

Espaces vectoriels normés

Lundi 15 septembre 2025

Table des matières

Chapitre 3

Révisions MP2I

Norme sur un
espace
vectoriel.

Suites dans un
espace
vectoriel
normé

Topologie
d'un espace
vectoriel
normé

- 1 Norme sur un espace vectoriel.
- 2 Suites dans un espace vectoriel normé
- 3 Topologie d'un espace vectoriel normé

Table des matières

Chapitre 3

Norme sur un espace vectoriel.

Définition.

Distance associée, boules.

Objets bornés dans un e.v.n.

Norme associée à un produit scalaire

Normes usuelles sur \mathbb{K}^n .

Normes classiques sur les espaces de fonctions

Suites dans un espace vectoriel normé

Topologie d'un espace vectoriel normé

1 Norme sur un espace vectoriel.

2 Suites dans un espace vectoriel normé

3 Topologie d'un espace vectoriel normé

Chapitre 3

Norme sur un espace vectoriel.

Définition.

Distance associée, boules.

Objets bornés dans un e.v.n.

Norme associée à un produit scalaire

Normes usuelles sur \mathbb{K}^n .

Normes classiques sur les espaces de fonctions

Suites dans un espace vectoriel normé

Topologie d'un espace vectoriel normé

1. Norme sur un espace vectoriel.

1. Norme sur un espace vectoriel.

Chapitre 3

Norme sur un
espace
vectoriel.

Définition.

Distance
associée, boules.

Objets bornés
dans un e.v.n.

Norme associée à
un produit
scalaire

Normes usuelles
sur \mathbb{K}^n .

Normes classiques
sur les espaces de
fonctions

Suites dans un
espace
vectoriel
normé

Topologie
d'un espace
vectoriel
normé

1.1. Définition.

1.1. Définition.

Chapitre 3

Norme sur un espace vectoriel.

Définition.

Distance associée, boules.

Objets bornés dans un e.v.n.

Norme associée à un produit scalaire

Normes usuelles sur \mathbb{K}^n .

Normes classiques sur les espaces de fonctions

Suites dans un espace vectoriel normé

Topologie d'un espace vectoriel normé

Définition 1

On appelle *norme* sur E toute application $N : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant :

- *Séparation* :
- *Homogénéité* :
- *Inégalité triangulaire* :

Si N est une norme sur E , on dit que (E, N) (ou plus simplement E) est un *espace vectoriel normé*.

Remarque :

Notation $\| \cdot \| : x \mapsto \|x\|$.

1.1. Définition.

Chapitre 3

Norme sur un espace vectoriel.

Définition.

Distance associée, boules.

Objets bornés dans un e.v.n.

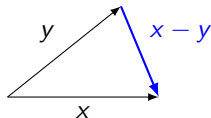
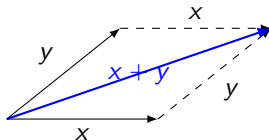
Norme associée à un produit scalaire

Normes usuelles sur \mathbb{K}^n .

Normes classiques sur les espaces de fonctions

Suites dans un espace vectoriel normé

Topologie d'un espace vectoriel normé



Proposition 1

Si N est une norme E , on a pour tout $(x, y) \in E^2$:

$$|N(x) - N(y)| \leq N(x - y)$$

Remarque :

En résumé : $|N(x) - N(y)| \leq N(x \pm y) \leq N(x) + N(y)$

Définition 2

Si (E, N) est un espace vectoriel normé, tout vecteur $x \in E$ tel que $N(x) = 1$ est appelé vecteur *unitaire*.

1. Norme sur un espace vectoriel.

Chapitre 3

Norme sur un
espace
vectoriel.

Définition.

**Distance
associée, boules.**

Objets bornés
dans un e.v.n.

Norme associée à
un produit
scalaire

Normes usuelles
sur \mathbb{K}^n .

Normes classiques
sur les espaces de
fonctions

Suites dans un
espace
vectoriel
normé

Topologie
d'un espace
vectoriel
normé

1.2. Distance associée, boules.

1.2. Distance associée, boules.

Chapitre 3

Norme sur un espace vectoriel.

Définition.

Distance associée, boules.

Objets bornés dans un e.v.n.

Norme associée à un produit scalaire

Normes usuelles sur \mathbb{K}^n .

Normes classiques sur les espaces de fonctions

Suites dans un espace vectoriel normé

Topologie d'un espace vectoriel normé

Definition 3

Soit N une norme sur E . L'application

$$d : \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ (x, y) & \longmapsto & N(y - x) \end{array}$$

est appelée *distance associée* à N .

Remarque :

Les inégalités triangulaires se réécrivent :

$$|d(x, y) - d(y, z)| \leq d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z),$$

1.2. Distance associée, boules.

Chapitre 3

Norme sur un espace vectoriel.

Définition.

Distance associée, boules.

Objets bornés dans un e.v.n.

Norme associée à un produit scalaire

Normes usuelles sur \mathbb{K}^n .

Normes classiques sur les espaces de fonctions

Suites dans un espace vectoriel normé

Topologie d'un espace vectoriel normé

Definition 4

Soit N une norme sur E , et d la distance associée. Pour tout point $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}_+$, on appelle :

- *boule ouverte* de centre a et de rayon r l'ensemble $B(a, r) = \{x \in E \mid d(x, a) < r\}$.
- *boule fermée* de centre a et de rayon r l'ensemble $B_f(a, r) = \{x \in E \mid d(x, a) \leq r\}$.
- *sphère* de centre a et de rayon r l'ensemble $S(a, r) = \{x \in E \mid d(x, a) = r\}$.

Remarque :

$$B_f(a, r) = B(a, r) \sqcup S(a, r)$$

1.2. Distance associée, boules.

Chapitre 3

Norme sur un espace vectoriel.

Définition.

Distance associée, boules.

Objets bornés dans un e.v.n.

Norme associée à un produit scalaire

Normes usuelles sur \mathbb{K}^n .

Normes classiques sur les espaces de fonctions

Suites dans un espace vectoriel normé

Topologie d'un espace vectoriel normé

Définition 5

Pour $a, b \in E$, on appelle *segment* d'extrémités a et b , l'ensemble

$$[a, b] = \{\lambda b + (1 - \lambda)a, \lambda \in [0, 1]\}$$

Remarque :

Généralisation d'un segment de \mathbb{R} mais avec $[a, b] = [b, a]$.

