todos os três índices são equivalentes, o que implica que Vega é uma estrela branca, ou seja,  $U = B = V \Rightarrow (B - V) = 0$  e  $(U - B) = 0$ .

A seguir, temos uma amostra da calibração de vários índices de cor para estrelas de distintas temperaturas superficiais. A primeira coluna se refere a classe espectral da estrela.

Classe	$(B - V)$	$(U - B)$	$(V - R)$	$T_{ef}(K)$
O5V	-0,33	-1,19	-0,15	42.000
B0V	-0,30	-1,08	-0,13	30.000
A0V	-0,02	-0,02	0,02	9.790
F0V	0,30	0,03	0,30	7.300
G0V	0,58	0,06	0,50	5.940
K0V	0,81	0,45	0,64	5.150
M0V	1,40	1,22	1,28	3.840

Zombeck, Martin V. (1990). "Calibration of MK spectral types". *Handbook of Space Astronomy and Astrophysics* (2nd ed.). Cambridge University Press. p. 105. ISBN 0-521-34787-4

Podemos definir também o **índice de cor intrínseco**, que é simplesmente a diferença entre dois filtros medidos em função da **magnitude absoluta**. Se estivermos utilizando os filtros B e V, seria denotado por  $(B - V)_0$ .

#### 5.4.4 Avermelhamento e Excesso de Cor

Todas as relações acima são válidas somente se o espaço entre a fonte e observador for vazio, de modo que não há absorção da luz, o que sabemos não ser uma verdade.

Quando estrelas são observadas através de um meio interestelar, elas aparecem mais avermelhadas que estrelas próximas a nós. A razão para esse avermelhamento é porque a poeira interestelar absorve mais comprimentos de onda menores, como o azul, do que comprimentos de onda maiores, como o vermelho.

A poeira interestelar é composta por grãos de diferentes tamanhos, desde o mais pequenos, como hidrocarbonetos aromáticos, formados por algumas dúzias de átomos, até os mais grandes ( $\geq 2000$  nm), em sua maioria compostos por silicato e grafite. Se o comprimento de onda for menor ou comparável ao tamanho do grão, a luz é em maior parte absorvida. Se, ao invés disso, o comprimento de onda for显著mente maior, ele pode passar através do meio interestelar sem uma considerável absorção. Portanto, os menores grãos podem absorver radiação ultravioleta, enquanto os grandes podem absorver luz emitida no infravermelho por estrelas relativamente velhas. Já que o meio interestelar altera a cor de estrelas, é possível medir o grau de absorção comparando a cor observada com aquela usualmente esperada.

Desse modo, é possível definir a absorção causada pelo meio interestelar como **avermelhamento** ou **extinção**. A extinção interestelar em magnitudes é representada pela letra A com um subscrito indicando a banda espectral a que se refere, por exemplo, a extinção interestelar na banda B é  $A_B$  e na banda V é  $A_V$

$$A_\lambda = -2,5 \log \frac{F_\lambda}{F_{\lambda,0}}$$

Onde  $F_\lambda = F_{\lambda,0} e^{-\tau_\lambda}$ , sendo  $F_{\lambda,0}$  o fluxo supostamente observado sem extinção. Tal relação pode ser deduzida analogamente na seção 1.4.

Se não houvesse extinção interestelar teríamos, para alguma banda arbitrária  $\lambda$ , em relação a uma estrela de magnitude visual absoluta  $M_\lambda$  e magnitude aparente  $\lambda_0$

$$M_\lambda = \lambda_0 - 5 \log d(\text{pc}) + 5$$

Levando em conta a extinção interestelar, considerando que a magnitude aparente  $\lambda$  está afetada por avermelhamento interestelar, tal que  $\lambda_0 = \lambda - A_\lambda$ , temos a magnitude absoluta em função da distância e da magnitude aparente, levando em consideração os efeitos da extinção interestelar.

$$M_\lambda = \lambda - A_\lambda - 5 \log d(\text{pc}) + 5$$

- **Excesso de Cor**

Podemos, também, medir a extinção interestelar em função do **excesso de cor**, sendo este a diferença entre o índice de cor aparente e intrínseco. Aqui, estamos denotando o excesso de cor em função de B e V, mas ele pode ser medido utilizando quaisquer filtros.

$$E_{(B-V)} = (B - V) - (B - V)_0$$

Podemos chegar nesta relação facilmente, definindo  $M_B$  e  $M_V$

$$M_V = V - A_V - 5 \log d + 5$$

$$M_B = B - A_B - 5 \log d + 5$$

$$M_B - M_V = (B - V) - (A_B - A_V)$$

Note que, por definição,

$$A_B - A_V = E_{(B-V)}$$

Vemos assim que, mesmo que a magnitude aparente de uma estrela dependa da distância até o observador, o índice de cor não depende da distância, sendo muito útil para determinar a temperatura da estrela.

A priori, poderíamos medir a temperatura de uma estrela medindo o fluxo em dois comprimentos de onda diferentes, como U e B, ou B e V. A razão dos fluxos é uma função somente de temperatura, já que a distância se anula.

Na prática, precisamos de dois índices de cor,  $(U - B)$  e  $(B - V)$  devido à poeira interestelar na direção da estrela, que reduz U, B e V diferencialmente, já que é maior a redução para comprimentos de onda menores. Consequentemente, há uma distorção nos valores observados dos índices em relação aos valores reais, mas podemos remover as distorções medindo dois índices, isto é, podemos corrigir por avermelhamento interestelar.

Assim, a correção do fluxo pode ser obtida através do avermelhamento, já que a poeira interestelar produz uma razão constante de fluxos

$$A_V = R \cdot E_{(B-V)}$$

O valor de R está entre 3,0 e 5,0 dependendo da direção, devido à variação no tamanho e composição química dos grãos de poeira. O valor mais provável, fora das regiões de grande extinção, é de  $R = (2,99 \pm 0,27)$  de acordo com Edward L. Fitzpatrick & Derck Massa (2007, *Astrophysical Journal*, 663, 320)

### Exemplo 60: P1 - Treinamentos 2020 - Adaptado

O astrocurioso Nathan deseja determinar a temperatura de uma estrela conhecida como 3. Ele sabe que as estrelas 1 e 2 possuem os seguintes valores para o índice de cor intrínseco e temperatura:

- Estrela 1:  $(B - V)_{0,1} = 0,4$  mag e  $T_1 = 6880$  K.
- Estrela 2:  $(B - V)_{0,2} = 0,8$  mag e  $T_2 = 5280$  K.

Para a estrela 3, o índice de cor observado é  $(B - V)_3 = 0,66$  mag e sua distância é  $d_3 = 314$  pc. Sabendo que  $A_V = 1,00$  mag/kpc e que  $\frac{A_V}{E_{B-V}} = 3,0$ , determine a temperatura da estrela 3.

### Solução 60

O índice de cor observado sofre influência da absorção interestelar. Para recuperar o valor real  $(B - V)_0$ , utilizamos a relação:

$$E_{B-V} = (B - V) - (B - V)_0$$

Reorganizando para encontrar  $(B - V)_0$ :

$$(B - V)_0 = (B - V) - E_{B-V}$$

Sabemos que o excesso de cor  $E_{B-V}$  está relacionado à absorção total por:

$$E_{B-V,3} = \frac{A_{V,3}}{3}$$

E a absorção total pode ser calculada por:

$$A_{V,3} = a_V \cdot d_3$$

Substituindo os valores numéricos:

$$A_{V,3} = 1,00 \times \frac{314}{1000} = 0,314 \text{ mag}$$

$$E_{B-V,3} = \frac{0,314}{3} = 0,1047 \text{ mag}$$

Agora, determinamos o índice de cor intrínseco da estrela 3:

$$(B - V)_{0,3} = 0,66 - 0,1047 = 0,5553 \text{ mag}$$

A relação entre temperatura e índice de cor é linear dentro do intervalo especificado:

$$\frac{T - 6880}{(B - V)_0 - 0,4} = \frac{5280 - 6880}{0,8 - 0,4}$$

Resolvendo para  $T$ :

$$T = -4000 \cdot ((B - V)_0 - 0,4) + 6880$$

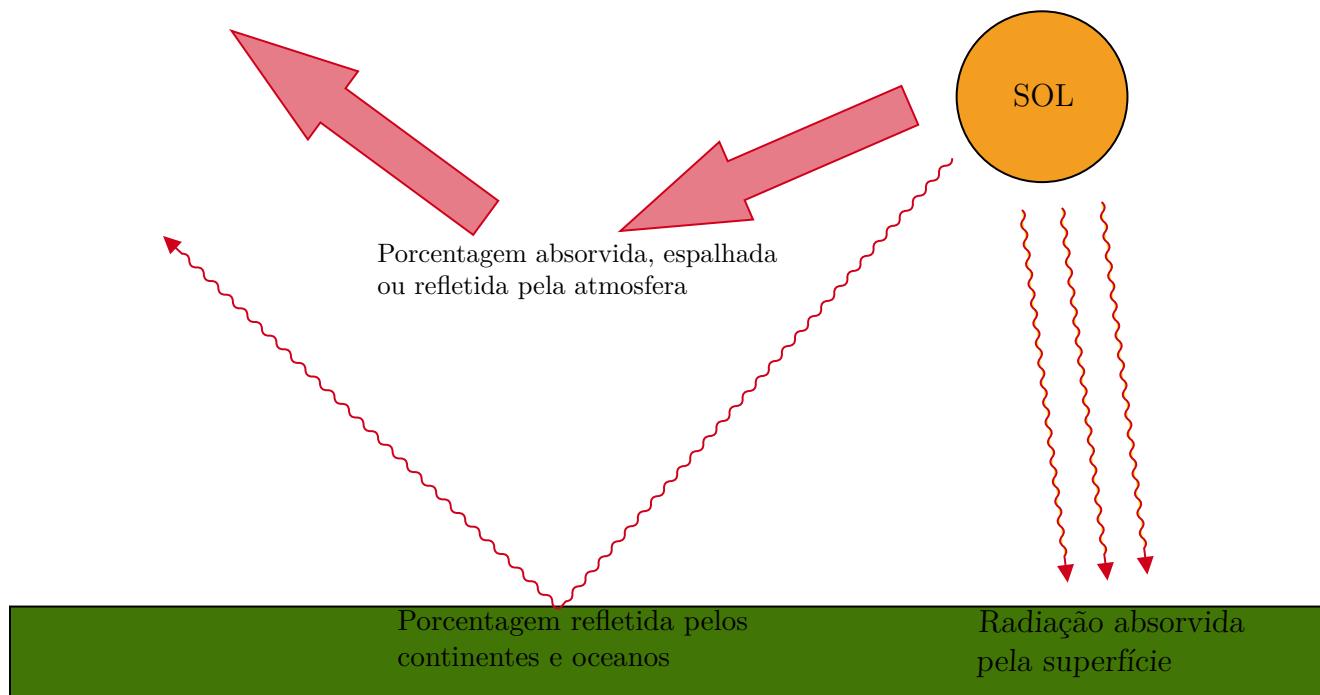
Substituindo  $(B - V)_{0,3}$ :

$$T_3 = -4000 \cdot (0,5553 - 0,4) + 6880$$

$$T_3 = 6260 \text{ K}$$

## 5.5 Extinção

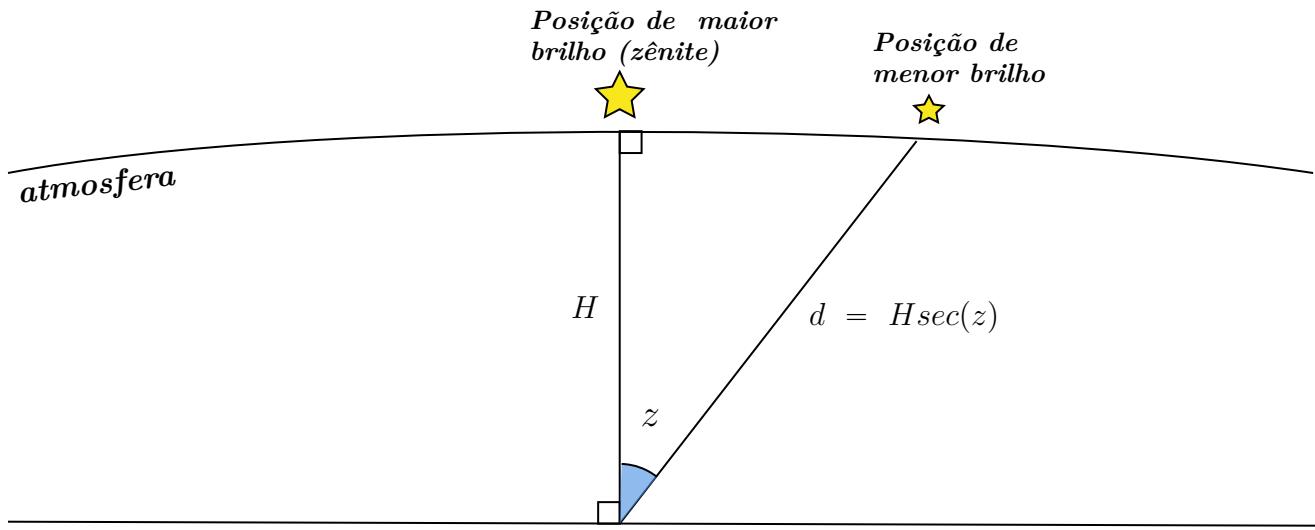
A **extinção atmosférica** é o processo pelo qual a luz de objetos celestes, como estrelas e planetas, perde intensidade ao atravessar a atmosfera terrestre. Esse fenômeno tem um impacto direto na observação dos astros, alterando a **magnitude aparente** desses objetos. Para entender isso em detalhes, vamos dividir a explicação em algumas partes.



A extinção é causada por interações da luz com as partículas e moléculas na atmosfera, como **moléculas de gases** (principalmente oxigênio e nitrogênio), **gotículas de água** (principalmente em nuvens) e **partículas de poeira**. Quando a luz de um astro entra na atmosfera, ela é **absorvida, dispersa ou refletida**.

Esses processos alteram a luz que chega aos nossos olhos ou aos detectores de telescópios, especialmente para estrelas e outros objetos distantes. A quantidade de luz que é "extinta" depende de fatores como a **altura** do objeto no céu (ângulo de observação), as **condições atmosféricas** e a **distância** do objeto.

É importante ressaltar que a quantidade de extinção atmosférica é maior quando o astro está próximo ao horizonte (onde a luz passa por uma camada maior da atmosfera) e menor quando o astro está mais alto no céu (mais perto do zênite). Isso acontece porque, quanto mais baixa a estrela no céu, **mais atmosfera** a luz precisa atravessar, interagindo com mais partículas e moléculas, o que aumenta a absorção e dispersão.



### 5.5.1 Profundidade óptica

A **profundidade óptica** é um conceito usado para descrever a medida da quantidade de absorção ou dispersão de luz à medida que ela atravessa uma substância ou meio, como uma atmosfera, uma nuvem ou uma estrela. Ela é uma medida da **"dificuldade" com que a luz consegue penetrar em um material**, sendo importante para analisarmos quantitativamente a extinção atmosférica. Matematicamente, a profundidade óptica é calculada somando, ao longo do caminho que a luz percorre, as **contribuições** de absorção ou dispersão causadas pelo material. Essa soma é feita de forma contínua, usando uma integral, que leva em conta o quanto cada ponto do meio **absorve ou desvia a luz**. Em outras palavras, é como se medíssemos, pedacinho por pedacinho, a **dificuldade** que a luz enfrenta ao atravessar o material. Quanto **maior** a profundidade óptica, **maior** a quantidade de luz que é absorvida ou dispersa, o que significa que menos luz consegue atravessar o material. Em termos mais simples, ela quantifica a **opacidade** do meio para a luz.

### Dedução

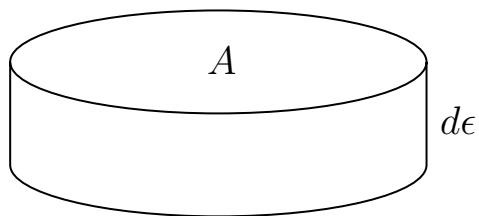
Considere uma nebulosa qualquer, com  $N$  partículas de raio  $r$  de um gás aproximadamente homogêneo, massa  $M$ , volume  $V$ , temperatura  $T$  e espessura  $\epsilon$

Considerando que a temperatura  $T$  seja baixa o suficiente para que a emissão no visível seja desprezível, demonstraremos a profundidade óptica  $\tau$  da nebulosa, ou seja, a relação entre a luminosidade inicial  $L_0$  e a luminosidade  $L$  após atravessar a nebulosa.

Como o gás é homogêneo, este possui uma densidade numérica de partículas constante:

$$\eta \equiv \frac{N}{V}$$

Considerando uma camada infinitesimal de gás de área  $A$  e espessura  $d\epsilon$



O número  $N'$  de partículas nessa camada infinitesimal é:

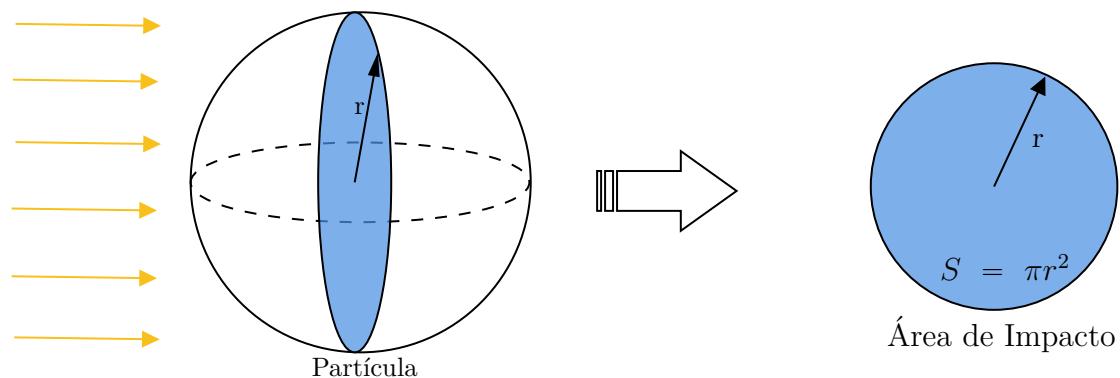
$$N' = \eta A d\epsilon$$

Considerando as partículas esféricas de raio  $r$ , a superfície total absorvida  $S$ , onde haverá luz atravessando gás é:

$$S = N' \pi r^2$$

$$S = \eta A \pi r^2 d\epsilon$$

### Raios de Luz



**Atenção:** Para não confundir a superfície de contato da luz com cada partícula, apesar destas serem esféricas, a **área de impacto** é a seção transversal da esfera(partícula), ou seja, um círculo.

Como a perda de intensidade luminosa está diretamente relacionada à porcentagem de superfície em que luz atravessará o gás:

$$\frac{dL}{L} = -\frac{S}{A}$$

Essa relação descreve a atenuação da intensidade luminosa  $L$  quando a luz atravessa um meio contendo partículas. A redução da intensidade  $dL$  é proporcional à intensidade  $L$  e à fração da área do feixe bloqueada pelas partículas, representada pela razão  $\frac{S}{A}$ , onde  $S$  é a área projetada das partículas e  $A$  é a área total do feixe. Essa fração  $\frac{S}{A}$  indica o quanto da área total do feixe é efetivamente interceptada pelas partículas, determinando a proporção de luz que será atenuada. Assim, o sinal negativo está indicando a perda de luz ao longo do caminho.

Integrando a equação anterior:

$$\begin{aligned}\int_{L_0}^L \frac{dL}{L} &= \int_0^\epsilon \frac{-\eta\pi r^2 d\epsilon A}{A} \\ \int_{L_0}^L \frac{dL}{L} &= -\eta\pi r^2 \int_0^\epsilon d\epsilon \\ \ln\left(\frac{L}{L_0}\right) &= -\eta\pi r^2 \epsilon \\ \frac{L}{L_0} &= e^{-\eta\pi r^2 \epsilon}\end{aligned}$$

Dessa forma como a profundidade óptica se relaciona com as intensidades da seguinte maneira:

$$\tau \equiv \frac{N}{V} \pi r^2 \epsilon \therefore L = L_0 e^{-\tau}$$

É relevante destacar que a profundidade óptica de cada problema pode variar, não sendo necessariamente igual ao valor obtido acima, uma vez que diferentes fatores podem ser considerados. Além disso, particularidades, como o fato de não se tratar de uma nebulosa com espessura  $\epsilon$ , podem influenciar os resultados. No entanto, a relação  $L = L_0 \cdot e^{-\tau}$  permanece válida em todas as situações.

⇒ **Obs:** Perceba que a relação do conceito de profundidade óptica funciona com diferentes conceitos de **Intensidade Luminosa**, como **luminosidades e fluxos** (que são definições diferentes). Pois ao comparar a variação da intensidade de luz de uma fonte qualquer, não entram em questão **variações da distância** da fonte, por isso, a relação mostrada anteriormente pode ser usada ao comparar variações entre fluxos e entre luminosidades da mesma forma (**Não confunda**, fluxo se relaciona com fluxo e luminosidade com luminosidade).

Agora, vamos testar seus conhecimentos com um exemplo:

### Exemplo 61

Devido a uma camada muito espessa de neblina, a magnitude aparente do sol para um observador em um dia completamente nublado por essa neblina se tornou igual à da lua cheia em uma noite sem nuvens. Desse modo, calcule o valor da profundidade óptica ( $\tau$ ) dessa neblina. Considere que as magnitudes aparente do sol e da lua cheia são respectivamente  $m_\odot = -26,75$  e  $m_\mathbb{C} = -12,76$ .

### Solução 61: Resolução

A profundidade óptica  $\tau$  da neblina pode ser calculada a partir da diferença entre as magnitudes aparentes do Sol e da Lua cheia, levando em conta a atenuação da luz devido à neblina:

$$\Delta m = 2,5 \log_{10} \left( \frac{I_\odot}{I_\mathbb{C}} \right)$$

Onde  $\Delta m = m_{\odot} - m_{\mathbb{C}}$  é a diferença de magnitude entre o Sol e a Lua cheia,  $I_{\odot}$  e  $I_{\mathbb{C}}$  são as intensidades da luz do Sol e da Lua cheia, respectivamente.

Como visto previamente, a intensidade da luz de uma estrela (ou de qualquer fonte de luz) é relacionada à magnitude aparente pela seguinte fórmula:

$$I = I_0 e^{-\tau}$$

Onde  $I_0$  é a intensidade sem a atenuação da neblina e  $\tau$  é a profundidade óptica. Sabemos que a magnitude aparente de uma fonte atenuada,  $m$ , é dada por:

$$m = m_0 - 2,5 \log_{10}(e^{-\tau})$$

Onde  $m_0$  é a magnitude aparente sem atenuação.

Agora, considerando que a magnitude aparente do Sol,  $m_{\odot}$ , foi atenuada pela neblina até se tornar igual à magnitude da Lua cheia,  $m_{\mathbb{C}}$ , podemos escrever a seguinte equação para a profundidade óptica  $\tau$  da neblina:

$$m_{\odot} - m_{\mathbb{C}} = 2,5 \log_{10} \left( \frac{I_{\odot}}{I_{\mathbb{C}}} \right)$$

Como a atenuação se dá de maneira exponencial, podemos relacionar as intensidades  $I_{\odot}$  e  $I_{\mathbb{C}}$  com a profundidade óptica:

$$\frac{I_{\odot}}{I_{\mathbb{C}}} = e^{-\tau}$$

Portanto, a equação se torna:

$$m_{\odot} - m_{\mathbb{C}} = 2,5 \log_{10}(e^{-\tau}) = -2,5\tau \log_{10}(e)$$

$$\frac{m_{\odot} - m_{\mathbb{C}}}{2,5} = -\tau \log_{10}(e)$$

Usando as seguintes propriedades logarítmicas:

$$\frac{1}{\log_{10} e} = \log_e 10 = \ln 10$$

Finalmente:

$$\tau = \frac{m_{\mathbb{C}} - m_{\odot}}{2,5} \times \ln 10$$

Substituindo os valores numéricos:

$$\tau = \frac{-12,76 - (-26,75)}{2,5} \times \ln 10 = 12,88$$

Logo:

$$\boxed{\tau \approx 12,9}$$

### 5.5.2 Influência na Magnitude Aparente

De forma prática, a extinção atmosférica aumenta a **magnitude aparente** de objetos celestes, fazendo-os parecer **menos brilhantes** do que realmente são. Isso é crucial em observações astronômicas, pois pode fazer com que astrônomos subestimem o brilho de um objeto distante se a extinção não for corretamente compensada.

Considerando a atmosfera como homogênea, a difusão na luz causada por ela é proporcional ao caminho percorrido pelo raio luminoso ( $S$ ). Sendo  $X = \frac{d}{H}$ , onde  $H$  é a distância que a luz percorre vindo do zênite, percebe-se que  $X = \sec z$  ao aproximar a atmosfera como plana, analogamente à figura acima. (Essa aproximação é válida para distâncias zenitais menores que  $z_{\max} \approx 20^\circ$ ). Assim como a extinção interestelar:

$$dL = -\alpha L dr = -\alpha LX dH = -\alpha L \sec z dH \Rightarrow L = L_0 e^{-\tau_0 \sec z}$$

Onde  $\tau_0 = \alpha H$  é a profundidade óptica no zênite. Logo  $\tau = \tau_0 \sec z$ . Vejamos como esse princípio se aplica às magnitudes:

#### Demonstração

A magnitude aparente  $m$  de um astro é relacionada à intensidade da luz  $L$  da seguinte forma, onde  $K$  é uma constante:

$$m = -2.5 \log_{10}(L) + K$$

Substituindo  $L = L_0 e^{-\tau}$ , obtemos:

$$m = -2.5 \log_{10}(L_0 e^{-\tau}) + K$$

$$m = -2.5 \log_{10}(L_0) - 2.5 \log_{10}(e^{-\tau}) + K$$

Usando a propriedade do logaritmo  $\log_{10}(e^{-\tau}) = -\tau \log_{10}(e)$ :

$$m = -2.5 \log_{10}(L_0) + 2.5\tau \log_{10}(e) + K$$

Note que a constante  $-2.5 \log_{10}(L_0) + K$  pode ser absorvida na **magnitude intrínseca**  $m_0$ , resultando em:

$$m = m_0 + 2.5\tau \log_{10}(e)$$

Substituímos a profundidade óptica  $\tau = \tau_0 \sec z$ :

$$m = m_0 + 2.5\tau_0 \sec z \log_{10}(e)$$

Portanto, definimos o coeficiente de extinção atmosférica como:

$$K = 2.5\tau_0 \log_{10}(e)$$

Chegando, assim, à expressão final:

$$\boxed{m = m_0 + K \sec z}$$

Onde:

- $m$  é a magnitude aparente observada,
- $m_0$  é a magnitude do objeto sem a extinção atmosférica
- $K$  é o **coeficiente de extinção atmosférica**
- $z$  é a distância zenital do astro no momento da observação

Lembre-se que essa fórmula somente faz sentido para **pequenas distâncias zenitais**, já que a aproximação da Terra plana deixa de valer para altos valores de  $z$ . Note que a expressão encontrada diz que  $m$  tende a infinito no limite em que  $z$  se aproxima de  $90^\circ$ , o que não é o caso.

### Exemplo 62

Um astronauta na ISS observa a estrela Vega com uma magnitude aparente  $m = 0,03$ , curiosamente, um estudante na superfície da terra não mede o mesmo valor para tal, sabendo que ele observa Vega com altura de  $80^\circ$  em relação ao horizonte, calcule a magnitude aparente medida por ele. Considere o coeficiente de extinção atmosférica igual a 0,15.

### Solução 62

Considerando que o astronauta se encontra além da atmosfera terrestre, sabemos que ele observa a estrela isento de extinção, diferentemente do aluno sobre a superfície terrestre. Dessa forma, o problema se torna uma aplicação direta da relação mostrada anteriormente:

$$m = m_0 + K \sec z$$

$$z = 90 - h \rightarrow z = 10^\circ$$

$$m = 0,03 + \frac{0,15}{\cos(10^\circ)}$$

$$m \approx 0,03 + 0,15$$

$$\boxed{m = 0,18}$$

### 5.5.3 Módulo de Distância Corrigido

Como discutido, a luz de uma estrela é atenuada à medida que percorre a atmosfera terrestre, e a quantidade dessa atenuação é dada pelo produto  $K \sec z$ , onde  $K$  é o **coeficiente de extinção** e  $\sec z$  é proporcional a "massa de ar" atravessada pela luz. Esse efeito torna a magnitude observada  $m_{\text{obs}}$  maior do que a magnitude intrínseca  $m_0$ , resultando em uma diminuição aparente no brilho da estrela devido à absorção e dispersão da luz pela atmosfera.

Este aumento na magnitude observada, causado pela extinção atmosférica, é um aspecto fundamental ao calcular a **distância** de estrelas e outros objetos astronômicos. Para calcular a **distância** de um objeto, tradicionalmente utilizamos o **módulo de distância**, que relaciona a magnitude observada à magnitude absoluta, levando em consideração a distância em parsecs. No entanto, quando a extinção atmosférica é relevante, é necessário ajustar esse cálculo para compensar a atenuação da luz.

Portanto, para obter uma medida precisa da distância de uma estrela, devemos utilizar o **módulo de distância corrigido**, que incorpora a extinção atmosférica. fórmula essa que é dada por:

$$m_{\text{obs}} - M = 5 \log(d) - 5 + Kd$$

Onde  $m_{\text{obs}}$  é a magnitude aparente observada (que já leva em conta a extinção),  $M$  é a magnitude absoluta,  $d$  é a distância da estrela em parsecs e  $K$  é o coeficiente de extinção atmosférica em mag/kpc. Assim, ao adicionar o fator de correção  $Kd$ , **que foi apresentado anteriormente**, podemos ajustar a magnitude observada para refletir mais fielmente a magnitude que seria observada na ausência de qualquer extinção, permitindo uma determinação mais precisa da distância da estrela. **Obs: Note que os fatores  $Kd$  e  $\tau_0 = \alpha H$  são idênticos, com  $H$  e  $d$  representando distâncias e  $K$  e  $\alpha$  representando coeficientes de extinção.**

### Exemplo 63

Dois amigos, um ao nível do mar, na superfície, e outro em um passeio tranquilo em sua astronave particular em uma órbita além da atmosfera terrestre, estavam testando seus conhecimentos astronômicos e decidiram medir a distância de uma estrela muito brilhante, para tal medição eles tiveram a brillante ideia de utilizar a famosa relação:

$$m - M = 5 \log(d) - 5$$

Porém, ao comparar os resultados encontrados, eles notaram que não encontraram o mesmo valor. Aponte qual foi o possível erro cometido nessa situação e qual seria a forma correta de realizar essa medição.

### Solução 63

Como você já deve ter suposto, a divergência entre os resultados parte do descuido por parte do observador localizado na superfície terrestre ao desconsiderar a extinção atmosférica, pois a magnitude aparente acaba sendo diferente em relação à que foi medida pelo outro em órbita. Dessa forma, o que o observador ao nível do mar deveria ter feito é usado a fórmula abordada anteriormente, do módulo de distância corrigido:

$$m_{\text{obs}} - M = 5 \log(d) - 5 + Kd$$

Assim, os dois chegariam ao mesmo valor de distância.

**Exemplo 64**

Uma estrela cuja magnitude absoluta  $M$  é igual a -2 se encontra a uma distância de 95pc. Calcule o coeficiente de extinção atmosférica (em mag/kpc) em questão sabendo que quando vista no zênite por um observador na superfície, ela possui uma magnitude aparente  $m = 3$ .

**Solução 64**

Como a estrela se encontra no zênite  $\rightarrow z = 0$

Desse modo:

$$\begin{aligned} m_{\text{obs}} - M &= 5 \log(d) - 5 + Kd \\ \sec(0) = 1 \rightarrow m - M &= 5 \log(95) - 5 + Kd \\ K &= \frac{3 - (-2) + 5 - 5 \log(95)}{d} \\ K &= \frac{10 - 5 \log(95)}{95} \\ K &= 1,17 \text{ mag/kpc} \end{aligned}$$

## 5.6 Fotometria planetária

A **Fotometria planetária** é a área da astronomia que estuda a luz "emitida", refletida e transmitida por **planetas, luas** e outros corpos que não emitem luz própria. Ela é fundamental para entender as propriedades físicas e químicas desses objetos, além de características como sua **composição, atmosfera e topografia**.

### 5.6.1 Temperatura na Superfície

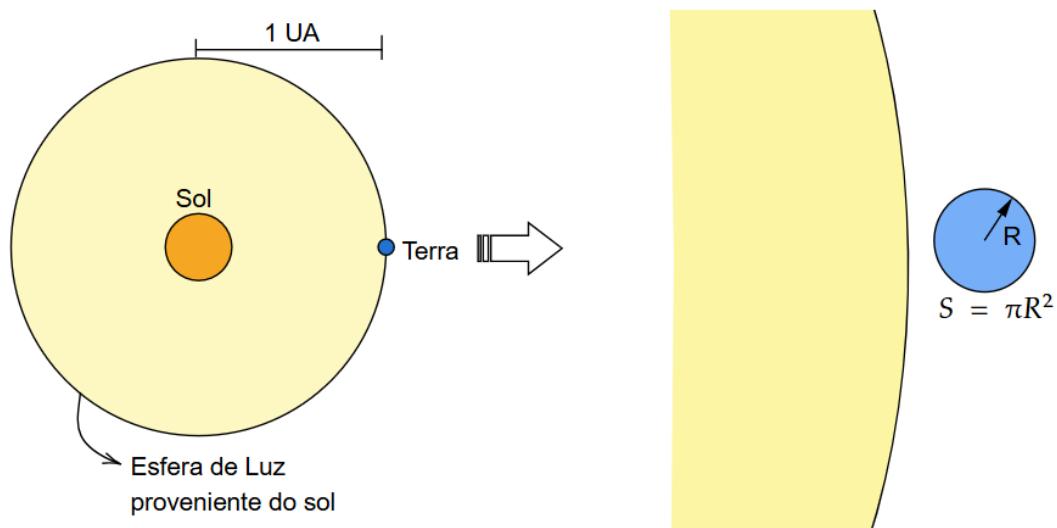
Calcular a **temperatura superficial** de luas, planetas ou corpos em geral que orbitam fontes significativas de luz, como estrelas, é uma das questões mais abordadas nesse contexto. De toda a energia que chega ao planeta ( $P_i$ ), ela se dissipa de duas principais formas, **reflexão** ( $P_r$ ) e **absorção** ( $P_{abs}$ ). O termo que se mostra mais presente nesse tipo de cálculo é o **albedo** ( $\alpha$ ), que pode ser definido como o **poder que um corpo tem de refletir a luz incidente na sua superfície**. Ele varia de 0 até 1 e normalmente é expresso em porcentagem. Ou seja, é ditado pela razão entre a **radiação refletida e incidente**.

