Devoir à la maison n° 3 - MPI

À rendre le lundi 13 octobre 2025

Ce troisième devoir MPI est constitué de deux problèmes : une amélioration de la rège de d'Alembert et l'étude détaillée d'une série de fonctions.

I. Règle de Raabe-Duhamel

Dans ce problème, on considère une suite $(u_n)_n$ strictement positive. On s'intéresse à l'étude de la convergence de la série $\sum u_n$. La règle de d'Alembert permet de conclure lorsque :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \neq 1.$$

On se place ici dans le cas $\ell = 1$ et on suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel qu'au voisinage de $+\infty$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

1. On suppose $\alpha > 1$. et on fixe $\gamma \in]1, \alpha[$. Soit $(v_n)_n$ définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*\,,\quad v_n = \frac{1}{n^\gamma}.$$

- **a)** Montrer qu'on a le développement asymptotique :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = 1 - \frac{\gamma}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

- **b)** En déduire l'existence d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall\, n \geqslant n_0\,,\quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

- **c)** À l'aide de l'inégalité précédente, montrer qu'au voisinage de $+\infty$, on a $u_n = O(v_n)$. En déduire la nature de la série $\sum u_n$.

2. Effectuer un raisonnement similaire dans le cas $\alpha < 1$ et énoncer une règle permettant de connaitre potentiellement la nature d'une série dans le cas douteux ("$\ell = 1$") de la règle de d'Alembert.

Il s'agit de la règle de Raabe-Duhamel. On ne peut rien conclure a priori *lorsque $\alpha = 1$, car le «$o\left(\frac{1}{n}\right)$» a alors son mot à dire. Mais en pratique, il correspond le plus souvent au terme général d'une série absolument convergente (typiquement un «$O\left(\frac{1}{n^2}\right)$»), et on a alors un meilleur contrôle.*

3. On suppose maintenant qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ et une série réelle $\sum \alpha_n$ absolument convergente tels que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + \alpha_n.$$

- **a)** Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $a_n = \ln\left(n^\alpha u_n\right)$. Montrer que la série de terme général $a_{n+1} - a_n$ est convergente.
- **b)** En déduire l'existence d'un réel $K > 0$ tel qu'au voisinage de $+\infty$:

$$u_n \sim \frac{K}{n^\alpha}.$$

- **c)** Expliquer en quoi ce résultat confirme et complète la règle obtenue à la question **2.**

4. Application : Étudier la nature de la série $\sum u_n$, avec $u_n = \sqrt{n!}\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$.

II. Étude d'une série de fonctions

Soit α un réel strictement positif.
Pour n entier non nul, on considère l'application u_n de $[0, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ définie par

$$u_n(x) = \frac{x}{n^\alpha(1 + nx^2)}.$$

1. Étude des modes de convergence de la série de fonction $\sum u_n$.

a) Montrer que la série $\sum u_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.

b) Montrer que la série $\sum u_n$ converge normalement sur $[0, +\infty[$ si et seulement si $\alpha > \dfrac{1}{2}$.

c) Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$.
Prouver que la série $\sum u_n$ converge normalement sur $[a, b]$.

d) On suppose dans cette question que $\alpha \leqslant \dfrac{1}{2}$. Pour x élément de $[0, +\infty[$, on pose

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x).$$

i. Établir l'inégalité : $R_n(x) \geqslant \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{x}{\sqrt{2n}(1 + kx^2)}$.

ii. En déduire que la série $\sum u_n$ n'est pas uniformément convergente sur $[0, a]$, où a est un réel strictement positif.

On note S l'application de $[0, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ définie par $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

2. Étude de la continuité de S.

a) Montrer que pour tout α, S est continue sur $]0, +\infty[$.

b) Montrer que si $\alpha > \dfrac{1}{2}$, alors S est continue sur $[0, +\infty[$.

c) On suppose que $\alpha \leqslant \dfrac{1}{2}$. Soit x un réel strictement positif.
Soit f l'application définie sur $[1, +\infty[$ par $t \mapsto f(t) = \dfrac{x}{t^\alpha(1 + tx^2)}$.

i. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_1^{n+1} f(t)\, dt \;\leqslant\; \sum_{k=1}^{n} u_k(x).$$

ii. En déduire l'inégalité :

$$S(x) \;\geqslant\; \int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{t}(1 + tx^2)}\, dt.$$

iii. À l'aide du changement de variable $u = x\sqrt{t}$, calculer l'intégrale de la question précédente, et en déduire que S n'est pas continue en 0.