Fiche d'exercices n° 12

Équations différentielles linéaires

Exercice 1.

Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$y' + 3y = 0 \quad ; \quad y' + 3y = 2 \quad ; \quad x^2y' + xy = 0 \quad ; \quad y' + \cos(x)y = \cos(x)$$

Exercice 2.

Pour chacune des équations différentielles qui suit : écrire la solution associée dont la courbe représentative passe par le point $M(\cdot,\cdot)$ et tracer sommairement cette courbe.

$$y'+2xy = 0, \quad M(0,1) \quad ; \quad y'+y\tan(x) = \sin(x)\cos(x), \quad M\left(\frac{\pi}{4},0\right) \quad ; \quad (x^2-1)y'+2y = x, \quad M(1,1)$$

Exercice 3.

Résoudre les problèmes de Cauchy suivant :

$$3y' + 2y = \cos(x), \quad y(0) = 1 \quad ; \quad \cos(x)y' + \sin(x)y = 1, \quad y(\pi) = 0$$

$$y' + \operatorname{th}(x)y = \operatorname{ch}(x), \quad y(0) = 2 \quad ; \quad y' + \frac{y}{\sqrt{1+x^2}}y = 0, \quad y(0) = -1$$

Exercice 4. ⋆

Résoudre (en étudiant éventuellement les raccords)

$$xy'-2y = x^4 \quad ; \quad x(1+x^2)y' = y \quad ; \quad (x^2+1)y'+(x-1)^2y = x^3-x^2+x+1 \quad ; \quad (e^x-1)y'+(e^x+1)y = 3+2e^x$$

Exercice 5.

Résoudre les équations différentielles du second ordre homogènes suivantes

$$y'' + 4y' + 3y = 0 \quad ; \quad y'' - 6y' + 9y = 0 \quad ; \quad y'' - 2y' + 2y = 0$$

Exercice 6. *Un lissage à la "Césaro"*

Résoudre les équations différentielles du second ordre suivantes, en utilisant au besoin le principe de superposition :

$$y'' - y = x^3 + x^2 \quad ; \quad y'' - 2y' + y = \cos(mx) \quad ; \quad y'' - 2y' + y = x^3e^x + 2\cos x + (x^3 + 3)$$

Exercice 7. ⋆

Résoudre l'équation : $y'' + k^2y = \cos mx, \quad k, m \in \mathbb{R}$.
On discutera suivant les valeurs de k et m.

Exercice 8. ⋆

Soit $m \in \mathbb{R}$. Déterminer la solution de l'équation :

$$(E_m) \qquad y'' - 2y' + (1 + m^2)y = (1 + 4m^2)\cos mx$$

qui vérifie $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$ (Indication : On traitera séparément les cas $m = 0$ et $m \neq 0$).

Exercice 9. ⋆

En posant $t = \arctan x$, résoudre :

$$y''(x) + \frac{2x}{1+x^2}y'(x) + \frac{y(x)}{(1+x^2)^2} = 0.$$

Exercice 10.

Résoudre le système différentiel suivant

$$\begin{cases} x' = y + z \\ y' = x \\ z' = x + y + z \end{cases}$$

Exercice 11.

Résoudre l'équation différentielle $X' = AX$ avec $A = \begin{pmatrix} 2 & & (1) \\ & \ddots & \\ (1) & & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 12.

Résoudre le système différentiel linéaire $X' = AX + B$ avec $A(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, et $B(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 13. *intégrale de Gauss*

Résoudre le système différentiel réel suivant

$$\begin{cases} x' & = \cos(t)x + \sin(t)y \\ y' & = -\sin(t)x + \cos(t)y \end{cases}$$

Exercice 14. *intégrale de Gauss*

Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x_1' & = (t+3)x_1 + 2x_2 \\ x_2' & = -4x_1 + (t-3)x_2 \end{cases}$$

Exercice 15.

Résoudre le système différentiel linéaire

$$\begin{cases} x' & = x - z \\ y' & = x + y + z \\ z' & = -x - y + z \end{cases}$$

Exercice 16.

On étudie l'équation différentielle définie sur $\mathbb{R}$

$$(E)\colon y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

avec $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Soit x_0 un réel. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que les solutions non nulles de l'équation (E) s'annulent au plus $n-1$ fois dans l'intervalle $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$.

Exercice 17.

Résoudre le système différentiel linéaire

$$\begin{cases} x' &= x + y \\ y' &= -x + 2y + z \\ z' &= x + z \end{cases}$$

Exercice 18.

Soit (E) l'équation différentielle :

$$2xy'' - y' + x^2 y = 0$$

a) Trouver les solutions développables en série entière en 0. On les exprimera à l'aide de fonctions usuelles.

b) À l'aide d'un changement de variables, résoudre l'équation sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sur $\mathbb{R}^{-*}$.

c) En déduire toutes les solutions sur $\mathbb{R}$.

Exercice 19.

résoudre sur $]-1, 1[$ l'équation

$$4(1-t^2)y''(t) - 4ty'(t) + y(t) = 0$$

en recherchant les fonctions développables en série entière.

Exercice 20.

a) Résoudre l'équation différentielle $xy''+2y'-xy = 0$ en recherchant une solution f développable en série entière. Trouver alors toutes les solutions en posant $y(x) = f(x)z(x)$ (méthode d'abaissement de l'ordre).

b) Même question pour l'équation différentielle $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$.

Exercice 21.

a) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation

$$(1+t^2)y''(t) + 4ty'(t) + 2y(t) = 0$$

en recherchant les séries entières solutions.

b) Résoudre ensuite

$$(1+t^2)y''(t) + 4ty'(t) + 2y(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

Exercice 22.

Soit E le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des applications de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. On définit $\Phi : E \to E$ par

$$\Phi(f) : t \mapsto f'(t) + tf(t)$$

a) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de Φ.

b) Faire de même pour Φ^2.

c) En déduire les solutions de l'équation différentielle

$$y'' + 2xy' + (x^2+3)y = 0$$

Exercice 23.

Déterminer une équation différentielle homogène du second ordre admettant comme solutions les fonctions $f : x \mapsto \mathrm{e}^{x^2}$ et $g : x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$.

Exercice 24.

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue intégrable. On considère l'équation $y'' + f(t)y = 0$.

a) Soit y une solution bornée de l'équation. Montrer que y tend vers 0 en $+\infty$.

b) Soient y_1, y_2 deux solutions. Montrer que leur wronskien $W(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}$ est constant.

c) En déduire que l'équation admet une solution non bornée.

Exercice 25.

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice complexe. Montrer que toutes les solutions du système $X'(t) = AX(t)$ tendent vers 0 en $+\infty$ si, et seulement si les valeurs propres de A sont toutes de partie réelle strictement négative.

Exercice 26. ⋆

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Démontrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(i) A est antisymétrique

(ii) toutes les solutions de l'équation $X' = AX$ sont de norme constante.

Exercice 27. ⋆

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente, et pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$B(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} t^k N^k, \qquad S(t) = \mathrm{e}^{B(t)}$$

a) Calculer $B'(t)$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.

b) En déduire que S'' est la fonction nulle et que $\mathrm{e}^{B(1)} = I_n + N$.

c) En déduire que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$, il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $\mathrm{e}^B = \lambda I_n + N$.

d) À l'aide d'une réduction via les sous-espaces caractéristiques, montrer que $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est surjective.