Matematicamente:

$$\alpha = \frac{P_r}{P_i}$$

Como exemplo, mas de forma generalizada, vamos encontrar uma expressão para a temperatura superficial da Terra:

## Energia refletida pela Terra



O fluxo de energia que chega ao planeta proveniente do Sol é:

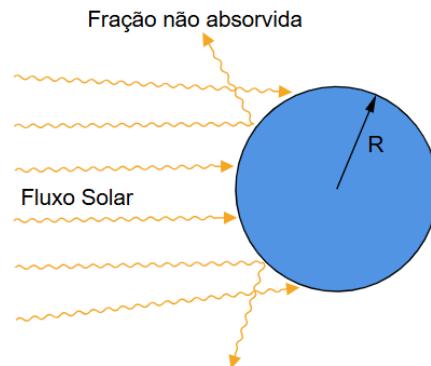
$$F = \frac{L_{\odot}}{4\pi d_{\odot \rightarrow \oplus}^2}$$

Pela definição de albedo, a potência por ela refletida será:

$$\alpha = \frac{P_r}{P_i} \Rightarrow P_r = \alpha P_i = \alpha S F$$

Onde  $S$  é a área transversal do planeta, no caso, a Terra. Portanto:

$$P_r = \frac{\alpha L_{\odot} \pi R_T^2}{4\pi d_{\odot \rightarrow \oplus}^2}$$

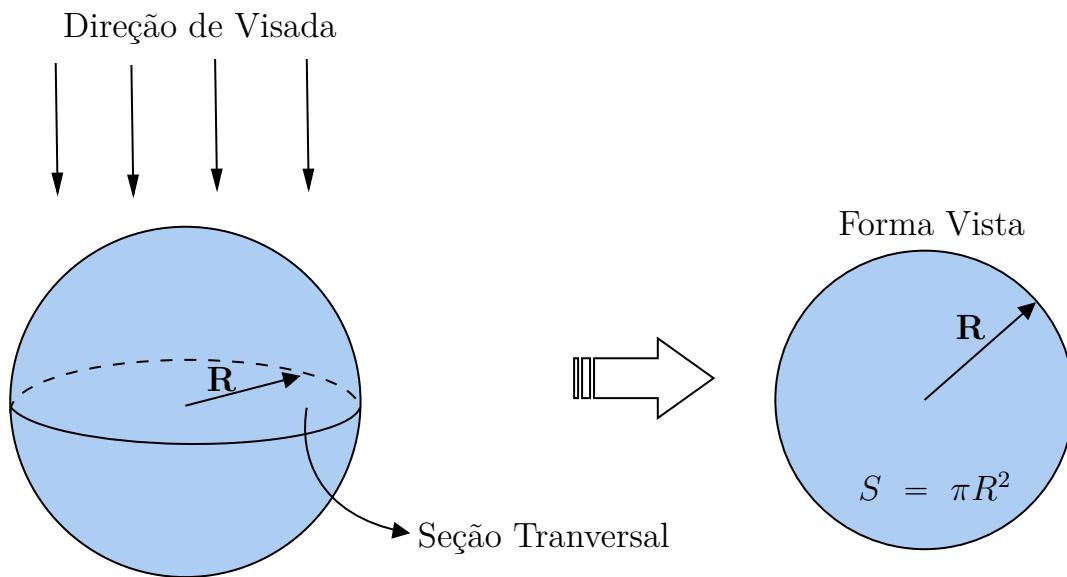


### Energia absorvida pela Terra

Logo, se um planeta reflete a energia por um fator de  $\alpha$ , a energia restante, a absorvida, será  $1 - \alpha$  da energia incidente, sendo utilizada para esquentar o corpo. Quantitativamente:

$$P_{abs} = (1 - \alpha)SF = (1 - \alpha)\pi R_T^2 \frac{L_\odot}{4\pi d_{\odot \rightarrow \oplus}^2}$$

Sendo  $P_{abs}$  e  $P_r$  em unidades de  $J/s$ .



⇒ Perceba que ao ver de cima, na realidade não enxergamos uma esfera mas sim sua **seção transversal** que corresponde a um círculo. Pela simetria da esfera, isso não ocorre apenas vendo de cima, mas em **qualquer ponto de vista**. Com o plano observado passando pelo centro da esfera, de forma que o raio da circunferência observada seja o raio da esfera.

Portanto, **Preste atenção** em como usar a área do objeto no qual está sendo absorvida a luz. Em termos de energia absorvida e refletida é usada a **área projetada da esfera**, ou seja, da Seção Transversal que há dentro dela.

### Temperatura:

Uma **aproximação** muito importante nessa conta é considerar a Terra como um planeta de **rotação rápida**, ou seja, ela rotaciona de maneira que a **energia recebida por cada ponto da esfera seja igual**, assim, todos os pontos do objeto estão com a mesma temperatura (considerando que sua superfície tem emissividade 1, ou seja, um **corpo negro** ideal).

Sendo assim, considerando que no **equilíbrio térmico**, ele tenha comportamento de **corpo negro**, podemos dizer que toda a energia absorvida será usada para ditar sua temperatura, ou seja, no equilíbrio, a **luminosidade intrínseca** do planeta será numericamente igual à **energia absorvida**.

Observe que, sem essa consideração — ou seja, sem assumir um **equilíbrio térmico** — a temperatura do sistema seria variável, já que a energia absorvida pelo planeta poderia ser utilizada para outras

funções, como **aquecer o solo ou a atmosfera**, em vez de ser inteiramente emitida como radiação térmica. Nesse caso, uma fração da energia seria convertida em radiação térmica, definindo uma temperatura  $T$ , enquanto outra fração seria usada, por exemplo, no **aquecimento dos oceanos**, resultando em uma variação adicional de temperatura  $\Delta T$ . É importante destacar que, embora essa suposição não corresponda perfeitamente à realidade, desconsiderá-la introduziria variações que tornariam os cálculos consideravelmente mais **complexos**.

$$L_{\oplus} = P_{abs} \Rightarrow 4\pi R_T^2 \sigma T^4 = (1 - \alpha) \pi R_T^2 \frac{L_{\odot}}{4\pi d_{\odot \rightarrow \oplus}^2}$$

Isolando  $T$ , temos finalmente:

$$T = \left( \frac{(1 - \alpha)L_{\odot}}{16\pi\sigma d_{\odot \rightarrow \oplus}^2} \right)^{1/4}$$

Observe que a temperatura não depende do raio do planeta. Além disso, lembre-se de que **essa expressão é adequada apenas para planetas com rotações rápidas e que possam ser aproximados como corpos negros ideais**.

### Para planetas com rotação lenta

Considerando agora que **somente um hemisfério** esteja olhando para a estrela, sua luminosidade se dará por receber energia nesta face, ou seja, **metade de uma esfera**, por isso, um pequeno detalhe tem de ser alterado na expressão final.

Com isso, a luminosidade não será mais dependente de um fator de área de  $4\pi R_p^4$  mas sim de  $2\pi R_p^4$ . Consequentemente, não existirá mais o coeficiente de 16 na temperatura superficial, mas sim a **metade deste**, ou seja:

$$T = \left( \frac{(1 - \alpha)L_{\odot}}{8\pi\sigma d_{\odot \rightarrow p}^2} \right)^{1/4}$$

#### Exemplo 65: IOAA 2007

Um planeta de rotação rápida, com raio  $R$  e albedo superficial  $\alpha = 0,25$ , está orbitando uma estrela com luminosidade  $L = 3.826 \times 10^{26} W$ . O seu raio orbital é  $d = 1,523$  UA. Supondo que, em equilíbrio térmico, toda a energia absorvida pelo planeta é reemittida como radiação de corpo negro, calcule sua temperatura superficial em Kelvin.

### Solução 65

Perceba que esta questão é uma aplicação direta dos conceitos abordados anteriormente, dessa maneira, basta aplicar os dados na expressão que encontramos:

$$T = \left( \frac{(1 - \alpha)L_{\odot}}{16\pi\sigma d_{\odot \rightarrow p}^2} \right)^{1/4}$$

$$T = \left( \frac{(1 - 0,25) \times 3,826 \times 10^{26}}{16\pi\sigma(1,523 \times 1,5 \times 10^{11})^2} \right)^{1/4}$$

$$T = (1,94481 \times 10^9)^{1/4}$$

$$T = 210K$$

Ora! Perceba que acabamos de calcular a temperatura superficial média de Marte!

**OBS:** Vale ressaltar que esta questão é apenas um dos itens da verdadeira questão da IOAA 2007, nos itens anteriores é pedido relações que foram mostradas anteriormente na demonstração da expressão encontrada para a temperatura final.

#### 5.6.2 Excentricidade e condição de vida

A **zona habitável** é a região ao redor de uma estrela onde as condições podem permitir a existência de **água líquida** na superfície de um planeta, considerada essencial para a vida como a conhecemos. Essa zona também é chamada de *zona de Goldilocks*, pois não é nem muito quente nem muito fria, mas na medida ideal.

#### Faixa de Temperatura da Zona Habitável

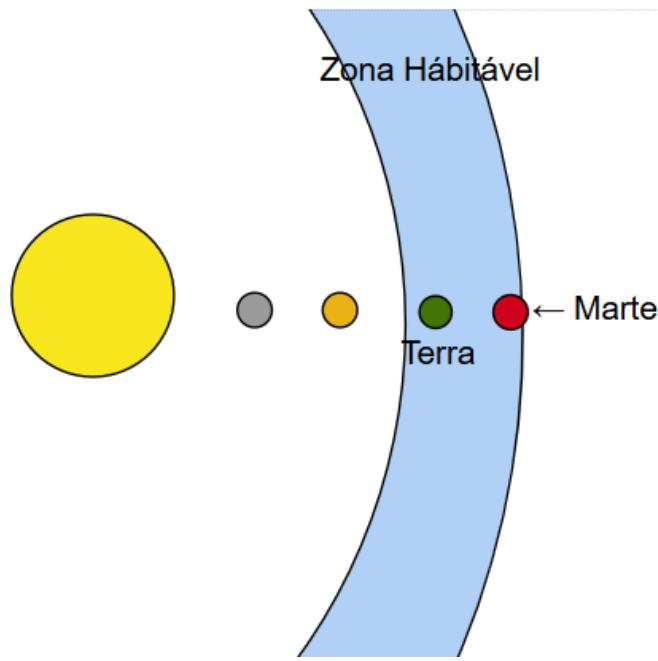
Embora a temperatura exata possa variar dependendo de vários fatores (como a composição atmosférica e o albedo do planeta), como a zona habitável é geralmente definida por **temperaturas que permitam a presença de água líquida**, essa faixa corresponde a temperaturas aproximadas entre 0°C e 100°C na superfície planetária.

#### Fatores que Influenciam a Zona Habitável

A **zona habitável** de um sistema estelar é influenciada por diversos fatores interligados. O **tipo** e a **luminosidade** da estrela são determinantes importantes. Estrelas maiores e mais quentes, como as do **tipo F**, possuem zonas habitáveis mais distantes, enquanto estrelas **menores e mais frias**, como as anãs vermelhas do **tipo M**, apresentam zonas habitáveis mais próximas. Além disso, as **características específicas do planeta** desempenham um papel crucial.

A presença de uma **atmosfera** pode amplificar ou atenuar o efeito estufa, alterando significativamente a temperatura da superfície. O **albedo**, que é a capacidade do planeta de refletir a luz, também influencia a quantidade de radiação absorvida, afetando o **equilíbrio térmico**.

Por fim, a **distância orbital** do planeta em relação à estrela é fundamental. Planetas localizados muito próximos tendem a ser extremamente quentes, com a água existindo apenas na forma de **vapor**, enquanto aqueles situados muito distantes são **excessivamente frios**, com a água predominando em estado sólido. Esses fatores combinados determinam as condições que podem favorecer a existência de **água líquida**, essencial para a vida como a conhecemos.



### Exemplos no Sistema Solar

- A Terra está dentro da zona habitável do Sol, com temperaturas médias globais que variam em torno de **-60°C a 50°C**, dependendo da região e das estações.
- Marte está tecnicamente na zona habitável externa, mas sua atmosfera fina não retém calor suficiente para suportar água líquida de forma estável.
- Vênus, embora esteja na zona habitável interna, apresenta um efeito estufa extremo que torna sua superfície quente demais para a água líquida.

### Excentricidade Limite

Nesse contexto, surge um problema que já foi tema de questão na etapa presencial do processo seletivo, a da **excentricidade limite**. Como explicado nos tópicos anteriores, a zona habitável de uma estrela depende de alguns fatores, dentre eles as **características da estrela e do tipo de planeta** em questão. Nesse exemplo, vamos calcular a **maior excentricidade que a órbita de um planeta de rotação rápida pode assumir** dentro do sistema solar:

### Condições de vida

Como ilustrado na figura acima, a zona habitável é representada por um disco ao redor da estrela, contendo um **raio menor** e um **raio maior**, estes raios são o que vão determinar a maior e menor distância que um planeta pode chegar da estrela, em outras palavras, o **periélio** e o **afélio** da **órbita limite**.

Sendo  $100^{\circ}C$  e  $0^{\circ}C$  as temperaturas a serem atingidas no raio interno e externo, respectivamente, vamos achar uma expressão para calcular as distâncias no periélio e no afélio:

$$T = \left( \frac{(1 - \alpha)L_{\odot}}{16\pi\sigma d_{\odot \rightarrow p}^2} \right)^{1/4}$$

$$T_{af} = \left( \frac{(1 - \alpha)L_{\odot}}{16\pi\sigma d_{af}^2} \right)^{1/4} = 273,15\text{K}$$

Desenvolvendo:

$$d_{af} = \left( \frac{(1 - \alpha)L_{\odot}}{(273,15)^4 \times 16\pi\sigma} \right)^{\frac{1}{2}} = 1,3 \times 10^{11}\text{m} = 0,86\text{UA}$$

Já para o periélio:

$$T_p = \left( \frac{(1 - \alpha)L_{\odot}}{16\pi\sigma d_p^2} \right)^{1/4} = 373,15\text{K}$$

$$d_p = \left( \frac{(1 - \alpha)L_{\odot}}{(373,15)^4 \times 16\pi\sigma} \right)^{\frac{1}{2}} = 7,0 \times 10^{10}\text{m} = 0,46\text{UA}$$

Logo, a zona habitável do sistema solar para um planeta com **albedo semelhante** ao da terra ( $\alpha = 0,3$ ) é de  $0,46\text{UA} - 0,86\text{UA}$  (**vale destacar que essa faixa considera não apenas um planeta com albedo semelhante ao da Terra, mas também um planeta com rotação rápida e sem qualquer tipo de atmosfera capaz de reter calor**).

Continuando, vamos achar a excentricidade limite por meio das distâncias encontradas:

$$a = \frac{a_a + a_p}{2} = 0,66\text{UA}$$

$$a_a = a(1 + e) \Rightarrow e = \frac{a_a}{a} - 1$$

$$e = \frac{0,86\text{UA}}{0,66\text{UA}} - 1 \rightarrow [e = 0,3]$$

### 5.6.3 Fases de corpos celestes

As **fases de corpos celestes** referem-se às diferentes porções iluminadas de um objeto visível a partir de um ponto de observação, normalmente causado pela **posição relativa** entre o corpo celeste, a **fonte de luz** (geralmente o Sol) e o **observador**. O fenômeno é mais notável em corpos como a Lua, planetas internos (Mercúrio e Vênus) e objetos transnetunianos, mas também pode ser observado em asteroides e outros corpos menores.

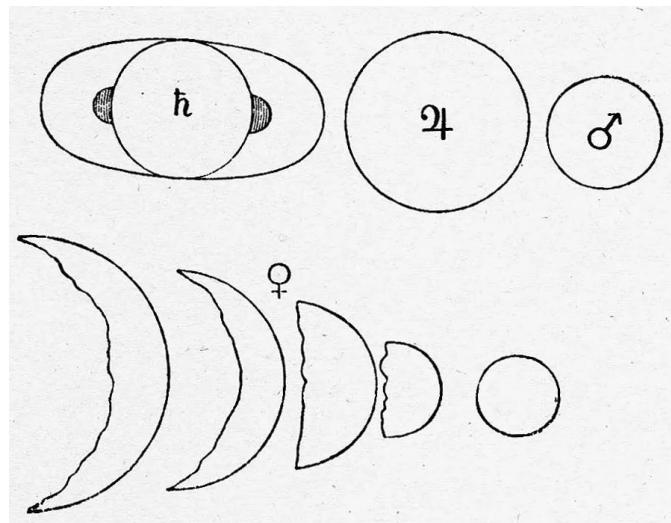


Figura 48: Ilustração de Galileu Galilei das fases de Vênus

## Descrição das Fases

As fases ocorrem devido à geometria do sistema Sol-objeto-observador. As principais configurações de fase incluem:

- **Nova:** O objeto está quase alinhado com o Sol, e a face iluminada não é visível ao observador.
- **Quarto Crescente e Minguante:** Metade do disco está iluminado, formando um ângulo reto entre o Sol, o objeto e o observador. Sendo o Quarto Crescente a fase intermediária seguida da Fase Cheia e antecedida pela fase Nova, já a fase de Quarto Crescente, o inverso.
- **Cheia:** O objeto está na posição oposta ao Sol em relação ao observador, apresentando toda a face iluminada visível.
- **Fases Intermediárias:** Essas configurações incluem as fases de gibosa crescente e gibosa minguante, que ocorrem entre o quarto crescente/minguante e a cheia/nova. Nessas fases, o disco da Lua está quase completamente iluminado ou quase totalmente apagado para o observador (isto é, aproximadamente metade da superfície da Lua está iluminada).

## Ângulo de Fase

A fase do corpo pode ser quantificada por um parâmetro geométrico chamado **ângulo de fase** ( $\alpha$ ), definido como o ângulo no vértice do triângulo Sol-objeto-observador. Este ângulo varia de  $0^\circ$  (cheia) a  $180^\circ$  (nova).

A imagem acima ilustra melhor como o ângulo de fase ( $\alpha$ ) se relaciona com a forma na qual vemos a lua.

## Curvas de Fase

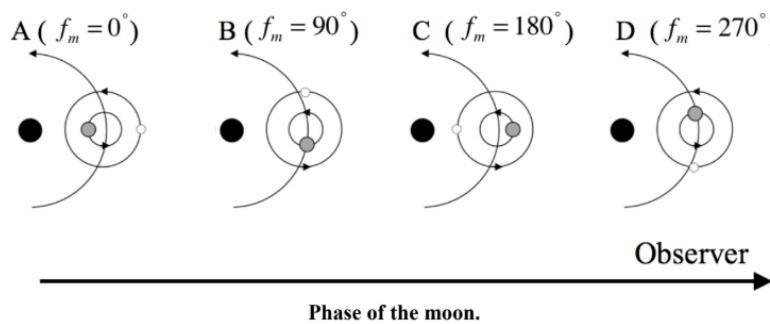
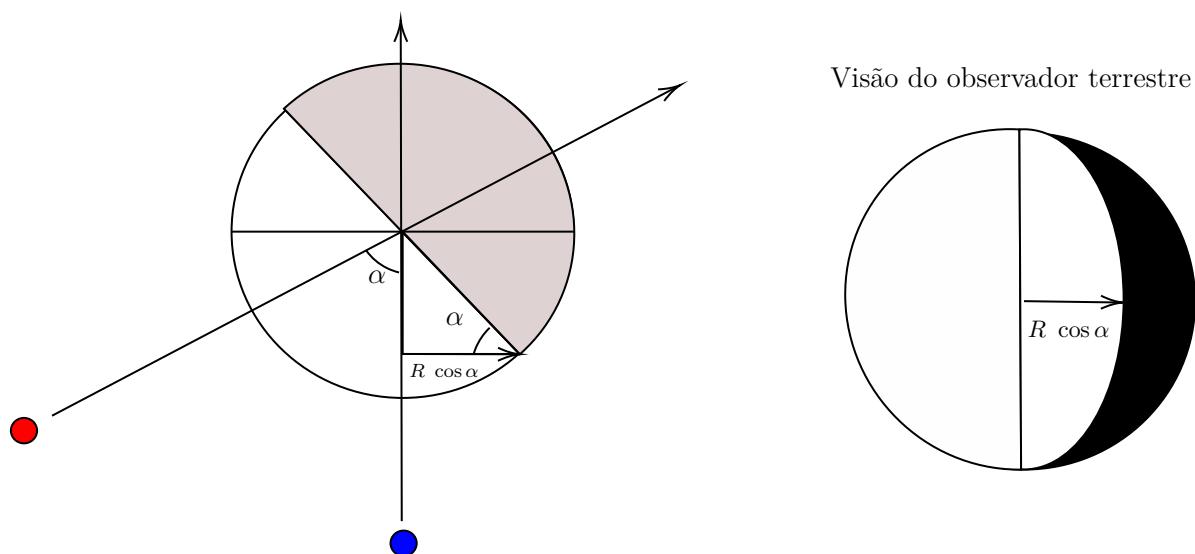


Figura 49: Representação das posições Terra-Lua de acordo com o ângulo de fase



As **curvas de fase** são gráficos que descrevem como o **brilho aparente** (geralmente expresso em termos de magnitude) de um corpo celeste varia em função do **ângulo de fase**.

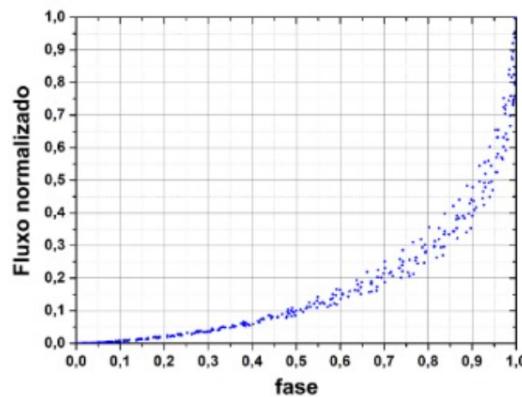


Figura 50: Gráfico Fluxo vs Fase da lua

As curvas de fase planetárias representam a relação entre a magnitude aparente de um corpo celeste e o ângulo de fase, que é o ângulo formado pelo observador, o objeto e a fonte de luz. O brilho observado depende da **fração iluminada** do objeto, da **geometria orbital** e de propriedades físicas como o **albedo** e a **rugosidade** da superfície. Essas curvas permitem inferir características da superfície, como **textura** e **composição**, além de identificar atmosferas por peculiaridades causadas pela dispersão e absorção de luz.

A **inclinação** da curva de fase também ajuda a determinar o albedo geométrico, sendo aplicada em corpos como a Lua, que apresenta aumento acentuado de brilho próximo ao ângulo de fase zero devido ao efeito de **retrodispersão** da luz, e Vênus, cujas variações extremas no brilho são causadas pela reflexão em sua **densa atmosfera**. Além disso, curvas de fase de asteroides são utilizadas para identificar materiais como gelo, metais ou silicatos. No contexto da fotometria planetária, essas curvas são indispensáveis para corrigir medições de brilho considerando a posição relativa entre o Sol, o objeto e o observador, e para modelar trajetórias e dinâmicas orbitais no sistema solar.

Os dados apresentados no gráfico acima nos mostra a seguinte curva de fase para o satélite natural da Terra:

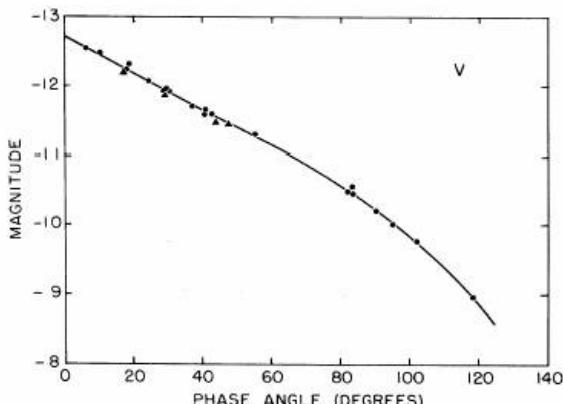


Figura 51: Curva de Fase da Lua

### Exemplo 66: Barra 2024

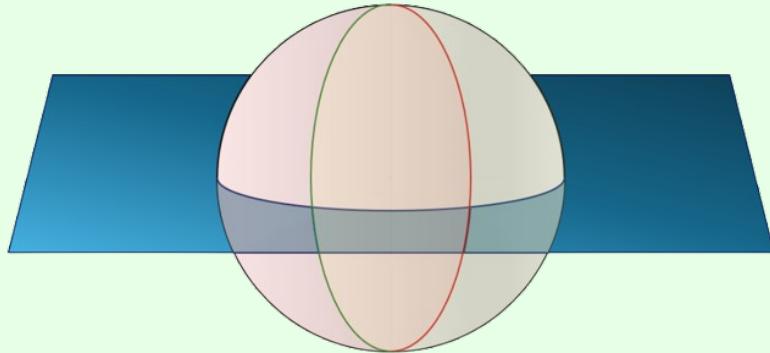
Seja  $\theta$  o ângulo entre a Lua e o Sol para um observador na Terra ( $0 \leq \theta \leq 180^\circ$ ), determine a expressão que relaciona o ângulo  $\theta$  à porcentagem da área superficial da Lua visível para esse observador.

**Obs:** Por "área superficial da Lua", entenda a área física da superfície esférica do astro, não a "área projetada" do disco lunar

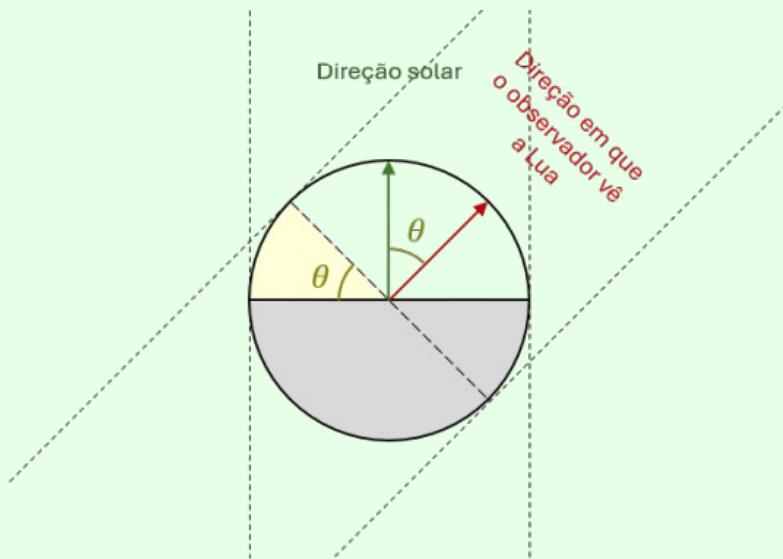
### Solução 66

Perceba que, independente da posição do Sol, a parte iluminada da Lua será sempre um hemisfério (semi-esfera). Já a parte observável da Lua, como o observador está suficientemente distante, também será sempre um hemisfério. A intersecção entre dois hemisférios é chamada fuso-esférico, e tem suas extremidades diametralmente opostas.

**OBS:** O plano contém o centro da esfera e os polos dos dois hemisférios (vermelho e verde). A intersecção entre o hemisfério vermelho e o hemisfério verde é o fuso amarelo. Perceba que os extremos do fuso são diametralmente opostos, e perpendiculares ao plano (quando vistos a partir do centro).



Observe o esquema da Terra. Assim, ao analisar a interseção das direções, teremos o tal fuso esférico.



Por simetria, a área de um fuso esférico é diretamente proporcional ao seu ângulo diedro. Sendo assim, a porcentagem referida é dada por:

$$p = \frac{\theta}{360^\circ}$$

Note que  $p$  é a fração da área lunar total vista da terra e nesse caso  $\theta$  representa justamente o ângulo de fase, ou seja, a relação encontrada mostra como esses dois fatores estão ligados.

### 5.6.4 Fotometria Lambertiana

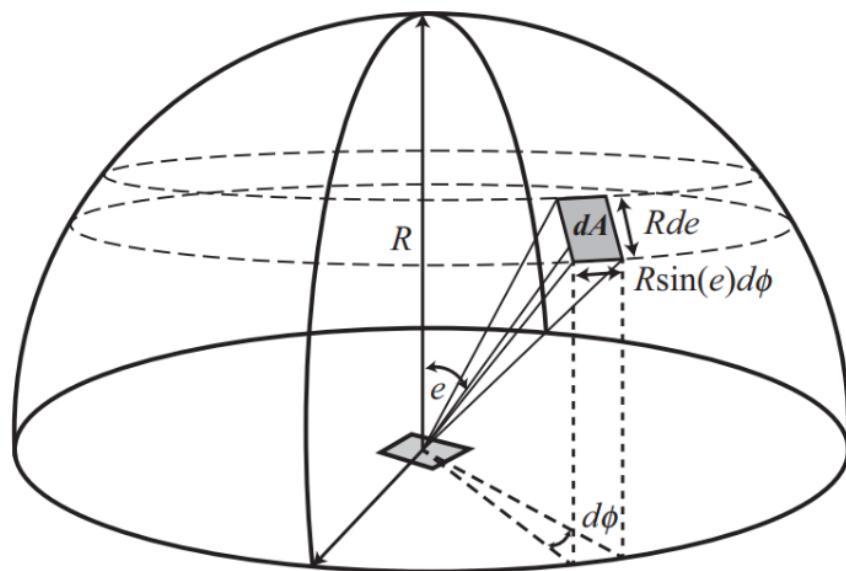
O conceito de Fotometria Lambertiana surge ao perceber que devido ao formato irregular de um corpo refletor, como luas e planetas, a distribuição da luz refletida não é uniforme. Isso nos leva a pensar que, para contabilizar os efeitos das diferentes formas e geometrias de planetas e luas, deve haver algum padrão de referência. Para a nossa sorte esse padrão existe: a **superfície lambertiana**, que é definida como uma superfície que **reflete 100% da luz incidente no hemisfério superior e apresenta a mesma radiância independentemente do ângulo de observação**.

#### Luminosidade

Para utilizar a superfície lambertiana como referência, vamos determinar a luminosidade dessa superfície ( $L_{lam}$ ) em função do ângulo de inclinação  $i$  e do fluxo  $F$ . Ao conservar a energia em uma porção  $dA$  da superfície, chegamos à seguinte equação:

$$E = \int_0^{2\pi} L_{lam} d\Omega \cos e$$

Vamos desenvolver melhor a ideia utilizando um sistema de coordenadas esféricas a partir da seguinte imagem:



Dessa maneira o infinitesimal de área  $dA$  pode ser escrito como:

$$dA = R^2 \sin e \, d\phi \, d\theta$$

Como o infinitesimal de ângulo sólido pode ser definido como  $d\Omega = \frac{dA}{R^2}$ :

$$d\Omega = \sin e \, d\phi \, d\theta$$

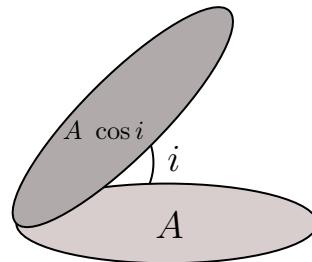
Substituindo na equação anterior com os devidos intervalos, temos:

$$E = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} L_{\text{lam}} \sin e \cos e de$$

Realizando as devidas integrações, chegamos em:

$$E = \pi L_{\text{lam}}$$

Devido às características da superfície lambertiana, existem propriedades relacionadas aos cossenos dos ângulos de inclinação e emissão que, no final, se equilibram, fazendo com que a radiância seja independente do ângulo de observação. Perceba pela seguinte figura que a inclinação afeta na quantidade de energia:



Temos que a energia nada mais é que o fluxo multiplicado por um termo cosseno:

$$E = F \cos i$$

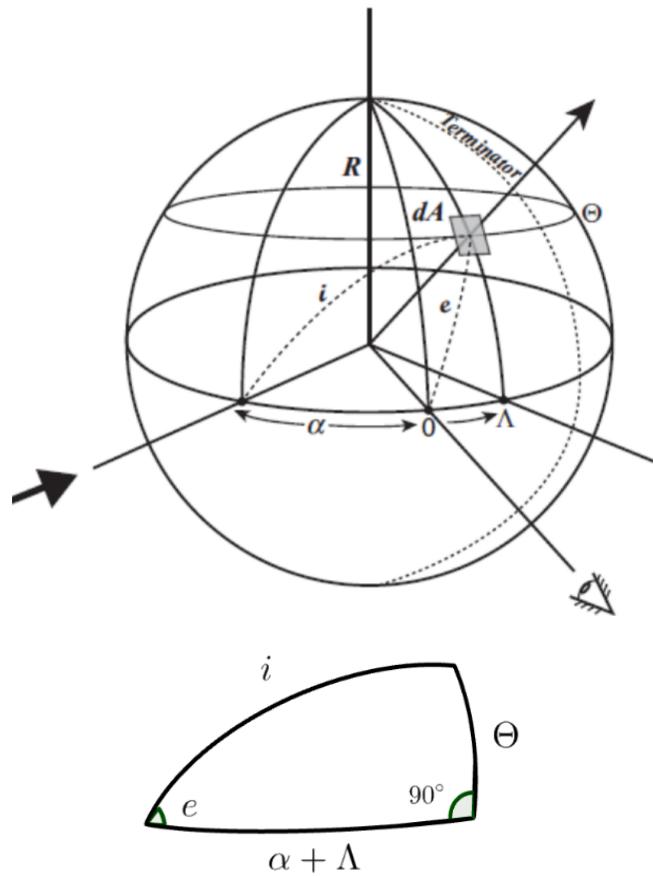
Perceba que essa energia depende da área e possui mesma unidade que o fluxo. Realmente um grande problema na fotometria são as definições e convenções de unidades. Mas saiba que estamos usando dessa maneira por aqui.

Assim, substituindo na fórmula encontrada pós-integração:

$$L_{\text{lam}} = \frac{F \cos i}{\pi}$$

### Ângulo de inclinação e emissão

Agora que temos um parâmetro de comparação, a superfície lambertiana, podemos analisar como a radiação refletida varia em diferentes regiões da superfície, nesse caso, vamos usar de exemplo a Lua. Supondo que a Lua é uma superfície lambertiana perfeita e utilizando um sistema de coordenadas esféricas onde nesse sistema, a origem está no centro da Lua, e os ângulos são medidos a partir do ponto onde a linha que liga a Terra à Lua intersecta a superfície lunar. O "Equador" desse sistema é o plano que contém a Terra, a Lua e o Sol. A posição de um elemento de área  $dA$  na superfície lunar é caracterizada pela longitude  $\Lambda$  e latitude  $\Theta$ , conforme ilustrado na imagem abaixo, do livro *Introduction to Planetary Photometry*.



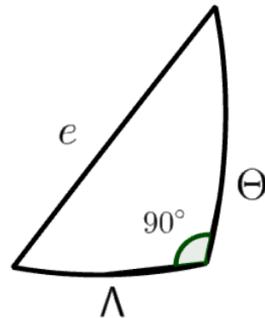
Utilizando a trigonometria esférica, podemos determinar o ângulo de inclinação  $i$  da radiação proveniente do Sol e o ângulo de emissão  $e$  da seguinte forma:

Perceba o triângulo esférico acima presente na figura anterior. Aplicando a lei dos cossenos, temos:

$$\cos i = \cos \Theta \cos(\alpha + \Lambda) + \sin \Theta \sin(\alpha + \Lambda) \cos 90^\circ$$

$\boxed{\cos i = \cos \Theta \cos(\alpha + \Lambda)}$

Perceba também o seguinte triângulo:



Aplicando a lei dos cossenos

$$\cos e = \cos \Theta \cos \Lambda + \sin \Theta \sin \Lambda \cos 90^\circ$$

$$\boxed{\cos e = \cos \Theta \cos \Lambda}$$

### Função de fase integral

Sendo o ângulo de fase  $\alpha$  o ângulo entre o Sol e a Terra vistos da Lua, e sabendo que a função de fase integral  $\Phi = \frac{I(\alpha)}{I_0}$  compara a intensidade da luz refletida quando há um ângulo  $\alpha$  com a intensidade quando  $\alpha = 0$ , vamos calcular a função de fase integral no caso da superfície lambertiana em função de  $\alpha$ :

Pela fórmula que já chegamos anteriormente:

$$L_{\text{lam}} = \frac{F \cos i}{\pi}$$

Indo para um referencial normal, saindo da visão inclinada que possui a interferência do ângulo de emissão  $e$ , temos:

$$I_{\text{lam}} = \frac{F \cos i}{\pi} \cdot A \cos e$$

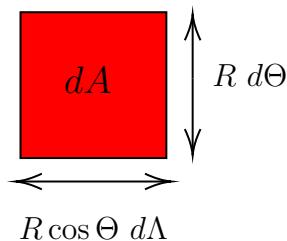
Encontrando o infinitesimal de intensidade luminosa:

$$dI_{\text{lam}} = \frac{F dA}{\pi} \cos i \cos e$$

Substituindo as fórmulas encontradas por trigonometria esférica no item anterior:

$$dI_{\text{lam}} = \frac{F dA}{\pi} \cos^2 \Theta \cos \Lambda \cos(\alpha + \Lambda)$$

Analise a seguinte figura que nos mostra a área  $dA$  analisada:



$$dA = R d\Lambda \cdot R \cos \Theta d\Theta$$

$$dA = R^2 \cos \Theta d\Theta d\Lambda$$

Temos que:

$$dI_{\text{lam}} = \frac{FR^2}{\pi} \cos^3 \Theta \cos \Lambda \cos(\alpha + \Lambda) d\Theta d\Lambda$$

Substituindo  $dA$  na fórmula encontrada anteriormente para  $dI_{\text{lam}}$ :

$$I_{\text{lam}} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{FR^2}{\pi} \cos^3 \Theta \cos \Lambda \cos(\alpha + \Lambda) d\Theta d\Lambda$$

Integrando  $\Theta$  de  $-\pi/2$  até  $\pi/2$  e  $\Lambda$  de  $-\pi/2$  até  $-\alpha$ , chegamos em:

$$I_{\text{lam}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{FR^2}{\pi} [\sin \alpha + (\pi - \alpha) \cos \alpha]$$

$$\Phi = \frac{1}{\pi} [\sin \alpha + (\pi - \alpha) \cos \alpha]$$

### 5.6.5 Atmosfera e Efeito Estufa

A **composição da atmosfera** dos planetas pode ser conhecida pela análise espectral da luz solar que eles refletem. Como essa luz solar refletida atravessa parte da atmosfera do planeta, as moléculas do gás na atmosfera **absorvem** certos comprimentos de onda, resultando em linhas escuras no espectro que não aparecem no espectro solar. A identificação dessas linhas escuras permite determinar os gases responsáveis por sua produção, assim como a **pressão e a temperatura da atmosfera**.

