Chapitre 7

Fonctions vectorielles à une variable

Dans tout le chapitre, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide, comme tous les autres intervalles qui seront éventuellement considérés. Avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$, et $\|\cdot\|$ une norme sur E (toute autre norme étant équivalente). On interprétera les éléments de E comme des points ou des vecteurs selon le cas. Typiquement, pour $a, b \in I$, $f(a)$ et $f(b)$ sont des points tandis que la différence $f(b) - f(a)$ est un vecteur (*déplacement* de $f(a)$ à $f(b)$).

Révisions MP2I

Revoir les chapitres 29, 30, 31 et 49.

1 Dérivabilité.

1.1 Comparaisons au voisinage d'un point

Les relations de comparaison au voisinage d'un point $a \in \overline{I}$ (domination, négligeabilité, équivalence) et les notations correspondantes s'étendent au cas de deux fonctions à valeurs dans E.

Définition 1. Soient $f, g : I \to E$ et $a \in \overline{I}$. On a au voisinage de a :
- $f(t) = \mathrm{O}\big(g(t)\big)$ lorsque $\|f(t)\| = \mathrm{O}\big(\|g(t)\|\big)$
- $f(t) = \mathrm{o}\big(g(t)\big)$ lorsque $\|f(t)\| = \mathrm{o}\big(\|g(t)\|\big)$
- $f(t) \sim g(t)$ lorsque $f(t) - g(t) = \mathrm{o}\big(g(t)\big)$

Remarques :
- On montre que o et O définissent des relations réflexives et transitives (des préordres) et que $\sim$ définit une relation d'équivalence.
- pour o et O, on peut généraliser à $g : I \to F$ où F est un autre espace vectoriel normé de dimension finie. En particulier on pourra typiquement avoir $g : I \to \mathbb{R}^+$ et écrire $f(t) = \mathrm{O}\big(g(t)\big)$ ou $f(t) = \mathrm{o}\big(g(t)\big)$. Par exemple $f(t) = \mathrm{o}\big((t-a)^2\big)$ a bien un sens (qui est équivalent à $\dfrac{1}{(t-a)^2} f(t) \to 0$ quand $t \to a$).
- Ces définions s'étendent au cas $a = \pm\infty$ (pour I non majoré ou non minoré).

1.2 Dérivabilité en un point.

Définition 2. Soit $f : I \to E$. On dit que f est *dérivable* en $a \in I$ lorsque l'application :

$$t \mapsto \frac{1}{t-a}\big(f(t) - f(a)\big),$$

définie sur $I \backslash \{a\}$, et appelée *taux d'accroissement* en a, admet une limite finie $v \in E$ en a. Ce vecteur est alors appelé *dérivée* de f au point a et est noté $f'(a)$, $Df(a)$, ou encore $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(a)$.

Remarque : On peut définir également la *dérivabilité à gauche* et la *dérivabilité à droite* en a en considérant respectivement la limite à gauche et la limite à droite du taux d'accroissement.

Proposition 1. *Soit $f : I \to E$, et $a \in \mathring{I}$. Alors f est dérivable en a si, et seulement si, f est dérivable à gauche et à droite en a,* **et** *$f'_g(a) = f'_d(a)$.*

1.3 Développement limité d'ordre 1

Proposition 2. *f est dérivable en a si, et seulement si, f admet un* développement limité *d'ordre 1 en a, c'est-à-dire lorsqu'il existe $v \in E$, tel que pour t au voisinage de a :*

$$f(t) = f(a) + (t-a)v + \mathrm{o}(t-a).$$

Dans ces conditions, on a nécessairement $f'(a) = v$.

Corollaire 1. *Si f est dérivable en a, f est continue en a.*

Remarque : La réciproque est fausse, comme par exemple $x \mapsto |x|$ en 0, où encore $x \mapsto \sqrt{x}$ en 0.

1.4 Interprétation cinématique.

En interprétant le paramètre t comme le *temps*, La fonction f s'interprète comme la *loi horaire* du *déplacement* d'un mobile ponctuel dans l'espace E. l'ensemble $f(I) = \mathrm{Im}(f)$ s'interprète alors comme la *trajectoire* du point mobile $f(t)$, et $f'(a)$ comme le *vecteur vitesse* du point mobile à l'instant a.

On peut aussi considérer le *graphe* de f :

$$G = \left\{(t, f(t))\,,\ t \in I\right\} \subset \mathbb{R} \times E,$$

qui ne doit pas être confondu avec $f(I) \subset E$.

