Devoir à la maison n$^{\mathrm{o}}$ 5 - MPI*

À rendre le mercredi 26 novembre 2025

Variables aléatoires symétriques à forte dispersion

Dans tout le problème, on fixe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ sur lequel toutes les variables aléatoires considérées sont définies. On utilisera systématiquement la locution « variable aléatoire » pour parler d'une variable aléatoire réelle discrète, et « variable aléatoire entière » pour parler d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}$. On pourra noter :

$$X(\Omega) = \{x_n, n \in I\}$$

où I est un sous-ensemble fini ou dénombrable de $\mathbb{N}$ et $x_n \in \mathbb{R}$ pour tout $n \in I$.

Définition : Dispersion d'ordre α. On fixe un réel $\alpha > 0$. Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire. On dit que X vérifie la condition $(\mathcal{D}_\alpha)$ – dite de dispersion d'ordre α – lorsque, quand n tend vers $+\infty$,

$$\mathbf{P}(|X| \geqslant n) = \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \tag{1}$$

Definition : Variables aléatoires symétriques. On dit que X est symétrique lorsque $-X$ suit la même loi que X, autrement dit lorsque :

$$\forall x \in X(\Omega), \quad \mathbf{P}(X = x) = \mathbf{P}(X = -x). \tag{2}$$

On rappelle le **principe de transfert de l'égalité en loi** :

Étant donné deux variables aléatoires X et Y prenant leurs valeurs dans un même ensemble E, ainsi qu'une application $u : E \to F$, si X et Y suivent la même loi alors $u(X)$ et $u(Y)$ aussi.

Dans tout le sujet, on se donne une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires entières, mutuellement indépendantes, toutes de même loi, symétriques, et vérifiant la condition $(\mathcal{D}_\alpha)$. On *admet* que sous ces conditions la variable X_{n+1} est indépendante de $X_1 + \cdots + X_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$M_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$$

appelée n^{e} moyenne empirique des variables X_k. L'objectif du sujet est d'établir la convergence simple d'une suite de fonctions associées aux variables M_n.

Les trois premières parties du sujet sont totalement indépendantes les unes des autres.

I. Questions de cours

1. Soit X une variable aléatoire. Rappeler la définition de « X est d'espérance finie ». Montrer alors que X est d'espérance finie si et seulement si $|X|$ est d'espérance finie.

2. Soit X une variable aléatoire. Montrer que si X est presque bornée, autrement dit s'il existe un réel $M \geqslant 0$ tel que $\mathbf{P}(|X| \leqslant M) = 1$, alors X est d'espérance finie.

II. Généralités sur les variables aléatoires

3. Soit X une variable aléatoire entière vérifiant $(\mathcal{D}_\alpha)$. Montrer que X n'est pas d'espérance finie, et que X^2 non plus.

4. Soient X une variable aléatoire symétrique, et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction impaire. Montrer que $f(X)$ est symétrique, et que si $f(X)$ est d'espérance finie alors $\mathbf{E}(f(X)) = 0$.

5. Soient X et Y deux variables aléatoires symétriques indépendantes. En comparant la loi de $(-X, -Y)$ à celle de (X, Y), démontrer que $X + Y$ est symétrique.

III. Deux sommes de séries

On fixe ici un nombre complexe z tel que $z \neq 1$ et $|z| \leqslant 1$. On introduit la fonction :

$$L : t \mapsto \int_0^t \frac{z}{1-uz}\mathrm{d}u.$$

6. Montrer que, sur le segment $[0,1]$, la fonction L est convenablement définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$. Donner une expression simple de sa dérivée n^{e} pour tout $n \geqslant 1$.

7. Justifier que pour tout $t \in]0,1]$, on a $1-t \leqslant |1-tz|$, et plus précisément encore que $1-t < |1-tz|$.

8. En déduire successivement que :

$$\int_0^1 \left|\frac{1-t}{1-tz}\right|^n \mathrm{d}t\underset{[}{n} \to +\infty]\longrightarrow 0 \quad \text{et} \quad \int_0^1 \frac{z^{n+1}(1-t)^n}{(1-tz)^{n+1}}\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

9. En déduire, grâce à une formule de Taylor, que $L(1) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}$.

10. Montrer que la fonction :

$$\gamma : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (t,u) & \longmapsto & \left|1+ue^{it}\right| \end{array} \right.$$

est continue. En déduire qu'il existe, pour tout $a \in]0,\pi[$, un réel $m_a > 0$ tel que :

$$\forall (t,u) \in [-a,a]\times[0,1], \quad \left|1+ue^{it}\right| \geqslant m_a.$$

11. Montrer que la fonction :

$$F : t \in]-\pi,\pi[\mapsto \int_0^1 \frac{e^{it}}{1+ue^{it}}\mathrm{d}u$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ et donner une expression de sa dérivée sous la forme d'une intégrale à paramètre.

12. Montrer que :

$$\forall t \in]-\pi,\pi[, \quad F'(t) = -\frac{\tan(t/2)}{2} + \frac{i}{2}$$

et en déduire la valeur de $F(t)$ pour tout $t \in]-\pi,\pi[$.

13. Soit $\theta \in]0,2\pi[$. Déduire des questions précédentes que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n} = -\ln\left(2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(n\theta)}{n} = \frac{\pi-\theta}{2}.$$

IV. Fonction caractéristique d'une variable aléatoire symétrique

On fixe dans cette partie une variable aléatoire symétrique X. On pose :

$$\Phi_X : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \mathbf{E}\left(\cos(tX)\right), \end{array} \right.$$

appelée fonction caractéristique de X.

