# Fiche d'exercices n° 9

Probabilités et variables aléatoires discrètes

## Familles sommables

### Exercice 1.

Soit $(f_n)_n$ une suite d'applications de $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, et soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $f(n) = f_n(n) + 1$. Démontrer que pour tout entier $p$, on a $f_p \neq f$. Que peut-on en déduire sur l'ensemble des fonctions de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$ ?

### Exercice 2.

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction croissante. Pour $x \in ]a, b[$, on pose $\delta(x) = \lim_{y\to x^+} f(y) - \lim_{y\to x^-}$.

**a)** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $E_n = \{x \in ]a, b[ :\ \delta(x) > 1/n\}$ est fini.

**b)** Que peut-on en déduire sur l'ensemble des points de discontinuité de $f$ ?

**c)** Généraliser ce résultat au cas où $f$ est définie sur $\mathbb{R}$.

### Exercice 3.

Démontrer que si $|q| < 1$, la famille $(q^{|n|})_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable, et déterminer sa somme.

### Exercice 4.

Démontrer que les familles suivantes ne sont pas sommables :

**a)** $\left(\dfrac{1}{x^2}\right)_{x\in\mathbb{Q}\cap[1,+\infty[}$ **b)** $(a_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$, $\quad a_{n,p} = \dfrac{1}{n^2 - p^2}$ si $n \neq p$ et $a_{n,n} = 0$

### Exercice 5.

Soit $(a_p)_{p\geqslant 1}$ une suite de nombres complexes telle que la série $\sum_p a_p$ est absolument convergente. On pose $I = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ et pour $(n, p) \in I$, on pose $u_{n,p} = \dfrac{p}{n(n+1)} a_p$ si $p \leqslant n$, $u_{n,p} = 0$ sinon. Démontrer que la famille $(u_{n,p})_{(n,p)\in I}$ est sommable et calculer sa somme.

### Exercice 6.

Calculer $\displaystyle\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}$.

### Exercice 7. ⋆

Soit $x \in ] -1, 1[$.

**a)** Démontrer que la famille $(x^{kl})_{(k,l)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable.

**b)** En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{1-x^k} = \sum_{n=1}^{+\infty} d(n)x^n$ où $d(n)$ est le nombre de diviseurs positifs de $n$.

### Exercice 8. ⋆⋆ *produit de convolution*

On note $\ell^1(\mathbb{Z})$ l'ensemble des familles $u = (u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de $\mathbb{C}$ qui sont sommables. On définit sur $\ell^1(\mathbb{Z})$ une norme en posant $\|u\|$ la somme de $(|u_n|)_{n\in\mathbb{Z}}$.

**a)** Soit $u, v \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la famille $(u_k v_{n-k})_{k\in\mathbb{Z}}$ est sommable.

**b)** Pour $u, v \in \ell^1(\mathbb{Z})$, on définit la famille $u \star v$ par $(u \star v)_n = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k v_{n-k}$ où $n \in \mathbb{Z}$. Démontrer que $u \star v \in \ell^1(\mathbb{Z})$, puis majorer $\|u \star v\|$ à l'aide de $\|u\|$ et de $\|v\|$.

**c)** Démontrer que la loi $\star$ agissant sur $\ell^1(\mathbb{Z})$ est une loi associative, commutative, et possédant un élément neutre.

**d)** On définit $u \in \ell^1(\mathbb{Z})$ par $u_0 = 1$, $u_1 = -1$ et $u_n = 0$ sinon. Démontrer que $u$ n'est pas inversible dans $\ell^1(\mathbb{Z})$ pour $\star$.

### Exercice 9.

Soient $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tels que $|a| < 1$ et $|b| < 1$. Prouver que

$$\begin{cases} \dfrac{1}{(1-a)(1-b)} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b} & \text{si } a \neq b, \\ \dfrac{1}{(1-a)^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a^n & \text{si } a = b. \end{cases}$$

### Exercice 10. ⋆

Pour $n \geqslant 0$, on pose $w_n = 2^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{4^k}{k!}$.

