Chapitre 1

Compléments d'algèbre linéaire

Tous les espaces vectoriels considérés dans ce chapitre ont pour corps de base un sous-corps $\mathbb{K}$ de $\mathbb{C}$.

Révisions MP2I

Revoir les chapitres 36 à 42.

1 Rappels fondamentaux

1.1 Noyau et image d'une application linéaire

Définition 1. Soit E et F deux espaces vectoriels et soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

- On appelle *noyau* de f l'ensemble

$$\mathrm{Ker}(f) = \{x \in E \mid f(x) = 0\}$$

- On appelle *image* de f l'ensemble

$$\mathrm{Im}(f) = \{f(x)\,,\, x \in E\} = \{y \in F \mid \exists x \in E, y = f(x)\}$$

Remarques :

- $\mathrm{Ker}(f)$ est l'ensemble de tous les vecteurs de E qui sont envoyés sur l'élément neutre 0 de F lorsqu'on applique f. C'est un sous-espace vectoriel de E.
- $\mathrm{Im}(f)$ est l'ensemble de tous les vecteurs de F que l'on peut atteindre à partir de E en appliquant f. C'est un sous-espace vectoriel de F.
- Lorsque $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension finie, rappelons que sa dimension est appelé *rang* de f, et notée $\mathrm{rg}(f)$.

Proposition 1. *Soit E et F deux espaces vectoriels et soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.*

- *f est injective si, et seulement si,* $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$.
- *f est surjective si, et seulement si,* $\mathrm{Im}(f) = F$.

1.2 Théorème du rang

Théorème 1. ***(forme géométrique du théorème du rang)*** *Soient E et F deux espaces vectoriels et soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Pour tout supplémentaire H de $\mathrm{Ker}(f)$, $f_{|H}$ réalise un isomorphisme de H sur $\mathrm{Im}(f)$.*

Ce qu'on appelle théorème du rang est en fait un corollaire du résultat précédent :

Théorème 2. ***(du rang)*** *Si E est de dimension finie, alors* $\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rg}(f)$.

De ce résultat, on obtient qu'injectivité et surjectivité d'une application linéaire sont équivalentes lorsque E et F sont de même dimension finie :

Corollaire 1. *Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie tels que $\dim(E) = \dim(F)$ et soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. On a alors*

$$f \text{ est injective} \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ est surjective} \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ est bijective}$$

Corollaire 2. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = I_E$. Alors f et g sont inversibles et inverse l'une de l'autre.*

1.3 Projecteurs et symétries

Définition 2. Soit E un espace vectoriel et soient F et G deux sous-espaces *supplémentaires* de E. Tout vecteur $x \in E$ se décompose donc de façon unique $x = x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$.

- On appelle *projecteur* sur F et parallèlement à G l'application :

$$p : x = x_F + x_G \mapsto x_F$$

- On appelle *symétrie* par rapport à F et parallèlement à G l'application :

$$s : x = x_F + x_G \mapsto x_F - x_G$$

Proposition 2. *Soient $p, s : E \to E$.*

a) *Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) p est un projecteur de E ;

(ii) $p \in \mathcal{L}(E)$ et $p^2 = p$.

Dans ces conditions, p est le projecteur sur $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f - Id)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f)$.

b) *Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) s est une symétrie de E ;

(ii) $s \in \mathcal{L}(E)$ et $s^2 = I_E$.

Dans ces conditions, s est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(f - Id)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f + Id)$.

2 Somme de sous-espaces vectoriels

2.1 Définition d'une somme

Définition 3. Soit un entier $q \geqslant 2$ et soient $(E_i)_{1 \leqslant i \leqslant q}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E. On appelle *somme* de cette famille l'ensemble :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{q} E_i &= \left\{ x_1 + \cdots + x_q \,,\, (x_1 \ldots, x_q) \in E_1 \times \cdots \times E_q \right\} \\ &= \left\{ x \in E \mid \exists (x_1 \ldots, x_q) \in E_1 \times \cdots \times E_q,\, x = x_1 + \cdots + x_q \right\} \end{aligned}$$

Proposition 3. *Si $E_1, \ldots, E_q$ sont des sous-espaces vectoriels de E, $\displaystyle\sum_{i=1}^{q} E_i$ est un sous-espace vectoriel de E.*

Remarque : Il s'agit de l'image de l'application linéaire $S : E_1 \times \cdots \times E_q \to E$ définie par :

$$S : (x_1, \ldots, x_q) \mapsto x_1 + \cdots + x_q$$

2.2 Somme directe

Définition 4. La somme $E_1 + \cdots + E_q$ est dite *directe* lorsque :

$$\forall (x_1, \ldots, x_q) \in E_1 \times \cdots \times E_q, \quad \sum_{i=1}^{q} x_i = 0 \Rightarrow x_1 = \cdots = x_q = 0$$

On peut noter alors la somme $E_1 \oplus \cdots \oplus E_q$ ou encore $\displaystyle\bigoplus_{i=1}^{q} E_i$.

Remarques :

- En considérant l'application $S : E_1 \times \cdots \times E_q \to E$ définie par :

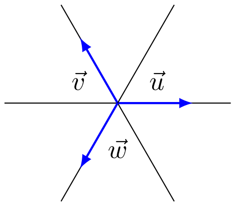
$$S : (x_1, \ldots, x_q) \mapsto x_1 + \cdots + x_q$$

  La définition précédente dit simplement que la somme $E_1 + \cdots + E_q$ est directe si, et seulement si, l'application S est **injective** et donc si, et seulement si, $E_1 \times \cdots \times E_q$ et $E_1 + \cdots + E_q$ sont isomorphes.
- $x \in E_1 + \cdots + E_q$ s'écrit alors de façon **unique** $x = x_1 + \cdots + x_q$, avec $(x_1, \ldots, x_q) \in E_1 \times \cdots \times E_q$: **on ne peut pas** trouver deux q-uplets distincts $(x_1, \ldots, x_q)$ et $(x'_1, \ldots, x'_q)$ de $E_1 \times \cdots \times E_q$ tels que

$$x_1 + \cdots + x_q = x'_1 + \cdots + x'_q$$

Exercice 1. On suppose $E_i \neq \{0\}$ pour tout $i \in [\![1, q]\!]$. Montrer que la somme $E_1 + \cdots + E_q$ est directe si, et seulement si, pour tout $e_1 \in E_1, \ldots, e_q \in E_q$ tous non nuls, la famille $(e_1, \ldots, e_q)$ est libre.

Remarque : Dans le cas de deux sous-espace F et G on a vu que $F + G$ est directe si, et seulement si, $F \cap G = \{0\}$. Cela peut se généraliser à un nombre quelconque de sous-espaces, mais pas n'importe comment ! Pour $q > 2$, on peut avoir $\bigcap_{i=1}^{q} E_i = \{0\}$, et même $\bigcap_{i \in J} E_i = \{0\}$ pour tout $J \subset [\![1, q]\!]$ de cardinal $\geqslant 2$, sans que la somme soit directe : considérer par exemple trois droites vectorielles distinctes de $\mathbb{R}^2$.



$$\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$$

Proposition 4. *La somme $E_1 + \cdots + E_q$ est directe si, et seulement si :*

$$\forall\, i \in [\![1, q-1]\!], \quad \big(E_1 + \cdots + E_i\big) \bigcap E_{i+1} = \{0\}.$$

2.3 Décomposition en somme directe.

Définition 5. Soient $E_1, \ldots, E_q$ des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. On dit qu'ils réalisent une *décomposition en somme directe* de E lorsque la somme $E_1 + \cdots + E_q$ est directe et $E = E_1 + \cdots + E_q$.

