#### Chapitre 2

Révisions MP2

Polynôme ca ractéristique.

Diagonalisatio

et trigonalisation

Polynômes d'endomorphismes et

# Réduction des endomorphismes

Lundi 8 septembre 2025

## Table des matières

#### Chapitre 2

Revisions MP2I

Polynôme ca ractéristique.

Diagonalisatio

et trigonalisation .

Polynômes d'endomorphismes et réduction

- Polynôme caractéristique.
- Diagonalisation et trigonalisation
- 3 Polynômes d'endomorphismes et réduction

## Table des matières

Chapitre 2

#### Polynôme caractéristique.

Cas d'une matrice Cas d'un endomorphisme

Propriété fondamentale Multiplicité d'un

Multiplicité d'ui valeur propre.

et

Polynômes d'endomorphismes et Polynôme caractéristique.

Diagonalisation et trigonalisation

3 Polynômes d'endomorphismes et réduction

#### Chapitre 2

#### Polynôme caractéristique.

matrice Cas d'un

Cas d'un endomorphisn

Propriété fondamentale

fondamentale

valeur propre.

Diagonalisati

et trigonalisation

Polynômes d'endomorphismes et

# 1. Polynôme caractéristique.

# 1. Polynôme caractéristique.

#### Chapitre 2

Polynôme ca ractéristique

#### ractéristique Cas d'une matrice

Cas d'un endomorphism

### Propriété

fondamentale Multiplicité d'u

### Diagonalisat

et

trigonalisation

Polynômes d'endomorphismes et

# 1.1. Cas d'une matrice

## 1.1. Cas d'une matrice

Chapitre 2

Polynôme caractéristique. Cas d'une

matrice Cas d'un

Propriété fondamentale Multiplicité d'une

Multiplicité d'un valeur propre.

et

Polynômes

d'endomor phismes et réduction

### Proposition 1

 $\lambda \in \mathbb{K}$  est une valeur propre de la matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  ssi  $\lambda$  est solution de l'équation  $\det(M - \lambda I_n) = 0$ .

### Proposition 2

Si  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , la fonction  $x \mapsto \det(xI_n - M)$  est polynomiale à coefficients dans  $\mathbb{K}$ .

## 1.1. Cas d'une matrice

Chapitre 2

Cas d'une matrice

Cas d'un endomorphism

fondamentale

Multiplicité d'une valeur propre.

Diagonalisatio

trigonalisatio

Polynômes d'endomorphismes et

### Definition 1

Si  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , on appelle polynôme caractéristique de M, le polynôme  $\chi_M \in \mathbb{K}[X]$  défini par la relation :

$$\forall x \in \mathbb{K}, \quad \chi_M(x) = \det(xI_n - M)$$

### Remarque:

Plus directement :  $\chi_M = \det(XI_n - M) \in \mathbb{K}[X]$ 

## 1.1. Cas d'une matrice

Chapitre 2

### Proposition 3

Pour  $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,  $\chi_M$  est unitaire et de degré n. De plus les coefficients associés aux degrés n-1 et 0 sont respectivement  $-\mathrm{tr}(M)$  et  $(-1)^n\det(M)$ :

$$\chi_M = X^n - (\operatorname{tr} M) X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(M).$$

## Proposition 4

Si  $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est triangulaire (supérieure ou inférieure) et en notant  $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$  les coefficients diagonaux, on a :

$$\chi_{\mathcal{T}} = \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)$$

Polynôme caactéristique. Cas d'une

Cas d'un endomorphism Propriété

fondamentale Multiplicité d'une valeur propre.

et trigonalisation

Polynômes d'endomorphismes et réduction

# 1. Polynôme caractéristique.

#### Chapitre 2

Polynôme caractéristique.

#### Cas d'un endomorphisme.

Propriété fondamentale Multiplicité d'une

Diagonalisati

et

Polynômes d'endomorphismes et 1.2. Cas d'un endomorphisme.

# 1.2. Cas d'un endomorphisme.

Chapitre 2

Polynôme caractéristique. Cas d'une

Cas d'un endomorphisme.

fondamentale Multiplicité d'une valeur propre.

Diagonalisation et trigonalisation

Polynômes d'endomorphismes et réduction

### Proposition 5

Pour tout couple  $(M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$  de matrices semblables,  $\chi_M = \chi_N$ .