Os gases presentes na atmosfera de um planeta dependem dos **constituintes químicos** de que o planeta se formou e da sua massa. Os planetas terrestres se formaram sem atmosferas extensas, e sua atmosfera atual não é primitiva, mas se desenvolveu ao longo do tempo geológico a partir de gases que escaparam de seu interior. O impacto com cometas também contribuiu com alguns componentes dessa atmosfera secundária.

Já os **planetas massivos** possuem um tipo de atmosfera totalmente diferente, dominada pelos gases mais leves e abundantes, especialmente **hidrogênio e hélio**. Evidentemente, esses planetas foram capazes de reter o gás presente no sistema solar na época de sua formação.

### Retenção de atmosferas

A **retenção de atmosferas** é um compromisso entre a **energia cinética** (ou temperatura) das moléculas do gás e a **velocidade de escape** do planeta (ou de sua massa).

Sabe-se que, para um gás ideal monoatômico, a energia cinética média de suas moléculas é, pelo teorema da equipartição de energia:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}kT$$

Onde  $T$  é a **temperatura absoluta** do gás,  $m$  é a massa das moléculas do gás e  $\bar{v}$  sua velocidade média, e  $k$  é a constante de Boltzmann, com valor de  $1,38 \times 10^{-23}$  Joule/K. Portanto, a velocidade média é

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

A velocidade das moléculas, portanto, depende da **temperatura** do gás e da **massa molecular** do gás. A uma mesma temperatura, quanto **mais pesado** o gás, **menor** a velocidade média de suas moléculas. Cálculos de mecânica estatística mostram que, para um planeta reter um certo gás por bilhões de anos, a velocidade média de suas moléculas deve ser **menor** do que  $1/6$  da velocidade de escape do planeta:

$$\bar{v} \leq \frac{1}{6} v_{\text{escape}} = \frac{1}{6} \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

Onde  $G$  é a constante gravitacional,  $M$  é a massa do planeta e  $r$  é o seu raio.

Por exemplo, a velocidade média das moléculas de oxigênio, a uma temperatura de 293 K (temperatura típica na superfície da Terra), é de 0,5 km/s, e a velocidade média das moléculas de hidrogênio, na mesma temperatura, é de 2 km/s. Como a velocidade de escape da Terra é 11 km/s, que é mais do que 6 vezes maior do que a velocidade média das moléculas de oxigênio, mas é menos do que 6 vezes maior do que a velocidade média das moléculas de hidrogênio, a atmosfera da Terra **retém o oxigênio, mas não o hidrogênio**.

### Exemplo 67: Treinamento 2 - 2017

Sabemos que as partículas de gás presentes na atmosfera apresentam uma ampla distribuição de velocidades. Se a velocidade quadrática média ( $v_{r.m.s.}$ ) térmica das partículas de um determinado gás for superior a  $1/6$  da velocidade de escape ( $v_{\text{esc}}$ ), então quase todo este gás irá escapar da atmosfera do planeta. Esse fato nos ajuda a entender um pouco sobre a composição química das atmosferas.

- A partir da energia cinética média de um gás, deduza uma expressão para o peso atômico mínimo ( $A_{\min}$ ) para uma molécula de um gás diatômico tal que ela não escape da atração de um corpo celeste.
- A partir da equação encontrada, calcule  $A_{\min}$  para Plutão.
- Responda se Plutão é capaz de reter O<sub>2</sub> e N<sub>2</sub> e justifique sua resposta.

#### Dados:

- $M_{\text{Plutão}} = 1,30 \times 10^{22}$  kg,  $R_{\text{Plutão}} = 1,18 \times 10^3$  km,  $T_{\text{Plutão}} = 49$  K
- Constante gravitacional:  $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^2 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$
- Constante de Boltzmann:  $k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ m}^2 \text{ kg s}^{-2} \text{ K}^{-1}$
- Peso atômico do oxigênio: 16 uma
- Peso atômico do nitrogênio: 14 uma
- Unidade de massa atômica: uma =  $1,66 \times 10^{-27}$  kg
- Distribuição de energia de um gás diatômico:  $E = \frac{5}{2} k_B T$

### Solução 67

a) Considerando o gás diatômico e em equilíbrio térmico, podemos encontrar a relação pedida ao igualar a energia cinética de cada partícula à sua energia total:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{5}{2}k_B T$$

$$m = \frac{5k_B T}{v^2}$$

Considerando que uma molécula possuirá o peso atômico mínimo ( $A_{min}$ ) somente ao possuir a velocidade máxima, ou seja,  $\frac{1}{6}v_{esc}$ , substituímos na expressão anterior:

$$A_{min} = \frac{5k_B T}{\left(\frac{1}{6}v_{esc}\right)^2}$$

$$A_{min} = \frac{90k_B T R_p}{GM}$$

b) Substituindo os valores:

$$A_{min} = \frac{90 \cdot (1,18 \times 10^6) \cdot (1,38 \times 10^{-23}) \cdot 49}{(6,67 \times 10^{-11}) \cdot (1,30 \times 10^{22})} = 50 \text{uma}$$

c) O peso atômico de uma molécula de gás nitrogênio, e oxigênio são respectivamente 28uma e 32uma. Perceba que elas possuem um peso menor daquele previsto como mínimo para a permanência na atmosfera de plutão (50uma), portanto, **Plutão não é capaz de reter  $O_2$  e  $N_2$ .**

### Efeito Estufa

A maioria dos planetas que possuem atmosferas experimenta uma **elevação da temperatura** em sua superfície devido ao efeito de cobertamento causado pela atmosfera, conhecido como **efeito estufa**. Esse efeito é mais intenso em Vênus, que, na realidade, apresenta uma temperatura superficial mais alta do que Mercúrio, embora esteja muito mais distante do Sol. Isso ocorre devido à grande quantidade de  $CO_2$  na atmosfera de Vênus.

Como o dióxido de carbono é opaco à **radiação infravermelha**, quando a superfície do planeta absorver a luz solar e novamente irradiar parte dela como calor (radiação infravermelha), o  $CO_2$  na atmosfera **impedirá que essa radiação escape**, resultando no aquecimento da superfície. O efeito estufa influencia o **albedo** de um planeta, alterando sua capacidade de refletir a luz solar. O aumento da concentração de gases de efeito estufa, como o dióxido de carbono, pode modificar a composição e a densidade das nuvens na atmosfera, o que afeta a quantidade de luz refletida de volta ao espaço.

Por exemplo, o aumento da cobertura de nuvens pode elevar o albedo ao refletir mais radiação solar. Em contrapartida, o aquecimento causado pelo efeito estufa pode derreter calotas polares e reduzir áreas cobertas por gelo, diminuindo o albedo, já que superfícies mais escuras absorvem mais luz solar.

### Exemplo 68

O albedo atual de Vênus é de cerca de 0,77 e tem uma temperatura média em sua porção iluminada de cerca de 465°C. Caso Vênus não tivesse atmosfera, acredita-se que a temperatura média do seu hemisfério virado para o sol seria de 77,2°C. Dessa forma, estime qual a variação no albedo de Vênus causado pela sua atmosfera.

### Solução 68

Para calcular a variação do albedo, vamos calcular qual deve ser o novo albedo para a temperatura sem atmosfera (Lembrando que Vênus é um planeta de rotação lenta):

$$T = \left( \frac{(1 - \alpha)L_{\odot}}{8\pi\sigma d_{\odot \rightarrow p}^2} \right)^{1/4}$$

$$\alpha = 1 - \frac{T^4 \cdot 8\pi\sigma d_{\odot \rightarrow p}^2}{L_{\odot}} = 1 - \frac{(350,2)^4 \cdot 8\pi \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot (0,72UA)^2}{3,846 \cdot 10^{26}W}$$

$$\alpha = 0,35$$

Logo, a atmosfera de Vênus altera o albedo do planeta em aproximadamente 0,42.

### 5.6.6 Libração

A libração é um fenômeno observado em corpos celestes, especialmente em luas e planetas, que descreve a oscilação ou o movimento de "balanço" de um objeto em torno de um ponto médio de seu movimento. Esse movimento faz com que, de tempos em tempos, diferentes partes da superfície de um corpo celeste, como uma lua, possam ser visíveis a partir de outro corpo (como o planeta que a orbita). A libração é mais comumente associada às luas que estão em rotação síncrona, como a Lua da Terra, mas pode ocorrer em outros contextos astronômicos também.

Existem três principais tipos de libração observados em corpos celestes que apresentam rotação síncrona:

**1. Libração longitudinal:** Refere-se à oscilação do corpo ao longo de sua órbita, o que permite que, de tempos em tempos, partes de sua superfície além do ponto mais próximo do observador se tornem visíveis. Esse tipo de libração ocorre devido à variação da velocidade orbital do corpo em sua órbita elíptica. A lua, ao orbitar o planeta, não mantém um movimento perfeitamente uniforme,

então a variação de velocidade ao longo da órbita faz com que ela "balance" um pouco, permitindo que diferentes áreas de sua superfície sejam vistas.

**2. Libração latitudinal:** Esse tipo de libração ocorre devido à inclinação do eixo de rotação do corpo celeste em relação à sua órbita. Quando um objeto não tem o eixo de rotação perfeitamente alinhado com o plano de sua órbita, ele pode oscilar levemente para cima e para baixo, permitindo que diferentes partes da superfície sejam vistas ao longo do tempo. No caso da Lua, por exemplo, a inclinação do seu eixo de rotação em relação à sua órbita provoca uma pequena oscilação de sua posição, permitindo ver um pouco além dos polos.

**3. Libração diurna:** Esse fenômeno ocorre devido à variação no ângulo de observação ao longo do dia, particularmente quando o observador está na superfície de um planeta. A posição do observador em relação ao corpo celeste muda ao longo do dia, o que pode resultar na observação de diferentes regiões do corpo, criando a sensação de libração.



A figura abaixo ilustra o movimento de libração da lua, note a variação nas posições das crateras lunares. A melhor forma de se observar este fenômeno é por meio de um vídeo, se possível, procure por uma ilustração por meio de um vídeo na internet.

A libração é, portanto, um fenômeno que resulta da interação gravitacional entre um corpo celeste e o planeta que ele orbita. Ela ocorre devido à rotação síncrona e à variação na velocidade orbital, no eixo de rotação e na forma do corpo celeste. Embora a Lua mostre sempre a mesma face para a Terra, graças à libração, observadores conseguem ver mais de 50% de sua superfície ao longo do tempo. Esse fenômeno é um exemplo fascinante das complexas interações gravitacionais no universo.

## 5.7 Eclipses

Os eclipses são fenômenos celestes fascinantes que ocorrem quando um corpo celeste projeta sua **sombra** sobre outro ou bloqueia parcialmente a luz de uma fonte luminosa, geralmente o Sol. Visualmente, os eclipses revelam interações dinâmicas entre os corpos do Sistema Solar, fornecendo oportunidades únicas para estudo científico e contemplação. Esses eventos são tanto previsíveis quanto raros, sendo divididos em dois tipos principais: eclipses solares e lunares.

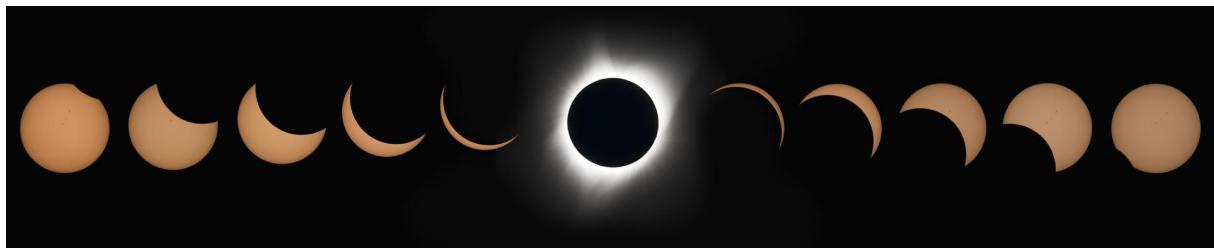


Figura 52: Sequência de imagens de um Eclipse Solar Total

É importante lembrar que o conceito de eclipse também se faz presente no contexto de outros sistemas estelares pelo universo, sejam entre estrelas e planetas ou em sistemas com **mais de uma estrela**. Como foi mostrado no capítulo anterior de sistemas binários. Neste capítulo, vamos focar principalmente no contexto de nossa vizinhança, o **sistema solar**.

### 5.7.1 Classificações

#### Lunares

Começando pelos eclipses **lunares**, existem três tipos principais, dependendo do alinhamento e da posição da Lua em relação à sombra da Terra: **penumbral, parcial e total**.

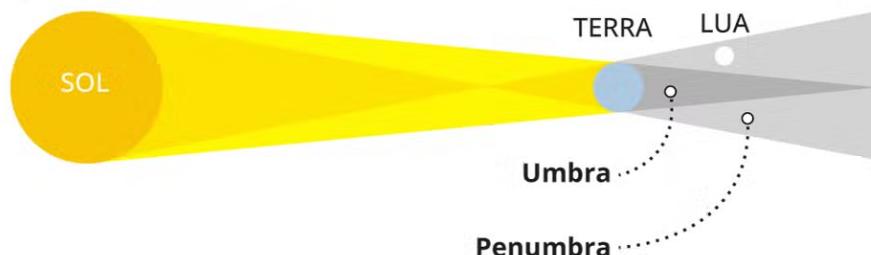
No eclipse **penumbral**, a Lua passa apenas pela penumbra da Terra, a região mais externa da sombra, onde a luz solar é parcialmente bloqueada. Esse tipo de eclipse é **sutil**, com a Lua apresentando um escurecimento leve, muitas vezes imperceptível a olho nu. Já no eclipse **parcial**, parte da Lua atravessa a **umbra**, a região central da sombra da Terra, enquanto o restante permanece na **penumbra**. Nesse caso, uma parte da Lua aparece visivelmente escurecida, enquanto o restante mantém um brilho normal ou levemente reduzido. Por fim, no **eclipse total**, a Lua inteira entra na umbra, ficando completamente imersa na sombra terrestre. Apesar de estar na sombra, a Lua não desaparece, adquirindo uma coloração **avermelhada** ou alaranjada devido à refração da luz solar pela atmosfera da Terra. Veja a seguinte representação:

#### Solares

Os eclipses **solares** ocorrem quando a Lua passa entre a Terra e o Sol, bloqueando total ou parcialmente a luz solar que chega à superfície terrestre. Eles são classificados em três tipos principais: **total, parcial e anular**.

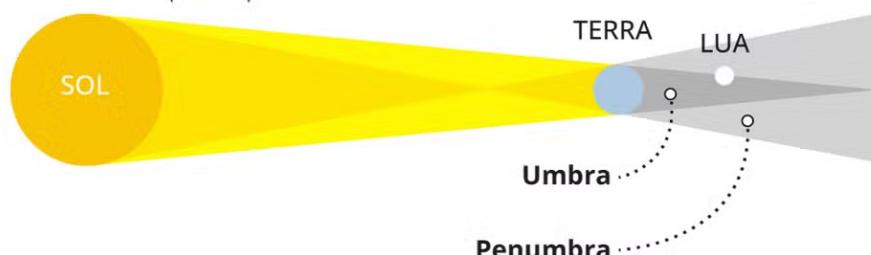
### ECLIPSE LUNAR PENUMBRAL

A Lua passa pela penumbra



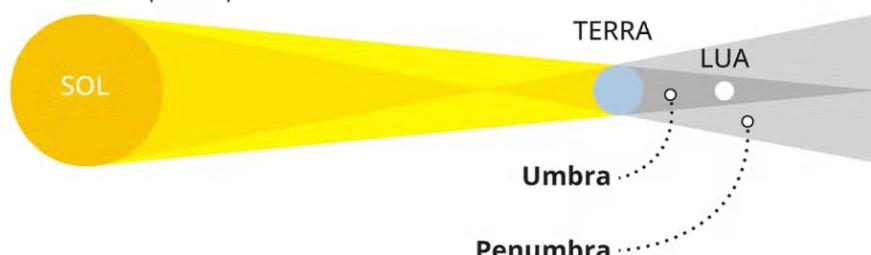
### ECLIPSE LUNAR PARCIAL

Parte da Lua passa pela umbra



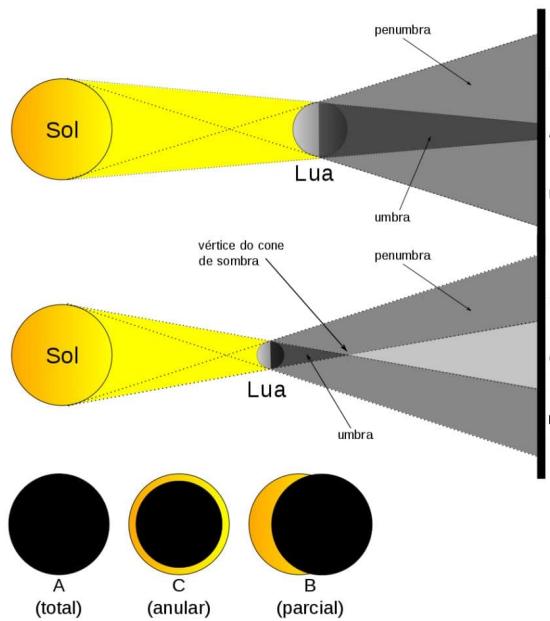
### ECLIPSE LUNAR TOTAL

Toda a Lua passa pela umbra



No eclipse **total**, a Lua cobre completamente o disco solar, escurecendo o céu momentaneamente e revelando a coroa solar, a camada mais externa e brilhante da atmosfera do Sol. Esse tipo de eclipse só ocorre em regiões específicas da Terra situadas na trajetória da umbra da Lua, a sombra mais densa projetada por ela. Já no eclipse **parcial**, a Lua cobre apenas uma parte do Sol, deixando o restante visível. Esse fenômeno é percebido em áreas **fora da zona de umbra**, onde a **penumbra** da Lua atinge a Terra.

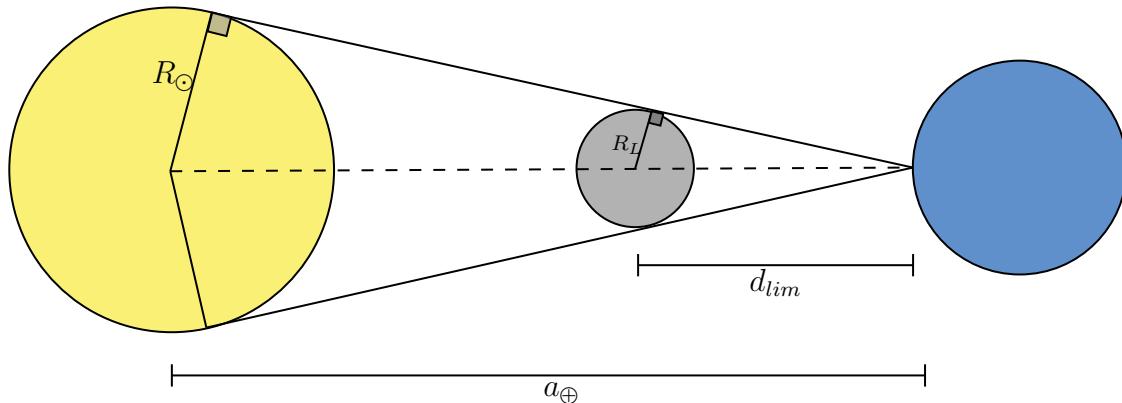
Por fim, no eclipse **anular**, a Lua se posiciona exatamente entre a Terra e o Sol, mas, por estar em um ponto mais **distante** da Terra em sua órbita elíptica, não consegue cobrir completamente o disco solar. Isso resulta em um **"anel de fogo"**, em que a borda do Sol permanece visível ao redor da Lua. Esses diferentes tipos de eclipses solares são resultado das interações entre o alinhamento dos corpos celestes e as variações nas distâncias entre a Terra, a Lua e o Sol, proporcionando espetáculos astronômicos que variam em aparência e alcance geográfico. Veja a ilustração abaixo:



### 5.7.2 Análise Geométrica

#### Geometria do eclipse solar

Um eclipse solar acontece quando a Lua passa entre a Terra e o Sol, bloqueando **total ou parcialmente** a luz solar e projetando uma sombra sobre a Terra. Esse fenômeno só ocorre durante a fase de **Lua Nova** e depende do alinhamento exato entre os três corpos celestes, veja:



A imagem acima mostra (**totalmente fora de escala**) uma visão geométrica generalizada de como os 3 corpos se dispõem nos eclipses solares, representando a condição limite para um ponto na Terra observar um eclipse solar **total**, onde  $d_{lim}$  é a distância **máxima** entre a lua e a terra para que isso ocorra. Perceba que se  $d_{lim}$  for **menor**, teremos uma área **maior** da terra conseguindo observar o eclipse de forma **total**, porém se  $d_{lim}$  for **maior**, somente será possível observar o eclipse de forma **parcial ou anular**.

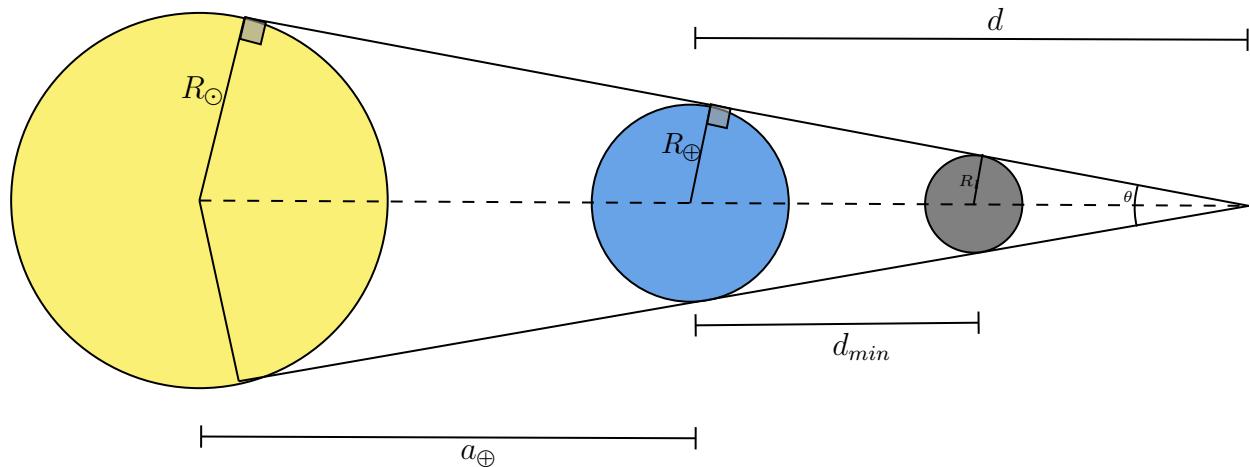
Sendo  $\theta$  o ângulo entre a linha que liga o **centro do sol** ao **ponto sobre a superfície da terra** e a linha **tangente a superfície do sol** partindo da superfície da terra, pela geometria do problema podemos deduzir o seguinte:

$$\sin(\theta) = \frac{R_L}{d_{lim}} = \frac{R_\odot}{a_\oplus} \Rightarrow d_{lim} = \frac{a_\oplus \cdot R_L}{R_\odot}$$

Substituindo os valores, obtemos  $d_{lim} + R_\oplus = 3,8 \cdot 10^8 m$ . Como a distância entre esses corpos quando a Lua está em seu **afélio** é  $d_{af} \approx 4,1 \cdot 10^8 m$  e quando está em seu **periélio** é  $d_p \approx 3,5 \cdot 10^8 m$  temos que  $d_p < d_{lim} + R_\oplus < d_{af}$ . O que possibilita a existência dos eclipses solares **total ou anular**, a depender dessa distância.

### Geometria do eclipse lunar

Enquanto os eclipses solares ocorrem quando a Lua oculta o Sol, eclipses lunares acontecem quando a Lua passa pela sombra da Terra. Novamente, é necessário haver um certo grau de alinhamento entre esses corpos, porém, nos lunares a lua está oposta em relação ao sol do ponto de vista da terra, de modo que eles só acontecem nas luas cheias (O que não é muito difícil de deduzir). Você já se perguntou por que não acontecem eclipses lunares anulares como os do sol? Pois bem, como a distância Terra-Lua não é grande o suficiente, não acontecem eclipses anulares da Lua, perceba:



Nessa imagem,  $a_\oplus$  é o semieixo maior da órbita terrestre, ou seja, 1 UA e  $d_{min}$  é a **distância mínima entre os centros da terra e da lua para que hajam eclipses lunares anulares**. Já  $d$  representa a distância do centro da terra até o fim do cone de sombra causado pela passagem da terra em frente ao sol, servindo apenas para efeito de simplicidade nos cálculos. Dessa forma, vamos descobrir quanto mede  $d_{min}$ :

$$\sin(\theta) = \frac{R_\oplus}{d} = \frac{R_\odot}{a_\oplus + d}$$

Isolando  $d$ :

$$\Rightarrow d = \frac{a_\oplus \cdot R_\oplus}{R_\odot - R_\oplus} \approx 1,383 \cdot 10^9 m$$

Agora para  $d_{min}$ :

$$\sin(\theta) = \frac{R_\oplus}{d} = \frac{R_l}{d - d_{min}}$$

Isolando  $d_{min}$ :

$$d_{min} = \frac{d}{R_\oplus} \cdot (R_\oplus - R_l) \approx 1 \cdot 10^9 m$$

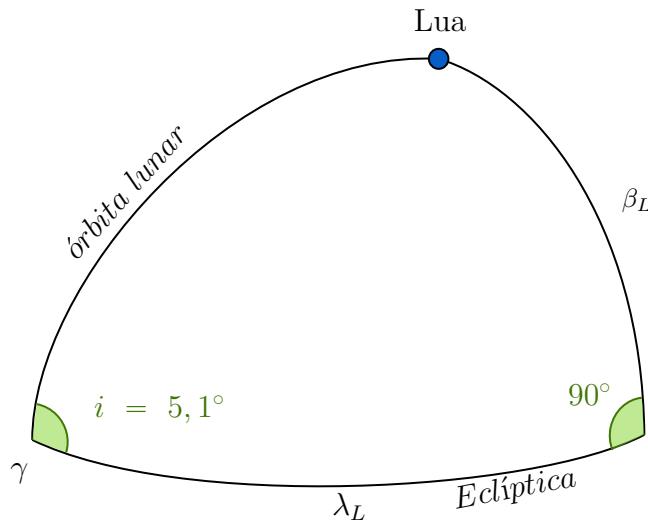
Perceba que se  $d_{min}$  for maior (até certo ponto) haveriam eclipses lunares anulares, da mesma forma, se ele for menor só seriam possíveis de ocorrer eclipses **parciais ou totais**, por conta do **raio da seção transversal do cone de sombra gerado pela terra que supera em comprimento o raio lunar**. Perceba o valor encontrado:  $d_{min} = 1 \cdot 10^9 m$ . Ele é muito maior que a distância do apogeu da lua ( $407.000 Km$ ), tornando impossível a existência de eclipses lunares anulares.

### 5.7.3 Duração total de um eclipse

Um problema muito comum que surge nesse contexto é o de calcular a duração total de um eclipse, sendo assim, em primeira análise, vejamos como abordar esse problema no contexto de eclipses lunares:

#### Coordenadas lunares

Considere o seguinte triângulo esférico:



Onde:  $\gamma$  é o ponto vernal;  $\beta_L$  é a latitude eclíptica da lua;  $\lambda_L$  é a longitude eclíptica da lua e  $i$  representa a inclinação da órbita lunar em relação à eclíptica; Nossa intenção é achar uma relação para a longitude eclíptica da lua, pois ela vai se apresentar necessária no cálculo final mostrado mais à frente. Logo, perceba:

$$\lambda_L(t) = \lambda_0 + \omega_L t$$

Em que  $\lambda_0$  é a longitude eclíptica inicial da lua em um dado momento de referência qualquer.

Porém, nos eclipses lunares, pensando em longitudes eclípticas, a lua está diametralmente oposta ao sol, logo:

$$\lambda_L = \lambda_{\odot} + 180^\circ$$

No entanto, perceba que a longitude eclíptica do sol é facilmente calculada sabendo a data do eclipse, por meio da seguinte relação:

$$\lambda_{\odot} = \omega_{\odot} t = \frac{360^\circ}{365,25} \cdot N$$

Onde  $N$  é o número de dias após o equinócio vernal, evento em que  $\lambda_{\odot} = 0$ .

Logo, aplicando a **lei das cotangentes** no nosso triângulo esférico:

$$\cot \beta_L \cdot \sin \lambda_L = \cot i \cdot \sin 90^\circ + \cos 90^\circ \cdot \cos \lambda_L \Rightarrow \tan \beta_L = \sin \lambda_L \cdot \tan i$$

Logo:

$$\boxed{\beta_L = \arctan(\sin \lambda_L \cdot \tan i)}$$

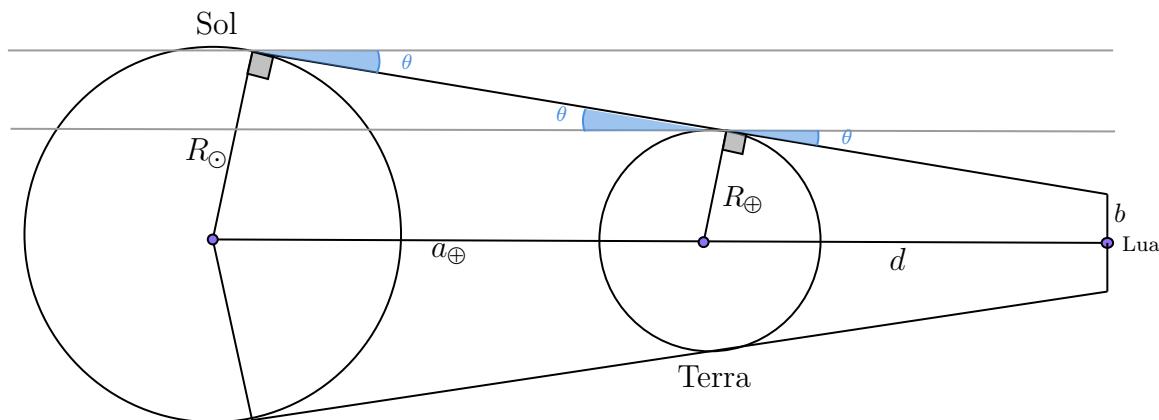
Relacionando diretamente  $\beta_L$  com o dia do ano, temos:

$$\boxed{\beta_L = \arctan[\sin(180^\circ + \frac{360^\circ}{365,25} \cdot N) \cdot \tan i]}$$

Lembrando que essa relação somente faz sentido em dias de eclipses lunares, sendo  $N$  o número de dias passados desde o último equinócio de março.(Ao pensar em um problema no qual não se tenha um eclipse, a longitude eclíptica da lua deve ser encontrada da maneira mostrada anteriormente, considerando uma longitude inicial de referência e a velocidade angular da lua).

## Análise Geométrica

Perceba a geometria da situação:

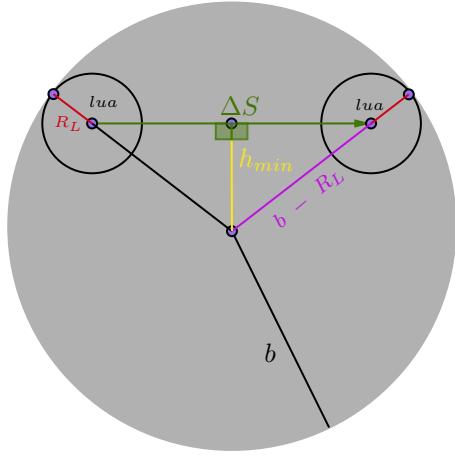


Onde  $b$  representa o raio da sombra causada pela terra,  $d$  a distância Terra-Lua. Agora, perceba o ângulo  $\theta \ll 1\text{rad}$ :

$$\theta \approx \tan \theta = \frac{R_{\odot} - R_{\oplus}}{a_{\oplus}} = \frac{R_{\oplus} - b}{d}$$

$$\Rightarrow b = R_{\oplus} - \frac{d}{a_{\oplus}} \cdot (R_{\odot} - R_{\oplus})$$

Com  $b$  conseguimos calcular o deslocamento escalar da Lua dentro do cone de sombra da Lua, veja:



$$\Rightarrow \Delta S = 2\sqrt{(b - R_L)^2 - h_{min}^2} = V_L \Delta t$$

Onde  $V_L = \sqrt{GM(\frac{2}{d} - \frac{1}{a_L})}$  é a velocidade da Lua,  $\Delta t$  é a duração do eclipse e  $h_{min}$  é a mínima distância que o centro da Lua atinge do centro da sombra. Perceba que:

$$h_{min} \approx \beta \cdot d$$

Dessa forma, note que não precisamos considerar a velocidade da Terra, pois  $V_L$  já está no referencial da Terra. Manipulando as equações, conseguimos obter uma expressão final para  $\Delta t$  em função de parâmetros mais essenciais, porém, ela se apresenta muito extensa, por isso, se torna mais prático apenas substituir os valores de certos parâmetros em uma expressão mais resumida do cálculo, como a mostrada acima. De qualquer forma, uma expressão completa para  $\Delta t$  utilizando de dados mais essenciais pode ser a seguinte:

$$\boxed{\Delta t = \frac{2\sqrt{(b - R_L)^2 - [d \cdot \arctan(\sin \lambda_L \cdot \tan i)]^2}}{\sqrt{GM(\frac{2}{d} - \frac{1}{a_L})}}}$$

Ufa! Como foi dito, a expressão final acaba sendo muito extensa, por isso, o importante é que você tenha compreendido a **geometria e funcionalidade** por trás desse cálculo, de forma que você consiga obter uma expressão mais enxuta onde sejam necessários parâmetros mais resumidos, como foi mostrado desde o início do subtópico.