Remarques :

- On peut résumer ces deux conditions en notant $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_q$.
- Tout vecteur x peut alors se décomposer de façon unique $x = x_1 + \cdots + x_q$, avec $(x_1, \ldots, x_q) \in E_1 \times \cdots \times E_q$.
- lorsque $q = 2$, on retrouve la notion de sous-espaces *supplémentaires*.
- En considérant de nouveau l'application $S : E_1 \times \cdots \times E_q \to E$ définie par :

$$S : (x_1, \ldots, x_q) \mapsto x_1 + \cdots + x_q,$$

  il apparait finalement simplement que :
  — S est injective si, et seulement si, la somme $E_1 + \cdots + E_q$ est directe ;
  — S est surjective si, et seulement si, $E = E_1 + \cdots + E_q$.
  et donc que $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_q$ si, et seulement si, S est bijective : E et $E_1 \times \cdots \times E_q$ sont alors isomorphes.

2.4 Somme et dimension finie.

Proposition 5. *Soient $E_1, \ldots, E_q$ des sous-espaces vectoriels de dimension finie d'un espace vectoriel E. La somme $E_1 + \cdots + E_q$ est de dimension finie et :*

$$\dim\left(\sum_{i=1}^{q} E_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{q} \dim(E_i),$$

avec égalité si, et seulement si, la somme est directe.

Corollaire 3. *Supposons E de dimension finie et $\sum_{i=1}^{q} \dim E_i = \dim(E)$. On a alors :*

$$\sum_{i=1}^{q} E_i \text{ est directe} \quad \Leftrightarrow \quad E = \sum_{i=1}^{q} E_i \quad \Leftrightarrow \quad E = \bigoplus_{i=1}^{q} E_i$$

Méthode : Il y a deux propriétés distinctes à vérifier lorsqu'on veut montrer que $E_1, \ldots, E_q$ réalisent une décomposition en somme directe de E :
- La somme $E_1 + \cdots + E_q$ est directe,
- Le sous-espace $E_1 + \cdots + E_q$ est égal à l'espace E tout entier,

Cependant, si E est de dimension finie et si $\sum_{i=1}^{q} \dim(E_i) = \dim(E)$, ces deux propriétés sont équivalentes, en vertu du corollaire de la proposition 5, et il suffit de n'en vérifier qu'une seule (généralement la somme directe).

2.5 Bases adaptées.

Définition 6. Soit E un espace vectoriel de dimension finie non nulle, et soit $F \neq \{0\}$ un sous-espace vectoriel de E. On dit qu'une base de E est *adaptée* à F si ses premiers éléments forment une base de F.

Remarque : De façon explicite, si les dimensions de E et F sont n et p respectivement, avec $1 \leqslant p \leqslant n$, la base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E est adaptée à F lorsque $(e_1, \ldots, e_p)$ forme une base de F.

Définition 7. Soit $E_1, \ldots, E_q$ des sous-espaces vectoriels, non réduits à $\{0\}$, réalisant une décomposition en somme directe d'un espace E de dimension finie. On dit qu'une base de E est *adaptée* à cette décomposition lorsque ses éléments consécutifs forment successivement des bases des E_i, pour $1 \leqslant i \leqslant q$.

Remarque : dans le prolongement de la remarque précédente, le fait qu'une base $(e_1, \ldots, e_n)$ soit adaptée à la décomposition $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_q$ peut être rendu explicite : en notant $n_i = \dim(E_i)$ pour tout $i \in [\![1, q]\!]$, on doit avoir $\mathcal{B}_1 = (e_1, \ldots, e_{n_1})$ base de E_1, $\mathcal{B}_2 = (e_{n_1+1}, \ldots, e_{n_1+n_2})$ base de E_2, ..., $\mathcal{B}_q = (e_{n_1+\cdots+n_{q-1}+1}, \ldots, e_n)$ base de E_q (rappelons qu'on a bien $n_1 + \cdots + n_q = n$, par la proposition 5).

Exemple : Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6)$ une base de $\mathbb{K}^6$. On pose $E_1 = \operatorname{vect}(e_1, e_2)$, $E_2 = \operatorname{vect}(e_3)$, $E_3 = \operatorname{vect}(e_4, e_5, e_6)$. On a alors $E = E_1 \oplus E_2 \oplus E_3$ et $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{K}^6$ *adaptée* à cette décomposition :

$$\mathcal{B} = (\overbrace{e_1, e_2}^{\mathcal{B}_1}, \overbrace{e_3}^{\mathcal{B}_2}, \overbrace{e_4, e_5, e_6}^{\mathcal{B}_3}).$$

3 Matrices définies par blocs

3.1 Définition et exemples

Définition 8. Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. Une matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est définie (ou présentée) *par blocs*, lorsqu'elle est écrite sous la forme :

$$M = \begin{pmatrix} M_{1,1} & \cdots & M_{1,s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{r,1} & \cdots & M_{r,s} \end{pmatrix},$$

où les $M_{i,j}$ sont des matrices de dimensions inférieures, appelées *blocs*.

Remarques :
- Chaque bloc $M_{i,j}$ correspond à l'intersection d'un groupe de n_i lignes adjacentes et de n_j colonnes adjacentes de M, où l'on a considéré deux compositions $n = n_1 + \cdots + n_r$ et $p = p_1 + \cdots + p_s$. On a ainsi $M_{i,j} \in \mathcal{M}_{n_i,p_j}(\mathbb{K})$ pour $i \in [\![1, r]\!]$ et $j \in [\![1, s]\!]$.

- On peut également expliciter visuellement qu'on a affaire à un découpage par blocs en écrivant :

$$M = \left(\begin{array}{c|c|c} M_{1,1} & \cdots & M_{1,s} \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline M_{r,1} & \cdots & M_{r,s} \end{array}\right)$$

Exemple : La matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ peut être partionnée en quatre blocs 2×2 :

$M_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $M_{1,2} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $M_{2,1} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$, et $M_{2,2} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$.

On peut alors écrire :

$$M = \begin{pmatrix} M_{1,1} & M_{1,2} \\ M_{2,1} & M_{2,2} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ \hline 3 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \end{array}\right).$$

Mais d'autres découpages sont possibles, par exemple :

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 1 & 2 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \end{array}\right) \quad , \quad \left(\begin{array}{c|cc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \\ \hline 3 & 3 & 4 & 4 \end{array}\right) \quad , \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 2 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 2 \\ \hline 3 & 3 & 4 & 4 \\ \hline 3 & 3 & 4 & 4 \end{array}\right) \quad , \quad etc \dots$$

3.2 Opérations sur les matrices par blocs

Pour plus de clarté, on se place dans le cas de deux matrices à quatre blocs :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \qquad \textbf{ET} \quad M' = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix},$$

La proposition qui suit signifie simplement que les opérations usuelles sur les matrices définies par blocs (combinaison linéaire, multiplication, transposition) se fait de la même façon "bloc par bloc" que "coefficient par coefficient". Elle se généralise à un nombre quelconque de blocs, tant que le nombre et la dimension des blocs sont cohérents pour l'opération à effectuer.

