Compléments sur les séries entières et les équations différentielles

Lundi 3 mars 2025

Table des matières

Table des matières

1. Compléments sur les équations différentielles

Table des matières

2. Compléments sur les séries entières

2.1. structure de l'ensemble des séries entières.

2.1. structure de l'ensemble des séries entières.

Exercice 1

Notons E l'espace vectoriel des séries entières. Montrer que l'application $\mathcal{D}$, qui à toute série entière $\sum a_n z^n$ associe sa série dérivée $\sum_{n \geqslant 1} n a_n z^{n-1}$, est un endomorphisme de E. Déterminer ses valeurs propres et ses sous-espaces propres associés.

2.2. Continuité à la frontière du disque de convergence

2.2. Continuité à la frontière du disque de convergence

Theoreme 1

[d'Abel *radial*]
Si $\sum a_n x^n$ a pour rayon de convergence $R \in \mathbb{R}_+^*$ et si la série $\sum a_n R^n$ converge, alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \xrightarrow[x \to R^-]{} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$$

Remarque :

...

Corollaire 1

$f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est continue sur tout l'intervalle I de convergence.

Exemple :

...

2.2. Continuité à la frontière du disque de convergence

Theoreme 2

[de Tauber (hors-programme)] Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence 1 et telle que la somme f admet une limite finie ℓ en 1^-. Si de plus $a_n = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$, alors la série $\sum a_n$ est convergente de somme ℓ

Exercice 2

Soit $\sum a_n$ une série <u>positive</u> telle que la série entière $\sum a_n x^n$ est de rayon 1 et telle que sa somme f admet une limite finie ℓ en 1^-. Montrer que $\sum a_n$ est convergente de somme ℓ.