MPI - Lycée Colbert

Concours Blanc 2025
Mathématiques 2

Jeudi 18 décembre 2025
8h00-12h00

Sujet CCINP

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème tous indépendants.

EXERCICE 1

Pour n entier, $n \geq 2$, on définit le déterminant de Vandermonde de n nombres complexes $x_1, x_2, ..., x_n$ par :

$$V(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

L'objet de cet exercice est de démontrer par récurrence que l'on a : $V(x_1, x_2, ..., x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$.

Q1. Calculer $V(x_1, x_2)$. Expliquer pourquoi il suffit de faire la démonstration pour n nombres complexes $x_1, x_2, ..., x_n$ deux à deux distincts.

Dans la suite, $x_1, x_2, ..., x_n$ sont n nombres complexes deux à deux distincts.

Q2. On considère la fonction $t \mapsto P(t) = V(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, t)$.

Démontrer que P est une fonction polynomiale de degré au plus $n-1$ et justifier que le coefficient de t^{n-1} est un déterminant de Vandermonde.

Démontrer par récurrence que $V(x_1, x_2, ..., x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$.

Q3. Première application

Calculer le déterminant de la matrice $A = (i^j)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ en faisant apparaître le déterminant de Vandermonde $V(1, 2, ..., n)$.

Q4. Deuxième application

Donner un exemple de n nombres complexes $a_1, a_2, ..., a_n$ deux à deux distincts et tous non nuls, tels que $\sum_{k=1}^{n} a_k^2 = 0$.

Soit n nombre complexes $x_1, x_2, ..., x_n$ deux à deux distincts et tous non nuls, démontrer que l'une au moins des sommes $\sum_{k=1}^{n} x_k, \sum_{k=1}^{n} x_k^2, \sum_{k=1}^{n} x_k^3, ..., \sum_{k=1}^{n} x_k^n$ est non nulle.

On pourra utiliser un déterminant de Vandermonde non nul.

EXERCICE 2

Dans cet exercice, $\| \ \|$ désigne une norme d'algèbre sur $M_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire une norme vérifiant, pour tout couple (A,B) de matrices de $M_n(\mathbb{R})$, $\|A.B\| \leq \|A\|.\|B\|$.

Q5. Démontrer que pour toute matrice A de $M_n(\mathbb{R})$, la série $\sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!}A^k$ converge. On notera e^A sa somme.

Q6. Démontrer que l'application $A \mapsto e^A$ est continue sur $M_n(\mathbb{R})$.

Q7. Si $H \in M_n(\mathbb{R})$ est une matrice non nulle de la boule de centre 0 et de rayon $r > 0$, déterminer la limite de $\frac{1}{\|H\|}\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!}H^k$ lorsque H tend vers 0.

En déduire que l'application $A \mapsto e^A$ est différentiable en la matrice 0.
On précisera sa différentielle en 0.

PROBLÈME

Pour toute matrice A de $M_n(\mathbb{R})$, on note $e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k$.

Dans ce problème, on note S_n l'espace vectoriel des matrices de $M_n(\mathbb{R})$ symétriques.
On dit que la matrice $A \in S_n$ est symétrique positive lorsque toutes ses valeurs propres sont positives ou nulles.
On note S_n^+ l'ensemble des matrices symétriques positives.

Partie I - Exponentielle d'une matrice symétrique

Pour a et b deux réels, on note :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \text{ et } J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Q8. Démontrer, en détaillant les calculs, que $A \in S_3^+$, si et seulement si, $(a + 2b \geq 0 \text{ et } a \geq b)$.

Q9. Calculer J^k pour tout entier k non nul. Cette relation est-elle valable pour $k = 0$?
En utilisant la relation $A = (a-b)I_3 + bJ$, calculer et expliciter e^A.
On pourra utiliser sans démonstration que, si deux matrices A et B de $M_n(\mathbb{R})$ commutent, alors $e^{A+B} = e^A e^B$.
Vérifier que $e^A \in S_3^+$.