Proposition 6. *Soient M et M' définies par blocs comme ci-dessus, avec $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, et $A \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{K})$, où $1 \leqslant r \leqslant n$ et $1 \leqslant s \leqslant p$.*

linéarité : Si $M' \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, et $A' \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{K})$, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$M + \lambda M' = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + \lambda A' & B + \lambda B' \\ C + \lambda C' & D + \lambda D' \end{pmatrix}.$$

multiplication : Si $M' \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $A' \in \mathcal{M}_{s,t}(\mathbb{K})$, avec $1 \leqslant t \leqslant q$, alors :

$$MM' = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA' + BC' & AB' + BD' \\ CA' + DC' & CB' + DD' \end{pmatrix}.$$

transposition :

$$M^\top = \begin{pmatrix} A^\top & C^\top \\ B^\top & D^\top \end{pmatrix}$$

3.3 Déterminant d'une matrice par blocs

Proposition 7. *Soit un entier $n \geqslant 2$ et soit $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice* triangulaire par blocs *de la forme :*

$$T = \begin{pmatrix} A & (*) \\ (0) & B \end{pmatrix},$$

avec deux blocs diagonaux carrés $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$, $1 \leqslant p \leqslant n-1$. On a alors :

$$\det(T) = \det(A)\det(B).$$

Remarque : Ce résultat se généralise bien sûr immédiatement par réccurence à un nombre quelconque de blocs diagonaux :

$$\det \begin{pmatrix} M_1 & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & M_q \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{q} \det(M_i).$$

Attention de ne pas extrapoler n'importe quelle règle de calcul de déterminant pour un calcul par blocs. Par exemple, on n'a pas en général $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A)\det(B) - \det(C)\det(D)$

3.4 Transvection par blocs

Exercice 2. Rappeler les trois types d'opérations élémentaires sur les lignes ou sur les colonnes d'une matrice, et le lien avec la multiplication à gauche ou à droite par une certaine matrice inversible.

Définition 9. On appelle *transvection par blocs* sur une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une opération de la forme :
- $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$, avec L_i et L_j deux blocs disjoints de lignes consécutives de A et de même taille, et $\lambda \in \mathbb{K}$.
- $C_j \leftarrow C_i + \lambda C_i$, avec C_i et C_j deux blocs disjoints de colonnes consécutives de A et de même taille, et $\lambda \in \mathbb{K}$.

Proposition 8. *Le rang et le déterminant d'une matrice est invariant lors de l'application d'une transvection par blocs.*

4 Éléments propres d'un endomorphisme ou d'une matrice

4.1 Sous-espace stable et endomorphisme induit

Définition 10. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit qu'un sous-espace vectoriel F de E est stable par u lorsque $u(F) \subset F$, c'est-à-dire lorsque :

$$\forall x \in E\,,\quad x \in F \Rightarrow u(x) \in F.$$

Exercice 3. Montrer qu'une droite vectorielle D de E est stable par $u \in \mathcal{L}(E)$ si, et seulement si, $u_{|_D}$ est une homothétie, c'est-à-dire :

$$\exists \lambda \in \mathbb{K}\,,\quad \forall x \in D\,,\quad u(x) = \lambda x.$$

Le noyau et l'image d'un endomorphisme u sont tout naturellement stables par u, on a même mieux :

Proposition 9. *Soit E un espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors pour tout $v \in \mathcal{L}(E)$ qui commute avec u,* $\mathrm{Ker}(v)$ *et* $\mathrm{Im}(v)$ *sont stables par u.*

Définition 11. Soit E un espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E)$, et F un sous-espace vectoriel stable par u. On appelle *endomorphisme induit par u sur F*, l'application :

$$u_F\ :\ \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & u(x) \end{array}.$$

Remarque : Comme son nom l'indique, u_F est bien un élément de $\mathcal{L}(F)$, qu'il ne faut pas confondre avec la *restriction* de u à F, notée $u_{|_F}$, élément de $\mathcal{L}(F, E)$. Il y a toujours existence de cette dernière, tandis que celle de l'endomorphisme induit par u sur F est subordonnée à la stabilité de F par u.

En dimension finie, un sous-espace stable et l'endomorphisme induit sont facilement explicités par une base adaptée (*i.e* qui contienut une base du sous-espace) :

Proposition 10. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, $u \in \mathcal{L}(E)$, et $\mathcal{B}$ une base de E adaptée à un sous-espace F de dimension $p \geqslant 1$. Alors F est stable par u si, et seulement si, la matrice de u dans $\mathcal{B}$ est de la forme :*

$$\operatorname*{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A & B \\ (0) & C \end{pmatrix}, \quad \text{avec } A \in M_p(\mathbb{K})$$

La matrice A représente l'endomorphisme induit par u sur F.

4.2 Vecteur propre et valeur propre, spectre

Définition 12. Soit E un espace vectoriel, et $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que $x \in E$ est un *vecteur propre* lorsque x est non nul et colinéaire à $u(x)$, *ie.* il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$. Ce scalaire λ est appelé *valeur propre* associée à x.

Remarques :
- On notera bien qu'un vecteur propre n'est jamais le vecteur nul.
- Pour un vecteur propre x de E, il n'existe qu'une seule valeur propre λ associée.
- Réciproquement, il y a une infinité de vecteurs propres pour une valeur propre $\lambda \in \mathbb{K}$ donnée : si e est un tel vecteur propre, la droite $D = \text{vect}(e)$ est stable par u et tout vecteur x non nul de D est vecteur propre pour λ (voir exercice 3)
- On peut rechercher à la fois les valeurs propres et vecteurs propres en considérant l'équation $u(x) = \lambda x$ d'inconnues $x \in E\backslash\{0\}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, appelée *équation aux éléments propres*.

Définition 13. Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, avec E de dimension finie, on appelle *spectre* de u l'ensemble de ses valeurs propres. Il est noté $\text{Sp}(u)$.

Remarque : Éviter de parler de spectre en dimension infinie, car il y a une petite subtilité hors-programme !

Exemple :
- Si $h \in \mathcal{L}(E)$ est une homothétie, son rapport λ est l'unique valeur propre et tout vecteur non nul est vecteur propre.
- Si $p \in \mathcal{L}(E)$ est un projecteur, 0 et 1 sont les seules valeurs propres possibles. Tout vecteur non nul de $\text{Ker}(p)$ est vecteur propre associé à 0 et tout vecteur non nul de $\text{Im}(p) = \text{Ker}(p - Id)$ est vecteur propre associé à 1.
- Si $s \in \mathcal{L}(E)$ est une symétrie, 1 et -1 sont les seules valeurs propres possibles. Tout vecteur non nul de $\text{Ker}(s - Id)$ est vecteur propre associé à 1 et tout vecteur non nul de $\text{Ker}(p + Id)$ est vecteur propre associé à -1.

