Suites et séries de fonctions

Lundi 29 septembre 2025

Table des matières

Table des matières

1. Compléments sur les séries numériques

1.1. Convergence et divergence

Remarque :

E est un espace vectoriel de dimension finie.

Définition 1

Convergence d'une série $\sum u_n$: convergence de la suite $(S_n)_n$ des sommes partielles.

1.1. Convergence et divergence

Définition 2

Restes d'une série $\sum u_n$ convergente de somme S :

$$R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

Proposition 1

Si $\sum u_n$ est convergente alors $R_n \to 0$.

Exercice 1

Rappeler la nature de la série géométrique $\sum z^n$ suivant la valeur de $z \in \mathbb{C}$ et le cas échéant expliciter la somme et la suite des restes.

1.2. Propriétés

1.2. Propriétés

Proposition 2

Si $\sum u_n$ est convergente alors $u_n \to 0$

Remarques :

- réciproque fausse.
- divergence grossière ?

Proposition 3

Une suite $(u_n)_n$ converge **ssi** la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge.

Remarque :

Série *telescopique*.

Proposition 4

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent alors $\sum(u_n + \lambda v_n)$ converge et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(u_n + \lambda v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

1.3. Convergence absolue

1.3. Convergence absolue

Rappel :

...

Proposition 5

Étant donné deux normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ sur E, la série $\sum \|u_n\|$ converge **ssi** la série $\sum \|u_n\|'$ converge.

Definition 3

On dit qu'une série $\sum u_n$ est *absolument convergente* lorsque la série $\sum \|u_n\|$ est convergente, où $\|\cdot\|$ est une norme quelconque sur E.

Remarque :

En dimension finie seulement !

1.3. Convergence absolue

Theoreme 1

Si $\sum u_n$ est absolument convergente, alors $\sum u_n$ est convergente. On a par ailleurs :

$$\left\| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right\| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \|u_n\|$$

Remarque :

Réciproque fausse. Série semi-convergente ?

Exemple :

Exponentielle matricielle.

1.4. Sommation de relations de comparaison

1.4. Sommation de relations de comparaison

Rappel :

. . .

1.4. Sommation de relations de comparaison

Theoreme 2

(de sommation d'une relation de comparaison) Soient deux séries numériques $\sum u_n$ et $\sum v_n$, $(U_n)_n$ et (V_n) leur suite de sommes partielles respective, et, en cas de convergence, $(R_n)_n$ et $(T_n)_n$ les suites des restes. On suppose que v_n est positive à partir d'un certain rang. Alors :

a) Si $u_n = \mathrm{o}(v_n)$, on a :
- Si $\sum v_n$ diverge, $U_n = \mathrm{o}(V_n)$
- Si $\sum v_n$ converge, $\sum u_n$ aussi et $R_n = \mathrm{o}(T_n)$

b) Si $u_n = \mathrm{O}(v_n)$, on a :
- Si $\sum v_n$ diverge, $U_n = \mathrm{O}(V_n)$
- Si $\sum v_n$ converge, $\sum u_n$ aussi et $R_n = \mathrm{O}(T_n)$

c) Si $u_n \sim v_n$, $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature avec :
- En cas de divergence, $U_n \sim V_n$
- En cas de convergence, $R_n \sim T_n$

Corollaire 1

(lemme de Cesàro) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$V_n = \frac{u_0 + \cdots + u_n}{n+1}$$

Alors si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite ℓ (finie ou infinie), la suite $(V_n)_n$ tend vers ℓ également.

1.5. Comparaison série-intégrale

1.5. Comparaison série-intégrale

Méthode :

Pour f décroissante, intégration puis sommation de $f(k+1) \leqslant f(t) \leqslant f(k)$:

$$f(n) \leqslant \sum_{k=0}^{n} f(k) - \int_0^n f(t)\mathrm{d}t \leqslant f(0)$$

Plus généralement :

$$f(n) \leqslant \sum_{k=p}^{n} f(k) - \int_p^n f(t)\mathrm{d}t \leqslant f(p)$$

Exercice 2

À l'aide de la méthode précédente précédent, retrouver la nature de la série $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ suivant la valeur de α et :

- En cas de divergence, donner un équivalent asymptotique des sommes partielles $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$.
- En cas de convergence, un équivalent asymptotique des restes $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

1.6. Règle de d'Alembert

1.6. Règle de d'Alembert

Proposition 6

Soit $\sum u_n$ une série réelle ou complexe à termes non nuls telle que $\dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|}$ admet une limite $l \in \mathbb{R}^+ \cup +\infty$. Alors :

- Si $\ell < 1$ la série $\sum u_n$ est absolument convergente (donc convergente)
- si $\ell > 1$ la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

Remarque :

Cas $\ell = 1$: on ne peut rien conclure !