### Exemplo 69: (Treinamentos - 2022 -Total Eclipse... Central?)

Na madrugada do dia 16 de maio de 2022, acontecerá um Eclipse Lunar Total. Bismarcos, eminente observador de fenômenos astronômicos, posiciona seu telescópio na cidade de São

José dos Campos (SP), cuja longitude é  $\lambda = -45,9^\circ$  (UTC-3). Ele consulta, então, seu almanaque e descobre que o primeiro contato da Lua com a região de penumbra se dará às 1:31 *UT*, ao passo que o último contato será às 6:52 *UT*.

- (a) Determine a hora solar local do primeiro e último contatos da Lua com a penumbra na cidade do astrônomo. Com base nessas informações, determine: Bismarcos conseguirá ver, em algum momento, a Lua tocando a região de penumbra? Responda com SIM ou NÃO. Despreze os efeitos de equação do tempo.

A duração de um eclipse lunar é determinada pelo tempo em que a Lua leva para cruzar as regiões de sombra terrestre. Nesse sentido, deve-se conhecer os tipos de eclipses. O Eclipse Lunar Penumbral ocorre quando ao menos parte da Lua adentra a região de penumbra. O Eclipse Lunar Parcial, por sua vez, ocorre quando parte da Lua encontra-se na região de umbra. Por fim, um Eclipse Lunar Total acontece quando todo o disco lunar está na região de umbra. Há ainda um tipo raro, o Eclipse Lunar Central, no qual o disco lunar cruza o

eixo do cone de sombra da Terra durante o Eclipse Lunar Total. Pode-se citar ainda um caso especial, o Eclipse Lunar Central perfeito (nomenclatura não oficial), caracterizado pelo fato de o centro da Lua cruzar o centro do cone de sombra. Para os itens abaixo, considere o caso de um Eclipse Lunar Central perfeito. Assuma desprezível o efeito de refração atmosférica.

- (b) Determine o diâmetro do cone de umbra a ser atravessado pela Lua, em km.  
 (c) Calcule a duração de um Eclipse Lunar Central perfeito, em minutos.  
 (d) Analogamente, determine o diâmetro, em km, do cone de penumbra a ser percorrido pela Lua.  
 (e) Calcule o tempo de duração do Eclipse Lunar Penumbral nessa situação, em minutos.

O eclipse do dia 16 de maio não será do tipo Central perfeito. Nessa situação, define-se o ponto de *Greatest Eclipse*, no qual a distância entre o centro do disco lunar é mínima em relação ao eixo do cone de sombra terrestre. Sabe-se que a latitude eclíptica geocêntrica da Lua no ponto de *Greatest Eclipse* será  $b = -12'10''$  no evento observado por Bismarcos.

- (f) Usando as informações acima, calcule a separação angular, em minutos de arco, entre o centro da Lua no ponto de *Greatest Eclipse* e o centro do cone de sombra.  
 (g) Com base na resposta do item anterior, pode-se dizer que o eclipse será Lunar Central?  
 (h) Estime, por fim, a duração da totalidade do eclipse visto por Bismarcos.

### Solução 69

(a) Desprezando-se a equação do tempo, a hora solar local é dada por:

$$H_{SL} = H_{UT} + \lambda$$

Assim, o horário do primeiro contato será

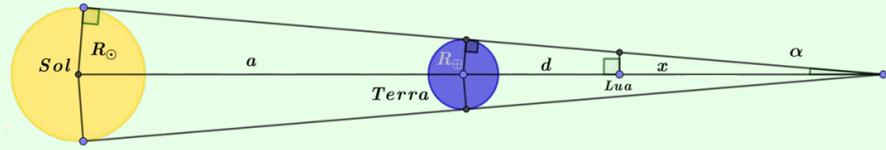
$$H_{SL1} = 22h28min$$

e o último

$$H_{SL2} = 3h48min$$

Sendo assim, tendo em vista que a fase da Lua é Cheia e os horários calculados, Bismarcos conseguirá. SIM

(b) Considerando o esquema abaixo,



tem-se, por semelhança de triângulos,

$$\frac{x}{R_\odot} = \frac{x-a}{R_\oplus} \iff x = a \cdot \frac{R_\odot}{R_\odot - R_\oplus}$$

$$x = 1,5 \cdot 10^8 \cdot \frac{6,96 \cdot 10^8}{6,96 \cdot 10^8 - 6,38 \cdot 10^6} = 1,5098 \cdot 10^8 \text{ km}$$

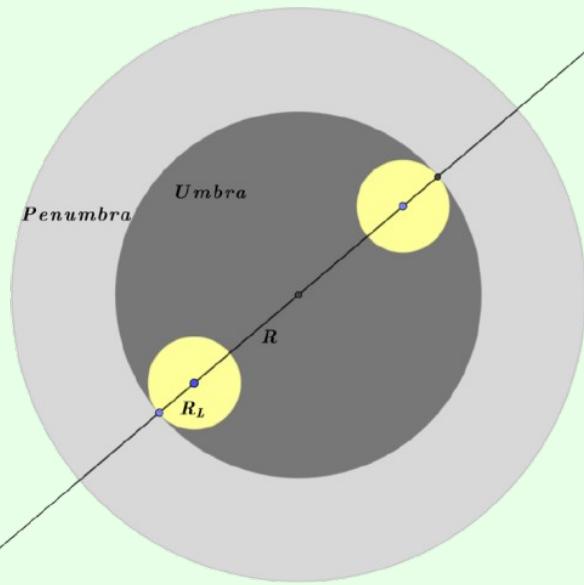
Além disso,

$$\begin{cases} \sin \alpha = \frac{R_\odot}{x} \\ \tan \alpha = \frac{R}{x-d-a} \end{cases}$$

Assim, substituindo-se os valores numéricos, calcula-se

$$D = 2R = 9,22 \cdot 10^3 \text{ km}$$

(c) Com base na planificação da situação:



Nota-se que o caminho percorrido pela Lua é

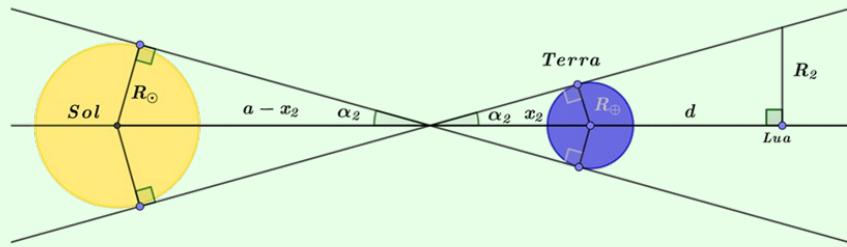
$$\Delta s = D - D_L$$

Logo, com os dados da órbita lunar, calcula-se

$$\Delta t = \frac{(D - D_L)T_L}{2\pi d_L} = \frac{(D - D_L)T_L}{2\pi d_L} = \frac{(9,22 \cdot 10^3 - 2 \cdot 1,74 \cdot 10^3) \cdot 27,32 \cdot 24 \cdot 60}{2\pi \cdot 3,84 \cdot 10^5} \iff$$

$$\boxed{\Delta t \approx 94 \text{ minutos}}$$

(d) De modo análogo, pela figura;



tem-se, por semelhança de triângulos e trigonometria,

$$\sin \alpha_2 = \frac{R_\odot}{a - x_2} = \frac{R_\oplus}{x_2}$$

Desse modo, pode-se isolar  $x_2$  e calcular-se  $\alpha_2$ :

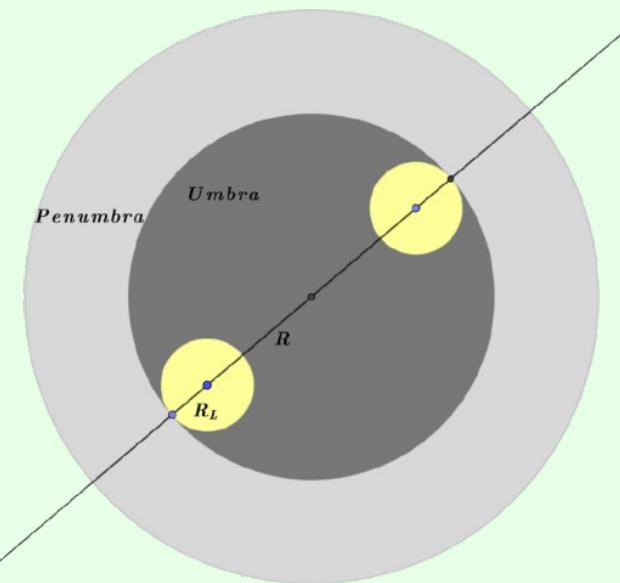
$$x_2 = a \cdot \frac{R_{\oplus}}{R_{\odot} + R_{\oplus}} = 1,3589 \times 10^6 \text{ km}$$

$$\alpha_2 = \arcsin \left( \frac{R_{\oplus}}{x_2} \right) = 0,269^\circ$$

Por fim;

$$\begin{aligned} \tan \alpha_2 &= \frac{R_2}{d + x_2} \Rightarrow R_2 = \tan \alpha_2 \cdot (x_2 + d) \\ \Rightarrow D_2 &= 2R_2 = 1,64 \cdot 10^4 \text{ km} \end{aligned}$$

(e) Sendo a condição de Eclipse Penumbral apenas parte da Lua “tocar” a região de penumbra, do esquema abaixo;



A distância projetada a ser percorrida será:

$$\Delta s_2 = D_2 + D_L$$

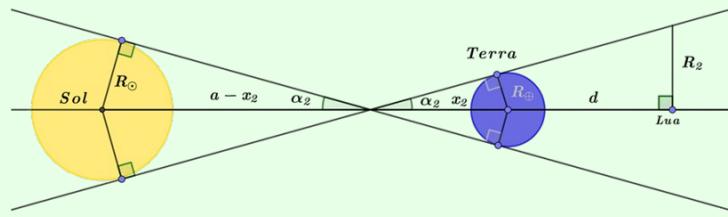
Logo,

$$\Delta t_2 = \frac{(D_2 + D_L)T_L}{2\pi d} = \frac{(1,64 \cdot 10^4 + 2 \cdot 1,74 \cdot 10^3) \cdot 27,32 \cdot 24 \cdot 60}{2\pi \cdot 3,84 \cdot 10^5}$$

$\iff$

$$\boxed{\Delta t_2 \approx 324 \text{ minutos}}$$

(f) Considerando o fato de que a latitude eclíptica é negativa no ponto de *Greatest Eclipse*, um esboço da trajetória do eclipse seria:



Dado que os ângulos são pequenos, aproxima-se a situação para um caso plano. Logo, do triângulo destacado, com a latitude eclíptica fornecida,

$$d_b \approx d \tan b$$

e ainda,

$$\cos i = \frac{d_b}{\ell} = \frac{d \tan b}{\ell}$$

A distância angular requerida será, com boa aproximação,

$$\theta = \frac{\ell}{d} = \frac{d \tan b}{d \cos i} \iff$$

$$\theta = 0,003553 \text{ rad} \iff$$

$$\boxed{\theta = 12, 2'}$$

(g) Dos dados fornecidos na tabela de constantes, o raio angular da Lua será

$$\theta_L = \arctan \left( \frac{R_L}{d} \right) = 15,6'$$

Como  $\theta_L > \theta$ , o eclipse será do tipo **[Central]**.

(h) Da mesma figura do item (f), agora do triângulo, a distância percorrida será

$$\Delta s_3 = 2d_3 = 2 \cdot \sqrt{(R - R_L)^2 - \ell^2} = 5,0495 \cdot 10^3 \text{ km}$$

A duração estimada do eclipse será, por fim

$$\Delta t_3 = \frac{5,0495 \cdot 10^3 \cdot 27,32 \cdot 24 \cdot 60}{2\pi \cdot 3,84 \cdot 10^5} \rightarrow \boxed{\Delta t_3 \approx 82 \text{ minutos}}$$

Por fim, vale o adendo de que também existe uma geometria e raciocínios por trás do cálculo da duração de eclipses solares, mas ao considerar uma latitude fixa, todos os eclipses tem praticamente a mesma duração, havendo variações apenas quando mudamos a latitude da observação. De qualquer forma, essa é a expressão para determinar a duração de um eclipse solar em função de outros parâmetros e da latitude:

$$\Delta t = \frac{D_{umbra}}{v_{orb} - \omega R_T \cos \phi}$$

Onde  $\Delta t$  é a duração total do eclipse,  $D_{umbra}$  é o diâmetro da umbra causada pela sombra da lua,  $v_{orb}$  é a velocidade orbital da lua,  $\omega$  é a velocidade angular de rotação da terra e  $\phi$  a latitude.

## 5.8 Problemas

- (Vinhedo 2019)** Em 1815, o vulcão Tambora entrou em erupção na ilha de Sumbawa, com consequências desastrosas em todo o mundo. Em 1816, a temperatura média da Terra caiu 0,7°C; na Europa e na América do Norte, geada e neve foram observados mesmo em julho, sendo atribuído a tal período "o ano sem verão". Estime quanto o albedo da Terra mudou devido à poluição atmosférica por emissões vulcânicas, sabendo que em 1816 (após a erupção) o albedo era  $\alpha = 0,306$ . Considere que a contribuição do efeito estufa para a temperatura média da Terra não mudou de um ano para o outro.
- (Temperatura de Cor Linear - Treinamentos 2020)** O astrocurioso Nathan quer saber a temperatura de uma estrela conhecida como 3, porém precisa trabalhar um pouco com alguns dados. Ele sabe que a estrela 1 tem índice de cor intrínseco  $(B-V)_{0,1} = 0.4$  mag e temperatura  $T_1 = 6880$  K e a estrela 2 tem  $(B-V)_{0,2} = 0.8$  mag e  $T_2 = 5280$  K, respectivamente. Também, tinha que para sua estrela 3  $(B-V)_3 = 0.66$  mag e a distância era  $d_3 = 314$  pc. Qual foi a temperatura encontrada por Nathan? Considere que para a posição do corpo luminoso no céu,  $a_V = 1.00$  mag/kpc,  $A_{V,3} = 3.0$  e a relação entre o índice de cor intrínseco e a temperatura é linear para

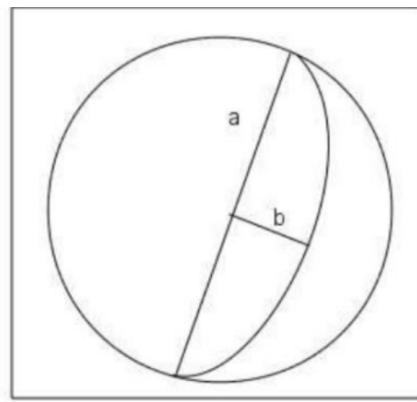
$$0.4 \leq (B-V)_0 \leq 0.8.$$

- (Estrela Ofuscada - Treinamentos 2022)** Em uma noite estrelada, Bruno, com seu telescópio, observa uma estrela de raio  $R = 3R_\odot$  e temperatura  $T = 10.000K$ . A distância até ela é de  $d = 10$  pc e sua magnitude aparente é  $m = +1$ . A estrela está rodeada por um grande envoltório esférico de poeira de raio de 2" quando vista a partir da Terra, ofuscando seu brilho. Bruno, intrigado, pede que você calcule a temperatura do envoltório. Considere que sua espessura é desprezível em relação ao seu raio e ignore qualquer extinção interestelar - que não seja a causada pelo envoltório.
- (Vinhedo 2019)** Um grupo de astrônomos tem à disposição dois telescópios: um acima da atmosfera terrestre e outro no laboratório de pesquisas. Ambos são apontados simultaneamente para a estrela Procyon,  $\alpha$  CMi, com o intuito de se medir a profundidade óptica atmosférica do zênite ( $\tau_z$ ) no local do centro de observações. O telescópio fora da atmosfera terrestre mediu a magnitude bolométrica da estrela e obteve o valor  $m_{bol,1} = 0,40$ , enquanto o do observatório mediu  $m_{bol,2} = 0,80$ , apontando para a estrela quando ela estava com altura

$h = 56^\circ$ . Realizando-se os cálculos, eles obtiveram um valor de  $\tau_z$  muito discrepante do real, que deveria ser de  $\tau_z = 0,12$ . Então, um dos astrônomos percebeu que a observação terrestre foi feita através de uma janela dupla, isto é, composta por duas lâminas de vidro.

Determine a porcentagem de luz que foi transmitida pelas janelas e que chegou ao detector do telescópio.

5. (Vinhedo 2018 - Adaptada) Considere a seguinte imagem da Lua. Observe que a linha que separa o lado iluminado e o lado sombreado é um arco de elipse. Chamemos o comprimento do semi-eixo maior dessa elipse de  $a$ , o semi-eixo menor de  $b$  e o ângulo Sol-Lua-Terra de  $\beta$ .



- a) Derive uma expressão para o ângulo Sol-Lua-Terra ( $\beta$ ) em termos de  $a$  e  $b$ . Considere que os raios do Sol cheguem paralelos ao sistema Terra-Lua;
- b) Chamamos de fase  $F$  da Lua a fração visível de sua face iluminada.  $F$ , então, varia de 1 (Lua Cheia) a 0 (Lua Nova), passando por 0,5 (Quarto Minguante ou Crescente). Derive uma expressão que relate  $F$  e  $\beta$ ;
6. Imagine uma galáxia, que, quando vista da Terra, aparenta ter um formato elíptico. Essa galáxia tem brilho superficial de  $16,9 \text{mag}/\text{arcsec}^2$  e magnitude absoluta  $M_g = -30$ . Essa galáxia tem semi-eixo menor (quando vista da Terra)  $a = 1,454 \cdot 10^{-4} \text{rad}$  e a razão  $\frac{b}{a} = 0,5$ . Assim:
- a) Ache o valor da excentricidade dessa elipse.
- b) Calcule a distância entre a galáxia e a Terra, em Mpc.
- c) Essa galáxia é visível a olho nu? Se não, qual o diâmetro mínimo de um telescópio para a observação dessa galáxia, em milímetros? (Considere o diâmetro da pupila igual a 6mm e a magnitude limite de visibilidade a olho nu igual a 6)
- d) Encontre a distância, a partir da Terra, para que, em um planeta nesse local, a galáxia, que na verdade é um disco, seja vista com  $e = 0$ .
7. (Aglomerado Globular) - Vinhedo 2021

Shell, durante suas observações noturnas, descobre um novo aglomerado globular. Após aferir alguns parâmetros, ele determina que o aglomerado possui tamanho angular  $\theta = 30''$  e

magnitude aparente  $m = -6.0$  quando visto da Terra, além de conter  $N = 500 \times 10^3$  estrelas de luminosidade 3 vezes menor que a solar. Shell também nota que o aglomerado se move em direção ao plano do disco da Via Láctea, de tal modo que irá adentrá-lo com um ângulo  $\alpha = 20^\circ$  em relação ao plano galáctico.

Para as questões abaixo, considere que o disco da Via Láctea tem espessura  $\delta = 300$  pc e que os efeitos de extinção interestelar podem ser desprezados. Use que a magnitude absoluta do Sol vale aproximadamente 4,83.

- (a) Encontre a distância do aglomerado à Terra no instante em que ele foi detectado por Shell.
- (b) Calcule o volume, em  $\text{pc}^3$ , da trajetória percorrida pelo aglomerado no disco galáctico.
- (c) Estime a densidade numérica de estrelas no disco da Via Láctea, em estrelas/ $\text{pc}^3$ . Use o fato de que a magnitude aparente de uma estrela próxima ao Sol,  $\alpha$  Cen, é  $m_1 = 0.0$ .
- (d) Faça uma estimativa do número de estrelas do tipo solar que estariam contidas na trajetória percorrida pelo aglomerado dentro do disco galáctico.
- (e) Reavalie, qualitativamente, sua estimativa do item anterior. Para tanto, discuta sobre a hipótese de se desprezar os efeitos de extinção interestelar.

## 5.9 Solucionário

### Problema 1

Utilizando o fato de que toda energia absorvida é emitida, temos a seguinte equação:

$$\frac{L_{\odot}}{4\pi d^2} (1 - \alpha) \pi R_{\oplus}^2 = 4\pi R_{\oplus}^2 \sigma T_{\oplus}^4 \quad (I)$$

Em que o lado esquerdo da igualdade refere-se à energia do sol absorvida pelo planeta e o lado direito à energia emitida pela Terra.

Simplificando a equação (I) obtemos:

$$\frac{L_{\odot} (1 - \alpha)}{4\pi d^2} = 4\sigma T_{\oplus}^4 \quad (II)$$

Após a erupção, o albedo aumentou  $\Delta\alpha$ , consequentemente a temperatura da Terra diminuiu  $\Delta T$ .

$$\frac{L_{\odot}}{4\pi d^2} (1 - (\alpha + \Delta\alpha)) = 4\sigma (T_{\oplus} - \Delta T)^4$$

Usando o fato de  $(1 + x)^n = 1 + nx$  para  $x < 1$  temos:

$$\frac{L_{\odot}}{4\pi d^2} (1 - (\alpha + \Delta\alpha)) = 4\sigma T_{\oplus}^4 \left(1 - \frac{4\Delta T}{T_{\oplus}}\right)$$

Usando (II) temos

$$\frac{L_{\odot}}{4\pi d^2} (1 - (\alpha + \Delta\alpha)) = \frac{L_{\odot} (1 - \alpha)}{4\pi d^2} \left(1 - \frac{4\Delta T}{T_{\oplus}}\right) \Rightarrow 1 - \frac{\Delta\alpha}{1 - \alpha} = 1 - \frac{4\Delta T}{T_{\oplus}}$$

$$\Delta\alpha = \frac{4\Delta T}{T_{\oplus}} (1 - \alpha) \Rightarrow \Delta\alpha = \frac{4\Delta T}{\left(\frac{L_{\odot}(1-\alpha)}{16\sigma\pi d^2}\right)^{\frac{1}{4}}} (1 - \alpha)$$

Substituindo temos:

$$\boxed{\Delta\alpha = 0,008}$$

**Problema 2**

Para encontrarmos a temperatura da estrela 3, precisa-se antes saber seu índice de cor intrínseco  $(B - V)_{0,3}$  e o conseguimos com o excesso de cor:

$$E_{B-V} = (B - V) - (B - V)_0.$$

$$\frac{A_{V,3}}{E_{B-V,3}} = 3.0 \Rightarrow \frac{A_{V,3}}{3} = E_{B-V,3} = (B - V)_3 - (B - V)_{0,3}.$$

$$(B - V)_{0,3} = (B - V)_3 - \frac{A_{V,3}}{3}.$$

Para obter  $A_{V,3}$  utilizamos a absorção por unidade de distância:

$$A_{V,3} = a_V \cdot d_3.$$

Substituindo os dados do enunciado na expressão acima ( $d_3 = 314$  pc,  $a_V = 1$  mag/kpc):

$$(B - V)_{0,3} = 0,55533 \text{ mag.}$$

Para encontrarmos a temperatura utilizamos a relação linear comentada no enunciado. O gráfico comparativo a seguir justifica a consideração da linearidade:

A relação linear descrita será:

$$\frac{T - 6880}{(B - V)_0 - 0,4} = \frac{5280 - 6880}{0,8 - 0,4} \Rightarrow T = -4000((B - V)_0 - 0,4) + 6880$$

Além disso, o índice de cor intrínseco da estrela 3 atende às condições impostas no enunciado para uso da expressão linear, então, usando-a, encontramos:

$$T_3 \approx 6260$$

**Problema 3**

Primeiro, calcularemos a luminosidade da estrela em termos da luminosidade solar:

$$L_{\text{est}} = \left(\frac{R}{R_{\odot}}\right)^2 \left(\frac{T}{T_{\odot}}\right)^4 L_{\odot} \approx 80L_{\odot}.$$

Calculando sua magnitude absoluta comparando com o Sol (caso a estrela não fosse ofuscada):

$$M_{\text{est}} = M_{\odot} - 2,5 \log \left(\frac{L}{L_{\odot}}\right) \approx 0.$$

Calculando a magnitude absoluta com a estrela ofuscada:

$$M - m = 5 \log(d) - 5 \Rightarrow M = 1$$

Assim, para calcularmos a fração da luminosidade que o envoltório absorve, basta:

$$\begin{aligned} M - M_{\text{real}} &= -2,5 \log \left(\frac{L}{L_{\text{real}}}\right) \\ -\frac{1}{2,5} \log \left(\frac{L}{L_{\text{real}}}\right) &\rightarrow \frac{L}{L_{\text{real}}} \approx 0,398 \end{aligned}$$

Assim, a fração da luminosidade que fica absorvida no envoltório é dada por:

$$L_{\text{absorvida}} = L_{\text{real}} - L = 0,602L_{\text{real}}$$

Calculando o raio do envoltório:

$$r = d\delta \approx 4,30 \cdot 10^3 R_{\odot}$$

Por fim, considerando as partículas do envoltório como corpos negros perfeitos:

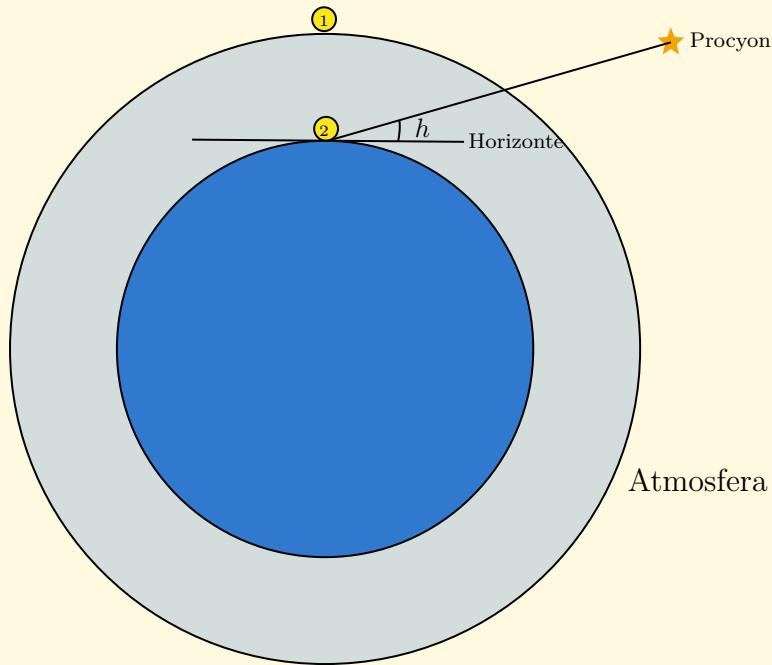
$$0,602L_{\text{real}} = 48,1L_{\odot} = \left(\frac{r}{R_{\odot}}\right)^2 \left(\frac{t}{T_{\odot}}\right)^4 L_{\odot}$$

Resolvendo para  $t$ , encontramos, por fim:

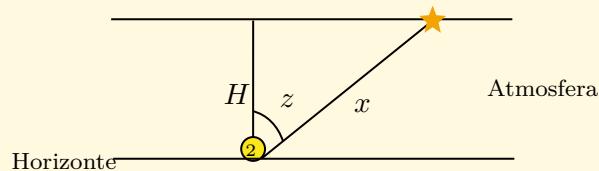
$$t \approx 232K$$

#### Problema 4

Interpretando o enunciado, definiremos os dois observadores da seguinte forma. O observador 1 é um telescópio posicionado fora da atmosfera terrestre, que observa Procyon com uma magnitude  $m_1$  sem sofrer os efeitos da extinção atmosférica. O observador 2 está localizado no laboratório de pesquisas terrestre, observando Procyon com uma magnitude aparente  $m_2$  e a uma altura  $h$ , estando sujeito aos efeitos da extinção atmosférica, que é influenciada pela profundidade óptica da atmosfera. Esquematizando a situação:



Analizando a situação do observador 2 e considerando que  $H$  é a altura da atmosfera,  $x$  é a distância que a luz da estrela deve percorrer na atmosfera para atingir o observador e que, como  $H \ll R_\oplus$ , podemos considerar um modelo plano para a atmosfera, desenhamos a situação com  $z = 90^\circ - h$



Sabemos que a profundidade óptica é diretamente proporcional à distância percorrida pela luz no gás que a extingue. Assim, podemos comparar a profundidade óptica no zênite  $\tau_z$

com a profundidade óptica na altura  $h$ ,  $\tau_h$ :

$$\frac{\tau_z}{\tau_h} = \frac{H}{x}$$

Como a altura da estrela implica em um ângulo de  $34^\circ$ , temos:

$$\tau_h = \tau_z \cdot \sec 34^\circ$$

A luminosidade antes de sofrer extinção atmosférica é aquela captada pelo observador 1, que chamaremos de  $L_1$ . Já  $L_2$  representa a luminosidade captada pelo observador que utiliza uma janela. Sabemos que a janela permite apenas  $\alpha$  porcento da luz passar. Na situação sem janela, a luminosidade seria  $L_{2,0}$ . Assim, podemos expressar:

$$L_2 = \alpha L_{2,0}$$

Agora, usando a definição de profundidade óptica:

$$\frac{L_2}{L_1} = \alpha \frac{L_{2,0}}{L_1} = \alpha e^{-\tau_z \cdot \sec 34^\circ}$$

Para relacionar as magnitudes, aplicamos a fórmula de Pogson:

$$m_2 - m_1 = -2,5 \log \left( \frac{L_2}{L_1} \right)$$

Substituindo os valores:

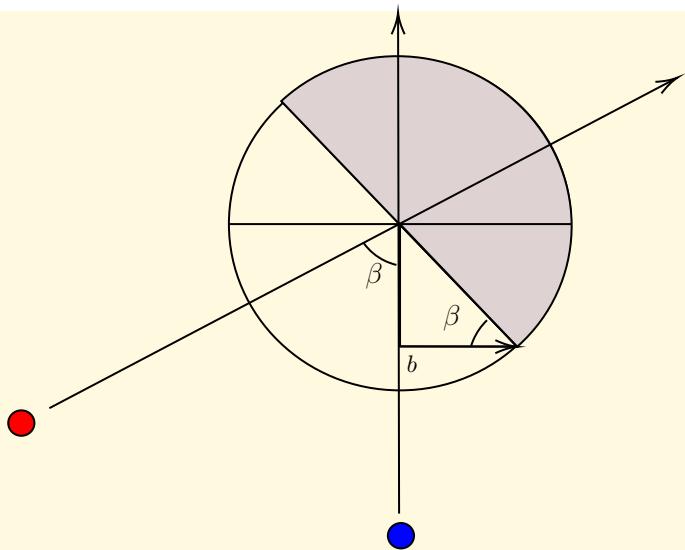
$$\begin{aligned} \frac{-0,4}{2,5} &= \log (\alpha e^{-\tau_z \cdot \sec 34^\circ}) \\ -0,16 &= \log (\alpha) - \log (e^{\tau_z \cdot \sec 34^\circ}) \\ \alpha &= 10^{\log(e^{\tau_z \cdot \sec 34^\circ}) - 0,16} \end{aligned}$$

Resolvendo a equação, encontramos:

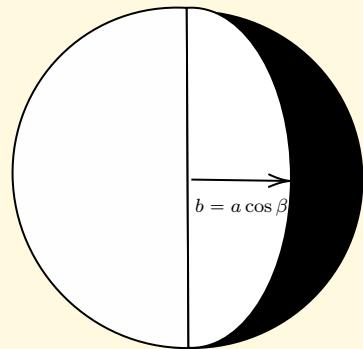
$$\boxed{\alpha = 0,8}$$

### Problema 5

- a) Esquematizando a situação:



Visão do observador terrestre



Perceba que  $\cos \beta = \frac{b}{a}$ . Assim, podemos escrever:

$$\boxed{\beta = \cos^{-1} \left( \frac{b}{a} \right)}$$

- b) Pela imagem da direita, percebemos que o observador terrestre enxerga metade da Lua e mais uma meia elipse com semieixo maior  $a$  e semieixo menor  $b$ . Portanto, fazendo a razão entre a área atual e a área máxima:

$$F = \frac{\frac{\pi a^2}{2} + \frac{\pi ab}{2}}{\pi a^2}$$

Substituindo  $b = a \cos \beta$ , temos:

$$F = \frac{\frac{\pi a^2}{2} + \frac{\pi a^2 \cos \beta}{2}}{\pi a^2}$$

Simplificando, obtemos:

$$\boxed{F = \frac{1 + \cos \beta}{2}}$$

### Problema 6

- a) Sabe-se que  $c^2 + b^2 = a^2$ . Dividindo os dois lados por  $a^2$ :

$$\frac{c^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2} = 1$$

Como  $\frac{c}{a} = e$ :

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

Substituindo:

$$e = 0,87$$

b) Sabe-se que  $1 \text{ rad} = 206265 \text{ arcsec}$ . Assim,  $a = 30 \text{ arcsec}$  A área da elipse será, então:

$$A = \pi a \cdot 0,5a$$

$$A = 1413,72 \text{ arcsec}^2$$

Sendo  $\mu$  o brilho superficial:

$$m_g - \mu = -2,5 \log \left( \frac{A}{1} \right)$$

Substituindo:

$$m_g = 9,024$$

Para achar d (a distância):

$$m_g - M_g = 5 \log d - 5$$

Assim, encontramos que:

$$d = 638 \text{ Mpc}$$

c) Sabe-se que  $m_g = 9,024$ , ou seja, a galáxia não é visível a olho nu. Assim, com as condições fornecidas pelo enunciado:

$$m_{lim} = m_g \approx 2,1 + 5 \log D_{min} (\text{mm})$$

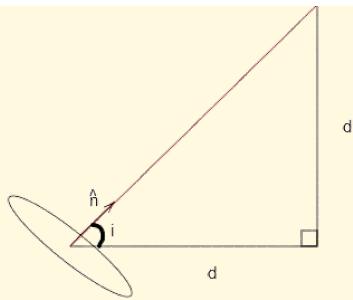
Substituindo:

$$D_{min} \approx 24,26 \text{ mm}$$

d) Sabe-se que o ângulo i (inclinação orbital), é dado por:

$$i = \arccos \frac{b}{a}$$

Nesse caso,  $i = 60^\circ$ . Como esse é o ângulo entre a linha de visada e o vetor normal à superfície da galáxia, temos que:



Assim:

$$\tan(i) = \frac{d'}{d}$$

$$d' = 1105 \text{ Mpc}$$

### Problema 7

- (a) Primeiro, vamos encontrar a magnitude absoluta do aglomerado comparando ele com o sol:

$$M - M_{\odot} = -2,5 \log \left( \frac{N L_{\odot}/3}{L_{\odot}} \right) \rightarrow M \approx -8,22$$

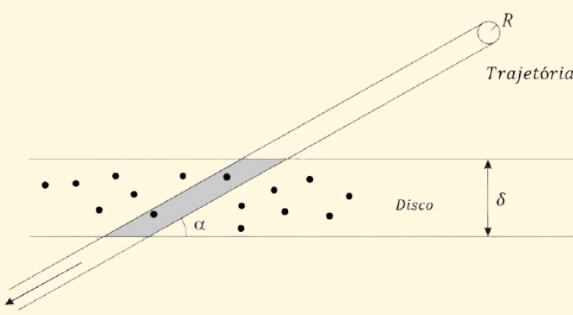
Agora que sabemos a magnitude absoluta e aparente do aglomerado, basta utilizar o módulo de distância:

$$m - M = 5 \log(d(\text{pc})) - 5 \rightarrow d = 10^{(m-M+5)/5} \approx 7000 \text{ pc}$$

- (b) Primeiramente, vamos obter o raio do aglomerado:

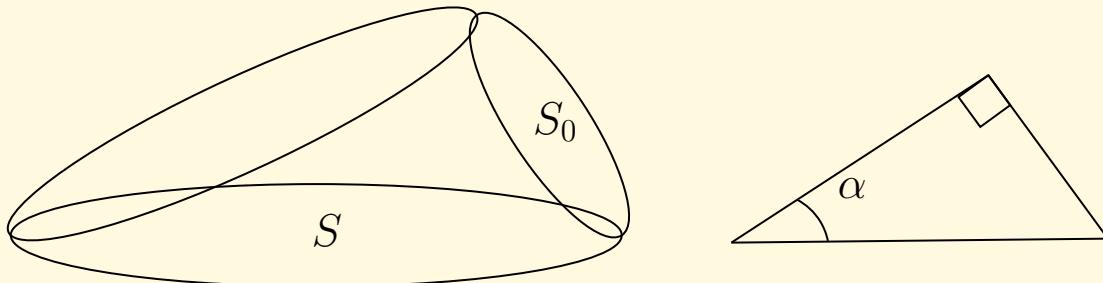
$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{R}{d} \rightarrow R \approx 30,54 \text{ pc}$$

Veja, agora, um esboço da trajetória do aglomerado:



É possível ver que o volume requerido será, então, de um cilindro oblíquo. O volume de tal sólido é dado pela área da base vezes a altura (espessura do disco).

