

Olympic Birds

Matemática



Coletânea de Teoria dos Números II
Sérgio Carneiro Bittencourt



1 Introdução

Esta coletânea, elaborada pela equipe de matemática do Olympic Birds, reúne problemas de teoria dos números e suas soluções, devidamente separados em níveis de dificuldade, sendo eles o fácil (questões de 1 a 5), o médio (questões de 6 a 10) e o difícil (questões de 11 a 15). Com o desenrolar dos exercícios, você desenvolverá seu raciocínio matemático e aplicará diferentes ideias para a resolução de cada problema.

Visando a um melhor entendimento do conteúdo, recomendamos os seguintes materiais:

1. Banco de Questões da OBMEP

Esse portal é uma excelente fonte de problemas com soluções voltados para quem está estudando para a OBMEP.

2. Provas antigas da OBMEP

Aqui, é possível encontrar diversas questões, que já caíram na OBMEP, permitindo ao estudante conhecer melhor como teoria dos números é cobrado na prova.

3. Portal da OBMEP

Na página do Portal da OBMEP, é possível encontrar aulas e materiais sobre teoria dos números.

4. POTI

Esse é um dos mais famosos portais de treinamento para olimpíadas de matemática no Brasil. Lá é possível achar teoria, com videoaulas e listas, e exercícios de vários assuntos, incluindo teoria dos números.

Ao final do material, temos uma seção de gabaritos para a conferência das respostas. Boa sorte na resolução dos problemas e divirtam-se!

2 Problemas

2.1 Problema 1 - Buscando Padrões

Qual o resto de 2^{2025} quando dividido por 7?

- a)1
- b)2
- c)3
- d)4
- e)6

2.2 Problema 2 - Restos na Divisão por 5

Se n é um número tal que 5 divide $n^2 + 1$, quais os possíveis restos de n na divisão por 5?

2.3 Problema 3 - Número de Divisores

Quantos divisores inteiros positivos tem o número 2025?

2.4 Problema 4 - Restos de Quadrados Perfeitos

Um quadrado perfeito pode deixar resto 3 na divisão por 4?

2.5 Problema 5 - Restos de Cubos Perfeitos

Quais os possíveis restos que um cubo perfeito na divisão por 7?

2.6 Problema 6 - Números Coprimos

Quantos números menores que 100 são coprimos com ele?

- a)20
- b)40
- c)50
- d)60
- e)80

2.7 Problema 7 - Primos ao Quadrado na Divisão por 12

Se p é um número primo maior que 3, qual é o resto quando p^2 é dividido por 12?

- a)1
- b)3
- c)5
- d)7
- e)11

2.8 Problema 8 - Encontro de trens

Um trem passa numa estação a cada 30 minutos, outro trem passa na mesma estação a cada 50 minutos, e mais um trem passa nessa mesma estação a cada 1 hora e 10 minutos. Sabendo que às 5:00 os três trens se encontraram, quando eles se encontrarão novamente?

- a) 13:30
- b) 15:30
- c) 17:30
- d) 20:30
- e) 22:30

2.9 Problema 9 - Primos ao Quadrado na Divisão por 24

Se p é um número primo maior que 5, qual é o resto quando p^2 é dividido por 24?

- a) 1
- b) 5
- c) 11
- d) 17
- e) 23

2.10 Problema 10 - Potências de 10 na Divisão por 13

Qual a menor potência de 10 que deixa resto 1 na divisão por 13?

2.11 Problema 11 - Achando um Número pelos Restos

Qual o menor número inteiro positivo que deixa resto 1 na divisão por 7, deixa resto 3 na divisão por 9 e deixa resto 5 na divisão por 11?

- a) 363
- b) 449
- c) 687
- d) 869
- e) 995

2.12 Problema 12 - Restos de Fatoriais

Qual o resto de $100!$ na divisão por 101?

- a) 10
- b) 30
- c) 50
- d) 75
- e) 100

2.13 Problema 13 - Fatorial mínimo

Seja n o menor número tal que $n!$ é divisível por 2816. Qual o valor de n ?

2.14 Problema 14 - Restos de Potências de 2

Qual o resto de 2^{99} na divisão por 101?

2.15 Problema 15 - Resíduos Quadráticos

Se p é um número primo da forma $4k+3$, com k natural, é possível que algum quadrado perfeito deixe resto $p-1$ na divisão por p ?

3 Gabarito

1.a

2.2 ou 3

3.15

4.Não

5.0,1 e 6

6.b

7.a

8.e

9.a

10. 10^6

11.c

12.e

13.11

14.51

15.Não