**a)** Montrer que la série de terme général $w_n$ converge.

**b)** Calculer sa somme en utilisant le produit d'une série géométrique par une autre série classique.

## Espaces probabilisés

### Exercice 11.

Soit $\Omega$ un ensemble fini non dénombrable. On introduit l'ensemble :

$$\mathcal{T} = \left\{ A \subset \Omega \;\middle|\; A \text{ ou } \overline{A} \text{ est au plus dénombrable} \right\}$$

**a)** Vérifier que $\mathcal{T}$ est une tribu sur $\Omega$.

**b)** Pour tout $A \in \mathcal{T}$, on pose :

$$\mathbb{P}(A) = \begin{cases} 0 \text{ si } A \text{ est au plus dénombrable} \\ 1 \text{ si } \overline{A} \text{ est au plus dénombrable} \end{cases}$$

Vérifier que $\mathbb{P}$ définit une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{T})$.

### Exercice 12.

Soit $\mathbb{P}$ une probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Montrer que $\mathbb{P}(\{n\}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

## Exercice 13.

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement décroissante de réels positifs de limite nulle. Déterminer $\lambda \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe une probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ vérifiant :

$$\mathbb{P}(\{n, n+1, \dots\}) = \lambda a_n.$$

## Exercice 14.

Soit $(A_n)_n$ une suite d'évenement deux à deux incompatibles d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Montrer que :

$$\mathbb{P}(A_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

## Exercice 15.

On lance un dé équilibré à 6 faces, plusieurs fois de suite (les lancers sont indépendants).

**a)** Combien de fois au minimum faut-il lancer le dé pour que le 6 ait au moins une chance sur deux de sortir lors de ces tirages ?

**b)** Même question en lançant deux dés, mais pour obtenir cette fois un double-six.

## Exercice 16.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(\{n\}) = \dfrac{1}{2^{n+1}}$.

**a)** Montrer que l'on définit ainsi une probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$.

**b)** Calculer la probabilité de l'évènement : $B = \{n \in \mathbb{N}, n \geqslant 10\}$.

## Exercice 17.

Pour $\lambda \in ]0,1[$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(\{k\}) = \alpha \dfrac{\lambda^k}{k!}$.

**a)** Déterminer $\alpha$ (en fonction de $\lambda$), pour que $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mathbb{P})$ soit un espace probabilisé.

**b)** Calculer la probabilité de l'ensemble des entiers naturels impairs.

## Exercice 18.

Soient $A$ et $B$ deux évènements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On suppose que $\mathbb{P}(A) = \dfrac{1}{3}$, $\mathbb{P}(B) = \dfrac{1}{4}$, et $\mathbb{P}(A \cup B) = \dfrac{4}{9}$.

Calculer $\mathbb{P}(A \cap B)$, $\mathbb{P}(A|B)$, $\mathbb{P}(\overline{A}|B)$ et $\mathbb{P}(A \cap \overline{B}|B)$.

## Exercice 19.

Soient $A$ et $B$ deux évènements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

**a)** Si $A \cap B = \varnothing$, à quelle condition $A$ et $B$ sont-ils indépendants ?

**b)** Monter que $A$ est indépendant de tout évènement si, et seulement si, $\mathbb{P}(A) = 0$ ou $\mathbb{P}(A) = 1$.

## Exercice 20.

Une urne contient $n$ boules rouges et $n$ boules blanches. On tire deux par deux, sans remise, les boules jusqu'à vider l'urne. Quelle est la probabilité que l'on tire une boule de chaque couleur à chaque tirage ?

### Exercice 21.

Soit $(\omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soient $A_1, \dots, A_n$ des événements mutuellement indépendants. Montrer que la probabilité $p_0$ qu'aucun des $A_i$ ne soit réalisé vérifie

$$p_0 \leqslant \exp\left(-\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\right)$$

### Exercice 22.

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements mutuellement indépendants de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$. On considère l'évènement

$$A = \bigcap_{p\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geqslant p} A_n$$

dont la réalisation signifie qu'une infinité des évènements $A_n$ sont réalisés.