### Definition 2

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . On appelle *polynôme caractéristique* de u, et on note  $\chi_u$ , le polynôme caractéristique de sa matrice représentative dans n'importe quelle base.

### Remarque:

Polynôme associé à la fonction polynomiale  $x \mapsto \det(xId - u)$ .

# 1.2. Cas d'un endomorphisme.

Chapitre 2

Polynôme caractéristique. Cas d'une

Cas d'un endomorphisme.

fondamentale Multiplicité d'une

Multiplicité d'une valeur propre.

Diagonalisatio et

Polynômes d'endomorphismes et

### Proposition 6

Pour  $u \in \mathcal{L}(E)$ ,  $\chi_u$  est unitaire et de degré n. De plus les coefficients associés aux degrés n-1 et 0 sont respectivement  $-\mathrm{tr}(u)$  et  $(-1)^n \det(u)$ :

$$\chi_u = X^n - \operatorname{tr}(u)X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(u).$$

### Proposition 7

Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u et soit v l'endomorphisme de F induit par u sur F. Alors  $\chi_v$  divise  $\chi_u$ .

# 1. Polynôme caractéristique.

### Chapitre 2

Polynôme ca ractéristique

Cas d'une

Cas d'un endomorphisr

#### Propriété fondamentale

Multiplicité d'une

Diagonalisati

et

Polynômes d'endomor-

# 1.3. Propriété fondamentale

# 1.3. Propriété fondamentale

Chapitre 2

Propriété fondamentale

Polynômes d'endomor phismes et

# Proposition 8

Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .  $\lambda \in \mathbb{K}$  est une valeur propre de M si, et seulement si,  $\lambda$  est racine de  $\chi_M$ . Autrement dit,  $\operatorname{Sp}(M)$  est exactement l'ensemble des racines (dans  $\mathbb{K}$ ) de  $\chi_M$ .

### Exemple:

Si  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est triangulaire, alors son spectre est l'ensemble des coefficients diagonaux.

## Remarque :

Préciser le corps  $\mathbb K$  sur lequel on travaille :

 $\operatorname{Sp}_{\mathbb{Q}}(M) \subset \operatorname{Sp}_{\mathbb{R}}(M) \subset \operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}(M).$ 

# 1.3. Propriété fondamentale

Chapitre 2

ractéristi Cas d'une matrice

Cas d'un endomorphis

Propriété fondamentale

Multiplicité d'une valeur propre.

Diagonalisation

Polynômes d'endomorphismes et

### Proposition 9

Soit E un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n non nulle, et  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Alors  $\lambda \in \mathbb{K}$  est valeur propre de u si, et seulement si,  $\lambda$  est une racine de  $\chi_u$ .

### Remarque:

 $deg(\chi_u) = n$ : au plus n valeurs propres.

# 1. Polynôme caractéristique.

#### Chapitre 2

Multiplicité d'une

### valeur propre

1.4. Multiplicité d'une valeur propre.

# 1.4. Multiplicité d'une valeur propre.

Chapitre 2

Polynôme caractéristique. Cas d'une

Cas d'un endomorphism Propriété

fondamentale Multiplicité d'une

valeur propre.

Diagonalisatio et trigonalisation

Polynômes d'endomorphismes et réduction

### Definition 3

On appelle *multiplicité* d'une valeur propre  $\lambda$  de u sa multiplicité en tant que racine de  $\chi_u$ : c'est le plus grand entier k tel que  $(X - \lambda)^k$  divise  $\chi_u$ .

### Remarque:

$$\chi_u = (X - \lambda)^m P$$
, avec  $P(\lambda) \neq 0$ .

# 1.4. Multiplicité d'une valeur propre.

Chapitre 2

Polynôme caractéristique. Cas d'une matrice

Cas d'un endomorphism

fondamentale Multiplicité d'une

Multiplicité d'une valeur propre.

Diagonalisatio

Polynômes d'endomorphismes et

### Proposition 10

Pour toute valeur propre  $\lambda$  de u de multiplicité  $m_{\lambda} \geqslant 1$  et de sous-espace propre associé  $E_{\lambda}$ , on a :

$$\dim(E_{\lambda}) \leqslant m_{\lambda}$$
.