A área da base pode, então, ser encontrada se observando a figura:



Assim, temos que o volume é

$$V = \frac{\pi R^2}{\operatorname{sen} \alpha} \delta \approx 2,57 \cdot 10^6 (\text{pc})^3$$

(c) Utilizando o módulo de distância, temos:

$$m - M = 5 \log(d'(\text{pc})) - 5 \rightarrow d' = 10^{(m-M+5)/5} \approx 1,1 \text{ pc}$$

Assim, podemos aproximar a densidade de estrelas como:

$$n = \frac{1}{d'^3} \approx 0,75 \text{ estrelas}/(\text{pc})^3$$

(d) O número de estrelas será a densidade vezes o volume:

$$N = nV \approx 2 \cdot 10^6 \text{ estrelas}$$

- (e) Na situação em que se considera o efeito de extinção interestelar, a distância calculada do aglomerado seria maior que a real. Isso acontece por nós termos que considerar a fórmula do módulo de distância com a correção de extinção:

$$m_{\text{obs}} - M = 5 \log(d) - 5 + Kd$$

Com a distância superestimada do aglomerado, seu raio também estará superestimado, bem como o volume da trajetória. Logo, estamos obtendo um valor de estimativa do número de estrelas superestimado. Dessa forma, considerar o efeito de extinção levaria a um número de estrelas menor do que o calculado no item (d).

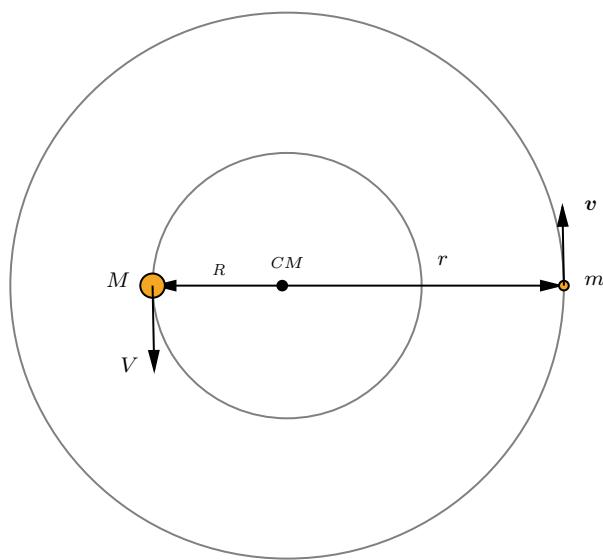
## 6 Sistemas Binários

Diferentemente das órbitas tradicionais em que um corpo **extremamente massivo** domina o movimento orbital – como ocorre no caso de um **planeta em torno de uma estrela** ou de uma **lua orbitando um planeta** –, os **sistemas binários** apresentam outra dinâmica. Nestes sistemas, dois corpos de **massas comparáveis** orbitam em torno de um **centro de massa comum** que não está localizado próximo a nenhum dos dois corpos, mas sim em um ponto no espaço entre eles.

Essa configuração destaca uma particularidade fundamental: o chamado **problema dos dois corpos**. Enquanto em sistemas de massa altamente desproporcionais o **centro de massa** praticamente coincide com o corpo mais massivo, em **sistemas binários** a **massa dos dois componentes** influenciam o movimento, tornando suas trajetórias **interdependentes** e mais complexas. Isso exige um **tratamento matemático** mais detalhado para descrever as órbitas de ambos os corpos e entender sua interação gravitacional.

A **análise gráfica** desempenha um papel crucial nesse contexto. Por meio da **observação** e do **registro das trajetórias orbitais**, é possível identificar não apenas o **tipo de órbita**, mas também inferir parâmetros fundamentais como as **massas relativas** dos corpos, a **localização do centro de massa** e as **excentricidades orbitais**. Em muitos casos, sistemas binários observados graficamente revelam padrões de movimento – como **variações periódicas no brilho** ou no **espectro** – que são essenciais para compreender as propriedades físicas e dinâmicas do sistema. Técnicas como **curvas de luz**, que registram as variações de brilho ao longo do tempo, e medições de **velocidades radiais** são ferramentas indispensáveis para estudar as interações gravitacionais e identificar fenômenos como eclipses ou efeitos Doppler.

### 6.1 Órbitas Circulares



Vamos analisar a situação em que ambas as órbitas do sistema são circulares, assim como representado na imagem abaixo. Perceba que  $M$ , o  $CM$  e  $m$  são colineares, assim como esperado pela segunda propriedade do centro de massa. Isso implica que os períodos orbitais de  $M$  e  $m$  são idênticos. Ainda, note que  $M$  está mais próximo do  $CM$  que  $m$ , ou seja,  $M > m$ .

No caso em que  $M \gg m$  iguala-se a força gravitacional à resultante centrípeta e utiliza-se a relação entre a velocidade, o período e o raio da órbita. Agora, vamos realizar o mesmo procedimento "individualmente" para cada massa :

Pela lei da gravitação universal, a força gravitacional  $F_g$  em ambos os corpos é:

$$F_g = \frac{GMm}{(R+r)^2}$$

Agora, perceba que  $m$  e  $M$  realizam órbitas circulares de raio  $r$  e  $R$ , respectivamente, em torno do centro de massa. Desse modo, podemos igualar a força gravitacional à resultante centrípeta de cada corpo:

Em  $M$ , temos:

$$\frac{GMm}{(R+r)^2} = \frac{MV^2}{R}$$

Como  $V = \frac{2\pi R}{T}$ , podemos reescrever essa expressão como:

$$\frac{Gm}{(R+r)^2} = \frac{4\pi^2 R}{T^2} \quad (3.1)$$

Analogamente para  $m$ , podemos obter:

$$\frac{GM}{(R+r)^2} = \frac{4\pi^2 r}{T^2} \quad (3.2)$$

Somando as equações (3.1) e (3.2), obtemos:

$$\frac{G(M+m)}{(R+r)^2} = \frac{4\pi^2(R+r)}{T^2}$$

Ou seja:

$\frac{T^2}{(R+r)^3} = \frac{4\pi^2}{G(M+m)}$
---

Que é o equivalente da Terceira Lei de Kepler para sistemas binários de órbitas circulares! Perceba que, no caso limite em que  $M \gg m$ ,  $R \rightarrow 0$  e  $M + m \rightarrow M$ .

### 6.1.1 Relações entre Velocidade, Distância e Massa

Agora, vamos ver relações entre as velocidades  $V$  e  $v$ , as distâncias  $R$  e  $r$  e as massas  $M$  e  $m$ .

Perceba a relação do Centro de Massa:

$$X_{CM} = \frac{MR + mr}{M + m}$$

Considere que a origem do sistema de referência se localize no centro da estrela de maior massa  $M$ , sendo  $d$  a distância entre as estrelas, temos que  $R + r = d$ . Logo:

$$R = \frac{m}{M + m} \cdot d$$

Dessa forma:

$$r = \frac{M}{m + M} \cdot d$$

Dividindo as equações encontradas:

$$\Rightarrow \boxed{\frac{M}{m} = \frac{r}{R}}$$

**Obs:** Apesar das deduções vistas a partir do centro de massa serem válidas para qualquer tipo de órbita, é importante lembrar que essas relações variam um pouco ao considerar órbitas não circulares.

⇒ Primeiramente, podemos dividir a equação 3.1 pela equação 3.2 para obtermos:

$$\frac{m}{M} = \frac{R}{r} \Rightarrow MR = mr$$

Agora, lembrando que o período de ambas as órbitas é o mesmo, sabemos que  $V = \frac{2\pi R}{T}$  e  $v = \frac{2\pi r}{T}$ . Assim:

$$\frac{2\pi}{T} = \frac{V}{R} = \frac{v}{r}$$

Desse modo, podemos encontrar:

$$\boxed{\frac{m}{M} = \frac{R}{r} = \frac{V}{v}}$$

## 6.2 Forma Generalizada

Em primeira análise, normalmente é visto as Leis de Kepler para sistemas binários em que  $M \gg m$ . Agora, vamos generalizá-las para um sistema binário qualquer.

- **1<sup>a</sup> Lei:** As órbitas das estrelas são elípticas (cônicas, no geral);
- **2<sup>a</sup> Lei:** O segmento que liga o centro de massa até uma das estrelas varre áreas iguais em tempos iguais;

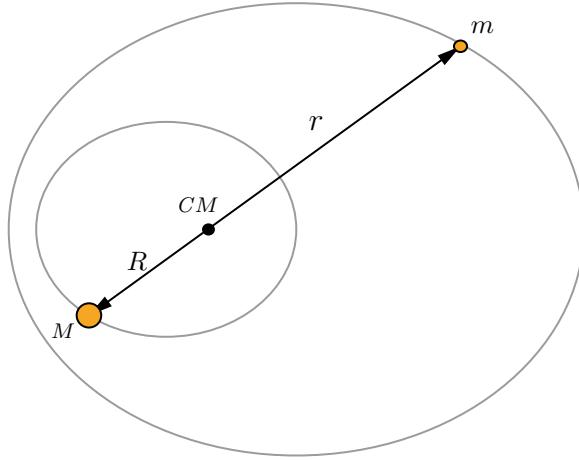
- **3<sup>a</sup> Lei:** Sejam  $a_1$  e  $a_2$  os semieixos maiores das órbitas das estrelas de massa  $m_1$  e  $m_2$ . O período  $P$  das estrelas (igual para ambas as componentes) é:

$$\frac{P^2}{(a_1 + a_2)^3} = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)}$$

Agora, iremos deduzir algumas propriedades geométricas das órbitas das estrelas a partir somente das leis de Kepler e das propriedades do centro de massa.

### 6.2.1 Geometria

De acordo com a 1<sup>a</sup> Lei de Kepler, sabemos que as órbitas de ambas as estrelas são elípticas. Com isso, surge uma dúvida: As estrelas chegam ao apoastro juntas ou quando uma estiver no apoastro, a outra vai estar no periastro? Vejamos a seguir:



Sejam  $e_1$  e  $a_1$  respectivamente a excentricidade e semieixo maior da órbita da estrela mais massiva ( $M$ ), assim como  $e_2$  e  $a_2$  também são respectivamente a excentricidade e semieixo maior da órbita da estrela menos massiva ( $m$ ). Note que quando  $M$  está no periastro,  $m$  também está, logo:

$$Ma_1(1 - e_1) = ma_2(1 - e_2)$$

Agora, quando  $M$  e  $m$  estão em seus apoastros, temos:

$$Ma_1(1 + e_1) = ma_2(1 + e_2)$$

Somando as equações:

$$Ma_1 = ma_2$$

Que já é uma propriedade importante por si só! Agora, subtraindo as equações:

$$2Ma_1e_1 = 2ma_2e_2$$

Assim:

$$e_1 = e_2$$

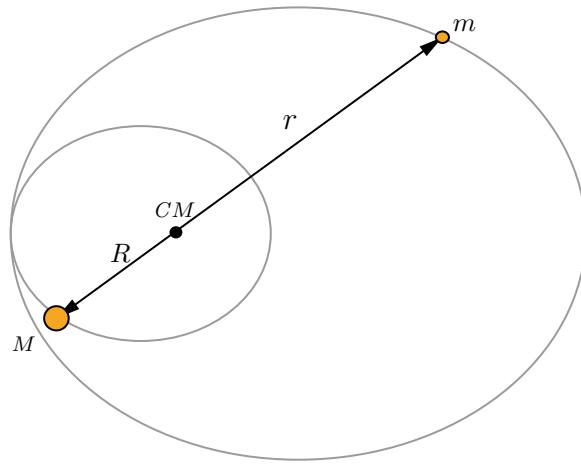
Ora! Essa é uma propriedade fundamental dos sistemas binários, as excentricidades das órbitas individuais são **idênticas**. Portanto, as componentes chegam em seus respectivos periastro e apoastro **juntas**.

**Obs:** Realizando os cálculos acima para um sistema em que as componentes se orbitam de forma que uma chegue ao apoastro quando a outra chegue ao periastro, e vice-versa, encontrariámos que  $e_1 = -e_2$ , o que não faz o menor sentido, pois não existem órbitas de excentricidade negativa.

### 6.2.2 Excentricidade mínima

Nesse contexto, nasce uma questão muito curiosa sobre o assunto: Qual seria a excentricidade mínima de um sistema binário com estrelas de massa  $M$  e  $m$  para que as órbitas individuais se intersectem? Nessa situação, será que seria possível haver uma colisão entre as componentes? Vejamos:

Assumindo que  $M > m$ , mas sem perder a generalidade, a situação no caso limite está representada pela imagem abaixo:



Pode-se perceber que, nessa situação, a distância do CM ao apoastro da órbita de  $M$  é idêntica à distância do CM ao periastro da órbita de  $m$ . Assim:

$$a_1(1 + e_1) = a_2(1 - e_2)$$

**Lembrando:**  $a_1$  e  $e_1$  representam respectivamente o semieixo maior e excentricidade da órbita da estrela de maior massa ( $M$ ), assim como  $a_2$  e  $e_2$  os da estrela de menor massa ( $m$ ).

Entretanto, acabamos de ver que  $e_1 = e_2 = e_{\min}$ . Assim:

$$e_{\min} = \frac{a_2 - a_1}{a_2 + a_1}$$

Porém, já vimos que  $\frac{a_2}{a_1} = \frac{M}{m}$ . Desse modo:

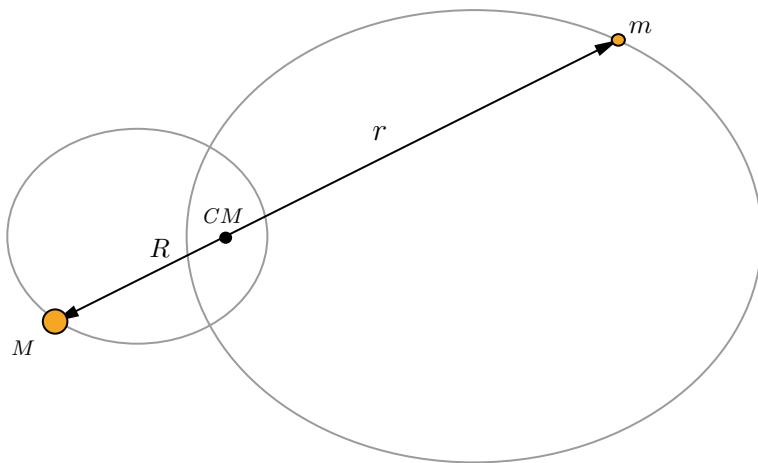
$$e_{\min} = \frac{\frac{a_2}{a_1} - 1}{\frac{a_2}{a_1} + 1}$$

$$\Rightarrow e_{\min} = \boxed{\frac{M - m}{M + m}}$$

Respondendo à segunda pergunta, perceba que é **impossível haver uma colisão entre as componentes**, visto que sempre que um dos corpos estiver no ponto de interseção, o outro estará do outro lado do centro de massa.

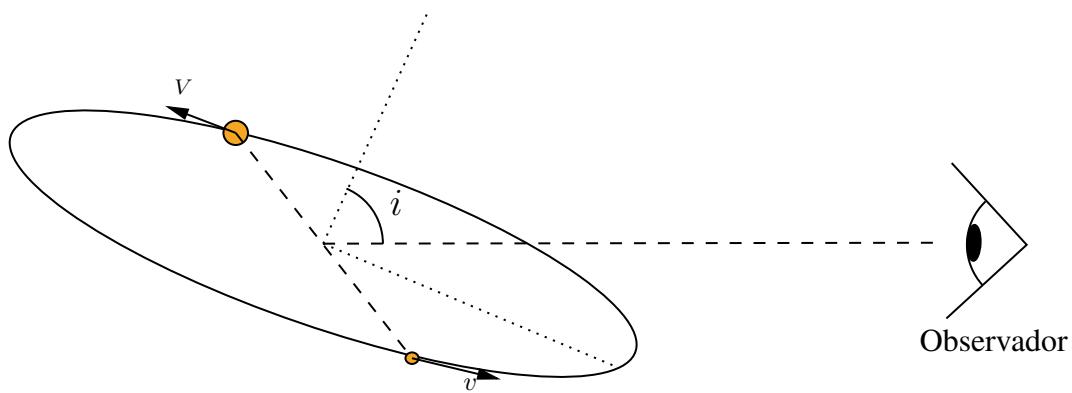
**Por fim, vale um último adendo:**

Caso  $e_1 = e_2 > e_{\min}$ , as órbitas seriam parecidas com a representação abaixo

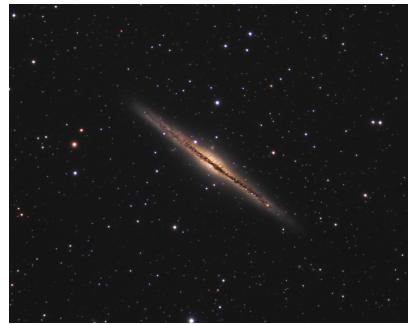


### 6.3 Inclinação orbital

Quando olhamos para o céu, é esperado que a maioria dos objetos, como as galáxias, não esteja alinhada com a nossa **linha de visada**. Nesse contexto, a **inclinação orbital** ( $i$ ) é o ângulo entre a linha de visada e o vetor normal (**perpendicular**) à órbita ou superfície, como pode ser observado na imagem abaixo.



Dessa forma, quando  $i = 90^\circ$  chamamos a órbita de **"edge-on"**. Já quando  $i = 0^\circ$  chamamos a órbita de **"face-on"**. Veja os exemplos a seguir:



Galáxia edge-on (NGC-891)

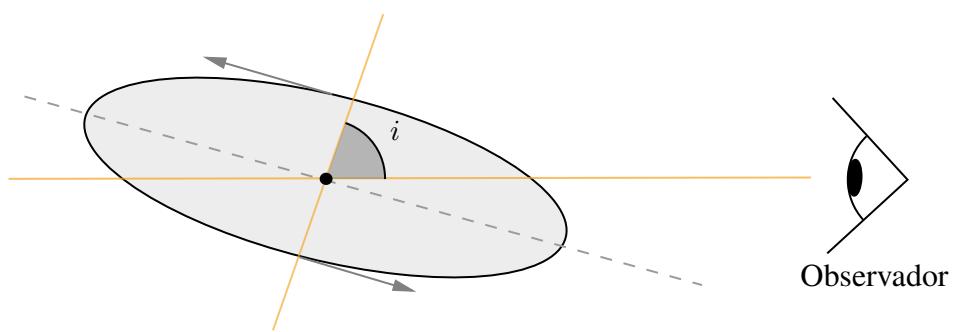
Esse conceito é muito importante quando pensamos em diversos contextos, como por exemplo na **obtenção da velocidade total a partir da velocidade radial**, na **determinação das condições em que um sistema é eclipsante** e no cálculo da **duração de um eclipse**.

#### 6.3.1 Relações com $i$

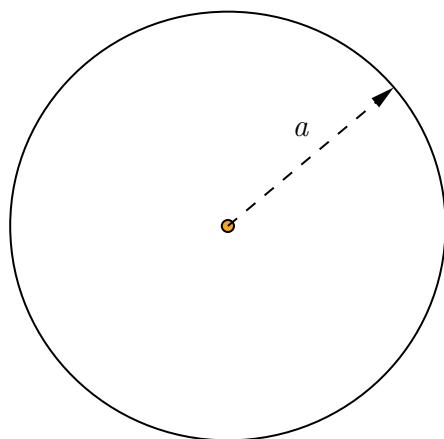
Considere um exoplaneta (**de massa desprezível em relação à massa de sua estrela**) que realiza uma órbita **circular** semelhante à representada na figura abaixo. Sejam  $\alpha$  e  $\beta$  os ângulos representados pelos **semi-eixos maior e menor** da órbita observada,  $v_{r-\max}$  a **velocidade radial máxima** do exoplaneta, e  $p$  sua **paralaxe**. Vamos determinar o **período** da órbita e a **massa da estrela**, assumindo que a **velocidade radial do centro de massa do sistema seja nula**.



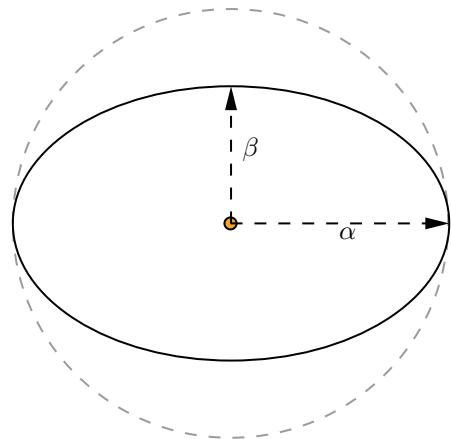
Galáxia face-on (M74)



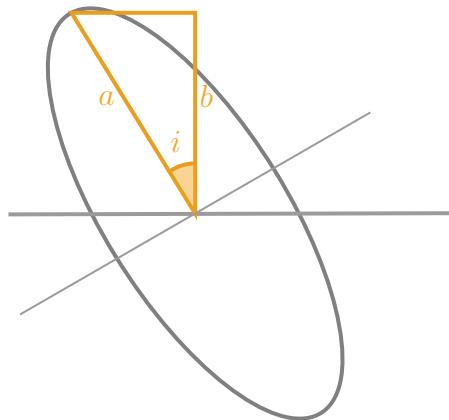
Perceba que apesar da órbita ser circular, temos a ilusão de que a órbita é elíptica, devido ao ângulo de inclinação:



Órbita vista de cima



Órbita vista de perfil



*Órbita vista lateralmente*

Desse modo, temos:

$$\cos i = \frac{b}{a}$$

$$d[pc] = \frac{1}{d['']}$$

Perceba que podemos relacionar os semieixos com a distância da seguinte maneira:

$$a = \alpha d$$

e

$$b = \beta d$$

Sendo  $v$  e  $v_r$  a velocidade orbital e velocidade radial máxima, respectivamente, do exoplaneta e dada a geometria da situação, temos as seguintes relações:

$$v_r = v \cos(90^\circ - i) = v \sin i$$

Lembrando que  $v = \frac{2\pi a}{P}$ , sendo  $P$  o período orbital, têm-se:

$$P = \frac{2\pi \alpha d \sin i}{v_r}$$

Ainda, sabemos que  $v = \sqrt{\frac{GM}{a}}$ , logo:

$$M = \frac{v_r^2 \alpha d}{G \sin^2 i}$$

### Exemplo 70

Considerando duas estrelas binárias de velocidades reais  $v_1$  e  $v_2$  e semieixos maiores  $a_1$  e  $a_2$ , encontre uma expressão para a razão entre a soma das massas reais e as somas das massas medidas, em função apenas da inclinação orbital.

### Solução 70

Como as velocidades reais são  $v_1$  e  $v_2$ , as velocidades medidas serão  $v_{1,med} = v_1 \operatorname{sen}(i)$  e  $v_{2,med} = v_2 \operatorname{sen}(i)$ . Além disso, os semieixos maiores da órbita de cada estrela calculados por cientistas na Terra serão  $a_{1,med} = a_1 \operatorname{sen}(i)$  e  $a_{2,med} = a_2 \operatorname{sen}(i)$ .

Usando a Terceira Lei de Kepler para o sistema binário mencionado:

$$m_1 + m_2 = \frac{4\pi^2(a_1 + a_2)^3}{GP^2}$$

Mas, usando a Terceira Lei de Kepler para o sistema Terra-Sol, temos:

$$M_\odot = \frac{4\pi^2(1UA)^3}{G(1ano)^2}$$

Logo, juntando ambas as expressões:

$$\frac{m_1 + m_2}{M_\odot} = \frac{(a/UA)^3}{(P/ano)^2}$$

Assim:

$$\begin{aligned} \frac{(m_1 + m_2)_{real}}{(m_1 + m_2)_{med}} &= \frac{((a_1 + a_2)_{real})^3}{((a_1 + a_2)_{med})^3} \\ \frac{(m_1 + m_2)_{real}}{(m_1 + m_2)_{med}} &= \frac{(a_1 + a_2)^3}{(a_1 + a_2)^3 \cdot \operatorname{sen}(i)^3} \\ \boxed{\frac{(m_1 + m_2)_{real}}{(m_1 + m_2)_{med}} = \frac{1}{\operatorname{sen}^3(i)}} \end{aligned}$$

Note que, como  $-1 \leq \operatorname{sen}(i) \leq +1$ , a massa real de cada estrela será sempre maior ou igual à massa medida.

Vale o adendo de que, ao considerar a velocidade radial do centro de massa ( $V_{r-CM}$ ), devemos nos atentar ao seguinte:

$$v_r = v \sin i + V_{r-CM}$$

Logo, ao considerar uma velocidade radial mínima ( $v_{r-min}$ ), temos que:

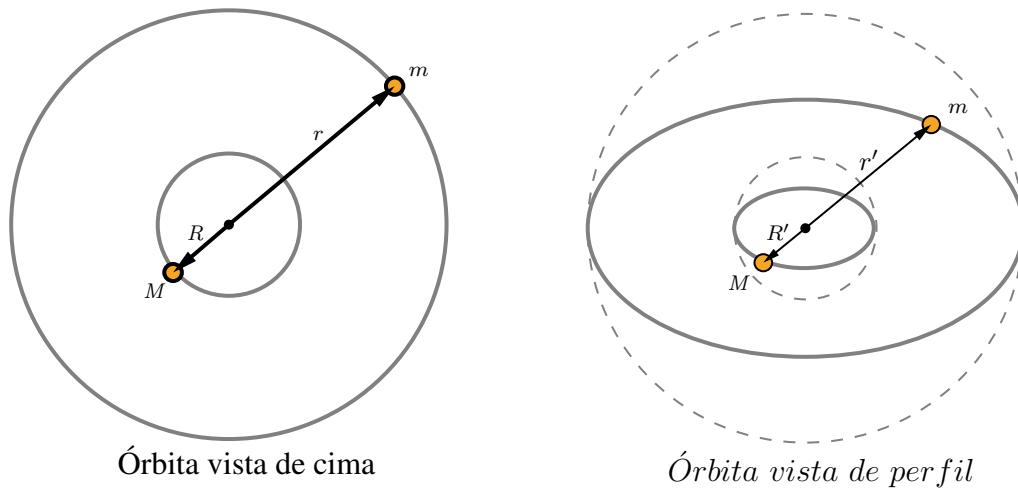
$$\boxed{V_{r-CM} = \frac{v_{r-min} + v_r}{2 \sin i}}$$

## 6.4 Tipos de Sistemas Binários

Existem diferentes formas de se coletar dados de sistemas binários, como, por exemplo, analisando o espectro dos componentes, fluxos de luz, e pela tradicional observação.

### 6.4.1 Binárias Visuais

Quando é possível observar ambas componentes de um sistema binário, ele é chamado de Visual, dessa forma, é possível encontrar as massas individuais de cada estrela.



A partir de observações, conseguimos encontrar diferentes informações do sistema, como por exemplo:

- O período  $P$  do sistema;
- Os ângulos compreendidos pelos semieixos maior e menor das órbitas 1 ( $M$ ) e 2 ( $m$ ):  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$ ,  $\alpha_2$  e  $\beta_2$ , respectivamente
- a distância  $d$  até o sistema

De maneira parecida com o que fizemos no Exemplo 3, podemos achar a inclinação orbital  $i$ :

$$\cos i = \frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} \Rightarrow \boxed{\cos i = \frac{\beta_1}{\alpha_1} = \frac{\beta_2}{\alpha_2}}$$

Onde  $b_1 = \beta_1 d$ ,  $b_2 = \beta_2 d$ ,  $a_1 = \alpha_1 d$  e  $a_2 = \alpha_2 d$ .

Agora, perceba que  $R = a_1$  e  $r = a_2$ . Desse modo, podemos encontrar a razão entre as massas através da equação do centro de massa:

$$\frac{M}{m} = \frac{r}{R} = \frac{a_2}{a_1} \Rightarrow \boxed{\frac{M}{m} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}}$$

Por fim, ao utilizar a Terceira Lei de Kepler de sistemas binários, podemos encontrarmos as massas individuais:

$$\frac{P^2}{(R+r)^3} = \frac{4\pi^2}{G(M+m)} \Rightarrow M+m = \frac{4\pi^2(R+r)^3}{GP^2}$$

Como  $R = \alpha_1 d$ ,  $r = \alpha_2 d$  e  $m = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} M$ , podemos achar  $M$ :

$$M + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} M = \frac{4\pi^2 d^3 (\alpha_1 + \alpha_2)^3}{GP^2}$$

Logo:

$$M = \boxed{\frac{4\pi^2 d^3 \alpha_2 (\alpha_1 + \alpha_2)^2}{GP^2}}$$

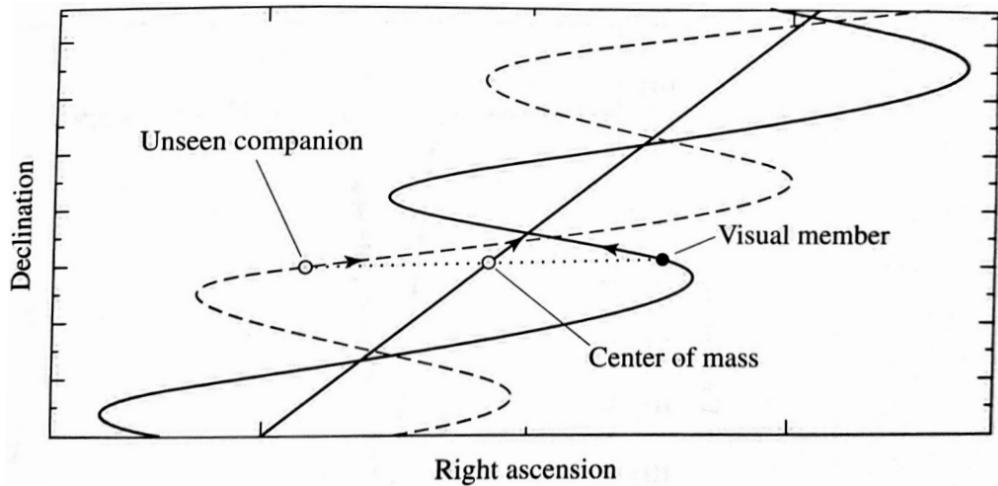
Analogamente para  $m$ :

$$m = \boxed{\frac{4\pi^2 d^3 \alpha_1 (\alpha_1 + \alpha_2)^2}{GP^2}}$$

### 6.4.2 Binárias Astrométricas

Quando **apenas uma** das estrelas de um sistema binário pode ser observada, ele é classificado como **astrométrico**. Esse conceito também se aplica a estrelas com exoplanetas, já que a detecção direta desses planetas é extremamente difícil.

Ao observar o céu, espera-se que a posição de uma estrela varie continuamente devido ao seu movimento próprio, desconsiderando os efeitos de paralaxe, que são insignificantes para grandes distâncias. No entanto, se essa estrela apresentar uma **oscilação adicional** em torno de um ponto que se desloca conforme seu movimento próprio, isso pode indicar a presença de outro corpo exercendo influência gravitacional sobre ela. Esse fenômeno pode ser um indício de um sistema binário ou da existência de um exoplaneta. A imagem a seguir ilustra esse comportamento:



**fonte** - <https://cosmos.phy.tufts.edu/danilo/AST31/Material/Lecture6.pdf>

É possível separar o movimento próprio da estrela visível, isolando a oscilação causada pela presença de outro corpo. Isso resulta em uma órbita observável semelhante à que analisamos anteriormente. Podemos então estudar quantitativamente um sistema em que as órbitas do sistema binário sejam circulares. A partir de observações, é possível determinar:

- A distância  $d$  até o sistema (usando paralaxe, por exemplo);
- A massa  $M$  da estrela visível;
- O ângulo correspondente ao semieixo maior da órbita da estrela observada,  $\alpha$ ;
- O período  $P$  do sistema.

**Obs:** Medindo o fluxo da estrela na Terra e tendo sua distância até nós, podemos encontrar sua luminosidade. A partir disso, podemos utilizar relações entre luminosidade e massa de estrelas para determinarmos sua massa.

⇒ Podemos verificar que a massa da componente não visível (como uma estrela escura ou um exoplaneta) pode ser determinada. Como já vimos, o raio  $R$  da órbita da estrela visível é dado por:

$$R = \alpha d$$

Pela Terceira Lei de Kepler para sistemas binários:

$$\frac{P^2}{(R+r)^3} = \frac{4\pi^2}{G(M+m)}$$

Pela equação do centro de massa:

$$MR = mr$$

Feito isso, podemos encontrar uma expressão envolvendo  $m$  e as demais variáveis. Substituindo a equação do centro de massa na Terceira Lei de Kepler:

$$\frac{P^2}{R^3} \left(1 + \frac{M}{m}\right)^3 = \frac{4\pi^2}{G(M+m)}$$

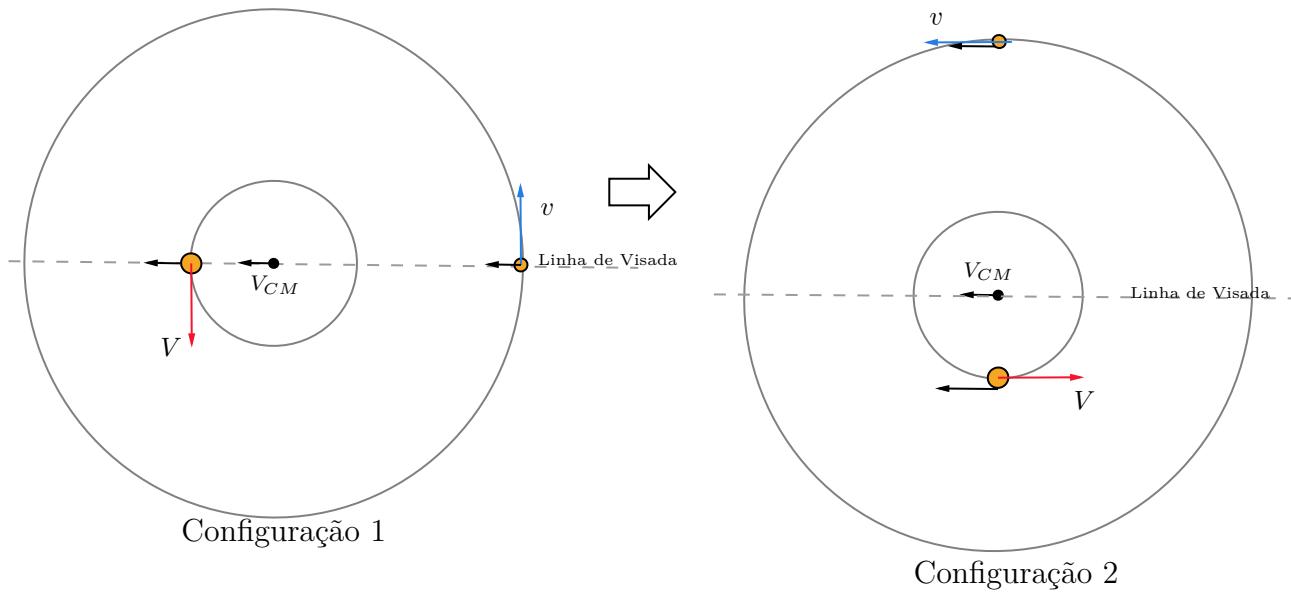
Reescrevendo:

$$\boxed{\frac{m^3}{(M+m)^2} = \frac{4\pi^2 \alpha^3 d^3}{GP^2}}$$

Note que não é fácil isolar  $m$  em função das demais variáveis, pois essa equação é um polinômio cúbico. Mas a equação pode ser resolvida usando métodos matemáticos como o da Iteração, mostrado no apêndice deste livro.