Définition 6

On dit qu'une partie A d'un espace vectoriel E est *convexe* lorsque :

$$\forall a, b \in A, \quad [a, b] \subset A$$

1.2. Distance associée, boules.

Chapitre 3

Norme sur un
espace
vectoriel.

Définition.

Distance
associée, boules.

Objets bornés
dans un e.v.n.

Norme associée à
un produit
scalaire

Normes usuelles
sur \mathbb{K}^n .

Normes classiques
sur les espaces de
fonctions

Suites dans un
espace
vectoriel
normé

Topologie
d'un espace
vectoriel
normé

Exercice 1

Soit un intervalle I de \mathbb{R} et une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. On considère $A = \{(x, y) \in I \times \mathbb{R} \mid y \geq f(x)\}$ (appelé *épigraphe* de f). Montrer que f est convexe **ssi** A est une partie convexe de \mathbb{R}^2 .

Proposition 2

Si (E, N) est un espace vectoriel normé, les boules (ouvertes et fermées) de E sont des parties convexes.

1. Norme sur un espace vectoriel.

Chapitre 3

Norme sur un
espace
vectoriel.

Définition.

Distance
associée, boules.

**Objets bornés
dans un e.v.n.**

Norme associée à
un produit
scalaire

Normes usuelles
sur \mathbb{K}^n .

Normes classiques
sur les espaces de
fonctions

Suites dans un
espace
vectoriel
normé

Topologie
d'un espace
vectoriel
normé

1.3. Objets bornés dans un e.v.n.

1.3. Objets bornés dans un e.v.n.

Chapitre 3

Norme sur un espace vectoriel.

Définition.

Distance associée, boules.

Objets bornés dans un e.v.n.

Norme associée à un produit scalaire

Normes usuelles sur \mathbb{K}^n .

Normes classiques sur les espaces de fonctions

Suites dans un espace vectoriel normé

Topologie d'un espace vectoriel normé

Définition 7

On dit qu'une partie quelconque A de E (E, N) est *bornée* lorsqu'il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $A \subset B_f(0, M)$, autrement dit lorsque :

$$\exists M \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in A, N(x) \leq M.$$

Remarques :

- Dépend de N
- $B(0, M)$ au lieu de $B_f(0, M)$?
- Partie non bornée :

1.3. Objets bornés dans un e.v.n.

Chapitre 3

Norme sur un espace vectoriel.

Définition.

Distance associée, boules.

Objets bornés dans un e.v.n.

Norme associée à un produit scalaire

Normes usuelles sur \mathbb{K}^n .

Normes classiques sur les espaces de fonctions

Suites dans un espace vectoriel normé

Topologie d'un espace vectoriel normé

Définition 8

- Une application $f : X \rightarrow E$ est bornée lorsque :

$$\exists M \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in X, N(f(x)) \leq M.$$

- Une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E est bornée lorsque :

$$\exists M \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}, N(v_n) \leq M.$$

Remarque :

Notations $\mathcal{B}(X, E)$, $\mathcal{B}(\mathbb{N}, E)$.

1. Norme sur un espace vectoriel.

Chapitre 3

Norme sur un
espace
vectoriel.

Définition.

Distance
associée, boules.

Objets bornés
dans un e.v.n.

Norme associée à
un produit
scalaire

Normes usuelles
sur \mathbb{K}^n .

Normes classiques
sur les espaces de
fonctions

Suites dans un
espace
vectoriel
normé

Topologie
d'un espace
vectoriel
normé

1.4. Norme associée à un produit scalaire

1.4. Norme associée à un produit scalaire

Chapitre 3

Norme sur un espace vectoriel.

Définition.

Distance associée, boules.

Objets bornés dans un e.v.n.

Norme associée à un produit scalaire

Normes usuelles sur \mathbb{K}^n .

Normes classiques sur les espaces de fonctions

Suites dans un espace vectoriel normé

Topologie d'un espace vectoriel normé

Definition 9

Soit E un espace préhilbertien réel. On appelle *norme euclidienne* associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ l'application :

$$N : x \mapsto \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

Proposition 3

(inégalité de Cauchy-Schwarz) Pour tout $x, y \in E$:

$$\langle x, y \rangle \leq N(x)N(y)$$

avec égalité **ssi** x et y sont colinéaires.

Proposition 4

Une norme euclidienne est une norme.

1. Norme sur un espace vectoriel.

Chapitre 3

Norme sur un
espace
vectoriel.

Définition.

Distance
associée, boules.

Objets bornés
dans un e.v.n.

Norme associée à
un produit
scalaire

**Normes usuelles
sur \mathbb{K}^n .**

Normes classiques
sur les espaces de
fonctions

Suites dans un
espace
vectoriel
normé

Topologie
d'un espace
vectoriel
normé

1.5. Normes usuelles sur \mathbb{K}^n .

1.5. Normes usuelles sur \mathbb{K}^n .

Chapitre 3

Norme sur un espace vectoriel.

Définition.

Distance associée, boules.

Objets bornés dans un e.v.n.

Norme associée à un produit scalaire

Normes usuelles sur \mathbb{K}^n .

Normes classiques sur les espaces de fonctions

Suites dans un espace vectoriel normé

Topologie d'un espace vectoriel normé

Proposition 5

Chacune des trois applications suivantes définit une norme sur \mathbb{K}^n :

- $\|\cdot\|_1 : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{k=1}^n |x_k|.$
- $\|\cdot\|_2 : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$
- $\|\cdot\|_\infty : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \max \{|x_1|, \dots, |x_n|\}.$

On les appelle respectivement *norme 1*, *norme 2*, et *norme infini*.

Remarques :

- $|\cdot|$ sur \mathbb{R} ou \mathbb{C}
- $\|\cdot\|_2$ norme euclidienne sur \mathbb{R}^n .

1.5. Normes usuelles sur \mathbb{K}^n .

Chapitre 3

Norme sur un
espace
vectoriel.

Définition.

Distance
associée, boules.

Objets bornés
dans un e.v.n.

