Équations différentielles linéaires

Lundi 8 décembre 2025

Table des matières

Table des matières

1. Généralités

1.1. Rappels

1.1. Rappels

Rappel :

- $y' = a(x)y + b(x)$: *équation différentielle linéaire du premier ordre*, *homogène* si $b = 0$.

$$\mathcal{S}_H = \{x \mapsto k\,\mathrm{e}^{A(x)}, k \in \mathbb{K}\}, \quad A \text{ primitive de } a$$

- $y'' = a(x)y' + b(x)y + c(x)$: *équation différentielle linéaire du second ordre*, *homogène* si $c = 0$.
Équation caractéristique $r^2 = ar + b$ si a et b constants

$$\mathcal{S}_H = \{x \mapsto k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x), (k_1, k_2) \in \mathbb{K}^2\} \quad \text{avec :}$$

  - Deux solutions $r_1, r_2 \in \mathbb{K}$ distinctes, $f_i : x \mapsto \mathrm{e}^{r_i x}$.
  - Une racine double r, $f_1 : x \mapsto \mathrm{e}^{rx}$ et $f_2 : x \mapsto x\,\mathrm{e}^{rx}$.
  - Cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et deux racines complexes distinctes conjugées $r \pm i\omega$, $f_1 : x \mapsto \mathrm{e}^{rx}\cos(\omega x)$ et $f_2 : x \mapsto \mathrm{e}^{rx}\sin(\omega x)$.

1.1. Rappels

Remarques :

- Généralisation à un système d'équations :

$$\begin{cases} y_1' = a_{1,1}(x)y_1 + a_{1,2}(x)y_2 + b_1(x) \\ y_2' = a_{2,1}(x)y_1 + a_{2,2}(x)y_2 + b_2(x) \end{cases}$$

  Matriciellement : $Y' = A(x)Y + B(x)$.

- $y'' = a(x)y' + b(x)y + c(x)$ peut se ramener à un tel système, avec $y_1 = y$, $y_2 = y'$ dans :

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = b(x)y_1 + a(x)y_2 + c(x) \end{cases}$$

  Matrice $A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b(x) & a(x) \end{pmatrix}$

1.2. Définition

1.2. Définition

Definition 1

On appelle équation différentielle linéaire (vectorielle) sur I et dans E toute équation de la forme :

$$x' = a(t) \cdot x + b(t)$$

où :

- a est une application continue de I dans $\mathcal{L}(E)$;
- b est une application continue de I dans E, appelée *second membre*.

Une fonction $f : I \to E$ est solution de cette équation lorsque f est dérivable sur I et vérifie :

$$\forall t \in I, \quad f'(t) = a(t)\big(f(t)\big) + b(t)$$

L'équation $x' = a(t) \cdot x$ est appelée *équation homogène associée* à l'équation $x' = a(t) \cdot x + b(t)$.

1.3. Système différentiel linéaire

1.3. Système différentiel linéaire

Definition 2

On appelle *sytème différentiel linéaire* d'ordre 1 sur I (sous forme résolue) à n inconnues tout système de la forme :

$$\begin{cases} x_1' = a_{1,1}(t)x_1 + a_{1,2}(t)x_2 + \cdots + a_{1,n}(t)x_n + b_1(t) \\ x_2' = a_{2,1}(t)x_1 + a_{2,2}(t)x_2 + \cdots + a_{2,n}(t)x_n + b_2(t) \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ x_n' = a_{n,1}(t)x_1 + a_{n,2}(t)x_2 + \cdots + a_{n,n}(t)x_n + b_n(t) \end{cases},$$

où $(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $(b_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ sont des familles d'applications continues de I dans $\mathbb{K}$, appelées respectivement *coefficients* et *second membres*.

Remarque :

Matriciellement, $X' = A(t)X + B(t)$. Équivalent à une représentation matricielle de $x' = a(t)\cdot x + b(t)$.

