Devoir surveillé n° 3 - MPI

Samedi 18 octobre 2025.

Ce devoir surveillé, d'une durée de 4h est constitué de deux problèmes tout à fait indépendants issus des concours. Le premier est commun avec les MPI*. On attachera une attention particulière au soin et à la présentation, et à la rigueur de l'argumentation, tout en évitant les lourdeurs inutiles.

On maintient la petite règle supplémentaire du dernier devoir : ne pas répondre à une question si vous n'êtes pas sûr de le faire soigneusement, et avec les idées à peu près claires. Bon courage !

Problème 1 : Étude d'une famille de séries entières

Dans tout le problème, α désigne un nombre réel. On note $\mathbb{D}_\alpha$ l'ensemble des réels x pour lesquels la série entière $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n^\alpha}$ est convergente et on pose, pour tout $x \in \mathbb{D}_\alpha$:

$$f_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^\alpha}$$

Objectifs :

Ce problème est composé de deux **parties** indépendantes.
Dans la **partie I**, on étudie quelques propriétés élémentaires des fonctions f_α.
L'objectif de la **partie II** est de construire un logarithme complexe.

I. Quelques propriétés des fonctions f_α

Q1. Déterminer le rayon de convergence R commun aux séries entières définissant les fonctions f_α.

Q2. Déterminer, suivant les valeurs du réel α, le domaine de définition $\mathbb{D}_\alpha$ de la fonction f_α. *On distinguera les cas $\alpha \in]-\infty, 0]$, $\alpha \in]0, 1]$ et $\alpha \in]1, +\infty[$.*

Q3. On suppose dans cette question $\alpha > 0$. Déterminer, pour tout $x \in \mathbb{D}_\alpha$, le signe de $f_\alpha(x)$.

Q4. Expliciter f_0, f_{-1} et f_1.

Q5. Soit $\alpha > 1$. Prouver que f_α est continue sur $\mathbb{D}_\alpha$.

Q6. Soit $\alpha \leqslant 1$. Prouver que $\lim_{x\to 1^-} f_\alpha(x) = +\infty$. *On pourra comparer f_α à f_1.*

II. Un logarithme complexe

Q7. Donner sans démonstration le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction qui à $x \in]-1, 1[$ associe $\ln(1 + x)$.

Pour tout nombre complexe z, tel que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-z)^n}{n}$ est convergente, on note :

$$S(z) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-z)^n}{n}$$

Q8. Donner le rayon de convergence R de la série entière définissant S. Pour tout x réel élément de $]-R,R[$, déterminer la valeur de $\exp(S(x))$.

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $|z_0| < R$. On considère la série entière de la variable *réelle* t suivante :

$$\sum_{n\geqslant 1} (-1)^{n-1} \frac{z_0^n}{n} t^n.$$

En cas de convergence, on note $g(t)$ sa somme.
On a donc, pour $t \in \mathbb{R}$ tel que la série est convergente, $g(t) = S(tz_0)$.

Q9. Déterminer le rayon de convergence de la série entière définissant g.

Q10. Prouver que g est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1]$. Déterminer, pour tout $t \in [0,1]$, $g'(t)$.

Q11. On pose $h = \exp \circ g$. Prouver que pour tout $t \in [0,1]$:

$$h'(t) = \frac{z_0}{1+tz_0} h(t).$$

Q12. Résoudre l'équation différentielle de la question précédente et en déduire que :

$$\exp(S(z_0)) = z_0 + 1.$$

Problème 2 : Séries de Taylor et développement en série entière

Dans ce problème, toutes les fonctions considérées sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles.

Les questions **Q2.** et **Q9.** introduisent des intégrales sur $]0,+\infty[$, ce que nous n'avons pas encore étudié cette année. La mention **(5/2)** sur ces questions indiquent donc que pour avoir tous les points, certaines justifications ne sont attendues que pour les étudiants 5/2.

Partie préliminaire

Dans cette partie, les questions sont indépendantes les unes des autres et leurs résultats peuvent être admis dans la suite du problème.