Norme associée à
un produit
scalaire

**Normes usuelles
sur \mathbb{K}^n .**

Normes classiques
sur les espaces de
fonctions

Suites dans un
espace
vectoriel
normé

Topologie
d'un espace
vectoriel
normé

Exercice 2

Pour chacune de ces trois normes, dessiner la boule unité (boule de centre 0 et de rayon 1) de \mathbb{R}^2 .

1. Norme sur un espace vectoriel.

Chapitre 3

Norme sur un
espace
vectoriel.

Définition.

Distance
associée, boules.

Objets bornés
dans un e.v.n.

Norme associée à
un produit
scalaire

Normes usuelles
sur \mathbb{K}^n .

**Normes classiques
sur les espaces de
fonctions**

Suites dans un
espace
vectoriel
normé

Topologie
d'un espace
vectoriel
normé

1.6. Normes classiques sur les espaces de fonctions

1.6. Normes classiques sur les espaces de fonctions

Chapitre 3

Norme sur un espace vectoriel.

Définition.

Distance associée, boules.

Objets bornés dans un e.v.n.

Norme associée à un produit scalaire

Normes usuelles sur \mathbb{K}^n .

Normes classiques sur les espaces de fonctions

Suites dans un espace vectoriel normé

Topologie d'un espace vectoriel normé

Proposition 6

Soit X un ensemble quelconque non vide. L'ensemble $\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ des fonctions bornées de X vers \mathbb{K} est un \mathbb{K} -espace vectoriel et l'application :

$$N_{\infty}^X : f \mapsto \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

est une norme sur cet espace, appelée *norme de la convergence uniforme*

Remarques :

- Notation $\| \cdot \|_{\infty}$
- Généralisation à $\mathcal{B}(X, E)$

1.6. Normes classiques sur les espaces de fonctions

Chapitre 3

Norme sur un espace vectoriel.

Définition.

Distance associée, boules.

Objets bornés dans un e.v.n.

Norme associée à un produit scalaire

Normes usuelles sur \mathbb{K}^n .

Normes classiques sur les espaces de fonctions

Suites dans un espace vectoriel normé

Topologie d'un espace vectoriel normé

Proposition 7

Sur $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$, les applications suivantes sont des normes :

- $N_1^{[a,b]} : f \mapsto \int_a^b |f(t)| dt$
- $N_2^{[a,b]} : f \mapsto \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt}$

Remarques :

- $N_1^{[a,b]}$ ou $\|\cdot\|_1$: norme de la convergence en moyenne
- $N_2^{[a,b]}$ ou $\|\cdot\|_2$: norme de la convergence en moyenne quadratique (c'est une norme euclidienne).

Table des matières

Chapitre 3

Norme sur un
espace
vectoriel.

**Suites dans un
espace
vectoriel
normé**

Convergence et
divergence d'une
suite

Opérations sur
les suites
convergentes

Suites bornées

Suites extraites
et valeurs
d'adhérence

Comparaison de
normes

Topologie
d'un espace
vectoriel
normé

1 Norme sur un espace vectoriel.

2 Suites dans un espace vectoriel normé

3 Topologie d'un espace vectoriel normé

Chapitre 3

Norme sur un
espace
vectoriel.

**Suites dans un
espace
vectoriel
normé**

Convergence et
divergence d'une
suite

Opérations sur
les suites
convergentes

Suites bornées

Suites extraites
et valeurs
d'adhérence

Comparaison de
normes

Topologie
d'un espace
vectoriel
normé

2. Suites dans un espace vectoriel normé

2. Suites dans un espace vectoriel normé

Chapitre 3

Norme sur un
espace
vectoriel.

Suites dans un
espace
vectoriel
normé

Convergence et
divergence d'une
suite

Opérations sur
les suites
convergentes

Suites bornées

Suites extraites
et valeurs
d'adhérence

Comparaison de
normes

Topologie
d'un espace
vectoriel
normé

2.1. Convergence et divergence d'une suite

2.1. Convergence et divergence d'une suite

Chapitre 3

Norme sur un
espace
vectoriel.

Suites dans un
espace
vectoriel
normé

Convergence et
divergence d'une
suite

Opérations sur
les suites
convergentes

Suites bornées

Suites extraites
et valeurs
d'adhérence

Comparaison de
normes

Topologie
d'un espace
vectoriel
normé

Definition 10

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de E , et soit $\ell \in E$. On dit que la suite $(x_n)_n$ *converge* vers ℓ lorsque la suite réelle positive $(d(x_n, \ell))_n$ converge vers 0. ℓ est alors appelée *limite* de la suite, et notée $\lim x_n$.

Remarque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies \|x_n - \ell\| \leq \varepsilon.$$

2.1. Convergence et divergence d'une suite

Chapitre 3

Norme sur un
espace
vectoriel.

Suites dans un
espace
vectoriel
normé

Convergence et
divergence d'une
suite

Opérations sur
les suites
convergentes

Suites bornées
Suites extraites
et valeurs
d'adhérence

Comparaison de
normes

Topologie
d'un espace
vectoriel
normé

Definition 11

On dit qu'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E est *convergente* lorsqu'il existe $\ell \in E$ tel que la suite converge vers ℓ . Une suite qui ne converge pas est dite *divergente*.

Proposition 8

Si une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E est *convergente*, alors sa limite est unique.

2. Suites dans un espace vectoriel normé

Chapitre 3

Norme sur un
espace
vectoriel.

Suites dans un
espace
vectoriel
normé

Convergence et
divergence d'une
suite

**Opérations sur
les suites
convergentes**

Suites bornées

Suites extraites
et valeurs
d'adhérence

Comparaison de
normes

Topologie
d'un espace
vectoriel
normé

2.2. Opérations sur les suites convergentes

2.2. Opérations sur les suites convergentes

Chapitre 3

Norme sur un espace vectoriel.

Suites dans un espace vectoriel normé

Convergence et divergence d'une suite

Opérations sur les suites convergentes

Suites bornées

Suites extraites et valeurs d'adhérence

Comparaison de normes

Topologie d'un espace vectoriel normé

Proposition 9

Soient $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de E , convergeant respectivement vers x et y , et soit $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de \mathbb{K} convergeant vers λ . Alors la suite $(x_n + \lambda_n y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $x + \lambda y$.

Corollaire 1

L'ensemble des suites convergentes de E est un sous-espace vectoriel de l'espace $E^{\mathbb{N}}$ des suites de E .