Exercice 4. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de l'endomorphisme $D : f \mapsto f'$ de l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

4.3 Sous-espaces propres

Reformulons la définition d'une valeur propre : $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre d'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ si, et seulement si, il existe x non nul tel que $(u - \lambda I_E)(x) = 0$, où I_E est l'endormorphisme *identité* de E. D'où la proposition :

Proposition 11. *Soit E un espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a :*

$$\lambda \text{ valeur propre de } u \quad \Leftrightarrow \quad \ker(u - \lambda I_E) \neq \{0\} \quad \Leftrightarrow \quad u - \lambda I_E \text{ n'est pas injective}$$

Cette proposition motive la définition suivante.

Définition 14. Soit E un espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$. Pour $\lambda \in \mathbb{K}$ valeur propre de u, on appelle *sous-espace propre* de u *associé* à λ l'ensemble :

$$E_\lambda = \ker(u - \lambda I_E).$$

Remarque : Lorsque λ est valeur propre, E_λ est un sous-espace vectoriel de E non réduit à $\{0\}$: il est donc de dimension au moins 1 et consiste en la réunion de $\{0\}$ et de l'ensemble de tous les vecteurs propres associés à λ.

4.4 Propriétés des éléments propres

La proposition qui suit est à comparer à la proposition 9 :

Proposition 12. *soient E un espace vectoriel et $u, v \in \mathcal{L}(E)$. Si u et v commutent, tout sous-espace propre de u est stable par v.*

Enfin, la proposition suivante est tout à fait essentielle pour le chapitre principal d'algèbre linéaire à venir sur la réduction des endomorphismes.

Proposition 13. *Soient un entier $q \geqslant 2$ et soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ des valeurs propres distinctes deux à deux d'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors leur sous-espaces propres associés $E_1, \ldots, E_q$ sont en somme directe.*

Corollaire 4. *Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.*

Corollaire 5. *Si E est un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, et si $u \in \mathcal{L}(E)$, le cardinal de $\mathrm{Sp}(u)$ est fini et inférieur ou égal à n.*

Autrement dit, u n'a pas plus de n valeurs propres distinctes si E est de dimension n.

4.5 Éléments propres d'une matrice

La traduction matricielle en dimension finie d'une relation du type $u(x) = \lambda x$ justifie les définitions suivantes :

Définition 15. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- On dit que $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est un *vecteur propre* de M, s'il est non nul et s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ (la valeur propre) telle que $MX = \lambda X$.
- On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est *valeur propre* de M, s'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ non nul (un vecteur propre) tel que $MX = \lambda X$;
- On appelle *spectre* de M, et on note $\mathrm{Sp}(M)$ l'ensemble des valeurs propres de M.

Remarque : Comme pour le cas des endomorphismes, on peut chercher valeurs propres et vecteurs propres de M comme solutions de l'*équation aux éléments propres* $MX = \lambda X$, avec $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ non nul et $\lambda \in \mathbb{K}$

Tout cela est bien cohérent avec les définitions analogues pour les endomorphismes :

Proposition 14. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n > 0$, muni d'une base $\mathcal{B}$, et soit $u \in \mathcal{L}(E)$ représenté par la matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{B}$. Alors :*
- *$\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de u si, et seulement si, λ est valeur propre de M.*
- *$x \in E$ est vecteur propre de u si, et seulement si, sa représentation matricielle $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{B}$ est vecteur propre de M.*

Corollaire 6. *Deux matrices semblables ont même spectre.*

Remarque : Le cas fondamental est celui de $E = \mathbb{K}^n$ et $\mathcal{B}$ la base canonique : u est alors canoniquement associé à M, et la représentation matricielle X d'un vecteur $x \in \mathbb{K}^n$ a exactement les même composantes que le vecteur x lui-même. On rappelle que cela justifie l'identification (dite canonique) de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ à $\mathbb{K}^n$. On peut reformuler la définition d'un vecteur propre X comme élément de $\mathbb{K}^n$.

Rappelons que dans le cadre de l'identification de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ à $\mathbb{K}^n$ qu'on vient d'évoquer, on définit le *noyau* d'une matrice comme celui de l'endomorphisme canoniquement associé. Cela conduit naturellement à la définition suivante.

Définition 16. Pour $\lambda \in \mathbb{K}$ valeur propre de $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle *sous-espace propre* de M *associé* à λ l'ensemble :

$$E_\lambda = \ker(M - \lambda I_n).$$

C'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$, réunion de $\{0\}$ et de l'ensemble des vecteurs propres de M associés à λ.

De même qu'un polynôme à coefficients réels peut avoir des racines complexes non réelles, une matrice réelle $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ peut être considérée comme un cas particulier de matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et de ce fait avoir éventuellement des valeurs propres complexes non réelles. On peut différencier ainsi le spectre $\mathrm{Sp}_{|\mathbb{R}}(A)$ des valeurs propres réelles de celui des valeurs propres complexes $\mathrm{Sp}_{|\mathbb{C}}(A)$.

Proposition 15. *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si $\mathbb{K}$ est un sous-corps d'un corps $\mathbb{K}'$, le spectre $\mathrm{Sp}_{|\mathbb{K}}(M)$ de M dans $\mathbb{K}$ est contenu dans le spectre $\mathrm{Sp}_{|\mathbb{K}'}(M)$ de M dans $\mathbb{K}'$.*

Chapitre 2

Réduction des endomorphismes

Tous les espaces vectoriels considérés dans ce chapitre ont pour corps de base un sous-corps $\mathbb{K}$ de $\mathbb{C}$.

Révisions MP2I

Revoir les chapitres 46 et 47.

1 Polynôme caractéristique.

1.1 Cas d'une matrice

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Rappelons que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de M si, et seulement si, il existe $x \in \mathbb{K}^n$ non nul (un vecteur propre) tel que $Mx = \lambda x$ (on a ici, comme d'habitude, identifié $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}^n$). Un tel vecteur x est alors dans le noyau de $M - \lambda I_n$, et on a finalement la propriété essentielle :

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(M) \iff M - \lambda I_n \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$$

On a donc immédiatement le résultat suivant.

Proposition 16. $\lambda \in \mathbb{K}$ *est une valeur propre de la matrice* $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *si, et seulement si,* λ *est solution de l'équation* $\det(M - \lambda I_n) = 0$.

C'est ce résultat qui motive l'introduction du polynôme correspondant à la fonction $x \mapsto \det(xI_n - M)$.

Proposition 17. *Si* $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*, la fonction* $x \mapsto \det(xI_n - M)$ *est polynomiale à coefficients dans* $\mathbb{K}$.

Définition 17. Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle polynôme caractéristique de M, le polynôme $\chi_M \in \mathbb{K}[X]$ défini par la relation :

$$\forall x \in \mathbb{K}, \quad \chi_M(x) = \det(xI_n - M)$$

Remarque : En fait, il est tout à fait possible de considérer des matrices carré à coefficients dans $\mathbb{K}[X]$ et de définir leur déterminant, de sorte que cela a un sens d'écrire :

$$\chi_M = \det(XI_n - M)$$

On pourra en pratique adopter cette définition pour calculer des polynômes caractéristiques de matrices.

