A2019 – MATH II MP

Concours commun

Mines-Ponts

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARISTECH,
TELECOM PARISTECH, MINES PARISTECH,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT Atlantique, ENSAE PARISTECH,
CHIMIE PARISTECH.

Concours Centrale-Supélec (Cycle International),
Concours Mines-Télécom, Concours Commun TPE/EIVP.

CONCOURS 2019

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - MP

L'énoncé de cette épreuve comporte 4 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Majoration du rayon spectral de la matrice de Hilbert

Soit n un entier $\geqslant 1$. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique. La norme euclidienne associée est notée $\| \ \|$. On note $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, et on identifiera $\mathbb{R}^n$ à l'ensemble $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ des matrices colonnes à coefficients réels. On note ${}^tX = (x_0\ x_1 \cdots x_{n-1}) \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ la matrice ligne transposée de la matrice colonne

$$X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}).$$

Enfin, on note $\widetilde{X}$ la fonction polynomiale définie sur $\mathbb{R}$ par la formule

$$\widetilde{X}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} x_k t^k.$$

L'objet du problème est l'étude de quelques propriétés de la *matrice de Hilbert* $H_n = \big(h_{j,k}^{(n)}\big)_{0\leqslant j,k\leqslant n-1} \in \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ définie par

$$H_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix}.$$

On a donc $h_{j,k}^{(n)} = \frac{1}{j+k+1}$ pour tous $j, k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$.

A. Une propriété de Perron-Frobenius

1) Montrer que la matrice H_n est symétrique réelle et définie positive. On pourra s'aider du calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \big(\widetilde{X}(t)\big)^2 dt$.

On note $\mathscr{V}$ le sous-espace propre de H_n associé à la plus grande valeur propre ρ_n de H_n.

2) Montrer que $X \in \mathscr{V}$ si et seulement si ${}^tX\, H_n\, X = \rho_n \|X\|^2$.

Soit $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$ un vecteur non nul de $\mathcal{V}$. On note $|X_0| = \begin{pmatrix} |x_0| \\ |x_1| \\ \vdots \\ |x_{n-1}| \end{pmatrix}$.

3) Établir l'inégalité ${}^tX_0\, H_n\, X_0 \leqslant {}^t|X_0|\, H_n\, |X_0|$ et en déduire que $|X_0| \in \mathcal{V}$.

4) Montrer que $H_n|X_0|$, puis que X_0, n'a aucune coordonnée nulle.

5) En déduire la dimension du sous-espace propre $\mathcal{V}$.

B. Inégalité de Hilbert

Soit $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et P un polynôme à coefficients réels.

6) En s'aidant du calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi} P(e^{i\theta})e^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta$, montrer l'inégalité $\displaystyle\left|\int_{-1}^{1} P(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^{\pi} \left|P(e^{i\theta})\right|\mathrm{d}\theta$, puis l'inégalité ${}^tXH_nX \leqslant \displaystyle\int_0^{\pi} \left|\widetilde{X}(e^{i\theta})\right|^2 \mathrm{d}\theta$.

7) En déduire que ${}^tXH_nX \leqslant \pi\|X\|^2$.

8) Montrer que la suite $(\rho_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante et convergente.

C. Un opérateur intégral

Dans la suite du problème, pour tout entier $n > 0$ et tout réel x, on pose

$$K_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} x^k.$$

Soit E l'espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles, continues et intégrables sur $[0,1[$ et $T_n : E \to E$ l'application définie par

$$T_n(f)(x) = \int_0^1 K_n(tx)f(t)\,\mathrm{d}t.$$

9) Montrer que T_n est un endomorphisme de E, dont 0 est valeur propre. (On rappelle que $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de T_n s'il existe $f \in E$ non nulle telle que $T_n(f) = \lambda f$.)

10) Pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, calculer $T_n(\widetilde{X})$. En déduire que T_n et H_n ont les mêmes valeurs propres non nulles.

On note $\mathscr{A}$ l'ensemble des fonctions $\varphi \in E$ à valeurs strictement positives sur $]0,1[$ telles que $\frac{1}{\varphi}$ admette un prolongement continu sur $[0,1]$. On rappelle que ρ_n est la plus grande valeur propre de H_n.

11) En utilisant un vecteur propre associé à ρ_n, montrer que

$$\rho_n \leqslant \inf_{\varphi\in\mathscr{A}} \sup_{x\in]0,1[} \frac{1}{\varphi(x)} \int_0^1 K_n(tx)\varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

En utilisant la partie A, montrer que l'on a égalité dans l'inégalité précédente.

D. Une majoration explicite des rayons spectraux

Soit $\varphi \in \mathscr{A}$ et $n \in \mathbb{N}$. Dans la suite du problème, on pose, pour tout $x \in]0,1[$:

$$\begin{aligned} r_n(x) &= \frac{1}{\varphi(x)} \int_0^1 K_n(tx)\varphi(t)\,\mathrm{d}t, \\ J_n(x) &= \int_0^1 \frac{t^n\varphi(t)}{1-tx}\,\mathrm{d}t, \\ \Phi_n(x) &= \frac{x^n J_n(x)}{\varphi(x)}. \end{aligned}$$

La fonction Gamma d'Euler est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par la formule

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

On admet, et on pourra utiliser sans démonstration, les formules suivantes :

$$\begin{aligned} \Gamma(x+1) &= x\,\Gamma(x) && \text{pour tout } x>0. \\ \Gamma(n) &= (n-1)! && \text{pour tout entier } n>0. \\ \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} &= \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,\mathrm{d}t && \text{pour tous réels } \alpha>0, \beta>0. \end{aligned}$$

12) Montrer que J_n est dérivable sur $]0,1[$ et que l'on a l'égalité

$$xJ_n'(x) = \int_0^1 \frac{t^n\varphi(t)}{(1-tx)^2}\,\mathrm{d}t - J_n(x).$$

On suppose dorénavant que $\varphi \in \mathscr{A}$ est de classe C^1 sur $[0,1[$ et que $(1-t)\varphi(t) \to 0$ lorsque $t \to 1^-$.

13) Montrer que

$$nJ_n(x) = c + nJ_{n-1}(x) + (x-1)\int_0^1 \frac{t^n\varphi(t)}{(1-tx)^2}\,\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{t^n(1-t)\varphi'(t)}{1-tx}\,\mathrm{d}t$$

où c est un coefficient à déterminer et où φ' désigne la dérivée de φ. (On pourra traiter à part le cas $n=0$, où l'on considère que $nJ_{n-1}(x)=0$ et où l'on montrera que $c=\varphi(0)$.)

14) Déduire des deux questions précédentes que

$$x(1-x)J_n'(x) = c+(n+1)(x-1)J_n(x)+n\int_0^1 t^{n-1}\varphi(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^1 \frac{t^n(1-t)\varphi'(t)}{1-tx}\,\mathrm{d}t.$$

15) Soit $\gamma\in\mathbb{R}$. Résoudre l'équation différentielle $(1-t)y'=-\gamma y$ sur l'intervalle $[0,1[$. À quelles conditions une solution $y(t)$ de cette équation différentielle vérifie-t-elle les hypothèses faites sur φ ?

On suppose désormais ces conditions réalisées et que la fonction φ est la solution de cette équation différentielle telle que $\varphi(0)=1$.

16) Montrer que la fonction Φ_n est dérivable sur $]0,1[$ et que l'on a :

$$\Phi_n'(x) = -(\gamma+1)\frac{\Phi_n(x)}{x} + c_n\frac{x^{n-1}}{(1-x)^{1+\gamma}}$$

où l'on donnera l'expression de la constante c_n en fonction de n et de γ.

17) En déduire que pour tout $x\in]0,1[$,

$$\Phi_n(x) = \frac{c_n}{x^{1+\gamma}}\int_0^x \frac{t^{n+\gamma}}{(1-t)^{1+\gamma}}\,\mathrm{d}t.$$

18) En déduire que pour $n\geqslant 1$,

$$\rho_n \leqslant \inf_{\alpha\in]0,1[}\ \sup_{x\in]0,1[}\frac{1}{x^{1-\alpha}}\int_0^x \frac{1-\theta_n t^n}{t^\alpha(1-t)^{1-\alpha}}\,\mathrm{d}t$$

où l'on a posé $\theta_n = \dfrac{n!}{(1-\alpha)(2-\alpha)\dots(n-\alpha)}$.

