Chapitre 2

Réduction des endomorphismes

Tous les espaces vectoriels considérés dans ce chapitre ont pour corps de base un sous-corps $\mathbb{K}$ de $\mathbb{C}$.

Révisions MP2I

Revoir les chapitres 46 et 47.

1 Polynôme caractéristique.

1.1 Cas d'une matrice

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Rappelons que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de M si, et seulement si, il existe $x \in \mathbb{K}^n$ non nul (un vecteur propre) tel que $Mx = \lambda x$ (on a ici, comme d'habitude, identifié $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}^n$). Un tel vecteur x est alors dans le noyau de $M - \lambda I_n$, et on a finalement la propriété essentielle :

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(M) \iff M - \lambda I_n \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$$

On a donc immédiatement le résultat suivant.

Proposition 1. $\lambda \in \mathbb{K}$ *est une valeur propre de la matrice* $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *si, et seulement si,* λ *est solution de l'équation* $\det(M - \lambda I_n) = 0$.

C'est ce résultat qui motive l'introduction du polynôme correspondant à la fonction $x \mapsto \det(xI_n - M)$.

Proposition 2. *Si* $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*, la fonction* $x \mapsto \det(xI_n - M)$ *est polynomiale à coefficients dans* $\mathbb{K}$.

Définition 1. Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle polynôme caractéristique de M, le polynôme $\chi_M \in \mathbb{K}[X]$ défini par la relation :

$$\forall x \in \mathbb{K}, \quad \chi_M(x) = \det(xI_n - M)$$

Remarque : En fait, il est tout à fait possible de considérer des matrices carré à coefficients dans $\mathbb{K}[X]$ et de définir leur déterminant, de sorte que cela a un sens d'écrire :

$$\chi_M = \det(XI_n - M)$$

On pourra en pratique adopter cette définition pour calculer des polynômes caractéristiques de matrices.

Proposition 3. *Pour* $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*,* χ_M *est unitaire et de degré* n*. De plus les coefficients associés aux degrés* $n-1$ *et* 0 *sont respectivement* $-\mathrm{tr}(M)$ *et* $(-1)^n \det(M)$ *:*

$$\chi_M = X^n - (\mathrm{tr} M)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(M).$$

Terminons ce paragraphe avec un cas précis de type de matrice pour lequel il est très facile d'obtenir le polynôme caractéristique.

Proposition 4. *Si* $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *est triangulaire (supérieure ou inférieure) et en notant* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *les coefficients diagonaux, on a :*

$$\chi_T = \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)$$

1.2 Cas d'un endomorphisme.

Dans ce paragraphe, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$. La notion de polynôme caractéristique peut être sans problème étendue aux endomorphismes de E, indépendamment d'une représentation matricielle particulière, car deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique :

Proposition 5. *Pour tout couple* $(M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ *de matrices semblables,* $\chi_M = \chi_N$.

Cela justifie donc bien la définition suivante :

Définition 2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On appelle *polynôme caractéristique* de u, et on note χ_u, le polynôme caractéristique de sa matrice représentative dans n'importe quelle base.

Remarque : On peut aussi définir χ_u comme le polynôme associé à la fonction polynomiale $x \mapsto \det(xId - u)$, définie sur $\mathbb{K}$. Cela est cohérent avec la définition ci-dessus puisque si u est représenté par une matrice M dans une certaine base, alors $xId - u$ est représentée par $xI_n - M$ et on a donc $\det(xId - u) = \det(xI_n - M)$.

La proposition 3 s'adapte parfaitement au cas des endomorphismes :

Proposition 6. *Pour* $u \in \mathcal{L}(E)$, χ_u *est unitaire et de degré* n. *De plus les coefficients associés aux degrés* $n - 1$ *et* 0 *sont respectivement* $-\mathrm{tr}(u)$ *et* $(-1)^n \det(u)$ *:*

$$\chi_u = X^n - \mathrm{tr}(u)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(u).$$

Terminons ce paragraphe avec une propriété importante de factorisation d'un polynôme caractéristique d'endomorphisme, dans le cas d'existence d'un sous-espace stable. Le résultat suivant se démontre simplement en utilisant une représentation matricielle dans une base adaptée.

Proposition 7. *Soit* F *un sous-espace vectoriel de* E *stable par* u *et soit* v *l'endomorphisme de* F *induit par* u *sur* F. *Alors* χ_v *divise* χ_u.