Q1. Justifier, pour tout réel $x \in]-1,1[$, l'existence de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}$ et donner sa valeur.

Q2. **(5/2)** On rappelle que la fonction Γ est définie pour tout réel $x \in]0,+\infty[$ par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} \, \mathrm{d}t.$$

Démontrer que, pour tout réel $x \in]0,+\infty[$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ et en déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de $\Gamma(n)$.

Q3. Démontrer la formule de Taylor avec reste de Laplace (ou reste intégral) :
Si I est un intervalle contenant le réel a, si f est une fonction de I dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I, alors pour tout réel $x \in I$ et pour tout entier naturel n, on a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \, \mathrm{d}t.$$

ON RAPELLE LE THÉORÈME SUIVANT :

Si une fonction f admet un développement en série entière sur l'intervalle $]-a,a[$, alors :

- *la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-a,a[$,*
- *son développement en série entière est unique et donné par la série de Taylor de la fonction f à l'origine :*

$$\forall x \in]-a,a[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

I. Quelques exemples d'utilisation de ce théorème

Q4. On considère la fonction f définie par : $f(0) = 1$ et, pour tout réel $x \neq 0$, $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$.
Démontrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Q5. Expliciter une fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un voisinage de 0 et vérifiant, pour tout entier naturel n, l'égalité $f^{(n)}(0) = n\, n!$.

Q6. Un théorème des moments.
Soit f une fonction développable en série entière sur $]-R,R[$ avec $R > 1$:

$$\forall x \in]-R,R[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

On suppose que, pour tout entier naturel n, $\displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.
L'obectif de cette question est de montrer que f est identiquement nulle sur $]-R,R[$.

a) Démontrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f(x)\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ converge normalement sur l'intervalle $[0,1]$.

b) à l'aide du calcul de $\displaystyle\int_0^1 (f(x))^2\,\mathrm{d}x$, démontrer que la fonction f est nulle sur l'intervalle $[0,1]$.

c) Démontrer que la fonction f est nulle sur l'intervalle $]-R,R[$.

II. Contre-exemples

Q7. Donner un exemple de fonction f à la fois de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle I et développable en série entière au voisinage de l'origine, mais qui ne coïncide pas avec sa série de Taylor en 0 sur I tout entier.

Q8. Un exemple de fonction ne coïncidant avec sa série de Taylor en 0 sur aucun voisinage de 0.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(0) = 0$ et $\forall x \neq 0, f(x) = \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$.

a) Montrer que f est continue et dérivable en 0, et dessiner sans justification l'allure de sa courbe représentative.

b) Par les théorèmes généraux, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$.
Démontrer que, pour tout entier naturel n, il existe un polynôme P_n tel que, pour tout $x \in]0,+\infty[$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{x^{3n}} \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$.

c) Démontrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,+\infty[$ avec, pour tout entier naturel n, $f^{(n)}(0) = 0$.
Par parité, la fonction f ainsi définie est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

d) La fonction f est-elle développable en série entière sur un intervalle $]-r, r[$? Justifier soigneusement votre réponse.

Q9. Un exemple où la série de Taylor de la fonction f en 0 a un rayon nul.

Pour tout réel x, on pose : $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+tx^2}\,\mathrm{d}t$.

a) **(5/2)** Justifier que, pour tout réel x, la fonction $t \longmapsto \dfrac{e^{-t}}{1+tx^2}$ est bien intégrable sur $[0, +\infty[$, puis démontrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
On admettra que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que l'on obtient les dérivées successives en dérivant sous le signe intégrale.

b) Pour $t \in]0, +\infty[$, calculer, au moyen d'une série entière, les dérivées successives en 0 de la fonction $x \longmapsto \dfrac{e^{-t}}{1+tx^2}$ pour en déduire l'expression de $f^{(n)}(0)$ pour tout entier naturel n.

c) Quel est le rayon de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$?
La fonction f est-elle développable en série entière à l'origine ?

III. Condition suffisante

On se propose, dans cette partie, d'étudier une condition suffisante pour qu'une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle centré en 0 soit développable en série entière au voisinage de 0.