Q10. Soit P une matrice inversible de $M_n(\mathbb{R})$.
Justifier que l'application $M \mapsto PMP^{-1}$ est continue sur $M_n(\mathbb{R})$.
Si $A \in S_n^+$ est semblable à une matrice diagonale D, déterminer une matrice diagonale semblable à la matrice e^A.
En déduire que $e^A \in S_n^+$.

Partie II - Produit de Hadamard de deux matrices

Dans cette partie, pour une matrice $A = (a_{i,j})$ de $M_n(\mathbb{R})$, on note $E(A)$ la matrice de $M_n(\mathbb{R})$, de terme général $e^{a_{i,j}}$: $E(A) = \left(e^{a_{i,j}}\right)$.

Nous allons démontrer que si $A \in S_n^+$, alors $E(A) \in S_n^+$.

On définit le produit de Hadamard de deux matrices $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ de $M_n(\mathbb{R})$ noté $*$ par :

$$A * B = (a_{i,j} b_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R}).$$

On note le produit usuel de deux matrices A et B par AB.

On confond une matrice de $M_{1,1}(\mathbb{R})$ avec son terme réel.

Q11. Vérifier que, lorsque la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \in S_3^{\ +}$, la matrice $E(A) \in S_3^{\ +}$.

Q12. Si D est une matrice diagonale dont tous les termes sont positifs ou nuls et si Y est matrice de $M_{n,1}(\mathbb{R})$, quel est le signe de ${}^tYDY$?

En déduire qu'une matrice A de S_n appartient à $S_n^{\ +}$ si, et seulement si, pour toute matrice $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ on a ${}^tXAX \geq 0$.

Q13. Si A et B sont deux matrices de $S_n^{\ +}$ et α, β deux réels positifs, démontrer, en utilisant la question **Q12**, que $\alpha A + \beta B$ est une matrice de $S_n^{\ +}$.

Si A et B sont deux matrices de $S_n^{\ +}$ a-t-on nécessairement $AB \in S_n^{\ +}$?

Q14. Si $A \in S_n^{\ +}$, démontrer qu'il existe une matrice $R \in S_n^{\ +}$ telle que $A = R^2$.

Q15. Si A et B sont deux matrices de $S_n^{\ +}$, si on pose $A = U^2$ et $B = V^2$ avec $U = \left(u_{i,j}\right) \in S_n^{\ +}$, $V = \left(v_{i,j}\right) \in S_n^{\ +}$ et si $A * B = (c_{i,j})$, vérifier que, pour tout couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$,

$$c_{i,j} = \left(\sum_{k=1}^{n} u_{k,i} u_{k,j}\right)\left(\sum_{l=1}^{n} v_{l,i} v_{l,j}\right).$$

En déduire que, si A et B sont deux matrices de $S_n^{\ +}$, on a $A * B \in S_n^{\ +}$.

Q16. Pour toute matrice A de $M_n(\mathbb{R})$ et pour tout entier naturel $p \geq 2$, on note A^{*p} la matrice $A * A * ... * A$ (p fois).

On note $A^{*0} = (1)$ la matrice dont tous les termes sont égaux à 1 et $A^{*1} = A$.

Soit une matrice A de $M_n(\mathbb{R})$, déterminer la limite de la suite de matrices (T_N) définie pour tout entier naturel N non nul par $T_N = \displaystyle\sum_{p=0}^{N} \frac{1}{p!} A^{*p}$.

Q17. Pour $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, justifier que l'application $M \mapsto {}^tXMX$ est continue sur $M_n(\mathbb{R})$, puis démontrer que $S_n^{\ +}$ est une partie fermée de S_n.

En déduire que si $A \in S_n^{\ +}$ alors $E(A) \in S_n^{\ +}$.

FIN

CONCOURS COMMUN INP 2022
CORRIGÉ DE MATHÉMATIQUES 2- MP

m.laamoum@gmail.com

EXERCICE 1

Q1. $V(x_1, x_2) = x_2 - x_1$.

Si il existe $i \neq j$ et $x_i = x_j$ alors $V(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$, car il a deux colonnes identiques.