1.4. Principe de superposition

1.4. Principe de superposition

Proposition 1

Soit une équation différentielle linéaire homogène $x' = a(t) \cdot x$ sur I dans E et soient $b, c : I \to E$ deux applications continues. Alors si f est solution de $x' = a(t) \cdot x + b(t)$ et g est solution de $x' = a(t) \cdot x + c(t)$, la fonction $\lambda f + \mu g$ est solution de $x' = a(t) \cdot x + \lambda b(t) + \mu c(t)$ pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

Corollaire 1

L'ensemble des solution d'une équation différentielle linéaire homogène $x' = a(t) \cdot x$ sur I dans E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(I, E)$.

1.5. Problème de Cauchy

1.5. Problème de Cauchy

Definition 3

On appelle *problème de Cauchy* (linéaire) la donnée d'une équation différentielle linéaire $x' = a(t) \cdot x + b(t)$ et d'une *condition intiale* $(t_0, x_0) \in I \times E$. On dit que f est solution de ce problème de Cauchy lorsque f est solution de l'équation et $f(t_0) = x_0$.

Remarques :

- Présentation sous forme d'un système :

$$\begin{cases} x' = a(t) \cdot x + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

- Forme *intégrale* :

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \big(a(u) \cdot x(u) + b(u)\big)\mathrm{d}u$$

1.6. Représentation d'une équation scalaire linéaire d'ordre n

1.6. Représentation d'une équation scalaire linéaire d'ordre n

Definition 4

On appelle *équation différentielle linéaire scalaire d'ordre n* une équation de la forme

$$y^{(n)} = a_0(t)y + a_1(t)y' + \cdots + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + b(t)$$

avec $a_0, \ldots, a_{n-1}, b : I \to \mathbb{K}$ continues. b est appelé *second membre*. Une solution est une fonction $f : I \to \mathbb{K}$ de classe $\mathcal{C}^n$ telle que

$$\forall t \in I, \quad f^{(n)}(t) = a_0(t)f(t) + \cdots + a_{n-1}(t)f^{(n-1)}(t) + b(t)$$

Proposition 2

f est solution de l'équation précédente **ssi** $(f, f', \dots, f^{(n-1)})$ est solution du système $X' = A(t)X + B(t)$ avec

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ a_0(t) & a_1(t) & a_2(t) & \cdots & a_{n-1}(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$$

1.6. Représentation d'une équation scalaire linéaire d'ordre n

Definition 5

Un problème de Cauchy pour une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre n est de la forme :

$$\begin{cases} y^{(n)} = a_0(t)y + a_1(t)y' + \cdots + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + b(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

Cela correspond donc à la donnée d'une équation et de n conditions initiales pour les valeurs de $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ en t_0.

Table des matières

2. Solutions d'une équation différentielle linéaire

2.1. Structure de l'ensemble des solutions

Proposition 3

Pour une **ed** linéaire homogène $x' = a(t) \cdot x$ sur I dans E, l'ensemble $\mathcal{S}_H$ des solutions est un **sev** de $\mathcal{C}^1(I, E)$.

Remarque :

Noyau de $\Phi : f \mapsto f' - a \cdot f$.

Proposition 4

Pour une **ed** linéaire $x' = a(t) \cdot x + b(t)$ sur I dans E, et f_0 une solution particulière, l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions est un sous-espace affine de $\mathcal{C}^1(I, E)$, dirigé par le **sev** $\mathcal{S}_H$ des solutions de l'équation homogène associée :

$$\mathcal{S} = f_0 + \mathcal{S}_H = \{f_0 + f, f \in \mathcal{S}_H\}$$

2.2. Théorème de Cauchy linéaire et conséquence

2.2. Théorème de Cauchy linéaire et conséquence

Theoreme 1

Étant donné un problème de Cauchy linéaire

$$\begin{cases} x' = a(t)\cdot x + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases},$$

avec $a : I \to \mathcal{L}(E)$, $b : I \to E$, et $(t_0, x_0) \in I \times E$, il existe une unique fonction $f : I \to E$ de classe $\mathcal{C}^1$, solution sur I.

Remarque :

En particulier pour une **ed** linéaire scalaire d'ordre n : Il existe une seule solution à $y^{(n)} = a_0(t)y + a_1(t)y' + \cdots + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + b(t)$, vérifiant des conditions initiales
$y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}$.

