

# Interrogation de cours n° 8

*Lundi 10 novembre 2025*

$\mathbb{K}$  est ici un sous-corps de  $\mathbb{R}$ .

## Définitions et énoncés (5 pts)

1. Quand dit-on qu'une partie  $H$  d'un groupe  $(G, *)$  est un sous-groupe de  $G$  ?
2. Expliquer ce que la congruence modulo  $n$  et donner la définition de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .
3. Qu'est-ce qu'un groupe monogène, cyclique ? Donner des exemples.
4. Donner la définition d'un idéal  $I$  d'un anneau commutatif  $A$ .
5. Donner la définition d'une algèbre commutative le plus précisément possible.

## Démonstrations (6 pts)

- a) Montrer que si  $H$  est un sous-groupe du groupe  $(\mathbb{Z}, +)$ , alors il est forcément de la forme  $n\mathbb{Z}$  pour un certain  $n \in \mathbb{N}$ .
- b) Montrer que le noyau d'un morphisme d'anneaux  $f : A \rightarrow B$  est un idéal de  $A$ .
- c) (MPI) Montrer que l'image d'un morphisme d'anneaux  $f : A \rightarrow B$  est un sous-anneau de  $B$ .
- c) (MPI\*) Montrer que si  $G$  est un groupe commutatif fini de cardinal  $n$  et  $a \in G$ , alors  $a$  est d'ordre fini et son ordre  $d$  est un diviseur de  $n$ .