Endomorphismes d'un espace euclidien

Lundi 24 novembre 2025

Table des matières

Table des matières

1. Adjoint d'un endomorphisme dans un espace euclidien

1.1. Représentation d'une forme linéaire dans un espace euclidien

Proposition 1

Pour toute forme linéaire $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ il existe un unique vecteur $v \in E$ tel que :

$$\forall x \in E, \quad \varphi(x) = (v|x)$$

L'application $v \mapsto (v|\cdot)$ réalise un isomorphisme de E sur $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$.

Remarques :

- φ et v ont les mêmes composantes dans $\mathcal{B}$ orthonormale : Matrice ligne $L = V^\top$
- Si $\mathcal{B}$ quelconque : $L = V^\top M$ avec $M = \big((e_i|e_j)\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

1.2. Définition et propriétés de l'adjoint

Definition 1

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On appelle *adjoint* de u, et on note u^*, l'application qui à tout $y \in E$ associe le représentant de la forme linéaire $x \mapsto \big(y|u(x)\big)$. l'adjoint u^* de u est donc défini par la relation fondamentale :

$$\forall x, y \in E, \quad \big(u^*(y)|x\big) = \big(y|u(x)\big)$$

Remarque :

On écrira plutôt :

$$\forall x, y \in E, \quad \big(u(x)|y\big) = \big(x|u^*(y)\big)$$

1.2. Définition et propriétés de l'adjoint

Proposition 2

a) Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, $u^* \in \mathcal{L}(E)$.

b) $u \mapsto u^*$ est linéaire : élément de $\mathcal{L}\big(\mathcal{L}(E)\big)$!

c) $\forall u, v \in \mathcal{L}(E)$, $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$.

d) $\forall u \in \mathcal{L}(E)$, $(u^*)^* = u$: $u \mapsto u^*$ est involutive.

Proposition 3

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $M = \underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(u) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors $v = u^*$ **ssi** $\underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(v) = M^\top$.

Remarques :

- $\big(u(x)|y\big) = \big(x|u^*(y)\big)$ donne matriciellement $(MX)^\top Y = X^\top (M^\top Y)$
- Plus valable si $\mathcal{B}$ pas orthonormée !

Proposition 4

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E stable par u. Alors $F^{\perp}$ est stable par u^*.

Table des matières

2. Matrices orthogonales

2.1. Définition et caractérisations

2.1. Définition et caractérisations

Definition 2

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *orthogonale* lorsque $A^\top A = I_n$.
On note $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathrm{O}(n)$ l'ensemble des matrices orthogonales d'ordre n.

Remarque :

A orthonormale ssi A inversible et $A^{-1} = A^\top$.

Proposition 5

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

(ii) La famille $(C_1, \ldots, C_n)$ des colonnes est orthonormale.

(iii) La famille $(L_1, \ldots, L_n)$ des lignes est orthonormale.

Remarques :

- Produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$.
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}a_{j,k} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i}a_{k,j} = \delta_{i,j}$.

Proposition 6

Soit $\mathcal{B}'$ une base quelconque de E, et soit $P = \mathrm{Mat}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ orthonormale vers la base $\mathcal{B}'$.
Alors $\mathcal{B}'$ est *orthonormale* **ssi** P est *orthogonale*.

Remarques :

- Changement de base pour un vecteur : $X' = P^{-1}X = P^{\top}X$.
- Changement de base pour un endomorphisme :
  $M' = P^{-1}MP = P^{\top}MP$.
  M et M' *orthogonalement semblables*.

2.2. Groupe orthogonal

Proposition 7

$\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Proposition 8

Pour toute matrice $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, $\left|\det(A)\right| = 1$.

Definition 3

Soit $A \in O_n(\mathbb{R})$. On dit que A est orthogonale *positive* ou *directe* lorsque $\det(A) = 1$ et orthogonale *négative* ou *indirecte* lorsque $\det(A) = -1$.

Proposition 9

l'ensemble des matrices orthogonales positives forme un sous-groupe de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, appelé *groupe spécial orthogonal* d'ordre n, et noté $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathrm{SO}(n)$.

Remarques :

- Rappel : *groupe spécial linéaire d'ordre n* $SL_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$
- $SO_n(\mathbb{R}) = \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \cap SL_n(\mathbb{R})$.

2.3. Orientation d'un espace vectoriel réel de dimension finie.

2.3. Orientation d'un espace vectoriel réel de dimension finie.

Proposition 10

$$\mathcal{B}\,\mathcal{R}\,\mathcal{B}' \Leftrightarrow \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') > 0$$

définit une relation d'équivalence sur l'ensemble des bases de E, avec exactement deux classes.

Définition 4

On appelle *orientation* de E l'une de ces deux classes : ensemble des bases appelées *directes*. Les autres sont appelées *indirectes*.
E est alors un espace vectoriel *orienté*.

Exemple :

Orientation canonique de $\mathbb{R}^n$: classe contenant la base canonique.

2.3. Orientation d'un espace vectoriel réel de dimension finie.

Proposition 11

Si E est euclidien orienté, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases orthonormales directes, on a $\det_{\mathcal{B}} = \det_{\mathcal{B}'}$.