Q10. Soient a un réel strictement positif et f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle $]-a, a[$. On suppose qu'il existe un réel $M > 0$ tel que, pour tout $x \in]-a, a[$ et pour tout entier naturel n, $\left|f^{(n)}(x)\right| \leqslant M$.

a) Démontrer que la fonction f est développable en série entière au voisinage de l'origine.

b) Donner un exemple simple de fonction pour laquelle ce résultat s'applique.

Un corrigé

Problème 1 : Étude d'une famille de séries entières

Corrigé très concis, la rédaction devrait être un peu plus détaillée

I. Quelques propriétés des fonctions f_α

Q1. $\forall z \in \mathbb{C}$, $\left|\dfrac{z^n}{n^\alpha}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 & \text{si } |z|<1 \\ +\infty & \text{si } |z|>1 \end{cases}$ donc $R=1$.

On pouvait aussi utiliser bien sûr le critère de d'Alembert

Q2. D'après ce qui précède, $]-1,1[\subset \mathcal{D}_\alpha \subset [-1,1]$.

La série converge en 1 si, et seulement si $\alpha>1$ (c'est une série de Riemann), et en -1 si, et seulement si $\alpha>0$, en utilisant le critère spécial des séries alternées (si $\alpha \leqslant 0$, la série diverge grossièrement).

On a donc $\mathcal{D}_\alpha = \begin{cases}]-1,1[& \text{si } \alpha \in]-\infty,0] \\ [-1,1[& \text{si } \alpha \in]0,1] \\ [-1,1] & \text{si } \alpha \in]1,+\infty[\end{cases}$

Q3. Pour $x \geqslant 0$, la série est à termes positifs donc $f_\alpha(x) \geqslant 0$.

Pour $x \leqslant 0$, la série satisfait les hypothèses du critère spécial des séries altérnées donc sa somme est du signe de son 1^er^ terme : $f_\alpha(x) \leqslant 0$.

Q4. D'après le cours, $f_0(x) = \dfrac{1}{1-x}$ et $f_1(x) = -\ln(1-x)$.

Par le théorème de dérivation des séries entières, $f_0'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \dfrac{1}{x} f_{-1}(x)$.

On a donc $f_{-1}(x) = \dfrac{x}{(1-x)^2}$

Q5. Pour $\alpha>1$, la série converge normalement sur $[-1,1]$ donc f_α est continue sur $\mathcal{D}_\alpha = [-1,1]$.

Q6. Pour tout $x \in [0,1[$, $\dfrac{x^n}{n^\alpha} \geqslant \frac{x^n}{n}$ donc $f_\alpha(x) \geqslant f_1(x)$. Or $f_1(x) = -\ln(1-x) \underset{x\to1^-}{\longrightarrow} +\infty$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to1^-} f_\alpha(x) = +\infty$.

II. Un logarithme complexe

Q7. Pour $x \in]-1,1[$, $\ln(1+x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}x^n}{n} = -\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-x)^n}{n}$

Q8. On a $R=1$ et pour $x \in]-1,1[$, $\exp(S(x)) = 1+x$, d'après la question précédente.

Q9. On trouve que ce rayon de convergence est $R_g = \dfrac{1}{|z_0|}$, à l'aide par exemple du critère de d'Alembert.

Q10. D'après le théorème de dérivation des séries entières, g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R_g, R_g[$, qui contient $[0,1]$ et $g'(t) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} z_0^n t^{n-1} = \dfrac{z_0}{1+tz_0}$.

Q11. D'après ce qui précède, h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1]$ et $h'(t) = g'(t)h(t) = \dfrac{z_0}{1+tz_0} h(t)$.

Q12. On remarque que la fonction $z : t \mapsto 1 + tz_0$ est solution de cette équation différentielle. De plus, $z(0) = 1 = h(0)$. Ainsi, h et z sont solutions du même problème de Cauchy, donc elle sont égales. En $t = 1$, on obtient $h(1) = \exp(S(z_0)) = z(1) = 1 + z_0$.