1.3 Propriété fondamentale

La propriété fondamentale d'un polynôme caractéristique est celle qui a motivé sa définition, à savoir la caractérisation des valeurs propres. D'autres propriétés intéressantes vont ensuite émerger en approndissant un peu le concept.

Proposition 8. *Soit* $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $\lambda \in \mathbb{K}$ *est une valeur propre de* M *si, et seulement si,* λ *est racine de* χ_M. *Autrement dit,* $\mathrm{Sp}(M)$ *est exactement l'ensemble des racines (dans* $\mathbb{K}$*) de* χ_M.

Exemple : Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est triangulaire, alors son spectre est l'ensemble des coefficients diagonaux.

Remarque : Il est important de bien savoir sur quel corps $\mathbb{K}$ on travaille, car la matrice M en elle-même ne permet généralement pas de l'expliciter. Ainsi une matrice M à coefficients entiers peut tout aussi bien être vue comme élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$, de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ou de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, ce qui ne donne pas nécessairement le même spectre suivant les cas (on aura cependant forcément l'inclusion $\mathrm{Sp}_{\mathbb{Q}}(M) \subset \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(M) \subset \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M)$). On a cependant souvent tendance à appeler spectre de $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble de toutes les valeurs propres complexes de M (et donc l'ensemble de toutes les racines complexes de χ_M). On prendra alors bien garde à ce que seuls les éléments réels de $\mathrm{Sp}(M)$, formant le *spectre réel* $\mathrm{Sp}_{|\mathbb{R}}(M)$, peuvent être associés à des vecteurs propres de $\mathbb{R}^n$, et correspondre donc à des valeurs propres de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à M. Les valeurs propres complexes non réelles de $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ n'ont pas une interprétation géométrique immédiate dans $\mathbb{R}^n$: il faut considérer u en tant qu'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ pour donner un sens à leurs sous-espaces propres associés.

On a bien sûr le même résultat pour les endomorphismes :

Proposition 9. *Soit* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie* n *non nulle, et* $u \in \mathcal{L}(E)$. *Alors* $\lambda \in \mathbb{K}$ *est valeur propre de* u *si, et seulement si,* λ *est une racine de* χ_u.

Remarque : Puisqu'un polynôme de degré n n'a pas plus de n racines, on retrouve le fait que u a au plus n valeurs propres (voir chapitre **1**).

1.4 Multiplicité d'une valeur propre.

Dans ce paragraphe, on considère toujours un espace vectoriel E de dimension finie $n \geqslant 1$ et on fixe $u \in \mathcal{L}(E)$. La définition et proposition qui suit s'adapte mot pour mot au cas d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (il suffit de supposer que M représente u dans une base quelconque).

Définition 3. On appelle *multiplicité* d'une valeur propre λ de u sa multiplicité en tant que racine de χ_u : c'est le plus grand entier k tel que $(X-\lambda)^k$ divise χ_u.

Remarque : En notant m la multiplicité de λ, cela signifie qu'on peut écrire $\chi_u = (X-\lambda)^m P$, avec $P \in \mathbb{K}[X]$ vérifiant $P(\lambda) \neq 0$.

L'application de la proposition 7 permet alors de montrer l'important résultat suivant :

Proposition 10. *Pour toute valeur propre λ de u de multiplicité $m_\lambda \geqslant 1$ et de sous-espace propre associé E_λ, on a :*

$$\dim(E_\lambda) \leqslant m_\lambda.$$

2 Diagonalisation et trigonalisation

En quelques mots, un endomorphisme est diagonalisable (*resp.* trigonalisable) lorsqu'il peut être représenté par une matrice diagonale (*resp.* triangulaire) ; une matrice est diagonalisable (*resp.* trigonalisable) lorsqu'elle est semblable à une matrice diagonale (*resp.* triangulaire). Dans toute cette section, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle n et on considère $u \in \mathcal{L}(E)$.

2.1 Endomorphisme diagonalisable

Définition 4. On dit que u est *diagonalisable* lorsqu'il existe une base de E dans laquelle la matrice représentative de u est diagonale.

Remarque : Une telle base dans laquelle u est représentée par une matrice D diagonale n'est alors constituée que de vecteurs propres, et les éléments diagonaux de D sont les valeurs propres associées.

Une telle base contient alors une base de tous les sous-espaces proprese, ce qui se traduit en fait par la proposition suivante.