Un calcul montre, et on l'admet, que l'inégalité précédente implique l'inégalité :

$$\rho_n \leqslant \inf_{\alpha\in]0,1[}\theta_n^{(1-\alpha)/n}\int_0^{\theta_n^{-1/n}} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha(1-t)^{1-\alpha}}.$$

19) En déduire que $\rho_n \leqslant 2\omega_n \arcsin\left(\dfrac{1}{\omega_n}\right)$, où l'on a posé $\omega_n = 2\left(\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}\right)^{1/2n}$.

20) Donner un équivalent de $\omega_n - 1$, puis un équivalent de $\pi - 2\omega_n\arcsin\frac{1}{\omega_n}$ lorsque $n\to+\infty$.

FIN DU PROBLÈME

Épreuve de mathématiques II
Correction

A. Une propriété de Perron- Frobenius

1. Rappelons d'abord la formule générale pour une matrice $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$:

$$^tXAX = (AX|X) = \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j}x_ix_j.$$

Ici, et en utilisant l'indication, on a

$$^tXH_nX = \sum_{0\leq i,j\leq n-1} x_ix_j \int_0^1 t^{i+j}\mathrm{d}t.$$

Utilisant la linéarité de l'intégrale et reconnaissant un carré, on obtient :

$$^tXH_nX = \int_0^1 \sum_{0\leq i,j\leq n-1} x_ix_jt^{i+j}\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(\sum_{i=0}^{n-1} x_it^i\right)^2 \mathrm{d}t.$$

De la formule précédente, on déduit immédiatement que H_n est positive. Démontrons qu'elle est définie positive. En effet, si $^tXH_nX = 0$, alors, puisqu'on intègre une fonction continue et positive sur $[0,1]$ dont l'intégrale doit être nulle, on déduit que

$$\forall t \in [0,1],\ \sum_{i=0}^{n-1} x_it^i = 0.$$

Un polynôme ayant une infinité de racine étant le polynôme nul, on en déduit que tous les x_i sont nuls, soit encore que X est nul. Ainsi, H_n est définie positive.

2. Soit X un vecteur de $\mathscr{V}$. Donc $H_nX = \rho_nX$ puis

$$^tXH_nX = \rho_n^tXX = \rho_n\|X\|^2.$$

Réciproquement, H_n étant symétrique à coefficients réels. Le cour indique (théorème spectral) qu'il existe une matrice diagonale $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice orthogonale P de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$H_n = PD^tP.$$

Notons $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_{n-1}$ les valeurs propres de H_n de telle sorte que $D = \mathrm{diag}(\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_{n-1})$. Soit maintenant X un élément non nul de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $^tXH_nX = \rho_n\|X\|^2$. Posons

$$Y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = {}^tPX = P^{-1}X,$$

on a :

$$ {}^tXH_nX = (PY|PD^tPPY) = (Y|DY) $$

et

$$ \|X\|^2 = (X|X) = (PY|PY) = (Y|^tPPY) = \|Y\|^2. $$

Or ${}^tXH_nX = \rho_n\|X\|^2$ donc ${}^tYD_nY = \rho_n\|Y\|^2$. Ainsi $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} y_k(\lambda_k y_k) = \rho_n \sum_{k=0}^{n-1} y_k^2$, donc

$$ \sum_{k=0}^{n-1}(\rho_n - \lambda_k)y_k^2 = 0 \text{ et } \forall k \in [\![0, n-1]\!],\ (\rho_n - \lambda_k)y_k^2 \geq 0. $$

Alors $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $(\rho_n - \lambda_k)y_k^2 = 0$, donc $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $(\rho_n - \lambda_k) = 0$ ou $y_k = 0$. Par conséquent, $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $(\rho_n - \lambda_k)y_k = 0$ ce qui donne $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $\rho_n y_k = \lambda_k y_k$ et ce qui signifie exactement que $D_nY = \rho_n Y$.
Alors $D^tPX = \rho_n{}^tPX$ donc $PD^tPX = \rho_n P^tPX$ ou encore $H_nX = \rho_n X$. Donc X est un vecteur propre de H_n associé à la valeur propre ρ_n.

3. On a :

$$ {}^tX_0H_nX_0 = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} x_ix_j\frac{1}{i+j+1} \leq \left|\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} x_ix_j\frac{1}{i+j+1}\right| $$
$$ \leq \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} |x_i||x_j|\frac{1}{i+j+1} = {}^t|X_0|H_n|X_0|. $$

D'où l'inégalité demandée.
D'autre part, $X_0 \in \mathscr{V}$, donc ${}^tX_0H_nX_0 = \rho_n\|X_0\|^2$. Comme $|X_0| \in \mathbb{R}^n$, alors ${}^t|X_0|H_n|X_0| \leq \rho_n\||X_0|\|^2 = \rho_n\|X_0\|^2$. Ainsi ${}^t|X_0|H_n|X_0| = \rho_n\||X_0|\|^2$. Donc $|X_0|$ est un élément non nul de $\mathbb{R}^n$ tel que ${}^t|X_0|H_n|X_0| = \rho_n\||X_0|\|^2$. Ainsi $|X_0|$ est un élément de $\mathscr{V}$.

4. Posons $H_n|X_0| = \begin{pmatrix} t_0 \\ t_1 \\ \vdots \\ t_{n-1} \end{pmatrix}$. Soit $j \in [\![0, n-1]\!]$, $t_j = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}\frac{|x_i|}{i+j+1}$. Or $\forall j \in [\![0, n-1]\!]$, $\dfrac{|x_i|}{i+j+1} > 0$ et il existe $k \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $|x_k| > 0$, donc $t_j = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}\frac{|x_i|}{i+j+1} > 0$. Les composantes de $H_n|X_0|$ sont strictement positives.
On a $H_n|X_0| = \rho_n|X_0|$ donc les composantes de $\rho_n|X_0|$ sont strictement positives. comme $\rho_n > 0$ et les composantes de $|X_0|$ sont strictement positives, alors X_0 n'a aucune composante nulle.

5. On a ${}^tX_0H_nX_0 = {}^t|X_0|H_n|X_0|$. Donc $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}(|x_i||x_j| - x_ix_j)\frac{1}{i+j+1} = 0$, ainsi $\forall i, j \in [\![0, n-1]\!]$, $|x_i||x_j| = x_ix_j$. Alors $\forall i, j \in [\![0, n-1]\!]$, $x_ix_j > 0$, en particulier $x_ix_0 > 0$. Donc les composantes de X_0 sont toutes de même signe.
Maintenant, posons $p = \dim\mathscr{V}$ et supposons $p \geq 2$. $\mathscr{V}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$, donc $\mathscr{V}$ possède une base orthonormée $(X_1, X_2, ..., X_p)$.

Si $p \geq 2$, alors X_1 et X_2 sont deux vecteurs non nuls et orthogonaux. Posons $X_1 = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{pmatrix}$, les a_i (resp. les b_i) sont non nuls et de même signe. Ainsi $a_0b_0, a_1b_1, ..., a_{n-1}b_{n-1}$ sont non nuls et de même signe. Alors nécessairement $\sum\limits_{i=0}^{n-1} a_ib_i = (X_1|X_2)$ n'est pas nulle donc X_1 et X_2 ne sont pas orthogonaux ce qui est absurde donc $p \leq 1$. Or $\mathscr{V}$ est un sous-espace propre donc $\dim \mathscr{V} = p = 1$.

