Devoir à la maison n° 3 - MPI*

À rendre le lundi 13 octobre 2025

Ce troisième devoir MPI* est constitué de trois problèmes. Le premier établit une amélioration classique de la rège de d'Alembert. Le deuxième propose l'étude d'une série de fonctions. Le troisième pour objectif la démonstration du théorème d'approximation de Weierstrass.

I. Règle de Raabe-Duhamel

Dans ce problème, on considère une suite $(u_n)_n$ strictement positive. On s'intéresse à l'étude de la convergence de la série $\sum u_n$. La règle de d'Alembert permet de conclure lorsque :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \neq 1.$$

On se place ici dans le cas $\ell = 1$ et on suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel qu'au voisinage de $+\infty$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

1. On suppose $\alpha > 1$. et on fixe $\gamma \in]1, \alpha[$. À l'aide d'un développement asymptotique à l'ordre 1 de $\dfrac{n^\gamma}{(n+1)^\gamma}$, montrer que $u_n = \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n^\gamma}\right)$ et en déduire la nature de la série $\sum u_n$.

2. Effectuer un raisonnement similaire dans le cas $\alpha < 1$ et énoncer une règle (appelée règle de Raabe-Duhamel) permettant de connaitre potentiellement la nature d'une série dans le cas douteux ("$\ell = 1$") de la règle de d'Alembert.

3. On suppose maintenant qu'on a un peu plus d'information et que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Montrer qu'il existe $K > 0$ tel que $u_n \sim \dfrac{K}{n^\alpha}$ et repréciser alors dans ce cas la règle énoncée à la question précédente.

Indication : Montrer que la suite $(\ln(n^\alpha u_n))_n$ *est convergente en passant par une série telescopique.*

4. Application : Étudier la nature de la série $\sum u_n$, avec $u_n = \sqrt{n!} \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$.

II. Étude d'une série de fonctions

Soit α un réel strictement positif.

Pour n entier non nul, on considère l'application u_n de $[0, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ définie par

$$u_n(x) = \frac{x}{n^\alpha(1 + nx^2)}.$$

1. Étudier la convergence simple et normale de la série $\sum u_n$ sur $[0, +\infty[$, ainsi que la convergence normale sur tout segment de $]0, +\infty[$.

On note S l'application de $[0,+\infty[$ vers $\mathbb{R}$ définie par $S = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

2. Montrer que pour tout $\alpha > 0$, S est continue sur $]0,+\infty[$, et que S est également continue en 0 si $\alpha > \dfrac{1}{2}$.

3. On suppose dans cette question que $\alpha \leqslant \dfrac{1}{2}$. Pour x élément de $[0,+\infty[$, on pose

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x).$$

a) Établir l'inégalité $R_n(x) \geqslant \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{x}{\sqrt{2n}(1+kx^2)}$.

b) Que peut-on en déduire à propos de la convergence uniforme sur $[0,+\infty[$?

c) Montrer que pour tout réel $x > 0$, on a

$$S(x) \geqslant \int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{t}(1+tx^2)}\,dt,$$

et en déduire que S n'est pas continue en 0.
(*On pourra calculer l'intégrale à l'aide du changement de variable* $u = x\sqrt{t}$)

III. Théorème de Weierstrass

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in [\![0,n]\!]$, on définit le polynôme

$$B_{n,k} = \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k}$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que $(B_{n,k})_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer des expressions simplifiées de :

$$\sum_{k=0}^{n} B_{n,k} \quad , \quad \sum_{k=0}^{n} kB_{n,k} \quad , \quad \sum_{k=0}^{n} k^2 B_{n,k}$$

3. Soit $\alpha > 0$ et $x \in [0,1]$. On définit

$$A = \left\{k \in [\![0,n]\!] \mid \left|\frac{k}{n} - x\right| \geqslant \alpha\right\} \qquad \text{et} \qquad B = \left\{k \in [\![0,n]\!] \mid \left|\frac{k}{n} - x\right| < \alpha\right\}$$

Montrer que :

$$\sum_{k\in A} B_{n,k}(x) \leqslant \frac{1}{4n\alpha^2}$$

4. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{K}$ continue. On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f_n : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}(x).$$

Montrer que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

5. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. On munit l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$ et on considère F l'ensemble des fonctions polynomiales de $[a,b]$ vers $\mathbb{K}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel dense de E.

Un corrigé

I. Règle de Raabe-Duhamel

Voir énoncé et corrigé MPI.

II. Étude d'une série de fonctions

Voir énoncé et corrigé MPI.

III. Théorème de Weierstrass

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et soient $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_{k=0}^n \lambda_k X^k (1-X)^{n-k} = 0$. Par l'absurde supposons les λ_k non tous nuls et fixons i le plus petit entier tel que $\lambda_i \neq 0$. On a alors

$$X^i \sum_{k=i}^n \lambda_k X^{k-i}(1-X)^{n-k} = 0,$$

ce qu'on peut simplifier en

$$\lambda_i (1-X)^{n-i} + X \sum_{k=i+1}^n \lambda_k X^{k-i-1}(1-X)^{n-k} = 0$$

En évaluant en 0, on obtient $\lambda_i = 0$, contradiction.

On a donc montré que la famille $(X^k(1-X)^{n-k})_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est libre dans $\mathbb{K}_n[X]$ et il en va donc naturellement de même pour la famille $(B_{n,k})_{0 \leqslant k \leqslant n}$. Étant constituée de $n+1$ éléments, soit autant que la dimension de $\mathbb{K}_n[X]$, il s'agit bien d'une base de cet espace.