14. Montrer que Φ_X est bien définie, paire et que : $\forall t \in \mathbb{R}$, $|\Phi_X(t)| \leqslant 1$.

15. En utilisant le théorème du transfert, montrer que Φ_X est continue.

Dans la suite de cette partie, on suppose que X est une variable aléatoire entière symétrique vérifiant la condition $(\mathcal{D}_\alpha)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$R_n := \mathbf{P}(|X| \geqslant n).$$

16. On fixe un réel $t \in]0, 2\pi[$. Montrer successivement que :

$$\Phi_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (R_n - R_{n+1}) \cos(nt)$$

puis :

$$\Phi_X(t) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} R_n \left[\cos(nt) - \cos((n-1)t)\right].$$

On pourra établir au préalable la convergence de la série $\sum_n R_n \cos(nt)$.

17. Montrer qu'il existe un nombre réel C tel que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(R_n - \frac{\alpha}{n}\right) e^{int} \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} C,$$

et en déduire que, quand t tend vers 0^+,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} R_n \cos(nt) = O(\ln(t)) \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} R_n \sin(nt) = \frac{\pi\alpha}{2} + o(1).$$

18. Conclure que, quand t tend vers 0^+,

$$\Phi_X(t) = 1 - \frac{\pi\alpha}{2} t + o(t).$$

La fonction Φ_X est-elle dérivable en 0 ?

V. Convergence simple de la suite des fonctions caractéristiques des variables M_n

19. Soient X et Y deux variables aléatoires symétriques indépendantes. Montrer que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \Phi_{X+Y}(t) = \Phi_X(t)\Phi_Y(t).$$

20. Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, la variable M_n est symétrique, et :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \Phi_{M_n}(t) = \left(\Phi_{X_1}(t/n)\right)^n.$$

21. En déduire que pour tout réel t,

$$\Phi_{M_n}(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \exp\left(-\frac{\pi\alpha|t|}{2}\right).$$

22. La convergence établie à la question précédente est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?

À partir de là, des théorèmes d'analyse de Fourier permettraient de démontrer que la suite $(M_n)_{n\geqslant 1}$ *converge en loi vers une variable de Cauchy de paramètre* $\frac{\pi\alpha}{2}$*, ce qui signifie que pour tout segment* $[a, b]$ *de* $\mathbb{R}$,

$$\mathbf{P}(a \leqslant M_n \leqslant b) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\alpha}{2} \int_a^b \frac{\mathrm{d}u}{u^2 + (\pi\alpha/2)^2}.$$

Un corrigé

Variables aléatoires symétriques à forte dispersion

I. Questions de cours

1. On dit que X est d'espérance finie si la série $\sum_{n\geqslant 0} x_n\mathbf{P}(X = x_n)$ converge absolument, c'est-à-dire si et seulement si la série $\sum_{n\geqslant 0} |x_n|\mathbf{P}(X = x_n)$ converge (une probabilité est positive, donc $|\mathbf{P}(X = x_n)| = \mathbf{P}(X = x_n)$).

Notons que d'après le théorème du transfert, $|X|$ est d'espérance finie si et seulement si la série $\sum_{n\geqslant 0} |x_n|\mathbf{P}(X = x_n)$ converge absolument. Ce qui, d'après le rappel ci-dessus, équivaut au fait que X soit d'espérance finie, d'où le résultat.

2. Sous ces hypothèses, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|x_n|\mathbf{P}(X = x_n) \leqslant M\mathbf{P}(X = x_n)$. En effet, soit $|x_n| \leqslant M$, auquel cas c'est évident, soit $|x_n| > M$, auquel cas $\mathbf{P}(X = x_n) = 0$ (donc chaque membre de l'inégalité est nul, et elle reste vraie) vu que par hypothèse $\mathbf{P}(|X| > M) = 0$, et : $(X = x_n) \subseteq (|X| > M)$.

Or la série $\sum_{n\geqslant 0} M\mathbf{P}(X = x_n)$ converge par σ-additivité d'une probabilité, donc par comparaison de séries à termes positifs la série $\sum_{n\geqslant 0} x_n\mathbf{P}(X = x_n)$ converge absolument : d'où le résultat.

II. Généralités sur les variables aléatoires

3. On rappelle que X est d'espérance finie si et seulement si $|X|$ l'est. Or $|X|$ est à valeurs dans $\mathbb{N}$, et on sait que dans ce cas, $|X|$ est d'espérance finie si et seulement si la série $\sum_{n\geqslant 1} \mathbf{P}(|X| \geqslant n)$ converge. Mais, dans le cas où X vérifie $(\mathcal{D}_\alpha)$, on a : $\mathbf{P}(|X| \geqslant n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\alpha}{n}$ avec $\alpha > 0$, et on sait que la série harmonique $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ est divergente. Donc, par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 1} \mathbf{P}(|X| \geqslant n)$ diverge aussi : ainsi $|X|$ n'est pas d'espérance finie, et X non plus.

On vient de justifier que $|X|$ n'est pas d'espérance finie, donc la série $\sum_{n\geqslant 0} |x_n|\mathbf{P}(X = x_n)$ diverge. Or l'inégalité : $\forall n \in \mathbb{N}$, $(|x_n| - 1)^2 \geqslant 0$ implique : $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n^2 + 1 \geqslant 2|x_n|$, donc d'après le théorème de comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 0} (x_n^2 + 1)\mathbf{P}(X = x_n)$ diverge également, et la série $\sum_{n\geqslant 0} x_n^2\mathbf{P}(X = x_n)$ diverge aussi (en tant que différence de la série divergente $\sum_{n\geqslant 0} (x_n^2 + 1)\mathbf{P}(X = x_n)$ et de la série convergente $\sum_{n\geqslant 0} \mathbf{P}(X = x_n)$). D'après le théorème du transfert, on en déduit que X^2 n'est pas d'espérance finie.

4. Puisque X est symétrique, les variables aléatoires X et $-X$ ont même loi. D'après le principe de transfert de l'égalité en loi (théorème 1 du préambule), $f(X)$ et $f(-X)$ ont aussi même loi. Or $f(-X) = -f(X)$ car f est supposée impaire, donc finalement il en résulte que $f(X)$ et $-f(X)$ ont même loi : cela prouve que $f(X)$ est symétrique.