Dans la suite, $x_1, x_2 \ldots, x_n$ sont n nombres complexes deux à deux distincts.

Q2. Soit $P : t \mapsto V(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, t)$.

- Le développement de $V(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$ par rapport à la dernière colonne donne

$$P(t) = (-1)^{n+1}\Delta_{1,n} + (-1)^{n+2}\Delta_{2,n}t + (-1)^{n+3}\Delta_{3,n}t^2 + ... + (-1)^{n+n}\Delta_{n,n}t^{n-1}$$

  avec $\Delta_{i,n}$ le déterminant obtenu en éliminant la ligne d'indice i et la colonne d'indice n de $V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, les $\Delta_{i,n}$ ne dépendent pas de t. Donc P est une fonction polynomiale de degré au plus $n - 1$.

  Le coefficient de t^{n-1} est $\Delta_{n,n} = V(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$

- On a $P(x_i) = 0$ pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, car c'est un déterminant avec deux colonnes identiques, donc le polynôme $\prod\limits_{1 \leq i \leq n-1} (X - x_i)$ divise P , si P n'est pas le polynôme nul il est de degré $n-1$, donc $P(X) = C \prod\limits_{1 \leq i \leq n-1} (X - x_i)$, avec $C \in \mathbb{C}$.

  C est le coefficient du plus haut degré de P donc $C = V(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$.

  Ce qui donne pour $t = x_n$ $V(x_1, x_2 \ldots, x_n) = V(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \prod\limits_{1 \leq i < j \leq n-1} (x_n - x_i)$.

- Montrons par récurrence que : $V(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod\limits_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$.

  La relation est vraie pour $n = 2$.On la suppose pour n .

  Soit $x_1, x_2 \ldots, x_{n+1}$ sont $n+1$ nombres complexes deux à deux distincts , on a

$$\begin{aligned} V(x_1, x_2 \ldots, x_{n+1}) &= V(x_1, x_2, \ldots, x_n) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_{n+1} - x_i) \\ &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) . \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_{n+1} - x_i) \\ &= \prod_{1 \leq i < j \leq n+1} (x_j - x_i) \end{aligned}$$

  d'où le résultat.

Q3. Soit $A = (i^j)_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq n}}$, on a

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2 & 2^2 & 2^3 & \cdots & 2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & n^2 & n^3 & \dots & n^n \end{vmatrix}.$$

On factorise chaque ligne i , donc

$$\begin{aligned} \det A &= n! \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \cdots & 2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & n & n^2 & \dots & n^{n-1} \end{vmatrix} \\ &= n!\ V(1,2,\dots,n). \end{aligned}$$

car le déterminant d'une matrice est égale au déterminant de sa transposée.

Q4. On prend $a_k = e^{\frac{ik\pi}{n}}, k \in [\![1,n]\!]$.

Les nombres complexes $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont deux à deux distincts et tous non nuls, et

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 = \sum_{k=1}^{n} e^{\frac{2ik\pi}{n}} = 0$$

Soit n nombre complexes $x_1, \dots, x_n$ deux à deux distincts et tous non nuls, on a donc $V(x_1, \dots, x_n) \neq 0$ et la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

est inversible . Le vecteur colonne $X = {}^t(x_1, \dots, x_n)$ est non nul donc MX l'est aussi .

Nous avons

$$MX = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} x_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} x_k^n \end{pmatrix}.$$

ainsi l'une au moins des sommes $\sum_{k=1}^{n} x_k, \sum_{k=1}^{n} x_k^2, \sum_{k=1}^{n} x_k^3 \quad \cdots \sum_{k=1}^{n} x_k^n$ est non nulle.

EXERCICE 2

Q5. Par récurrence on a $\left\|A^k\right\| \leqslant \|A\|^k$ pour tout $k \geq 0$.

La convergence de la série $\sum_{k\geq 0} \frac{\|A\|^k}{k!}$ entraîne la converge absolue de la série $\sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!}A^k$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui est de dimension finie , ce qui prouve la convergence de $\sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!}A^k$.