Problème 2 : Séries de Taylor et développement en série entière

Partie préliminaire

Q1. La série entière $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ est la série dérivée de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$. Cette dernière a pour rayon de convergence 1 donc la série dérivée est de même rayon de convergence et sa somme est la dérivée de la série $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$.

De plus, $\forall x \in \,]-1, 1[\,, \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$. Donc $\forall x \in \,]-1, 1[\,, \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \dfrac{1}{(1-x)^2}$.

Q2. Soit $x > 0$.
Fixons deux réels a et A tels que $0 < a < A$.
Posons les fonctions u et v définies sur le segment $[a, A]$ par $u(t) = t^x$ et $v(t) = -e^{-t}$.
u et v sont de classe C^1 sur $[a, A]$ et $\forall t \in [a, A], u'(t) = xt^{x-1}$ et $v'(t) = e^{-t}$.
Par le théorème d'intégration par parties, $\int_a^A t^x e^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[-t^x e^{-t}\right]_a^A + x\int_a^A t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t = a^x e^{-a} - A^x e^{-A} + x\int_a^A t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$.
On fait tendre a vers 0 et A vers $+\infty$.
Par définition de la fonction Γ, les deux intégrales convergent respectivement vers $\Gamma(x+1)$ et $\Gamma(x)$.
Comme x est strictement positif, a^x tend vers 0 donc $a^x e^{-t} = O(a^x)$ également quand a tend vers 0.
Enfin, par théorème de comparaison, $A^x e^{-A}$ tend vers 0 quand A tend vers $+\infty$.
Par unicité de la limite, on obtient l'égalité $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ le prédicat $P(n)$: "$\Gamma(n) = (n-1)!$.
$\Gamma(0) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t = 1 = 0!$ donc $P(0)$ est vrai.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $P(n)$ est vrai.
$n > 0$ donc $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)! = n!$. Donc $P(n+1)$ est vrai.
Conclusion : par le principe de récurrence, $P(n)$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, \Gamma(n) = (n-1)!$.

Q3. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ le prédicat $P(n)$: $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \dfrac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$.
Initialisation :
$$\sum_{k=0}^{0} \frac{(x-a)^0}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^0}{0!} f'(t)\,\mathrm{d}t = f(a) + \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t = f(a) + f(x) - f(a) = f(x).$$
Donc $P(0)$ est vrai.
Hérédité :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose $P(n-1)$ vrai.
Définissons les fonctions u et v sur I par $u(t) = \dfrac{(x-t)^n}{n!}$ et $v(t) = f^{(n)}(t)$.

u et v sont de classe C^1 sur I et $\forall t \in I, u'(t) = -n\dfrac{(x-t)^{n-1}}{n!} = -\dfrac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}$ et $v'(t) = f^{(n+1)}(t)$.
Par le théorème d'intégration par parties, $\displaystyle\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\ \mathrm{d}t = \left[\frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n)}(t)\right]_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)$
$0^n = 0$ car $n \geqslant 1$.
En exploitant l'hypothèse de récurrence, on obtient ainsi
$\displaystyle\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\ \mathrm{d}t = -\frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$.
$P(n)$ est donc vrai.
Conclusion : par le principe de récurrence, $P(n)$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

I. Quelques exemples

Q4. Par théorème, $\forall x \in \mathbb{R}, \sin x = \displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} x^{2p+1}$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} x^{2p}$.
De plus, $\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} 0^{2p} = 1 = f(0)$ donc $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} x^{2p}$.
f admet donc un développement en série entière sur l'intervalle $]-\infty, +\infty[$.
Cette fonction est donc de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Q5. $]-1, 1[$ est un voisinage de 0.
D'après la question 1, $\forall x \in\ ]-1, 1[\,, \dfrac{x}{(1-x)^2} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} n x^n$.
La fonction f définie sur $]-1, 1[$ par $f(x) = \dfrac{x}{(1-x)^2}$ est donc développable en série entière sur l'intervalle $]-1, 1[$. Elle est de classe C^∞ et d'après le théorème rappelé, $\forall n \in \mathbb{N}, \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} = n$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) = n.n!$.