On suppose que $f(X)$ est d'espérance finie. Puisque $f(X)$ et $-f(X)$ ont même loi, leurs espérances sont égales, donc : $\mathbf{E}\left(f(X)\right) = \mathbf{E}\left(-f(X)\right)$. Or l'espérance est linéaire, donc : $\mathbf{E}\left(f(X)\right) = -\mathbf{E}\left(f(X)\right)$. On en déduit : $\mathbf{E}(f(X)) = 0$.

5. On veut montrer que $X + Y$ est symétrique. On doit montrer :

$$\forall z \in (X + Y)(\Omega), \quad \mathbf{P}(X + Y = z) = \mathbf{P}(-X - Y = z).$$

Soit $z \in (X+Y)(\Omega)$. On a :

$$(X+Y=z) = \bigcup_{x \in X(\Omega)} (X=x, Y=z-x).$$

Donc, par σ-additivité et indépendance des variables aléatoires X et Y :

$$\mathbf{P}(X+Y=z) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbf{P}(X=x, Y=z-x) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbf{P}(X=x)\mathbf{P}(Y=z-x).$$

Or X et Y sont symétriques, donc :

$$\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbf{P}(X=x)\mathbf{P}(Y=z-x) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbf{P}(-X=x)\mathbf{P}(-Y=z-x),$$

et en imitant le raisonnement fait pour $(X+Y)=Z$, on montre que cette somme est égale à $\mathbf{P}(-X-Y=z)$. On a donc montré :

$$\mathbf{P}(X+Y=z) = \mathbf{P}(-X-Y=z),$$

d'où le résultat.

III. Deux sommes de séries

6. L'application $u \mapsto \frac{z}{1-uz}$ est continue sur $[0,1]$ en tant qu'inverse d'une fonction continue ne s'annulant par sur $[0,1]$: en effet, si $u \in [0,1]$, alors $1-uz=0$ si et seulement si $uz=1$, si et seulement si $z \neq 0$ et $u = \frac{1}{z}$; mais comme $|z| \leqslant 1$ par hypothèse, cela implique : $|u| \geqslant 1$. Comme $u \in [0,1]$, ce n'est possible que si $u=1$, mais dans ce cas on a $z=1$: absurde.

Donc, d'après le théorème fondamental de l'analyse, $L : t \mapsto \displaystyle\int_0^t \frac{z}{1-uz}\mathrm{d}u$ est de classe C^1 sur $[0,1]$, et on a :

$$\forall t \in [0,1], \quad L'(t) = \frac{z}{1-tz}.$$

En tant que fraction rationnelle ne s'annulant par sur $[0,1]$, l'application L' est donc de classe C^∞ sur $[0,1]$, et L l'est également. Une récurrence facile permet d'obtenir :

$$\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\},\ \forall t \in [0,1], \quad L^{(n)}(t) = \frac{(n-1)!z^n}{(1-tz)^n}.$$

7. Soit $t \in]0,1]$. D'après l'inégalité triangulaire renversée, on a :

$$||1| - |tz|| \leqslant |1-tz|,$$

or $|1| - |tz| = 1 - t|z| \geqslant 0$ (en effet : $t|z| \leqslant t \leqslant 1$), donc l'inégalité ci-dessus devient : $1-t|z| \leqslant |1-tz|$. Or $t|z| \leqslant t$, donc $1-t \leqslant 1-t|z|$. On en déduit : $1-t \leqslant |1-tz|$.

Pour montrer qu'on a une inégalité stricte : $1-t < |1-tz|$, nous allons supposer qu'il y a égalité, et en déduire une contradiction. Tout d'abord, si l'on a : $1-t = |1-tz|$, alors on a aussi : $1-t = 1-t|z|$, puisque le raisonnement ci-dessus montre que $1-t|z|$ est compris entre $1-t$ et $|1-tz|$. Ceci implique : $|z|=1$. On peut donc écrire z sous forme exponentielle : $z = e^{i\theta}$. Alors :

$$|1-tz|^2 = |1|^2 - 2\mathrm{Re}\,(tz) + |tz|^2 = 1 - 2\cos(\theta)t + t^2.$$

Par conséquent, après élévation au carré et réarrangement des termes, l'égalité $1-t = |1-tz|$ équivaut à :

$$2(\cos(\theta)-1)t = 0,$$

ce qui n'est possible que si $\cos(\theta) = 1$, c'est-à-dire : $\theta \equiv 0 \bmod 2\pi$. Mais dans ce cas on a $z = e^{i0} = 1$, or $z \neq 1$ par hypothèse de l'énoncé : nous avons une contradiction.

Par l'absurde, nous avons démontré :

$$\forall t \in]0,1], \quad 1-t < |1-tz|.$$

8. Nous allons utiliser le théorème de convergence dominée. Posons :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in]0,1], \quad f_n(t) = \left|\frac{1-t}{1-tz}\right|^n.$$

Il est clair que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue (par morceaux) sur $]0,1]$ (nous avons déjà assuré que le dénominateur $1-tz$ ne s'annule pas sur $]0,1]$: voir la question **6.**), et la question précédente implique que : $\left|\frac{1-t}{1-tz}\right| < 1$, ce dont on déduit d'une part :

$$\forall t \in]0,1], \quad \lim_{n\to+\infty} f_n(t) = 0 \quad (\text{CONVERGENCE SIMPLE DE } (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ SUR }]0,1])$$

en tant que suite géométrique dont la raison est de module strictement inférieure à 1, et d'autre part :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in]0,1], \quad |f_n(t)| \leqslant 1, \quad (\text{HYPOTHÈSE DE DOMINATION})$$

où l'application $\varphi : t \mapsto 1$ est bien sûr continue par morceaux et intégrable sur $]0,1]$ (en tant qu'application trivialement prolongeable par continuité sur le SEGMENT $[0,1]$).
Comme, de plus, la limite simple $t \mapsto 0$ de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est évidemment continue par morceaux, le théorème de convergence dominée s'applique, et on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \left|\frac{1-t}{1-tz}\right|^n \mathrm{d}t = \int_0^1 0 = 0.$$