Q6. Soit $f_k : A \mapsto \frac{1}{k!}A^k$ et $r > 0$, on a $\|f_k(A)\| \leq \frac{\|A\|^k}{k!} \leq \frac{r^k}{k!}$, donc la série $\sum_{k\geq 0} f_k$ converge normalement et uniformément sur la boule $B(0,r)$.

Continuité de f_k :

L'application $\varphi : (A_1, A_2, ..., A_k) \mapsto A_1 \times A_2 \times ... \times A_k$ est continue, car elle est k-linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^k$ vers $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et l'application $\psi : A \mapsto (A, A, ..., A)$ est linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vers $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^k$ donc elle est continue .

Ainsi $f_k = \frac{1}{k!}\varphi o \psi$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Le théorème de continuité des séries de fonctions donne , $A \mapsto e^A$ est continue sur $B(0,r)$ pour tout $r > 0$ donc elle est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Q7. Soit $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice non nulle telle que $\|H\| \leq r$.

Par continuité de la norme on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{\|H\|}\left\|\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k!}H^k\right\| &\leq \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{\|H\|^{k-1}}{k!} \\ &\leq \|H\|\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{r^{k-2}}{k!} \end{aligned}$$

donc $\frac{1}{\|H\|}\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k!}H^k \underset{H\to 0}{\to} 0$, qui s'écrit $\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k!}H^k = o(\|H\|)$.

Examinons la différence $e^{H+0} - e^0$, qui vaut

$$e^H - I_n = H + \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k!}H^k = H + o(\|H\|)$$

donc l'application $A \mapsto e^A$ est différentiable en la matrice 0 et sa différentielle est l'application identité.

PROBLÈME

Partie I - Exponentielle d'une matrice symétrique

Q8. On a

$$\begin{aligned}
\chi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda-a & -b & -b \\ -b & \lambda-a & -b \\ -b & -b & \lambda-a \end{vmatrix} \\
&\underset{C_1 \leftarrow C_1+C_2+C_3}{=} (\lambda-a-2b)\begin{vmatrix} 1 & -b & -b \\ 1 & \lambda-a & -b \\ 1 & -b & \lambda-a \end{vmatrix} \\
&\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2-L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3-L_1}}{=} (\lambda-a-2b)\begin{vmatrix} 1 & -b & -b \\ 0 & \lambda-a+b & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-a+b \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-a-2b)(\lambda-a+b)^2
\end{aligned}$$

Donc $Sp(A) = \{a+2b, a-b\}$, par suite $A \in \mathcal{S}_3^+$, si et seulement si, $(a+2b \geq 0$ et $a \geq b)$.

Q9. Par récurrence on a pour tout entier k non nul $J^k = 3^{k-1}J$. La relation est non valable pour $k=0$.

On a $A = (a-b)I_3 + bJ$ et , I_3 et J commutent donc

$$e^A = e^{(a-b)I_3}e^{bJ}$$

de plus $e^{(a-b)I_3} = e^{a-b}I_3$ et

$$\begin{aligned}
e^{bJ} &= I_3 + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{b^k}{k!}J^k \\
&= I_3 + \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(3b)^k}{k!}J \\
&= I_3 + \frac{e^{3b}-1}{3}J
\end{aligned}$$

ainsi

$$e^A = e^{a-b}I_3 + \frac{e^{a+2b}-e^{a-b}}{3}J$$

Nous avons

$$e^A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \beta \\ \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \beta & \alpha \end{pmatrix} \text{ avec } \alpha = \frac{e^{a+2b}+2e^{a-b}}{3} \text{ et } \beta = \frac{e^{a+2b}-e^{a-b}}{3}$$

elle a la même forme que A par le même calcul on a $Sp(e^A) = \{\alpha+2\beta, \alpha-\beta\} = \left\{e^{a+2b}, e^{a-b}\right\}$, d'où

$e^A \in \mathcal{S}_3^+$.