Proposition 11. *u est diagonalisable si, et seulement si, la somme (directe) de ses sous-espaces propres est égale à E.*

Corollaire 1. *u est diagonalisable si, et seulement si, la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à* $\dim(E)$.

Exemple :

- Un projecteur $p \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable avec $\mathrm{Sp}(p) = \{0,1\}$, $E_0 = \mathrm{Ker}(p)$ et $E_1 = \mathrm{Ker}(p - I_E) = \mathrm{Im}(p)$ (ou cas particulier $\mathrm{Sp}(p) = \{0\}$ si $p = 0$ et $\mathrm{Sp}(p) = \{1\}$ si $p = I_E$).
- Une symétrie $s \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable avec $\mathrm{Sp}(s) = \{-1,1\}$, $E_{-1} = \mathrm{Ker}(s + I_E)$ et $E_1 = \mathrm{Ker}(s - I_E)$ (ou cas particulier $\mathrm{Sp}(s) = \{-1\}$ si $s = -I_E$ et $\mathrm{Sp}(s) = \{1\}$ si $p = I_E$).

2.2 Matrice diagonalisable

Définition 5. On dit qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est *diagonalisable* lorsqu'elle est semblable à une matrice diagonale.

Remarque : L'identification de M à son endomorphisme canoniquement associé permet d'interpréter géométriquement la relation de similitude $M = PDP^{-1}$: la matrice diagonale D représente M dans une autre base de $\mathbb{K}^n$, et P est la matrice de passage de la base canonique vers cette autre base. Les définitions 4 et 5 sont donc parfaitement cohérentes : M est diagonalisable en tant qu'endomorphisme, les matrices colonnes de P sont des vecteurs propres de M, et les valeurs propres associées sont les coefficients diagonaux de D.

On a en fait plus généralement :

Proposition 12. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n > 0$ muni d'une base quelconque $\mathcal{B}$ et soit $u \in \mathcal{L}(E)$, représenté par $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{B}$. Alors u est diagonalisable si, et seulement si, M est diagonalisable.*

Remarque : Là aussi la matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ d'une relation de similitude $M = PDP^{-1}$, avec D diagonale, représente une matrice de passage : celle de la base $\mathcal{B}$ vers une base de vecteurs propres.

2.3 Caractérisation par les multiplicités

Lorsque χ_u est scindé, on peut l'écrire $\chi_u = \displaystyle\prod_{i=1}^{p}(X - \lambda_i)^{m_i}$, où $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont les valeurs propres (distinctes deux à deux) de u et $m_1, \ldots, m_p$ leurs multiplicités respectives. Puisque χ_u est de degré n, on a alors :

$$\sum_{i=1}^{p} m_i = n.$$

Les propositions 11 et 10 conduisent alors à la caractérisation importante :

Proposition 13. *Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) u est diagonalisable.

(ii) χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$ et pour toute valeur propre λ de multiplicité m_λ, $\dim(E_\lambda) = m_\lambda$.

Remarque : si u est diagonalisable, χ_u est donc toujours scindé sur $\mathbb{K}$ mais la réciproque est <u>fausse</u> : il est nécessaire que de plus, chaque sous-espace propre "pèse" autant (en terme de dimension) que sa valeur propre associée (en terme de multiplicité).

Il y a cependant un cas particulier où cette contrainte est nécessairement vérifiée :

Proposition 14. *Si χ_u est* simplement *scindé sur $\mathbb{K}$, autrement dit si u admet n valeurs propres distinctes, alors u est diagonalisable.*

Remarque : Attention, il ne s'agit bien là que d'une condition suffisante : si u est diagonalisable, χ_u est forcément scindé, mais pas forcément à racines simples.

2.4 Diagonalisation effective.

La proposition 13 donne une méthode générale d'étude de diagonalisabilité à partir du polynôme caractéristique χ_u.

Méthode : Si χ_u n'est pas scindé sur $\mathbb{K}$, u n'est pas diagonalisable. Si χ_u est scindé, de racines $\lambda_1 \ldots, \lambda_p$ distinctes deux à deux, et $m_1, \ldots, m_p$ les multiplicités associées, alors pour tout $i \in [\![1, p]\!]$:

- Si λ_i est racine simple ($m_i = 1$), le sous-espace propre associé est nécessairement une *droite vectorielle*, et il n'y a rien d'autre à vérifier.
- Si λ_i est racine multiple, donc de multiplicité $m_i \geqslant 2$, il faut vérifier que $\dim(E_i) = m_i$ (par exemple en étudiant le rang de $u - \lambda_i I_E$).