2. Suites dans un espace vectoriel normé

Chapitre 3

Norme sur un
espace
vectoriel.

Suites dans un
espace
vectoriel
normé

Convergence et
divergence d'une
suite

Opérations sur
les suites
convergentes

Suites bornées

Suites extraites
et valeurs
d'adhérence

Comparaison de
normes

Topologie
d'un espace
vectoriel
normé

2.3. Suites bornées

2.3. Suites bornées

Chapitre 3

Norme sur un espace vectoriel.

Suites dans un espace vectoriel normé

Convergence et divergence d'une suite

Opérations sur les suites convergentes

Suites bornées

Suites extraites et valeurs d'adhérence

Comparaison de normes

Topologie d'un espace vectoriel normé

Proposition 10

L'ensemble $\mathcal{B}(\mathbb{N}, E)$ des suites bornées de E est un \mathbb{K} -espace vectoriel et l'application :

$$N_{\infty} : (x_n)_n \mapsto \sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\|$$

est une norme sur cet espace.

Remarque :

Notation $\ell^{\infty}(E)$.

2.3. Suites bornées

Chapitre 3

Norme sur un espace vectoriel.

Suites dans un espace vectoriel normé

Convergence et divergence d'une suite

Opérations sur les suites convergentes

Suites bornées

Suites extraites et valeurs d'adhérence

Comparaison de normes

Topologie d'un espace vectoriel normé

Proposition 11

Si une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E est *convergente*, alors elle est bornée. De plus, la suite $(\|x_n\|)_n$ est alors convergente et $\lim \|x_n\| = \|\lim x_n\|$.

Remarque :

l'espace des suites convergentes de $(E, \|\cdot\|)$ est un sous-espace vectoriel de $\ell^\infty(E)$.

2. Suites dans un espace vectoriel normé

Chapitre 3

Norme sur un
espace
vectoriel.

Suites dans un
espace
vectoriel
normé

Convergence et
divergence d'une
suite

Opérations sur
les suites
convergentes

Suites bornées

**Suites extraites
et valeurs
d'adhérence**

Comparaison de
normes

Topologie
d'un espace
vectoriel
normé

2.4. Suites extraites et valeurs d'adhérence

2.4. Suites extraites et valeurs d'adhérence

Chapitre 3

Norme sur un espace vectoriel.

Suites dans un espace vectoriel normé

Convergence et divergence d'une suite

Opérations sur les suites convergentes

Suites bornées

Suites extraites et valeurs d'adhérence

Comparaison de normes

Topologie d'un espace vectoriel normé

Definition 12

Soit $(x_n)_n$ une suite de E . On appelle *suite extraite* ou *sous-suite* de $(x_n)_n$ toute suite à valeurs dans E de la forme $(x_{\varphi(n)})_n$ où $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est strictement croissante.

Remarque :

Cas $\varphi : n \mapsto 2n$ et $\varphi : n \mapsto 2n + 1$.

Definition 13

Soit $(x_n)_n$ une suite de E . On dit que $x \in E$ est une *valeur d'adhérence* de $(x_n)_n$ lorsqu'il existe une suite extraite $(x_{\varphi(n)})_n$ de E qui converge vers x .

2.4. Suites extraites et valeurs d'adhérence

Chapitre 3

Norme sur un espace vectoriel.

Suites dans un espace vectoriel normé

Convergence et divergence d'une suite

Opérations sur les suites convergentes

Suites bornées
Suites extraites et valeurs d'adhérence

Comparaison de normes

Topologie d'un espace vectoriel normé

Proposition 12

Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de E convergente, de limite ℓ , alors toute suite extraite converge vers ℓ .

Corollaire 2

Toute suite convergente possède une et une seule valeur d'adhérence : sa limite.

Remarque :

Réciproque fausse. Exemple ?

Corollaire 3

Toute suite ayant au moins deux valeurs d'adhérence est divergente.

2.4. Suites extraites et valeurs d'adhérence

Chapitre 3

Norme sur un
espace
vectoriel.

Suites dans un
espace
vectoriel
normé

Convergence et
divergence d'une
suite

Opérations sur
les suites
convergentes

Suites bornées

**Suites extraites
et valeurs
d'adhérence**

Comparaison de
normes

Topologie
d'un espace
vectoriel
normé

Proposition 13

Si les suites extraites paires $(x_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et impaires $(x_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ d'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers une même limite $\ell \in E$, alors la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ .

2. Suites dans un espace vectoriel normé

Chapitre 3

Norme sur un
espace
vectoriel.

Suites dans un
espace
vectoriel
normé

Convergence et
divergence d'une
suite

Opérations sur
les suites
convergentes

Suites bornées

Suites extraites
et valeurs
d'adhérence

**Comparaison de
normes**

Topologie
d'un espace
vectoriel
normé

2.5. Comparaison de normes

2.5. Comparaison de normes

Chapitre 3

Norme sur un espace vectoriel.

Suites dans un espace vectoriel normé

Convergence et divergence d'une suite

Opérations sur les suites convergentes

Suites bornées
Suites extraites
et valeurs d'adhérence

Comparaison de normes

Topologie d'un espace vectoriel normé

Definition 14

On dit qu'une norme N est équivalente à une norme N' sur E lorsqu'il existe deux réels $\alpha, \beta > 0$ tels que :

$$\forall x \in E, \quad \alpha N(x) \leq N'(x) \leq \beta N(x)$$

Proposition 14

La relation binaire précédente est une relation d'équivalence sur l'ensemble des normes de E .

2.5. Comparaison de normes

Chapitre 3

Norme sur un espace vectoriel.

Suites dans un espace vectoriel normé

Convergence et divergence d'une suite

Opérations sur les suites convergentes

Suites bornées
Suites extraites et valeurs d'adhérence

Comparaison de normes

Topologie d'un espace vectoriel normé

Proposition 15

Si N et N' sont deux normes équivalentes sur E , alors une partie A de E est bornée dans (E, N) **ssi** elle est bornée dans (E, N') .

Corollaire 4

Pour deux normes équivalentes N et N' sur E :

- une fonction $f : X \rightarrow E$ est bornée pour N **ssi** elle est bornée pour N'
- Une suite $(x_n)_n$ de E est bornée pour N **ssi** elle est bornée pour N' .