Q6. **a)** f est de classe C^∞ donc en particulier, continue sur $]-R, R[$. Or $[0, 1] \subset\ ]-R, R[$ car $R > 1$.
Donc f est continue sur le segment $[0, 1]$. Par théorème elle est bornée.
Il existe et on le fixe un réel $M > 0$ tel que $\forall x \in [0, 1], |f(x)| \leqslant M$.
Par théorème, pour tout réel du disque ouvert de convergence $]-R, R[$, la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ est absolument convergente.
Or $1 \in\ ]-R, R[$ donc $\left|\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}\right|$ est le terme général d'une série convergente.
Enfin, $\forall x \in [0, 1], \left|f(x)\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n\right| \leqslant M \left|\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}\right|$ donc $\displaystyle\sup_{x \in [0,1]} \left|f(x)\frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n\right| \leqslant M \left|\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right|$.
Par définition, la série de fonction $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f(x)\frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ converge normalement sur l'intervalle $[0, 1]$.

b) Pour tout $x \in [0, 1]$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f(x)\frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(x)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(x)^2$.
Donc la série de fonction précédemment étudiée converge normalement donc uniformément sur le segment $[0, 1]$ vers la fonction $x \mapsto (f(x))^2$. Les fonctions sont continues.
Par théorème d'intégration terme à terme, $\displaystyle\int_0^1 f(x)^2\ \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \int_0^1 f(x) x^n\ \mathrm{d}x = 0$.
La fonction $x \mapsto f(x)^2$ est continue, positive et d'intégrale nulle sur le segment $[0, 1]$ donc

par théorème, cette fonction est nulle et $\forall x \in [0,1], f(x)^2 = 0$.
Par le caractère intègre de $\mathbb{R}, \forall x \in [0,1], f(x) = 0$.

c) Soit $a \in]0,1[$ fixé. Au voisinage de a, f est identiquement nulle donc $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(a) = 0$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. $\forall a \in]0,1[\,, f^{(n)}(a) = 0$ donc $f^{(n)}$ est nulle sur $]0,1[$.
Par continuité de $f^{(n)}$ en 0 (à droite), $f^{(n)}(0) = 0$.
Donc $\forall x \in]-R,R[\,, f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0$.
Conclusion : f est la fonction nulle sur l'intervalle $]-R,R[$.

II. Contre-exemples

Q7. On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.
Par les théorèmes généraux, f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
f est développable en série entière sur $]-1,1[$ et $\forall x \in]-1,1[\,, f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$.
En revanche, cette série n'est pas définie pour $x = 1$ (terme général qui ne tend pas vers 0) donc f ne coïncide pas avec sa série de Taylor en 0 sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Q8. a)

b) Dans cette question, nous identifions les polynômes à coefficients réelles et les fonctions polynomiales associées.
Démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ le prédicat $P(n) : \exists P_n \in \mathbb{R}[X] | \forall x > 0, f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{x^{3n}} e^{-1/x^2}$.
Initialisation :
Posons $P_0 = 1$ qui est bien un polynôme...
$\forall x > 0, \dfrac{P_0(x)}{x^{3\times 0}} e^{-1/x^2} = e^{-1/x^2} = f(x)$.
Donc $P(0)$ est vrai.
Hérédité :
Soit $n \geqslant \mathbb{N}^*$. Supposons $P(n-1)$ vrai.
Alors, il existe et on le fixe un polynôme $P_{n-1} \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x > 0, f^{(n-1)}(x) = P_{n-1}(x) x^{-3n+3} e^{-x^{-2}}$.
Par dérivation de l'égalité précédente, on a
$\forall x > 0, f^{(n)}(x) = P'_{n-1}(x) x^{-3n+3} e^{-1/x^2} + P_{n-1}(x)(-3n+3) x^{-3n+2} e^{-1/x^2} + P_{n-1}(x) x^{-3n+3}(2x^{-3}) e^{-1/x^2}$
$= \dfrac{1}{x^{3n}} e^{-1/x^2} \left(x^3 P'_{n-1}(x) + (-3n+2) x^2 P_{n-1}(x) + 2P_{n-1}(x) \right)$.
Posons $P_n = X^3 P'_{n-1} + (-3n+2) X^2 P_{n-1} + 2P_{n-1}$. Par stabilité de $\mathbb{R}[X]$ par la dérivation, le produit, la somme... P_n est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ et il vérifie $\forall x > 0, f^{(n)}(x) = P_n(x) \dfrac{1}{x^{3n}} e^{-1/x^2}$.
$P(n)$ est donc vrai.
Conclusion : par le principe de récurrence, $P(n)$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$ ce qui démontre le résultat.