On montre de même : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{z^{n+1}(1-t)^n}{(1-tz)^{n+1}}\mathrm{d}t = 0$. Les seules différences sont :

- pour la convergence simple : on écrit que $\left|\frac{z^{n+1}(1-t)^n}{(1-tz)^{n+1}}\right| \leqslant \frac{|f_n(t)|}{|1-tz|} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et on utilise le théorème des gendarmes ;
- pour l'hypothèse de domination : une fonction de domination est dans ce cas $\varphi : t \mapsto \frac{1}{|1-tz|}$, continue par morceaux sur le segment $[0,1]$, donc intégrable sur $[0,1]$, et aussi sur $]0,1]$.

Néanmoins, au vu du sujet, je pense que l'énoncé voulait nous faire utiliser la première intégrale pour en déduire la convergence de la seconde.

9. Soit $N \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. L'application L est de classe C^N d'après la question **6.**. Par conséquent, la formule de Taylor avec reste intégral, à l'ordre N en 0, implique :

$$L(1) = \sum_{n=0}^{N} \frac{L^{(n)}(0)}{n!}(1-0)^n + \int_0^1 \frac{(1-t)^N}{N!} L^{(N+1)}(t)\mathrm{d}t \overset{[q.\,\mathbf{6.}]}{=} \sum_{n=1}^{N} \frac{z^n}{n} + \int_0^1 (1-t)^N \frac{z^{N+1}}{(1-tz)^{N+1}}\mathrm{d}t$$

(notons qu'on a $L(0) = 0$). Or, d'après la question précédente, cette dernière intégrale converge vers 0, donc la suite $\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{z^n}{n}\right)_{N\geqslant 1}$ converge (c'est la différence d'une constante $L(1)$ et d'une suite convergeant vers 0), et quand $N \to +\infty$ cette égalité donne :

$$L(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n},$$

d'où le résultat.

Remarque. La lettre L évoque suggestivement le logarithme, dont nous reconnaissons le développement en série entière dans le membre de droite (lorsque z est une variable réelle dans $[-1,1[$, nous avons là $-\ln(1-z)$).

10. L'application $t \mapsto e^{it}$ est continue parce que ses parties réelle et imaginaire $t \mapsto \cos(t)$ et $t \mapsto \sin(t)$ le sont. Par composition avec l'application $(t,u) \mapsto t$, qui est continue car linéaire sur l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^2$ qui est de dimension finie, on en déduit que $(t,u) \mapsto e^{it}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Comme $(t,u) \mapsto u$ est aussi continue par linéarité sur $\mathbb{R}^2$, le produit $(t,u) \mapsto ue^{it}$ est continu sur $\mathbb{R}^2$. Il est évident que $(t,u) \mapsto 1$ est continue sur $\mathbb{R}^2$, donc $(t,u) \mapsto 1 + ue^{it}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ en tant que somme de fonctions continues, et elle est à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Enfin, $|\cdot|$ est continue sur $\mathbb{C}$ en tant que norme, donc par composition nous avons la continuité de γ sur $\mathbb{R}^2$.

En particulier, si $a \in]0,\pi[$, alors par restriction γ est continue sur $[-a,a] \times [0,1]$, qui est une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^2$ (il est évident qu'elle est bornée, et pour l'aspect fermé on vérifie aisément la caractérisation séquentielle parce que les inégalités larges sont préservées par passage à la limite). D'après le théorème des bornes atteintes, γ atteint un minimum sur $[-a,a] \times [0,1]$, c'est-à-dire : il existe $(t_0,u_0) \in [-a,a] \times [0,1]$ tel que :

$$\gamma(t_0,u_0) = \min_{(t,u)\in[-a,a]\times[0,1]} \gamma(t,u).$$

Si l'on pose $m_a = \gamma(t_0,u_0)$, on a donc bien l'existence de $m_a \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall (t,u) \in [-a,a] \times [0,1], \quad \left|1 + ue^{it}\right| = \gamma(t,u) \geqslant \gamma(t_0,u_0) = m_a.$$

Il reste à démontrer que $m_a > 0$. Il est clair que $m_a \geqslant 0$ car un module est positif, et il faut donc seulement exclure le cas où m_a est nul. Pour cela, on note que si $m_a = 0$, alors $\gamma(t_0,u_0) = 0$. Par propriété de séparation du module, cela implique : $u_0 e^{it_0} = -1$. De cette égalité il découle $u_0 \neq 0$ et : $e^{it_0} = -\frac{1}{u_0} < 0$. En prenant les arguments, on obtient : $t_0 \equiv \pi \bmod 2\pi$, mais c'est impossible car $t_0 \in [-a,a] \subseteq]-\pi,\pi[$. On en déduit qu'on ne peut pas avoir $m_a = 0$, et donc $m_a > 0$: ce qu'il fallait démontrer.

11. Nous allons appliquer le théorème de dérivation des intégrales à paramètres. Posons :

$$\forall (t,u) \in]-\pi,\pi[\times[0,1], \quad f(t,u) = \frac{e^{it}}{1+ue^{it}}.$$

Alors f est de classe C^1 sur $]-\pi,\pi[\times[0,1]$ (on le justifie de façon analogue à la continuité de γ dans la question précédente), ce qui donne immédiatement la continuité par morceaux sur $[0,1]$ par rapport à u, la classe C^1 sur $]\pi,\pi[$ par rapport à t et la continuité par morceaux sur $[0,1]$ de $\frac{\partial f}{\partial t}$ par rapport à u. L'intégrabilité sur $[0,1]$ de $u \mapsto f(t,u)$ pour tout $t \in]-\pi,\pi[$ ne pose pas de difficulté, puisqu'il s'agit d'une application continue sur un segment.

