Interrogation de cours n$^{\text{o}}$ 9

Lundi 24 novembre 2025

Version de l'année dernière, des questions sont susceptibles de changer !

Définitions & formules

1. Donner la définition d'un ensemble E dénombrable.

2. Donner la définition d'une tribu sur un ensemble Ω.

3. Donner la définition d'une probabilité P sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{T})$.

4. Donner la définition d'une variable aléatoire discrète X sur un espace probalisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ et de sa loi P_X.

5. Donner la définition d'une loi géométrique et d'une loi de Poisson.

6. Quand dit-on qu'une variable aléatoire discrète X a une espérance finie ?

7. Comment définit-on, si possible, la variance d'une variable aléatoire X ?

8. Comment définit-on la fonction génératrice d'une variable aléatoire X ?

Résultats et propriétés

a) Montrer que si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements d'un espace probalisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, alors $P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} P(A_n)$.

b) Montrer que si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans un ensemble E, telles que $X \sim Y$, et si $f : E \to F$ est une fonction quelconque, alors $f(X) \sim f(Y)$.

c) Pour X à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, montrer que $\mathrm{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geqslant n)$.

d) Pour deux variables aléatoires X et Y, montrer que $|X| \leqslant Y$ et $Y \in L^1$ implique $X \in L^1$.

e) Pour deux variables aléatoires discrètes X et Y dans L^2 , démontrer la relation $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)$.