Devoir à la maison n° 5 - MPI*

À rendre le mercredi 26 novembre 2025

Variables aléatoires symétriques à forte dispersion

Dans tout le problème, on fixe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ sur lequel toutes les variables aléatoires considérées sont définies. On utilisera systématiquement la locution « variable aléatoire » pour parler d'une variable aléatoire réelle discrète, et « variable aléatoire entière » pour parler d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}$. On pourra noter :

$$X(\Omega) = \{x_n, n \in I\}$$

où I est un sous-ensemble fini ou dénombrable de $\mathbb{N}$ et $x_n \in \mathbb{R}$ pour tout $n \in I$.

Définition : Dispersion d'ordre α. On fixe un réel $\alpha > 0$. Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire. On dit que X vérifie la condition $(\mathcal{D}_\alpha)$ – dite de dispersion d'ordre α – lorsque, quand n tend vers $+\infty$,

$$\mathbf{P}(|X| \geqslant n) = \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \tag{1}$$

Definition : Variables aléatoires symétriques. On dit que X est symétrique lorsque $-X$ suit la même loi que X, autrement dit lorsque :

$$\forall x \in X(\Omega), \quad \mathbf{P}(X = x) = \mathbf{P}(X = -x). \tag{2}$$

On rappelle le **p**rincipe de transfert de l'égalité en loi :

Étant donné deux variables aléatoires X et Y prenant leurs valeurs dans un même ensemble E, ainsi qu'une application $u : E \to F$, si X et Y suivent la même loi alors $u(X)$ et $u(Y)$ aussi.

Dans tout le sujet, on se donne une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires entières, mutuellement indépendantes, toutes de même loi, symétriques, et vérifiant la condition $(\mathcal{D}_\alpha)$. On *admet* que sous ces conditions la variable X_{n+1} est indépendante de $X_1 + \cdots + X_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$M_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$$

appelée n^{e} moyenne empirique des variables X_k. L'objectif du sujet est d'établir la convergence simple d'une suite de fonctions associées aux variables M_n.

Les trois premières parties du sujet sont totalement indépendantes les unes des autres.

I. Questions de cours

1. Soit X une variable aléatoire. Rappeler la définition de « X est d'espérance finie ». Montrer alors que X est d'espérance finie si et seulement si $|X|$ est d'espérance finie.

2. Soit X une variable aléatoire. Montrer que si X est presque bornée, autrement dit s'il existe un réel $M \geqslant 0$ tel que $\mathbf{P}(|X| \leqslant M) = 1$, alors X est d'espérance finie.

II. Généralités sur les variables aléatoires

3. Soit X une variable aléatoire entière vérifiant $(\mathcal{D}_\alpha)$. Montrer que X n'est pas d'espérance finie, et que X^2 non plus.

4. Soient X une variable aléatoire symétrique, et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction impaire. Montrer que $f(X)$ est symétrique, et que si $f(X)$ est d'espérance finie alors $\mathbf{E}(f(X)) = 0$.

5. Soient X et Y deux variables aléatoires symétriques indépendantes. En comparant la loi de $(-X, -Y)$ à celle de (X, Y), démontrer que $X + Y$ est symétrique.

III. Deux sommes de séries

On fixe ici un nombre complexe z tel que $z \neq 1$ et $|z| \leqslant 1$. On introduit la fonction :

$$L : t \mapsto \int_0^t \frac{z}{1-uz}\mathrm{d}u.$$

6. Montrer que, sur le segment $[0,1]$, la fonction L est convenablement définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$. Donner une expression simple de sa dérivée n^{e} pour tout $n \geqslant 1$.