On vérifie l'hypothèse de domination localement : pour tout segment $[-a,a] \subseteq]-\pi,\pi[$, et tout $(t,u) \in [-a,a] \times [0,1]$, on a :

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,u)\right| = \left|\frac{ie^{it}}{(1+e^{it}u)^2}\right| = \frac{1}{\gamma(t,u)^2} \overset{[q.\,\mathbf{10.}]}{\leqslant} \frac{1}{m_a^2}. \quad (\text{HYPOTHÈSE DE DOMINATION})$$

(pour le calcul de $\frac{\partial f}{\partial t}(t,u)$, on se facilite la vie en écrivant $f(t,u) = \frac{1}{u}\frac{ue^{it}}{1+ue^{it}} = \frac{1}{u}\left(1 - \frac{1}{1+ue^{it}}\right)$).

L'application $t \mapsto \frac{1}{m_a^2}$ est bien sûr continue par morceaux et intégrable sur le segment $[0,1]$, donc l'hypothèse de domination est vérifiée.

On en déduit d'une part que pour tout $t \in]-\pi,\pi[$, l'application $u \mapsto \frac{\partial f}{\partial t}(t,u)$ est intégrable sur $[0,1]$, et d'autre part que la fonction $F : t \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{it}}{1+ue^{it}}\mathrm{d}u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout segment inclus dans $]-\pi,\pi[$, donc sur $]-\pi,\pi[$. On a de plus :

$$\forall t \in]-\pi,\pi[, \quad F'(t) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t}(t,u)\mathrm{d}u = \int_0^1 \frac{ie^{it}}{(1+e^{it}u)^2}\mathrm{d}u.$$

12. Soit $t \in]-\pi, \pi[$. On remarque que l'intégrande est, à une constante près, de la forme $\frac{g'}{g^2}$ avec g la fonction $g : u \mapsto 1 + ue^{it}$, et une primitive est donc $-\frac{1}{g}$ (attention au fait que les formulaires de primitives ne se transposent pas entièrement au cas des fonctions à valeurs complexes : une primitive de $\frac{g'}{g}$ n'est pas $\ln(|g|)$ en général, et c'est pourquoi le raisonnement ci-dessous ne pouvait pas être effectué directement avec $F(t)$). Donc :

$$F'(t) = i\left[-\frac{1}{1+ue^{it}}\right]_0^1 = i\left(1 - \frac{1}{1+e^{it}}\right) = \frac{ie^{it}}{1+e^{it}}.$$

Or :

$$\frac{e^{it}}{1+e^{it}} = \frac{e^{it/2}}{e^{-it/2}+e^{it/2}} = \frac{e^{it/2}}{2\cos(t/2)} = \frac{\cos(t/2)+i\sin(t/2)}{2\cos(t/2)} = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}\tan\left(\frac{t}{2}\right),$$

donc :

$$F'(t) = i\left(\frac{1}{2} + i\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right) = -\frac{1}{2}\tan\left(\frac{t}{2}\right) + \frac{i}{2}.$$

Comme $\tan = \frac{\sin}{\cos} = -\frac{\cos'}{\cos}$, on montre aisément qu'une primitive de $t \mapsto -\tan\left(\frac{t}{2}\right)$ est $t \mapsto 2\ln\left(\left|\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right|\right)$. On en déduit l'existence d'une constante $c \in \mathbb{C}$ telle que :

$$\forall t \in]-\pi, \pi[, \quad F(t) = \ln\left(\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right) + \frac{it}{2} + c.$$

Or le membre de droite est égal à c quand $t = 0$, tandis que celui de gauche est égal à $F(0) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{1+u} = \ln(2)$. Par conséquent : $c = \ln(2)$. Ainsi :

$$\forall t \in]-\pi, \pi[, \quad F(t) = \ln\left(2\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right) + \frac{it}{2}.$$

13. Si $\theta \in]0, 2\pi[$, alors $\theta - \pi \in]-\pi, \pi[$, et on peut donc appliquer la question précédente pour obtenir la valeur de $F(\theta - \pi)$:

$$F(\theta - \pi) = \ln\left(2\cos\left(\frac{\theta - \pi}{2}\right)\right) + \frac{i(\theta - \pi)}{2} = \ln\left(2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) + \frac{i(\theta - \pi)}{2}$$

Mais on a aussi, du fait que $e^{i(\theta-\pi)} = e^{-i\pi}e^{i\theta} = -e^{i\theta}$:

$$F(\theta - \pi) = \int_0^1 \frac{e^{i(\theta-\pi)}}{1+ue^{i(\theta-\pi)}}\mathrm{d}u = -\int_0^1 \frac{e^{i\theta}}{1-ue^{i\theta}} = -L(1),$$

où L a été définie en début de section (on prend $z = e^{i\theta}$, qui vérifie bien $|z| \leqslant 1$ et $z \neq 1$ car $\theta \not\equiv 0 \bmod 2\pi$). On en déduit :

$$L(1) = -\ln\left(2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) + \frac{i(\pi - \theta)}{2}.$$

Or, d'après la question **9.** :

$$L(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(e^{i\theta}\right)^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in\theta}}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n} + i\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n}.$$

Par unicité de la partie réelle et de la partie imaginaire, on en déduit :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n} = -\ln\left(2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right), \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n} = \frac{\pi - \theta}{2},$$

ce qu'il fallait démontrer.

IV. Fonction caractéristique d'une variable aléatoire symétrique

14. Montrer que Φ_X est bien définie revient à justifier que pour tout $t \in \mathbb{R}$, la variable aléatoire $\cos(tX)$ admet une espérance ; or le cosinus est borné par 1, donc d'après la question **2.** on a le résultat voulu.