Exercice 3

Établir la convergence de la série positive $\sum \dfrac{n!}{n^n}$.

Table des matières

2. Modes de convergence des suites et séries de fonctions

2.1. Convergence simple.

2.1. Convergence simple.

Definition 4

On dit que la suite $(f_n)_n$ *converge simplement* sur A si, pour tout $x \in A$, $\big(f_n(x)\big)_n$ est une suite de F convergente.
Dans ce cas, l'application f définie sur A par $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$ est appelée *limite simple* de $(f_n)_n$.

Remarque :

Étudier la convergence simple : trouver l'ensemble des $x \in A$ tel que $(f_n(x))$ converge.

2.1. Convergence simple.

Exemple :

Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction $f_n : x \mapsto x^n$, définie sur $\mathbb{R}$. La suite $(f_n)_n$ converge simplement sur $]-1,1]$ vers la fonction :

$$f \ : \ x \longmapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x \in]-1,1[\\ 1 \text{ si } x = 1 \end{cases}$$

Exercice 4

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, convergeant simplement vers $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Montrez les propriétés suivantes :

a) Si f_n est croissante pour tout n, f est croissante.

b) Si f_n est T-périodique pour tout n, alors f est T-périodique.

2.2. Convergence uniforme.

Definition 5

On dit que la suite $(f_n)_n$ *converge uniformément* sur A vers une fonction $f : A \to F$, lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0\,,\quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\,,\quad \forall x \in A\,,\quad \forall n \in \mathbb{N}\,,\quad n \geqslant n_0 \Longrightarrow \left\| f_n(x) - f(x) \right\| \leqslant \varepsilon.$$

Remarque :

Comparaison avec la convergence simple en terme de quantificateurs ?

2.2. Convergence uniforme.

Proposition 7

En munissant l'espace $\mathcal{B}(A,F)$ des fonctions bornées de la norme $N_\infty^A : f \longmapsto \sup\limits_{x\in A} \|f(x)\|$, une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{B}(A,F)$ converge uniformément sur A vers $f : A \to F$ **ssi** elle converge au sens de N_∞^A.

Remarques :

- Notation $\|\cdot\|_\infty$.
- Si les f_n non bornées ?

2.2. Convergence uniforme.

Proposition 8

Si la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur A, alors elle converge simplement vers f sur A. La réciproque est fausse.

Exemple :

$f_n : x \mapsto x^n$ sur $]-1,1]$.

- Et sur $]-1,1[$?
- Et sur $[-a,a]$, avec $0 \leqslant a < 1$?

2.2. Convergence uniforme.

Proposition 9

Si la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur A, alors pour toute suite $(x_n)_n$ de A, on a $\|f_n(x_n) - f(x_n)\| \to 0$.

Exercice 5

Soit $a > 0$. Étudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f_n : x \mapsto n^a x\,\mathrm{e}^{-nx}$. Interpréter géométriquement avec les représentations graphiques.

2.3. Convergence simple et uniforme pour une série de fonctions

2.3. Convergence simple et uniforme pour une série de fonctions

Definition 6

On dit que la série $\sum f_n$ *converge simplement* sur A, lorsque pour tout $x \in A$, la série vectorielle $\sum f_n(x)$ converge.

Dans ce cas, l'application S définie sur A par $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est appelée *somme* de la série $\sum f_n$.

Exemple :

$\sum f_n$, avec $f_n : x \mapsto x^n$, sur $]-1, 1[$.

2.3. Convergence simple et uniforme pour une série de fonctions

Definition 7

On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ *converge uniformément* sur A lorsque la suite $(S_n)_n$ des sommes partielles converge uniformément sur A.

Remarque :

Ne peut s'écrire qu'en introduisant la fonction somme S.

Proposition 10

Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\sum f_n$ converge uniformément sur A.