2.5. Comparaison de normes

Chapitre 3

Norme sur un
espace
vectoriel.

Suites dans un
espace
vectoriel
normé

Convergence et
divergence d'une
suite

Opérations sur
les suites
convergentes

Suites bornées
Suites extraites
et valeurs
d'adhérence

Comparaison de
normes

Topologie
d'un espace
vectoriel
normé

Proposition 16

Si N et N' sont deux normes équivalentes sur E , alors toute suite $(x_n)_n$ de E convergente dans (E, N) est convergente dans (E, N') avec la même limite.

Remarque :

Critère pratique pour montrer que deux normes ne sont pas équivalentes : $x_n \rightarrow 0_E$ pour N mais pas pour N' .

2.5. Comparaison de normes

Chapitre 3

Norme sur un espace vectoriel.

Suites dans un espace vectoriel normé

Convergence et divergence d'une suite

Opérations sur les suites convergentes

Suites bornées
Suites extraites
et valeurs d'adhérence

Comparaison de normes

Topologie d'un espace vectoriel normé

Exemple :

$E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de E définie par
 $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in [0, 1], \quad f_n(t) = t^n$

- $\|f_n\|_1 =$
- $\|f_n\|_2 =$
- $\|f_n\|_\infty =$

Conclusion ?

Exercice 3

$\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont-elles équivalentes sur $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$?

2.5. Comparaison de normes

Chapitre 3

Norme sur un
espace
vectoriel.

Suites dans un
espace
vectoriel
normé

Convergence et
divergence d'une
suite

Opérations sur
les suites
convergentes

Suites bornées

Suites extraites
et valeurs
d'adhérence

Comparaison de
normes

Topologie
d'un espace
vectoriel
normé

Proposition 17

Les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur \mathbb{K}^n sont équivalentes deux à deux.

Remarques :

- On a la suite d'inégalités :
- En fait, toutes les normes sont équivalentes en dimension finie !

Table des matières

Chapitre 3

Norme sur un
espace
vectoriel.

Suites dans un
espace
vectoriel
normé

**Topologie
d'un espace
vectoriel
normé**

Voisinage d'un
point

Ouverts d'un
espace vectoriel
normé

Fermés d'un
espace vectoriel
normé

Intérieur d'une
partie

Adhérence d'une
partie

Intérieur vs
adhérence,
frontière

Caractérisation
séquentielle de
l'adhérence et
des fermés

1 Norme sur un espace vectoriel.

2 Suites dans un espace vectoriel normé

3 Topologie d'un espace vectoriel normé

Chapitre 3

Norme sur un
espace
vectoriel.

Suites dans un
espace
vectoriel
normé

**Topologie
d'un espace
vectoriel
normé**

Voisinage d'un
point

Ouverts d'un
espace vectoriel
normé

Fermés d'un
espace vectoriel
normé

Intérieur d'une
partie

Adhérence d'une
partie

Intérieur vs
adhérence,
frontière

Caractérisation
séquentielle de
l'adhérence et
des fermés

3. Topologie d'un espace vectoriel normé

3. Topologie d'un espace vectoriel normé

Chapitre 3

Norme sur un
espace
vectoriel.

Suites dans un
espace
vectoriel
normé

Topologie
d'un espace
vectoriel
normé

**Voisinage d'un
point**

Ouverts d'un
espace vectoriel
normé

Fermés d'un
espace vectoriel
normé

Intérieur d'une
partie

Adhérence d'une
partie

Intérieur vs
adhérence,
frontière

Caractérisation
séquentielle de
l'adhérence et
des fermés

3.1. Voisinage d'un point

3.1. Voisinage d'un point

Chapitre 3

Norme sur un espace vectoriel.

Suites dans un espace vectoriel normé

Topologie d'un espace vectoriel normé

Voisinage d'un point

Ouverts d'un espace vectoriel normé

Fermés d'un espace vectoriel normé

Intérieur d'une partie

Adhérence d'une partie

Intérieur vs adhérence, frontière

Caractérisation séquentielle de l'adhérence et des fermés

Definition 15

Soit $a \in E$ et $V \subset E$. On dit que V est un *voisinage* de a lorsqu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(a, \varepsilon) \subset V$.

Exercice 4

Soit $a \in E$. On note $\mathcal{V}(a)$ l'ensemble des voisinages de a . Traduire en français et montrer :

- a) $E \in \mathcal{V}(a)$
- b) $\forall V \in \mathcal{V}(a), a \in V$
- c) $\forall A \in \mathcal{P}(E), (\exists V \in \mathcal{V}(a), V \subset A) \Rightarrow A \in \mathcal{V}(a)$.
- d) $V \in \mathcal{V}(a) \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0, B_f(a, \varepsilon) \subset V$

3. Topologie d'un espace vectoriel normé

Chapitre 3

Norme sur un
espace
vectoriel.

Suites dans un
espace
vectoriel
normé

Topologie
d'un espace
vectoriel
normé

Voisinage d'un
point

**Ouverts d'un
espace vectoriel
normé**

Fermés d'un
espace vectoriel
normé

Intérieur d'une
partie

Adhérence d'une
partie

Intérieur vs
adhérence,
frontière

Caractérisation
séquentielle de
l'adhérence et
des fermés

3.2. Ouverts d'un espace vectoriel normé

3.2. Ouverts d'un espace vectoriel normé

Chapitre 3

Norme sur un
espace
vectoriel.

Suites dans un
espace
vectoriel
normé

Topologie
d'un espace
vectoriel
normé

Voisinage d'un
point

Ouverts d'un
espace vectoriel
normé

Fermés d'un
espace vectoriel
normé

Intérieur d'une
partie

Adhérence d'une
partie

Intérieur vs
adhérence,
frontière

Caractérisation
séquentielle de
l'adhérence et
des fermés

Definition 16

Une partie A de E est un *ouvert* (ou une *partie ouverte*) de E lorsqu'elle est voisinage de chacun de ses points :

$$\forall x \in A, \quad \exists \varepsilon > 0, \quad B(x, \varepsilon) \subset A$$

L'ensemble de tous les ouverts de E est appelée la *topologie* de E .