Soit $t \in \mathbb{R}$. Comme le cosinus est une fonction paire, on a : $\cos(tX) = \cos(-tX)$, donc les espérances de ces deux variables aléatoires sont les mêmes, et on a $\Phi_X(t) = \Phi_X(-t)$. Ceci prouve que Φ_X est une fonction paire.

Enfin, on a : $-1 \leqslant \cos(tX) \leqslant 1$, donc, par croissance de l'espérance : $\mathbf{E}(-1) \leqslant \mathbf{E}(\cos(tX)) \leqslant \mathbf{E}(1)$, c'est-à-dire : $-1 \leqslant \Phi_X(t) \leqslant 1$. D'où le résultat.

15. D'après le théorème du transfert, on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \Phi_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \cos(x_n t)\mathbf{P}(X = x_n).$$

Or, si l'on pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $f_n(t) = \cos(x_n t)\mathbf{P}(X = x_n)$, alors on montre facilement : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|f_n\|_\infty \leqslant \mathbf{P}(X = x_n)$. La série $\sum_{n\geqslant 0} \mathbf{P}(X = x_n)$ converge par σ-additivité d'une probabilité, donc par comparaison des séries à termes positifs la série $\sum_{n\geqslant 0} \|f_n\|_\infty$ converge aussi. Ainsi la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $\mathbb{R}$, et f_n est continue sur $\mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En tant que limite uniforme d'une série de fonctions continues, la fonction Φ_X est continue sur $\mathbb{R}$.

16. On nous suggère de démontrer préalablement la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} R_n \cos(nt)$. Pour cela, on note que d'après la propriété $(\mathcal{D}_\alpha)$, on a pour tout n au voisinage de $+\infty$:

$$R_n \cos(nt) = \alpha \frac{\cos(nt)}{n} + O\left(\frac{\cos(nt)}{n^2}\right) = \alpha \frac{\cos(nt)}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Comme la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est d'exposant $2 > 1$, elle converge, et donc par comparaison le terme en $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ est le terme général d'une série absolument convergente, donc convergente. On en déduit que les séries $\sum_{n\geqslant 0} R_n \cos(nt)$ et $\sum_{n\geqslant 1} \alpha \frac{\cos(nt)}{n}$ sont de même nature. Or la convergence de cette dernière série a été démontrée dans la question **13.**, donc la série $\sum_{n\geqslant 0} R_n \cos(nt)$ converge également.

Passons à la démonstration des deux identités vérifiées par Φ_X. Il est supposé que X est à valeurs entières : $X(\Omega) \subseteq \mathbb{Z} = \{n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{-n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Donc, d'après le théorème du transfert de la symétrie de X, on a :

$$\begin{aligned}\Phi_X(t) &= \cos(0 \cdot t)\mathbf{P}(X = 0) + \sum_{n=1}^{+\infty} \cos(nt)\mathbf{P}(X = n) + \sum_{n=1}^{+\infty} \cos(-nt)\mathbf{P}(X = -n) \\ &= \mathbf{P}(X = 0) + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \cos(nt)\mathbf{P}(X = n).\end{aligned}$$

Or : $\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, $\mathbf{P}(|X| = n) = \mathbf{P}(X = n) + \mathbf{P}(X = -n) = 2\mathbf{P}(X = n)$, tandis que pour $n = 0$ on a clairement $\mathbf{P}(|X| = 0) = \mathbf{P}(X = 0)$. Donc l'égalité ci-dessus peut se réécrire :

$$\Phi_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \cos(nt)\mathbf{P}(|X| = n). \tag{$*$}$$

Ensuite, pour écrire le terme général en fonction de la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on note qu'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}(|X| = n) = \mathbf{P}(|X| \geqslant n) - \mathbf{P}(|X| \geqslant n+1) = R_n - R_{n+1},$$

donc :

$$\Phi_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (R_n - R_{n+1}) \cos(nt).$$

À présent, montrons la formule alternative demandée. Comme la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} R_n \cos(nt)$ converge, il en est de même de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} R_{n+1}\cos(nt)$ (qui s'écrit comme différence de deux séries convergentes), et on peut donc scinder la somme ci-dessus en deux :

$$\Phi_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} R_n \cos(nt) - \sum_{n=0}^{+\infty} R_{n+1}\cos(nt) = \sum_{n=0}^{+\infty} R_n \cos(nt) - \sum_{n=1}^{+\infty} R_n \cos((n-1)t)$$

suite au changement d'indice $n \mapsto n+1$ dans la deuxième somme. Par conséquent :

$$\Phi_X(t) = R_0 \cos(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} R_n \left(\cos(nt) - \cos((n-1)t)\right).$$

On a clairement : $R_0 = \mathbf{P}(|X| \geqslant 0) = 1$, donc :

$$\Phi_X(t) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} R_n \left(\cos(nt) - \cos((n-1)t)\right).$$

d'où le résultat.

Remarque. On nous demande implicitement d'effectuer une transformation d'Abel.

17. Implicitement, ce qu'on nous demande revient à démontrer que la somme $t \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(R_n - \frac{\alpha}{n}\right) e^{int}$ est définie au voisinage de 0 (par valeurs supérieures) et continue en 0. Or, si l'on pose : $\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $f_n(t) = \left(R_n - \frac{\alpha}{n}\right) e^{int}$, alors f_n est continue sur $\mathbb{R}$ pour tout entier $n \geqslant 1$, et on a : $\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $|f_n(t)| = \left|R_n - \frac{\alpha}{n}\right|$. On en déduit : $\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, $\|f_n\|_\infty = \left|R_n - \frac{\alpha}{n}\right|$. D'après la propriété de dispersion $(\mathcal{D}_\alpha)$, on a donc : $\|f_n\|_\infty = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$, or la série de Riemann $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est d'exposant $2 > 1$, donc elle est convergente. Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement, donc converge uniformément sur $\mathbb{R}$. En particulier, en tant que limite uniforme d'une série de fonctions continues, la somme $t \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(R_n - \frac{\alpha}{n}\right) e^{int}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Si l'on pose C sa valeur en 0 (qui est bien un nombre réel, vu que que pour $t = 0$ la somme ne fait intervenir que des nombres réels), on a bien :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(R_n - \frac{\alpha}{n}\right) e^{int} \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} C.$$

