

Olympic Birds

Matemática



Coletânea de Teoria dos Números I

Sérgio Carneiro Bittencourt



Olympic Birds

Teoria dos Números I

1 Introdução

Esta coletânea, elaborada pela equipe de matemática do Olympic Birds, reúne problemas de teoria dos números e suas soluções, devidamente separados em níveis de dificuldade, sendo eles o fácil (questões de 1 a 5), o médio (questões de 6 a 10) e o difícil (questões de 11 a 15). Com o desenrolar dos exercícios, você desenvolverá seu raciocínio matemático e aplicará diferentes ideias para a resolução de cada problema.

Visando a um melhor entendimento do conteúdo, recomendamos os seguintes materiais:

1. Banco de Questões da OBMEP

Esse portal é uma excelente fonte de problemas com soluções voltados para quem está estudando para a OBMEP.

2. Provas antigas da OBMEP

Aqui, é possível encontrar diversas questões, que já caíram na OBMEP, permitindo ao estudante conhecer melhor como teoria dos números é cobrado na prova.

3. Portal da OBMEP

Na página do Portal da OBMEP, é possível encontrar aulas e materiais sobre teoria dos números.

4. POTI

Esse é um dos mais famosos portais de treinamento para olimpíadas de matemática no Brasil. Lá é possível achar teoria, com videoaulas e listas, e exercícios de vários assuntos, incluindo teoria dos números.

Ao final do material, temos uma seção de gabaritos para a conferência das respostas. Boa sorte na resolução dos problemas e divirtam-se!

2 Problemas

2.1 Problema 1 - Qual o Número de Maria? (OBMEP 2018)

Maria escolheu um número inteiro. Ela somou a esse número os três números ímpares imediatamente inferiores e os dois números pares imediatamente superiores a ele e obteve 1414 como resultado. Qual é a soma dos algarismos do número que Maria escolheu?

- a)12
- b)13
- c)14
- d)15
- e)16

2.2 Problema 2 - Divisão por 9

Qual o resto de 122333...999999999 na divisão por 9?

2.3 Problema 3 - O Número de Zeros (Banco de Questões da OBMEP)

Resolvendo as expressões abaixo, qual o resultado termina com o maior número de zeros?

- a) $2^5 \cdot 3^4 \cdot 5^6$
- b) $2^4 \cdot 3^4 \cdot 5^5$
- c) $4^3 \cdot 5^6 \cdot 6^5$
- d) $4^2 \cdot 5^4 \cdot 6^3$

2.4 Problema 4 - A Sequência de João

João percebeu que é possível, começando do 1, chegar em 100 apenas somando-se 3 e multiplicando-se por 4 sucessivas vezes:

$1 \rightarrow 4 \rightarrow 16 \rightarrow 19 \rightarrow 22 \rightarrow 25 \rightarrow 100$

É possível, começando do 1, chegar em 1872002 apenas multiplicando-se por 4 e somando-se 3?

2.5 Problema 5 - Somando Números

Cinco números ímpares consecutivos somam 2025. Qual o menor deles?

- a)399
- b)401
- c)403
- d)405
- e)407

2.6 Problema 6 - Números da Forma $3x+6y$

Quantos números inteiros positivos e menores que 10 podem ser escritos da forma $3x+6y$, com x e y inteiros?

2.7 Problema 7 - Potências Máximas de Divisores (OBMEP 2017)

A maior potência de 2 que divide o produto $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2024$ é 2^{2017} . Qual é a maior potência de 2 que divide o produto $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 4047 \cdot 4048$?

- a) 2^{2018}
- b) 2^{4034}
- c) 2^{4041}
- d) 2^{6051}
- e) 2^{8068}

2.8 Problema 8 - Calculando Fatoriais

Sabe-se que n é número natural tal que $n! = 2^{11} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13$. Qual o valor de n ?

2.9 Problema 9 - Algarismo das Unidades

Qual o algarismo das unidades da soma $2023^{2023} + 2025^{2025} + 2027^{2027}$?

2.10 Problema 10 - Número de Pares Ordenados (IME 2022)

Quantos pares ordenados (x, y) de números inteiros satisfazem a equação $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{23}$.

- a) 1
- b) 2
- c) 3
- d) 4
- e) 5

2.11 Problema 11 - (OBMEP 2019)

Em um aniversário, todo menino conhece 4 meninas, e cada menina não conhece 5 meninos. Qual é o número mínimo de meninas e meninos nesse aniversário?

- a) 4
- b) 8
- c) 18
- d) 20
- e) 100

2.12 Problema 12 - Número de Conjuntos(OBMEP 2017)

Para quantos conjuntos de três números naturais é verdade que o produto de seus elementos vale 2310?

- A) 24
- B) 30
- C) 32
- D) 36
- E) 40

2.13 Problema 13 - Divisores de Fatoriais

Qual a maior potência de 10 que divide $2025!$?

- a) 10^{221}
- b) 10^{222}
- c) 10^{223}
- d) 10^{224}
- e) 10^{225}

2.14 Problema 14 - Descobrindo um Número pelo Divisor

Sabe-se que $\frac{3x75y0}{368}$ é um número natural. Qual o valor de $x+y$?

2.15 Problema 15 - Descubra o Resto na Divisão

Qual o resto de 17^{525} na divisão por 100?

- a) 17
- b) 27
- c) 37
- d) 47
- e) 57

3 Gabarito

1.a

2.6

3.c

4.Não

5.b

6.3

7.c

8.15

9.5

10.e

11.c

12.e

13.d

14.4

15.e