**a)** On suppose que la série $\sum \mathbb{P}(A_n)$ est convergente. Montrer que $\mathbb{P}(A) = 0$.

**b)** On suppose que la série $\sum \mathbb{P}(A_n)$ est divergente. Montrer que $\mathbb{P}(A) = 1$. *(utiliser l'exercice précédent)*

Ce résultat s'appelle la loi du zéro-un de Borel.

### Exercice 23.

Dans une population, la probabilité qu'une famille ait $n$ enfants est estimée par la valeur

$$p_n = \frac{\lambda^n}{n!}\,\mathrm{e}^{-\lambda} \quad \text{avec } \lambda \sim 2$$

En supposant les sexes équiprobables et l'indépendance des sexes des enfants à l'intérieur d'une même famille, donner une estimation de la probabilité qu'une famille ait au moins une fille.

### Exercice 24.

On effectue une suite de lancers indépendants d'une pièce équilibrée et l'on désigne par $p_n$ la probabilité de ne pas avoir obtenu trois «Pile» consécutifs lors des $n$ premiers lancers.

**a)** Calculer $p_1$, $p_2$, et $p_3$.

**b)** Pour $n \geqslant 4$, exprimer $p_n$ en fonction de $p_{n-1}$, $p_{n-2}$ et $p_{n-3}$.

**c)** Déterminer la limite de la suite $(p_n)_{n\geqslant 1}$.

## Variables aléatoires

### Exercice 25.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $p_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$. Montrer que $(p_n)_n$ définit une loi de probabilité pour une variable aléatoire $X$ à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

### Exercice 26.

On considère une boite dans laquelle se trouvent au départ deux boules blanches et une boule noire. On effectue l'expérience consistant en la répétition des trois étapes suivantes suivante :

— on tire au hasard une des boules de la boite

— on la remet dans la boite

— on rajoute une boule blanche et une boule noire dans la boite

Déterminer la loi de $X$, variable aléatoire donnant le numéro d'apparition de la première boule blanche.

## Exercice 27.

On lance deux dés à 6 faces équilibrés et discernables et on note :

— $X$ la variable aléatoire donnant le maximum des valeurs obtenues

— $Y$ la variable aléatoire donnant la valeur du deuxième dé

— $Z = (X, Y)$.

Décrire $X(\Omega)$, $Y(\Omega)$, $Z(\Omega)$, et déterminer la loi de chacune de ces variables.

## Exercice 28.

Soit $T$ une variable aléatoire à valeurs naturelles vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(T > n) > 0$$

On appelle taux de panne associé à $T$ la suite $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ déterminée par

$$\theta_n = \mathbb{P}(T = n | T \geqslant n)$$

Typiquement, si $T$ est la variable aléatoire indiquant l'instant où un matériel tombe en panne, la quantité $\theta_n$ indique la probabilité qu'il tombe en panne à l'instant présent alors qu'il est actuellement fonctionnel.

**a)** Justifier :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \theta_n \in [0, 1[$$

**b)** Exprimer en fonction des termes de la suite $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la probabilité $\mathbb{P}(T \geqslant n)$. En déduire la divergence de la série $\sum \theta_n$.

**c)** Inversement, soit $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \theta_n \in [0, 1[ \quad \text{et} \quad \sum \theta_n \quad \text{diverge}$$

Montrer que la suite $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un taux de panne associé à une certaine variable aléatoire $T$.

## Exercice 29.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires discrètes à valeurs dans un ensemble $E$ et $N$ une variable aléatoire à valeurs naturelles toutes définies sur un même espace probabilisable $(\Omega, T)$. On définit une fonction $Y$ par

$$\forall \omega \in \Omega, \quad Y(\omega) = X_{N(\omega)}(\omega)$$

Justifier que $Y$ est une variable aléatoire discrète.