Proposition 18. *Pour* $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, χ_M *est unitaire et de degré* n*. De plus les coefficients associés aux degrés* $n-1$ *et* 0 *sont respectivement* $-\mathrm{tr}(M)$ *et* $(-1)^n \det(M)$ *:*

$$\chi_M = X^n - (\mathrm{tr}M)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(M).$$

Terminons ce paragraphe avec un cas précis de type de matrice pour lequel il est très facile d'obtenir le polynôme caractéristique.

Proposition 19. *Si* $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *est triangulaire (supérieure ou inférieure) et en notant* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *les coefficients diagonaux, on a :*

$$\chi_T = \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i)$$

1.2 Cas d'un endomorphisme.

Dans ce paragraphe, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$. La notion de polynôme caractéristique peut être sans problème étendue aux endomorphismes de E, indépendamment d'une représentation matricielle particulière, car deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique :

Proposition 20. *Pour tout couple $(M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ de matrices semblables, $\chi_M = \chi_N$.*

Cela justifie donc bien la définition suivante :

Définition 18. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On appelle *polynôme caractéristique* de u, et on note χ_u, le polynôme caractéristique de sa matrice représentative dans n'importe quelle base.

Remarque : On peut aussi définir χ_u comme le polynôme associé à la fonction polynomiale $x \mapsto \det(xId - u)$, définie sur $\mathbb{K}$. Cela est cohérent avec la définition ci-dessus puisque si u est représenté par une matrice M dans une certaine base, alors $xId - u$ est représentée par $xI_n - M$ et on a donc $\det(xId - u) = \det(xI_n - M)$.

La proposition 18 s'adapte parfaitement au cas des endomorphismes :

Proposition 21. *Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, χ_u est unitaire et de degré n. De plus les coefficients associés aux degrés $n-1$ et 0 sont respectivement $-\mathrm{tr}(u)$ et $(-1)^n \det(u)$:*

$$\chi_u = X^n - \mathrm{tr}(u) X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(u).$$

Terminons ce paragraphe avec une propriété importante de factorisation d'un polynôme caractéristique d'endomorphisme, dans le cas d'existence d'un sous-espace stable. Le résultat suivant se démontre simplement en utilisant une représentation matricielle dans une base adaptée.

Proposition 22. *Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u et soit v l'endomorphisme de F induit par u sur F. Alors χ_v divise χ_u.*

1.3 Propriété fondamentale

La propriété fondamentale d'un polynôme caractéristique est celle qui a motivé sa définition, à savoir la caractérisation des valeurs propres. D'autres propriétés intéressantes vont ensuite émerger en approndissant un peu le concept.

Proposition 23. *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de M si, et seulement si, λ est racine de χ_M. Autrement dit, $\mathrm{Sp}(M)$ est exactement l'ensemble des racines (dans $\mathbb{K}$) de χ_M.*

Exemple : Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est triangulaire, alors son spectre est l'ensemble des coefficients diagonaux.

Remarque : Il est important de bien savoir sur quel corps $\mathbb{K}$ on travaille, car la matrice M en elle-même ne permet généralement pas de l'expliciter. Ainsi une matrice M à coefficients entiers peut tout aussi bien être vue comme élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$, de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ou de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, ce qui ne donne pas nécessairement le même spectre suivant les cas (on aura cependant forcément l'inclusion $\mathrm{Sp}_{\mathbb{Q}}(M) \subset \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(M) \subset \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M)$). On a cependant souvent tendance à appeler spectre de $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble de toutes les valeurs propres complexes de M (et donc l'ensemble de toutes les racines complexes de χ_M). On prendra alors bien garde à ce que seuls les éléments réels de $\mathrm{Sp}(M)$, formant le *spectre réel* $\mathrm{Sp}_{|\mathbb{R}}(M)$, peuvent être associés à des vecteurs propres de $\mathbb{R}^n$, et correspondre donc à des valeurs propres de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à M. Les valeurs propres complexes non réelles de $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ n'ont pas une interprétation géométrique immédiate dans $\mathbb{R}^n$: il faut considérer u en tant qu'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ pour donner un sens à leurs sous-espaces propres associés.

On a bien sûr le même résultat pour les endomorphismes :

Proposition 24. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n non nulle, et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de u si, et seulement si, λ est une racine de χ_u.*

Remarque : Puisqu'un polynôme de degré n n'a pas plus de n racines, on retrouve le fait que u a au plus n valeurs propres (voir chapitre **1**).

1.4 Multiplicité d'une valeur propre.

Dans ce paragraphe, on considère toujours un espace vectoriel E de dimension finie $n \geqslant 1$ et on fixe $u \in \mathcal{L}(E)$. La définition et proposition qui suit s'adapte mot pour mot au cas d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (il suffit de supposer que M représente u dans une base quelconque).

Définition 19. On appelle *multiplicité* d'une valeur propre λ de u sa multiplicité en tant que racine de χ_u : c'est le plus grand entier k tel que $(X - \lambda)^k$ divise χ_u.

Remarque : En notant m la multiplicité de λ, cela signifie qu'on peut écrire $\chi_u = (X - \lambda)^m P$, avec $P \in \mathbb{K}[X]$ vérifiant $P(\lambda) \neq 0$.

L'application de la proposition 22 permet alors de montrer l'important résultat suivant :

Proposition 25. *Pour toute valeur propre λ de u de multiplicité $m_\lambda \geqslant 1$ et de sous-espace propre associé E_λ, on a :*

$$\dim(E_\lambda) \leqslant m_\lambda.$$

2 Diagonalisation et trigonalisation

En quelques mots, un endomorphisme est diagonalisable (*resp.* trigonalisable) lorsqu'il peut être représenté par une matrice diagonale (*resp.* triangulaire) ; une matrice est diagonalisable (*resp.* trigonalisable) lorsqu'elle est semblable à une matrice diagonale (*resp.* triangulaire). Dans toute cette section, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle n et on considère $u \in \mathcal{L}(E)$.

2.1 Endomorphisme diagonalisable

Définition 20. On dit que u est *diagonalisable* lorsqu'il existe une base de E dans laquelle la matrice représentative de u est diagonale.

Remarque : Une telle base dans laquelle u est représentée par une matrice D diagonale n'est alors constituée que de vecteurs propres, et les éléments diagonaux de D sont les valeurs propres associées.

Une telle base contient alors une base de tous les sous-espaces proprese, ce qui se traduit en fait par la proposition suivante.

Proposition 26. *u est diagonalisable si, et seulement si, la somme (directe) de ses sous-espaces propres est égale à E.*

Corollaire 7. *u est diagonalisable si, et seulement si, la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à* $\dim(E)$.