(ii) $\sum f_n$ converge simplement sur A et la suite $(R_n)_n$ des restes converge uniformément sur A vers la fonction nulle.

Exemple :

$\sum f_n$, avec $f_n : x \mapsto x^n$, sur $]-1,1[$. Et sur les segments de $]-1,1[$?

2.4. Convergence normale.

2.4. Convergence normale.

Definition 8

On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ *converge normalement* sur A si f_n est bornée pour tout $n \in \mathbb{N}$ et si la série numérique $\sum \sup_{x \in A} \|f_n(x)\|$ est convergente.

Remarque :

Dans l'espace $B(A, F)$, muni de $\|\cdot\|_\infty$, analogie avec une série numérique ou vectorielle (de l'espace $\mathbb{K}^p$, muni d'une norme quelconque $\|\cdot\|$) :

- Convergence simple $\leftrightarrow$ "par coordonnée"
- Convergence uniforme $\leftrightarrow$ "tout court" (avec $\|\cdot\|$)
- Congergence normale $\leftrightarrow$ "absolue" (avec $\|\cdot\|$)

2.4. Convergence normale.

Proposition 11

Si la série de fonction $\sum f_n$ converge normalement sur A, alors elle converge uniformément sur A.

Remarque :

Réicproque fausse.

2.4. Convergence normale.

Exemple :

$\sum f_n$, avec $f_n : x \mapsto \dfrac{(-1)^n}{n+x}$, sur $I =]0, +\infty[$.

Exercice 6

Soit $a > 0$. Étudier la convergence simple, normale, et uniforme de la série de fonctions $\sum f_n$, avec les f_n définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f_n : x \mapsto n^a x \, \mathrm{e}^{-nx}$.

Table des matières

3. Régularité de la limite ou de la somme

3.1. Continuité

3.1. Continuité

Proposition 12

Soit $a \in A$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en a. Alors :

- Si $(f_n)_n$ converge uniformément sur A, sa limite $f : A \to F$ est continue en a.
- Si $\sum f_n$ converge uniformément sur A, sa somme $S : A \to F$ est continue en a.

Corollaire 2

Toute limite ou somme uniforme de fonctions continues sur A est continue sur A.

Remarque :

Pour une série de fonctions : la convergence normale suffit.

3.1. Continuité

Proposition 13

Supposons les f_n continues et soit $(V_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E telle que $A \subset \bigcup_{i\in I} \mathring{V}_i$. Alors :

- Si $(f_n)_n$ converge uniformément sur tout $V_i \cap A$, sa limite est continue sur A.
- Si $\sum f_n$ converge uniformément sur tout $V_i \cap A$, sa somme est continue sur A.

Remarque :

En pratique, A est un intervalle de $\mathbb{R}$, et les V_i des segments.

3.1. Continuité

Exercice 7

Montrer que la fonction *zeta de Riemann* $\zeta : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ est bien définie et continue sur $]1, +\infty[$.

Remarque :

Par contraposée, si la limite ou somme n'est pas continues, alors que les f_n le sont, il n'y a pas convergence uniforme.

3.2. Théorème de la double-limite.

3.2. Théorème de la double-limite.

Theoreme 3

(de la double limite) On suppose que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers $f : A \to F$ sur A. Soit $a \in \overline{A}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n admet une limite $\ell_n \in F$ en a. Alors la suite $(\ell_n)_n$ admet une limite $\ell \in F$ et $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$. Autrement dit :

$$\lim_{x \to a} \left(\lim_{n \to +\infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \to +\infty} \left(\lim_{x \to a} f_n(x) \right).$$

Remarques :

- La convergence uniforme sur un voisinage de a suffit.
- Ce résultat s'adapte au cas $a = \pm\infty$ (cas $A = I$ intervalle non majoré/minoré).

3.2. Théorème de la double-limite.

Theoreme 4

(de la double limite) On suppose que la série $\sum f_n$ converge uniformément sur A, de somme S. Soit $a \in \overline{A}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n admet une limite $\ell_n \in F$ en a. Alors la série numérique $\sum \ell_n$ converge, et sa somme L est la limite de la fonction S en a.
Autrement dit :

$$\lim_{x \to a} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\lim_{x \to a} f_n(x) \right).$$

Remarques :

- Mêmes remarques que dans la version "suite".
- La convergence normale suffit.