## Exercice 30.

Soit $X$ et $Y$ deux variables aléatoires discrètes indépendantes. On suppose que celles-ci suivent une même loi géométrique de paramètre $p$. Déterminer la loi de $Z = X + Y$.

## Exercice 31.

Soit $X$ et $Y$ deux variables aléatoires discrètes indépendantes. On suppose que celles-ci suivent des lois géométriques de paramètres $p, q \in ]0, 1[$. Calculer $P(X < Y)$.

### Exercice 32.

Soit $X$ une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

**a)** Pour quelle valeur de $n \in \mathbb{N}$ la probabilité de l'évènement $(X = n)$ est-elle maximale ?

**b)** Inversement, $n$ étant fixé, pour quelle valeur du paramètre $\lambda$, la probabilité de $(X = n)$ est-elle maximale ?

### Exercice 33.

Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que $X$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et que la loi de $Y$ sachant $X = n$ est binomiale de paramètres $n$ et $p \in ]0,1[$.

**a)** Déterminer la loi conjointe de $(X, Y)$.

**b)** Reconnaitre la loi de $Y$.

### Exercice 34.

Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que la loi conjointe de $X$ et $Y$ vérifie :

$$\mathbb{P}(X = j, Y = k) = \frac{a}{j!k!} \quad \text{avec} \quad a \in \mathbb{R}$$

**a)** Déterminer la valeur de $a$.

**b)** Reconnaitre les lois marginales de $X$ et $Y$.

**c)** Les variables $X$ et $Y$ sont elles indépendantes ?

### Exercice 35.

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de v.a.d.i.i.d suivant chacune une loi de Bernoulli de paramètre $p \in ]0,1[$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$ On note $Y_k$ la v.a.d. définie par

$$Y_k(\omega) = \min\{n \in \mathbb{N}^* \mid X_1 + \cdots + X_n = k\}$$

**a)** Interpréter la variable $Y_k$ et reconnaitre la loi de $Y_1$.

**b)** Déterminer la loi de $Y_k$ et calculer son espérance.

## Espérance, variance, et fonctions génératrices

### Exercice 36.

Soit $X$ une variable aléatoire discrète à valeurs dans $[a, b]$.

**a)** Montrer que $X$ admet une espérance $m$ et que celle-ci est élément de $[a, b]$.
La variable $X$ admet aussi une variance $\sigma^2$ que l'on se propose de majorer. On introduit la variable aléatoire $X - m$ et les quantités

$$t = \sum_{y\geqslant 0} \mathbb{P}(Y = y)y, \quad s = \sum_{y\geqslant 0} \mathbb{P}(Y = y)y^2, \quad \text{et} \quad u = \mathbb{P}(Y \geqslant 0)$$

**b)** Vérifier que $t^2 \leqslant su$.

**c)** Calculer l'espérance et la variance de $Y$. En déduire que $t^2 \leqslant (\sigma^2 - s)(1 - u)$.

**d)** En exploitant les deux majorations précédentes, obtenir $t^2 \leqslant \sigma^2/4$.

**e)** Conclure $\sigma^2 \leqslant (b - a)^2/4$.

## Exercice 37.

On dit qu'une variable aléatoire $X$ suit une loi binomiale négative de paramètres $n$ et $p$ si

$$X(\Omega) = \{n, n+1, \ldots\} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X = k) = \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}$$

**a)** Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes une loi géométrique de paramètre $p$.
Montrer que $X_1 + \cdots + X_n$ suit une loi binomiale négative de paramètres $n$ et $p$.

**b)** En déduire espérance et variance d'une loi binomiale négative de paramètres $n$ et $p$.

## Exercice 38.

Dans une urne figurent $N$ boules numérotées de 1 à $N$ (avec $N \geqslant 2$). Dans celle-ci on opère des tirages successifs (avec remise) jusqu'à l'obtention d'une série de $k$ boules consécutives identiques ($k \geqslant 2$). On admet qu'il est presque sûr que ce processus s'arrête et on note $T$ la variable aléatoire déterminant le nombre de tirages opérés à l'arrêt du processus.