c) Montrons par récurrence sur n le prédicat $P(n)$: f est de classe C^n sur $[0,+\infty[$ et $f^{(n)} = 0$.
Initialisation :
f est continue sur $]0,+\infty[$. De plus, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{-1}{x^2} = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{t\to-\infty} e^u = 0$ donc par composition des limites, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 = f(0)$.
Donc f est continue à droite en 0.
f est donc continue sur $[0,+\infty[$ ce qui démontre $P(0)$.
Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $P(n-1)$ vrai.
Alors $f^{(n-1)}$ est bien définie et continue sur $[0, +\infty[$.
De plus, f est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$ donc $f^{(n-1)}$ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.
D'après la question précédente, $\forall x > 0, (f^{(n-1)})'(x) = f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{x^{3n}} e^{-1/x^2}$.
Par les théorèmes de comparaison des fonctions usuelles, au voisinage de $+\infty$, $u^{3n}e^{-u^2} = o(1)$.
Or $\lim\limits_{x \to 0^+} (1/x) = +\infty$ donc par substitution, au voisinage de 0^+, $\dfrac{1}{x^{3n}} e^{-1/x^2} = o(1)$.
P_n est une fonction polynomiale donc continue en 0 donc bornée au voisinage de 0.
Ainsi, par théorème d'opérations, $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{P_n(x)}{x^{3n}} e^{-1/x^2} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to 0^+} (f^{(n-1)})'(x) = 0$.
En résumé, $f^{(n-1)}$ est continue sur $[0, +\infty[$, de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} (f^{(n-1)})'(x) = 0$.
Par théorème de prolongement de la classe C^1, $f^{(n-1)}$ est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$ et $(f^{(n-1)})'(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} (f^{(n-1)})'(x) = 0$.
Par définition, f est donc de classe C^n sur $[0, +\infty[$ et $f^{(n)}(0) = (f^{(n-1)})'(0) = 0$ ce qui démontre $P(n)$.
Conclusion : par le principe de récurrence, $P(n)$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.
f est donc de classe C^∞ sur $[0, +\infty[$ et $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) = 0$.

d) Supposons qu'il existe $r > 0$ tel que la fonction f soit développable en série entière sur $]-r, r[$.
D'après le théorème rappelé et la question précédente, $\forall x \in]-r, r[\,, f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0$.
En particulier, $r/2 \in]-r, r[$ et $r/2 \neq 0$ donc $e^{-4/r^2} = 0$: absurde.
Conclusion f n'est pas développable en série entière sur aucun intervalle de la forme $]-r, r[$ avec $r > 0$.