7. Justifier que pour tout $t \in]0,1]$, on a $1-t \leqslant |1-tz|$, et plus précisément encore que $1-t < |1-tz|$.

8. En déduire successivement que :

$$\int_0^1 \left|\frac{1-t}{1-tz}\right|^n \mathrm{d}t\underset{[}{n} \to +\infty]\longrightarrow 0 \quad \text{et} \quad \int_0^1 \frac{z^{n+1}(1-t)^n}{(1-tz)^{n+1}}\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

9. En déduire, grâce à une formule de Taylor, que $L(1) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}$.

10. Montrer que la fonction :

$$\gamma : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (t,u) & \longmapsto & \left|1+ue^{it}\right| \end{array} \right.$$

est continue. En déduire qu'il existe, pour tout $a \in]0,\pi[$, un réel $m_a > 0$ tel que :

$$\forall (t,u) \in [-a,a] \times [0,1], \quad \left|1+ue^{it}\right| \geqslant m_a.$$

11. Montrer que la fonction :

$$F : t \in]-\pi,\pi[\mapsto \int_0^1 \frac{e^{it}}{1+ue^{it}}\mathrm{d}u$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ et donner une expression de sa dérivée sous la forme d'une intégrale à paramètre.

12. Montrer que :

$$\forall t \in]-\pi,\pi[, \quad F'(t) = -\frac{\tan(t/2)}{2} + \frac{i}{2}$$

et en déduire la valeur de $F(t)$ pour tout $t \in]-\pi,\pi[$.

13. Soit $\theta \in]0,2\pi[$. Déduire des questions précédentes que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n} = -\ln\left(2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n} = \frac{\pi-\theta}{2}.$$

IV. Fonction caractéristique d'une variable aléatoire symétrique

On fixe dans cette partie une variable aléatoire symétrique X. On pose :

$$\Phi_X : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \mathbf{E}\left(\cos(tX)\right), \end{array} \right.$$

appelée fonction caractéristique de X.

14. Montrer que Φ_X est bien définie, paire et que : $\forall t \in \mathbb{R}$, $|\Phi_X(t)| \leqslant 1$.

15. En utilisant le théorème du transfert, montrer que Φ_X est continue.

Dans la suite de cette partie, on suppose que X est une variable aléatoire entière symétrique vérifiant la condition $(\mathcal{D}_\alpha)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$R_n := \mathbf{P}(|X| \geqslant n).$$

16. On fixe un réel $t \in]0, 2\pi[$. Montrer successivement que :

$$\Phi_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (R_n - R_{n+1}) \cos(nt)$$

puis :

$$\Phi_X(t) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} R_n \left[\cos(nt) - \cos((n-1)t)\right].$$

On pourra établir au préalable la convergence de la série $\sum_n R_n \cos(nt)$.

17. Montrer qu'il existe un nombre réel C tel que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(R_n - \frac{\alpha}{n}\right) e^{int} \underset{t \to 0^+}{\longrightarrow} C,$$

et en déduire que, quand t tend vers 0^+,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} R_n \cos(nt) = O(\ln(t)) \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} R_n \sin(nt) = \frac{\pi\alpha}{2} + o(1).$$

18. Conclure que, quand t tend vers 0^+,

$$\Phi_X(t) = 1 - \frac{\pi\alpha}{2} t + o(t).$$

La fonction Φ_X est-elle dérivable en 0 ?

V. Convergence simple de la suite des fonctions caractéristiques des variables M_n

19. Soient X et Y deux variables aléatoires symétriques indépendantes. Montrer que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \Phi_{X+Y}(t) = \Phi_X(t)\Phi_Y(t).$$

20. Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, la variable M_n est symétrique, et :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \Phi_{M_n}(t) = \left(\Phi_{X_1}(t/n)\right)^n.$$

21. En déduire que pour tout réel t,

$$\Phi_{M_n}(t) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \exp\left(-\frac{\pi\alpha|t|}{2}\right).$$

22. La convergence établie à la question précédente est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?

À partir de là, des théorèmes d'analyse de Fourier permettraient de démontrer que la suite $(M_n)_{n\geqslant 1}$ *converge en loi vers une variable de Cauchy de paramètre* $\frac{\pi\alpha}{2}$*, ce qui signifie que pour tout segment* $[a, b]$ *de* $\mathbb{R}$*,*

$$\mathbf{P}(a \leqslant M_n \leqslant b) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{\alpha}{2} \int_a^b \frac{\mathrm{d}u}{u^2 + (\pi\alpha/2)^2}.$$