## Table des matières

Chapitre 2

Diagonalisation

trigonalisation

- Diagonalisation et trigonalisation

#### Chapitre 2

Diagonalisation

trigonalisation

# 2. Diagonalisation et trigonalisation

# 2. Diagonalisation et trigonalisation

#### Chapitre 2

Polynôme caractéristique.

Diagonalisation

trigonalisation

#### Endomorphisme diagonalisab<u>le</u>

Matrice

diagonalisable

Caractérisation par les

multiplicités

effective.

trigonalisable.

trigonalisabl

Caractérisation des

endomorphisme trigonalisables.

produit des valeurs propres d'un endomorphism

Polynômes d'endomor-

# 2.1. Endomorphisme diagonalisable

# 2.1. Endomorphisme diagonalisable

Chapitre 2

Polynôme ca ractéristique

Diagonalisation

trigonalisation

Endomorphisme

diagonalisable Matrice

diagonalisab

Caractérisation par les multiplicités

effective.

Endomorphism trigonalisable.

Caractérisat

des endomorphism trigonalisables

Somme et produit des valeurs propres d'un

endomorphisn trigonalisable Polynômes

#### Definition 4

On dit que u est diagonalisable lorsqu'il existe une base de E dans laquelle la matrice représentative de u est diagonale.

### Remarque:

Base : vecteurs propres ; éléments diagonaux : valeurs propres

# 2.1. Endomorphisme diagonalisable

Chapitre 2

Polynôme ca ractéristique.

Diagonalisation et

trigonalisation

Endomorphisme diagonalisable

Matrice

diagonalisabl

Caractérisation par les

multiplicités Diagonalisatio

effective. Endomorphism

trigonalisable Matrice

trigonalisable Caractérisation

des endomorphism trigonalisables

Somme et produit des valeurs propres d'un endomorphism

d'un endomorphisn trigonalisable

Polynômes d'endomor-

### Proposition 11

u est diagonalisable **ssi** la somme (directe) de ses sous-espaces propres est égale à E.

### Corollaire 1

u est diagonalisable **ssi** la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à  $\dim(E)$ .

# 2.1. Endomorphisme diagonalisable

Chapitre 2

ractéristique.

Diagonalisation

trigonalisation

Endomorphisme

### diagonalisable

diagonalisable

Caractérisation par les multiplicités

effective.

Endomorphism trigonalisable.

trigonalisa

des

endomorphism trigonalisables

produit des valeurs propre d'un endomorphisn

Polynômes d'endomor-

## Exemples:

Sauf cas particuliers (lesquels?) :

- Projecteur  $p : \operatorname{Sp}(p) = \{0, 1\}, E_0 = \operatorname{Ker}(p)$  et  $E_1 = \operatorname{Ker}(p I_F) = \operatorname{Im}(p)$ .
- Symétrie  $s: \operatorname{Sp}(s) = \{-1, 1\}, \ E_{-1} = \operatorname{Ker}(s + I_E)$  et  $E_1 = \operatorname{Ker}(s I_E).$

# 2. Diagonalisation et trigonalisation

#### Chapitre 2

Polynôme ca-

Diagonalisation

et trigonalisation

Endomorphisme diagonalisable

#### Matrice diagonalisable

Caractérisation par les

multiplicités

effective.

trigonalisable.

Matrice trigonalisal

Caractérisation des

endomorphisme trigonalisables.

produit des valeurs propres d'un endomorphisme

Polynômes d'endomor-

# 2.2. Matrice diagonalisable

# 2.2. Matrice diagonalisable

Chapitre 2

Diagonalisation

trigonalisation

#### Matrice diagonalisable

Polvnômes

### Definition 5

On dit qu'une matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est diagonalisable lorsqu'elle est semblable à une matrice diagonale.

### Remarque:

Identification  $M \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ : interprétation géométrique par un changement de base.

# 2.2. Matrice diagonalisable

Chapitre 2

trigonalisation

#### Matrice diagonalisable

Polvnômes

## Proposition 12

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n > 0 muni d'une base quelconque  $\mathcal{B}$  et soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ , représenté par  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  dans  $\mathcal{B}$ . Alors u est diagonalisable si, et seulement si, M est diagonalisable.

# 2. Diagonalisation et trigonalisation

### Chapitre 2

Polynôme caractéristique.