Remarque : Le graphe *caractérise* l'application (deux applications ayant même graphe sont égales), pas la "trajectoire" : une infinité d'applications à valeurs dans E peuvent avoir la même image, ce qui s'interprète comme une même trajectoire parcourue temporellement d'une infinité de façons différentes.

1.5 Utilisation d'une base.

Ce paragraphe expose le fait que le choix d'une base de E permet de se ramener à la situation $E = \mathbb{K}^n$, ce qui revient à considérer n fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$

Proposition 3. *Soit $\mathcal{B}$ une base de E et $(f_1, \ldots, f_n)$ les composantes de $f : I \to E$ dans $\mathcal{B}$. Alors pour $a \in I$, f est dérivable en a si, et seulement si, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, f_i est dérivable en a. Dans ces conditions, $f'(a)$ a pour coordonnées $\big(f'_1(a), \ldots, f'_n(a)\big)$.*

1.6 Dérivabilité sur un intervalle.

Définition 3. On dit que $f : I \to E$ est *dérivable* sur I lorsqu'elle est dérivable en tout point de I. On peut définir alors sur I l'application *dérivée* :

$$f' : t \mapsto f'(t).$$

Si de plus, f' est continue sur I, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

Remarque : f peut être dérivable, mais pas $\mathcal{C}^1$, par exemple $f : x \mapsto x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ prolongée par continuité en 0.

2 Opérations sur les fonctions dérivables.

2.1 Dérivabilité et combinaison linéaire.

Proposition 4. *Soit $f, g : I \to E$ deux applications dérivables sur I et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors $f + \lambda g$ est dérivable sur I et*

$$(f + \lambda g)' = f' + \lambda g'.$$

2.2 Dérivabilité et composition.

Proposition 5. *Soit $f : I \to E$ et $\varphi : J \to \mathbb{R}$ telle que $\mathrm{Im}(\varphi) \subset I$. Si f et φ sont dérivables, $f \circ \varphi$ aussi et :*

$$(f \circ \varphi)' = \varphi' \times f' \circ \varphi.$$

2.3 Dérivabilité et application linéaire.

On considère ici un second espace vectoriel F de dimension finie.

Proposition 6. *Soit $f : I \to E$ une application dérivable sur I et $L \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors $L \circ f : I \to F$ est dérivable sur I et*

$$(L \circ f)' = L \circ f'.$$

Remarque : Si de plus, f est de classe $\mathcal{C}^1$, $L \circ f$ aussi.

2.4 Dérivabilité et application bilinéaire.

On généralise ici la notion de dérivation d'un *produit* par une application bilinéaire $E \times F \to G$, où E, F et G sont trois espaces vectoriels de dimension finie.

Proposition 7. *Soit B une application bilinéaire de $E \times F$ dans G. Soient $f : I \to E$ et $g : I \to F$ deux applications vectorielles dérivables sur I. Alors l'application :*

$$B(f, g) : t \mapsto B\big(f(t), g(t)\big),$$

définie sur I et à valeurs dans G, est dérivable sur I, avec :

$$B(f, g)' = B(f', g) + B(f, g').$$

Exemple :
- Pour $E = F = G = \mathbb{K}$ et $B : (x, y) \mapsto xy$ on retrouve la régle habituelle du produit : $(fg)' = f'g + fg'$.
- Pour $\varphi : I \to \mathbb{K}$ et $f : I \to E$ dérivable, φf est dérivable et $(\varphi f)' = \varphi' f + \varphi f'$.
- Si $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire sur E et $f, g : I \to E$ dérivables, la fonction $(f|g) : t \mapsto \big(f(t)|g(t)\big)$ est dérivable avec
$$(f|g)' : x \mapsto \big(f'(x)|g(x)\big) + \big(f(x)|g'(x)\big).$$
En particulier :
$$(\|f\|^2)' = 2(f, f').$$
- Si $f, g : I \to \mathbb{R}^2$ sont dérivables, l'application $\det(f, g) : t \mapsto \det\big(f(t), g(t)\big)$ est dérivable et
$$\big(\det(f, g)\big)' = \det(f', g) + \det(f, g').$$

Exercice 1. Soit E est un espace préhilbertien réel et soit une application $f : I \to E$. Montrer que f est de norme constante si, et seulement si, $f(x)$ et $f'(x)$ sont orthogonaux pour tout $x \in I$.