Remarques :

- Cette méthode permet de savoir si u est diagonalisable. Si tel est le cas, une *diagonalisation* effective consiste en l'obtention d'une base de vecteurs propres. Au sein de la méthode précédente cela revient pour chaque $i \in [\![1, p]\!]$, à trouver m_i ($= \dim(E_i)$) vecteurs indépendants dans (donc formant une base de) $E_i = \mathrm{Ker}(u - \lambda_i I_E)$: il s'agit finalement de résoudre un système linéaire homogène carré d'ordre n et de rang $n - m_i$.
- Il faut prendre quelques précautions dans l'adaptation de cette méthode à une matrice M : son polynôme caractéristique n'est pas forcément scindé sur $\mathbb{K}$ (typiquement $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) mais il l'est toujours sur $\mathbb{C}$ (théorème de d'Alembert-Gauss). Il est alors possible que M soit diagonalisable dans $\mathbb{C}$, mais pas dans $\mathbb{K}$. Mais pour une diagonalisation effective dans $\mathbb{C}$, c'est une base (de vecteurs propres) de $\mathbb{C}^n$ qu'il faudra chercher.

Exemple : La matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ admet pour polynôme caractéristique $\chi = X^2 + 1 = (X - i)(X + i)$. M n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ car χ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$, mais l'est dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ car χ est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$. Ainsi M est semblable à $D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$: on peut trouver $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ telle que $M = PDP^{-1}$, P représentant la matrice de passage de la base canonique vers une base de vecteurs propre. On vérifiera que par exemple, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$ convient.

2.5 Endomorphisme trigonalisable.

Lorsqu'un endomorphisme n'est pas diagonalisable, pas moyen de trouver une base dans laquelle il serait représenté par une matrice *diagonale*. On peut alors être un peu moins exigeant et chercher simplement une représentation par une matrice *triangulaire*.

Définition 6. On dit que u est *trigonalisable* s'il existe une base de E dans laquelle la matrice représentative de u est triangulaire.

Remarques :

- Si u est trigonalisable, une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice T de u est triangulaire n'est en général pas constituée de vecteurs propres sauf pour ceux correspondant à des colonnes de la matrices où tous les coefficients extra-diagonaux sont nuls, ce qui est toujours le cas pour la première colonne (cas d'une matrice triangulaire supérieure) ou pour la dernière colonne (cas d'une matrice triangulaire inférieure). En revanche, tous les coefficients diagonaux de T correspondent à des valeurs propres de u, et apparaissent autant de fois que leur multiplicité (*cf.* théorème 1).
- Si $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base dans laquelle u est représentée par une matrice triangulaire inférieure, alors $\mathcal{B}' = (e_n, e_{n-1}, \dots, e_1)$ est une base dans laquelle u est représentée par une matrice triangulaire supérieure, et *vice versa*. On peut donc toujours se ramener au cas d'une matrice triangulaire supérieure, et c'est ce qu'on fait en pratique.

2.6 Matrice trigonalisable.

Définition 7. On dit qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est *trigonalisable* si elle est semblable à une matrice triangulaire.

Remarques :

- L'identification de M à son endomorphisme canoniquement associé permet d'interpréter géométriquement la relation de similitude $M = PTP^{-1}$: la matrice triangulaire T représente M dans une autre base de $\mathbb{K}^n$, et P est la matrice de passage de la base canonique vers cette autre base. Les définitions 6 et 7 sont donc parfaitement cohérentes : M est trigonalisable si, et seulement si, son endomorphisme canoniquement associé est trigonalisable.
- Comme pour un endomorphisme, on peut toujours se ramener à une matrice triangulaire supérieure : si T est triangulaire inférieure, elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure T' via la relation de similitude $T' = QTQ^{-1}$, avec $Q = Q^{-1} = (\delta_{i,n+1-j})_{i,j}$ (qui correspond à la matrice de passage d'une base $(e_1, \dots, e_n)$ quelconque à la base $(e_n, \dots, e_1)$).

2.7 Caractérisation des endomorphismes trigonalisables.

Si la caractérisation d'un endomorphisme diagonalisable par son polynôme caractéristique est un peu élaborée à causes des racines éventuellement multiples (pour lesquelles il faut vérifier, rappelons-le, qu'elles sont bien égales aux dimension des sous-espaces propres associées), les choses sont plus immédiates pour la trigonalisabilité :

Théorème 1. *$u \in \mathcal{L}(E)$ (*resp. *$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) est trigonalisable si, et seulement si, son polynôme caractéristique χ est* scindé.