Diagonalisation

et trigonalisation

Endomorphisme diagonalisable

latrice

Caractérisation

#### par les multiplicités

Diagonalisation effective.

Endomorphisn trigonalisable.

Matrice

Caractérisatio

des endomorphisme

trigonalisables

produit des valeurs propres d'un

Polynôme

# 2.3. Caractérisation par les multiplicités

# 2.3. Caractérisation par les multiplicités

Chapitre 2

Diagonalisation

trigonalisation

Caractérisation par les multiplicités

Polvnômes

### Proposition 13

Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) u est diagonalisable.
- (ii)  $\chi_{\mu}$  est scindé sur  $\mathbb{K}$  et pour toute valeur propre  $\lambda$  de multiplicité  $m_{\lambda}$ , dim $(E_{\lambda}) = m_{\lambda}$ .

### Remarque:

u diagonalisable  $\Rightarrow \chi_u$  scindé mais réciproque fausse.

# 2.3. Caractérisation par les multiplicités

Chapitre 2

ractéristique

Diagonalisation

trigonalisation Endomorphisme

Matrice diagonalisable

Caractérisation

#### Caractérisation par les multiplicités

effective.

Endomorphism

trigonalisable Matrice

Caractérisatio

des endomorphism trigonalisables.

Somme et produit des valeurs propres d'un endomorphism

trigonalisable

### Proposition 14

Si  $\chi_u$  est *simplement* scindé sur  $\mathbb{K}$ , autrement dit si u admet n valeurs propres distinctes, alors u est diagonalisable.

### Remarque:

 $\chi_u$  simplement scindé  $\Rightarrow u$  diagonalisable mais réciproque fausse.

# 2. Diagonalisation et trigonalisation

#### Chapitre 2

Polynôme caractéristique.

Diagonalisation

trigonalisation

Endomorphisme diagonalisable

Matrice diagonalisable

Caractérisation par les

### Diagonalisation effective.

Endomorphisn

trigonalisable.

Caractérisation

des endomorphisme

endomorphisme trigonalisables. Somme et

produit des valeurs propres d'un endomorphisme

Polynômes d'endomor2.4. Diagonalisation effective.

# 2.4. Diagonalisation effective.

#### Chapitre 2

Polynôme caractéristique. Diagonalisation

et trigonalisation

Endomorphisme diagonalisable

Matrice diagonalisabl

Caractérisat par les

Diagonalisation

### effective.

Endomorphis trigonalisable

trigonalisable.
Caractérisation

endomorphisme trigonalisables. Somme et

Somme et produit des valeurs propres d'un endomorphisme trigonalisable

Polynômes d'endomor-

### Méthode:

- $\chi_u$  non scindé  $\Rightarrow$  non diagonalisable
- $\chi_u$  scindé, avec  $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \neq 2$  à 2 :
  - $\lambda_i$  racine simple  $\Rightarrow E_i$  droite vectorielle
  - $\lambda_i$  racine multiple de multiplicité  $m_i$ : vérifier que  $\dim(E_i) = m_i$ . On doit chercher  $\operatorname{rg}(u - \lambda_i Id)$ .

### Remarques:

- Pour diagonaliser : trouver  $m_i$  vecteurs indépendants dans  $E_i$
- Cas d'une matrice : dépend du corps d'étude.

## Exemple:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$
: diagonalisable dans  $\mathbb{R}$ ? Dans  $\mathbb{C}$ ?

# 2. Diagonalisation et trigonalisation

### Chapitre 2

Diagonalisation

trigonalisation

#### Endomorphisme trigonalisable.

2.5. Endomorphisme trigonalisable.

# 2.5. Endomorphisme trigonalisable.

Chapitre 2

## ractéristique. Diagonalisation

Diagonalisatio et ...:----!:---:

trigonalisation Endomorphisme

Matrice

diagonalisabl

Caractérisation par les multiplicités

Endomorphisme trigonalisable.

trigonalisable Caractérisation

des endomorphisme trigonalisables.

Somme et produit des valeurs propres d'un endomorphism

Polynômes d'endomor-

### Definition 6

On dit que u est trigonalisable s'il existe une base de E dans laquelle la matrice représentative de u est triangulaire.

## Remarques:

- Vecteurs propres dans une base trigonalisante?
- Triangulaire supérieure vs inférieure

# 2. Diagonalisation et trigonalisation

#### Chapitre 2

Polynôme caractéristique.