2.5 Dérivabilité et application multilinéaire

Le paragraphe précédent se généralise au cas d'une application multilinéaire $M : E_1 \times \cdots \times E_p \to F$.

Proposition 8. *Soient $E_1, \ldots, E_p$ des espaces vectoriels de dimension finie et $M : E_1 \times \cdots \times E_p \to F$ une application multilinéaire. Soit pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, $f_j : I \to E_j$ dérivable. Alors $M(f_1, \ldots, f_p) : t \mapsto M\big(f_1(t), \ldots, f_p(t)\big)$ est dérivable sur I et :*

$$\big(M(f_1, \ldots, f_p)\big)'(t) = \sum_{j=1}^{p} M\big(f_1(t), \ldots, f_j'(t), \ldots, f_p(t)\big)$$

Exercice 2. Soit $A : I \mapsto \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Expliquer comment dériver l'application $f : t \mapsto \det\big(A(t)\big)$.

2.6 Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$.

Définition 4. Sur l'ensemble $\mathcal{F}(I, E)$, on définit récursivement la classe $\mathcal{C}^k$ par :
- f est de classe $\mathcal{C}^0$ lorsque f est continue, et on pose $f^{(0)} = f$.
- f est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ si f est de classe $\mathcal{C}^k$ et si $f^{(k)}$ est dérivable et de dérivée continue. On définit alors $f^{(k+1)} = (f^{(k)})'$.

Exemple : Si E est préhilbertien réel et $f : I \to E$ de classe $\mathcal{C}^2$, l'application $\|f'\|$ est constante si, et seulement si, $f'(t) \perp f''(t)$ pour tout $t \in I$ (interprétation cinématique : un mobile se déplace à vélocité constante si, et seulement si, l'accélération est nulle ou orthogonale au déplacement).

Définition 5. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ si f est de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 3. Soit $f : I \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^2$, et $a \in I$. On suppose que la famille $\big(f'(t), f''(t)\big)$ est libre pour tout $t \in I$, et on considère la famille orthonormale $(d(t), n(t))$ obtenue par orthonormalisation. On a en particulier $d : I \to S^{n-1}$ (la sphère unité de $\mathbb{R}^n$) définie par $d(t) = \dfrac{1}{v(t)} f'(t)$ (application *direction*), avec $v : I \to \mathbb{R}^+$ définie par $v(t) = \|f'(t)\|$ (application *vélocité*).

Montrer que les composantes tangentielles et normales de f'' sont respectivement :

$$(f''|d) = v' \qquad ; \qquad (f''|n) = v\|d'\|.$$

2.7 Linéarité et multilinéarité pour les classes $\mathcal{C}^k$

Comme vu en première année, on notera $\mathcal{C}^k(I, E)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et à valeurs dans E, pour tout $k \in \mathbb{N} \subset \{\infty\}$.

Proposition 9. *Pour $k \in \mathbb{N}$, $f, g \in \mathcal{C}^k(I, E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $f + \lambda g \in \mathcal{C}^k(I, E)$ et $(f + \lambda g)^{(k)} = f^{(k)} + \lambda g^{(k)}$.*

Corollaire 2. *Pour tout $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $\mathcal{C}^k(I, E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, E)$, avec les inclusions :*

$$\mathcal{C}^\infty(I, E) \subset \cdots \subset \mathcal{C}^{k+1}(I, E) \subset \mathcal{C}^k(I, E) \subset \cdots \subset \mathcal{C}^0(I, E) \subset \mathcal{F}(I, E).$$

De plus $D : f \mapsto f'$ est un endomorphisme de $\mathcal{C}^\infty(I, E)$, et $D^k : f \mapsto f^{(k)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Remarque : D, appelé *opérateur de dérivation*, est bien sûr également défini sur $\mathcal{C}^k(I, E)$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, mais cet usage est moins pratique, car D est alors à valeurs dans $\mathcal{C}^{k-1}(I, E)$, et on ne peut donc pas itérer D plus de k fois.