B. Inégalité de Hilbert

6. Posons $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k x^k$, avec $a_i \in \mathbb{R}$ pour tout $i \in [\![0, n]\!]$. Donc $P(e^{i\theta})e^{i\theta} = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k e^{i(k+1)\theta}$. D'une part, on a :

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} P(x)\mathrm{d}x &= \sum_{k=0}^{d} a_k \int_{-1}^{1} x^k \mathrm{d}x \\
&= \sum_{i=0}^{d} a_k \left[\frac{1-(-1)^{k+1}}{k+1}\right]
\end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{\pi} P(e^{i\theta})e^{i\theta}\mathrm{d}\theta &= \sum_{k=0}^{d} a_k \int_{0}^{\pi} e^{i(k+1)\theta}\mathrm{d}\theta \\
&= \sum_{k=0}^{d} a_k \left[\frac{e^{i(k+1)\theta}}{i(k+1)}\right]_0^{\pi} \\
&= \sum_{k=0}^{d} a_k \left[\frac{e^{i(k+1)\pi}-1}{i(k+1)}\right] \\
&= -i\sum_{i=0}^{d} a_k \left[\frac{1-(-1)^{k+1}}{k+1}\right] \\
&= -i\int_{-1}^{1} P(x)\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

D'où :

$$\left|\int_{-1}^{1} P(x)\mathrm{d}x\right| = \left|i\int_{0}^{\pi} P(e^{i\theta})e^{i\theta}\mathrm{d}\theta\right| \leq \int_{0}^{\pi} |P(e^{i\theta})e^{i\theta}|\mathrm{d}\theta = \int_{0}^{\pi} |P(e^{i\theta})|\mathrm{d}\theta.$$

On a ${}^tXH_nX = \sum\limits_{i=0}^{n-1}\sum\limits_{j=0}^{n-1} \dfrac{x_ix_j}{i+j+1} = \displaystyle\int_0^1 \left[\widetilde{X}(t)\right]^2 \mathrm{d}t$

Il est clair que $\displaystyle\int_0^1 \left[\widetilde{X}(x)\right]^2 \mathrm{d}x \leq \int_{-1}^1 \left[\widetilde{X}(x)\right]^2 \mathrm{d}x$ puisque $[0,1] \subset [-1,1]$ et la fonction sous signe intégral est positive. D'autre part, on a :

$$\int_{-1}^1 \left[\widetilde{X}(x)\right]^2 \mathrm{d}x \leq \int_0^\pi |\widetilde{X}(e^{i\theta})|^2 \mathrm{d}\theta.$$

D'où

$${}^tXH_nX \leq \int_0^\pi |\widetilde{X}(e^{i\theta})|^2 \mathrm{d}\theta.$$

7. L'application $\theta \mapsto \widetilde{X}(e^{i\theta})\widetilde{X}(e^{-i\theta})$ étant paire, donc $\displaystyle\int_0^\pi \widetilde{X}(e^{i\theta})\widetilde{X}(e^{-i\theta})\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^\pi X(e^{i\theta})\widetilde{X}(e^{-i\theta})\mathrm{d}\theta$. Ainsi

$${}^tXH_nX \leq \frac{1}{2}\int_{-\pi}^\pi \widetilde{X}(e^{i\theta})\widetilde{X}(e^{-i\theta})\mathrm{d}\theta.$$

On a $\displaystyle\widetilde{X}(x)^2 = \sum_{k=0}^n\sum_{l=0}^n x_kx_lx^{k+l}$ et donc

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_{-\pi}^\pi \widetilde{X}(e^{i\theta})\widetilde{X}(e^{-i\theta})\mathrm{d}\theta &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^n\sum_{l=0}^n x_kx_l\int_{-\pi}^\pi e^{i(k-l)}\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^n\sum_{l=0}^n x_kx_l\delta_{k,l}2\pi \\
&= \pi\sum_{k=0}^n x_k^2 = \pi\|X\|^2
\end{aligned}$$

où $\delta_{k,l}$ est le symbole de Kronecker. D'où l'inégalité demandée :

$${}^tXH_nX \leq \pi\|X\|^2.$$

8. Soit $X' = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}$ avec $x_n = 0$, $X' \in \mathbb{R}^{n+1}$ et vérifie :

$${}^tX'H_{n+1}X' = \sum_{i=0}^n\sum_{j=0}^n \frac{x_ix_j}{i+j+1} = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} \frac{x_ix_j}{i+j+1} = {}^tXH_nX.$$

Comme ${}^tXH_nX \leq \rho_n\|X\|^2$ et ${}^tX'H_{n+1}X' \leq \rho_{n+1}\|X'\|^2 = \rho_{n+1}\|X\|^2$ et $\|X\| \neq 0$, alors $\rho_n \leq \rho_{n+1}$. Ainsi la suite $(\rho_n)_{n\geq 1}$ est croissante. De plus d'après la question **7.**, la suite ρ_n est majorée par π, donc on peut conclure que la suite $(\rho_n)_{n\geq 1}$ est convergente.

C. Opérateur intégral

9. Soit $f \in E$. Pour tout $x \in [0,1[$ et tout $t \in [0,1[$, $|K_n(tx)f(t)| \leq n|f(t)|$ et f est intégrable sur $[0,1[$, donc il est de même de la fonction $t \mapsto K_n(xt)f(t)$, donc l'application $T_n(f)$ est bien défini sur $[0,1[$.
De plus, pour tout $k \in [0,1]$, $|t^k f(t)| \leq |f(t)|$, donc on pet écrire :

$$\forall f \in E, \forall x \in [0,1[, \;\; T_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n-1} x^k \int_0^1 t^k f(t)\mathrm{d}t.$$

Ceci montre que T_n prend ses valeurs dans l'espace des fonctions polynomiales de degré inférieurs ou égal à $n-1$, qui est inclus dans E. L'application T_n est évidement linéaire, ainsi T_n défini un endomrphisme de E.
L'opérateur T_n ne peut pas être injective, sinon E serait isomorphe à un sous-espace de l'espace des fonctions polynomiales de degré inférieurs ou égal à $n-1$, ce qui est impossible puisque E est de dimension infinie, ainsi il existe $f \in E$, non nulle, telle que $T_n(f) = 0$, autrement 0 est une valeur propre de T_n.

10. Soit $X \in \mathbb{R}^n$, on a, pour tout $x \in [0,1[$:

$$T_n(\widetilde{X})(x) = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1}(tx)^k \sum_{j=0}^{n-1} x_j t^j \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} \frac{x_j x^k}{j+k+1},$$

qui s'écrit, matriciellement, sous la forme :

$$T_n(\widetilde{X})(x) = (1, x, ..., x^{n-1}) H_n \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}.$$

• Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de H_n(non nulle), donc il existe $X \in \mathbb{R}^n$, vecteur non nul, tel que $H_n(X) = \lambda X$, ainsi pour tout $x \in [0,1[$, on a :

$$T_n(\widetilde{X})(x) = (1, x, ..., x^{n-1}) H_n X = \lambda (1, x, ..., x^{n-1}) \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = \lambda \sum_{k=0}^{n-1} x_k x^k = \lambda \widetilde{X}(x).$$

Ceci montre que λ est une valeur propre de T_n, car $\widetilde{X}$ est une fonction non nulle.
• Soit maintenant λ une valeur propre non nulle de T_n, donc il existe $f \in E$ vecteur non nul tel que $\forall x \in [0,1[, \;\; T_n(f)(x) = \lambda f(x)$ et donc $f(x) = T_n\left(\dfrac{f}{\lambda}\right)(x)$, comme T_n prend ses valeurs dans l'espace des fonctions polynomiales de degré inférieurs ou égal à $n-1$, alors f est une fonction polynomiale de degré inférieurs ou égal à $n-1$, posons donc $f(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k t^k$ et $X = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix}$. X est un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$, car la fonction f est

non nulle et on a :

$$\forall x \in [0,1[,\ \ T_n(f)(x) = T_n(\widetilde{X})(x) = (1, x, ..., x^{n-1})H_nX = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} \frac{a_k x^j}{j+k+1}.$$

Donc la condition $T_n(f) = \lambda f$ est équivalent à :

$$\forall x \in [0,1[,\ \ \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} \frac{a_k x^j}{j+k+1} = \lambda \sum_{j=0}^{n-1} a_j x^j$$

ou encore

$$\forall x \in [0,1[,\ \ \sum_{j=0}^{n-1}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{j+k+1} - \lambda a_j\right) x^j = 0.$$

Le polynôme $\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{j+k+1} - \lambda a_j\right) Y^j$ de l'indéterminée Y admet donc une infinité de racines, donc il est nul, c'est-à-dire $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{j+k+1} = \lambda a_j = 0$ ou encore

$$H_n \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Ainsi λ est une valeur propre de H_n.
En conclusion T_n et H_n ont les mêmes valeurs propres non nulles.