Diagonalisation

et

trigonalisation
Endomorphisme

Matrice Liagonalicable

diagonalisable

Caractérisation par les

multiplicités Diagonalisation

Endomorphism

#### Matrice

trigonalisable. Caractérisation des

des endomorphisme trigonalisables.

produit des valeurs propres d'un endomorphisme

Polynômes d'endomor2.6. Matrice trigonalisable.

# 2.6. Matrice trigonalisable.

Chapitre 2

ractéristique.

Diagonalisation

et trigonalisation

Endomorphisme diagonalisable

Matrice diagonalisab

Caractérisation par les multiplicités

effective.

Endomorphism trigonalisable.

#### Matrice trigonalisable.

Caractérisation des endomorphisme trigonalisables.

Somme et produit des valeurs propres d'un endomorphism

Polynômes d'endomor-

### Definition 7

On dit qu'une matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est *trigonalisable* si elle est semblable à une matrice triangulaire.

### Remarques:

- Identification  $M \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$  : interprétation géométrique par un changement de base.
- Triangulaire supérieure vs inférieure.

# 2. Diagonalisation et trigonalisation

#### Chapitre 2

Polynôme caractéristique.

### Diagonalisation

trigonalisation Endomorphisme

Matrice

diagonalisabl

Caractérisation par les

Diagonalisation

Endomorphism

trigonalisable.

Matrice trigonalisab

#### Caractérisation des endomorphismes trigonalisables.

Somme et produit des valeurs propres d'un

Polynômes d'endomor2.7. Caractérisation des endomorphismes trigonalisables.

# 2.7. Caractérisation des endomorphismes trigonalisables.

### Chapitre 2

ractéristique.

Diagonalisation

Diagonalisati et

trigonalisation Endomorphisme

diagonalisable Matrice

diagonalisab

Caractérisation par les multiplicités

Diagonalisatio

Endomorphism trigonalisable.

Matrice

Caractérisation des endomorphismes trigonalisables

#### trigonalisables. Somme et produit des

produit des valeurs propres d'un endomorphism trigonalisable

Polynômes d'endomor-

### Theoreme 1

 $u \in \mathcal{L}(E)$  (resp.  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ) est trigonalisable si, et seulement si, son polynôme caractéristique  $\chi$  est *scindé*.

### Remarques:

- Si E est un C-espace vectoriel :
- Cas d'une matrice :

# 2. Diagonalisation et trigonalisation

Chapitre 2

Polynôme caractéristique.

Diagonalisation

trigonalisation Endomorphisme

Matrice

liagonalisab

Caractérisation par les

multiplicités Diagonalisatio

ettective. Endomorphism

Endomorphisi trigonalisable

Matrice

Caractérisation des

ues endomorphisme trigonalisables.

Somme et produit des valeurs propres d'un endomorphisme trigonalisable

Polynômes d'endomor2.8. Somme et produit des valeurs propres d'un endomorphisme trigonalisable

# 2.8. Somme et produit des valeurs propres d'un endomorphisme trigonalisable

Chapitre 2

Diagonalisation

trigonalisation

produit des endomorphisme

Somme et valeurs propres

Proposition 15

Si  $u \in \mathcal{L}(E)$  admet un polynôme caractéristique  $\chi$  scindé sur  $\mathbb{K}$ , de racines  $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ , alors:

$$\operatorname{tr}(u) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{i}$$
 et  $\operatorname{det}(u) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_{i}$ .

# Remarques:

- Tenir compte des multiplicités!
- Toujours valable pour une matrice en tenant compte de toutes les racines complexes!

# 2.8. Somme et produit des valeurs propres d'un endomorphisme trigonalisable

Chapitre 2

Diagonalisation

trigonalisation

valeurs propres endomorphisme trigonalisable

Somme et produit des

## Proposition 16

On suppose  $\chi$  scindé sur  $\mathbb{K}$ , de la forme

$$\chi = \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{m_i},$$

avec  $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{K}$  distincts deux à deux. Alors :

$$\operatorname{tr}(u) = \sum_{i=1}^{p} m_i \lambda_i$$
 et  $\operatorname{det}(u) = \prod_{i=1}^{p} \lambda_i^{m_i}$ .