Proposition 10. *Soit $f \in \mathcal{C}^k(I, E)$, pour $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et $L \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors $L \circ f \in \mathcal{C}^k(I, F)$ et :*

$$(L \circ f)^{(k)} = L \circ f^{(k)}.$$

Proposition 11. ***(formule de Leibniz)*** *Soit B une application bilinéaire de $E \times F$ dans G et soient $f \in \mathcal{C}^k(I, E)$ et $g \in \mathcal{C}^k(I, F)$. Alors $B(f, g) \in \mathcal{C}^k(I, G)$ et :*

$$B(f, g)^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} B\big(f^{(i)}, g^{(k-i)}\big).$$

Remarques :
- Avec le produit usuel sur $\mathbb{K}$ (de $\mathbb{K} \times \mathbb{K}$ vers $\mathbb{K}$), on retrouve la formule de Leibniz vue en MP2I :

$$(fg)^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(i)} g^{(k-i)}.$$

  Muni de l'addition et de la multiplication des fonctions, l'ensemble $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{K})$ est une sous-$\mathbb{K}$-algèbre de $\mathbb{K}^I$, pour tout $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.
- Plus généralement, avec $M : E_1 \times \cdots \times E_p \to G$ multilinéaire, et $f_j : I \to E_j$ de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, $t \mapsto M\big(f_1(t), \ldots, f_p(t)\big)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ (il existe une formule compliquée qui généralise alors celle de Leibniz pour la dérivée k-ième).

3 Intégration sur un segment

Avant d'étudier tout ce qui suit, il sera pertinent de bien relire le chapitre de MP2I à propos de l'intégration sur un segment des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$.

3.1 Définition

Définition 6. On dit que $f : [a,b] \to E$ est *continue par morceaux* lorsqu'il existe une subdivision $(s_i)_{0\leqslant i\leqslant r}$ de $[a,b]$ telle que pour tout $i \in [\![0, r-1]\!]$:

- f est continue sur $]s_i, s_{i+1}[$
- f admet des limites finies en s_i à droite et en s_{i+1} à gauche.

Remarques :

- Cela revient à dire que $f_{|]s_i,s_{i+1}[}$ est continue et prolongeable par continuité sur $[s_i, s_{i+1}]$ pour tout $i \in [\![0, r-1]\!]$.
- $\mathcal{B}$ étant une base de E, et $(f_1, \dots, f_n)$ les composantes de $f : [a,b] \to E$ dans $\mathcal{B}$, on montre facilement que f est continue par morceaux si, et seulement si, toutes les $f_i : [a,b] \to \mathbb{K}$ sont continues par morceaux.

Proposition 12. *Pour $f : [a,b] \to E$ continue par morceaux de composantes $(f_1, \dots, f_n)$ dans une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la quantité :*

$$\int_a^b f = \sum_{i=1}^n \left(\int_a^b f_i(t)\mathrm{d}t \right) e_i$$

ne dépend pas de la base $\mathcal{B}$ considérée.

Définition 7. La quantité précédente définit l'*intégrale* de la fonction vectorielle f sur le segment $[a,b]$. On peut aussi la noter $\displaystyle\int_{[a,b]} f$ ou $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

Exemple : En prenant $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et en considérant $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni de la base $(1, i)$, on retrouve la formule permettant de définir l'intégrale d'une fonction complexe :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b \mathrm{Re}\big(f(t)\big)\mathrm{d}t + i\int_a^b \mathrm{Im}\big(f(t)\big)\mathrm{d}t$$

Proposition 13. ***(relation de Chasles)*** *Pour $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \leqslant b \leqslant c$, $f : [a,c] \to E$ est continue par morceaux si, et seulement si, f est continue par morceaux sur $[a,b]$ et sur $[b,c]$ et on a alors :*

$$\int_a^c f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\mathrm{d}t$$

Remarque : Comme dans le cas des fonctions scalaires vues en MP2I, on peut écrire plus généralement l'intégrale de a à b pour une fonction $f : I \to E$ continue morceaux, avec la convention

$$\int_a^b f = -\int_b^a f \qquad \text{si} \quad a > b$$

La relation de Chasles ci-dessus se généralise alors à $a, b, c \in I$ rangés dans un ordre quelconque.

3.2 Linéarité de l'intégrale

La propriété de linéarité de l'intégrale exprime que l'intégrale d'une combinaison linéaire de fonctions s'obtient comme la combinaison linéaire des intégrales.

Proposition 14. *Si $f, g : [a,b] \to E$ sont continues par morceaux, et $\lambda \in \mathbb{K}$, l'application $f + \lambda g$ est continue par morceaux sur $[a,b]$ et :*

$$\int_a^b (f + \lambda g) = \int_a^b f + \lambda \int_a^b g$$

Plus généralement, on peut parler de linéarité dans le cadre de la composition par une application linéaire.

