Réduction des endomorphismes

Lundi 8 septembre 2025

Table des matières

Table des matières

1. Polynôme caractéristique.

1.1. Cas d'une matrice

1.1. Cas d'une matrice

Proposition 1

$\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de la matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ **ssi** λ est solution de l'équation $\det(M - \lambda I_n) = 0$.

Proposition 2

Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la fonction $x \mapsto \det(xI_n - M)$ est polynomiale à coefficients dans $\mathbb{K}$.

1.1. Cas d'une matrice

Definition 1

Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle polynôme caractéristique de M, le polynôme $\chi_M \in \mathbb{K}[X]$ défini par la relation :

$$\forall x \in \mathbb{K}, \quad \chi_M(x) = \det(xI_n - M)$$

Remarque :

Plus directement : $\chi_M = \det(XI_n - M) \in \mathbb{K}[X]$

Proposition 3

Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, χ_M est unitaire et de degré n. De plus les coefficients associés aux degrés $n-1$ et 0 sont respectivement $-\mathrm{tr}(M)$ et $(-1)^n \det(M)$:

$$\chi_M = X^n - (\mathrm{tr} M)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(M).$$

Proposition 4

Si $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est triangulaire (supérieure ou inférieure) et en notant $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les coefficients diagonaux, on a :

$$\chi_T = \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)$$

1.2. Cas d'un endomorphisme.

1.2. Cas d'un endomorphisme.

Proposition 5

Pour tout couple $(M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ de matrices semblables, $\chi_M = \chi_N$.

Definition 2

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On appelle *polynôme caractéristique* de u, et on note χ_u, le polynôme caractéristique de sa matrice représentative dans n'importe quelle base.

Remarque :

Polynôme associé à la fonction polynomiale $x \mapsto \det(xId - u)$.

1.2. Cas d'un endomorphisme.

Proposition 6

Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, χ_u est unitaire et de degré n. De plus les coefficients associés aux degrés $n-1$ et 0 sont respectivement $-\mathrm{tr}(u)$ et $(-1)^n \det(u)$:

$$\chi_u = X^n - \mathrm{tr}(u)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(u).$$

Proposition 7

Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u et soit v l'endomorphisme de F induit par u sur F. Alors χ_v divise χ_u.

1.3. Propriété fondamentale

1.3. Propriété fondamentale

Proposition 8

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de M si, et seulement si, λ est racine de χ_M. Autrement dit, $\mathrm{Sp}(M)$ est exactement l'ensemble des racines (dans $\mathbb{K}$) de χ_M.

Exemple :

Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est triangulaire, alors son spectre est l'ensemble des coefficients diagonaux.

Remarque :

Préciser le corps $\mathbb{K}$ sur lequel on travaille :
$\mathrm{Sp}_{\mathbb{Q}}(M) \subset \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(M) \subset \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M)$.

1.3. Propriété fondamentale

Proposition 9

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n non nulle, et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de u si, et seulement si, λ est une racine de χ_u.

Remarque :

$\deg(\chi_u) = n$: au plus n valeurs propres.

1.4. Multiplicité d'une valeur propre.

1.4. Multiplicité d'une valeur propre.

Definition 3

On appelle *multiplicité* d'une valeur propre λ de u sa multiplicité en tant que racine de χ_u : c'est le plus grand entier k tel que $(X-\lambda)^k$ divise χ_u.

Remarque :

$\chi_u = (X-\lambda)^m P$, avec $P(\lambda) \neq 0$.

1.4. Multiplicité d'une valeur propre.

Proposition 10

Pour toute valeur propre λ de u de multiplicité $m_\lambda \geqslant 1$ et de sous-espace propre associé E_λ, on a :

$$\dim(E_\lambda) \leqslant m_\lambda.$$

Table des matières

2. Diagonalisation et trigonalisation

2.1. Endomorphisme diagonalisable

Definition 4

On dit que u est *diagonalisable* lorsqu'il existe une base de E dans laquelle la matrice représentative de u est diagonale.

Remarque :

Base : vecteurs propres ; éléments diagonaux : valeurs propres

Proposition 11

u est diagonalisable **ssi** la somme (directe) de ses sous-espaces propres est égale à E.

Corollaire 1

u est diagonalisable **ssi** la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à $\dim(E)$.

2.1. Endomorphisme diagonalisable

Exemples :

Sauf cas particuliers (lesquels ?) :

- Projecteur p : $\mathrm{Sp}(p) = \{0, 1\}$, $E_0 = \mathrm{Ker}(p)$ et $E_1 = \mathrm{Ker}(p - I_E) = \mathrm{Im}(p)$.
- Symétrie s : $\mathrm{Sp}(s) = \{-1, 1\}$, $E_{-1} = \mathrm{Ker}(s + I_E)$ et $E_1 = \mathrm{Ker}(s - I_E)$.

2.2. Matrice diagonalisable

Definition 5

On dit qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est *diagonalisable* lorsqu'elle est semblable à une matrice diagonale.

Remarque :

Identification $M \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$: interprétation géométrique par un changement de base.