Exemples :

E , \emptyset , les intervalles ouverts dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

3.2. Ouverts d'un espace vectoriel normé

Chapitre 3

Norme sur un espace vectoriel.

Suites dans un espace vectoriel normé

Topologie d'un espace vectoriel normé

Voisinage d'un point

Ouverts d'un espace vectoriel normé

Fermés d'un espace vectoriel normé

Intérieur d'une partie

Adhérence d'une partie

Intérieur vs adhérence, frontière

Caractérisation séquentielle de l'adhérence et des fermés

Exercice 5

Montrer que toute boule ouverte de E est un ouvert.

Proposition 18

Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts de E . Alors :

- $\bigcup_{i \in I} A_i$ est un ouvert.
- **si I est fini**, $\bigcap_{i \in I} A_i$ est ouvert.

Remarque :

$\bigcap_{i \in I} A_i$ dans le cas I infini ?

3. Topologie d'un espace vectoriel normé

Chapitre 3

Norme sur un espace vectoriel.

Suites dans un espace vectoriel normé

Topologie d'un espace vectoriel normé

Voisinage d'un point

Ouverts d'un espace vectoriel normé

Fermés d'un espace vectoriel normé

Intérieur d'une partie

Adhérence d'une partie

Intérieur vs adhérence, frontière

Caractérisation séquentielle de l'adhérence et des fermés

3.3. Fermés d'un espace vectoriel normé

3.3. Fermés d'un espace vectoriel normé

Chapitre 3

Norme sur un espace vectoriel.

Suites dans un espace vectoriel normé

Topologie d'un espace vectoriel normé

Voisinage d'un point

Ouverts d'un espace vectoriel normé

Fermés d'un espace vectoriel normé

Intérieur d'une partie

Adhérence d'une partie

Intérieur vs adhérence, frontière

Caractérisation séquentielle de l'adhérence et des fermés

Definition 17

Une partie F de E est un *fermé* (ou une *partie fermée*) de E lorsque son complémentaire F^c est un ouvert de E .

Exemples :

E , \emptyset , les intervalles fermés dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

Remarques :

- Partie ni ouverte ni fermée ?
- Partie à la fois ouverte et fermée ?
- **Ne pas confondre fermé et borné.**

3.3. Fermés d'un espace vectoriel normé

Chapitre 3

Norme sur un espace vectoriel.

Suites dans un espace vectoriel normé

Topologie d'un espace vectoriel normé

Voisinage d'un point

Ouverts d'un espace vectoriel normé

Fermés d'un espace vectoriel normé

Intérieur d'une partie

Adhérence d'une partie

Intérieur vs adhérence, frontière

Caractérisation séquentielle de l'adhérence et des fermés

Exercice 6

Montrer que toute boule fermée de E est un fermé. Montrer que toute sphère de E est un fermé.

Proposition 19

Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille de fermés de E . Alors :

- $\bigcap_{i \in I} F_i$ est un fermé.
- **si I est fini, $\bigcup_{i \in I} F_i$ est fermé.**

Remarque :

$\bigcup_{i \in I} F_i$ dans le cas I infini ?

3. Topologie d'un espace vectoriel normé

Chapitre 3

Norme sur un
espace
vectoriel.

Suites dans un
espace
vectoriel
normé

Topologie
d'un espace
vectoriel
normé

Voisinage d'un
point

Ouverts d'un
espace vectoriel
normé

Fermés d'un
espace vectoriel
normé

**Intérieur d'une
partie**

Adhérence d'une
partie

Intérieur vs
adhérence,
frontière

Caractérisation
séquentielle de
l'adhérence et
des fermés

3.4. Intérieur d'une partie

3.4. Intérieur d'une partie

Chapitre 3

Norme sur un espace vectoriel.

Suites dans un espace vectoriel normé

Topologie d'un espace vectoriel normé

Voisinage d'un point

Ouverts d'un espace vectoriel normé

Fermés d'un espace vectoriel normé

Intérieur d'une partie

Adhérence d'une partie

Intérieur vs adhérence, frontière

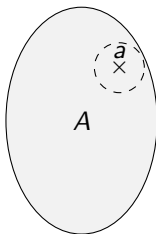
Caractérisation séquentielle de l'adhérence et des fermés

Definition 18

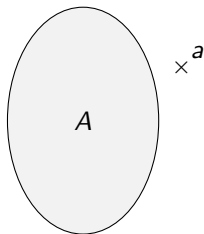
Soit A une partie de E , et $a \in E$. On dit que a est un point *intérieur* à A lorsqu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(a, \varepsilon) \subset A$.

Remarque :

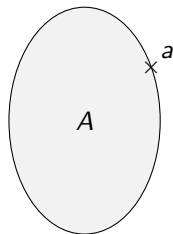
a est intérieur à $A \iff A$ est un voisinage de a .



a intérieur



a pas intérieur



a pas intérieur

3.4. Intérieur d'une partie

Chapitre 3

Norme sur un
espace
vectoriel.

Suites dans un
espace
vectoriel
normé

Topologie
d'un espace
vectoriel
normé

Voisinage d'un
point

Ouverts d'un
espace vectoriel
normé

Fermés d'un
espace vectoriel
normé

Intérieur d'une
partie

Adhérence d'une
partie

Intérieur vs
adhérence,
frontière

Caractérisation
séquentielle de
l'adhérence et
des fermés

Définition 19

Soit A une partie de E . On appelle *intérieur* de A et on note $\overset{\circ}{A}$, l'ensemble de tous les points intérieurs à A .

Proposition 20

Pour $A \subset E$, $\overset{\circ}{A}$ est la réunion de tous les ouverts contenus dans A .

Remarque :

$\overset{\circ}{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans A .

3.4. Intérieur d'une partie

Chapitre 3

Norme sur un espace vectoriel.

Suites dans un espace vectoriel normé

Topologie d'un espace vectoriel normé

Voisinage d'un point

Ouverts d'un espace vectoriel normé

Fermés d'un espace vectoriel normé

Intérieur d'une partie

Adhérence d'une partie

Intérieur vs adhérence, frontière

Caractérisation séquentielle de l'adhérence et des fermés

Proposition 21

Soit $A, B \subset E$.