# Table des matières

#### Chapitre 2

Polynôme ca ractéristique

Diagonalisation

trigonalisation

#### Polynômes d'endomorphismes et réduction

Polynômes d'un endomorphisme, d'une matrice

Idéal annulateur et polynôme minimal

minimal
Polynôme

annulateur et valeurs propres Lemme de

des noyau: Polynôme

diagonalisatio

Diagonalisation d'un endomorphism induit Polynôme

- Polynôme caractéristique.
- Diagonalisation et trigonalisation
- 3 Polynômes d'endomorphismes et réduction

#### Chapitre 2

Polynôme ca-

Diagonalisation

et trigonalisation

Polynômes d'endomorphismes et réduction

Polynômes d'un endomorphisme,

Idéal annulateur et polynôme

et polynôme minimal

annulateur et valeurs propre

Polynôme

annulateur et diagonalisation

l'un endomorphism

Polynôme annulateur et

# 3. Polynômes d'endomorphismes et réduction

#### Chapitre 2

Diagonalisation

trigonalisation

#### Polynômes d'un endomorphisme. d'une matrice

3.1. Polynômes d'un endomorphisme, d'une matrice

# 3.1. Polynômes d'un endomorphisme, d'une matrice

Chapitre 2

Polynôme caractéristique.

Diagonalisation et trigonalisation

Polynômes d'endomorphismes et réduction

#### Polynômes d'un endomorphisme, d'une matrice

Idéal annulateur et polynôme minimal Polynôme

annulateur et valeurs propre

décompositio des noyaux

annulateur et diagonalisation Diagonalisation d'un

endomorphisme induit Polynôme annulateur et

### Definition 8

- On appelle polynôme en u tout endomorphisme de la forme P(u) avec  $P \in \mathbb{K}[X]$ . L'ensemble des polynômes en u est noté  $\mathbb{K}[u]$ .
- On appelle *polynôme en A* toute matrice de la forme P(A) avec  $P \in \mathbb{K}[X]$ . L'ensemble des polynômes en A est noté  $\mathbb{K}[A]$ .

### Remarques:

• Si 
$$P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$$
,  $P(u) = \sum_{k=0}^{d} u^k$  et  $P(A) = \sum_{k=0}^{d} a_k A^k$ .

• Conventions :  $u^0 = I_E$  et  $A^0 = I_n$ 

• Rappel : 
$$u^k = \underbrace{u \circ \cdots \circ u}_{k \text{ fois}}$$

#### Chapitre 2

Polynôme caractéristique.

Diagonalisation et

trigonalisation

Polynômes d'endomor-

Polynômes d'ui endomorphisme

#### Idéal annulateur et polynôme minimal

Polynôme annulateur et

valeurs propre

décompos des noyai

> Polynôme annulateur et

diagonalisatio

d'un endomorphisn induit

Polynôme annulateur et 3.2. Idéal annulateur et polynôme minimal

Chapitre 2

Diagonalisation

#### Idéal annulateur et polynôme minimal

# Proposition 17

L'application  $P \mapsto P(u)$  est un morphisme d'algèbre de  $\mathbb{K}[X] \to \mathcal{L}(E)$ , d'image  $\mathbb{K}[u]$ .

### Corollaire 2

 $\mathbb{K}[u]$  est une sous-algèbre commutative de  $\mathcal{L}(E)$ .

### Remarques:

- Unique morphisme vérifiant  $X \mapsto u$
- Structure du noyau?

Chapitre 2

Polynôme caractéristique.

Diagonalisation et trigonalisation

Polynômes d'endomorphismes et réduction

Polynômes d'un endomorphisme, d'une matrice

#### Idéal annulateur et polynôme minimal

Polynôme annulateur et valeurs propre

Lemme de décomposition des noyaux

annulateur et diagonalisation

Diagonalisatio l'un endomorphism nduit Polynôme

### Definition 9

- On dit que  $P \in \mathbb{K}[X]$  est un *polynôme annulateur* de *u* lorsque P(u) est l'endomorphisme nul.
- On apelle *idéal annulateur* l'ensemble des polynômes annulateurs de *u*.

# Exercice 1

Adapter les trois énoncés précédents au cas de  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

Chapitre 2

Polynôme caractéristique.

