Fiche d'exercices n° 10

Endomorphismes d'un espace euclidien

Espaces prehilbertiens - révisions

Exercice 1.

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace euclidien E. Montrer :

$$(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp \qquad \textbf{ET} \qquad (F\cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp.$$

Exercice 2.

Donner un exemple de sous-espace vectoriel de E, dont l'orthogonal n'est pas supplémentaire, $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, muni du produit scalaire $(\cdot|\cdot) : (f,g) \mapsto \int_0^1 fg$. Considérer pour cela le sous-espace F des fonctions polynômiales et appliquer le théorème de Weierstrass.

Exercice 3.

On se place dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ défini par le système d'équation :

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ x_1-x_2+x_3-x_4=0. \end{cases}$$

Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur F.

Exercice 4.

Soit $E = \mathcal{C}^\infty([0,\pi],\mathbb{R})$ l'espace des fonctions infiniment dérivables sur $[0,\pi]$, muni du produit scalaire défini par :

$$\forall (f,g)\in E^2,\ \langle f,g\rangle = \int_0^\pi f(t)g(t)\mathrm{d}t.$$

Soit $G = \{f \in E \,/\, f''+f=0\}$. Déterminer le projeté orthogonal de $Id : t\mapsto t$ sur G.

Exercice 5.

Sur $\mathbb{R}[X]$ on définit :

$$\big(P\,|\,Q\big) = \int_0^1 P(x)Q(x)dx.$$

a) Montrer que cette application définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

b) Trouver une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire.

c) Calculer le minimum pour $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ de :

$$\int_0^1 (x^2-ax-b)^2dx.$$

(on traduira le problème en terme de distance à un sous-espace)

Exercice 6.

Soit E un espace euclidien, $(e_1, \ldots, e_n)$ un sytème de vecteurs unitaires de E tels que pour tout $x \in E$:

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(e_i \,|\, x\right)^2.$$

Montrer que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormale de E.

Exercice 7.

Soit $E = \mathcal{C}^\infty([0, \pi], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions infiniment dérivables sur $[0, \pi]$, muni du produit scalaire défini par :

$$\forall (f, g) \in E^2,\ \langle f, g\rangle = \int_0^\pi f(t)g(t)\mathrm{d}t.$$

Soit $G = \{f \in E \,/\, f'' + f' = 0\}$. Déterminer le projeté orthogonal de $Id : t \mapsto t$ sur G.

Exercice 8.

Soit E un espace euclidien, $(e_1, \ldots, e_n)$ un sytème de vecteurs unitaires de E tels que pour tout $x \in E$:

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(e_i \,|\, x\right)^2.$$

Montrer que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormale de E.

Exercice 9.

Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$, muni du produit scalaire $(\cdot|\cdot) : (f, g) \mapsto \int_0^1 fg$, et soit $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. Soit F le sous-espace des fonctions polynomiales. On admet le résultat suivant, corollaire du théorème de Weierstrass :

pour tout $f \in E$, il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de F telle que $\|f_n - f\| \to 0$

Déterminer l'orhogonal de F. Est-ce un supplémentaire de F ?

Groupe orthogonal, isométries et endomorphismes autoadjoints

Exercice 10.

En interprétant matriciellement le procédé d'orthogonalisation de Schmidt, montrer que toute matrice $A \in GL_n(\mathbb{R})$ s'écrit de façon unique $A = QR$ où $Q \in \mathcal{O}(n)$ et R est une matrice triangulaire supérieure à éléments diagonaux strictement positifs.

Exercice 11.

Soit $A \in \mathcal{O}(n)$. Montrer que la valeur absolue de la somme des coefficients de A est au plus égale à n et déterminer le cas d'égalité.

Exercice 12.

Soit E un espace euclidien de dimension supérieure ou égale à 2. Soient $x, y \in E$.

a) Montrer que si $\|x\| = \|y\|$, il existe un hyperplan H de E tel que $y = s(x)$, où s est la symétrie orthogonale par rapport à H.

b) Montrer que si $\left(x \,|\, y\right) = \|y\|^2$, il existe un hyperplan H de E tel que $y = p(x)$, où p est la projection orthogonale sur H.

Exercice 13.