Exemple :

- Un projecteur $p \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable avec $\mathrm{Sp}(p) = \{0, 1\}$, $E_0 = \mathrm{Ker}(p)$ et $E_1 = \mathrm{Ker}(p - I_E) = \mathrm{Im}(p)$ (ou cas particulier $\mathrm{Sp}(p) = \{0\}$ si $p = 0$ et $\mathrm{Sp}(p) = \{1\}$ si $p = I_E$).
- Une symétrie $s \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable avec $\mathrm{Sp}(s) = \{-1, 1\}$, $E_{-1} = \mathrm{Ker}(s + I_E)$ et $E_1 = \mathrm{Ker}(s - I_E)$ (ou cas particulier $\mathrm{Sp}(s) = \{-1\}$ si $s = -I_E$ et $\mathrm{Sp}(s) = \{1\}$ si $p = I_E$).

2.2 Matrice diagonalisable

Définition 21. On dit qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est *diagonalisable* lorsqu'elle est semblable à une matrice diagonale.

Remarque : L'identification de M à son endomorphisme canoniquement associé permet d'interpréter géométriquement la relation de similitude $M = PDP^{-1}$: la matrice diagonale D représente M dans une autre base de $\mathbb{K}^n$, et P est la matrice de passage de la base canonique vers cette autre base. Les définitions 20 et 21 sont donc parfaitement cohérentes : M est diagonalisable en tant qu'endomorphisme, les matrices colonnes de P sont des vecteurs propres de M, et les valeurs propres associées sont les coefficients diagonaux de D.

On a en fait plus généralement :

Proposition 27. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n > 0$ muni d'une base quelconque $\mathcal{B}$ et soit $u \in \mathcal{L}(E)$, représenté par $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{B}$. Alors u est diagonalisable si, et seulement si, M est diagonalisable.*

Remarque : Là aussi la matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ d'une relation de similitude $M = PDP^{-1}$, avec D diagonale, représente une matrice de passage : celle de la base $\mathcal{B}$ vers une base de vecteurs propres.

2.3 Caractérisation par les multiplicités

Lorsque χ_u est scindé, on peut l'écrire $\chi_u = \prod_{i=1}^{p}(X - \lambda_i)^{m_i}$, où $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont les valeurs propres (distinctes deux à deux) de u et $m_1, \ldots, m_p$ leurs multiplicités respectives. Puisque χ_u est de degré n, on a alors :

$$\sum_{i=1}^{p} m_i = n.$$

Les propositions 26 et 25 conduisent alors à la caractérisation importante :

Proposition 28. *Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*
(i) u est diagonalisable.
(ii) χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$ et pour toute valeur propre λ de multiplicité m_λ, $\dim(E_\lambda) = m_\lambda$.

Remarque : si u est diagonalisable, χ_u est donc toujours scindé sur $\mathbb{K}$ mais la réciproque est fausse : il est nécessaire que de plus, chaque sous-espace propre "pèse" autant (en terme de dimension) que sa valeur propre associée (en terme de multiplicité).

Il y a cependant un cas particulier où cette contrainte est nécessairement vérifiée :

Proposition 29. *Si χ_u est* simplement *scindé sur $\mathbb{K}$, autrement dit si u admet n valeurs propres distinctes, alors u est diagonalisable.*

Remarque : Attention, il ne s'agit bien là que d'une condition suffisante : si u est diagonalisable, χ_u est forcément scindé, mais pas forcément à racines simples.

2.4 Diagonalisation effective.

La proposition 28 donne une méthode générale d'étude de diagonalisabilité à partir du polynôme caractéristique χ_u.

Méthode : Si χ_u n'est pas scindé sur $\mathbb{K}$, u n'est pas diagonalisable. Si χ_u est scindé, de racines $\lambda_1 \ldots, \lambda_p$ distinctes deux à deux, et $m_1, \ldots, m_p$ les multiplicités associées, alors pour tout $i \in [\![1, p]\!]$:
- Si λ_i est racine simple ($m_i = 1$), le sous-espace propre associé est nécessairement une *droite vectorielle*, et il n'y a rien d'autre à vérifier.
- Si λ_i est racine multiple, donc de multiplicité $m_i \geqslant 2$, il faut vérifier que $\dim(E_i) = m_i$ (par exemple en étudiant le rang de $u - \lambda_i I_E$).

Remarques :
- Cette méthode permet de savoir si u est diagonalisable. Si tel est le cas, une *diagonalisation* effective consiste en l'obtention d'une base de vecteurs propres. Au sein de la méthode précédente cela revient pour chaque $i \in [\![1, p]\!]$, à trouver m_i ($= \dim(E_i)$) vecteurs indépendants dans (donc formant une base de) $E_i = \mathrm{Ker}(u - \lambda_i I_E)$: il s'agit finalement de résoudre un système linéaire homogène carré d'ordre n et de rang $n - m_i$.
- Il faut prendre quelques précautions dans l'adaptation de cette méthode à une matrice M : son polynôme caractéristique n'est pas forcément scindé sur $\mathbb{K}$ (typiquement $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) mais il l'est toujours sur $\mathbb{C}$ (théorème de d'Alembert-Gauss). Il est alors possible que M soit diagonalisable dans $\mathbb{C}$, mais pas dans $\mathbb{K}$. Mais pour une diagonalisation effective dans $\mathbb{C}$, c'est une base (de vecteurs propres) de $\mathbb{C}^n$ qu'il faudra chercher.

Exemple : La matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ admet pour polynôme caractéristique $\chi = X^2 + 1 = (X - i)(X + i)$. M n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ car χ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$, mais l'est dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ car χ est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$. Ainsi M est semblable à $D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$: on peut trouver $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ telle que $M = PDP^{-1}$, P représentant la matrice de passage de la base canonique vers une base de vecteurs propre. On vérifiera que par exemple, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$ convient.

2.5 Endomorphisme trigonalisable.

Lorsqu'un endomorphisme n'est pas diagonalisable, pas moyen de trouver une base dans laquelle il serait représenté par une matrice *diagonale*. On peut alors être un peu moins exigeant et chercher simplement une représentation par une matrice *triangulaire*.

Définition 22. On dit que u est *trigonalisable* s'il existe une base de E dans laquelle la matrice représentative de u est triangulaire.

Remarques :

- Si u est trigonalisable, une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice T de u est triangulaire n'est en général pas constituée de vecteurs propres sauf pour ceux correspondant à des colonnes de la matrices où tous les coefficients extra-diagonaux sont nuls, ce qui est toujours le cas pour la première colonne (cas d'une matrice triangulaire supérieure) ou pour la dernière colonne (cas d'une matrice triangulaire inférieure). En revanche, tous les coefficients diagonaux de T correspondent à des valeurs propres de u, et apparaissent autant de fois que leur multiplicité (*cf.* théorème 3).
- Si $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base dans laquelle u est représentée par une matrice triangulaire inférieure, alors $\mathcal{B}' = (e_n, e_{n-1}, \ldots, e_1)$ est une base dans laquelle u est représentée par une matrice triangulaire supérieure, et *vice versa*. On peut donc toujours se ramener au cas d'une matrice triangulaire supérieure, et c'est ce qu'on fait en pratique.

2.6 Matrice trigonalisable.

Définition 23. On dit qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est *trigonalisable* si elle est semblable à une matrice triangulaire.