Diagonalisation et trigonalisation

Polynômes

d'endomor phismes et réduction

Polynômes d'un endomorphisme d'une matrice

Idéal annulateur et polynôme minimal

Polynôme annulateur et valeurs propre

décomposition des noyaux Polynôme

annulateur et diagonalisation Diagonalisation d'un endomorphisme induit

# Proposition 18

Si u est représenté par  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  dans une base quelconque  $\mathcal{B}$ , on a pour tout  $P \in \mathbb{K}[X]$ :

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(P(u)) = P(A)$$

En particulier, A et u ont le même idéal annulateur.

### Corollaire 3

Si A et B sont deux matrices semblables et  $P \in \mathbb{K}[X]$ , P(A) et P(B) sont semblable.

# Remarque:

La relation de similitude peut s'exprimer avec la même matrice de passage

Chapitre 2

Diagonalisation trigonalisation

Polynômes

#### Idéal annulateur et polynôme minimal

#### Lemme

E étant de dimension finie, il existe toujours un polynôme annulateur non nul pour u.

# Proposition 19

- a) L'idéal annulateur de u est engendré par un unique polynôme unitaire de degré  $d \ge 1$ .
- **b)** La restriction à  $\mathbb{K}_{d-1}[X]$  du morphisme d'algèbre  $P \mapsto P(u)$ réalise un isomorphisme de  $\mathbb{K}_{d-1}[X]$  sur  $\mathbb{K}[u]$ .
- c) La famille  $(u^k)_{0 \le k \le d-1}$  est une base de  $\mathbb{K}[u]$ .

Chapitre 2

Diagonalisation trigonalisation

#### Idéal annulateur et polynôme minimal

### Definition 10

On appelle polynôme minimal de u l'unique générateur unitaire de l'idéal annulateur de u: C'est un polynôme annulateur de u de degré minimal. On le note  $\mu_{\mu}$  ou  $\pi_{\mu}$ .

### Remarques:

- Autres polynômes annulateurs?
- Décomposition de P(u) dans la base  $(I_1, u, \dots, u^{d-1})$ ?

#### Chapitre 2

Diagonalisation

trigonalisation

#### Polynôme annulateur et

valeurs propres

3.3. Polynôme annulateur et valeurs propres

# 3.3. Polynôme annulateur et valeurs propres

Chapitre 2

Polynôme ca-

. Diagonalisation

et trigonalisation

Polynômes d'endomor

d'endomorphismes et réduction Polynômes d

Polynômes d'un endomorphisme, d'une matrice Idéal annulateur et polynôme minimal

Polynôme annulateur et valeurs propres

décomposition des noyaux

annulateur et diagonalisation Diagonalisation

endomorphisme induit Polynôme annulateur et

#### Lemme

Soit  $x \in E$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$  tels que  $u(x) = \lambda x$ . Alors pour tout  $P \in \mathbb{K}[X]$ ,  $P(u)(x) = P(\lambda)x$ .

### Proposition 20

Si P annule u, toute valeur propre de u est racine de P.

### Remarque:

Attention aux racines superflues.

# Exemples:

- Cas d'un projecteur p :
- Cas d'une symétrie s :

# 3.3. Polynôme annulateur et valeurs propres

Chapitre 2

Diagonalisation

Polynôme annulateur et valeurs propres

# Proposition 21

 $\lambda \in \mathbb{K}$  est valeur propre de *u* ssi  $\lambda$  est une racine du polynôme minimal  $\mu_{\mu}$ .

# Remarque:

 $\chi_{\mu}$  et  $\mu_{\mu}$  ont les mêmes racines . . .

### Exercice 2

Montrer qu'une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est inversible **ssi** il existe un polynôme annulateur P tel que  $P(0) \neq 0$ . Expliquer alors comment écrire  $A^{-1}$  comme un polynôme en A.

#### Chapitre 2

Diagonalisation

trigonalisation

#### Lemme de décomposition des noyaux

3.4. Lemme de décomposition des noyaux

# 3.4. Lemme de décomposition des noyaux

Chapitre 2

Polynôme caractéristique.

