Compléments d'algèbre linéaire

Fiche récapitulative n° 1

Définitions

- Noyau d'une application linéaire
- Image d'une application linéaire, rang
- Projecteur (définition géométrique)
- Symétrie (définition géométrique)
- Somme, somme directe d'une famille finie de sous-espaces vectoriels.
- Base adaptée à une décomposition en somme directe.
- Matrices définies par blocs (interprétation géométrique des blocs)
- Transvection par blocs
- Sous-espace stable par un endomorphisme.
- Endomorphisme induit (en dimension finie, traduction matricielle).
- Valeur propre, vecteur propre (non nul), sous-espace propre, équation aux éléments propres.
- Spectre d'un endomorphisme en dimension finie.
- Valeur propre, vecteur propre, sous-espace propre et spectre d'une matrice carrée, équation aux éléments propres.

Résultats et propriétés

- Forme géométrique du théorème du rang
- Théorème du rang
- Si $\dim(E) = \dim(F)$ finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$, f injective $\Leftrightarrow$ f surjective
- p projecteur $\Leftrightarrow$ p linéaire et $p \circ p = p$
- s symétrie $\Leftrightarrow$ s linéaire et $s \circ s = Id$
- Si $F_1, \dots, F_p$ sont des sous-espaces de dimension finie, $\dim\left(\sum_{i=1}^{p} F_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{p} \dim(F_i)$, avec égalité si et seulement si la somme est directe.
- Opérations par blocs de tailles compatibles (combinaison linéaire, produit, transposition)
- Invariance du déterminant par une transvection par blocs
- Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs.
- Caractérisation d'une droite stable par un endomorphisme.
- La somme d'une famille finie de sous-espaces propres d'un endomorphisme est directe.
- Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.
- Le spectre d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie n est fini, de cardinal au plus n.
- Si deux endomorphismes u et v commutent, tout sous-espace propre de u est stable par v.
- Le noyau et l'image de u sont stables par v.
- Deux matrices semblables ont même spectre.
- Si $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{K}'$ et si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, le spectre de M dans $\mathbb{K}$ est contenu dans le spectre de M dans $\mathbb{K}'$.