Plus précisément, u est représenté alors dans une certaine base par (*resp.* A est semblable à) la matrice :

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (\star) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

où $\chi = \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i)$, et où les valeurs propres apparaissent sur la diagonale autant de fois que leur multiplicité.

Remarques :
- En particulier, lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $u \in \mathcal{L}(E)$ est toujours trigonalisable d'après le théorème de d'Alembert-Gauss.
- Si $\mathbb{K}$ est un sous-corps strict de $\mathbb{C}$ (par exemple $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$), une matrice M à coefficients dans $\mathbb{K}$ est toujours trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,

2.8 Somme et produit des valeurs propres d'un endomorphisme trigonalisable

Vous avez vu en MP2I comment les coefficients d'un polynôme scindé peuvent s'exprimer en fonctions de ses racines avec les *polynômes symétriques* En combinant cela à la proposition 6, cela permet de prouver le résultat suivant :

Proposition 15. *Si $u \in \mathcal{L}(E)$ (resp. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) admet un polynôme caractéristique χ scindé sur $\mathbb{K}$, de racines $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (les valeurs propres), alors :*

$$\mathrm{tr}(u) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \qquad \text{et} \qquad \det(u) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

(resp. $\mathrm{tr}(A) = \dots$ et $\det(A) = \dots$).

Remarques :
- Attention à bien prendre garde à ce que dans cette formulation, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ne sont pas forcément distinctes deux à deux. Certaines valeurs propres sont donc éventuellement répétées dans la somme ou dans le produit : il faut tenir compte des multiplicités (*cf.* def. 3).
- χ doit être scindé sur $\mathbb{K}$ pour que cela fonctionne avec les valeurs propres dans $\mathbb{K}$, mais χ étant toujours scindé sur $\mathbb{C}$ (théorème de d'Alembert-Gauss), on peut toujours appliquer ce résultat tant qu'on prend bien en compte toutes les racines complexes.

On peut aussi reformuler la proposition précédente en tenant compte explicitement des multiplicités :

Proposition 16. *On suppose χ scindé sur $\mathbb{K}$, de la forme*

$$\chi = \prod_{i=1}^{p}(X - \lambda_i)^{m_i},$$

avec $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ distincts deux à deux. Alors :

$$\mathrm{tr}(u) = \sum_{i=1}^{p} m_i \lambda_i \qquad \textbf{\textit{ET}} \qquad \det(u) = \prod_{i=1}^{p} \lambda_i^{m_i}.$$

3 Polynômes d'endomorphismes et réduction

Dans toute cette section, on considère un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$, où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Tout ce qui suit à propos de u s'adaptera immédiatement à A en considérant son endomorphisme canoniquement associé.

3.1 Polynômes d'un endomorphisme, d'une matrice

Notation : Pour un polynôme $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$:

- On note $P(u) = \sum_{k=0}^{d} a_k u^k$, avec la convention $u^0 = I_E$.
- On note $P(A) = \sum_{k=0}^{d} a_k A^k$, avec la convention $A^0 = I_n$.

Remarque : On rappelle que dans ce contexte, $u^k = \underbrace{u \circ \dots \circ u}_{k \text{ fois}}$.

Définition 8.
- On appelle *polynôme en u* tout endomorphisme de la forme $P(u)$ avec $P \in \mathbb{K}[X]$. L'ensemble des polynômes en u est noté $\mathbb{K}[u]$.
- On appelle *polynôme en A* toute matrice de la forme $P(A)$ avec $P \in \mathbb{K}[X]$. L'ensemble des polynômes en A est noté $\mathbb{K}[A]$.

3.2 Idéal annulateur et polynôme minimal

Proposition 17. *L'application $P \mapsto P(u)$ est un morphisme d'algèbre de $\mathbb{K}[X] \to \mathcal{L}(E)$, d'image $\mathbb{K}[u]$.*

Corollaire 2. *$\mathbb{K}[u]$ est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{L}(E)$.*

Remarques :
- Ce morphisme est l'unique morphisme d'algèbre qui envoit X sur u.
- Son noyau est un idéal de $\mathbb{K}[X]$.