### 6.4.3 Binárias Espectroscópicas

Binárias espectroscópicas são sistemas em que o espectro das duas estrelas é analisado para determinar seus parâmetros. Aqui, consideraremos o caso mais clássico, no qual as órbitas são circulares e a inclinação é  $i = 90^\circ$ . Veja as duas imagens abaixo:



Onde  $v$  e  $V$  são as velocidades de  $m$  e  $M$  no referencial do centro de massa (CM), respectivamente. Também perceba que a velocidade radial "total" de algum dos componentes é a soma vetorial de  $\vec{V}_{CM}$  com a velocidade no referencial do CM.

Da Terra, podemos determinar o gráfico da figura anterior analisando o redshift das estrelas ao longo do tempo. A partir disso, obtemos diretamente  $v_{CM}$  (a velocidade quando as curvas se encontram) e também  $v$  e  $V$  (exibidos no gráfico), além do período  $P$  do sistema. Com essas informações, podemos determinar  $m$ ,  $M$ ,  $r$  e  $R$ , conforme veremos a seguir.

Como as órbitas são circulares, podemos expressar  $r$  e  $R$  em função de  $P$  da seguinte forma:

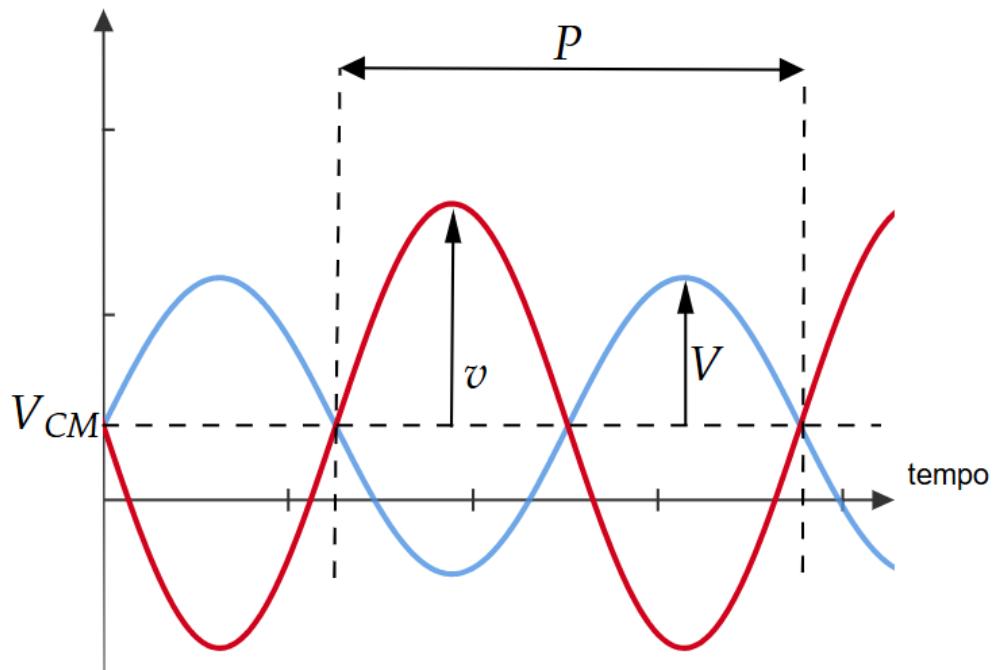
$$v = \frac{2\pi r}{P} \Rightarrow \boxed{r = \frac{vP}{2\pi}}$$

$$V = \frac{2\pi R}{P} \Rightarrow \boxed{R = \frac{VP}{2\pi}}$$

Aplicando a Terceira Lei de Kepler:

$$\frac{P^2}{(R + r)^3} = \frac{4\pi^2}{G(M + m)}$$

*velocidade radial*



Pela equação do centro de massa:

$$MR = mr$$

Combinando essas equações, podemos determinar  $M$ :

$$M + m = M \left( \frac{r + R}{r} \right) = \frac{4\pi^2(R + r)^3}{GP^2}$$

Assim:

$$M = \frac{4\pi^2r(R + r)^2}{GP^2}$$

Já para  $m$ , obtemos:

$$m = \frac{4\pi^2R(R + r)^2}{GP^2}$$

### Exemplo 71: Q2 - T1 2021

Considere um sistema binário a 20,0 pc da Terra em que as duas estrelas possuem órbitas circulares com diâmetros angulares aparentes de 1,50" e 0,500". Devido ao deslocamento Doppler, para um observador no plano orbital do sistema binário o comprimento de onda central da linha  $H_{\alpha}$  da estrela de menor massa atinge um valor máximo de 656,330 nm. Considere que o comprimento de onda da linha  $H_{\alpha}$  equivale a 656,281 nm quando medido em laboratório. Calcule o período orbital do sistema, em anos.

### Solução 71

O deslocamento Doppler indica que a linha  $H_{\alpha}$  da estrela de menor massa atinge um comprimento de onda máximo de 656,330 nm, enquanto seu valor em repouso é de 656,281 nm. Note que a estrela de menor massa deve possuir o maior raio orbital. Com esses dados, podemos determinar o período orbital do sistema.

A variação no comprimento de onda é explicada pelo efeito Doppler:

$$\frac{v}{c} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}$$

Substituindo os valores fornecidos:

$$v = 2,25 \cdot 10^4 \text{ m/s}$$

O raio da órbita da estrela de menor massa pode ser obtido a partir do diâmetro angular aparente  $\theta$  e da distância  $d$ :

$$R = \frac{\theta d}{2}$$

A relação entre velocidade orbital, raio e período é dada por:

$$v = \frac{2\pi R}{T}$$

Isolando  $T$ :

$$T = \frac{2\pi R}{v}$$

Substituindo os valores numéricos:

$$T \approx 20 \text{ anos}$$

Portanto, o período orbital do sistema é de aproximadamente 20 anos.

#### 6.4.4 Binárias Eclipsantes

Nas binárias visuais e astrométricas, os dados são obtidos por meio de observações diretas. Já nas binárias espectroscópicas, a análise é feita com base no espectro das estrelas. Por fim, nas binárias eclipsantes, utilizamos as curvas de luz do sistema para determinar os parâmetros estelares.

#### Fluxos

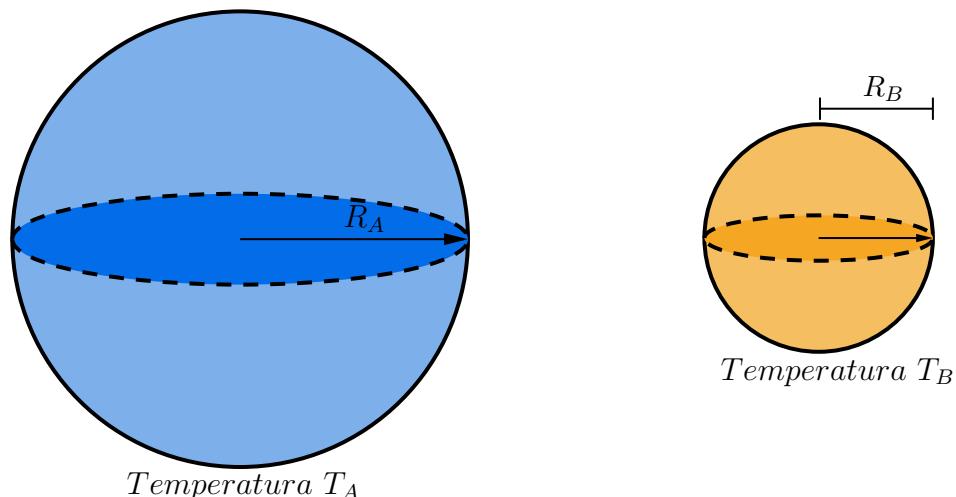
Ao observarmos o céu, algumas estrelas parecem ter variações **periódicas** em seu brilho. Esse fenômeno pode ocorrer, por exemplo, em estrelas que se expandem e contraem ciclicamente, como as **cefeidas**, fazendo com que sua luminosidade mude ao longo do tempo. No entanto, outra possível explicação para esse comportamento é a presença de um sistema binário (ou até mesmo de uma exoplaneta). Quando a inclinação orbital de um sistema binário é próxima de  $90^\circ$ , é possível notar que as estrelas passam **uma em frente à outra** durante o período orbital, o que resulta em variações no fluxo de luz.

Antes de prosseguirmos, é essencial definir os dois tipos de eclipses que ocorrem em um ciclo:

- **Eclipse primário:** queda mais acentuada no brilho;
- **Eclipse secundário:** menor redução na luminosidade.

Agora, vamos analisar a situação geral. Consideremos duas estrelas com raios  $R_A$  e  $R_B$ , onde  $R_A > R_B$ , e temperaturas  $T_A$  e  $T_B$ . Supondo que a inclinação orbital seja  $i = 90^\circ$ , podemos calcular o fluxo luminoso em três cenários distintos:

1. Ambas as estrelas estão completamente visíveis (Sem eclipse);
2. A estrela B está atrás da estrela A;
3. A estrela B está à frente da estrela A;



⇒ Pela lei de Stefan-Boltzmann, o fluxo  $F_1$  pode ser representado por:

$$F_1 = F_A + F_B \propto R_A^2 T_A^4 + R_B^2 T_B^4$$

Na segunda situação, não conseguimos observar a estrela B, logo, seu Fluxo não entra em questão, resultando em:

$$F_2 = F_A \propto R_A^2 T_A^4$$

Na terceira situação, o fluxo  $F_c$  pode ser determinado assumindo que o brilho superficial das estrelas permanece constante, o que implica que o fluxo é **proporcional à área visível**. Dessa forma,  $F_c$  corresponde ao fluxo total da estrela 1, **subtraído** do fluxo de uma região de raio  $R_2$  e temperatura  $T_1$ , e acrescido do fluxo da estrela 2. Em outras palavras, é como se substituíssemos uma parte da estrela 1, de raio  $R_2$ , pela estrela 2. Assim:

$$F_3 \propto T_A^4 (R_A^2 - R_B^2) + R_B^2 T_B^4$$

Com esses valores e conhecendo  $F_1$ ,  $F_2$  e  $F_3$ , é possível encontrarmos a razão entre as temperaturas. Veja:

$$F_1 - F_2 \propto R_B^2 T_B^4$$

e

$$F_1 - F_3 \propto R_B^2 T_A^4$$

Pensando na ideia de proporção, vamos tomar uma constante de proporcionalidade  $k$  (que nesse caso é a mesma para todas as equações):

$$F_1 - F_2 = k R_B^2 T_B^4$$

e

$$F_1 - F_3 = k R_B^2 T_A^4$$

Ao dividir a equação de baixo pela de cima:

$$\left(\frac{T_A}{T_B}\right)^4 = \frac{F_1 - F_3}{F_1 - F_2}$$

Por fim, também podemos encontrar uma relação entre os raios. Perceba:

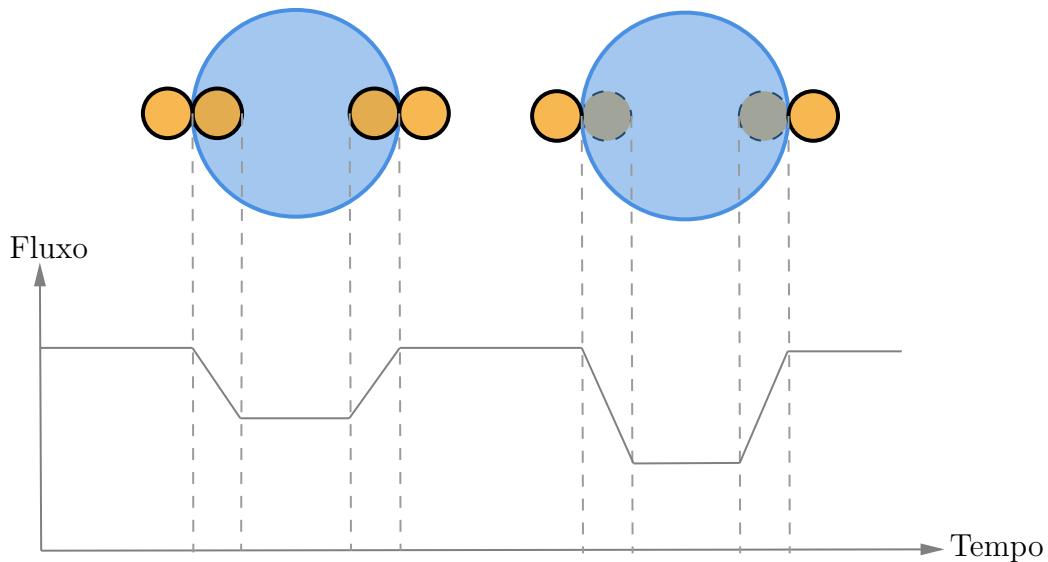
$$F_1 - F_3 = k R_B^2 T_A^4$$

Como  $F_2 = k R_A^2 T_A^4$ , temos:

$$\left(\frac{R_B}{R_A}\right)^2 = \frac{F_1 - F_3}{F_2}$$

Com essas equações, podemos analisar como se comportam as **curvas de luz** desse tipo de sistemas binários. Há **dois** cenários possíveis: um em que a **estrela maior é mais fria que a menor** e

outro em que ocorre o contrário, **a estrela maior é mais quente que a menor**. Geralmente, o enunciado indica qual das situações está sendo considerada. Para efeito de análise, focaremos no primeiro caso, pois o outro é análogo. Assim, a curva de luz correspondente à situação em que a **estrela maior é a mais fria** será apresentada abaixo.



É possível notar que o eclipse secundário, caracterizado por um fluxo maior, ocorre quando a estrela menor transita em frente à estrela maior. Isso acontece porque, quando a estrela menor se posiciona atrás da estrela maior, o fluxo captado corresponde apenas à estrela fria. Já quando a estrela menor passa à frente, ocorre uma substituição de uma região fria por uma região quente do mesmo tamanho, resultando em um fluxo maior. Afinal,  $L \propto T^4$

Seja  $F_0$  o fluxo sem eclipses,  $F_P$  o fluxo durante o eclipse primário e  $F_S$  o fluxo no eclipse secundário. Podemos estabelecer as seguintes relações:

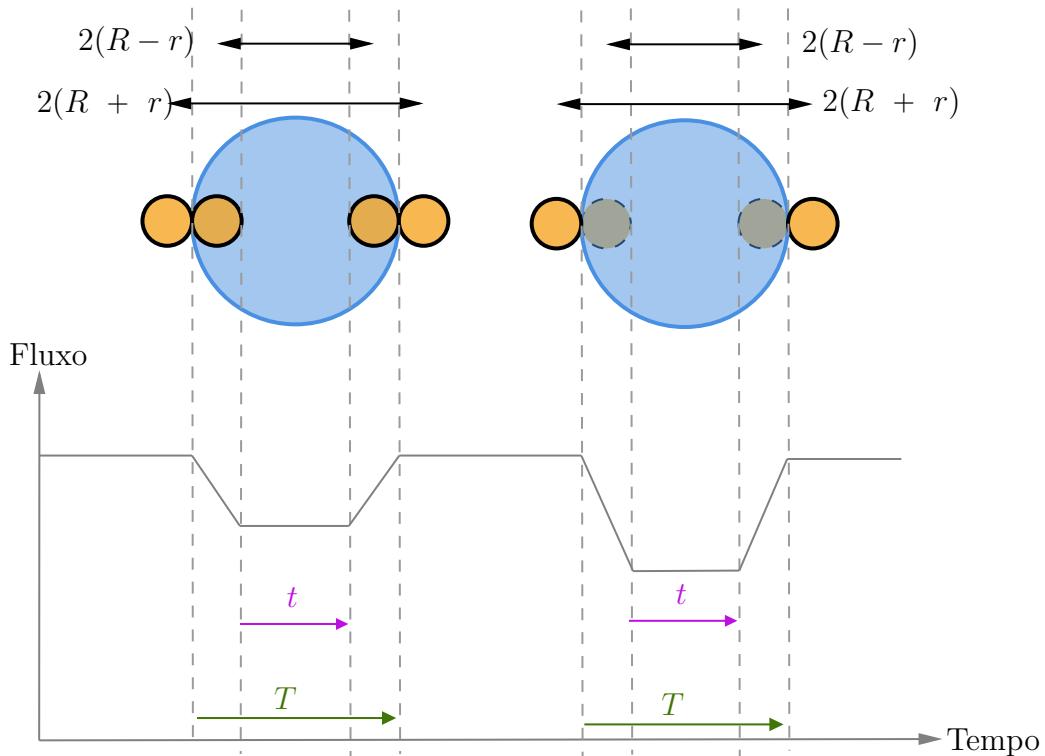
$$\begin{cases} F_0 = F_1 \\ F_P = F_2 \\ F_S = F_3 \end{cases}$$

Caso a estrela maior fosse a mais quente do sistema, as relações se inverteriam, levando a  $F_P = F_c$  e  $F_S = F_b$ .

Na prática, as curvas de luz nas **regiões intermediárias**, onde a estrela menor ainda não foi completamente ocultada pela estrela maior, não apresentam transições abruptas. Esse comportamento ocorre devido ao fenômeno conhecido como **escurecimento de bordo**, o qual faz com que o brilho superficial da estrela seja menor próximo às bordas.

## Duração

Já vimos que é possível determinar a razão entre as temperaturas e os raios das estrelas de um sistema binário a partir dos fluxos observados na curva de luz. Agora, iremos obter a razão entre os raios das estrelas analisando determinados intervalos de tempo durante os eclipses. Neste caso, não há necessidade de diferenciar se a estrela maior é mais quente ou mais fria em relação à menor.



Observe que  $T$  se inicia no momento em que a estrela menor começa a tangenciar a estrela maior e termina quando ela deixa de tocar sua superfície. Assim, a distância percorrida por qualquer ponto da estrela menor (como seu centro) ao longo de  $T$  é dada por:

$$\Delta S = r + 2R + r = 2(R + r).$$

Por outro lado,  $t$  tem início quando a estrela menor está completamente inserida dentro da região da estrela maior e se encerra quando ela deixa essa condição. Dessa forma, a distância percorrida pelo centro da estrela menor durante  $t$  é:

$$\Delta s = 2(R - r).$$

Com isso, obtemos:

$$\Delta S = v_{rel}T \Rightarrow T = \frac{2(R + r)}{v_{rel}}$$

e

$$\Delta s = v_{rel}t \Rightarrow t = \frac{2(R - r)}{v_{rel}}$$

onde  $v_{rel}$  representa a velocidade relativa entre as estrelas, ou seja, a soma das velocidades individuais de cada estrela em relação ao centro de massa. Agora, ao dividir as equações:

$$\frac{T}{t} = \frac{R+r}{R-r}$$

Definindo  $k = \frac{T}{t}$ , temos:

$$k(R-r) = R+r \Rightarrow R(k-1) = r(k+1) \Rightarrow \frac{R}{r} = \frac{k+1}{k-1}$$

Por fim:

$$\boxed{\frac{R}{r} = \frac{T+t}{T-t}}$$

## 6.5 Órbita Relativa

Para resolver alguns problemas mais difíceis de gravitação, é interessante encontrar os parâmetros de apenas uma órbita ao invés das duas de um sistema binário. Considerando um sistema composto por estrelas que possuem massas não desprezíveis entre si  $m_1$  e  $m_2$ , devemos pensar em uma órbita equivalente, chamada de **órbita relativa**, a qual possui um corpo de massa reduzida  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$  que orbita um corpo de massa  $M = m_1 + m_2$ . Para entender melhor essa equivalência, analise as imagens abaixo:

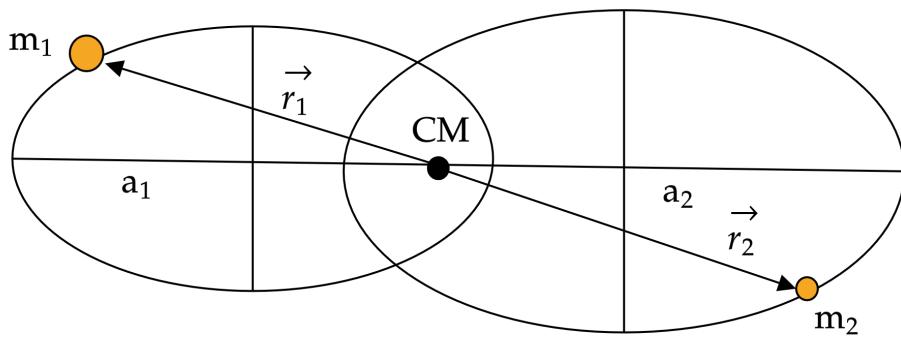


Figura 53: Órbitas de cada estrela do sistema binário

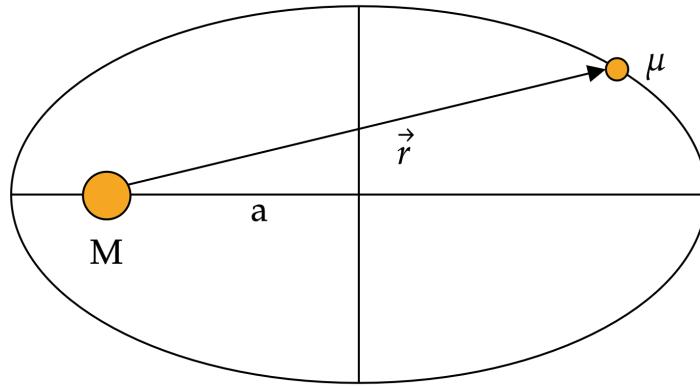


Figura 54: Órbita relativa

A partir das figuras, vemos que:  $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$  (note que  $\vec{r}_1$  e  $\vec{r}_2$  apontam para direções opostas, por isso o sinal negativo na soma vetorial).

Ou, em módulo,  $r = r_1 + r_2$ .

Usando as relações anteriores:

$$m_1 r_1 = m_2 r_2$$

$$m_1 r_1 = m_2 (r - r_1)$$

$$r = r_1 \left( \frac{m_1}{m_2} + 1 \right)$$

Analogamente:

$$r = r_2 \left( \frac{m_2}{m_1} + 1 \right)$$

Derivando ambas as expressões obtidas em relação ao tempo, teremos:

$$v = v_1 \left( \frac{m_1}{m_2} + 1 \right)$$

$$v = v_2 \left( \frac{m_2}{m_1} + 1 \right)$$

Agora, encontraremos alguns parâmetros da nova órbita, lembrando que as excentricidades das órbitas das estrelas binárias são iguais ( $e_1 = e_2 = e$ ).

A distância no periastro é dada por:

$$r_p = a_1(1 - e_1) + a_2(1 - e_2) = (a_1 + a_2)(1 - e)$$

A distância no apoastro, por sua vez, é:

$$r_a = a_1(1 + e_1) + a_2(1 + e_2) = (a_1 + a_2)(1 + e)$$

Assim, o semieixo maior é:

$$a = \frac{r_a + r_p}{2} = a_1 + a_2$$

E a excentricidade:

$$e' = \frac{r_a}{a} - 1 = e_1 = e_2 = e$$

O período orbital é calculado pela Terceira Lei de Kepler:

$$\frac{P^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \rightarrow P = 2\pi a \sqrt{\frac{a}{GM}}$$

A energia mecânica da órbita relativa é calculada da seguinte forma:

$$E = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} - \frac{G m_1 m_2}{r}$$

Mas, podemos transformá-la em uma expressão mais agradável para os cálculos. Como  $m_1 v_1 = m_2 v_2$ :

$$E = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_1 v_1 v_2}{2} - \frac{G m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{r(m_1 + m_2)}$$

$$E = \frac{m_1 v_1}{2} (v_1 + v_2) - \frac{G \mu M}{r}$$

Como  $v = v_1 + v_2$  e  $v_1 = v \frac{m_2}{m_1 + m_2}$ :

$$E = \frac{m_1 m_2 v^2}{2(m_1 + m_2)} - \frac{G \mu M}{r}$$

$$E = \frac{\mu v^2}{2} - \frac{G \mu M}{r}$$

$$E = \frac{-G \mu M}{2a}$$

### Exemplo 72: Lista dos Treinamentos de 2019

Um sistema binário é composto por uma supergigante azul de massa  $M_s = 30M_\odot$  e um buraco negro. A supergigante orbita o centro de massa do sistema a cada 5,6 dias. Sua velocidade orbital é  $v_p = 123,03 \text{ km/s}$  no periastro e  $v_a = 116,68 \text{ km/s}$  no apoastro. Calcule a excentricidade e o comprimento do semieixo maior da órbita da supergigante e a massa do buraco negro.

### Solução 72

Considerando apenas a órbita da supergigante, temos, por conservação do momento angular no periastro e no apoastro:

$$\begin{aligned} m_s r_a v_a &= m_s r_p v_p \\ a_s(1+e)v_a &= a_s(1-e)v_p \\ \frac{v_a}{v_p} &= \frac{1-e}{1+e} \\ e &= \frac{v_p - v_a}{v_p + v_a} \\ e &= 0,0265 \end{aligned}$$

Para o cálculo do semieixo maior da órbita da supergigante, usaremos o valor da sua velocidade no apoastro. Logo:

$$\begin{aligned} v_a &= \sqrt{GM \left( \frac{2}{r_a} - \frac{1}{a_s} \right)} \\ v_a &= \sqrt{\frac{GM}{a_s} \left( \frac{1-e}{1+e} \right)} \\ a_s &= \frac{GM}{v_a^2} \left( \frac{1-e}{1+e} \right) \\ a_s &= 9,24 \cdot 10^9 \text{ m} \end{aligned}$$

Por fim, para calcularmos o último valor solicitado pela questão, usaremos o que foi ensinado de órbitas relativas. Pela Terceira Lei de Kepler, temos:

$$m_s + m_b = \frac{4\pi^2}{GP^2} (a_s + a_b)^3$$

Mas, como  $m_s a_s = m_b a_b$ ,  $a_b = \frac{m_s a_s}{m_b}$ :

$$m_s + m_b = \frac{4\pi^2}{GP^2} \left( a_s + \frac{m_s a_s}{m_b} \right)^3$$

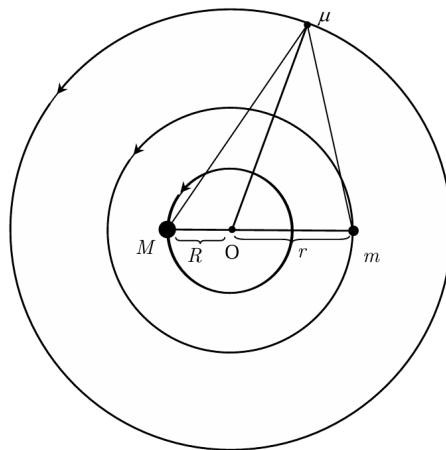
$$m_b = \frac{4\pi^2 a_s^3}{GP^2} \left(1 + \frac{m_s}{m_b}\right)^3 - m_s$$

Para resolver essa equação, devemos usar o método da iteração, ensinado no apêndice. Assim, chegaremos no resultado:

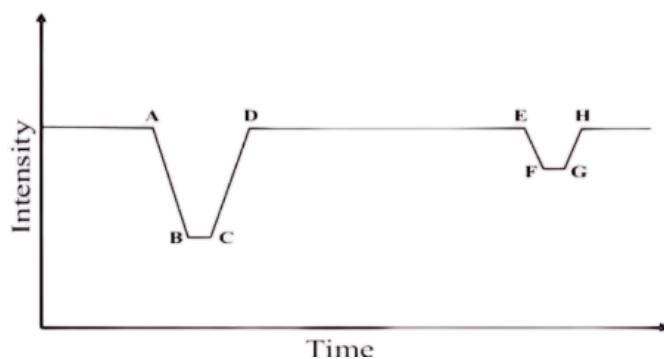
$$m_b = 2,4 \cdot 10^{24} kg$$

## 6.6 Problemas

1. (IPHO 2011 Adaptada - Problema dos 3 corpos e LISA) Em um sistema binário comum com duas massas  $M$  e  $m$ , foi adicionado uma massa infinitesimal  $\mu$ , que orbita sobre o mesmo centro de massa de forma que  $\mu$  se mantenha estacionário com respeito as outras duas massas. Considere que a massa  $\mu$  não é colinear com  $M$  e  $m$ . Veja a figura para entender melhor:



- (a) A distância entre  $\mu$  e  $M$ .  
 (b) A distância entre  $\mu$  e  $m$ .  
 (c) A distância entre  $\mu$  e o centro de massa.
2. (IOAA 2018) Um sistema binário eclipsante tem um período de 30 dias. A curva de luz na figura abaixo mostra que a estrela secundaria eclipsa a estrela primária (do ponto A ao ponto D) em oito horas (medido do tempo do primeiro contato ao contato final), enquanto do ponto B ao ponto C, o período do eclipse total é uma hora e dezoito minutos. A análise espectral mostra que a velocidade radial da primeira estrela é 30 km/s e da segunda estrela é 40 km/s. Se nós assumirmos que as órbitas são circulares e com inclinação de  $i = 90^\circ$ , determine os raios e as massas de ambas estrelas em unidades de raio solar e massa solar.



3. (**IPHO 2007**) Duas estrelas girando em torno de seu centro de massa formam um sistema estelar binário. Quase metade das estrelas em nossa galáxia são sistemas binários. Não é fácil identificar a natureza binária da maioria desses sistemas estelares da Terra, uma vez que a distância entre as duas estrelas é muito menor do que sua distância até nós e, portanto, as estrelas não podem ser resolvidas com telescópios. Por isso, precisamos usar fotometria ou espectrometria para observar as variações na intensidade ou no espectro de uma estrela em particular para descobrir se é um sistema binário ou não.

### Parte A - Fotometria de Sistemas Binários

Se estivermos exatamente no plano de movimento das duas estrelas, então uma estrela ocultará (passará na frente de) a outra estrela em determinados momentos, e a intensidade do sistema como um todo variará com o tempo do ponto de observação. Esses sistemas binários são chamados de binários eclipsantes.

Considere que duas estrelas estão se movendo em órbitas circulares em torno de seu centro de massa comum com uma velocidade angular constante  $\omega$ , e que estamos exatamente no plano de movimento do sistema binário. Considere também que as temperaturas superficiais das estrelas são  $T_1$  e  $T_2$  ( $T_1 > T_2$ ), e que os raios correspondentes são  $R_1$  e  $R_2$  ( $R_1 > R_2$ ), respectivamente. A intensidade total da luz, medida na Terra, é representada na figura abaixo como uma função do tempo. Medições cuidadosas indicam que as intensidades da luz incidente das estrelas correspondentes aos mínimos são, respectivamente, 90 e 63 por cento da intensidade máxima,  $I_0$ , recebida de ambas as estrelas ( $I_0 = 4,8 \times 10^{-9} \text{ W/m}^2$ ). O eixo vertical na figura mostra a razão  $I/I_0$ , e o eixo horizontal está marcado em dias.

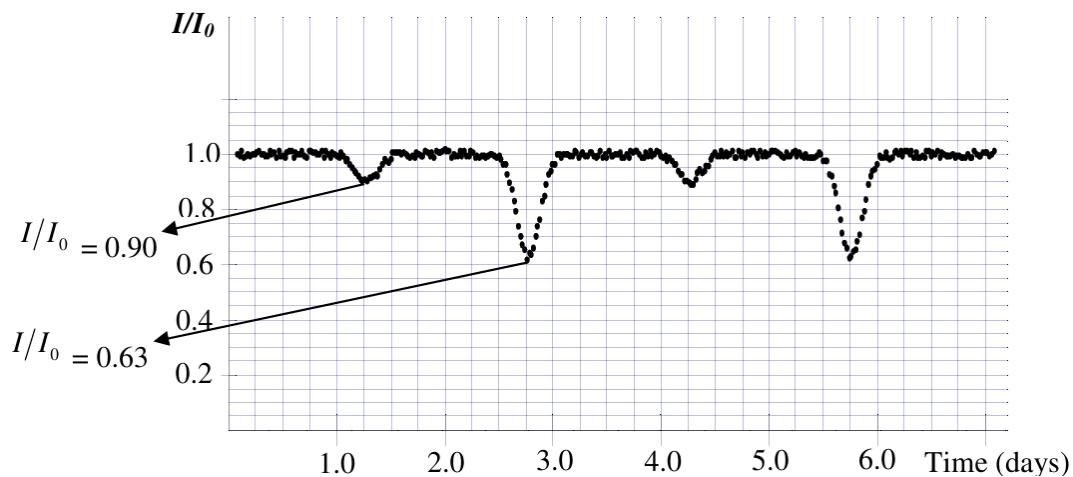


Figura 55: A intensidade relativa recebida do sistema estelar binário como uma função do tempo. O eixo vertical foi escalado por  $I_0 = 4,8 \times 10^{-9} \text{ W/m}^2$ . O tempo é dado em dias.

- (a) Encontre o período do movimento orbital. Dê sua resposta em segundos com até duas casas decimais. Qual é a frequência angular do sistema em rad/s?

- (b) Com uma boa aproximação, a radiação recebida de uma estrela é uma radiação uniforme de corpo negro proveniente de um disco plano com um raio igual ao raio da estrela. Assim, o poder recebido da estrela é proporcional a  $AT^4$ , onde  $A$  é a área do disco e  $T$  é a temperatura superficial da estrela. Use o diagrama da Figura 1 para encontrar as razões  $\frac{T_1}{T_2}$  e  $\frac{R_1}{R_2}$ .

### Parte B - Espectroscopia de Sistemas Binários

Nesta seção, vamos calcular as propriedades astronômicas de uma estrela binária utilizando dados espectrométricos experimentais do sistema binário.

Os átomos absorvem ou emitem radiação em certos comprimentos de onda característicos. Consequentemente, o espectro observado de uma estrela contém *linhas de absorção* devido aos átomos na atmosfera da estrela.

O sódio tem um espectro de linha característico amarelo (linha  $D_1$ ) com um comprimento de onda de 5895.9 Å ( $10 \text{ Å} = 1 \text{ nm}$ ). Examinamos o espectro de absorção do sódio atômico neste comprimento de onda para o sistema binário da seção anterior. O espectro da luz que recebemos da estrela binária é deslocado pelo efeito Doppler, porque as estrelas estão se movendo em relação a nós. Cada estrela tem uma velocidade diferente. Consequentemente, o comprimento de onda de absorção para cada estrela será deslocado por uma quantidade diferente. Medições de comprimento de onda altamente precisas são necessárias para observar o deslocamento Doppler, já que a velocidade das estrelas é muito menor que a velocidade da luz. A velocidade do centro de massa do sistema binário que consideramos neste problema é muito menor que as velocidades orbitais das estrelas. Portanto, todos os deslocamentos Doppler podem ser atribuídos à velocidade orbital das estrelas. A Tabela 1 mostra o espectro medido das estrelas no sistema binário que observamos.

**Tabela 1: Espectro de absorção do sistema de estrela binária para a linha  $D_1$  do Sódio**

t/dias	0.3	0.6	0.9	1.2	1.5	1.8	2.1	2.4
$\lambda_1$ (Å)	5897.5	5897.7	5897.2	5896.2	5895.1	5894.3	5894.1	5894.6
$\lambda_2$ (Å)	5893.1	5892.8	5893.7	5896.2	5897.3	5898.7	5899.0	5898.1

t/dias	2.7	3.0	3.3	3.6	3.9	4.2	4.5	4.8
$\lambda_1$ (Å)	5895.6	5896.7	5897.3	5897.7	5897.2	5896.2	5895.0	5894.3
$\lambda_2$ (Å)	5896.4	5894.5	5893.1	5892.8	5893.7	5896.2	5897.4	5898.7

Usando a Tabela 1, responda:

- (a) Sejam  $v_1$  e  $v_2$  as velocidades orbitais de cada estrela. Encontre  $v_1$  e  $v_2$ . A velocidade da luz  $c = 3.0 \times 10^8 \text{ m/s}$ . Ignore todos os efeitos relativísticos.