Q10. Soit P une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

L'application $M \mapsto PMP^{-1}$ est linéaire en dimensions finies donc elle est continue .

Soit $A \in \mathcal{S}_n^+$, D diagonale et P inversible telles que $A = PDP^{-1}$, par récurrence on a $A^k = PD^kP^{-1}$ ce qui donne

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}A^k = P\left(\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}D^k\right)P^{-1}$$

l'application $M \mapsto PMP^{-1}$ est continue donc

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}A^k = P\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}D^k\right)P^{-1} \quad \text{et} \quad e^A = Pe^DP^{-1}$$

$D = \text{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ donc $e^D = \text{diag}(e^{\lambda_1}, ..., e^{\lambda_n})$, ainsi $e^A \in \mathcal{S}_n^+$.

Partie II - Produit de Hadamard de deux matrices

Q11. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_3^+$, donc $E(A) = \begin{pmatrix} e^a & e^b & e^b \\ e^b & e^a & e^b \\ e^b & e^b & e^a \end{pmatrix}$ elle a la même forme que A par le même calcul on a $Sp(E(A)) = \left\{e^a + 2e^b, e^a - e^b\right\}$.

On a $e^a + 2e^b \geq 0$ et $a \geq b$ car $A \in \mathcal{S}_3^+$ ce qui donne $e^a - e^b \geq 0$ ainsi $Sp(E(A)) \subset \mathbb{R}^+$et $E(A) \in \mathcal{S}_3^+$.

Q12.

- Soit $D = \text{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ avec $\{\lambda_1, ..., \lambda_n\} \subset \mathbb{R}^+$et $Y = {}^t(y_1, \ldots, y_n) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors
$$^tYDY = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k^2 \geq 0$$
- Soit $A \in \mathcal{S}_n$ donc elle est diagonalisable dans une base orthonormée , il existe une matrice diagonale D et une matrice orthogonale P telles que $A = {}^tP.D.P$.

  Si $A \in \mathcal{S}_n^+$ alors $D \in \mathcal{S}_n^+$, soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ on a
$$\begin{aligned} ^tXAX &= {}^tX\, {}^tP.D.PX \\ &= {}^t(PX\ ).D.(PX) \geq 0. \end{aligned}$$
- Réciproquement : si pour tout X dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ on a $^tXAX \geq 0$. Soit λ une vleur propre de A et $X = {}^t(x_1, \ldots, x_n)$ un vecteur propre associé à λ de , alors
$$^tXAX = \lambda\, {}^tX\ X = \lambda \sum_{k=1}^{n} x_k^2$$
  donc $\lambda \geq 0$ par suite $A \in \mathcal{S}_n^+$.

  Ainsi $A \in \mathcal{S}_n^+$ si et seulement si pour tout X dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ on a $^tXAX \geq 0$.

Q13.

- Soit A et B dans $\mathcal{S}_n^+$ et α, β deux réels positifs. Pour pour tout X dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ on a

$$ {}^tX\,(\alpha A + \beta B)\,X = \alpha{}^tXAX + \beta{}^tXBX \geq 0 $$

  donc $\alpha A + \beta B$ est une matrice de $\mathcal{S}_n^+$.

- Si A et B sont deux matrices de $\mathcal{S}_n^+$ alors AB n'est pas forcement symétriques donc en général elle ne sont pas dans $\mathcal{S}_n^+$,

  par exemple

$$ A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \;,\; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} $$

  on a $A, B \in \mathcal{S}_2^+$:

$$ \begin{aligned} {}^tX\;AX &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= 2x^2 + 2xy + y^2 \\ &= x^2 + (x+y)^2 \geq 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} {}^tX\;BX &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= x^2 + 2xy + y^2 \\ &= x^2 + (x+y)^2 \geq 0 \end{aligned} $$

mais

$$ AB = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \notin \mathcal{S}_2 $$

Q14. Soit $A \in \mathcal{S}_n^+$, donc elle est diagonalisable dans une base orthonormée , il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ avec $\{\lambda_1, ..., \lambda_n\} \subset \mathbb{R}^+$ et telles que $A = {}^tP.D.P$.