2.2. Théorème de Cauchy linéaire et conséquence

Proposition 5

Étant donné une équation différentielle linéaire homogène sur I dans E, l'espace vectoriel $\mathcal{S}_H$ des solutions est de dimension n : pour tout $t_0 \in I$, l'application $f \mapsto f(t_0)$ réalise un isomorphisme de $\mathcal{S}_H$ sur E.

Remarques :

- résoudre une **ed** linéaire homogène en dimension n : trouver n solutions indépendantes.
- $(f_1, \ldots, f_n)$ est libre dans $\mathcal{C}^1(I, E)$ **ssi** $(f_1(t_0), \ldots, f_n(t_0))$ est libre dans E !
- Pour une **ed** non homogène : sous-espace affine de dimension n.

2.2. Théorème de Cauchy linéaire et conséquence

Proposition 6

L'ensemble des solutions d'une **ed** scalaire d'ordre n homogène est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$ de dimension n.

Remarques :

- Une base de $\mathcal{S}_H$ est une famille de solutions $(f_1, \ldots, f_n)$ libre dans $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$.
- Pour une **ed** non homogène : sous-espace affine de dimension n.

2.3. Cas des équations scalaires d'ordre 1 ou 2 non normalisées (raccords, séries entières)

2.3. Cas des équations scalaires d'ordre 1 ou 2 non normalisées (raccords, séries entières)

Méthode :

Cas $a(t)x' + b(t)x = c(t)$ ou $a(t)x'' + b(t)x' + c(t)x = d(t)$:

- Partition de I en sous-intervalle où a ne s'annule pas, étude des *raccords*.
- Analyse-synthèse pour des solutions **dse**.

Exercice 1

Résoudre, en étudiant les raccords :

a) $ty' - 2y = t^3$

b) $t^2y' - y = 0$

c) $(1-t)y' - y = t$.

Exercice 2

Résoudre, en cherchant une solution **dse** : $xy'' - y' + 4x^3y = 0$.

Table des matières

3. Exponentielle d'un endomorphisme, d'une matrice

3.1. Définition

3.1. Définition

Proposition 7

- Pour tout $a \in \mathcal{L}(E)$, la série $\sum \frac{1}{n!} a^n$ est absolument convergente, donc convergente.
- Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la série $\sum \frac{1}{n!} A^n$ est absolument convergente, donc convergente.

Definition 6

- On appelle *exponentielle* de $a \in \mathcal{L}(E)$ l'endomorphisme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} a^n$. On le note $\exp(a)$ ou e^a.
- On appelle *exponentielle* de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} A^n$. On la note $\exp(A)$ ou e^A.

3.1. Définition

Proposition 8

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ représente $a \in \mathcal{L}(E)$ dans une base $\mathcal{B}$ de E alors

$$\operatorname*{Mat}_{\mathcal{B}}\left(\mathrm{e}^{a}\right) = \mathrm{e}^{A}$$

Remarques :

- Continuité de $\operatorname*{Mat}_{\mathcal{B}}$
- Continuité de $u \mapsto u(x)$: la série $\sum \frac{1}{n!} a^n(x)$ est convergente, de somme $\mathrm{e}^{a}(x)$.

3.2. Exponentielle d'une matrice et valeurs propres

3.2. Exponentielle d'une matrice et valeurs propres

Proposition 9

Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont deux matrices semblables, alors e^A et e^B sont semblables.

Remarques :

- Même matrice P dans les relations de similitude.
- e^A et e^B représente le même endomorphisme e^u.

Proposition 10

Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de A, alors e^λ est valeur propre de e^A.

Remarque :

$\{e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_p}\} \subset \mathrm{Sp}(e^A)$ si $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$. Égalité si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

3.2. Exponentielle d'une matrice et valeurs propres

Proposition 11

- Si A est diagonale avec $A = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $e^A = \mathrm{Diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$.
- Si A est triangulaire supérieure, de diagonale $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, alors e^A est triangulaire supérieure de diagonale $(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$

Proposition 12

- Si A est diagonalisable, e^A est diagonalisable
- Si A est trigonalisable, e^A est trigonalisable

Remarques :

- Même matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ pour les relations de similitude.
- Réciproques fausses !