Remarque :

$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n)$ est le "volume orienté" d'un "parallèpipède".

Table des matières

3. Isométries vectorielles d'un espace euclidien

3.1. Définition.

Definition 5

Une *isométrie vectorielle* de E est un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant :

$$\forall x \in E\,,\quad \|u(x)\| = \|x\|.$$

Remarque :

On en déduit $d\big(u(x), u(y)\big) = d\big(x, y\big)$ pour tout x, y

3.2. Propriétés et caractérisation

3.2. Propriétés et caractérisation

Proposition 12

Si u est une isométrie vectorielle de E , u est un *automorphisme* de E, et u^{-1} est également une isométrie vectorielle.

Proposition 13

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les trois assertions suivantes sont équivalentes :

(i) u est une isométrie vectorielle ;

(ii) pour tout $x, y \in E$, $\big(u(x)|u(y)\big) = (x|y)$.

(iii) Pour toute base orthonormale $(e_1, \ldots, e_n)$, $\big(u(e_1), \ldots, u(e_n)\big)$ est une base orthonormale.

Remarques :

- en particulier $x \perp y \Rightarrow u(x) \perp u(y)$
- appellation alternative : automorphisme orthogonal.

Proposition 14

u est une isométrie vectorielle **ssi** $u^* = u^{-1}$.

3.3. Caractérisation matricielle - groupe orthogonal

3.3. Caractérisation matricielle - groupe orthogonal

Proposition 15

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, représentée par $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans la base (orthonormale) $\mathcal{B}$. Alors u est une isométrie vectorielle **ssi** M est orthogonale.

Proposition 16

L'ensemble des *isométries vectorielles* de E, muni de la loi $\circ$, constitue un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$. Il est appelé *groupe orthogonal* de E, et noté $\mathrm{O}(E)$.

Remarque :

$\underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}} : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ induit un isomorphisme $O(E) \to O_n(\mathbb{R})$.

Proposition 17

Pour toute isométrie vectorielle $u \in O(E)$, $\left|\det(u)\right| = 1$.

Remarques :

- $\det(u) = 1$: isométrie *directe*
- $\det(u) = -1$: isométrie *indirecte*

Proposition 18

L'ensemble des isométries vectorielles de déterminant 1 forme un sous-groupe de $O(E)$, appelé *groupe spécial orthogonal* de E et noté $SO(E)$.

Remarque :

Isomorphisme $\underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}} : SO(E) \to SO_n(\mathbb{R})$.

3.4. Isométries vectorielles en dimension 2

Proposition 19

Soit $M \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$. Il existe un unique $\theta \in]-\pi, \pi]$, tel que :

- Si $\det(M) = 1$ (*ie.* $M \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$) :

$$M = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

- Si $\det(M) = -1$ (*ie.*. $M \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R}) \backslash \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$:

$$M = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Remarque :

cas $\det(M) = -1$: $\chi_M = X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$ donc M diagonalisable.

Proposition 20

L'application $R : t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$ est un morphisme surjectif du groupe $(\mathbb{R}, +)$ sur le groupe $(\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}), \times)$, de noyau $2\pi\mathbb{Z}$.

Remarque :

S'identifie au morphisme $t \mapsto e^{it}$, via l'isomorphisme $x + iy \mapsto \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$

Corollaire 1

Le groupe $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ est commutatif.

Definition 6

Les éléments de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ sont appelées *matrices de rotation*. $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ lui-même est souvent appelé *groupe des rotations*.

Remarques :

- Traduction de $R(\theta)R(\theta') = R(\theta+\theta')$?
- Angle orienté (u, v) ?
- (a, b) image de $(1, 0)$: angle donnée par $\arg(a+ib)$.

3.5. Réduction des isométries

3.5. Réduction des isométries

Proposition 21

Soit $f \in O(E)$ et F un sous-espace de E stable par f. Alors $F^\perp$ est stable par f.

Remarque :

Représentation dans une BON adaptée à $F \oplus F^\perp$.

Proposition 22

Si $f \in O(E)$, $\mathrm{Sp}(f) \subset \{-1, 1\}$.

Exercice 1

Montrer plus généralement que si $f \in O(E)$, $\mathrm{Sp}_{|\mathbb{C}}(f) \subset \mathbb{U}$, autrement dit que toutes les valeurs propres complexes de f sont de module 1.

3.5. Réduction des isométries

Proposition 23

Pour toute isométrie vectorielle directe $f \in \mathrm{SO}(\mathbb{R}^3)$, il existe une droite $\mathcal{D}$ et un réel $\theta \in \mathbb{R}$, telle que :

- pour tout $x \in \mathcal{D}$, $f(x) = x$;
- l'endomorphisme induit par f sur $\mathcal{P} = \mathcal{D}^\perp$ soit la rotation d'angle θ.

Remarques :

- f rotation d'angle θ et d'axe $\mathcal{D}$
- Ambiguité sur le sens de rotation.