11. Soit g un vecteur propre de T_n non nul associé à ρ_n. D'après ce qui précède g est une fonction polynomiale, donc elle est continue sur $[0,1]$. En écrivant l'équation de la valeur propre pour g et en divisant par $\varphi \in \mathscr{A}$, on obtient :

$$\forall x \in [0,1[,\ \ \rho_n \left(\frac{g}{\varphi}\right)(x) = \int_0^1 \frac{K_n(xt)\varphi(t)}{\varphi(x)} \left(\frac{g}{\varphi}\right)(t)\mathrm{d}t.$$

Cela montre que $\dfrac{g}{\varphi} \in \mathscr{C}[0,1]$ est une fonction propre de l'opérateur linéaire S_n défini sur $\mathscr{C}[0,1]$ par :

$$\forall x \in [0,1[,\ \ S_n(f)(x) = \int_0^1 K_{n,\varphi}(x,t) f(t)\mathrm{d}t,$$

où $K_{n,\varphi}(x,t) = \dfrac{K_n(xt)\varphi(t)}{\varphi(x)}$. La question **4.** montre que les coefficients de g sont de même signe, donc g ne s'annule pas sur $[0,1[$, et en multipliant par -1, on peut supposer g à valeurs strictement positives sur $[0,1[$ et même sur $[0,1]$. En particulier $g \in \mathscr{A}$. De plus, $K_{n,\varphi}(x,t) \geq 0$.
D'autre part, soit λ une valeur propre de S_n(le spectre $\mathrm{Sp}(S_n)$ des valeurs propres de S_n est non vide, car il contient ρ_n), donc il existe $f \in \mathscr{C}[0,1]$, non nul tel que

$$\forall x \in [0,1],\ \ \lambda f(x) = \int_0^1 K_{n,\varphi}(x,t) f(t)\mathrm{d}t.$$

Donc $|\lambda||f(x)| \leq \|f\|_\infty \int_0^1 K_{n,\varphi}(x,t)\mathrm{d}t$, avec $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in]0,1[} |f(x)|$. Ainsi

$$|\lambda| \leq \sup_{x\in]0,1[} \int_0^1 K_{n,\varphi}(x,t)\mathrm{d}t = \sup_{x\in]0,1[} \frac{1}{\varphi(x)} \int_0^1 K_n(tx)\varphi(t)\mathrm{d}t.$$

Par conséquent,

$$\sup_{\lambda\in \mathrm{Sp}(S_n)} |\lambda| \leq \sup_{x\in]0,1[} \frac{1}{\varphi(x)} \int_0^1 K_n(tx)\varphi(t)\mathrm{d}t,$$

et donc

$$\rho_n \leq \sup_{x\in]0,1[} \frac{1}{\varphi(x)} \int_0^1 K_n(tx)\varphi(t)\mathrm{d}t \quad (1)$$

L'inégalité (1) est valable pour tout $\varphi \in \mathscr{A}$, d'où

$$\rho_n \leq \inf_{\varphi\in\mathscr{A}} \sup_{x\in]0,1[} \frac{1}{\varphi(x)} \int_0^1 K_n(tx)\varphi(t)\mathrm{d}t \quad (2)$$

Comme $\forall x \in [0,1[, \quad \rho_n = \dfrac{1}{g(x)} \displaystyle\int_0^1 K_n(tx)g(t)\mathrm{d}t$ et $g \in \mathscr{A}$, alors l'inégalité (2) est une égalité.

D. Une majoration explicite des rayons spectraux

12. Posons, pour $x \in]0,1[$ et $t \in [0,1[$, $h(x,t) = \dfrac{t^n\varphi(t)}{1-tx}$. La fonction h admet une dérivée partielle par rapport à x qui vaut :

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,t) = \frac{t^{n+1}\varphi(t)}{(1-tx)^2}.$$

De plus, pour $x \in]0,a]$ avec $0 < a < 1$, on a : $\left|\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \leq \dfrac{t^{n+1}|\varphi(t)|}{(1-ta)^2}$, cette dernière fonction, indépendante de x, est intégrable sur $[0,1[$ puisque $t \mapsto \dfrac{t^{n+1}}{(1-ta)^2}$ est majorée sur $[0,1[$, donc par théorème de dérivation des fonctions définies par des intégrales, la fonction J_n est dérivables sur $]0,1[$ et on a :

$$\forall x \in]0,1[, \quad J_n(x) = \int_0^1 \frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t^{n+1}\varphi(t)}{(1-tx)^2}\mathrm{d}t.$$

D'autre part, si $x \in]0,1[$, on obtient :

$$xJ_n(x) = \int_0^1 \frac{xt^{n+1}\varphi(t)}{(1-tx)^2}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{(1+tx-1)t^n\varphi(t)}{(1-tx)^2}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t^n\varphi(t)}{1-tx}\mathrm{d}t - J_n(x).$$

13. • Cas : $n = 0$: On a :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{(1-t)\varphi'(t)}{1-tx}\mathrm{d}t &= \left[\frac{(1-t)\varphi(t)}{1-tx}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{(1-t)}{1-tx}\right)\varphi(t)\mathrm{d}t \\ &= -\varphi(0) - \int_0^1 \frac{(x-1)}{(1-tx)^2}\varphi(t)\mathrm{d}t \\ &= -\varphi(0) - (x-1)\int_0^1 \frac{\varphi(t)}{(1-tx)^2}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Donc $0 = \varphi(0) + (x-1)\displaystyle\int_0^1 \frac{\varphi(t)}{(1-tx)^2}\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{(1-t)\varphi'(t)}{(1-tx)^2}\mathrm{d}t$, dans ce cas $c = \varphi(0)$.

• Cas $n \geq 1$: On a :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{t^n(1-t)\varphi'(t)}{1-tx}\mathrm{d}t &= \left[\frac{t^n(1-t)\varphi(t)}{1-tx}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{t^n(1-t)}{1-tx}\right)\varphi(t)\mathrm{d}t \\ &= -\int_0^1 \frac{(nt^{n-1}-(n+1)t^n)(1-tx)+xt^n(1-t)}{(1-tx)^2}\varphi(t)\mathrm{d}t \\ &= -n\int_0^1 \frac{t^{n-1}\varphi(t)}{1-tx}\mathrm{d}t + (n+1)\int_0^1 \frac{t^n\varphi(t)}{1-tx}\mathrm{d}t - x\int_0^1 \frac{t^n\varphi(t)}{(1-tx)^2}\mathrm{d}t \\ &\quad + \int_0^1 \frac{(xt)t^n\varphi(t)}{(1-tx)^2}\mathrm{d}t \\ &= -nJ_{n-1}(x) + (n+1)J_n(x) - (x-1)\int_0^1 \frac{t^n\varphi(t)}{(1-tx)^2}\mathrm{d}t - J_n(x)\end{aligned}$$

D'où :

$$nJ_n(x) = nJ_{n-1}(x) + (x-1)\int_0^1 \frac{t^n\varphi(t)}{(1-tx)^2}\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{t^n(1-t)\varphi'(t)}{1-tx}\mathrm{d}t$$

Donc, si $n \geq 1$, $c = 0$.

14. On a :

$$\begin{aligned}x(1-x)J_n'(x) &= (1-x)\int_0^1 \frac{t^n\varphi(t)}{(1-tx)^2}\mathrm{d}t - (1-x)J_n(x) \\ &= (x-1)J_n(x) + c_n + nJ_{n-1}(x) + \int_0^1 \frac{t^n(1-t)\varphi'(t)}{1-tx}\mathrm{d}t - nJ_n(x) \\ &= c + (x-n-1)J_n(x) + n\int_0^1 \frac{t^{n-1}\varphi'(t)}{1-tx}\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{t^n(1-t)\varphi'(t)}{1-tx}\mathrm{d}t \\ &= c + (x-n-1)J_n(x) + n\int_0^1 \frac{t^{n-1}(1-tx+tx)\varphi(t)}{1-tx}\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{t^n(1-t)\varphi'(t)}{1-tx}\mathrm{d}t \\ &= c + (x-n-1+nx)J_n(x) + n\int_0^1 t^{n-1}\varphi(t)\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{t^n(1-t)\varphi'(t)}{1-tx}\mathrm{d}t \\ &= c + (x-1)(n+1)J_n(x) + n\int_0^1 t^{n-1}\varphi(t)\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{t^n(1-t)\varphi'(t)}{1-tx}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

15. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre, la solution générale est de la forme $y(t) = K(1-t)^\gamma$. On a les propriétés suivantes :

— y est continue sur $[0,1[$ quel que soit la valeur de γ,
— y est strictement positive sur $[0,1[$ si, et seulement si, $K>0$,
— $\dfrac{1}{y}$ se prolonge par continuité sur $[0,1]$ si, et seulement si, $\gamma<0$,
— y est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1[$ quel que soit la valeur de γ,
— $\lim\limits_{t\to 1^-}(1-t)y(t) = K\lim\limits_{t\to 1^-}(1-t)^{\gamma+1}=0$ si, et seulement si, $\gamma+1>0$.