- a) $A \subset B \Rightarrow \overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$.
- b) $\overset{\circ}{A} \subset A$ avec égalité **ssi** A est ouvert
- c) $\overset{\circ}{\overset{\circ}{A}} = \overset{\circ}{A}$

3. Topologie d'un espace vectoriel normé

Chapitre 3

Norme sur un
espace
vectoriel.

Suites dans un
espace
vectoriel
normé

Topologie
d'un espace
vectoriel
normé

Voisinage d'un
point

Ouverts d'un
espace vectoriel
normé

Fermés d'un
espace vectoriel
normé

Intérieur d'une
partie

**Adhérence d'une
partie**

Intérieur vs
adhérence,
frontière

Caractérisation
séquentielle de
l'adhérence et
des fermés

3.5. Adhérence d'une partie

3.5. Adhérence d'une partie

Chapitre 3

Norme sur un espace vectoriel.

Suites dans un espace vectoriel normé

Topologie d'un espace vectoriel normé

Voisinage d'un point

Ouverts d'un espace vectoriel normé

Fermés d'un espace vectoriel normé

Intérieur d'une partie

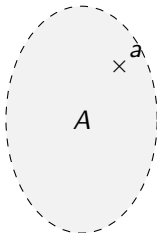
Adhérence d'une partie

Intérieur vs adhérence, frontière

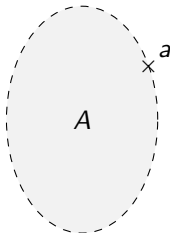
Caractérisation séquentielle de l'adhérence et des fermés

Definition 20

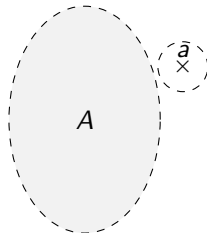
Soit A une partie de E et $a \in E$. On dit que a est un point *adhérent* à A lorsque pour tout $r > 0$, $B(a, r) \cap A \neq \emptyset$.



a adhérent



a adhérent



a pas adhérent

3.5. Adhérence d'une partie

Chapitre 3

Norme sur un espace vectoriel.

Suites dans un espace vectoriel normé

Topologie d'un espace vectoriel normé

Voisinage d'un point

Ouverts d'un espace vectoriel normé

Fermés d'un espace vectoriel normé

Intérieur d'une partie

Adhérence d'une partie

Intérieur vs adhérence, frontière

Caractérisation séquentielle de l'adhérence et des fermés

Definition 21

Pour une partie non vide A de E et $a \in E$, on appelle *distance* de a à A le réel positif :

$$d(a, A) = \inf_{x \in A} d(a, x) = \inf_{x \in A} \|x - a\|$$

Proposition 22

Pour $A \subset E$ non vide, un point $a \in E$ est adhérent à A ssi $d(a, A) = 0$.

3.5. Adhérence d'une partie

Chapitre 3

Norme sur un espace vectoriel.

Suites dans un espace vectoriel normé

Topologie d'un espace vectoriel normé

Voisinage d'un point

Ouverts d'un espace vectoriel normé

Fermés d'un espace vectoriel normé

Intérieur d'une partie

Adhérence d'une partie

Intérieur vs adhérence, frontière

Caractérisation séquentielle de l'adhérence et des fermés

Définition 22

Soit A une partie de E . On appelle *adhérence* de A et on note \overline{A} , l'ensemble de tous les points adhérents à A .

Proposition 23

Pour $A \subset E$, \overline{A} est l'intersection de tous les fermés contenant A .

Remarque :

\overline{A} est le plus petit fermé contenant A .

3.5. Adhérence d'une partie

Chapitre 3

Norme sur un espace vectoriel.

Suites dans un espace vectoriel normé

Topologie d'un espace vectoriel normé

Voisinage d'un point

Ouverts d'un espace vectoriel normé

Fermés d'un espace vectoriel normé

Intérieur d'une partie

Adhérence d'une partie

Intérieur vs adhérence, frontière

Caractérisation séquentielle de l'adhérence et des fermés

Proposition 24

Soit $A, B \subset E$.

- a) $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$.
- b) $A \subset \overline{A}$ avec égalité **ssi** A est fermé
- c) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$

3. Topologie d'un espace vectoriel normé

Chapitre 3

Norme sur un
espace
vectoriel.

Suites dans un
espace
vectoriel
normé

Topologie
d'un espace
vectoriel
normé

Voisinage d'un
point

Ouverts d'un
espace vectoriel
normé

Fermés d'un
espace vectoriel
normé

Intérieur d'une
partie

Adhérence d'une
partie

**Intérieur vs
adhérence,
frontière**

Caractérisation
séquentielle de
l'adhérence et
des fermés

3.6. Intérieur vs adhérence, frontière

3.6. Intérieur vs adhérence, frontière

Chapitre 3

Norme sur un espace vectoriel.

Suites dans un espace vectoriel normé

Topologie d'un espace vectoriel normé

Voisinage d'un point

Ouverts d'un espace vectoriel normé

Fermés d'un espace vectoriel normé

Intérieur d'une partie

Adhérence d'une partie

Intérieur vs adhérence, frontière

Caractérisation séquentielle de l'adhérence et des fermés

Proposition 25

Pour toute partie A de E on a :

- $(\overline{A})^c = (A^c)^\circ$
- $(\overset{\circ}{A})^c = \overline{A^c}$

Remarque :

En passant aux complémentaires :

- a intérieur à A **ssi** a pas adhérent à A^c .
- a est adhérent à A **ssi** a n'est pas intérieur à A^c .

3.6. Intérieur vs adhérence, frontière

Chapitre 3

Norme sur un espace vectoriel.

Suites dans un espace vectoriel normé

Topologie d'un espace vectoriel normé

Voisinage d'un point

Ouverts d'un espace vectoriel normé

Fermés d'un espace vectoriel normé

Intérieur d'une partie

Adhérence d'une partie

Intérieur vs adhérence, frontière

Caractérisation séquentielle de l'adhérence et des fermés

Definition 23

Soit A une partie de E et $a \in E$. On dit que a est un *point frontière* lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \quad B(a, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset \text{ et } B(a, \varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset$$

On appelle *frontière* de A et on note $\text{Fr}(A)$ l'ensemble des points frontière de A .

Remarque :

$\text{Fr}(A) = \overline{A} \cap \overline{A^c} = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$. C'est une partie fermée.