- (b) Encontre a razão de massa das estrelas ( $m_1/m_2$ ).
- (c) Sejam  $r_1$  e  $r_2$  as distâncias de cada estrela ao seu centro de massa. Encontre  $r_1$  e  $r_2$ .
- (d) Encontre a distância  $r$  entre as duas estrelas.
- (e) Sabendo que a força gravitacional é a única força que atua nas estrelas, encontre a massa individual de cada uma.

### Parte C - Características gerais de estrelas

A maioria das estrelas gera energia através do mesmo mecanismo. Por causa disso, existe uma relação empírica entre sua massa,  $M$ , e sua luminosidade,  $L$ , que é a potência radiante total da estrela. Essa relação pode ser escrita na forma:

$$\frac{L}{L_\odot} = \left( \frac{M}{M_\odot} \right)^\alpha$$

Aqui,  $M_\odot = 2.0 \times 10^{30}$  kg é a massa solar, e  $L_\odot = 3.9 \times 10^{26}$  W é a luminosidade solar. Essa relação é mostrada em um diagrama log-log na Figura abaixo:

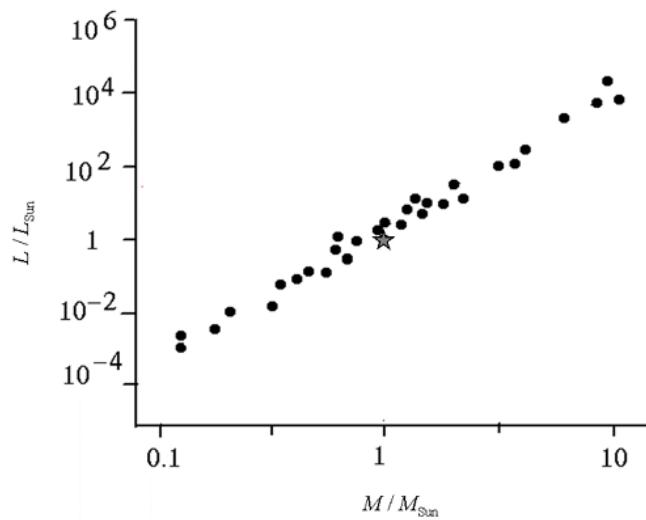
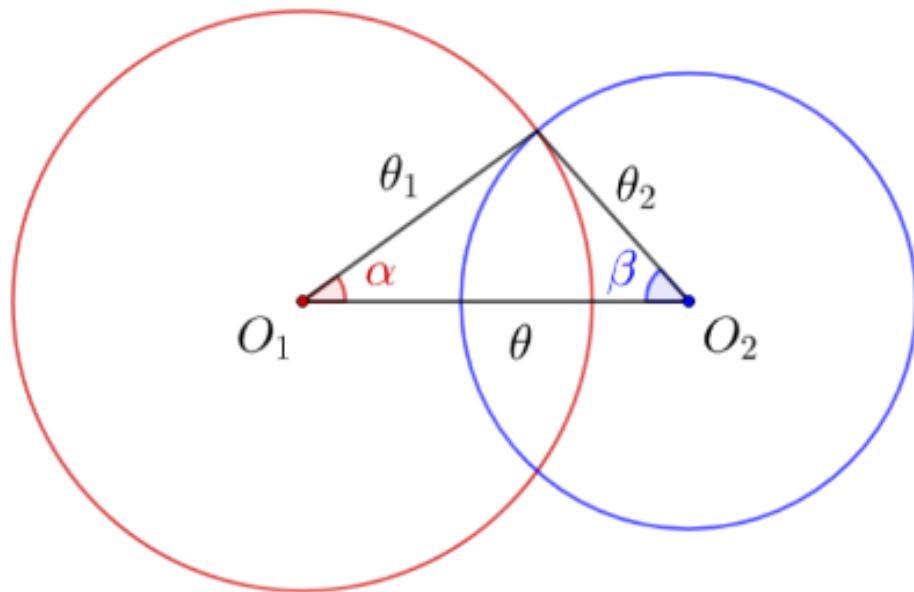


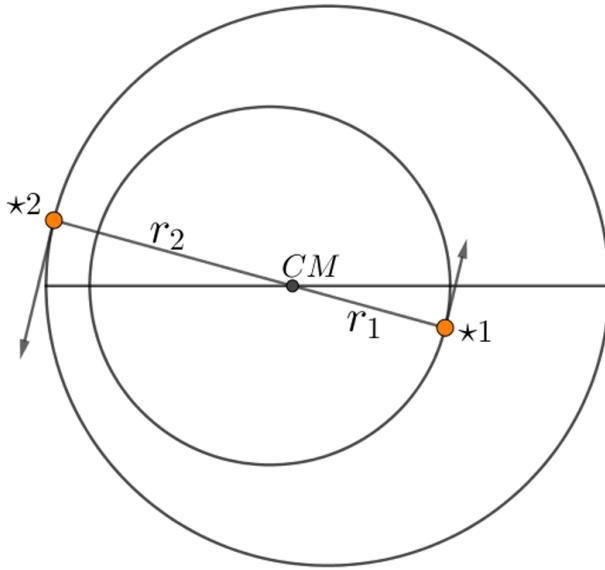
Figura 56: A luminosidade de uma estrela em função de sua massa segue uma lei de potência. O diagrama é log-log. O símbolo da estrela representa o Sol, com uma massa de  $2.0 \times 10^{30}$  kg e uma luminosidade de  $3.9 \times 10^{26}$  W.

- (a) Encontre  $\alpha$ .
- (b) Sejam  $L_1$  e  $L_2$  as luminosidades das estrelas no sistema binário estudado nas seções anteriores. Encontre  $L_1$  e  $L_2$ .

- (c) Qual é a distância,  $d$ , do sistema estelar até nós em anos-luz? Para encontrar a distância, você pode usar o diagrama da Figura (a). Um ano-luz é a distância que a luz percorre em um ano.
- (d) Qual é a distância angular máxima,  $\theta$ , entre as estrelas a partir do nosso ponto de observação?
- (e) Qual é o menor diâmetro de abertura,  $D$ , necessário para um telescópio óptico resolver essas duas estrelas?
4. (Vinhedo 2024) Hugo planejava observar o eclipse de um sistema binário edge-on durante sua estadia no Hotel Fazenda Ribeirão, mas seus planos foram adiados por conta de uma grande chuva durante a noite. Sem nada para fazer, ele decide se preparar para uma futura observação desenhando curvas de luz para sistemas binários edge-on de diferentes parâmetros. Em todas as suas curvas, a estrela menor, chamada de estrela 2, oculta parcialmente a estrela maior, chamada de estrela 1. Nossa tarefa é ajudá-lo a obter uma função que descreva a curva de luz para uma dada razão entre os raios das estrelas  $A = R_2/R_1$  e uma dada razão entre suas temperaturas  $B = T_2/T_1$ . Assim, queremos encontrar a variação de magnitude  $\Delta m \geq 0$  do binário em relação à situação sem eclipse em função de um parâmetro  $x$ , definido nesse problema como a razão entre distância angular entre os centros das estrelas e a distância angular entre eles no início do eclipse, isto é,  $x = \theta/(\theta_1 + \theta_2)$ . Assumindo que a velocidade relativa entre as estrelas permaneça constante,  $x$  também nos dá uma parametrização do tempo durante o eclipse. Dessa forma, encontre a variação de magnitude  $\Delta m > 0$  do binário em relação à situação sem eclipse. Deixe sua resposta em termos de  $A$ ,  $B$ ,  $\alpha$ , e  $\beta$ .



5. (**Treinamentos 2020**) Um dos sistemas binários mais famosos é o da estrela Spica,  $\alpha Vir$ , localizado na constelação de Virgem. As estrelas que o compõem possuem massas da mesma ordem de grandeza e descrevem órbitas elípticas em torno do centro de massa.



Na imagem acima, vemos as órbitas individuais de cada uma das estrelas para um referencial em repouso em relação ao baricentro do conjunto.

Nathan e Shell, diante dessas informações, decidiram medir alguns parâmetros do sistema em questão e determinar a massa de cada componente. Nathan mede a paralaxe do baricentro  $\Pi = 11,90 \text{ mas}$ , o período orbital  $P = 4,01 \text{ dias}$  e a inclinação do plano da órbita  $i = 66,0^\circ$ . Shell, enquanto isso, consegue obter a separação angular máxima  $S = 1,68 \text{ mas}$  entre as componentes e a mínima  $s = 1,31 \text{ mas}$ . Além disso, traça a curva de velocidades radiais e determina a velocidade do centro de massa  $v_{rCM} = -1,70 \text{ km/s}$  e a velocidade radial da estrela de menor massa em seu apoastro  $v_{r2min} = +165,48 \text{ km/s}$ . Ambos também concluem que os eixos maiores das órbitas do sistema são ortogonais à linha de visada.

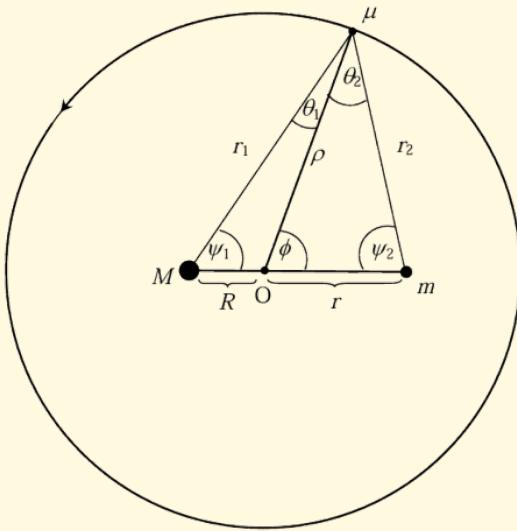
**Observação:** a unidade *mas* é equivalente, em português, a milissegundos de arco.

- Determine a distância do sistema até a Terra em *pc*.
- Encontre a energia mecânica total do sistema em termos de  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $v_1$ ,  $v_2$  (velocidades orbitais de cada estrela) e a constante da gravitação universal  $G$ .
- Reescreva a equação do item anterior a partir dos parâmetros  $r = r_1 + r_2$ ,  $\mu = \frac{m_1 m_2}{M+m_2}$  (massa reduzida),  $v$  (velocidade não nula de uma das estrelas na órbita relativa) e  $M = m_1 + m_2$ . Sugestão: aplique uma abordagem vetorial para as velocidades, separe-as em suas componentes horizontais e verticais para um caso genérico.
- Calcule o semi-eixo maior da órbita relativa do sistema, em *UA*, e a soma das massas das componentes em  $M_O$ .

- (e) Expresse o semi-eixo maior  $a$  da órbita relativa em função dos semi-eixos maiores das órbitas individuais  $a_1$  e  $a_2$  e determine a excentricidade da órbita relativa.
- (f) Mostre algebraicamente que as excentricidades  $e_1$  e  $e_2$  das órbitas individuais são iguais e, em seguida, da mesma maneira, mostre que a excentricidade da órbita relativa é igual a das individuais.
- (g) Encontre as massas  $m_1$  e  $m_2$  das componentes em  $M_O$ .

## 6.7 Solucionário

**Problema 1** Para facilitar nossa análise, vamos definir alguns ângulos e distâncias auxiliares:



Então, vamos agora equacionar a dinâmica da massa infinitesimal. Como ela é muito pequena, não vai influenciar no movimento das outras massas. Por isso, podemos assumir que elas se movimentam com a mesma velocidade angular característica de sistemas binários:

$$\omega^2 = \frac{G(M+m)}{(R+r)^3}$$

Logo, para se manter estacionária, a massa deve girar com esse mesmo  $\omega$  com respeito ao CM. Assim, equacionando as componentes radiais de força:

$$\frac{GM\mu \cos \theta_1}{r_1^2} + \frac{Gm\mu \cos \theta_2}{r_2^2} = \mu\omega^2\rho = \mu\rho \frac{G(M+m)}{(R+r)^3}$$

Além disso, temos que  $\omega$  deve ser constante, logo não há força tangencial. Equacionando:

$$\frac{GM\mu \sin \theta_1}{r_1^2} = \frac{Gm\mu \sin \theta_2}{r_2^2}$$

A partir dessa segunda equação, podemos substituir  $GM/r_1^2$  na primeira equação e cancelar termos. Assim:

$$\frac{m}{r_2^2} \left( \cos \theta_1 \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} + \cos \theta_2 \right) = \rho \frac{(M+m)}{(R+r)^3}$$

Agora, podemos usar a identidade trigonométrica  $\sin(\theta_1 + \theta_2) = \cos \theta_1 \sin \theta_2 + \cos \theta_2 \sin \theta_1$ . Assim, nossa equação fica:

$$\frac{m}{r_2^2} \sin(\theta_1 + \theta_2) = \rho \frac{(M+m)}{(R+r)^3} \sin \theta_1$$

Agora, voltando para a imagem feita, podemos usar a Lei dos Senos:

$$\frac{\sin \psi_1}{\rho} = \frac{\sin \theta_1}{R}$$

$$\frac{\sin \psi_1}{r_2} = \frac{\sin(\theta_1 + \theta_2)}{R+r}$$

Substituindo essas equações em nossa equação principal, podemos eliminar os seno e ficar com:

$$\frac{m}{r_2^2} \sin(\theta_1 + \theta_2) = \rho \frac{(M+m)}{(R+r)^3} \sin \theta_1 \rightarrow \frac{1}{r_2^3} = \frac{R(M+m)}{(R+r)^4 m}$$

Pórem, lembremos que as relações do sistema binário se mantêm verdadeiras:

$$\frac{m}{M+m} = \frac{R}{R+r}$$

Substituindo isso na equação anterior, temos:

$$r_2 = R + r$$

Porém, perceba que resolvemos para  $r_2$  pela substituição do termo  $GM/r_1^2$  na equação dinâmica. Em nenhum momento fizemos outra particularização. Por isso, ao substituir  $GM/r_2^2$  naquela equação e desenvolvendo da mesma maneira, encontra-se  $r_1 = R + r$  (você pode fazer a conta se preferir!).

Agora, perceba que o triângulo maior da imagem possui 3 lados iguais pelos valores descobertos para  $r_1$  e  $r_2$ . Assim, o triângulo é equilátero e todos os seus ângulos internos valem 60 graus. Assim, podemos usar a Lei dos Cossenos no triângulo envolvendo  $r_2, \rho, r$  para descobrir  $\rho$ . Substituindo os valores encontrados para os ângulos e a distância:

$$\rho^2 = r^2 + r_2^2 - 2rr_2 \cos(\psi_1) = r^2 + (r+R)^2 - 2r(R+r) \cos 60^\circ \rightarrow \boxed{\rho = \sqrt{r^2 + Rr + R^2}}$$

**Problema 2** Primeiro, iremos encontrar as massas. Colocando o centro dos eixos coordenados no centro de massa, temos que  $M_1 r_1 = M_2 r_2$ . Multiplicando ambos os lados por  $\omega$ , temos  $M_1 v_1 = M_2 v_2$ , resultando em  $M_2 = M_1 v_1 / v_2 = 3M_1/4$ . Assim, para encontrar os raios:

$$T = 30 \text{ dias} = 2,6 \cdot 10^6 \text{ s}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2,4 \cdot 10^{-6} \text{ rad/s}$$

$$r_1 = v_1/\omega = 1,25 \cdot 10^{10} \text{ m}$$

$$r_2 = v_2/\omega = 1,67 \cdot 10^{10} \text{ m}$$

$$r = r_1 + r_2 = 2,92 \cdot 10^{10} \text{ m}$$

Pela Lei de Kepler:

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

$$M = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2} = 2,18 \cdot 10^{30} = M_1 + M_2 = 7M_1/4$$

$$M_1 = 1,24 \cdot 10^{30} \text{ kg} \rightarrow [M_1 = 0,62 M_\odot]$$

$$[M_2 = 0,46 M_\odot]$$

Para encontrar os raios das estrelas, uma boa sacada é se colocar no referencial da estrela primária, de forma que a secundária tenha uma velocidade  $v = v_1 + v_2 = 7 \cdot 10^4 \text{ m/s}$ . Durante o percurso AD, a estrela vai percorrer uma distância  $2(R_1 + R_2)$ , e durante o percurso BC,  $2(R_1 - R_2)$ . Assim:

$$2(R_1 + R_2) = Vt_1$$

$$2(R_1 - R_2) = Vt_2$$

De forma que os raios sejam:

$$R_1 = V(t_1 + t_2)/4 = 5,86 \cdot 10^8 \text{ m} \rightarrow [R_1 = 0,84 R_\odot]$$

$$R_2 = V(t_1 - t_2)/4 = 4,22 \cdot 10^8 \text{ m} \rightarrow [R_2 = 0,6 R_\odot]$$

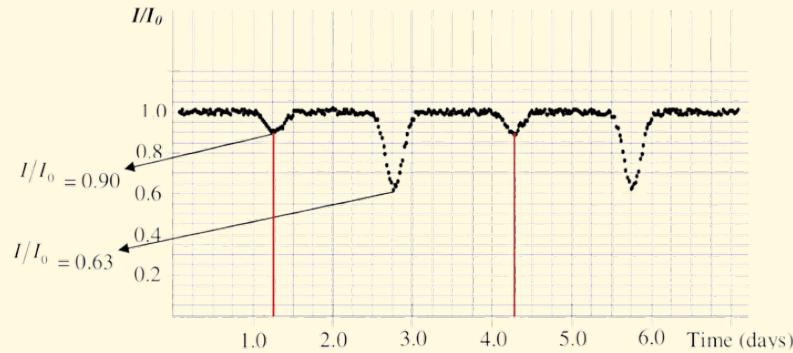
### Problema 3

#### Parte A - Resolução

- (a) Analisando a figura, percebemos que, a cada 3 dias, as posições se repetem. Convertendo

para segundos, temos:

$$T \approx 2.59 \cdot 10^5 \text{ s}$$



Como se trata de uma órbita circular, utilizamos a relação  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ . Assim, obtemos:

$$\omega = 2.42 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}$$

- (b) Consideremos três situações distintas e suas respectivas intensidades de luz. Como o sistema não se aproxima nem se afasta significativamente de nós, observadores terrestres (apesar da expansão do universo, descrita por  $v_r = H_0 d$ , a velocidade radial é extremamente baixa em comparação à distância  $d$ ), podemos assumir que a distância  $d$  entre o sistema e o observador é constante. Assim, temos as seguintes definições:

- **Situação sem eclipse ( $I_0$ ):** Nenhuma das estrelas é ocultada, e a intensidade total é dada por:

$$I_0 = \frac{4\pi R_1^2 \sigma T_1^4 + 4\pi R_2^2 \sigma T_2^4}{4\pi d^2}$$

- **Situação a ( $I_a$ ):** A estrela 2 é completamente ocultada pela estrela 1. Nesse caso, a intensidade é:

$$I_a = \frac{4\pi R_1^2 \sigma T_1^4}{4\pi d^2}$$

e definimos o fator  $\alpha$  como a razão entre as intensidades:

$$\alpha = \frac{I_a}{I_0} = 0.90$$

- **Situação b ( $I_b$ ):** A estrela 2 está posicionada em frente à estrela 1, causando uma ocultação parcial da luz da estrela 1. A intensidade total nesse caso é:

$$I_b = \frac{4\pi R_1^2 \sigma T_1^4 - 4\pi R_2^2 \sigma T_1^4 + 4\pi R_2^2 \sigma T_2^4}{4\pi d^2}$$

e definimos o fator  $\beta$  como a razão entre as intensidades:

$$\beta = \frac{I_b}{I_0} = 0.63$$

Dessa forma, podemos determinar algebraicamente as razões entre as intensidades, e utilizando dos valores numéricos fornecidos, obter a resposta. Vamos as contas:

A partir da expressão de  $I_b$ , temos:

$$I_b = I_0 - \frac{4\pi R_2^2 \sigma T_1^4}{4\pi R_1^2 \sigma T_1^4}$$

Isso nos leva à razão:

$$\frac{I_b}{I_a} = \frac{I_0}{I_a} - \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^2$$

e, consequentemente:

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} - \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^2$$

Simplificando, obtemos a relação entre os raios:

$$\frac{R_1}{R_2} = \sqrt{\frac{\alpha}{1 - \beta}} \approx 1.6$$

Agora, analisamos a relação entre  $I_0$  e  $I_a$ . Temos:

$$\frac{I_0}{I_a} = \frac{4\pi R_1^2 \sigma T_1^4 + 4\pi R_2^2 \sigma T_2^4}{4\pi R_1^2 \sigma T_1^4} = 1 + \frac{R_2^2 T_2^4}{R_1^2 T_1^4} = \frac{1}{\alpha}$$

A partir disso, obtemos:

$$\left( \frac{R_2}{R_1} \right)^2 \cdot \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^4 = \frac{1}{\alpha} - 1$$

Por fim, substituindo a relação encontrada entre os raios, determinamos a razão entre as temperaturas:

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt[4]{\frac{1 - \beta}{1 - \alpha}} \approx 1.4$$

## Parte B - Resolução

- (a) A partir da tabela, podemos determinar os comprimentos de onda máximo e mínimo para ambas as estrelas:

$$\lambda_{1,\max} = 5897.7 \text{ \AA}, \quad \lambda_{1,\min} = 5894.1 \text{ \AA}$$

$$\lambda_{2,\text{max}} = 5899.0 \text{ \AA}, \quad \lambda_{2,\text{min}} = 5892.8 \text{ \AA}$$

**Por que não podemos comparar dois  $\lambda$  quaisquer?** Pode parecer estranho que, com qualquer variação de comprimento de onda, não necessariamente a diferença entre o máximo e o mínimo, a velocidade calculada seja diferente, já que estamos lidando com uma órbita circular. No entanto, estamos considerando um sistema *edge-on*, ou seja, observado de lado. Nesse caso, embora a velocidade orbital das estrelas seja constante, nem sempre ela está totalmente na direção radial. Portanto, nem sempre o deslocamento Doppler observado reflete a velocidade total da estrela. Por isso, analisamos os comprimentos de onda máximo e mínimo, pois eles correspondem aos momentos em que a velocidade da estrela é completamente radial, permitindo uma medição precisa.

Com isso, podemos calcular  $v_1$ . Sendo  $v_{CM}$  a velocidade do centro de massa, temos, para o ponto de velocidade radial máxima:

$$v_{CM} + v_1 = c \left( \frac{\lambda_{\text{max1}}}{\lambda_0} - 1 \right)$$

Para o ponto de velocidade radial mínima, temos:

$$v_{CM} - v_1 = c \left( \frac{\lambda_{\text{min1}}}{\lambda_0} - 1 \right)$$

Subtraindo essas equações, obtemos:

$$v_1 = \frac{c}{2\lambda_0} (\lambda_{\text{max1}} - \lambda_{\text{min1}}) = 9,2 \cdot 10^4 \text{ m/s}$$

Realizando os mesmos cálculos para a estrela 2, obtemos:

$$v_2 = 1,6 \cdot 10^5 \text{ m/s}$$

- (b) Como é um sistema binário que orbita o mesmo centro de massa, podemos usar aquela equação generalizada:

$$m_1 v_1 = m_2 v_2$$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{v_2}{v_1}$$

$$\frac{m_1}{m_2} \approx 1.7$$

(c) Sabendo que  $v_i = wr_i$ , encontramos:

$$r_1 = 3.8 \cdot 10^9 \text{ m}$$

$$r_2 = 6.5 \cdot 10^9 \text{ m}$$

(d) Obviamente, como as estrelas possuem a mesma velocidade angular, elas estão sempre diametralmente opostas uma à outra. Logo:

$$r = r_1 + r_2$$

$$r \approx 10^{10} \text{ m}$$

(e) Em uma órbita circular temos que a força gravitacional equivale a força centripeta:

$$\frac{Gm_1m_2}{r^2} = \frac{m_1v_1^2}{r_1} = \frac{m_2v_2^2}{r_2}$$

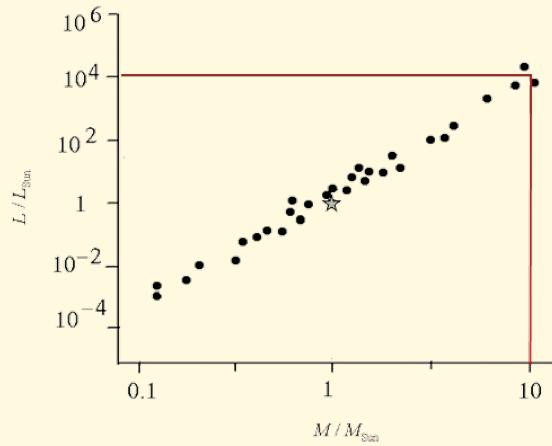
Logo:

$$m_1 = \frac{r^2v_2}{Gr_2} \rightarrow m_1 = 6 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

$$m_2 = \frac{r^2v_1}{Gr_1} \rightarrow m_2 = 3 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

### Parte C - Resolução

(a) Analisando o gráfico podemos utilizar basicamente de qualquer ponto:



E aplicar a relação

$$\frac{L}{L_\odot} = \left( \frac{M}{M_\odot} \right)^\alpha$$

$$10^4 = 10^\alpha$$

$$\boxed{\alpha = 4}$$

(b) Aplicando a fórmula com as massas que já temos, chegamos que:

$$\boxed{L_1 = 3 \cdot 10^{28} \text{W}}$$

$$\boxed{L_2 = 4 \cdot 10^{27} \text{W}}$$

(c) Sabemos que  $I_0 = \frac{L_1+L_2}{4\pi d^2}$ , portanto substituindo os valores chegamos em:

$$\boxed{d = 100 \text{al}}$$

(d) A distância angular máxima é:

$$\theta \approx \tan \theta = \frac{r}{d}$$

$$\boxed{\theta \approx 10^{-8} \text{rad}}$$

(e) Utilizando do critério de rayleigh:

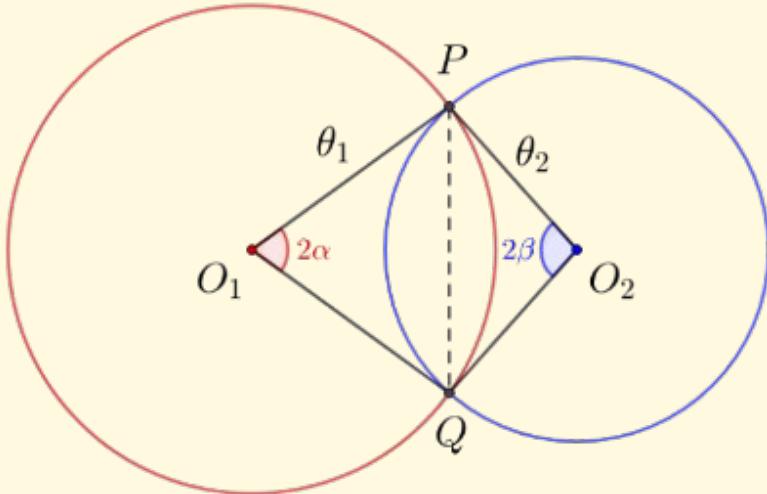
$$\sin \theta = 1.22 \frac{\lambda_0}{D}$$

$$D \approx 1.22 \frac{\lambda_0}{\theta}$$

$$\boxed{D \approx 72 \text{m}}$$

#### **Problema 4**

Sabendo que o fluxo depende da área da estrela, primeiro devemos achar a área eclipsada. Podemos perceber que essa área é equivalente à subtração da área do setor circular pela área do triângulo reto.



$$S_C = \pi\theta_1^2 \cdot \frac{2\alpha}{2\pi} + \pi\theta_2^2 \cdot \frac{2\beta}{2\pi} = \theta_1^2(\alpha + A^2\beta)$$

$$S_T = \frac{1}{2} \cdot 2\theta_1 \sin\alpha \cdot \theta_1 \cos\alpha + \frac{1}{2} \cdot 2\theta_2 \sin\beta \cdot \theta_2 \cos\beta = \theta_1^2(\sin\alpha\cos\alpha + A^2(\sin\beta\cos\beta))$$

$$S = S_C - S_T = \theta_1^2(\alpha - \sin\alpha\cos\alpha + A^2(\beta - \sin\beta\cos\beta))$$

Assim, conseguimos achar o fluxo aparente da estrela 1.

$$F_{1_A} = F_1 \cdot \frac{S_{1_A}}{S_1} = F_1 \cdot \frac{S_1 - S}{S_1} = F_1 \cdot \left(1 - \frac{S}{S_1}\right)$$

Agora, pela equação de pogson:

$$\begin{aligned} \Delta m &= -2,5 \log \left( \frac{F_{1_A} + F_{2_A}}{F_1 + F_2} \right) = -2,5 \log \left( \frac{F_1(1 - S/S_1) + F_2}{F_1 + F_2} \right) \\ &= -2,5 \log \left( 1 - \frac{S}{S_1} \frac{F_1}{F_1 + F_2} \right) \end{aligned}$$

Indo por partes e lembrando que  $F = \sigma R^2 T^4$ :

$$\frac{F_1}{F_1 + F_2} = \frac{\sigma\theta_1^2 T_1^4}{\sigma\theta_1^2 T_1^4 + \sigma\theta_2^2 T_2^4} = \frac{\theta_1^2 T_1^4}{\theta_1^2 T_1^4 + A^2 \theta_1^2 \cdot B^4 T_1^4} = \frac{1}{1 + A^2 B^4}$$

$$\begin{aligned}\frac{S}{S_1} &= \frac{\theta_1^2(\alpha - \sin\alpha\cos\alpha + A^2(\beta - \sin\beta\cos\beta))}{\pi\theta_1^2} \\ &= \frac{\alpha - \sin\alpha\cos\alpha + A^2(\beta - \sin\beta\cos\beta)}{\pi}\end{aligned}$$

Dessa forma:

$$\Delta m = -2,5 \log \left( 1 - \frac{\alpha - \sin\alpha\cos\alpha + A^2(\beta - \sin\beta\cos\beta)}{\pi(1 + A^2B^4)} \right)$$

### Problema 5

(a) A distância em parsec será simplesmente:

$$d = \frac{1}{\Pi} = \frac{1}{11,90 \cdot 10^{-3}} = 84,03 \text{ pc}$$

(b) A energia mecânica  $E$  pedida será simplesmente a soma das energias cinéticas individuais com a potencial do par:

$$E = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} - \frac{G m_1 m_2}{r_1 + r_2}$$

(c) Separamos as velocidades em suas componentes horizontais e verticais:

$$\vec{v}_1 = (v_{1x}, v_{1y}) \quad \vec{v}_2 = (v_{2x}, v_{2y}) \quad \vec{v} = (v_x, v_y)$$

Da definição de centro de massa, temos:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{v}_{CM}$$

Para o referencial em questão, em repouso em relação ao baricentro do sistema,  $\vec{v}_{CM} = \vec{0} = (0, 0)$ , então:

$$m_1 v_{1x} = -m_2 v_{2x}$$

$$m_1 v_{1y} = -m_2 v_{2y}$$

Além disso, na órbita relativa temos a velocidade  $\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 \implies$

$$v_x = v_{2x} - v_{1x}$$

$$v_y = v_{2y} - v_{1y}$$

Com as quatro equações acima, resolvemos o sistema para cada eixo e encontramos:

$$v_{1x} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} v_x; \quad v_{2x} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_x; \quad (\text{para } y \text{ é análogo})$$

É possível separar também a energia cinética para cada eixo, já que:

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2; \quad v_1^2 = v_{1x}^2 + v_{1y}^2; \quad v_2^2 = v_{2x}^2 + v_{2y}^2$$

Fazemos então:

$$\begin{aligned} E &= \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} - \frac{G m_1 m_2}{r_1 + r_2} = \\ &= \frac{m_1 v_{1x}^2}{2} + \frac{m_1 v_{1y}^2}{2} + \frac{m_2 v_{2x}^2}{2} + \frac{m_2 v_{2y}^2}{2} - \frac{G m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{(m_1 + m_2) r} \\ E &= \frac{m_1 v_{1x}^2}{2} + \frac{m_2 v_{2x}^2}{2} + \frac{m_1 v_{1y}^2}{2} + \frac{m_2 v_{2y}^2}{2} - \frac{G \mu (m_1 + m_2)}{r} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E &= \frac{m_1}{2} \frac{m_2^2 v_x^2}{(m_1 + m_2)^2} + \frac{m_2}{2} \frac{m_1^2 v_x^2}{(m_1 + m_2)^2} + \frac{m_1}{2} \frac{m_2^2 v_y^2}{(m_1 + m_2)^2} + \frac{m_2}{2} \frac{m_1^2 v_y^2}{(m_1 + m_2)^2} - \frac{G M \mu}{r} \\ E &= \frac{m_1 m_2 v_x^2}{2(m_1 + m_2)} + \frac{m_1 m_2 v_y^2}{2(m_1 + m_2)} - \frac{G M \mu}{r} = \\ &= \frac{\mu v_x^2}{2} + \frac{\mu v_y^2}{2} - \frac{G M \mu}{r} \end{aligned}$$

$$E = \frac{\mu}{2} \left( v^2 - \frac{2GM}{r} \right)$$

- (d) O semi-eixo maior da órbita relativa é a distância média entre as estrelas que pode ser expressa simplesmente pela média aritmética entre a separação máxima e mínima entre elas:

$$a = \frac{(S+s)D}{2} = \frac{S(\text{''})+s(\text{''})}{2} \cdot \frac{\pi}{180 \cdot 3600} \cdot \frac{1}{\Pi(\text{''})} \cdot \frac{180 \cdot 3600}{\pi} = \frac{(1,31 + 1,68)}{2} \cdot 11,90$$

$$a = 0,1256 \text{ UA}$$

Para encontrar a soma das massas basta aplicar a terceira lei de Kepler:

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)} a^3 \implies m_1 + m_2 = \frac{4\pi^2}{GP^2} a^3$$

$$m_1 + m_2 = \frac{1}{(4,01/365,2422)^2} \cdot 0,1256^3 \implies \boxed{m_1 + m_2 = 16,44 \mathcal{M}_\odot}$$

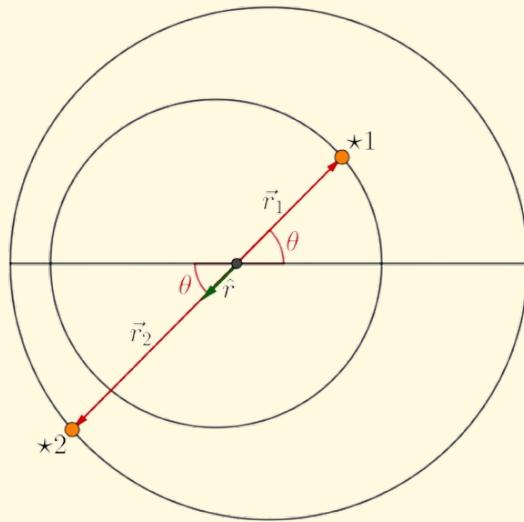
- (e) Faremos a demonstração de três fatos que serão extremamente úteis para a resolução dos próximos itens: (i) a excentricidade das órbitas individuais é a mesma; (ii) a órbita relativa também é elíptica, com excentricidade igual à das órbitas individuais; (iii) o semi-eixo maior é a soma dos semi-eixos maiores.
- (i) Para que a posição do baricentro não mude em relação às órbitas, as estrelas sempre estarão em posições equivalentes nas órbitas individuais. Isto é, quando 1 estiver no periastro de sua órbita, 2 também estará. Usando esse argumento, para o periastro e apoastro:

$$\begin{cases} M_1 a_1 (1 - e_1) = M_2 a_2 (1 - e_2) \\ M_1 a_1 (1 + e_1) = M_2 a_2 (1 + e_2) \end{cases}$$

Dividindo-se uma equação pela outra:

$$\frac{(1 - e_1) \cdot (1 + e_2)}{(1 - e_2) \cdot (1 + e_1)} = 1 \implies 1 - e_1 e_2 - e_1 + e_2 = 1 - e_1 e_2 + e_1 - e_2 \iff e_1 = e_2$$

- (ii) e (iii) Usando a equação polar das órbitas individuais, tomando como base a figura:



Tomemos a posição da estrela 2 em relação à estrela 1. O vetor da posição relativa  $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$  pode ser expresso em coordenadas polares:

$$\begin{cases} r_1 = \frac{a_1(1-e^2)}{1+e\cos\theta} \\ r_2 = \frac{a_2(1-e^2)}{1+e\cos\theta} \end{cases} \implies \vec{r} = \frac{a_2(1-e^2)}{1+e\cos\theta} \hat{r} - \frac{a_1(1-e^2)}{1+e\cos\theta} \hat{r} = \frac{(a_1 + a_2)(1-e^2)}{1+e\cos\theta} \hat{r}$$

Chegamos, portanto, em outra equação polar de elipse com parâmetros

$$\begin{cases} a_r = a_1 + a_2 \\ e_r = e = e_1 = e_2 \end{cases}$$

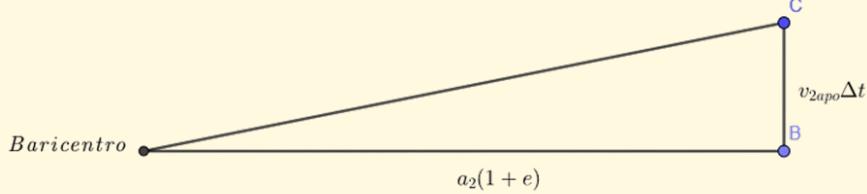
que descreve a órbita relativa das estrelas. Do ponto de separação máxima:

$$s = \frac{S+s}{2} \quad (1-e) = \frac{S-s}{S+s} \implies e = \frac{S-s}{S+s} = \frac{1,68 - 1,31}{1,68 + 1,31} \approx 0,124$$

Respostas:

$a = a_1 + a_2 \quad e \quad e = 0,124$
---

- (f) A demonstração foi feita no item (e).
- (g) O semi-eixo maior da órbita 2 pode ser facilmente calculado lembrando-se da definição da Segunda Lei de Kepler. Seja o ponto  $B$  da figura abaixo o apoastro da estrela 2. Após um intervalo de tempo  $\Delta t$  muito pequeno, a estrela atinge a posição  $C$ , percorrendo uma distância  $\Delta S = v_{2,apo}\Delta t$ .