Donc y vérifie les conditions faites sur φ si, et seulement si, $K>0$ et $\gamma\in]-1,0[$.

16. Soit $x\in]0,1[$, on a :

$$\begin{aligned}
\Phi'(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((1-x)^{-\gamma}x^n\right)J_n(x)+(1-x)^{-\gamma}x^nJ_n(x)'(x)\\
&= \left(\frac{\gamma}{1-x}+\frac{n}{x}\right)(1-x)^{-\gamma}x^nJ_n(x)\\
&\quad +(1-x)^{-\gamma-1}x^{n-1}\left(c+(x-1)(n+1)J_n(x)+n\int_0^1 t^{n-1}\varphi(t)\mathrm{d}t+\int_0^1\frac{t^n(1-t)\varphi'(t)}{1-tx}\mathrm{d}t\right)\\
&= \left(\frac{\gamma}{1-x}+\frac{n}{x}\right)\Phi_n(x)+\frac{cx^{n-1}}{(1-x)^{\gamma}}-\frac{n+1}{x}\Phi_n(x)\\
&\quad +\frac{x^{n-1}}{(1-x)^{\gamma+1}}\left(n\int_0^1 t^{n-1}(1-t)^{\gamma}\mathrm{d}t-\gamma J_n(x)\right)\\
&= -(\gamma+1)\frac{\Phi_n(x)}{x}+c_n\frac{x^{n-1}}{(1-x)^{1+\gamma}}
\end{aligned}$$

où $c_n=c+n\displaystyle\int_0^1 t^{n-1}(1-t)^{\gamma}\mathrm{d}t=c+n\frac{\Gamma(n)\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(n+\gamma+1)}=c+\frac{n!}{(n+\gamma)(n+\gamma-1)\dots(\gamma+1)}$.

17. La solution de l'équation homogène est de la forme $y(x)=\dfrac{K}{x^{\gamma+1}}$. La méthode de la variation de la constante, donc une solution de la forme :

$$t\mapsto \lambda+c_n\int_0^x\frac{t^{n+\gamma}}{(1-t)^{1+\gamma}}\mathrm{d}t$$

et comme $\Phi_n(0)=0$, alors

$$\forall x\in]0,1[,\ \ \Phi_n(x)=\frac{c_n}{x^{1+\gamma}}\int_0^x\frac{t^{n+\gamma}}{(1-t)^{1+\gamma}}\mathrm{d}t.$$

18. Pour tout $x\in]0,1[$, on a :

$$\begin{aligned}
r_n(x) &= \frac{1}{\varphi(x)}\int_0^1\sum_{k=0}^{n-1}(tx)^k\varphi(t)\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{\varphi(x)}\int_0^1\frac{1-(tx)^n}{1-tx}\varphi(t)\mathrm{d}t,\quad tx\neq 1\\
&= \frac{1}{\varphi(x)}\int_0^1\frac{\varphi(x)}{1-tx}\mathrm{d}t-\frac{x^n}{\varphi(x)}\int_0^1\frac{t^n\varphi(x)}{1-tx}\mathrm{d}t\\
&= \frac{x^0J_0(x)}{\varphi(x)}-\frac{x^nJ_n(x)}{\varphi(x)}\\
&= \Phi_0(x)-\Phi_n(x).
\end{aligned}$$

Donc $r_n(x) = \frac{c_0}{x^{1+\gamma}} \int_0^x \frac{t^\gamma}{(1-t)^{1+\gamma}}\mathrm{d}t - \frac{c_n}{x^{1+\gamma}} \int_0^x \frac{t^{n+\gamma}}{(1-t)^{1+\gamma}}\mathrm{d}t$. $c_0 = \varphi(0) = 1$ et si $n \geq 1$,

$$c_n = \frac{n!}{(n+\gamma)(n+\gamma-1)...(\gamma+1)} = \theta_n.$$

Ainsi,

$$r_n(x) = \frac{}{x^{1+\gamma}} \int_0^x \frac{t^\gamma}{(1-t)^{1+\gamma}}\mathrm{d}t - \frac{c_n}{x^{1+\gamma}} \int_0^x \frac{t^\gamma}{(1-t)^{1+\gamma}}\mathrm{d}t = \frac{1}{x^{1-\alpha}} \int_0^x \frac{1-\theta_n t^n}{t^\alpha (1-t)^{1-\alpha}}\mathrm{d}t.$$

Quand α décrit l'intervalle $]0,1[$, la fonction φ décrit $\mathscr{A}$, donc on peut conclure que :

$$\rho_n \leq \inf_{\alpha \in]0,1[} \sup_{x \in]0,1[} r_n(x) = \inf_{\alpha \in]0,1[} \sup_{x \in]0,1[} \frac{1}{x^{1-\alpha}} \int_0^x \frac{1-\theta_n t^n}{t^\alpha (1-t)^{1-\alpha}}\mathrm{d}t.$$

19. De la question précédente on peut déduire, en particulier pour $\alpha = \frac{1}{2}$, que

$$\rho_n \leq \theta_n^{\frac{1-\frac{1}{2}}{n}} \int_0^{\theta_n^{\frac{-1}{n}}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(1-1)}}.$$

La fonction $t \mapsto -2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-t}{t}}\right) = 2\arctan\left(\sqrt{\frac{t}{1-t}}\right) - \pi = 2\arcsin\sqrt{t} - \pi$ est une primitive de $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}$, donc :

$$\theta_n^{\frac{1-\frac{1}{2}}{n}} \int_0^{\theta_n^{\frac{-1}{n}}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(1-1)}} = \theta_n^{\frac{1}{2n}}\left(2\arcsin\theta_n^{\frac{-1}{2n}}\right) = 2w_n \arcsin\left(\frac{1}{w_n}\right).$$

Ainsi,

$$\rho_n \leq 2w_n \arcsin\left(\frac{1}{w_n}\right).$$

20. Utilisons la formule de Stirling $n! \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$, pour trouver un équivalent de w_n :

$$w_n = 2\left(\frac{(n!)^2}{(2n)!}\right)^{\frac{1}{2n}} \underset{+\infty}{\sim} 2\frac{\left(\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}\right)^{\frac{1}{n}}}{\left(\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\sqrt{4\pi n}\right)^{\frac{1}{2n}}} = 2\frac{\frac{n}{e}\sqrt[2n]{2\pi}n^{\frac{1}{n}}}{\frac{2n}{e}\sqrt[4n]{4\pi}n^{\frac{1}{2n}}} \underset{+\infty}{\sim} n^{\frac{1}{4n}}.$$

D'où, $n(w_n - 1) \underset{+\infty}{\sim} n\left(n^{\frac{1}{4n}} - 1\right) = n\left(e^{\frac{\ln(n)}{4n}} - 1\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{4}$ et donc :

$$w_n - 1 \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{4n},$$

ce qui implique immédiatement

$$\pi - 2w_n\arcsin\left(\frac{1}{w_n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \pi - 2n^{\frac{1}{4n}}\frac{\pi}{2} = \pi\left(1 - e^{\frac{\ln(n)}{4n}}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{\pi\ln(n)}{4n}.$$

Donc $\lim_{n\to\infty} \pi - 2w_n \arcsin\left(\frac{1}{w_n}\right) = 0$ et $\pi - 2w_n \arcsin\left(\frac{1}{w_n}\right) \leq 0$ pour n assez grand. D'après la partie **B**, la question **7.**, $\forall n \geq 0, \quad \rho_n \leq \pi$, par conséquent, et pour n assez grand,

$$0 \leq \pi - \rho_n \leq 2w_n \arcsin\left(\frac{1}{w_n}\right) - \pi.$$

Ainsi,

$$\lim_{n\to\infty} \rho_n = \pi.$$

• • • • • • • • •

Dans ce problème, les candidats étaient plutôt préparés à traiter la fin du problème que le début, sans qu'il soit question de grappillage puisqu'il avait plusieurs questions à la suite relevant de thèmes classiques des classes préparatoires. L'excellent travail de préparation fait par les professeurs de prépa qui permet en général à leurs élèves de repérer les parties d'un sujet à aborder en priorité a trouvé ses limites avec ce problème, peut être aussi avec des élèves habitués à tout obtenir tout de suite. Il faudra en tenir compte pour les futurs sujets de concours.