Exemples :

Frontière d'une boule ? Frontière de $[0, 1[$ dans \mathbb{R} ?

3. Topologie d'un espace vectoriel normé

Chapitre 3

Norme sur un
espace
vectoriel.

Suites dans un
espace
vectoriel
normé

Topologie
d'un espace
vectoriel
normé

Voisinage d'un
point

Ouverts d'un
espace vectoriel
normé

Fermés d'un
espace vectoriel
normé

Intérieur d'une
partie

Adhérence d'une
partie

Intérieur vs
adhérence,
frontière

Caractérisation
séquentielle de
l'adhérence et
des fermés

3.7. Caractérisation séquentielle de l'adhérence et des fermés

3.7. Caractérisation séquentielle de l'adhérence et des fermés

Chapitre 3

Norme sur un espace vectoriel.

Suites dans un espace vectoriel normé

Topologie d'un espace vectoriel normé

Voisinage d'un point

Ouverts d'un espace vectoriel normé

Fermés d'un espace vectoriel normé

Intérieur d'une partie

Adhérence d'une partie

Intérieur vs adhérence, frontière

Caractérisation séquentielle de l'adhérence et des fermés

Proposition 26

Soit A une partie de E .

- a) $a \in E$ est adhérent à A **ssi** il existe une suite de A qui converge vers a .
- b) A est fermée **ssi** toute suite de A qui converge dans E a sa limite dans A .

Remarque :

Une partie fermée empêche les suites de "s'échapper".

3.7. Caractérisation séquentielle de l'adhérence et des fermés

Chapitre 3

Norme sur un espace vectoriel.

Suites dans un espace vectoriel normé

Topologie d'un espace vectoriel normé

Voisinage d'un point

Ouverts d'un espace vectoriel normé

Fermés d'un espace vectoriel normé

Intérieur d'une partie

Adhérence d'une partie

Intérieur vs adhérence, frontière

Caractérisation séquentielle de l'adhérence et des fermés

Proposition 27

Si $\|\cdot\|'$ est une norme équivalente à $\|\cdot\|$, $(E, \|\cdot\|)$ et $(E, \|\cdot\|')$ ont la même topologie.

Remarques :

- Mêmes ouverts, fermés, intérieur, adhérence, ensemble de voisinages.
- Boules différentes !

3. Topologie d'un espace vectoriel normé

Chapitre 3

Norme sur un
espace
vectoriel.

Suites dans un
espace
vectoriel
normé

Topologie
d'un espace
vectoriel
normé

Voisinage d'un
point

Ouverts d'un
espace vectoriel
normé

Fermés d'un
espace vectoriel
normé

Intérieur d'une
partie

Adhérence d'une
partie

Intérieur vs
adhérence,
frontière

Caractérisation
séquentielle de
l'adhérence et
des fermés

3.8. Densité

3.8. Densité

Chapitre 3

Norme sur un espace vectoriel.

Suites dans un espace vectoriel normé

Topologie d'un espace vectoriel normé

Voisinage d'un point

Ouverts d'un espace vectoriel normé

Fermés d'un espace vectoriel normé

Intérieur d'une partie

Adhérence d'une partie

Intérieur vs adhérence, frontière

Caractérisation séquentielle de l'adhérence et des fermés

Definition 24

On dit qu'une partie A de E est *dense* dans E lorsque $\overline{A} = E$.

Proposition 28

Soit A une partie de E . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) A est dense dans E
- (ii) Pour toute partie ouverte non vide Ω , on a $A \cap \Omega \neq \emptyset$.
- (iii) Pour tout $a \in E$, il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers a .

Exemple :

\mathbb{Q} et \mathbb{Q}^c dans \mathbb{R} .

3. Topologie d'un espace vectoriel normé

Chapitre 3

Norme sur un
espace
vectoriel.

Suites dans un
espace
vectoriel
normé

Topologie
d'un espace
vectoriel
normé

Voisinage d'un
point

Ouverts d'un
espace vectoriel
normé

Fermés d'un
espace vectoriel
normé

Intérieur d'une
partie

Adhérence d'une
partie

Intérieur vs
adhérence,
frontière

Caractérisation
séquentielle de
l'adhérence et
des fermés

3.9. Parties compactes

3.9. Parties compactes

Chapitre 3

Norme sur un espace vectoriel.

Suites dans un espace vectoriel normé

Topologie d'un espace vectoriel normé

Voisinage d'un point

Ouverts d'un espace vectoriel normé

Fermés d'un espace vectoriel normé

Intérieur d'une partie

Adhérence d'une partie

Intérieur vs adhérence, frontière

Caractérisation séquentielle de l'adhérence et des fermés

Definition 25

Soit $K \subset E$. On dit que K est un *compact* de E , ou une *partie compacte* de E , lorsque toute suite de K admet une sous-suite convergente vers un élément de K .

Remarques :

- Toute suite de K admet au moins une valeur d'adhérence dans K .
- Propriété de Bolzano-Weierstrass.

3.9. Parties compactes

Chapitre 3

Norme sur un espace vectoriel.

Suites dans un espace vectoriel normé

Topologie d'un espace vectoriel normé

Voisinage d'un point

Ouverts d'un espace vectoriel normé

Fermés d'un espace vectoriel normé

Intérieur d'une partie

Adhérence d'une partie

Intérieur vs adhérence, frontière

Caractérisation séquentielle de l'adhérence et des fermés

Exercice 7

Montrer que toute partie finie de E est une partie compacte.

Proposition 29

Soit K un compact de E et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de K . Alors la suite $(u_n)_n$ converge **ssi** elle admet une unique valeur d'adhérence.

3.9. Parties compactes

Chapitre 3

Norme sur un espace vectoriel.

Suites dans un espace vectoriel normé

Topologie d'un espace vectoriel normé

Voisinage d'un point

Ouverts d'un espace vectoriel normé

Fermés d'un espace vectoriel normé

Intérieur d'une partie

Adhérence d'une partie

Intérieur vs adhérence, frontière

Caractérisation séquentielle de l'adhérence et des fermés

Proposition 30

Si K est une partie compacte de E , alors K est fermée et bornée.

Remarque :

Réciproque fausse en général, mais vraie en dimension finie !

Proposition 31

Si K est une partie compacte de E et F un fermé, alors $F \cap K$ est compact.