Proposition 15. *Si $f : [a,b] \to E$ est continue par morceaux et $L \in \mathcal{L}(E,F)$, l'application $L \circ f : t \mapsto L\big(f(t)\big)$ est continue par morceaux et*

$$\int_a^b L \circ f = L\left(\int_a^b f\right)$$

Remarque : En considérant $L : E \times E \to F$ définie par $L(x,y) = x + \lambda y$ on retrouve la propriété de linérarité de l'intégrale $\int(f + \lambda g) = \int f + \lambda \int g$.

3.3 Intégration et norme

Rappelons qu'on suppose E muni d'une norme $\|\cdot\|$ (E étant de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes).

Proposition 16. ***(Inégalité triangulaire)*** *Si $f : [a,b] \to E$ est continue par morceaux, l'application $\|f\| : t \mapsto \big\|f(t)\big\|$ est continue par morceaux et*

$$\left\|\int_a^b f\right\| \leqslant \int_a^b \|f\|$$

Remarques :
- Attention à n'utiliser cette inégalité qu'avec des bornes dans "le bon sens" : $a \leqslant b$.
- Cette inégalité s'appelle aussi *inégalité de la moyenne* puisqu'elle est équivalente à

$$\left\|\frac{1}{b-a}\int_a^b f\right\| \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b \|f\|$$

qui exprime que "la norme de la moyenne est inférieure à la moyenne de la norme".

Proposition 17. *On suppose $I = [a,b]$. L'application $f \mapsto \displaystyle\int_a^b \|f\|$ définit une norme sur l'espace $\mathcal{C}(I,E)$ des applications continues. En particulier, si f est continue :*

$$\int_a^b \|f\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f = 0$$

Remarques :
- On généralise simplement ici la notion de *norme de la convergence en moyenne* déjà définie pour un espace de fonctions continues à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- La propriété de séparation n'est plus vérifiée sur l'espace des fonctions continues par morceaux : on a alors $\displaystyle\int_a^b \|f\| = 0$ si, et seulement si, f est non nulle sur un ensemble fini de points.
- On a ainsi pour deux fonctions $f, g : [a,b] \to \mathbb{K}$ continues par morceaux :
  - Si $\displaystyle\int_a^b \|f - g\| = 0$ alors f et g coincident sur $[a,b]$, sauf sur un ensemble fini de point (réduit à $\varnothing$ si f et g sont en fait continues)
  - Réciproquement, si f et g coincident sur $[a,b]$, sauf sur un ensemble fini de points, alors $\displaystyle\int_a^b \|f - g\| = 0$ et en particulier :

$$\int_a^b f = \int_a^b g$$

3.4 Sommes de Riemann

Définition 8. Soit $f : [a, b] \to E$ continue par morceaux, $\sigma = (s_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ une *subdivision* de $[a, b]$ (*i.e.* $a = s_0 < \cdots < s_n = b$) et $\tau = (t_k)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ un *marquage* de σ ($t_k \in [s_k, s_{k+1}]$ pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$).

On appelle *somme de Riemann* de f associée à (σ, τ) le vecteur :

$$S(f, \sigma, \tau) = \sum_{k=0}^{n-1} (s_{k+1} - s_k) f(t_k)$$

Remarques :

- Le *pas* d'une subdivision $\sigma = (s_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est défini par $|\sigma| = \max\limits_{0 \leqslant k \leqslant n-1} (s_{k+1} - s_k)$.
- Pour une subdivision *régulière* ($s_{k+1} - s_k = \dfrac{b-a}{n}$) on a $S(f, \sigma, \tau) = \dfrac{b-a}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f(t_k)$
- Concernant le marquage, on peut typiquement le choisir *à gauche* ($t_k = s_k$), *à droite* ($t_k = x_{k+1}$) ou encore *centré* ($t_k = \dfrac{s_k + s_{k+1}}{2}$).

Théorème 1. *Soit $f : [a, b] \to E$ continue par morceaux. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ telle que pour toute subdivision marquée (σ, τ) de pas $\leqslant \delta$:*

$$\left\| \int_{[a,b]} f - S(f, \sigma, \tau) \right\| \leqslant \varepsilon$$

Remarque : De façon équivalent, pour toute suite $(\sigma_n, \tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de subdivisions marquées de $[a, b]$ dont le pas tend vers 0 :

$$S(f, \sigma_n, \tau_n) \longrightarrow \int_a^b f$$

En considérant pour σ_n une subddivision régulière de pas $\dfrac{b-a}{n}$ avec un marquage gauche ou droit, on obtient le corollaire suivant, utilisé en pratique.