1.3. Mathématiques II — MP

Le théorème spectral est certes moins souvent « spectrale », mais Schwarz et Cauchy sont souvent mal orthographiés. La rédaction est souvent insuffisante : les propriétés utilisées ne sont pas toujours citées, et on a régulièrement vu dix ou vingt lignes de calcul sans aucune explication ni justification. Les erreurs de calcul sont courantes, notamment sur les inégalités, et les raisonnements sont assez souvent incomplets, inachevés, inexacts ou faux, et surtout manquent de plus en plus de simplicité : que de circonvolutions parfois pour établir une propriété qui se déduit aisément d'un argument simple ! Cependant, une bonne partie des candidats s'est battue avec un sujet coriace, aux questions souvent ardues ou calculatoires, comme en témoignent les ratures qui émaillent un grand nombre de copies. Chapeau à ceux qui ont su traiter avec succès la majorité des questions du problème.

Question 1. Bien que la notion de matrice symétrique réelle définie positive ne soit pas au programme, cette question a été abordée avec profit par plus de la moitié des candidats. En effet, nombreux sont ceux qui ont fait le lien entre la matrice et l'intégrale proposée. Toutefois, si l'on ne peut se contenter d'écrire « il est évident que H_n est symétrique », l'établir ne nécessite pas non plus deux pages de calcul, et il n'est pas non plus pertinent de proposer une démonstration par récurrence. En outre, il est regrettable que les candidats soient si nombreux à traiter systématiquement une somme double comme un produit de Cauchy, ce qui les amène à commettre des erreurs dirimantes dans les indices de sommation. Certains autres ont utilisé le même indice pour les deux sommes. Les correcteurs ont également été frappés par le nombre de candidats qui ne semblent pas capables de maîtriser une somme double pour exprimer ${}^tX\, H_n\, X$ et écrivent des additions avec des pointillés. L'usage généralisé de ceux-ci en lieu et place du symbole de sommation est à proscrire. Du côté de l'intégrale, certains candidats confondent fonction non identiquement nulle et fonction qui ne s'annule pas, ou pensent que le carré d'un polynôme ne peut avoir de racine réelle. Enfin, un argument important manquait souvent dans le caractère défini, à savoir le fait que la nullité de $\tilde{X}(t)$ sur [0, 1] implique celle du polynôme $\tilde{X}$, celui-ci admettant une infinité de racines.

Question 2. Le sens direct était évident. Nombreux sont les candidats qui ont « démontré » le sens réciproque en simplifiant par ${}^tX$, ou en multipliant par l'inverse de ${}^tX$, ou en considérant que toute matrice est régulière pour le produit, ou encore en multipliant à gauche les deux membres par X puis « simplifié » par le *nombre réel* $X\,{}^tX$, parfois après de fortes contorsions dans le discours. Une telle stratégie est vouée à l'échec ; plus le propos est confus, plus le correcteur est à l'affût de la faille dans le raisonnement. Une bonne partie des candidats ont obtenu le résultat demandé à partir de la diagonalisation de H_n dans une base orthonormée et de l'inégalité ${}^tX\, H_n X \leq \rho_n \,||\, X \,||^2$, qu'ils n'ont cependant pas tous établie avant de l'utiliser.

Question 3. L'inégalité demandée ne présentait pas de difficulté particulière, à condition de ne pas oublier de mentionner la positivité des coefficients de H_n . On a constaté dans cette question de nombreuses inégalités entre vecteurs, notamment $X \leq |\, X \,|$, ainsi que l'égalité $|\, H_n X \,| = H_n \,|\, X \,|$ *« puisque H_n est positive »…* Par ailleurs, un certain nombre de candidats ont raisonné avec la notation $|\, X_0 \,|$ comme s'il s'agissait d'une valeur absolue, mais elle n'en a pas toutes les propriétés : en particulier, $|\, AB \,| = |\, A \,|\,|\, B \,|$ est faux en général. Par contre il est vrai, et cela se vérifie aisément, que $|\, {}^tX_0 X_0 \,| = |\, {}^tX_0 \,|\,|\, X_0 \,|$. On en déduit rapidement l'inégalité $|\, {}^tX_0 \,|\, H_n \,|\, X_0 \,| \geq \rho_n \,||\,|\, X_0 \,|\,||^2$; l'inégalité dans l'autre sens est vraie pour tout X comme on le voit en recourant à la diagonalisation de H_n dans une base orthonormée, et on conclut avec la question précédente.

Question 4. Cette question simple a été paradoxalement assez mal traitée en général. En particulier, pour certains candidats, le contraire de « aucune coordonnée n'est nulle » semble être « toutes les coordonnées sont nulles ». Il fallait écrire qu'une somme de réels positifs dont l'un au moins est non nul est strictement positive, puis que ρ_n est strictement positif, pour obtenir les deux résultats demandés.

Question 5. Cette question a donné lieu aux réponses les plus fantaisistes : le plus souvent n, mais aussi $n - 1$, voire même n^2 ! Arrive-t-il aux candidats de penser qu'un sous-espace vectoriel ne saurait avoir une dimension supérieure à celle de l'espace, et que quand elle lui est égale, lui-même est tout l'espace ? N'ont-ils pas lu dans le rapport de l'année dernière ce que nous avions écrit sur les matrices admettant un sous-espace propre de dimension n ? Ils ne sont pas la moitié à avoir écrit que deux vecteurs non colinéaires de V ont nécessairement une combinaison linéaire dont au moins une coordonnée est nulle, ce qui contredit le résultat de la quatrième question. Il ne peut donc y avoir deux vecteurs non colinéaires dans V qui est de ce fait de dimension 1.

Question 6. De nombreux candidats ont « prouvé » l'égalité $\int_0^1 P(t)dt = \int_0^\pi P(e^{i\theta})ie^{i\theta}d\theta$ en effectuant le changement de variable $t = e^{i\theta}$, qui a le gros inconvénient de ne pas être réel ! Et ils ont parfois osé affirmer qu'il est strictement croissant sur [0, 1] ! Par ce changement de variable, on change de contour dans le plan complexe, et un polynôme étant holomorphe, l'égalité est vraie ; il faut faire avec les outils dont on dispose, intégrer terme à terme les deux intégrales et constater que les résultats sont égaux, si toutefois on ne s'est pas emmêlé les pinceaux dans la parité des indices, si on ne s'est pas trompé dans la primitivation de $e^{ik\theta}$, si on n'a pas écrit que $e^{ik\pi} = 1$… La première inégalité demandée s'en déduit aisément. La deuxième s'obtient alors immédiatement en prenant $P = \tilde{X}^2$ et en utilisant le calcul de l'intégrale de la première question et le fait que l'intégrale sur [0, 1] d'une fonction positive est inférieure à son intégrale sur [–1, 1] ; mais ce n'en est pas forcément la moitié, le fait que $\tilde{X}^2$ soit paire n'étant rien d'autre qu'une légende urbaine.

Question 7. N'était-il pas écrit dans le rapport de l'an dernier que le carré de la somme de réels n'est en général pas inférieur à la somme de leurs carrés ? Et pourtant, cela n'a pas empêché la majorité des candidats ayant abordé cette question de l'affirmer, ce qui simplifiait bien sûr la démonstration de l'inégalité demandée. Quelques-uns ont fait encore plus fort en affirmant que toutes les normes étant équivalentes en dimension finie, on pouvait remplacer le carré de la somme des valeurs absolues par la somme des carrés, puisque ce sont les carrés de deux normes. D'autres encore ont invoqué l'inégalité de Cauchy-Schwarz, voire la convexité de la fonction carrée, pour « justifier » cette inégalité. Il fallait être un peu plus subtil, développer le carré de la somme et vérifier que les doubles produits étaient deux à deux opposés, ou d'intégrale nulle si on utilisait la parité de $\left|P(e^{i\theta})\right|^2$ (qui est vraie). Mais au fond, pourquoi s'embêter ? Le premier membre ${}^tX\, H_n\, X$ est réel, donc la partie imaginaire du second est nulle, et il ne reste que la somme des carrés.