Exercice 3

Déterminer $\exp(tJ)$ avec $t \in \mathbb{R}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Que vaut $\exp(2\pi J)$?

3.3. Régularité de l'exponentielle matricielle

3.3. Régularité de l'exponentielle matricielle

Proposition 13

- La fonction exp : $a \mapsto \mathrm{e}^a$ est continue sur $\mathcal{L}(E)$.
- La fonction exp : $A \mapsto \mathrm{e}^A$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

3.3. Régularité de l'exponentielle matricielle

Proposition 14

Soit $a \in \mathcal{L}(E)$ et soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- La fonction $t \mapsto e^{ta}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $t \mapsto a \circ e^{ta} = e^{ta} \circ a$
- La fonction $t \mapsto e^{tA}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $t \mapsto A\, e^{tA} = e^{tA} A$.

Corollaire 2

Les fonctions $t \mapsto e^{ta}$ et $t \mapsto e^{tA}$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

3.3. Régularité de l'exponentielle matricielle

Proposition 15

- Soient $a, b \in \mathcal{L}(E)$ tels que $a \circ b = b \circ a$. Alors $\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^{a} \circ \mathrm{e}^{b} = \mathrm{e}^{b} \circ \mathrm{e}^{a}$.
- Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tels que $AB = BA$. Alors $\mathrm{e}^{A+B} = \mathrm{e}^{A}\,\mathrm{e}^{B} = \mathrm{e}^{B}\,\mathrm{e}^{A}$.

Remarque :

Plus valable si a et b (ou A et B) ne commutent pas !

Table des matières

4. systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants

4.1. Résolution explicite du problème de Cauchy

4.1. Résolution explicite du problème de Cauchy

Theoreme 2

pour $a \in \mathcal{L}(E)$ (constant) le problème de Cauchy $x' = a \cdot x$ et $x(t_0) = x_0$ admet comme unique solution :

$$f(t) = \mathrm{e}^{(t-t_0)a} \cdot x_0$$

Remarques :

- Formulation matricielle pour $X' = AX$ et $X(t_0) = X_0$: $f(t) = \mathrm{e}^{(t-t_0)A} X_0$.
- Il en résulte $\mathcal{S} = \{t \mapsto \mathrm{e}^{tA} X_0 \,,\ X_0 \in \mathbb{K}^n\}$.

4.2. Cas diagonalisable

4.2. Cas diagonalisable

Proposition 16

Si a est diagonalisable, $(x_1, \dots, x_n)$ une base de vecteurs propres, et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ la famille des valeurs propres associées, alors pour $f_i : t \mapsto e^{\lambda_i t} x_i$, $(f_1, \dots, f_n)$ est une base de l'espace des solutions.

'

Exercice 4

Résoudre l'équation différentielle $X' = AX$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & & (1) \\ & \ddots & \\ (1) & & 2 \end{pmatrix}.$$

4.3. Cas de la dimension 2 et 3

4.3. Cas de la dimension 2 et 3

Exercice 5

Résoudre le système

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -x + 3y \end{cases}$$

Proposition 17

Pour $T = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$e^{tT} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & t\, e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}$$

Table des matières

5. Résolution de l'équation avec second membre

5.1. cas de l'ordre 1

5.1. cas de l'ordre 1

Rappel :

Pour $y' = a(t)y + b(t)$, et A une primitive de a, solutions de l'équation homogène de la forme $t \mapsto \lambda\, e^{A(t)}$. On cherche une solution particulière de la forme $f(t) = \lambda(t)\, e^{A(t)}$ (variation de la constante).

Remarque :

Si a constant et $b(t)$ de la forme $P(t)\, e^{\alpha t}$, avec P polynomial de degré d, solution particulière $f(t)$ de la forme $Q(t)\, e^{\alpha t}$ avec Q polynomial

- de degré d si $\alpha \neq a$;
- de degré $d + 1$ (sans terme constant) si $\alpha = a$ ($Q' = P$).