Soit E un espace euclidien $f \in \mathcal{L}(E)$ et $g = f^*$.

a) Prouver que $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Im}(g)^{\perp}$.
On supposera dans la suite que pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| \leqslant \|x\|$.

b) Montrer que pour tout $x \in E$, $\|g(x)\| \leqslant \|x\|$.

c) Montrer que $\operatorname{Ker}(f - I_E)$ et $\operatorname{Im}(f - I_E)$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires orthogonaux dans E.

d) Pour $x \in E$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n(x) = \dfrac{1}{n}\big(x + f(x) + \cdots + f^{n-1}(x)\big)$. Montrer que la suite $\big(u_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers la projection orthogonale de x sur $\operatorname{Ker}(f - I_E)$.

Exercice 14.

Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$. On note $\|u\| = \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\|$.

a) Montrer que $\|u\| \geqslant \sup\limits_{\|x\|=1} \big|\big(u(x) \,|\, x\big)\big|$ et que $\|u\| = \sup\limits_{\|x\|=\|y\|=1} \big|\big(u(x) \,|\, y\big)\big|$.

b) On suppose u symétrique. Montrer que $\|u\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \big|\big(u(x) \,|\, x\big)\big|$.

c) Montrer que u^* est continue sur E et comparer $\|u\|$ et $\|u^*\|$.

Exercice 15. ⋆⋆

Soit E un espace euclidien de dimension n. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda > 0$. On dit que f est une similitude de rapport λ si : $\forall\, \vec{x} \in E,\ \|f(\vec{x})\| = \lambda\|\vec{x}\,\|$.

a) Montrer que f est une similitude de rapport λ si et seulement si : $\forall\, \vec{x}, \vec{y} \in E,\ (f(\vec{x}) \mid f(\vec{y})) = \lambda^2(\vec{x} \mid \vec{y})$.

b) Caractériser les similitudes par leurs matrices dans une base orthonormée.

c) Montrer que f est une similitude si et seulement si f est non nulle et conserve l'orthogonalité, c'est à dire : $\forall\, \vec{x}, \vec{y} \in E,\ \vec{x} \perp \vec{y} \Rightarrow f(\vec{x}) \perp f(\vec{y})$.

Exercice 16.

Soit f une isométrie vectorielle d'un espace euclidien E. Montrer que

$$\operatorname{Ker}(f - Id_E) = \operatorname{Im}(f - \mathrm{id})^{\perp}$$

En déduire que si $(f - Id_E)^2 = 0$, alors $f = Id_E$.

Exercice 17.

Dans un espace euclidien $(E, <\cdot,\cdot>)$, on considère un vecteur v non nul, un scalaire λ et l'endomorphisme :

$$u : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & x + \lambda < x, v > v \end{array}$$

a) Pour $x \in E$, calculer $\|u(x)\|^2$.

b) Donner une condition nécessaire et suffisante sur λ et v pour que u soit une isométrie vectorielle.

c) Lorsque u est une isométrie vectorielle, donner une interprétation géométrique de u.

Exercice 18.

Soit E euclidien, $n \in \mathbb{N}^*, (x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n) \in E^{2n}$ tels que :

$$\forall (i,j) \in \{1,...,n\}^2, (x_i|x_j) = (y_i|y_j)\,.$$

Montrer qu'il existe une isométrie vectorielle f de E telle que :

$$\forall i \in \{1,...,n\}, f(x_i) = y_{i.}$$

Exercice 19.

Déterminer la nature des transformations de $\mathbb{R}^2$ dont les matrices dans la base canonique sont les suivantes :

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix} \qquad B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & \sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & 1\end{pmatrix} \qquad C = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}3 & 4\\ 4 & -3\end{pmatrix}$$

Exercice 20.

Soient E un espace euclidien et $p \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) p est un projecteur orthogonal

b) $p^2 = p$ et $\forall\, x \in E\,,\ \ \|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

Exercice 21.

Soit E euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$. Comparer $\mathrm{Ker}(f^*)$ et $\mathrm{Im}(f^*)$ avec $\mathrm{Ker}(f)^\perp$ et $\mathrm{Im}(f)^\perp$.

Exercice 22.

Soit E un espace euclidien et $f : E \to E$ tel que $f(0) = 0$ et tel que :

$$\forall\,(x,y) \in E^2,\ \ \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|\,.$$

Montrer que f est linéaire.

(On pourra commencer par montrer que le produit scalaire est conservé par f)

Exercice 23.