Question 8. Le fait que ρ_n est majoré par π résulte de la deuxième question et de la question précédente appliquée à un vecteur *non nul* de V, cette dernière précision étant hélas trop souvent absente. La croissance de la suite (ρ_n) est une conséquence évidente du fait que si X_n est un vecteur propre de H_n pour la valeur propre ρ_n et si $Y_n = \begin{pmatrix} X_n \\ 0 \end{pmatrix}$, alors on a : $\rho_n \,||\, X_n \,||^2 = {}^tX_n\, H_n\, X_n = {}^tY_n\, H_{n+1}\, Y_n \leq \rho_{n+1} \,||\, Y_n \,||^2 = \rho_{n+1} \,||\, X_n \,||^2$; mais attention, cela ne veut pas dire, comme le pensent maints candidats, que Y_n est un vecteur propre de H_{n+1} pour la valeur propre ρ_n ! Encore une légende urbaine, qui du reste contredirait le résultat de la quatrième question. Quant à ceux qui ont écrit que ρ_n est valeur propre de H_{n+1}, ils n'ont manifestement pas vérifié si cette assertion est vraie pour $n = 1$, ce qui les aurait rapidement détrompés.

Question 9. Certains candidats pensent que la linéarité d'une application se réduit à son additivité, tandis que d'autres ont justifié soigneusement $T_n(0) = 0$… Les candidats les plus scrupuleux ont compris que la linéarité de T_n étant simple à établir, ce qui était intéressant dans la première moitié de cette question était de prouver que T_n est bien définie et que l'image par T_n de tout élément de E appartient à E. Il leur suffisait pour cela d'écrire que comme f est intégrable et K_n est un polynôme donc continu et borné, $K_n(tx)\, f(t)$ est intégrable et son intégrale est un polynôme donc appartient à E. De surcroît, c'est un polynôme de degré au plus n, donc l'image de T_n est de dimension finie, et E étant de dimension infinie, T_n ne saurait être injective, donc 0 en est bien valeur propre. Un certain nombre de candidats ont choisi un polynôme orthogonal à $\mathrm{R}_n[X]$, souvent de degré $n+1$, mais cela n'avait rien d'obligatoire, et en ont déduit qu'il appartient au noyau de T_n . Oublions ceux qui ont montré que la fonction égale à 0 sur [0, 1[et à 1 en 1 est propre pour la valeur propre 0, sans penser que E est un ensemble de fonctions définies et continues sur [0, 1[. Rappelons également qu'une fonction continue sur [0, 1[n'est pas nécessairement intégrable sur [0, 1[, pas plus que le produit de deux fonctions intégrables sur [0,1[.

Question 10. Nombreux sont les candidats à avoir obtenu l'égalité $T_n(\tilde{X}) = \widetilde{H_n X}$. Beaucoup en ont déduit que toute valeur propre de H_n est une valeur propre de T_n , et que le polynôme propre associé a pour coefficients les composantes du vecteur propre de H_n . La réciproque est plus subtile, et une bonne partie des candidats ont omis de préciser d'une part que l'on prend une valeur propre λ *non nulle* de T_n , d'autre part qu'une fonction propre associée f vérifie $f = \frac{1}{\lambda} T_n(f)$ donc est bien un polynôme de degré au plus *n*, ce qui permet ensuite de décrire comme vecteur propre de H_n le vecteur colonne dont les composantes sont les coefficients de ce polynôme.

Question 11. Cette question difficile n'a été valablement abordée que par un petit nombre de candidats, et ceux-ci ont souvent établi l'inégalité contraire à celle qui était demandée, la preuve du fait que celle-ci est une égalité étant la partie simple de cette question. Voici l'idée : soit *v* un vecteur propre de T_n associé à la valeur propre ρ_n . Pour tout $\varphi \in \mathrm{A}$, on pose $u = \frac{v}{\varphi}$ qui existe et est continue et strictement positive sur [0, 1] par hypothèse sur φ et du fait que *v* est un polynôme dont tous les coefficients strictement positifs, vu la première partie. Alors de $T_n v = \rho_n v$ on déduit $T_n u\varphi = \rho_n u\varphi$ donc $\rho_n u = \frac{1}{\varphi} T_n(u\varphi) \leq \frac{1}{\varphi} T_n(\varphi)\sup(u)$. On en déduit

$$\rho_n \sup_{x\in]0,1[} u(x) \leq \sup_{x\in]0,1[} \left(\frac{1}{\varphi(x)} T_n(\varphi)(x)\right) \sup_{x\in]0,1[} u(x),$$

puis en simplifiant par $\sup_{x\in]0,1[} u(x)$, $\rho_n \leq \sup_{x\in]0,1[} \left(\frac{1}{\varphi(x)} T_n(\varphi)(x)\right)$. Il ne reste plus qu'à prendre la borne inférieure quand φ décrit A, pour obtenir le résultat demandé. En choisissant $\varphi = v$, on a immédiatement l'égalité par définition de *v*. En faisant cette démonstration, on a un peu l'impression de sortir un lapin d'un chapeau : cela arrive parfois en mathématiques.

Question 12. Cette question très classique de dérivabilité d'une intégrale dépendant d'un paramètre n'a pas été aussi bien traitée que nous l'espérions. Passons sur les candidats, heureusement rares, qui semblent ignorer l'existence d'un théorème servant à justifier cette dérivabilité. Les autres l'ont généralement énoncé correctement et complètement, mais c'est la mise en œuvre qui a péché. La fonction intégrée est continue et intégrable en *t* sur]0, 1[ainsi que sa dérivée partielle par rapport à *x*, ce qu'il ne suffit pas d'affirmer, il faut aussi le justifier. Mais là où cela se gâte vraiment, c'est dans la domination. De nombreux candidats ont majoré la dérivée, soit par $t^n \varphi(t)$, ce qui est faux, soit par $\frac{t^n\varphi(t)}{(1-t)^2}$, ce qui est correct, mais présente le grave inconvénient de ne pas être intégrable sur]0, 1[; n'en déplaise à ceux qui ont certes fait référence à la règle de Riemann, mais en l'infini, et non en une borne finie ! Enfin, une simple application de la linéarité de l'intégrale permettait d'obtenir l'égalité demandée ; mais nombre de ceux qui s'étaient trompés de signe dans la dérivation de $\frac{1}{1-tx}$ sont retombés sur leurs pattes *via* un léger truandage… qui n'a bien sûr pas échappé à la sagacité du correcteur. En fin de compte, cette question s'est avérée être un révélateur du soin et de la rigueur apportés par les candidats dans la résolution du présent problème.

Question 13. Il est clair que résoudre cette question requérait une intégration par parties, un indice en étant la présence de $\varphi'(t)$ dans la deuxième intégrale du second membre. Mais s'agissant d'intégrales impropres comme celles considérées ici, il était nécessaire de prendre quelques précautions, notamment de vérifier que la partie tout intégrée a bien une limite finie en 1. De nombreux candidats ont été pénalisés pour ne pas l'avoir fait, ou pour ne pas avoir justifié le caractère C^1 des fonctions employées. Beaucoup ont abordé le cas $n = 0$, mais pas le cas n non nul, ou inversement ; certains ont sans doute été déroutés par l'indication $c = 0$ dans le premier cas où en réalité $c = \varphi(0)$ tandis que $c = 0$ dans le second cas… Regrettable erreur d'énoncé qui a donné à cette question un air d'énigme davantage digne de Da Vinci Code que d'un sujet de concours, et dont il a bien sûr été tenu compte dans la correction.