Posons $R = {}^tP.\,\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, ..., \sqrt{\lambda_n}).P$, on a $R \in \mathcal{S}_n^+$ et $A = R^2$.

Q15. Soit A et B dans $\mathcal{S}_n^+$, $A = U^2$ et $B = V^2$ avec $U = (u_{i,j}) \in \mathcal{S}_n^+$. $V = (v_{i,j}) \in \mathcal{S}_n^+$.

Posons $A = (a_{i,j})$, $B = (b_{i,j})$ et $A * B = (c_{i,j})$.

- Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, on a $a_{i,j} = \sum\limits_{k=1}^{n} u_{i,k}u_{k,j}$, or U est symétrique donc $u_{i,j} = u_{j,i}$ donc $a_{i,j} = \sum\limits_{k=1}^{n} u_{k,i}u_{k,j}$, de même $b_{i,j} = \sum\limits_{\ell=1}^{n} v_{i,\ell}v_{\ell,j} = \sum\limits_{\ell=1}^{n} v_{\ell,i}v_{\ell,j}$, ainsi

$$ c_{i,j} = a_{i,j}b_{i,j} = \left(\sum_{k=1}^{n} u_{k,i}u_{k,j}\right)\left(\sum_{\ell=1}^{n} v_{\ell,i}v_{\ell,j}\right). $$

- Soit X dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X = {}^t(x_1,\ldots,x_n)$, on a :

$$\begin{aligned}
{}^tX\,(A*B)\,X &= (x_1,\ldots,x_n)\begin{pmatrix}\sum\limits_{j=1}^{n} c_{1,j}x_j\\ \vdots\\ \sum\limits_{j=1}^{n} c_{n,j}x_j\end{pmatrix}\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{i,j}x_ix_j\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_ix_j\left(\sum_{k=1}^{n} u_{k,i}u_{k,j}\right)\left(\sum_{\ell=1}^{n} v_{\ell,i}v_{\ell,j}\right)
\end{aligned}$$

posons $u'_{k,i} = u_{k,i}x_i$ pour tout $(k,i)\in [\![1,n]\!]^2$ et $U' = (u'_{k,i})_{\substack{1\le k\le n\\1\le i\le n}}$.

On a ${}^tU'U' = (a'_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n}} = (\sum\limits_{k=1}^{n} u'_{k,i}u'_{k,j})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n}}$donc

$$\begin{aligned}
{}^tX\,(A*B)\,X &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} u'_{k,i}u'_{k,j}\right)\left(\sum_{\ell=1}^{n} v_{\ell,i}v_{\ell,j}\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a'_{i,j}b_{i,j}\\
&= \mathrm{Tr}((a'_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n}}.{}^t(b_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n}}.)\\
&= \mathrm{Tr}({}^tU'U'.V^2) \qquad \text{(car } V \text{ est symétrique)}\\
&= \mathrm{Tr}({}^t(U'V)\,.U'V)\\
&= \left\|U'V\right\|^2 \qquad \text{(norme euclidienne de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))
\end{aligned}$$

Ainsi $A*B\in\mathcal{S}_n^+$.

Q16. Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n}}$, on a alors $A^{*0} = (1)_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n}}$ et $A^{*p} = (a_{i,j}^p)_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n}}$.

Pour N entier naturel non nul

$$\begin{aligned}
T_N &= \sum_{p=0}^{N}\frac{1}{p!}A^{*p}\\
&= (\sum_{p=0}^{N}\frac{a_{i,j}^p}{p!})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n}}
\end{aligned}$$

donc $\lim\limits_{N\to+\infty} T_N = (e^{a_{i,j}})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n}} = E(A)$.

Q17. Soit $X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, l'application $\Phi : M\mapsto {}^tXMX$ est linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vers $\mathbb{R}$ donc elle est continue.

Soit $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite convergente de $\mathcal{S}_n^+$, montrons que $\lim\limits_{k\to+\infty} A_k\in\mathcal{S}_n^+$.