Soit E un espace euclidien, et $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant :

$$\forall\, x, y \in E\,,\ \ x \perp y \Rightarrow f(x) \perp f(y).$$

a) Pour deux vecteurs $u, v \in E$ unitaires, développer $\langle u+v|u-v\rangle$.

b) En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| = \lambda\|x\|$.

c) En déduire qu'il existe $g \in \mathrm{O}(E)$ tel que $f = \lambda g$.

Exercice 24.

Soit E un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que deux des trois propriétés suivantes impliquent la troisième.

(i) f est une isométrie vectorielle ;

(ii) $f^2 = -Id$;

(iii) $\forall\, x \in E\,,\ \ f(x) \perp x$.

Exercice 25.

Soit E un espace euclidien et $f \in \mathrm{O}(E)$. On pose $g = f - I_E$.

a) Montrer que $\mathrm{Ker}(g) = \big(\mathrm{Im}(g)\big)^{\perp}$;

b) Soit la suite $(f_n)_n$ de $\mathcal{L}(E)$ définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\,, \quad f_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f^k.$$

Montrer que la suite $(f_n)_n$ converge simplement vers le projecteur orthogonal sur $\mathrm{Ker}(g)$.

Exercice 26.

Soit E un espace euclidien et f et g deux fonctions de E dans E telles que :

$$\forall\,(x, y) \in E^2, \ \ \langle f(x), y\rangle = \langle x, g(y)\rangle\,.$$

Montrer que f et g sont linéaires.

Exercice 27.

Quels sont les endomorphismes à fois orthogonaux et symétriques d'un espace euclidien E ? Justifier la réponse !

Exercice 28.

Soit E un espace euclidien, et f un endomorphisme autoadjoint. Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont supplémentaires orthogonaux.

Exercice 29.

Soit E un espace euclidien, f et g deux endomorphismes autoadjoints de E. Montrer que $f \circ g$ est autoadjoint si, et seulement si, $f \circ g = g \circ f$.

Exercice 30.

Soit f un endomorphisme autoadjoint de E euclidien vérifiant

$$\forall x \in E, \big(f(x) \mid x\big) = 0$$

Déterminer f.

Exercice 31.

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$, a un vecteur unitaire de E et $k \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que

$$f(x) = x + k\,\langle x, a\rangle\, a$$

définit un endomorphisme autoadjoint de E.

b) Étudier les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.

Exercice 32.

Soient E un espace euclidien et $p \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) p est un projecteur orthogonal

(ii) $p^2 = p$ et $\forall\, x \in E\,, \ \ \|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

Exercice 33.

Soit u un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien E. On pose $k = \sup_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} |\lambda|$. Vérifier

$$\forall x \in E\,, \quad \|u(x)\| \leqslant k\,\|x\|$$

Existe-t-il $x \in E$ pour lequel il y a égalité ?

Exercice 34.

Soit u un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien E de dimension n non nulle.
On pose

$$H_u = \left\{ x \in E \mid \left\langle u(x), x \right\rangle = 1 \right\}$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur le spectre de u pour qu'il existe un vecteur unitaire élément de H_u.

Exercice 35.

Montrer qu'un élément de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \backslash \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ peut toujours se décomposer comme le produit d'un élément de $\mathrm{SO}(2)$ et de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Interpréter géométriquement ce résultat, et en déduire l'écriture complexe générale d'une reflexion du plan identifié à $\mathbb{C}$ (on pensera à l'utilisation du conjugué).

Exercice 36.

Soit E un espace euclidien de dimension 3, r dans $\mathrm{SO}(E)$ et s une symétrie orthogonale.
Caractériser l'application $s \circ r \circ s$.

Exercice 37.

Soient f et g dans $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ tels que $f \neq g$ et $g \circ f = f \circ g$.
Montrer que f et g sont, soit deux rotations de même axe, soit deux symétries de droites orthogonales.

Exercice 38.

Soit $A \in S_n^+(\mathbb{R})$. Montrer que $\det(I_n + A) \geqslant 1$

Exercice 39.

Soit $A = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$. Montrer que $A \in S_2^{++}(\mathbb{R})$ si, et seulement si $r > 0$ et $rt > s^2$.

Exercice 40.

Pour $(A, B) \in S_n(\mathbb{R})$, on note $A \leqslant B$ lorsque $B - A \in S_n^+(\mathbb{R})$. Vérifier que l'on définit ainsi une relation d'ordre sur $S_n(\mathbb{R})$.