**Da Segunda Lei de Kepler:**

$$\frac{v_{2,apo}\Delta t a_2(1+e)/2}{\Delta t} = \frac{\pi a_2 b_2}{T} \Rightarrow \frac{v_{2,apo}(1+e)}{2} = \frac{\pi a_2 \sqrt{1-e^2}}{T} \Rightarrow a_2 = \frac{v_{2,apo}(1+e)T}{2\pi\sqrt{1-e^2}} \quad (6.1)$$

O único valor desconhecido é  $v_{2,apo}$ , que pode ser obtido de  $v_{r,2min}$ , levando-se em conta a velocidade radial do centro de massa do sistema, além da inclinação orbital:

$$v_{2,apo} = \frac{v_{r,2min} - v_{r,CM}}{\sin i} = \frac{165.48 + 1.70}{\sin(66.0)} = 183.00 \text{ km/s} \quad (6.2)$$

Assim,  $a_2 = 1.143 \times 10^{10} \text{ m} = 7.62 \times 10^{-2} \text{ UA}$  e  $a_1 = 4.94 \times 10^{-2} \text{ UA}$ .

Da soma das massas obtida anteriormente e da definição do centro de massa:

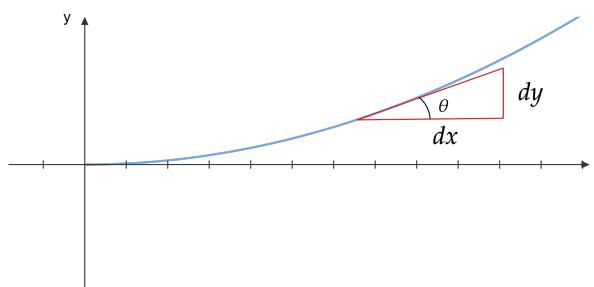
$$\begin{cases} m_1 + m_2 = 16.44 \\ m_1 \cdot 4.94 \times 10^{-2} = m_2 \cdot 7.62 \times 10^{-2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_1 = 9.97 M_\odot \\ m_2 = 6.47 M_\odot \end{cases} \quad (6.3)$$

## 7 Apêndice A: Cálculo

O Olympic birds já possui um livro focado em cálculo, então o mais recomendado é que você comece seu estudo no assunto por ele para um entendimento mais completo. Porém, nesse apêndice, vamos revisar alguns tópicos de cálculo que podem ser úteis ao longo do livro

### 7.1 Derivadas

A interpretação geométrica de uma derivada é a inclinação da reta tangente de uma certa função em um determinado ponto no gráfico de  $f(x)$  por  $x$ . Veja a figura:

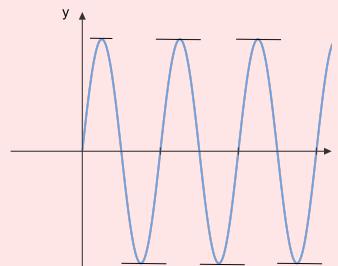


Onde  $f'(x) = dy/dx$  é a derivada da função no ponto, onde  $dy$  e  $dx$  são variações de  $y$  e  $x$  no limite em que elas são muito pequenas. Analogamente, a segunda derivada  $f''(x)$  é a reta tangente de  $f'(x)$ , no gráfico com respeito a  $x$ .

Agora que revisamos o básico, vamos para a primeira ideia:

#### Ideia 23: Máximos e mínimos de uma função

Pontos de máximos e mínimos são encontrados quando a reta tangente em certo ponto está paralela ao eixo  $x$ , como podemos ver pela figura abaixo. Logo, podemos encontrar tais pontos ao derivar uma função e igualar a 0; todos os pontos  $x_n$  que forem soluções da equação representam máximos ou mínimos.



Porém, como sabemos se um ponto é máximo ou mínimo? Normalmente, podemos descobrir tal informação vendo apenas o contexto da questão. Porém, se você quer encontrar a resposta matematicamente, basta fazer o **teste da segunda derivada**. Se a segunda derivada no ponto for menor que 0, o ponto é um máximo, enquanto se a segunda derivada for maior que 0, o ponto é um mínimo (e, caso fosse 0, a função não teria nem máximos nem mínimos, como

você pode analisar por inspeção). Você pode visualizar isso graficamente vendo que após um máximo a inclinação tende a diminuir, o que implica uma segunda derivada negativo(o análogo pode ser feito com um mínimo). Também é possível visualizar isso usando como exemplo uma função de segundo grau.

Além disso, é importante ressaltar que, em uma função qualquer, é impossível ocorrer dois máximos seguidos sem a presença de um mínimo no meio(e vice-versa). Você pode facilmente visualizar isso observando o gráfico de uma função; após um máximo, a inclinação da reta deve se tornar 0 novamente para depois a função "inverter" seu sentido e voltar a crescer para outro máximo. Então, se existem n soluções da derivada igual a 0 de uma função, se n for par existem n/2 máximos e n/2 mínimos. Contudo, com isso também lembramos que apesar da função poder ter infinitos máximos locais, existe apenas uma valor para o máximo global(mais valor possível da função) f(x)(mesmo que talvez mais de um x forneça o máximo global), da mesma forma que para o mínimo global

Para visualizar a utilização dessa ideia em sistemas práticos, veja a seção de cinemática. Então, vamos para a próxima ideia.

#### Ideia 24: Regra da cadeia

As vezes, precisamos derivar uma função composta  $w(x) = f(x)g(x)$ . Porém, talvez aconteça que apenas sejam conhecidas as derivadas de  $f(x)$  e  $g(x)$ , porém não do produto entre elas. Nesse caso, utilizamos a chamada **regra da cadeia**:

$$\frac{d(fg)}{dx} = \frac{df}{dx}g + f\frac{dg}{dx} \quad (7.1)$$

Pode parecer uma equação complicada em primeira instância, porém com o tempo normalmente você se acostuma com ela e as aplicações se tornam bem naturais.

#### Exemplo 73: Treinando regra da cadeia

Para treina-lo na regra da cadeia, tente resolver as seguintes derivadas(se necessário, consulte a tabela de derivadas).

$$\frac{d(e^x \operatorname{sen} x)}{dx}$$

$$\frac{d(x^2 \log(x))}{dx}$$

$$\frac{d(xe^{-x})}{dx}$$

### Solução 73

Aplicando a fórmula, tem-se:

$$\frac{d(e^x \operatorname{sen} x)}{dx} = e^x(x \operatorname{sen} x + \cos x)$$

$$\frac{d(x^2 \log(x))}{dx} = 2x \log(x) + x^2 \frac{1}{x} = x(2 \log(x) + 1)$$

Agora, para a terceira derivada, vamos incrementar uma ideia em nossa análise para fazer a derivada  $e^{-x}$ . Vamos multiplicar em cima e em baixo por (-1). Como (-1) é umas constante ele pode entrar dentro da derivada sem problemas. logo, fazer  $d(e^{-x})/dx = -d(e^{-x})/d(-x) = -e^{-x}$ . Utilizando essa ideia, temos:

$$\frac{d(xe^{-x})}{dx} = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1 - x)$$

Seguindo essas ideias sobre regra da cadeia, você normalmente não deve ter muito problema nessa parte do conteúdo(não é cobrado muito mais que isso). Porém, ainda falta mais uma ideia muito importante nessa seção de derivadas...

### Ideia 25: Mudança de variável

Perceba que na última derivada do exemplo anterior, nós trocamos a variável x por (-x). Esse tipo de técnica é chamada de **mudança de variável**. Matematicamente, a ideia pode não parecer tão importante, porém as aplicações dela são muito úteis em astronomia e física. No geral, podemos sempre escrever:

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dy} \frac{dy}{dx} \quad (7.2)$$

Perceba que para chegar em tal resultado, sempre basta apenas multiplicar em cima e embaixo pela derivada da nova variável. Logo, entender a ideia é muito mais importante do que decorar a expressão(já que ela é facilmente deduzida). Agora, vamos há algumas aplicações.

Você já ouviu alguém dizendo que para resolver certa derivada basta você "deriva o de dentro e depois deriva o de fora"? No começo, essa expressão pode ser bem confusa, já que não parece existir razão para isso funcionar. Usemos como exemplo a função  $(1 - e^x)^{3/2}$ . Realizando uma mudança de variável:

$$\frac{d(1 - e^x)^{3/2}}{dx} = \frac{d(1 - e^x)^{3/2}}{d(1 - e^x)} \frac{d(1 - e^x)}{dx} = (1 - e^x)^{1/2}(-e^x) \quad (7.3)$$

Ou seja, você precisou derivar a função de dentro do parêntese  $(1 - e^x)$  e multiplicar isso pela derivada da função inteira, porém com respeito a nova variável. É isso o que as pessoas querem dizer com "deriva o de dentro e depois do fora"; elas normalmente ocultam durante a fala o fato que a derivada do fora é com respeito a função de dentro  $(1 - e^x)$ . Perceba também

que, caso o coeficiente que acompanha-se x fosse um valor b qualquer(nesse caso b=-1), o raciocínio seria o mesmo.

Se você já estudou cinemática, deve saber que as principais grandezas cinemáticas normalmente são descritas como função do tempo ou posição. Porém, com a devida utilização da troca de variável, podemos facilmente alternar qual a variável vamos usar como referência. Veja o próximos exemplo como aplicação

### Exemplo 74: Resultados de cinemática

Faça os seguinte problemas, utilizando a ideia da mudança de variável. Você terá que usar integração(explicada na próxima seção):

- Demonstre a equação de Torricelli partindo da definição de aceleração em um MREV.
- Para uma força resultante da forma  $-bx^n$ , encontre a velocidade como função da posição.
- Para uma força de resistência do ar da forma  $-bv^n$ , encontra a velocidade como função da posição.

### Solução 74

- a) Partindo de  $\Delta v = a\Delta t$ :

$$dv = adt \frac{dx}{dx} = \frac{adx}{v} \rightarrow \int_{v_0}^v v dv = a \int_{x_0}^x x \rightarrow v^2 = v_0^2 + 2a\Delta x \quad (7.4)$$

- b) Partindo F=ma:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = -\frac{b}{m}x^n \rightarrow v^2 = v_0^2 - \frac{b}{m(n+1)}(\Delta x)^{n+1} \quad (7.5)$$

Perceba que para n=1, tem-se a velocidade de um MHS

- c) Seguindo o raciocínio de b):

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = -\frac{b}{m}v^n \rightarrow \int \frac{dv}{v^{n-1}} = -\int \frac{bdx}{m} \quad (7.6)$$

Realizando a integração:

$$v^{2-n} = -(2-n)\frac{b}{m}\Delta x \quad (7.7)$$

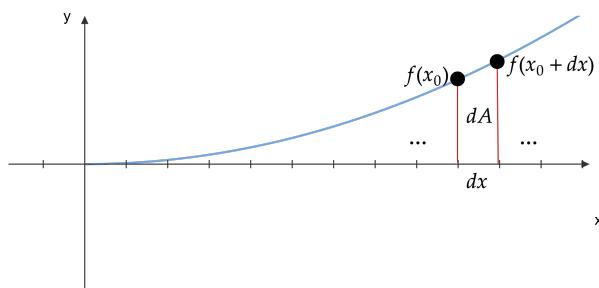
Perceba que, normalmente, a força de resistência do ar é aproxima com n=1 ou n=2. Porém, para n=2, o resultado não funciona, pois a integração daria um ln. Então, para n=2, tem-se:

$$v = v_0 e^{-b\Delta x/m} + C \quad (7.8)$$

No geral, é apenas isso que você deve precisar para ir bem nas seletivas de astronomia. Porém, se você quer um reforço no assunto ou não tenha entendido bem certas ideias apresentadas, leia o livro do Olympic Birds destinado ao estudo de cálculo.

## 7.2 Integrais

A interpretação gráfica de uma integral é a soma da área de diversas "camadas", cada uma com altura  $f(y)$  e largura  $dx$ . Perceba que, na verdade, estamos falando do produto entre essas duas grandezas e não exatamente uma área no sentido normalmente utilizado (inclusive, a área pode ser negativa! Isso ocorre se a área abaixo do eixo  $x$  é maior que a acima do eixo  $x$ , então existe um sinal relacionado a essa "área resultante"). Como  $dx$  é muito pequeno, as camadas que devem ser somadas são infinitesimais, logo estamos diante uma soma de um número extremamente grande de termos até cobrir a área do intervalo desejado. Veja a imagem:



Perceba que ao contrário da derivada, que é definida para cada ponto, a integral é definida diante de um certo intervalo. Podemos escrever, então, que a área  $A$  mostrada é dada pela integral:

$$A = \int_a^b f(x)dx \quad (7.9)$$

Perceba que o símbolo da integral representa uma soma. Logo, podemos definir, também como o limite do somatório de vários  $f(x)\Delta x$  quando cada  $\Delta x$  é muito pequeno.

### Ideia 26: Teorema fundamental do cálculo

O teorema fundamental do cálculo afirma que:

$$\int_a^b f(x)dx = g(b) - g(a)$$

Onde  $g(x)$  é a integral indefinida de  $f(x)$ . As integrais indefinidas das principais funções estão presentes na tabela do final do apêndice. Basicamente, o teorema fundamental do cálculo nos mostra que, conhecendo a função, basta saber os limites para se determinar a integral. Perceba que  $a$  e  $b$  são pontos do eixo  $x$  chamados de **limites de integração**. Em uma interpretação geométrica,  $a$  e  $b$  definem o intervalo no qual estamos encontrando a área abaixo do gráfico. Perceba que ter um intervalo bem definido é necessário; sem isso, não poderíamos saber qual área deveríamos encontrar pela integração.

Agora que sabemos o básico sobre integrais, vamos agora tratar de uma técnica sobre como resolvê-las. Isso é necessário por nem toda função a se integrar ser bem conhecida; nesses casos, podemos,

as vezes *fazer* ela virar uma integral conhecida. Vamos fazer isso por meio da **substituição de variáveis**.

### Ideia 27: Substituição de variável

Imagine, por exemplo, a função

$$I = \int_{x_0}^{x_f} \frac{dx}{(a+x)^n}$$

Caso a fosse igual a 0, poderíamos realizar a integral normalmente a partir da conhecida regra. Então, vamos manipular um pouco a equação até "fazer aparecer" essa integral. Chame  $a+x$  de  $u$ . Então, diferenciando de ambos os lados,  $du=dx$ . Substituindo a variável na integral, tem-se:

$$I = \int_{u_0}^{u_f} \frac{du}{u^n} = \frac{u^{1-n}}{1-n} / = \frac{(a+x)^{1-n}}{1-n} \quad (7.10)$$

Utilizando a substituição de variável, resolver a integral ficou bem fácil! A dica é sempre você tentar fazer aparecer uma função que você saiba integrar; resolver quase qualquer integral mais complicada se resume a isso na verdade. Isso pode parecer algo difícil de visualizar no começo, mas com experiência ver como substituir corretamente vai ficando mais fácil. É bem importante ter cuidado com o passo de realizar a diferencial; por exemplo, se na verdade tivessemos  $a+bx$  na última integral, deveríamos substituir  $dx=du/b$ , mudando levemente o resultado final. Algo parecido ocorreria na integral de  $e^{bx}$ , aonde progredimos de forma bem parecida de como fizemos na derivada da função. Na verdade, em muitos sentidos a substituição de variáveis em integrais pode se parecer com a mudança de variável em derivadas, então tente garantir que você entendeu bem o conteúdo anterior. Outro exemplo interessante é da integral:

$$I' = \int \frac{x dx}{(a+x^2)^n}$$

Perceba que não devemos substituir apenas o  $dx$  do numerador, mas sim  $x dx$ . Isso combina perfeitamente com o fato de  $du=2x dx$  para  $u=a+x^2$ . Assim, a integral ainda pode facilmente ser resolvida. Porém, perceba que caso misturasse-mos os dois casos, como por exemplo trocar  $x^2$  por  $x$  em  $I'$ , resolver a integral poderia virar uma tarefa bem complicada. O método de resolução é bem mais extenso e complicado, então com certeza uma prova não te pediria para fazê-la.

No geral, essas são as principais ideias de integral que podem cair. Ao estudar o assunto de cálculo, normalmente se percebe que o estudo de integrais pode facilmente se expandir para casos muito mais complicados e com ideias diferenciadas. Caso você queira estudar mais do assunto, leia o livro do Olympic Birds sobre o assunto. Outro assunto que talvez possa cair eventualmente seja **integral por partes**, porém por ser algo mais complicado tanto de entender quanto de cair, não vamos abordá-la aqui (contudo, ela é abordada no livro de cálculo!). Além disso, é importante ressaltar que a maioria das integrais podem ser dadas pela própria prova da seletiva, então não se preocupe com integrais mais complicadas (o resultado delas já deve ser entregue a você nos dados). Com isso, uma dica boa

é sempre ir até o final da questão e/ou prova para ver se não existe alguma integral a ser passada. É muito comum estudantes se complicarem por esquecerem de fazer isso e verem, apenas depois, que existia uma integral nos dados finais!

### 7.3 Aproximações

A série Taylor de uma função  $f(x)$  representa uma soma de infinitos termos que é equivalente a  $f(x)$ . Porém, normalmente usamos a série de Taylor para encontrar **aproximações da função**, ou seja, **desprezamos termos menores** afim de encontrar uma expressão aproximada para a função. As aproximações normalmente são permitidas quando  $x \ll 1$  para maioria dos casos) para que seja considerada eficaz. Com isso, os termos desprezados são, geralmente, potências maiores de  $x$ (como  $x^2, x^3, x^4, \dots$ ). É importante também ressaltar que a série de Taylor mostra uma aproximação em torno de um ponto definido, que vamos chamar dizer ter coordenada horizontal  $a$ (geralmente, se faz  $a=0$ , já que podemos ter essa escolha de calibre). A série de Taylor é:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x - a)^3 + \dots$$

De forma compacta, podemos escrever:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n$$

onde:

- $f^{(n)}(a)$  é a  $n$ -ésima derivada de  $f$  avaliada em  $x = a$ .
- $n!$  é o fatorial de  $n$ .
- $(x - a)^n$  representa a potência  $n$ -ésima de  $(x - a)$ .

Perceba que se  $a=0$ , podemos desprezar as potências de  $x$  como esperado. Agora, vamos para algumas aplicações da fórmula

#### Exemplo 75: Ângulos pequenos

Demonstre a aproximação  $\sin x \approx \operatorname{tg} x \approx x(\text{rad})$ . Faça, primeiramente, de uma maneira intuitiva analisando um triângulo retângulo. Depois, faça por série de Taylor.

#### Solução 75

Imagine um triângulo de lados  $a$ ,  $b$  e  $c$ , com  $a > b >> c$ . Fazendo o desenho, percebe-se que o ângulo entre  $a$  e  $b$  é muito pequeno, como esperado:

IMAGEM

Podemos, então, aproximar que  $a \approx b$ , mesmo que  $a$  não possa ser igual a  $b$ (se fosse, o triângulo não seria retângulo). Acontece que a diferença entre eles são um termos de ordem de  $x^2$  e

superior, porém estamos despresando esses termos maiores(se pegassemos todos os termos, não seria uma aproximação!!). Perceba, então, que poderíamos aproximar a e b como o raio de uma circuferência( $a=b=R$ ), enquanto c como um arco de tal circunferência. Logo,  $c=Rx$ , com x em radianos(comprimento de um arco). Dividindo por R, encontra-se o seno e a tangente, concordando com a aproximação mostrada.

Agora, aplicando a série de Taylor para seno e tangente em torno de 0:

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \dots$$

Desprezando termos da ordem de  $x^3$  para cima, tem-se o resultado esperado.

### Exemplo 76

Demonstre as seguintes aproximações, utilizando a série de Taylor:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2}$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2}$$

$$(1+x)^n = 1 + nx$$

As soluções de cada aproximação são aplicações diretas da fórmula da série de Taylor(caso sinta dificuldade, reforce seu conhecimento em derivadas ou veja as soluções pelo livro de cálculo do Olympic Birds, além de usar a dica de expandir em torno de  $a=0$ ). No geral, essas são todas as aproximações que normalmente podem cair nas seletivas de astronomia. Outras aproximações também podem ser demonstradas a partir da série de Taylor, porém, geralmente, são apenas essas que caem(principalmente a de ângulos pequenos e a de  $(1+x)^n$ ). Mesmo que o processo de obtenção das aproximações não seja complicado partindo da fórmula, decorar as principais expressões pode ser o mais inteligente, até para poupar tempo durante a prova.

## 7.4 Tabela úteis

### 7.4.1 Derivadas

Função / Regra	Derivada / Fórmula
$f(x) = c$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \ln(a)$
$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = \sin(x)$	$f'(x) = \cos(x)$
$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\sin(x)$
$f(x) = \tan(x)$	$f'(x) = \sec^2(x)$
Regra da Cadeia	$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f(x)'g(x) + f(x)g(x)'$
Mudança de Variável	$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dy} \frac{dy}{dx}$

### 7.4.2 Integrais

Função / Regra	Integral / Fórmula
$\int c \, dx$	$cx + C$
$\int x^n \, dx$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$
$\int e^x \, dx$	$e^x + C$
$\int a^x \, dx$	$\frac{a^x}{\ln(a)} + C$
$\int \frac{1}{x} \, dx$	$\ln x  + C$
$\int \sin(x) \, dx$	$-\cos(x) + C$
$\int \cos(x) \, dx$	$\sin(x) + C$
$\int \sec^2(x) \, dx$	$\tan(x) + C$
Teorema Fundamental do Cálculo	$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$
Substituição de Variáveis	Chame de u e faça acontecer!

### 7.4.3 Aproximações

Condição	Aproximação
$x(\text{rad}) \ll 1$	$\sin(x) \approx \operatorname{tg}x \approx x(\text{rad})$
$x \ll 1$	$(1 + x)^n \approx 1 + nx$
$x \ll 1$	$e^x \approx 1 + x$
$x(\text{rad}) \ll 1$	$\cos(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2}$
$x \ll 1$	$\log(1 + x) \approx x$

Observação: Lembre-se que, dependendo da questão, você terá que aproximar em uma ordem maior do que a presente na tabela. Nesse caso, recorra a série de Taylor(normalmente, não é cobrável ter decorado ordens tão altas).

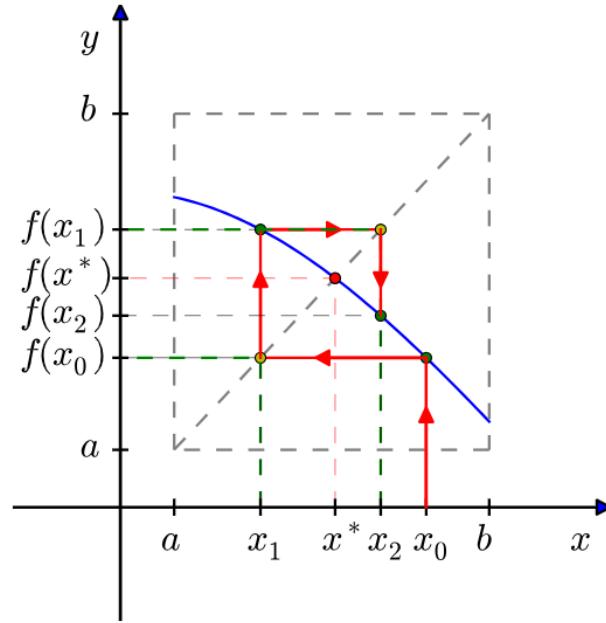
## 8 Apêndice B: Iteração

A **iteração** é um método matemático que se baseia na repetição de um processo ou de uma fórmula para aproximar a solução de um problema. Em termos simples, consiste em aplicar repetidamente uma fórmula ou um conjunto de instruções, com a esperança de que o resultado se aproxime de uma solução exata ou de um valor desejado. Esse método é muito útil quando não conseguimos ou não queremos calcular a solução exata de uma equação ou problema, mas sim uma aproximação.

### Como funciona a iteração?

A ideia básica por trás da iteração é escolher um ponto inicial e usar esse valor para calcular um novo valor. Esse novo valor, então, é usado novamente na próxima iteração e assim por diante, até

que o resultado converja para o valor desejado ou atinja um critério de erro aceitável. O gráfico a seguir ilustra esse processo:



Perceba nessa figura o **valor inicial** chutado representado por  $x_0$ , dessa forma, as próximas operações a serem realizadas resultam em novos valores ( $x_1, x_2, x_3\dots$ ), que tendem a **convergir em um valor final** que corresponde ao resultado da iteração ( $x^*$ ).

### Exemplo com uma função simples

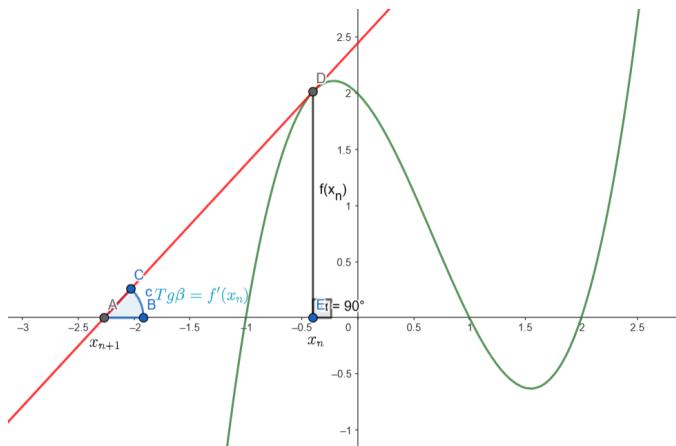
Imagine que temos uma função  $f(x)$  e queremos encontrar a raiz dessa função, ou seja, o valor de  $x$  para o qual  $f(x) = 0$ .

- Escolha de um ponto inicial  $x_0$ :** Escolhemos um valor inicial para  $x_0$ , que será o ponto de partida da nossa iteração.
- Fórmula de iteração:** Aplicamos uma fórmula de iteração que gera um novo valor de  $x$ , usando o valor anterior  $x_n$ . Uma fórmula comum é a do método de *Newton-Raphson*, que é dada por:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

onde  $f'(x_n)$  é a derivada da função  $f(x)$  em  $x_n$ .

- Repetição:** Aplicamos a fórmula repetidamente, substituindo  $x_n$  por  $x_{n+1}$  até que a diferença entre dois valores sucessivos de  $x$  seja suficientemente pequena (ou seja, quando a solução se estabiliza). Isso indica que estamos próximos da raiz.



## Exemplo numéricico

Considere a função  $f(x) = x^2 - 2$ , que tem uma raiz em  $\sqrt{2}$ . Vamos usar o método de *Newton-Raphson* para encontrar essa raiz.

- **Função:**  $f(x) = x^2 - 2$
- **Derivada da função:**  $f'(x) = 2x$
- **Fórmula de iteração:**

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n}$$

- **Escolha de um ponto inicial:** Vamos começar com  $x_0 = 1.5$ .

Agora, vamos calcular as iterações:

- Para  $n = 0$ , temos:

$$x_1 = 1.5 - \frac{1.5^2 - 2}{2 \times 1.5} = 1.5 - \frac{2.25 - 2}{3} = 1.5 - \frac{0.25}{3} = 1.5 - 0.0833 = 1.4167$$

- Para  $n = 1$ , temos:

$$x_2 = 1.4167 - \frac{1.4167^2 - 2}{2 \times 1.4167} \approx 1.4167 - 0.0023 = 1.4144$$

- Para  $n = 2$ , temos:

$$x_3 = 1.4144 - \frac{1.4144^2 - 2}{2 \times 1.4144} \approx 1.4144 - 0.000003 = 1.4142$$

Neste ponto, os valores de  $x_n$  estão convergindo para  $\sqrt{2} \approx 1.4142$ .

## Uso da calculadora

Usar a **calculadora** para iteração envolve seguir o mesmo processo que descrito acima, apenas realizando os cálculos em cada etapa de forma manual ou utilizando a memória da calculadora para armazenar os valores intermediários.

A iteração é amplamente utilizada para resolver **equações não lineares**, encontrar **raízes de funções**, otimizar problemas (como minimizar ou maximizar uma função), e até mesmo em problemas envolvendo números complexos ou em sistemas de equações. É especialmente útil quando os **métodos analíticos tradicionais (como álgebra ou técnicas de integração)** não podem ser facilmente aplicados.

## Na prática

Focando um pouco menos na formalidade, vamos discutir sobre como esse método se mostra na prática. Imagine uma estrela com magnitude absoluta  $M = -3$  e aparente  $m = 6$  localizada em uma região cujo coeficiente de extinção interestelar é  $K = 3\text{mag}/\text{kpc}$ . Desse modo, vamos calcular a distância até a estrela:

**1º passo:** Dado o módulo de distância corrigido;

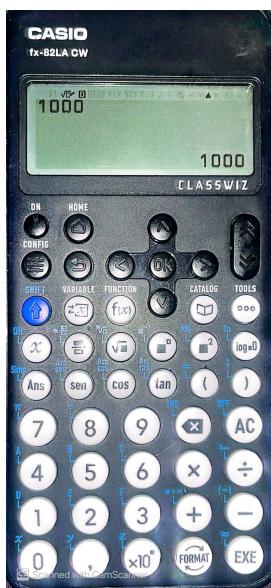
$$m - M = 5 \log(d) - 5 + Kd$$

Devemos isolar a variável que desejamos calcular, nesse caso, a distância  $d$ :

$$\log(d) = \frac{m - M + 5 - Kd}{5}$$

$$d = 10^{\frac{6-(-3)+5-0,003d}{5}}$$

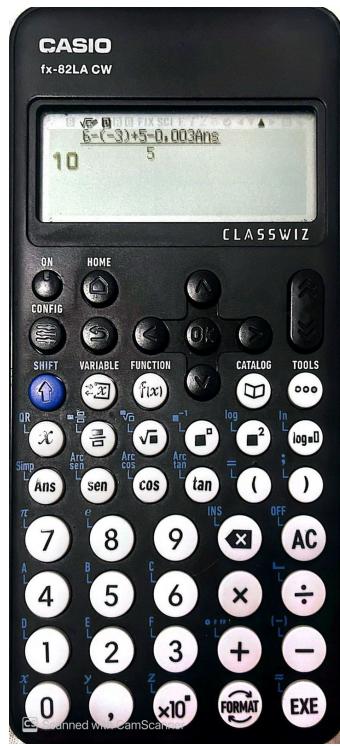
**2º passo:** Tendo uma expressão com a variável em questão isolada de um lado e envolvida do outro lado da igualdade, **devemos estimar um valor aproximado** daquele que acreditamos que seja o resultado (Uma aproximação boa ou ruim não vai afetar a funcionalidade deste método, apenas tornar o processo um pouco mais lento ou demorado) e apertar o botão de igualdade, **para registrar a estimativa como ANS na calculadora**. Neste caso, é de se esperar que a distância até estrela seja de algumas centenas ou milhares de Parsecs, então vamos usar 1000pc como primeira aproximação ( $x_0$ ):



Nesse caso, basta digitar o número 1000 e pressionar a tecla "EXE"

**Nota:** A calculadora usada nas imagens é a *Casio fx-82LA CW*. Existem vários modelos recomendáveis de calculadoras científicas para provas do âmbito de olímpiadas de exatas, mas esse modelo sem dúvidas é o mais ergonômico e que apresenta maior número de funcionalidades dentre todos.

**3º passo:** Montar a equação na calculadora, essa é uma etapa que pode parecer difícil nas primeiras vezes, mas com um pouco de prática se torna mais rápida e simples, em caso de extrema dúvida, consultar o manual da calculadora pode ser uma boa ideia.



**4º passo:** Montada a expressão, deve-se pressionar o botão de igualdade (EXE) **sucessivas vezes**. Fazendo isso, possivelmente irão aparecer valores diferentes à cada vez que você pressioná-lo, porém, eles tendem à se aproximar conforme se continua "clicando". Deve-se continuar esse processo até os valores **convergirem** e pararem de mudar ou até a alternância entre eles ser muita pequena, perceba:

Aqui, da esquerda para a direita, a primeira imagem mostra o resultado da operação após o **primeiro** clique ( $x_1 = 158,48$ ) para realizar o cálculo, da mesma forma, a **segunda, terceira e quarta** imagem representam o resultado da operação no **segundo** ( $x_2 = 506,88$ ), **terceiro** ( $x_3 = 313,23$ ) e **quarto** ( $x_4 = 409,31$ ) clique. Já a última imagem mostra o resultado após o 11º clique ( $x^* = 375,55$ ), que representa o **resultado absoluto da equação**, pois a partir dele, os valores **variam muito pouco**.

Perceba que as operações de **ordem ímpar** resultam em números **menores** que o valor final correto e à medida que avançamos nas operações, eles vão **crescendo até convergir** corretamente. Da mesma forma, as operações **pares** resultam em número **maiores**, de modo a diminuir a cada clique de ordem par, enfim também convergindo no valor correto.

E pronto! o valor encontrado é o resultado a que se busca. Talvez aparente ser um processo



muito complexo e demorado, mas é mais simples do que se possa imaginar, além de serem relativamente raros os casos em que os valores demoram muito para convergir. Nesse caso, por exemplo, com a aproximação inicial de que  $d$  seria equivalente à  $1000pc$ , só são necessárias **11 operações (11 cliques no botão de igualdade)** na calculadora para chegar ao resultado de  **$375,5pc$** , o que demora apenas alguns segundos.