Devoir à la maison n° 4 - MPI

À rendre le lundi 10 novembre 2025

Algèbres : exemples et propriétés

Dans tout ce problème, les espaces vectoriels seront des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. On appelle **algèbre** tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{A}$ qui est muni d'une opération interne nommée multiplication ou produit. Cette multiplication est associative, et vérifie la propriété de distributivité :

$$\forall a \in \mathbb{A}, \forall b \in \mathbb{A}, \forall c \in \mathbb{A}, \quad a(b+c) = ab + uc, \quad (b+c)a = ba + cu$$

ainsi que :

$$\forall u \in \mathbb{A}, \forall b \in \mathbb{A}, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad u(\lambda b) = (\lambda a)b = \lambda(ub)$$

On suppose de plus qu'il existe un élément noté 1 ou 1_A et appelé élément neutre pour le produit, tel que :

$$\forall a \in \mathbb{A}, a1 = 1a = a\ .$$

Enfin si cette multiplication est commutative, l'algèbre est dite commutative. La dimension d'une algèbre est sa dimension en tant qu'espace vectoriel. Une sous-algèbre de $\mathbb{A}$ est un sous-ensemble non vide de $\mathbb{A}$ qui est lui-même une algèbre (pour les mêmes opérations) et qui possède le même élément neutre que $\mathbb{A}$. Pour que $\mathbb{B}$ soit une sous-algèbre de $\mathbb{A}$, il suffit que ce soit un sous-espace vectoriel de $\mathbb{A}$, qu'il contienne 1 et que :

$$\forall b \in \mathbb{B}, \forall b' \in \mathbb{B}, bb' \in \mathbb{B}$$

On appelle morphisme d'algèbre entre deux algèbres $\mathbb{A}$ et B, toute application linéaire f de $\mathbb{A}$ dans B qui vérifie en plus :

$$\forall u \in \mathbb{A}, \forall a' \in \mathbb{A}, f(aa') = f(a)f(a') \text{ et } f(1_A) = 1_B$$

Un morphisme d'algèbre qui est une bijection est appelé isomorphisme d'algèbre. On vérifie alors que son application réciproque est également un morphisme d'algèbre. On dira que deux algèbres sont isomorphes s'il existe un isomorphisme d'algèbre entre les deux. Dans tout le problème, n désigne un entier strictement positif. Dans ce cas, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est l'espace vectoriel des matrices carrées à n lignes et n colonnes et à coefficients réels ; c'est une algèbre pour les opérations habituelles. L'élément neutre pour le produit est la matrice de l'identité, notée I_n. La trace d'une matrice $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est :

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\ .$$

C'est la somme des éléments diagonaux de la matrice A. Une matrice scalaire est une matrice de la forme λI_n, où λ est un réel. Une matrice diagonale est une matrice dont les éléments non diagonaux sont tous nuls. L'ensemble des matrices scalaires et l'ensemble des matrices diagonales forment chacun une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Ce problème étudie certaines propriétés des algèbres, et, en particulier, s'intéresse aux algèbres qui sont des corps, c'est-à-dire dans lesquelles tout élément non nul admet un inverse pour le produit.

I. Étude d'un exemple

1. Soit A une matrice quelconque de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Vérifier que :

$$A^2 - \operatorname{tr}(A)A + \det(A)I_2 = 0\,.$$

2. Soit A une matrice non scalaire ; on note $\mathbb{A}$ l'ensemble

$$\mathbb{A} = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \;/\; \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ M = aI_2 + bA\}$$

Vérifier que $\mathbb{A}$ est une algèbre de dimension deux, sous-algèbre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

3. Montrer que $\mathbb{A}$ contient une matrice B telle que $B^2 = -I_2$ si, et seulement si, $(\operatorname{tr}A)^2 < 4\det A$.

4. Vérifier qu'alors I_2 et B forment une base de $\mathbb{A}$ et en déduire un isomorphisme d'algèbre entre A et le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

5. On suppose que A est non scalaire et vérifie : $(\operatorname{tr}A)^2 = 4\det A$. Déterminer toutes les matrices de $\mathbb{A}$ telles que $M^2 = 0$, et en déduire que $\mathbb{A}$ n'est pas un corps.

6. Soit B une matrice non scalaire de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On lui associe l'algèbre $\mathbb{B}$ comme dans la question **2.** Démontrer que si A et B sont semblables, $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ sont des algèbres isomorphes.

7. On suppose que $\mathbb{A}$ est telle que : $(\operatorname{tr}A)^2 > 4\det A$. Vérifier que $\mathbb{A}$ est diagonalisable de valeurs propres distinctes. En déduire que $\mathbb{A}$ est isomorphe à l'algèbre des matrices diagonales. Est-ce que $\mathbb{A}$ est un corps ?

II. Quelques résultats généraux

Soit $\mathbb{D}$ une algèbre de dimension finie n.

8. Soit a un élément de $\mathbb{D}$, démontrer que l'application ϕ_a, définie par :

$$\phi_a : \begin{cases} \mathbb{D} & \to & \mathbb{D} \\ x & \mapsto & ax \end{cases}$$

est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{D}$.

9. On note $\mathcal{B}$ une base de $\mathbb{D}$. $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi_a)$ désigne la matrice de l'endomorphisme ϕ_a, dans la base $\mathcal{B}$. Démontrer que l'application :

$$\Psi : \begin{cases} D & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ a & \mapsto & \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi_a) \end{cases}$$

est un morphisme injectif d'algèbres. Vérifier que $\Psi(\mathbb{D})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et en déduire que $\mathbb{D}$ est isomorphe à une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

10. On suppose que $\mathbb{D} = \mathbb{C}$, corps des nombres complexes. On munit $\mathbb{C}$, considéré comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel, de la base $\mathcal{B} = (1, i)$. Pour tout nombre complexe $z = a + ib$, (a et b réels), écrire la matrice $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi_z)$.

11. Soit maintenant $\mathbb{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On s'intéresse à quelques cas où on peut affirmer que $\mathbb{A}$ est, ou n'est pas, un corps.

- **a)** On suppose que $\mathbb{A}$ contient une matrice non scalaire A qui a une valeur propre réelle λ. Montrer que $\mathbb{A}$ ne peut pas être un corps. On utilisera une matrice bien choisie, combinaison linéaire de I_n et de A.
- **b)** En déduire que si $\mathbb{A}$ contient une matrice diagonalisable ou trigonalisable non scalaire, elle ne peut pas être un corps.
- **c)** On suppose que $\mathbb{A}$ est intègre, c'est-à-dire que :

$$\forall A \in \mathbb{A}, \forall B \in \mathbb{A}, AB = 0 \implies A = 0 \text{ ou } B = 0\,.$$

Montrer que, si A est une matrice non nulle de $\mathbb{A}$, l'application $\Phi_A : X \mapsto AX$ est un isomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{A}$. En déduire que $\mathbb{A}$ est un corps.