Pour tout $k\in\mathbb{N}$ on a $\Phi(A_k) = {}^tXA_kX\ge 0$, Φ est continue donc

$$\lim_{k\to+\infty}\Phi\left(A_k\right) = \Phi\left(\lim_{k\to+\infty} A_k\right) = {}^tXAX\ge 0,$$

ainsi $A \in \mathcal{S}_n^+$ et $\mathcal{S}_n^+$ est une partie fermée de $\mathcal{S}_n$.

Soit $A \in \mathcal{S}_n^+$, d'après Q15 et par récurrence $A^{*k} \in \mathcal{S}_n^+$, et d'après Q13, $T_N \in \mathcal{S}_n^+$ car elle est combinaison linéaire , avec des coefficients positifs, de matrices symétriques positives .

Par suite $E(A) = \lim\limits_{N \to +\infty} T_N \in \mathcal{S}_n^+$.

FIN

MP

CONCOURS COMMUN INP

RAPPORT DE L'ÉPREUVE ÉCRITE DE MATHÉMATIQUES 2

1/ CONSIGNES GÉNÉRALES

L'attention des candidats est attirée sur le fait que les textes des sujets de mathématiques nécessitent une connaissance très précise des points fondamentaux du cours.

Sont ainsi valorisés :
- l'apprentissage du cours et en particulier les démonstrations des points importants, les exercices et exemples de base ;
- les qualités de rigueur et de clarté d'exposition que l'on peut attendre d'un futur ingénieur ;
- le soin apporté à la présentation de son travail.

Un candidat de niveau moyen et qui a travaillé doit pouvoir obtenir, a minima, la moyenne.

2/ REMARQUES GÉNÉRALES

THÈME

Ce sujet proposait deux exercices et un problème.

Le premier exercice demandait aux candidats, en étant guidés, de démontrer la formule du déterminant de Vandermonde. Ensuite, on leur proposait deux applications indépendantes.
Le deuxième exercice permettait de retrouver quelques résultats sur l'exponentielle d'une matrice : définition à l'aide d'une norme d'algèbre, continuité de la somme et, pour finir, la différentiabilité de l'application exponentielle en la matrice nulle.

Le problème, indépendant du deuxième exercice, commençait par la mise en place d'un exemple puis proposait une étude de l'exponentielle d'une matrice symétrique positive.
En deuxième partie, on définissait le produit de Hadamard de deux matrices pour ensuite étudier, pour une matrice symétrique positive, la matrice de terme général l'exponentielle des termes de cette matrice.

Ce sujet utilisait plusieurs notions : déterminants, espace vectoriels normés, réduction de matrices, utilisation de matrices symétriques. Il couvrait ainsi une bonne partie du programme d'algèbre de la classe de MP.

OBSERVATIONS GÉNÉRALES

Le sujet, accessible, couvrait à la fois les domaines de l'analyse et de l'algèbre.

Les questions ont été comprises. Il y avait peu de copies vides par rapport aux années précédentes.

Une majorité de candidats a pu traiter le sujet dans sa totalité.

La moyenne de 10,12 et l'écart type de 4,29 montrent que le but de trier les candidats est une fois de plus atteint. L'avantage d'un tel sujet abordable est de pouvoir mieux tenir compte de la rigueur et, pour certaines questions, n'attribuer les points que si la réponse est parfaite. Ainsi, on peut constater que peu de candidats ont obtenu la note de 20/20.

Ce type de sujet doit récompenser les candidats qui ont travaillé leur cours et refait des exercices dit « classiques ».

La tenue des copies est en général correcte. Les correcteurs étaient invités à porter une attention toute particulière au soin et à la présentation. Par exemple, une copie dont les résultats ne sont pas soulignés ou encadrés est sanctionnée. Malheureusement, il existe encore quelques copies peu lisibles. On ne peut qu'insister une nouvelle fois sur le soin que le futur ingénieur doit apporter à son travail.