Or, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$ au voisinage de 0 (en particulier : entre 0 et 2π strictement) :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} R_n e^{int} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(R_n - \frac{\alpha}{n}\right) e^{int} + \alpha \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{int}}{n}$$
$$\overset{[q.\mathbf{13.}]}{=} C + o(1) - \alpha \ln\left(2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right) + i\alpha\frac{\pi - t}{2}.$$

En identifiant la partie réelle (notons que $C \in \mathbb{R}$) et la partie imaginaire, on a donc, pour t au voisinage de 0 :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} R_n \cos(nt) = C - \alpha \ln\left(2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right) + o(1), \quad \sum_{n=1}^{+\infty} R_n \sin(nt) = \alpha\frac{\pi - t}{2} + o(1).$$

Comme $t = o(1)$ quand $t \to 0$, on peut écrire : $\alpha\frac{\pi-t}{2} = \frac{\alpha\pi}{2} + o(1)$. De plus :

$$\ln\left(2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right) = \ln\left(2\left(\frac{t}{2} + o(t)\right)\right) = \ln(t + o(t)) = \ln(t) + \ln(1 + o(1)) = \ln(t) + O(1).$$

Donc finalement, les deux égalités ci-dessus deviennent :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} R_n \cos(nt) = -\alpha\ln(t) + C + O(1) = O(\ln(t)), \quad \sum_{n=1}^{+\infty} R_n \sin(nt) = \frac{\alpha\pi}{2} + o(1),$$

ce qu'il fallait démontrer.

18. Soit $t \in \mathbb{R}$. Rappelons qu'on a montré :

$$\Phi_X(t) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} R_n \left(\cos(nt) - \cos((n-1)t)\right).$$

Or, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$\begin{aligned}\cos(nt) - \cos((n-1)t) &= -2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\sin\left(\frac{(2n-1)t}{2}\right) = -2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\sin\left(nt - \frac{t}{2}\right) \\ &= -2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\left[\sin\left(\frac{nt}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right) - \sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{nt}{2}\right)\right]\end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}\Phi_X(t) &= 1 - 2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{t}{2}\right)\sum_{n=1}^{+\infty} R_n \sin\left(\frac{nt}{2}\right) - \sin\left(\frac{t}{2}\right)\sum_{n=1}^{+\infty} R_n \cos\left(\frac{nt}{2}\right)\right] \\ &= 1 - \sin(t)\sum_{n=1}^{+\infty} R_n \sin\left(\frac{nt}{2}\right) + 2\left(\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right)^2 \sum_{n=1}^{+\infty} R_n \cos\left(\frac{nt}{2}\right).\end{aligned}$$

Grâce à la question précédente, on sait qu'on a au voisinage de 0 :

$$\left(\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right)^2 \sum_{n=1}^{+\infty} R_n \cos\left(\frac{nt}{2}\right) = O\left(\left(\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right)^2 \ln(t)\right) = O\left(t^2\ln(t)\right) = o(t),$$

car $t\ln(t) \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 0$, tandis qu'on a :

$$\sin(t)\sum_{n=1}^{+\infty} R_n \sin\left(\frac{nt}{2}\right) = (t + o(t))\left(\frac{\pi\alpha}{2} + o(1)\right) = \frac{\alpha\pi t}{2} + o(t),$$

donc finalement, quand $t \to 0^+$:

$$\Phi_X(t) = 1 - \frac{\pi\alpha t}{2} + o(t),$$

ce qu'il fallait démontrer. Ce calcul montre en outre :

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\Phi_X(t) - \Phi_X(0)}{t} = -\frac{\pi\alpha}{2}.$$

La fonction Φ_X étant paire, on en déduit :

$$\lim_{t\to 0^-} \frac{\Phi_X(t) - \Phi_X(0)}{t} \overset{[u=-t]}{=} \lim_{u\to 0^+} -\frac{\Phi_X(u) - \Phi_X(0)}{u} = \frac{\pi\alpha}{2}.$$

Comme $\alpha \neq 0$, on en déduit : $\lim\limits_{t\to 0^+} \frac{\Phi_X(t)-\Phi_X(0)}{t} \neq \lim\limits_{t\to 0^-} \frac{\Phi_X(t)-\Phi_X(0)}{t}$, donc la fonction Φ_X n'est pas dérivable en 0.

V. Convergence simple de la suite des fonctions caractéristiques des variables M_n

19. Soit $t \in \mathbb{R}$. Comme X et Y sont symétriques et indépendantes, leur somme $X+Y$ est symétrique d'après la question **5.**. Dans ce cas, on a d'après la question **4.** :

$$\mathbf{E}\left(\sin\left(t(X+Y)\right)\right) = 0.$$

On en déduit, par linéarité de l'espérance :

$$\mathbf{E}\left(e^{it(X+Y)}\right) = \underbrace{\mathbf{E}\left(\cos\left(t(X+Y)\right)\right)}_{=\Phi_{X+Y}(t)} + i\,\underbrace{\mathbf{E}\left(\sin\left(t(X+Y)\right)\right)}_{=0} = \Phi_{X+Y}(t).$$

Exprimer la fonction caractéristique à l'aide de l'exponentielle nous permet de tirer profit de sa propriété de morphisme (c'est-à-dire du fait qu'il transforme sommes en produits). On a en effet :

$$\Phi_{X+Y}(t) = \mathbf{E}\left(e^{it(X+Y)}\right) = \mathbf{E}\left(e^{itX}e^{itY}\right),$$

et comme X et Y sont indépendantes, c'est aussi le cas de e^{itX} et e^{itY}, et par propriété de l'espérance :

$$\mathbf{E}\left(e^{itX}e^{itY}\right) = \mathbf{E}\left(e^{itX}\right)\mathbf{E}\left(e^{itY}\right).$$

On montre comme ci-dessus que $\mathbf{E}\left(e^{itX}\right) = \Phi_X(t)$ et $\mathbf{E}\left(e^{itY}\right) = \Phi_Y(t)$. On a donc montré :

$$\Phi_{X+Y}(t) = \Phi_X(t)\Phi_Y(t),$$

d'où le résultat voulu.