Corollaire 2

Pour toute matrice $M \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que M soit orthogonalement semblable à la matrice

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

3.5. Réduction des isométries

Theoreme 1

Soit u une isométrie vectorielle de E. Alors il existe une base orthonormée dans laquelle u est diagonales par blocs, avec des blocs de la forme :

$$(1) \quad , \quad (-1) \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Table des matières

4. Endomorphismes autoadjoints

4.1. Définition et interprétation matricielle.

4.1. Définition et interprétation matricielle.

Definition 7

On dit qu'un endomorphisme u de E est *autoadjoint* lorsque $u^* = u$, donc lorsque pour tout $(x, y) \in E$:

$$\langle u(x)|y\rangle = \langle x|u(y)\rangle$$

On note $\mathcal{S}(E)$ l'ensemble des endomorphismes autoadjoints.

Proposition 24

L'ensemble $\mathcal{S}(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

Remarque :

Appelé aussi endomorphisme *symétrique*.

4.1. Définition et interprétation matricielle.

Proposition 25

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. La base $\mathcal{B}$ étant orthonormée, u est autoadjoint si, et seulement si, $\underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(u)$ est une matrice symétrique.

Proposition 26

Soit f autoadjoint et F un sous-espace de E stable par f. Alors $F^\perp$ est également stable par f.

4.2. Exemple 1 : les projecteurs orthogonaux.

4.2. Exemple 1 : les projecteurs orthogonaux.

Remarque :

$F \oplus F^{\perp} = E$ (dimension finie) : projecteur orthogonal bien défini.

Proposition 27

Soit p un projecteur de E. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(i) p est un projecteur orthogonal ;

(ii) p est autoadjoint.

Exercice 2

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur. Montrer que p est un projecteur othogonal si, et seulement si :

$$\forall x \in E \quad , \|p(x)\| \leqslant \|x\|.$$

4.3. Exemple 2 : les symétries orthogonales.

4.3. Exemple 2 : les symétries orthogonales.

Definition 8

On dit qu'une symétrie $s \in \mathcal{L}(E)$ est une *symétrie orthogonale* lorsque les deux sous-espaces propres $F = \mathrm{Ker}(s - Id)$ et $G = \mathrm{Ker}(s + Id)$ sont orthogonaux.

Remarque :

Symétrie orthogonale s_F bien définie : $s_F = 2p_F - Id$.

4.3. Exemple 2 : les symétries orthogonales.

Proposition 28

Soit $s \in \mathcal{L}(E)$ une symétrie vectorielle. Les trois assertions sont équivalentes :

(i) s est une symétrie orthogonale ;

(ii) s est une isométrie vectorielle ;

(iii) s est autoadjoint

Exercice 3

Montrer que si $u \in \mathcal{L}(E)$ est à la fois une isométrie vectorielle et un endomorphisme autoadjoint, alors c'est nécessairement une symétrie (orthogonale).

4.4. Théorème spectral.

Theoreme 2

Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E. Les trois assertions suivantes sont équivalentes :

(i) u est autoadjoint

(ii) E est somme orthogonale des sous-espaces propres de u.

(iii) u est diagonalisable dans une base orthonormée.

Corollaire 3

Pour toute matrice symétrique $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, il existe une matrice orthogonale $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, et une matrice diagonale réelle D telle que :

$$A = PDP^{-1} = PDP^\top.$$

4.5. Endomorphismes autoadjoints positifs et défini positifs

4.5. Endomorphismes autoadjoints positifs et défini positifs

Definition 9

On dit que $u \in \mathcal{S}(E)$ est autoadjoint *positif* lorsque

$$\forall x \in E, \quad (x|u(x)) \geqslant 0$$

On dit que $u \in \mathcal{S}(E)$ est autoadjoint *défini positif* lorsque

$$\forall x \in E\backslash\{0\}, \quad (x|u(x)) > 0$$

Proposition 29

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\varphi : (x, y) \mapsto \big(x|u(y)\big)$. Alors :

- φ est une forme bilinéaire sur E^2.
- Si $u \in \mathcal{S}(E)$, φ est une forme bilinéaire symétrique.
- Si $u \in \mathcal{S}^+(E)$, φ est une forme bilinéaire symétrique positive.
- Si $u \in \mathcal{S}^{++}(E)$, φ est un produit scalaire.

4.5. Endomorphismes autoadjoints positifs et défini positifs

Definition 10

On dit que $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est symétrique *positive* lorsque :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad X^\top AX \geqslant 0$$

On dit que $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est symétrique *définie positive* lorsque :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\backslash\{0\}, \quad X^\top AX > 0$$

4.5. Endomorphismes autoadjoints positifs et défini positifs

Proposition 30

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et A sa matrice représentative dans une base orthonormée de E. Alors

- $u \in \mathcal{S}^+(E)$ **ssi** $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
- $u \in \mathcal{S}^{++}(E)$ **ssi** $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Proposition 31

Soit $u \in \mathcal{S}(E)$. Alors

- $u \in \mathcal{S}^+(E)$ **ssi** $\mathrm{Sp}(u) \subset [0, +\infty[$.
- $u \in \mathcal{S}^{++}(E)$ **ssi** $\mathrm{Sp}(u) \subset]0, +\infty[$.

Remarque :

Caractérisation analogue pour une matrice symétrique.