**a)** Déterminer $\mathbb{P}(T = k)$ et $\mathbb{P}(T = k+1)$.

**b)** Soit $n \geqslant 1$, établir

$$\mathbb{P}(T = n + k) = \frac{N-1}{N^k} \mathbb{P}(T > n)$$

**c)** En déduire que la variable $T$ est d'espérance finie et déterminer celle-ci.

## Exercice 39.

On lance une pièce équilibrée jusqu'à ce que celle-ci ait produit au moins une fois «face» et une fois «pile».

**a)** Montrer qu'il est presque sûr que le jeu s'arrête.

**b)** On note $X$ le nombre de lancers avant que le jeu cesse.
Montrer que $X$ et d'espérance finie et déterminer celle-ci.

## Exercice 40.

Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires réelles dont le carré est d'espérance finie. On suppose $\mathbb{V}(X) > 0$. Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ minimisant la quantité

$$\mathbb{E}\big((Y - (aX + b))^2\big)$$

## Exercice 41.

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires discrètes réelles. On appelle *matrice de covariance* de la famille $(X_1, \ldots, X_n)$ la matrice

$$C = \big(\mathrm{Cov}(X_i, X_j)\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$$

**a)** Soit $X = a_1 X_1 + \cdots a_n X_n$, avec $a_i \in \mathbb{R}$.
Exprimer la variance de $X$ en fonction de la matrice $C$.

**b)** En déduire que les valeurs propres de la matrice $C$ sont toutes positives.

## Exercice 42.

Soient $X_1$, et $X_2$ deux variables aléatoires discrètes réelles suivante toutes les deux la loi d'une variable aléatoire $X$ bornée.

On suppose que $X_1 + X_2$ suit la loi de la variable $2X$. Montrer que $X_1 = X_2$ presque sûrement, autrement dit que $\mathbb{P}(X_1 = X_2) = 1$.

## Exercice 43.

On dispose d'une urne contenant $N$ boules indiscernables au toucher numérotées de 1 à $N$. On effectue, à partir de cette urne, $n$ tirages successifs d'une boule, avec remise, et on note $X$ le plus grand nombre obtenu.

**a)** Que vaut $\mathbb{P}(X \leqslant k)$ ? En déduire la loi de $X$.

**b)** Déterminer la valeur de $\mathbb{E}(X)$. (*Penser à une formule alternative pour l'espérance, dans le cas d'une variable aléatoire à valeur dans* $\mathbb{N}$).

**c)** Démontrer que que la suite $\left(\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1}\left(\dfrac{k}{N}\right)^n\right)_N$ admet une limite (lorsque $N \to +\infty$) qu'on déterminera. (*Reconnaitre une somme de Riemann*)

**d)** En déduire que $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\frac{\mathbb{E}(X)}{N} = \frac{n}{n+1}$.

## Exercice 44.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que les réels $a$ et $k$ soient tels que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $p_n = \left(\dfrac{a}{a+a}\right)^n k$ définisse la loi de probabilité d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Donner alors la fonction génératrice d'une telle variable aléatoire.

## Exercice 45.

Soient deux variables aléatoires $X$ et $Y$ indépendantes et suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs $\lambda$ et $\mu$. Démontrer, à l'aide des fonctions génératrices, que $X+Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda+\mu$.

## Exercice 46.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a.d. à valeurs dans $\mathbb{N}$, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$, et de même loi. Soit $N$ une v.a.d. définie sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que toutes ces variables sont indépendantes et on considère

$$S : \omega \mapsto \sum_{k=1}^{N(\omega)} X_k(\omega)$$

**a)** Justifier que $S$ définit bien une variable aléatoire discrète.

**b)** Montrer que $G_S = G_N \circ G_{X_1}$.

**c)** En déduire que si $N$ et $X_1$ sont dans $L^1$, alors $S$ aussi et que $\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(X_1)$.