Définition 9.
- On dit que $P \in \mathbb{K}[X]$ est un *polynôme annulateur* de u lorsque $P(u)$ est l'endomorphisme nul.
- On apelle *idéal annulateur* l'ensemble des polynômes annulateurs de u.

Exercice 1. Adapter les trois énoncés précédents au cas de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Les cas d'un endomorphisme en dimension finie et d'une matrice sont plus généralement liés par la représentation matricielle dans une base $\mathcal{B}$ via l'isomorphisme d'algèbres $\underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}} : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

Proposition 18. *Si u est représenté par $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans une base quelconque $\mathcal{B}$, on a pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$:*

$$\underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(P(u)) = P(A)$$

En particulier, A et u ont le même idéal annulateur.

On peut en déduire le corollaire suivant, qui peut également se montrer directement par un calcul matriciel :

Corollaire 3. *Si A et B sont deux matrices semblables et $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(A)$ et $P(B)$ sont semblable.*

Remarque : La relation de similitude peut s'exprimer avec la même matrice de passage

Lemme 1. *E étant de dimension finie, il existe toujours un polynôme annulateur non nul pour u.*

Proposition 19.

a) *L'idéal annulateur de u est engendré par un unique polynôme unitaire de degré $d \geqslant 1$.*

b) *La restriction à $\mathbb{K}_{d-1}[X]$ du morphisme d'algèbre $P \mapsto P(u)$ réalise un isomorphisme de $\mathbb{K}_{d-1}[X]$ sur $\mathbb{K}[u]$.*

c) *La famille $(u^k)_{0 \leqslant k \leqslant d-1}$ est une base de $\mathbb{K}[u]$.*

Définition 10. On appelle *polynôme minimal* de u l'unique générateur unitaire de l'idéal annulateur de u : C'est un polynôme annulateur de u de degré minimal. On le note μ_u ou π_u.

Remarques :
- Tout autre polynôme annulateur de même degré que μ_u est associé à μ_u, c'est-à-dire de la forme $\lambda\mu_u$, avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$.
- Plus généralement, tout polynôme annulateur de u est un multiple de μ_u.
- $\mathbb{K}[u]$ est donc un sous-espace vectoriel de dimension finie d. Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(u)$ se décompose dans la base $(I_1, u, \ldots, u^{d-1})$ via la division euclidienne de P par μ_u : En notant $P = \mu_u Q + R$, avec $\deg(R) < d$, on a $P(u) = R(u)$.

Le théorème et les remarques précédentes s'adaptent bien sûr au cas d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: son polynôme minimal, noté μ_A ou π_A, est l'unique générateur unitaire de l'idéal annulateur de A. C'est donc un polynôme annulateur de A de degré minimal et tout autre polynôme annulateur de A est un multiple de μ_A.

3.3 Polynôme annulateur et valeurs propres

Lemme 2. *Soit $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que $u(x) = \lambda x$. Alors pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(u)(x) = P(\lambda)x$.*

Proposition 20. *Si P annule u, toute valeur propre de u est racine de P.*

Remarque : Attention à l'utilisation de ce résultat : pour un polynôme annulateur P de u donné, on peut seulement en déduire que les valeurs propres de u *font partie* des racines de P. Certaines racines de P peuvent très bien ne pas être des valeurs propre de u.

Exemple :

- Si $p \in \mathcal{L}(E)$ est un projecteur, on a $p \circ p = p$, et donc $X^2 - X = X(X-1)$ est un polynôme annulateur. On retrouve que $\mathrm{Sp}(p) \subset \{0, 1\}$.
- Si $s \in \mathcal{L}(E)$ est une symétrie, on a $s \circ s = I_E$, et donc $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$ est un polynôme annulateur. On retrouve que $\mathrm{Sp}(s) \subset \{1, -1\}$.

Si on considère cependant le polynôme annulateur minimal, alors aucune racine n'est superflue et la réciproque devient vraie :

Proposition 21. *$\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de u si, et seulement si, λ est une racine du polynôme minimal μ_u.*

Remarque : Le polynôme caractéristique χ_u et le polynôme minimal μ_u ont donc exactement les mêmes racines, seules les multiplicités peuvent différer.

Exercice 2. Montrer qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si, et seulement si, il existe un polynôme annulateur P tel que $P(0) \neq 0$. Expliquer alors comment écrire A^{-1} comme un polynôme en A.