Corollaire 3. *Pour $f : [a, b] \to E$ continue par morceaux :*

$$\lim \left(\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \right) = \int_a^b f(t) \mathrm{d}t$$

4 Formules de Taylor

4.1 Primitive et intégrale

Théorème 2. *Soit $f : I \to E$ continue et $a \in I$. L'application $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t) \mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $F' = f$.*

Remarque : Une telle fonction F telle que $F' = f$ est appelée *primitive* de f. Le théorème précédent affirme donc que toute fonction vectorielle continue admet des primitives (F étant une primitive et $v \in E$ un vecteur constant quelconque, $F + v$ est encore une primitive).

4.2 Inégalité des accroissements finis

Il est fortement recommandé ici de revoir le cours de MP2I sur le théorème de Rolle et des accroissements finis : ils n'admettent pas de généralisation au cas d'une fonction vectorielle. En revanche, l'inégalité des accroissements finis, dans le cas d'une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$, reste parfaitement valable : il suffit d'appliquer l'inégalité de la moyenne à f' !

Proposition 18. ***(Inégalité des accroissements finis)*** *Soit $f : [a, b] \to E$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $M \geqslant 0$ tel que $\|f'\| \leqslant M$ sur $[a, b]$. Alors*

$$\|f(b) - f(a)\| \leqslant M(b - a)$$

Remarque : Ce résultat admet une interprétation cinématique claire : f représentant la loi horaire d'un mobile se promenant dans E, si la vélocité (norme du vecteur vitesse) est toujours majorée par M, il est clair que la distance parcourue par ce mobile entre les instants a et b reste inférieure à $M(b - a)$.

Corollaire 4.
- *pour $f : [a, b] \to E$ de classe $\mathcal{C}^1$, f est constante sur $[a, b]$ si, et seulement si, $f' = 0$.*
- *pour $f : I \to E$ continue, la différence entre deux primitives de f est constante. En particulier, si $a \in I$, l'ensemble de toutes les primitives est*

$$\left\{ x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t + v,\ v \in E \right\}$$

4.3 Formule de Taylor avec reste intégral

Théorème 3. *Soit $f : I \to E$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, avec $n \in \mathbb{N}$, et $a \in I$. Pour tout $x \in I$, on a :*

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k}_{\text{partie régulière}} + \underbrace{\int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n \mathrm{d}t}_{\text{reste intégral}}$$

Remarque : via le changement de variable $x = a + h$ et $t = u + a$ dans l'intégrale, cette relation peut également s'écrire :

$$f(a + h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + \int_0^h \frac{f^{(n+1)}(a + u)}{n!}(h - u)^n \mathrm{d}u$$

4.4 Inégalité de Taylor-Lagrange

Proposition 19. *Soit $f : I \to E$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, avec $n \in \mathbb{N}$, et soit $a \in I$. Pour tout $x \in I$, on a :*

$$\left\| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k \right\| \leqslant \frac{|x - a|^{n+1}}{(n + 1)!} M, \qquad \text{avec} \quad M = \sup_{t \in [a,x]} \left\| f^{(n+1)}(t) \right\|$$

Remarques :
- Dans le cas $n = 1$ on retrouve l'inégalité des accroissements finis.
- Comme pour la formule avec reste intégral, on peut obtenir une autre formulation avec le changement de variable $x = a + h$ et $t = u + a$ dans l'intégrale.

4.5 Formule de Taylor-Young

Proposition 20. *Soit $f : I \to E$ de classe $\mathcal{C}^n$ et $a \in I$. Pour x au voisinage de a, on a :*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k + \mathrm{o}\big((x - a)^n\big)$$

On dit qu'il s'agit du développement limité de f en a à l'ordre n.

Remarque : Ce théorème montre l'existence et l'unicité d'un développement limité d'ordre n en a pour une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ au voisinage de a, mais rappelons que f peut très bien admettre un développement limité d'ordre n sans être n-fois dérivable.

Exercice 4. Pour $n, p \in \mathbb{N}$, étudier la régularité et l'existence d'un développement limité en 0 de la fonction $f : x \mapsto x^n \sin\left(\dfrac{1}{x^p}\right)$.