Question 14. Question purement calculatoire, sans contenu théorique particulier, l'égalité demandée étant obtenue par combinaison des égalités établies dans les deux questions précédentes. Elle a toutefois de nouveau permis d'évaluer le soin et la rigueur des candidats dans la gestion de leurs calculs. Inutile de dire que ceux qui en rédigent plusieurs lignes qui n'aboutissent pas puis écrivent *« après simplification, on trouve »* suivi de l'égalité de l'énoncé n'ont obtenu aucun point pour la question.

Question 15. Rien de plus simple et de plus direct que la résolution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre sans second membre. Il était légitime d'utiliser la formule que nombre de candidats avaient manifestement apprise par cœur. Toutefois, il ne fallait pas omettre de préciser que $1 - t$ ne s'annulant pas sur $[0, 1[$, cette équation est bien *résolue* en y', ce qui justifiait l'utilisation de cette formule. Et il ne fallait pas non plus se tromper dans les signes, ce qui a été pourtant le cas d'environ la moitié des candidats… Sans compter quelques étourdis qui ont cru bien faire en appliquant ensuite la méthode de variation de la constante, et ont été très surpris d'obtenir le même ensemble de solutions ! Si tout va bien, on obtient comme solutions $y(t) = c(1 - t)^\gamma$ avec $c \in \mathrm{R}$. Puis voilà une question réellement digne de Da Vinci Code : trouver à quelles conditions cette solution vérifie les hypothèses faites sur φ. Mais quelles sont-elles, ces fameuses hypothèses ? Cela demande un peu de recherche dans les pages précédentes : φ doit être continue et intégrable sur $[0, 1[$ et à valeurs strictement positives sur $]0, 1[$; $\frac{1}{\varphi}$ doit admettre un prolongement continu sur $[0, 1]$, *donc en* 0 *et en* 1 ; φ doit être de classe C^1 sur $[0, 1[$ et $(1 - t)\varphi(t)$ doit tendre vers 0 quand t tend vers 1. Ces hypothèses sont toutes réalisées si et seulement si $c > 0$ et $-1 < \gamma \leq 0$, conditions que bien peu de candidats ont réussi à toutes obtenir.

Question 16. La dérivabilité de Φ_n résulte des théorèmes généraux, encore faut-il les citer de manière précise, ce que bien peu de candidats ont pris la peine de faire : Φ_n est dérivable sur $]0, 1[$ en tant que quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0, 1[$. Le calcul de sa dérivée est assez long, et bien peu de candidats l'ont mené à leur terme sans erreur ni raisonnement malhonnête.

Question 17. Encore une équation différentielle, cette fois avec second membre, mais dont la solution était fournie, ce qui a amené nombre de candidats à se contenter de vérifier que la fonction proposée est bien solution de l'équation. Cette démarche est légitime, encore fallait-il vérifier la condition initiale $\Phi_n(0) = 0$ et justifier *via* un théorème du cours que cette fonction est bien l'unique solution de l'équation différentielle satisfaisant cette condition initiale. Ceux qui ont entrepris de résoudre l'équation différentielle par les formules classiques ont souvent abouti à la solution proposée.

Question 18. Cette question n'a été abordée que par une infime minorité de candidats. On se souvient qu'à la question 12 on a obtenu la majoration $\rho_n \leq \sup_{x\in]0,1[} \left(\frac{1}{\varphi(x)} T_n(\varphi)(x)\right)$. Or on a : $\frac{1}{\varphi(x)} T_n(\varphi)(x) = r_n(x) = \Phi_0(x) - \Phi_n(x)$, et en remplaçant Φ_0 et Φ_n par leurs expressions, on obtient l'expression fournie par l'énoncé.

Question 19. Cette question, elle aussi très rarement abordée, se traite en choisissant $\alpha = \frac{1}{2}$ dans l'inégalité précédente et en procédant au calcul de l'intégrale obtenue.

Question 20. Un nombre non négligeable de candidats ont abordé cette question qui pouvait être traitée en admettant le résultat des questions précédentes. Malheureusement ils ont généralement fait preuve de beaucoup de maladresse dans la manipulation des équivalents. Tout d'abord, il est clair que ω_n tend vers 1 quand n tend vers l'infini, de sorte qu'il n'est pas pertinent de commencer par prendre un équivalent de ω_n . Par contre, comme ln x est équivalent en 1 à $x - 1$, il est beaucoup plus intéressant de chercher un équivalent de ln ω_n , que l'on obtient facilement grâce à la formule de Stirling : $\omega_n - 1 \sim \ln \omega_n \sim \frac{\ln n}{4n}$. Ensuite la primitivation de l'équivalent $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \sim \frac{1}{\sqrt{2(1-x)}}$ donne $\mathrm{Arcsin}x = \frac{\pi}{2} - \sqrt{2(1-x)} + o(\sqrt{1-x})$ au voisinage de 1. En remplaçant $\omega_n - 1$ par l'équivalent précédent, on en déduit enfin :

$$\pi - 2\omega_n \,\mathrm{Arcsin}\left(\frac{1}{\omega_n}\right) \sim \sqrt{\frac{2 \ln n}{n}}$$

On a donc obtenu une majoration de ρ_n légèrement meilleure que π puisque $\sqrt{\frac{2\ln n}{n}}$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Les quelques candidats qui sont arrivés à ce point auront peut-être été déçus de constater que tant d'efforts ont abouti à un si petit progrès : mais c'est là le propre des mathématiques que d'avancer à petits pas vers une meilleure connaissance d'une discipline dont l'esprit humain peine à entrevoir la complexité infinie.

Conclusion

Le sujet de cette année permettait à tout candidat sérieux et travailleur de mettre en valeur ses connaissances et ses capacités. Les questions 2 à 10, 12, 15 et 17 étaient tout à fait abordables et nécessitaient surtout de la réflexion, de la rigueur et du soin dans les calculs et les raisonnements. Contrairement aux sujets longs comme un jour sans pain proposés par d'autres concours, les problèmes du Concours commun Mines Ponts sont strictement limités à 21 questions, ce qui donne aux candidats le temps de réfléchir, de soigner leurs raisonnements, de peaufiner leur rédaction et de vérifier leurs calculs. Encore leur faut-il se départir d'une attitude fréquente de nonchalance voire d'indifférence, et de manque de combativité au cours de l'épreuve. Ne pas renoncer, rester mobilisé pendant toute la durée des concours, voilà l'attitude qui permettra aux étudiants de réussir. Car comme disait Amy Sherald : *« People who don't quit eventually rise to the top, because the world is full of quitters ».*

1.4. Mathématiques I — PC

Présentation du sujet

Pour $p \in \mathbb{N}^*$ et $r \in \mathbb{R}$, posons

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad S_{r,p}(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(pn)^r}{(pn)!} z^{pn}.$$

Le but essentiel de ce problème est d'établir le résultat suivant.

Théorème 1. Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $r \in \mathbb{R}^+$. Alors

$$S_{r,p}(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{p} x^r e^x.$$

La partie I justifie le fait que la série entière définissant $S_{r,p}$ a pour rayon de convergence $+\infty$ et fait calculer $S_{0,1}$ et $S_{0,2}$ au moyen de fonctions usuelles.

La partie II est consacrée à la démonstration du théorème pour $p = 1$. Pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$, soit X_x une variable de Poisson de paramètre *x*. La démonstration part de l'égalité :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \qquad S_{r,1}(x) = e^x \, E({X_x}^r).$$

On utilise alors la concentration de X_x autour de x pour montrer que, lorsque *x* tend vers $+\infty$, $E(X_x^r) \sim x^r$. Le calcul combine l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev et l'utilisation ingénieuse d'un argument de convexité.

La partie III achève la démonstration du théorème 1. Un argument classique permet d'extraire de $S_{r,1}$ la somme correspondant aux multiples de p :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad S_{r,p}(z) = \frac{1}{p} \sum_{\omega \in \mathbb{U}_p} S_{r,1}(\omega z).$$

Il faut alors voir que, pour ω dans $U_p \setminus \{1\}$, $S_{r,1}(\omega x)$ est négligeable devant $S_{r,1}(x)$ lorsque *x* tend vers $+\infty$, ce qui provient d'une transformation d'Abel et d'estimations asymptotiques non immédiates des quantités $u_{k+\lfloor x \rfloor}(x)$, où l'on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad , \forall x \in \mathbb{R} \qquad u_n(x) = \frac{n^r}{n!} x^n.$$