Remarque : On peut aussi montrer de façon alternative que la famille $(X^k(1-X)^{n-k})_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est génératrice, si on a repéré qu'on a pour tout $p \in [\![0, n]\!]$:

$$X^p = X^p\big(X + (1-X)\big)^{n-p} = X^p \sum_{k=0}^{n-p} \binom{n-p}{k} X^k (1-X)^{n-p-k} = \sum_{k=p}^{n} \binom{n-p}{k-p} X^k (1-X)^{n-k}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. La formule du binôme de Newton donne déjà immédiatement :

$$\sum_{k=0}^n B_{n,k} = \big(X + (1-X)\big)^n = 1$$

Supposons $n \geqslant 1$. Pour $k \geqslant 1$, on dispose de la formule bien connue (ou pas ?) $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$, de sorte que

$$\sum_{k=0}^n k B_{n,k} = n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} X^k (1-X)^{n-k} = n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} X^{k+1}(1-X)^{n-1-k} = nX,$$

formule qui reste valide si $n = 0$.

Supposons maintenant $n \geqslant 2$. Dans le même esprit que ce qui précède (il suffit de réitérer), on a pour $k \geqslant 2$, la formule $k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)\binom{n-2}{k-2}$, de sorte que

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k(k-1)B_{n,k} &= n(n-1)\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2}X^k(1-X)^{n-k} = n(n-1)\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}X^{k+2}(1-X)^{n-2-k}\\ &= n(n-1)X^2\end{aligned}$$

Le résultat précédent est en fait valide pour tout $n \geqslant 1$ et on a alors

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 B_{n,k} = \sum_{k=1}^{n} k(k-1)B_{n,k} + \sum_{k=1}^{n} kB_{n,k} = n(n-1)X^2 + nX,$$

ce qui reste valide pour $n = 0$.

3. Si $k \in A$, on a $|k - nx| \geqslant n\alpha$, ce qui est équivalent à $n^2\alpha^2 \leqslant (k-nx)^2$ On peut alors écrire que :

$$\begin{aligned}n^2\alpha^2\sum_{k\in A} B_{n,k}(x) &\leqslant \sum_{k\in A}(k-nx)^2 B_{n,k}(x)\\ &\leqslant \sum_{k=0}^{n}(k^2 - 2knx + n^2x^2)B_{n,k}(x)\\ &\leqslant \sum_{k=0}^{n} k^2 B_{n,k}(x) - 2nx\sum_{k=0}^{n} kB_{n,k}(x) + n^2x^2\sum_{k=0}^{n} B_{n,k}(x)\\ &\leqslant n(n-1)x^2 + nx - 2n^2x^2 + n^2x^2\\ &\leqslant nx(1-x)\end{aligned}$$

Une étude facile de fonction montre que $x(1-x) \leqslant \frac{1}{4}$, et on en déduit donc bien

$$\sum_{k\in A} B_{n,k}(x) \leqslant \frac{1}{4n\alpha^2}$$

4. Commençons par remarquer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [0,1]$, on a :

$$\left|f_n(x) - f(x)\right| = \left|\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)B_{n,k}(x) - \sum_{k=0}^{n} f(x)B_{n,k}(x)\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n}\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| B_{n,k}(x)$$

Soit $\varepsilon > 0$. D'après le théorème de Heine, la fonction f est uniformément continue, et il existe donc $\alpha > 0$ tel que pour tout $x, y \in [0,1]$, $|x - y| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$, on définit alors A et B comme dans la question précédente, et on a :

$$\left|f_n(x) - f(x)\right| \leqslant \sum_{k\in A}\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| B_{n,k}(x) + \sum_{k\in B}\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| B_{n,k}(x)$$

Par définition de B et compte-tenu de ce que α est un module de continuité uniforme pour ε, on a

$$\sum_{k\in B}\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| B_{n,k}(x) \leqslant \varepsilon\left(\sum_{k\in B} B_{n,k}(x)\right) \leqslant \varepsilon$$

D'autre part, d'après la question précédente, on a

$$\sum_{k\in A}\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| B_{n,k}(x) \leqslant 2\|f\|_\infty \sum_{k\in A} B_{n,k}(x) \leqslant \frac{\|f\|_\infty}{2n\alpha^2}$$

Mais il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, on ait $\dfrac{\|f\|_\infty}{2n\alpha^2} \leqslant \varepsilon$. On a alors, pour tout $n \geqslant n_0$ et pour tout $x \in [0,1]$ (on notera bien que le découpage avec A et B dépend de n et de x) :

$$\big|f_n(x) - f(x)\big| \leqslant 2\varepsilon$$

5. Il est clair que F est un sous-espace vectoriel de E. Soit $g \in E$. La fonction $f : x \mapsto g\big(a+(b-a)x\big)$ est continue sur $[0,1]$ et la suite $(f_n)_n$ de fonctions polynomiales, définies comme à la question précédente, converge uniformément vers f sur $[0,1]$. En posant $g_n : x \mapsto f_n\left(\dfrac{x-a}{b-a}\right)$, on montre facilement que $(g_n)_n$ est une suite de F convergeant uniformément vers g sur $[a,b]$. Autrement dit $g_n \to g$ dans l'espace $(E, \|\cdot\|_\infty)$, ce qui prouve $g \in \overline{F}$. On a donc bien F dense dans E.