Remarques :

- L'identification de M à son endomorphisme canoniquement associé permet d'interpréter géométriquement la relation de similitude $M = PTP^{-1}$: la matrice triangulaire T représente M dans une autre base de $\mathbb{K}^n$, et P est la matrice de passage de la base canonique vers cette autre base. Les définitions 22 et 23 sont donc parfaitement cohérentes : M est trigonalisable si, et seulement si, son endomorphisme canoniquement associé est trigonalisable.
- Comme pour un endomorphisme, on peut toujours se ramener à une matrice triangulaire supérieure : si T est triangulaire inférieure, elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure T' via la relation de similitude $T' = QTQ^{-1}$, avec $Q = Q^{-1} = (\delta_{i,n+1-j})_{i,j}$ (qui correspond à la matrice de passage d'une base $(e_1, \ldots, e_n)$ quelconque à la base $(e_n, \ldots, e_1)$).

2.7 Caractérisation des endomorphismes trigonalisables.

Si la caractérisation d'un endomorphisme diagonalisable par son polynôme caractéristique est un peu élaborée à causes des racines éventuellement multiples (pour lesquelles il faut vérifier, rappelons-le, qu'elles sont bien égales aux dimension des sous-espaces propres associées), les choses sont plus immédiates pour la trigonalisabilité :

Théorème 3. *$u \in \mathcal{L}(E)$ (*resp. *$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) est trigonalisable si, et seulement si, son polynôme caractéristique χ est* scindé.

Plus précisément, u est représenté alors dans une certaine base par (*resp.* A est semblable à) la matrice :

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (\star) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

où $\chi = \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i)$, et où les valeurs propres apparaissent sur la diagonale autant de fois que leur multiplicité.

Remarques :
- En particulier, lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $u \in \mathcal{L}(E)$ est toujours trigonalisable d'après le théorème de d'Alembert-Gauss.
- Si $\mathbb{K}$ est un sous-corps strict de $\mathbb{C}$ (par exemple $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$), une matrice M à coefficients dans $\mathbb{K}$ est toujours trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,

2.8 Somme et produit des valeurs propres d'un endomorphisme trigonalisable

Vous avez vu en MP2I comment les coefficients d'un polynôme scindé peuvent s'exprimer en fonctions de ses racines avec les *polynômes symétriques* En combinant cela à la proposition 21, cela permet de prouver le résultat suivant :

Proposition 30. *Si $u \in \mathcal{L}(E)$ (resp. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) admet un polynôme caractéristique χ scindé sur $\mathbb{K}$, de racines $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (les valeurs propres), alors :*

$$\mathrm{tr}(u) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \qquad \textit{et} \qquad \det(u) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

(resp. $\mathrm{tr}(A) = \dots$ et $\det(A) = \dots$).

Remarques :
- Attention à bien prendre garde à ce que dans cette formulation, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ne sont pas forcément distinctes deux à deux. Certaines valeurs propres sont donc éventuellement répétées dans la somme ou dans le produit : il faut tenir compte des multiplicités (*cf.* def. 19).
- χ doit être scindé sur $\mathbb{K}$ pour que cela fonctionne avec les valeurs propres dans $\mathbb{K}$, mais χ étant toujours scindé sur $\mathbb{C}$ (théorème de d'Alembert-Gauss), on peut toujours appliquer ce résultat tant qu'on prend bien en compte toutes les racines complexes.

On peut aussi reformuler la proposition précédente en tenant compte explicitement des multiplicités :

Proposition 31. *On suppose χ scindé sur $\mathbb{K}$, de la forme*

$$\chi = \prod_{i=1}^{p}(X - \lambda_i)^{m_i},$$

avec $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ distincts deux à deux. Alors :

$$\mathrm{tr}(u) = \sum_{i=1}^{p} m_i \lambda_i \qquad \textbf{\textit{ET}} \qquad \det(u) = \prod_{i=1}^{p} \lambda_i^{m_i}.$$

3 Polynômes d'endomorphismes et réduction

Dans toute cette section, on considère un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$, où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Tout ce qui suit à propos de u s'adaptera immédiatement à A en considérant son endomorphisme canoniquement associé.

3.1 Polynômes d'un endomorphisme, d'une matrice

Notation : Pour un polynôme $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$:

- On note $P(u) = \sum_{k=0}^{d} a_k u^k$, avec la convention $u^0 = I_E$.
- On note $P(A) = \sum_{k=0}^{d} a_k A^k$, avec la convention $A^0 = I_n$.

Remarque : On rappelle que dans ce contexte, $u^k = \underbrace{u \circ \dots \circ u}_{k \text{ fois}}$.

Définition 24.
- On appelle *polynôme en u* tout endomorphisme de la forme $P(u)$ avec $P \in \mathbb{K}[X]$. L'ensemble des polynômes en u est noté $\mathbb{K}[u]$.
- On appelle *polynôme en A* toute matrice de la forme $P(A)$ avec $P \in \mathbb{K}[X]$. L'ensemble des polynômes en A est noté $\mathbb{K}[A]$.

3.2 Idéal annulateur et polynôme minimal

Proposition 32. *L'application $P \mapsto P(u)$ est un morphisme d'algèbre de $\mathbb{K}[X] \to \mathcal{L}(E)$, d'image $\mathbb{K}[u]$.*

Corollaire 8. *$\mathbb{K}[u]$ est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{L}(E)$.*

Remarques :
- Ce morphisme est l'unique morphisme d'algèbre qui envoit X sur u.
- Son noyau est un idéal de $\mathbb{K}[X]$.

Définition 25.
- On dit que $P \in \mathbb{K}[X]$ est un *polynôme annulateur* de u lorsque $P(u)$ est l'endomorphisme nul.
- On apelle *idéal annulateur* l'ensemble des polynômes annulateurs de u.

Exercice 5. Adapter les trois énoncés précédents au cas de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Les cas d'un endomorphisme en dimension finie et d'une matrice sont plus généralement liés par la représentation matricielle dans une base $\mathcal{B}$ via l'isomorphisme d'algèbres $\underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}} : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

Proposition 33. *Si u est représenté par $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans une base quelconque $\mathcal{B}$, on a pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$:*

$$\underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(P(u)) = P(A)$$

En particulier, A et u ont le même idéal annulateur.

On peut en déduire le corollaire suivant, qui peut également se montrer directement par un calcul matriciel :

Corollaire 9. *Si A et B sont deux matrices semblables et $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(A)$ et $P(B)$ sont semblable.*

Remarque : La relation de similitude peut s'exprimer avec la même matrice de passage

Lemme 1. *E étant de dimension finie, il existe toujours un polynôme annulateur non nul pour u.*

Proposition 34.

a) *L'idéal annulateur de u est engendré par un unique polynôme unitaire de degré $d \geqslant 1$.*

b) *La restriction à $\mathbb{K}_{d-1}[X]$ du morphisme d'algèbre $P \mapsto P(u)$ réalise un isomorphisme de $\mathbb{K}_{d-1}[X]$ sur $\mathbb{K}[u]$.*

c) *La famille $(u^k)_{0 \leqslant k \leqslant d-1}$ est une base de $\mathbb{K}[u]$.*

Définition 26. On appelle *polynôme minimal* de u l'unique générateur unitaire de l'idéal annulateur de u : C'est un polynôme annulateur de u de degré minimal. On le note μ_u ou π_u.