Proposition 12

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n > 0$ muni d'une base quelconque $\mathcal{B}$ et soit $u \in \mathcal{L}(E)$, représenté par $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{B}$. Alors u est diagonalisable si, et seulement si, M est diagonalisable.

2.3. Caractérisation par les multiplicités

2.3. Caractérisation par les multiplicités

Proposition 13

Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(i) u est diagonalisable.

(ii) χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$ et pour toute valeur propre λ de multiplicité m_λ, $\dim(E_\lambda) = m_\lambda$.

Remarque :

u diagonalisable $\Rightarrow \chi_u$ scindé mais <u>réciproque fausse</u>.

2.3. Caractérisation par les multiplicités

Proposition 14

Si χ_u est *simplement* scindé sur $\mathbb{K}$, autrement dit si u admet n valeurs propres distinctes, alors u est diagonalisable.

Remarque :

χ_u simplement scindé $\Rightarrow$ u diagonalisable mais réciproque fausse.

2.4. Diagonalisation effective.

2.4. Diagonalisation effective.

Méthode :

- χ_u non scindé $\Rightarrow$ non diagonalisable
- χ_u scindé, avec $\lambda_1, \dots, \lambda_p \neq$ 2 à 2 :
  - λ_i racine simple $\Rightarrow$ E_i droite vectorielle
  - λ_i racine multiple de multiplicité m_i : vérifier que $\dim(E_i) = m_i$. On doit chercher $\mathrm{rg}(u - \lambda_i Id)$.

Remarques :

- Pour diagonaliser : trouver m_i vecteurs indépendants dans E_i
- Cas d'une matrice : dépend du corps d'étude.

Exemple :

$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$: diagonalisable dans $\mathbb{R}$? Dans $\mathbb{C}$?

2.5. Endomorphisme trigonalisable.

2.5. Endomorphisme trigonalisable.

Definition 6

On dit que u est *trigonalisable* s'il existe une base de E dans laquelle la matrice représentative de u est triangulaire.

Remarques :

- Vecteurs propres dans une base trigonalisante ?
- Triangulaire supérieure *vs* inférieure

2.6. Matrice trigonalisable.

2.6. Matrice trigonalisable.

Definition 7

On dit qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est *trigonalisable* si elle est semblable à une matrice triangulaire.

Remarques :

- Identification $M \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$: interprétation géométrique par un changement de base.
- Triangulaire supérieure *vs* inférieure.

2.7. Caractérisation des endomorphismes trigonalisables.

2.7. Caractérisation des endomorphismes trigonalisables.

Theoreme 1

$u \in \mathcal{L}(E)$ (*resp.* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) est trigonalisable si, et seulement si, son polynôme caractéristique χ est *scindé*.

Remarques :

- Si E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel :
- Cas d'une matrice :

2.8. Somme et produit des valeurs propres d'un endomorphisme trigonalisable

2.8. Somme et produit des valeurs propres d'un endomorphisme trigonalisable

Proposition 15

Si $u \in \mathcal{L}(E)$ admet un polynôme caractéristique χ scindé sur $\mathbb{K}$, de racines $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, alors :

$$\operatorname{tr}(u) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \qquad \text{et} \qquad \det(u) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i .$$

Remarques :

- Tenir compte des multiplicités !
- Toujours valable pour une matrice en tenant compte de toutes les racines complexes !

2.8. Somme et produit des valeurs propres d'un endomorphisme trigonalisable

Proposition 16

On suppose χ scindé sur $\mathbb{K}$, de la forme

$$\chi = \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{m_i},$$

avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ distincts deux à deux. Alors :

$$\mathrm{tr}(u) = \sum_{i=1}^{p} m_i \lambda_i \quad \textbf{et} \quad \det(u) = \prod_{i=1}^{p} \lambda_i^{m_i}.$$

Table des matières

3. Polynômes d'endomorphismes et réduction

3.1. Polynômes d'un endomorphisme, d'une matrice

Definition 8

- On appelle *polynôme en u* tout endomorphisme de la forme $P(u)$ avec $P \in \mathbb{K}[X]$. L'ensemble des polynômes en u est noté $\mathbb{K}[u]$.
- On appelle *polynôme en A* toute matrice de la forme $P(A)$ avec $P \in \mathbb{K}[X]$. L'ensemble des polynômes en A est noté $\mathbb{K}[A]$.

Remarques :

- Si $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, $P(u) = \sum_{k=0}^{d} u^k$ et $P(A) = \sum_{k=0}^{d} a_k A^k$.
- Conventions : $u^0 = I_E$ et $A^0 = I_n$
- Rappel : $u^k = \underbrace{u \circ \cdots \circ u}_{k \text{ fois}}$

3.2. Idéal annulateur et polynôme minimal

Proposition 17

L'application $P \mapsto P(u)$ est un morphisme d'algèbre de $\mathbb{K}[X] \to \mathcal{L}(E)$, d'image $\mathbb{K}[u]$.

Corollaire 2

$\mathbb{K}[u]$ est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{L}(E)$.

Remarques :

- Unique morphisme vérifiant $X \mapsto u$
- Structure du noyau ?