3.4 Lemme de décomposition des noyaux

Théorème 2. *Si $P_1, \ldots, P_r \in \mathbb{K}[X]$ sont premiers entre eux deux à deux, et de produit égal à P, alors*

$$\mathrm{Ker}\big(P(u)\big) = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}\big(P_i(u)\big)$$

Corollaire 4. *Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ unitaire scindé, $P = \prod_{i=1}^{r}(X - \lambda_i)^{m_i}$. Alors, si P est annulateur de u, on a :*

$$E = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}\big(u - \lambda_i I_E\big)^{m_i}$$

Ce résultat sera très utile pour apporter des éléments nouveaux à l'étude de la réduction des endomorphismes.

3.5 Polynôme annulateur et diagonalisation

L'utilisation du polynôme caractéristique est peu commode pour caractériser la diagonalisabilité (*cf.* prop. 13), à cause des racines multiples éventuelles. Le fait que χ_u soit scindé à racines simples est une condition suffisante mais non nécessaire de diagonalisabilité. On a en revanche le résultat suivant :

Proposition 22. *Les trois assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) u est diagonalisable ;

(ii) Il existe un polynome annulateur de u simplement scindé sur $\mathbb{K}$;

(iii) Le polynôme minimal μ_u est simplement scindé sur $\mathbb{K}$.

Corollaire 5. *Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les valeurs propres de u, deux à deux distinctes. Alors :*

$$u \text{ diagonalisable} \quad \Leftrightarrow \quad \prod_{i=1}^{r}(X - \lambda_i) \text{ annulateur}$$

On a dans ces conditions $\mu_u = \prod_{i=1}^{r}(X - \lambda_i)$.

Remarques :
- En cas de diagonalisabilité, on aura remarqué qu'on obtient facilement μ_u en partant de χ_u sous forme scindée et en gommant les multiplicités. En particulier, si χ_u est simplement scindé, alors $\chi_u = \mu_u$!
- La proposition précédente et son corollaire admettent bien sûr une version analogue pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

3.6 Diagonalisation d'un endomorphisme induit

La proposition 22 permet de régler facilement le sort de questions épineuses, comme par exemple :

Lemme 3. *Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u, et u_F l'endormorphisme induit par u sur F. Alors $\mu_{u_F} \mid \mu_u$.*

Proposition 23. *Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u, et u_F l'endormorphisme induit par u sur F. Alors, si u est diagonalisable, u_F aussi.*

Remarque : Sans l'utilisation de polynôme minimal, difficulté ici provient de ce que rien n'indique que F contienne des vecteurs propres de u.

3.7 Polynôme annulateur et trigonalisabilité

Concernant la trigonalisabilité, on retrouve la même caractérisation avec les polynômes annulateurs qu'avec le polynôme caractéristique :

Proposition 24. *Les trois assertions suivantes sont équivalentes :*
(i) u est trigonalisable
(ii) Il existe un polynôme annulateur de u scindé sur $\mathbb{K}$.
(iii) Le polynôme minimal μ_u est scindé sur $\mathbb{K}$.

Remarque : Pour $(iii) \Rightarrow (i)$ on peut aussi appliquer le lemme des noyaux.

Exercice 3. Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}$, tel que χ_u^k soit un polynôme annulateur de u.

3.8 Théorème de Cayley-Hamilton

Théorème 3. ***(de Cayley-Hamilton)*** *Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, le polynôme caractéristique χ_u de u* est *un polynôme annulateur. Autrement dit :*

$$\mu_u \mid \chi_u$$

Remarques :
- La multiplicité d'une valeur propre dans μ_u est donc inférieure ou égale à sa multiplicité dans χ_u.
- En particulier, Si χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$, avec $\chi_u = \prod_{i=1}^{r}(X-\lambda_i)^{m_i}$ (les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ deux à deux distinctes), on a
$$\mu_u = \prod_{i=1}^{r}(X-\lambda_i)^{q_i},$$
avec $q_i \leqslant m_i$ pour tout $i \in [\![1, r]\!]$. Le lemme des noyaux permet alors d'écrire :
$$E = \bigoplus_{i=1}^{r} \operatorname{Ker}\big(u-\lambda_i I_E\big)^{m_i} = \bigoplus_{i=1}^{r} \operatorname{Ker}\big(u-\lambda_i I_E\big)^{q_i}$$
Cette remarque justifie l'introduction de la notion de *sous-espace caractéristique* qui prolonge celle de sous-espace propre, et que l'on abordera ultérieurement.