3/ REMARQUES DÉTAILLÉES PAR QUESTION

EXERCICE 1

Q1. Bien traitée dans l'ensemble malgré quelques candidats qui se perdent dans des explications sans fin dans la deuxième partie de la question et qui, finalement, n'y répondent pas.
Trop de candidats ne pensent pas à indiquer que le déterminant est nul si deux colonnes sont égales.

Q2. Récurrences assez souvent mal rédigées. Beaucoup tentent de démontrer le résultat avec la forme développée du polynôme.

Q3. Assez peu de candidats écrivent correctement la matrice dès le départ, d'autres oublient le n!.

Q4. Beaucoup utilisent l'exemple issu des racines nièmes de l'unité mais trop de candidats se perdent dans des distinctions entre pairs, impairs ou avec des exemples très complexes sans en donner la démonstration.

EXERCICE 2

Q5. Le passage de convergence absolue à convergence simple est souvent non justifié, en particulier on oublie de mentionner « dans un espace vectoriel de dimension finie ».
Certains confondent convergence absolue et convergence normale.
On rencontre sur certaines copies un quotient de matrice !

Q6. Question peu réussie, les critères de continuité d'une série de fonctions sont mal connus. Cette question a donné lieu à des rédactions farfelues.

Q7. Les majorations sont parfois faites sans précautions. La différentiabilité est plutôt bien traitée par les candidats ayant abordé cette dernière partie de la question.

PROBLÈME

Q8. Dans l'ensemble, question bien traitée. Toutefois, le calcul du polynôme caractéristique est parfois laborieux.

Q9. Puissance de J en général bien fait, même si on trouve de très longues réponses. Pour le calcul de $\exp(A)$, on rencontre très souvent des erreurs de calcul.

Q10. Assez peu de candidats utilisent la dimension finie et la linéarité pour prouver la continuité.
Très peu citent l'argument de continuité pour justifier que $\exp(PAP^{-1}) = P\exp(A)P^{-1}$.

Q11. Question souvent bien traitée même si certains candidats perdent du temps.

Q12. On trouve parfois ${}^tYDY$ comme étant une matrice carrée ou colonne.
Pour la réciproque, la nécessité d'utiliser un vecteur propre NON NUL ne semble pas important pour la plupart des candidats.

Q13. La deuxième partie de la question nécessitait un contre-exemple. Certains ne justifient pas que les matrices utilisées comme contre-exemple sont bien symétriques positives.

Q14. Ici aussi, le caractère orthogonal de la matrice de passage était indispensable pour justifier que la matrice R obtenue était symétrique.

Q15. Difficultés des candidats à manier les sommes avec les indices dans cette question. La vérification est plutôt satisfaisante mais la déduction est très peu traitée. Très peu de bonnes réponses à la deuxième partie de la question.

Q16. Question en général bien traitée.

Q17. La plupart des candidats qui raisonnent par image réciproque de fermé font comme s'il s'agissait d'une seule application.
Ceux qui utilisent le critère séquentiel s'en sortent globalement mieux.
La déduction finale est en général bien vue.

4/ CONCLUSION

Voici quelques conseils pour les futurs candidats.

1. Éviter d'essayer « d'escroquer » les correcteurs en « trafiquant les calculs » ; ceci indispose fortement le correcteur.
2. Chaque hypothèse d'une question doit être utilisée et le candidat doit écrire sur sa copie à quel moment cette hypothèse est utile.
3. Certaines réponses peuvent tenir en une ou deux lignes.
4. Citer TOUS les théorèmes utilisés et rappeler sur le moment toutes les hypothèses utiles mêmes si elles figurent quelques lignes plus haut ou à la question précédente.
5. Numéroter les copies et les rendre dans le bon ordre.
6. Commencer l'épreuve par une lecture « diagonale » du sujet ; vous pourrez ainsi mieux vous imprégner du texte.
7. C'est perdre son temps que de recopier l'énoncé avant chaque réponse.
8. Prendre le temps de bien comprendre la question avant de répondre.
9. Soigner la présentation.
10. Éviter, dans une démonstration, d'utiliser le résultat qui doit être prouvé.