Definition 9

- On dit que $P \in \mathbb{K}[X]$ est un *polynôme annulateur* de u lorsque $P(u)$ est l'endomorphisme nul.
- On apelle *idéal annulateur* l'ensemble des polynômes annulateurs de u.

Exercice 1

Adapter les trois énoncés précédents au cas de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Proposition 18

Si u est représenté par $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans une base quelconque $\mathcal{B}$, on a pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$:

$$\underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(P(u)) = P(A)$$

En particulier, A et u ont le même idéal annulateur.

Corollaire 3

Si A et B sont deux matrices semblables et $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(A)$ et $P(B)$ sont semblable.

Remarque :

La relation de similitude peut s'exprimer avec la même matrice de passage

3.2. Idéal annulateur et polynôme minimal

Lemme

E étant de dimension finie, il existe toujours un polynôme annulateur non nul pour u.

Proposition 19

a) L'idéal annulateur de u est engendré par un unique polynôme unitaire de degré $d \geqslant 1$.

b) La restriction à $\mathbb{K}_{d-1}[X]$ du morphisme d'algèbre $P \mapsto P(u)$ réalise un isomorphisme de $\mathbb{K}_{d-1}[X]$ sur $\mathbb{K}[u]$.

c) La famille $(u^k)_{0 \leqslant k \leqslant d-1}$ est une base de $\mathbb{K}[u]$.

3.2. Idéal annulateur et polynôme minimal

Definition 10

On appelle *polynôme minimal* de u l'unique générateur unitaire de l'idéal annulateur de u : C'est un polynôme annulateur de u de degré minimal. On le note μ_u ou π_u.

Remarques :

- Autres polynômes annulateurs ?
- Décomposition de $P(u)$ dans la base $(I_1, u, \ldots, u^{d-1})$?

3.3. Polynôme annulateur et valeurs propres

3.3. Polynôme annulateur et valeurs propres

Lemme

Soit $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que $u(x) = \lambda x$. Alors pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(u)(x) = P(\lambda)x$.

Proposition 20

Si P annule u, toute valeur propre de u est racine de P.

Remarque :

Attention aux racines superflues.

Exemples :

- Cas d'un projecteur p :
- Cas d'une symétrie s :

3.3. Polynôme annulateur et valeurs propres

Proposition 21

$\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de u **ssi** λ est une racine du polynôme minimal μ_u.

Remarque :

χ_u et μ_u ont les mêmes racines ...

Exercice 2

Montrer qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible **ssi** il existe un polynôme annulateur P tel que $P(0) \neq 0$. Expliquer alors comment écrire A^{-1} comme un polynôme en A.

3.4. Lemme de décomposition des noyaux

3.4. Lemme de décomposition des noyaux

Theoreme 2

Si $P_1, \dots, P_r \in \mathbb{K}[X]$ sont premiers entre eux deux à deux, et de produit égal à P, alors

$$\mathrm{Ker}\big(P(u)\big) = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}\big(P_i(u)\big)$$

Corollaire 4

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ unitaire scindé, $P = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{m_i}$. Alors, si P est annulateur de u, on a :

$$E = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}\big(u - \lambda_i I_E\big)^{m_i}$$

3.5. Polynôme annulateur et diagonalisation

3.5. Polynôme annulateur et diagonalisation

Proposition 22

Les trois assertions suivantes sont équivalentes :

(i) u est diagonalisable ;

(ii) Il existe un polynome annulateur de u simplement scindé sur $\mathbb{K}$;

(iii) Le polynôme minimal μ_u est simplement scindé sur $\mathbb{K}$.

Corollaire 5

Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les valeurs propres de u, deux à deux distinctes. Alors :

$$u \text{ diagonalisable} \quad \Leftrightarrow \quad \prod_{i=1}^{r}(X - \lambda_i) \text{ annulateur}$$

On a dans ces conditions $\mu_u = \prod_{i=1}^{r}(X - \lambda_i)$.

3.6. Diagonalisation d'un endomorphisme induit

3.6. Diagonalisation d'un endomorphisme induit

Lemme

Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u, et u_F l'endormorphisme induit par u sur F. Alors $\mu_{u_F} \mid \mu_u$.

Proposition 23

Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u, et u_F l'endormorphisme induit par u sur F. Alors, si u est diagonalisable, u_F aussi.

3.7. Polynôme annulateur et trigonalisabilité

3.7. Polynôme annulateur et trigonalisabilité

Proposition 24

Les trois assertions suivantes sont équivalentes :

(i) u est trigonalisable

(ii) Il existe un polynôme annulateur de u scindé sur $\mathbb{K}$.

(iii) Le polynôme minimal μ_u est scindé sur $\mathbb{K}$.

Exercice 3

Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}$, tel que χ_u^k soit un polynôme annulateur de u.

3.8. Théorème de Cayley-Hamilton

3.8. Théorème de Cayley-Hamilton

Theoreme 3

(de Cayley-Hamilton) Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, le polynôme caractéristique χ_u de u *est* un polynôme annulateur. Autrement dit :

$$\mu_u \mid \chi_u$$

Remarques :

- Comparaison multiplicité de λ dans μ_u et dans χ_u ?
- Application du lemme des noyaux ? À suivre ...