Diagonalisation et

trigonalisation

d'endomorphismes et réduction

Polynômes d'un endomorphisme d'une matrice

Idéal annulateur et polynôme minimal

annulateur et valeurs propres Lemme de

#### décomposition des noyaux

annulateur et diagonalisation Diagonalisation d'un

#### endomorphisme induit Polynôme annulateur et

### Theoreme 2

Si  $P_1, \ldots, P_r \in \mathbb{K}[X]$  sont premiers entre eux deux à deux, et de produit égal à P, alors

$$\operatorname{Ker}(P(u)) = \bigoplus_{i=1}^{r} \operatorname{Ker}(P_i(u))$$

### Corollaire 4

Soit  $P \in \mathbb{K}[X]$  unitaire scindé,  $P = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{m_i}$ . Alors, si P est annulateur de u, on a :

$$E = \bigoplus_{i=1}^r \operatorname{Ker}(u - \lambda_i I_E)^{m_i}$$

#### Chapitre 2

Diagonalisation

trigonalisation

Polynôme annulateur et

diagonalisation

3.5. Polynôme annulateur et diagonalisation

# 3.5. Polynôme annulateur et diagonalisation

#### Chapitre 2

Diagonalisation trigonalisation

Polynômes réduction

Polynôme

annulateur et diagonalisation

# Proposition 22

Les trois assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) u est diagonalisable;
- Il existe un polynome annulateur de u simplement scindé sur  $\mathbb{K}$ ;
- (iii) Le polynôme minimal  $\mu_{\mu}$  est simplement scindé sur  $\mathbb{K}$ .

### Corollaire 5

Soit  $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$  les valeurs propres de u, deux à deux distinctes. Alors :

$$u$$
 diagonalisable  $\Leftrightarrow \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)$  annulateur

On a dans ces conditions 
$$\mu_u = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)$$
.

#### Chapitre 2

Polynôme caractéristique.

Diagonalisation et

trigonalisation

Polynômes d'endomor-

d'endomorphismes et réduction

Polynômes d'un endomorphisme, d'une matrice

Idéal annulateur et polynôme

minimal Polynôme

annulateur et valeurs propres .

Lemme de

Polynôme annulateur et

diagonalisation Diagonalisation

d'un endomorphisme induit

Polynôme annulateur et 3.6. Diagonalisation d'un endomorphisme induit

# 3.6. Diagonalisation d'un endomorphisme induit

Chapitre 2

Diagonalisation

trigonalisation

Diagonalisation

endomorphisme induit

### Lemme

Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u, et  $u_F$ l'endormorphisme induit par u sur F. Alors  $\mu_{u_{\varepsilon}} \mid \mu_{u_{\varepsilon}}$ 

### Proposition 23

Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u, et  $u_F$ l'endormorphisme induit par u sur F. Alors, si u est diagonalisable, u<sub>F</sub> aussi.

#### Chapitre 2

Polynôme ca

Diagonalisation

trigonalisation

Polynômes d'endomor-

d'endomorphismes et réduction

Polynômes d'un endomorphisme, d'une matrice

Idéal annulateur et polynôme minimal

Polynôme annulateur et

Lemme de

Polynôme annulateur et diagonalisatio

Diagonalisation d'un endomorphisme

Polynôme annulateur et

# 3.7. Polynôme annulateur et trigonalisabilité

# 3.7. Polynôme annulateur et trigonalisabilité

Chapitre 2

Diagonalisation

Polvnôme

annulateur et tri gonolico bilità

# Proposition 24

Les trois assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) u est trigonalisable
- Il existe un polynôme annulateur de u scindé sur  $\mathbb K$  .
- (iii) Le polynôme minimal  $\mu_{\mu}$  est scindé sur  $\mathbb{K}$ .

### Exercice 3

Montrer qu'il existe  $k \in \mathbb{N}$ , tel que  $\chi_{\mu}^{k}$  soit un polynôme annulateur de u.

#### Chapitre 2

Diagonalisation

trigonalisation

# 3.8. Théorème de Cayley-Hamilton

# 3.8. Théorème de Cayley-Hamilton

Chapitre 2

Diagonalisation trigonalisation

### Theoreme 3

(de Cayley-Hamilton) Pour tout  $u \in \mathcal{L}(E)$ , le polynôme caractéristique  $\chi_u$  de u est un polynôme annulateur. Autrement dit :

$$\mu_{u} \mid \chi_{u}$$

### Remarques:

- Comparaison multiplicité de  $\lambda$  dans  $\mu_{\mu}$  et dans  $\chi_{\mu}$ ?
- Application du lemme des novaux? À suivre . . .