Remarques :
- Tout autre polynôme annulateur de même degré que μ_u est associé à μ_u, c'est-à-dire de la forme $\lambda\mu_u$, avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$.
- Plus généralement, tout polynôme annulateur de u est un multiple de μ_u.
- $\mathbb{K}[u]$ est donc un sous-espace vectoriel de dimension finie d. Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(u)$ se décompose dans la base $(I_1, u, \dots, u^{d-1})$ via la division euclidienne de P par μ_u : En notant $P = \mu_u Q + R$, avec $\deg(R) < d$, on a $P(u) = R(u)$.

Le théorème et les remarques précédentes s'adaptent bien sûr au cas d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: son polynôme minimal, noté μ_A ou π_A, est l'unique générateur unitaire de l'idéal annulateur de A. C'est donc un polynôme annulateur de A de degré minimal et tout autre polynôme annulateur de A est un multiple de μ_A.

3.3 Polynôme annulateur et valeurs propres

Lemme 2. *Soit $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que $u(x) = \lambda x$. Alors pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(u)(x) = P(\lambda)x$.*

Proposition 35. *Si P annule u, toute valeur propre de u est racine de P.*

Remarque : Attention à l'utilisation de ce résultat : pour un polynôme annulateur P de u donné, on peut seulement en déduire que les valeurs propres de u *font partie* des racines de P. Certaines racines de P peuvent très bien ne pas être des valeurs propre de u.

Exemple :
- Si $p \in \mathcal{L}(E)$ est un projecteur, on a $p \circ p = p$, et donc $X^2 - X = X(X-1)$ est un polynôme annulateur. On retrouve que $\mathrm{Sp}(p) \subset \{0, 1\}$.
- Si $s \in \mathcal{L}(E)$ est une symétrie, on a $s \circ s = I_E$, et donc $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$ est un polynôme annulateur. On retrouve que $\mathrm{Sp}(s) \subset \{1, -1\}$.

Si on considère cependant le polynôme annulateur minimal, alors aucune racine n'est superflue et la réciproque devient vraie :

Proposition 36. *$\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de u si, et seulement si, λ est une racine du polynôme minimal μ_u.*

Remarque : Le polynôme caractéristique χ_u et le polynôme minimal μ_u ont donc exactement les mêmes racines, seules les multiplicités peuvent différer.

Exercice 6. Montrer qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si, et seulement si, il existe un polynôme annulateur P tel que $P(0) \neq 0$. Expliquer alors comment écrire A^{-1} comme un polynôme en A.

3.4 Lemme de décomposition des noyaux

Théorème 4. *Si $P_1, \ldots, P_r \in \mathbb{K}[X]$ sont premiers entre eux deux à deux, et de produit égal à P, alors*

$$\mathrm{Ker}\big(P(u)\big) = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}\big(P_i(u)\big)$$

Corollaire 10. *Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ unitaire scindé, $P = \displaystyle\prod_{i=1}^{r}(X - \lambda_i)^{m_i}$. Alors, si P est annulateur de u, on a :*

$$E = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}\big(u - \lambda_i I_E\big)^{m_i}$$

Ce résultat sera très utile pour apporter des éléments nouveaux à l'étude de la réduction des endomorphismes.

3.5 Polynôme annulateur et diagonalisation

L'utilisation du polynôme caractéristique est peu commode pour caractériser la diagonalisabilité (*cf.* prop. 28), à cause des racines multiples éventuelles. Le fait que χ_u soit scindé à racines simples est une condition suffisante mais non nécessaire de diagonalisabilité. On a en revanche le résultat suivant :

Proposition 37. *Les trois assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) u est diagonalisable ;

(ii) Il existe un polynome annulateur de u simplement scindé sur $\mathbb{K}$;

(iii) Le polynôme minimal μ_u est simplement scindé sur $\mathbb{K}$.

Corollaire 11. *Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les valeurs propres de u, deux à deux distinctes. Alors :*

$$u \text{ diagonalisable} \quad \Leftrightarrow \quad \prod_{i=1}^{r}(X - \lambda_i) \text{ annulateur}$$

On a dans ces conditions $\mu_u = \displaystyle\prod_{i=1}^{r}(X - \lambda_i)$.

Remarques :
- En cas de diagonalisabilité, on aura remarqué qu'on obtient facilement μ_u en partant de χ_u sous forme scindée et en gommant les multiplicités. En particulier, si χ_u est simplement scindé, alors $\chi_u = \mu_u$!
- La proposition précédente et son corollaire admettent bien sûr une version analogue pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

3.6 Diagonalisation d'un endomorphisme induit

La proposition 37 permet de régler facilement le sort de questions épineuses, comme par exemple :

Lemme 3. *Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u, et u_F l'endormorphisme induit par u sur F. Alors $\mu_{u_F} \mid \mu_u$.*

Proposition 38. *Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u, et u_F l'endormorphisme induit par u sur F. Alors, si u est diagonalisable, u_F aussi.*

Remarque : Sans l'utilisation de polynôme minimal, difficulté ici provient de ce que rien n'indique que F contienne des vecteurs propres de u.

3.7 Polynôme annulateur et trigonalisabilité

Concernant la trigonalisabilité, on retrouve la même caractérisation avec les polynômes annulateurs qu'avec le polynôme caractéristique :

Proposition 39. *Les trois assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) u est trigonalisable

(ii) Il existe un polynôme annulateur de u scindé sur $\mathbb{K}$.

(iii) Le polynôme minimal μ_u est scindé sur $\mathbb{K}$.

Remarque : Pour $(iii) \Rightarrow (i)$ on peut aussi appliquer le lemme des noyaux.

Exercice 7. Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}$, tel que χ_u^k soit un polynôme annulateur de u.

3.8 Théorème de Cayley-Hamilton

Théorème 5. ***(de Cayley-Hamilton)*** *Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, le polynôme caractéristique χ_u de u* est *un polynôme annulateur. Autrement dit :*

$$\mu_u \mid \chi_u$$

Remarques :
- La multiplicité d'une valeur propre dans μ_u est donc inférieure ou égale à sa multiplicité dans χ_u.
- En particulier, Si χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$, avec $\chi_u = \prod_{i=1}^{r}(X - \lambda_i)^{m_i}$ (les valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ deux à deux distinctes), on a
$$\mu_u = \prod_{i=1}^{r}(X - \lambda_i)^{q_i},$$
avec $q_i \leqslant m_i$ pour tout $i \in [\![1, r]\!]$. Le lemme des noyaux permet alors d'écrire :
$$E = \bigoplus_{i=1}^{r} \operatorname{Ker}\big(u - \lambda_i I_E\big)^{m_i} = \bigoplus_{i=1}^{r} \operatorname{Ker}\big(u - \lambda_i I_E\big)^{q_i}$$
Cette remarque justifie l'introduction de la notion de *sous-espace caractéristique* qui prolonge celle de sous-espace propre, et que l'on abordera ultérieurement.