5.2. cas de l'ordre 2 à coefficients constants : forme particulière du second membre

Rappel :

Soit $x'' = ax + bx' + c(t)$ avec a et b constants et $c(t)$ de la forme $P(t)\,\mathrm{e}^{\lambda t}$, avec P polynomial de degré d, solution particulière de la forme $f(t) = Q(t)\,\mathrm{e}^{\lambda t}$, avec Q polynomial :

- de degré d si λ n'est pas racine de l'équation caractéristique ;
- de degré $d+1$ si λ est racine simple de l'équation caractéristique ;
- de degré $d+2$ si λ est racine double de l'équation caractéristique.

Démonstration : En effet, Q doit vérifier
$Q'' + (2\lambda - b)Q' + (\lambda^2 - \lambda b - a)Q = P$.

5.3. Compléments sur l'annulation d'une solution de l'équation homogène

5.3. Compléments sur l'annulation d'une solution de l'équation homogène

Proposition 18

Soit $x' = a(t) \cdot x$ une équation homogène et soit f une solution. Alors f est nulle **ssi** il existe $t_0 \in I$ tel que $f(t_0) = 0$.

Démonstration : Rappelons que I est supposé d'intérieur non vide. Si f est nulle, n'importe quel $t_0 \in I$ convient. Réciproquement, supposons qu'il existe $t_0 \in I$ tel que $f(t_0) = 0$. f est donc solution au problème de Cauchy associé à l'équation $x' = a(t) \cdot x$ et à la condition initiale $(t_0, 0)$, dont 0 est bien sûr solution. Par unicité d'une telle solution d'après le théorème de Cauchy linéaire, $f = 0$.

Proposition 19

Soient $(f_1, \dots, f_p)$ une famille de solutions d'une équation homogène sur I. Les trois assertions sont équivalentes :

(i) $(f_1, \dots, f_p)$ est libre

(ii) Pour tout $t \in I$, $(f_1(t), \dots, f_p(t))$ est libre.

(iii) Il existe $t \in I$ tel que $(f_1(t), \dots, f_p(t))$ est libre.

5.4. Méthode générale de variation des constantes

Proposition 20

Soit une équation différentielle linéaire vectorielle (E) : $x' = a(t) \cdot x + b(t)$ et soit $(f_1, \ldots, f_n)$ une base de l'espace $\mathcal{S}_H$ des solutions de l'équation homoègne associée. Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ une famille de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(i) La fonction $f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i$ est solution de (E).

(ii) $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i' f_i = b$

Démonstration : Notons déjà que $a(t) \cdot f_i(t) = f_i'(t)$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ et pour tout $t \in I$. Dès lors :

$$(i) \Leftrightarrow \forall t \in I, \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i\right)'(t) = a(t) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t) f_i(t)\right) + b(t)$$

5.5. Cas de l'ordre 2 scalaire : wronskien, variation des constantes

5.5. Cas de l'ordre 2 scalaire : wronskien, variation des constantes

Definition 7

On appelle *wronskien* de deux solutions f et g d'une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2 homogène l'application :

$$W : t \mapsto \begin{vmatrix} f(t) & g(t) \\ f'(t) & g'(t) \end{vmatrix}$$

Proposition 21

Soient f et g deux solutions de l'équation homogène. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) (f, g) est une base de l'espaces des solutions

(ii) pour tout $t \in I$, $W(t) \neq 0$

(iii) il existe $t \in I$ tel que $W(t) \neq 0$.

Méthode :

Soit (f, g) une base de solutions de l'équation homogène associée à $x'' = a(t)x' + b(t)x + c(t)$. On cherche une solution particulière $x(t)$ sous la forme

$$x(t) = \lambda(t)f(t) + \mu(t)g(t)$$

Méthode de variation des constantes :

$$\begin{cases} \lambda'(t)f(t) + \mu'(t)g(t) = 0 \\ \lambda'(t)f'(t) + \mu'(t)g'(t) = c(t) \end{cases}$$

Exercice 6

Résoudre l'équation $x'' + 4x = \tan(t)$.

Solution

La résolution de l'équation homogène donne $S_H = \mathrm{vect}(t \mapsto \cos(2t), t \mapsto \sin(2t))$. *On cherche une solution particulière sous la forme* $\lambda(t)\cos(2t) + \mu(t)\sin(2t)$ *et on doit*