20. On admet, dans le préambule du sujet, que X_{n+1} est indépendante de $\sum\limits_{k=1}^{n} X_k = nM_n$ pour tout entier $n \geqslant 1$. Cela nous permet d'une part de démontrer par récurrence que nM_n est symétrique pour tout entier $n \geqslant 1$ (utiliser la question **5.**), et donc M_n aussi, et d'autre part d'appliquer la question précédente avec $X = X_{n+1}$ et $Y = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$. Comme $X_{n+1} + \sum\limits_{k=1}^{n} X_k = \sum\limits_{k=1}^{n+1} X_k$, on en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\},\ \forall t \in \mathbb{R}, \quad \Phi_{\sum\limits_{k=1}^{n+1} X_k}(t) = \Phi_{X_{n+1}}(t)\Phi_{\sum\limits_{k=1}^{n} X_k}(t).$$

De cela on tire, par une récurrence facile :

$$\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\},\ \forall t \in \mathbb{R}, \quad \Phi_{\sum\limits_{k=1}^{n} X_k}(t) = \prod_{k=1}^{n} \Phi_{X_k}(t).$$

Comme les X_k ont toutes la même loi que X_1, tous les $\cos(tX_k)$ ont même loi que $\cos(tX_1)$ d'après le théorème 1 du préambule, et comme l'espérance d'une variable aléatoire dépend uniquement de sa loi, on en déduit que les fonctions caractéristiques des X_k sont toutes égales à la fonction caractéristique de X_1. Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\},\ \forall t \in \mathbb{R}, \quad \Phi_{\sum\limits_{k=1}^{n} X_k}(t) = \left(\Phi_{X_1}(t)\right)^n.$$

Or : $\sum\limits_{k=1}^{n} X_k = nM_n$, et :

$$\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\},\ \forall t \in \mathbb{R}, \quad \Phi_{nM_n}(t) = \mathbf{E}\left(\cos(t(nM_n))\right) = \mathbf{E}\left(\cos((tn)M_n)\right) = \Phi_{M_n}(nt).$$

Par conséquent, l'égalité ci-dessus équivaut à : $\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\Phi_{M_n}(nt) = \left(\Phi_{X_1}(t)\right)^n$. Il reste à remplacer t par $\frac{t}{n}$ pour en déduire le résultat voulu :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \Phi_{M_n}(t) = \left(\Phi_{X_1}(t/n)\right)^n.$$

21. Comme les fonctions Φ_{M_n} et $t \mapsto \exp\left(-\frac{\pi\alpha|t|}{2}\right)$ sont paires, il suffit de démontrer le résultat voulu pour t positif. Soit $t \in \mathbb{R}_+$. Quand $n \to +\infty$, on a $\frac{t}{n} \to 0$. Donc, d'après la question **18.** (qu'on peut appliquer vu que par hypothèse, X_1 est symétrique et vérifie la condition $(\mathcal{D}_\alpha)$) :

$$(\Phi_{X_1}(t/n))^n = \left(1 - \frac{\pi\alpha t}{2n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n = e^{n\ln\left(1-\frac{\pi\alpha t}{2n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)}$$

(notons qu'on a bien $1 - \frac{\pi\alpha t}{2n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right) > 0$ pour n suffisamment grand, ce qui autorise la forme logarithmique). Or : $n\ln\left(1 - \frac{\pi\alpha t}{2n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n \times \left(-\frac{\pi\alpha t}{2n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\frac{\pi\alpha t}{2}$. Par continuité de l'exponentielle, on en déduit :

$$\Phi_{M_n}(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \exp\left(-\frac{\pi\alpha t}{2}\right) = \exp\left(-\frac{\pi\alpha|t|}{2}\right),$$

d'où le résultat si $t \geqslant 0$, et aussi pour $t < 0$ par parité.

22. Posons : $\forall t \in \mathbb{R}$, $g(t) = \exp\left(-\frac{\pi\alpha|t|}{2}\right)$. Si la convergence de la question précédente est uniforme sur $\mathbb{R}$, alors on a aussi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant |\Phi_{M_n}(2\pi n)| \leqslant |\Phi_{M_n}(2\pi n) - g(2\pi n)| + |g(2\pi n)| \leqslant \|\Phi_{M_n} - g\|_\infty + \exp\left(-\pi^2\alpha n\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc d'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n\to+\infty} \Phi_{M_n}(2\pi n) = 0$. Or, d'après la question **20.** : $\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, $\Phi_{M_n}(2\pi n) = (\Phi_{X_1}(2\pi))^n$. Le fait que cette suite géométrique converge vers 0 signifie qu'on a nécessairement : $|\Phi_{X_1}(2\pi)| < 1$. Or, d'après l'identité $(*)$ démontrée à la question **16.** :

$$\Phi_{X_1}(2\pi) = \sum_{n=0}^{+\infty} \cos(2\pi n)\mathbf{P}(|X_1| = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(|X_1| = n) = \mathbf{P}(|X_1| \geqslant 0) = 1,$$

ce qui contredit le fait que $|\Phi_{X_1}(2\pi)| < 1$.

Par l'absurde, on a montré que la convergence de la question précédente n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$.