Q9. a) Soit $x \in \mathbb{R}$.
$\forall t \geqslant 0, 1 + tx^2 \geqslant 1$ donc $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{1 + tx^2}$ est bien définie et continue d'après les théorèmes généraux sur $[0, +\infty[$.
Au voisinage de $+\infty$, $\dfrac{e^{-t}}{1 + tx^2} = O(e^{-t})$. $t \mapsto e^{-t}$ est de signe constant et intégrable au voisinage de $+\infty$ donc $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{1 + tx^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.
f est donc bien définie sur $\mathbb{R}$.
Fixons a un réel strictement positif.
Posons la fonction g définie sur $[0, +\infty[\times [-a, a]$ par $g(t, x) = \dfrac{e^{-t}}{1 + tx^2}$.
Soit $t \geqslant 0$ fixé. $x \mapsto g(t, x)$ est dérivable sur $[-a, a]$ et $\forall x \in [-a, a]$, $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x, t) = \dfrac{-2txe^{-t}}{(1 + tx^2)^2}$.
De plus, $\forall x \in [-a, a]$, $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x, t)\right| \leqslant 2tae^{-t}$.
La fonction $t \mapsto 2tae^{-t}$ est positive et intégrable sur $[0, +\infty[$ en particulier car au voisinage de $+\infty$, $2ate^{-t} = o(1/t^2)$.
Pour tout $x \in [-a, a]$, les fonctions $t \mapsto g(x, t)$ et $t \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ sont intégrables sur $[0, +\infty[$.
Par théorème, la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} g(x, t)\ \mathrm{d}t = f(x)$ est de classe C^1 sur $[-a, a]$ donc f est de classe C^1 sur $[-a, a]$ et ceci pour tout $a > 0$. Donc f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

b) Soit $t > 0$ fixé. Posons $\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ qui est un réel strictement positif.

Soit $x \in \left]-\alpha, \alpha\right[$. Alors $tx^2 \in [0,1[$.
Donc $\dfrac{e^{-t}}{1+tx^2} = e^{-t}\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p(tx^2)^p = \sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p t^p (2p)! e^{-t}}{(2p)!}x^{2p}$.
Notons h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \dfrac{e^{-t}}{1+tx^2}$.
D'après ce qui précède, h est développable en série entière sur l'intervalle $\left]-\alpha, \alpha\right[$ donc par le théorème rappelé,
$\forall p \in \mathbb{N}, f^{(2p)}(0) = (-1)^p(2p)!t^p e^{-t}$ et $f^{(2p+1)}(0) = 0$.

c) D'après la question précédente et le résultat admis à la fin de la question $9(a)$, $\forall p \in \mathbb{N}, f^{(2p+1)}(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} 0 \text{ d}t = 0$ et $f^{(2p)}(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty}(-1)^p(2p)!e^{-t}t^p \text{ d}t = (-1)^p(2p)!\Gamma(p+1) = (-1)^p(2p)!p!$.
Ainsi, on peut réécrire ainsi (formellement) la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$:
$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p(2p)!p!}{(2p)!}x^{2p} = \sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p p!\ x^{2p}$.
Soit x un réel non nul fixé.
Posons $u_p = (-1)^p p! x^{2p}$, terme général d'une suite de réels tous non nuls.
Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\dfrac{|u_{p+1}|}{|u_p|} = p|x|^2$ qui tend vers $+\infty$ quand p tend vers ∞.
Donc u_p n'est pas le terme général d'une série absolument convergente.
Par caractérisation du rayon de convergence d'une série entière, celui de la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ est donc nul.
Supposons qu'il existe $r > 0$ tel que f soit développable en série entière sur $\left]-r, r\right[$.
Alors, par le théorème rappelé, $\forall x \in \left]-r, r\right[, f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ et, par caractérisation du rayon de convergence, celui de la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ est donc supérieur ou égal à r. Donc $0 \geqslant r$: absurde.
Donc f n'est pas développable en série entière au voisinage de 0.

II. - Condition suffisante

Q10. **a)** Fixons un réel $x \in \left]-a, a\right[$.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
f est de classe C^{n+1} sur l'intervalle $\left]-a, a\right[$.
$(0, x) \in \left]-a, a\right[^2$.
$|f^{(n+1)}| \leqslant M$.
Par l'inégalité de Taylor Lagrange, on obtient alors $\left|f(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k\right| \leqslant M\dfrac{|x-0|^{n+1}}{(n+1)!} = M\dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$.
Par comparaison des suites usuelles, $\left(\dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\right) \to 0$ donc par théorème d'encadrement, $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k\right)_{n\in\mathbb{N}} \to f(x)$ce que l'on peut réécrire $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = f(x)$.
f est donc développable en série entière sur $]-a, a[$ donc au voisinage de 0.

b) $\forall (n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}, |\sin^{(n)}(x)| \leqslant 1$ donc sin est développable en série entière au voisinage de 0.