3.3. Intégration.

3.3. Intégration.

Proposition 14

Soit $(u_n)_n$ une suite de fonctions continues définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans F, et soient $a, b \in I$, avec $a < b$.

a) Si (u_n) converge uniformément vers u sur $[a, b]$, alors :

$$\int_a^b u_n(t)\mathrm{d}t \longrightarrow \int_a^b u(t)\mathrm{d}t$$

b) Si $\sum u_n$ converge uniformément sur $[a, b]$, de somme s alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b u_n(t)\mathrm{d}t = \int_a^b s(t)\mathrm{d}t$$

3.3. Intégration.

Remarque :

On a en fait montré que $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ implique $\|f_n - f\|_1 \to 0$.

Exemple :

Cas de l'intégration sur $[0, 1]$ de $f_n : t \mapsto n^a t\, \mathrm{e}^{-nt}$, avec $a > 0$ fixé.

3.3. Intégration.

Proposition 15

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $U_n : x \mapsto \displaystyle\int_a^x u_n(t)\mathrm{d}t$.

a) Si $(u_n)_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers $u : I \to F$, alors $(U_n)_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers

$$U : x \to \int_a^x u(t)\mathrm{d}t$$

b) Si $\sum u_n$ converge uniformément sur tout segment de I, de somme $s : I \to F$, alors $\sum U_n$ converge uniformément sur tout segment de I et a pour somme

$$S : x \to \int_a^x s(t)\mathrm{d}t$$

3.4. Dérivation.

3.4. Dérivation.

Proposition 16

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

a) On suppose que :

- $(f_n)_n$ cv **simplement** sur I, de limite f.
- $(f_n')_n$ cv **uniformément** sur tout segment de I, de limite g.

Alors $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur tout segment de I, f est de classe $\mathcal{C}^1$ et $f' = g$.

b) On suppose que :

- $\sum f_n$ cv **simplement** sur I, de somme S,
- $\sum f_n'$ cv **uniformément** sur tout segment de I, de somme T.

Alors $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment de I, sa somme S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $S' = T$.

3.4. Dérivation.

Proposition 17

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur I.

a) On suppose que :

- $(f_n^{(j)})_n$ converge **simplement** sur I pour tout $j \in [\![0, k-1]\!]$;
- $(f_n^{(k)})_n$ converge **uniformément** sur tout segment de I

Alors les convergences sont en fait uniformes sur tout segment de I, la limite f de $(f_n)_n$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et $f^{(k)}$ est la limite de $(f_n^{(k)})_n$.

b) On suppose que :

- $\sum f_n^{(j)}$ converge **simplement** sur I pour tout $j \in [\![0, k-1]\!]$;
- $\sum f_n^{(k)}$ converge **uniformément** sur tout segment de I.

Alors les convergences sont en fait uniformes sur tout segment de I, la somme S de $\sum f_n$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et $S^{(k)}$ est la somme de $\sum f_n^{(k)}$.

3.4. Dérivation.

Remarque :

Dans les cas "pratiques" :

- Les f_n sont de classe $\mathcal{C}^\infty$
- On montre la convergence uniforme de $(f_n^{(k)})_n$ (ou de $\sum f_n^{(k)}$) pour tout $k \in \mathbb{N}$.

On peut en déduire que la limite f (ou la somme S) est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

3.5. Approximation uniforme

3.5. Approximation uniforme

Proposition 18

Soient $a \leqslant b$ dans $\mathbb{R}$ et soit $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ continue par morceaux. Il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escaliers sur $[a, b]$ qui converge uniformément vers f.

Remarque :

Définition de l'intégrale : limite des intégrales sur $[a, b]$ d'une suite de fonctions en escaliers convergeant uniformément vers f.

3.5. Approximation uniforme

Theoreme 5

(de Weierstrass) Soient $a \leqslant b$ dans $\mathbb{R}$ et soit $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ continue. Il existe une suite $(f_n)_n$ de fonctions polynomiales, à coefficients dans $\mathbb{K}$, qui converge uniformément vers f sur $[a, b]$.

Corollaire 3

L'ensemble des fonctions polynomiales sur $[a, b]$ est un sous-espace vectoriel dense dans l'espace $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ des fonctions continues sur $[a, b]$, relativement à la norme $\| \cdot \|_\infty$ sur $[a, b]$.