Chapitre 11

Intégration

L'objectif principal de ce chapitre est de généraliser la notion d'intégrale vue en MP2I pour les fonctions continues par morceaux sur des *segments* de $\mathbb{R}$. Il va s'agir d'étendre l'intégration à des intervalles quelconques, ce qui introduira une notion de *convergence d'intégrales*, très similaire à celle de convergence de séries. On étudiera également des théorèmes puissants complétant les résultats concernant l'intégration des suites et séries de fonctions, ainsi que les fonctions définies par des intégrales.

Dans tout ce chapitre, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide. On notera a et b les bornes inférieures et supérieures de I dans la droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$, avec donc $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Les fonctions considérées seront définies et continues par morceaux sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$ (qui désigne, comme d'habitude le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On généralisera facilement les résultats à des fonctions à valeurs dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie, en se ramemant aux fonctions coordonnées dans une base quelconque.

Révisions MP2I

Revoir le chapitre 33.

1 Intégrales généralisées

On sait déjà ce qu'est une fonction continue par morceaux sur un segment.

Définition 1. On dit que $f : I \to \mathbb{K}$ est continue par morceaux lorsque f est continue par morceaux sur tout segment de I.

Exercice 1. Montrer que l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction continue par morceaux sur I est au plus dénombrable.

1.1 intégrale généralisée sur $[a, +\infty[$

Dans cette partie et la suivante, on se place dans le cas $I = [a + \infty[$, avec $a \in \mathbb{R}$ fixé.

Définition 2. Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{K}$ continue par morceaux. On dit que l'intégrale (généralisée) $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ est convergente (on peut préciser en $+\infty$) lorsque la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ admet une limite finie en $+\infty$. Lorsqu'elle existe, la valeur de cette limite est encore notée $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$, ou bien $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$.

Remarques :

- Lorsque f est continue, la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est simplement une primitive de f.
- Lorsque l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ est convergente en ∞, la fonction $G : x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ est bien définie, et continue sur $[a, +\infty[$. C'est une primitive de $-f$ si f est continue.

Comme pour les séries, le cas positif donne une caractérisation très simple :

Proposition 1. *Pour $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue par morceaux et positive, l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ est convergente si, et seulement si, la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est majorée sur $[a, +\infty[$.*

Remarque : Lorsque f positive, on peut écrire $\displaystyle\int_a^{+\infty} f = +\infty$ en cas de divergence

Proposition 2. *Si $0 \leqslant f \leqslant g$ sur $[a, +\infty[$, la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} g$ implique celle de $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$.*

Exemples :
- l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ est convergente avec $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t = 1$
- l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\mathrm{d}t$ est divergente.

1.2 Intégrabilité sur $[a, +\infty[$

Définition 3. On dit que $f : [a, +\infty[\to \mathbb{K}$ est *intégrable* (en $+\infty$) lorsque :

a) f est continue par morceaux sur $[a, +\infty[$

b) l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f|$ est convergente

Remarques :
- La deuxième condition s'exprime aussi en disant que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ est *absolument convergente.*
- L'absolue convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ est équivalente à la convergence (tout court) lorsque f est de signe constant.
- Pour f continue par morceaux, un calcul montrant que $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f| < +\infty$ prouve que f est intégrable

Proposition 3. *Si f est intégrable sur $[a, +\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ est convergente et :*

$$\left|\int_a^{+\infty} f\right| \leqslant \int_a^{+\infty} |f|$$

Remarque : La réciproque est fausse en général (elle est vraie si f est de signe constant, comme on l'a vu) : une intégrale convergente mais pas absolument convergente est dite (comme pour les séries) *semi-convergente*

Exercice 2. Montrer que la fonction $f : t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t}$ n'est pas intégrable sur $[0, +\infty[$ mais que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ est néanmoins convergente.

1.3 Théorèmes de comparaison

Théorème 1. *Soient $f, g : [a, +\infty[\to \mathbb{K}$ continues par morceaux.*

a) *Si $f(x) = O\big(g(x)\big)$ en $+\infty$, l'intégrabilité de g en $+\infty$ implique celle de f*

b) *Si $f(x) \sim g(x)$ en $+\infty$, l'intégrabilité de g équivaut à celle de f.*

Remarques :
- En particulier si $f(x) = o\big(g(x)\big)$ on a le même résultat que pour le O.
- Pour le **a)** On peut bien sûr utiliser la contraposée.

1.4 Intégrale généralisée sur un intervalle quelconque

Définition 4. On note $a = \inf I \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b = \sup I \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, et soit $f : I \to \mathbb{K}$ continue par morceaux.

a) Cas $I = [a, b[$: on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ est convergente (en b) lorsque la fonction $F : [a, b[\to \mathbb{K}$ définie par $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ admet une limite dans $\mathbb{K}$ quand x tend vers b.

b) Cas $I =]a, b]$: on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ est convergente (en a) lorsque la fonction $F :]a, b] \to \mathbb{K}$ définie par $F(x) = \displaystyle\int_x^b f(t)\mathrm{d}t$ admet une limite dans $\mathbb{K}$ quand x tend vers a.

c) Cas $I =]a, b[$: on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ est convergente lorsqu'il existe $c \in]a, b[$ telles que les intégrales $\displaystyle\int_a^c f$ et $\displaystyle\int_c^b f$ sont toutes deux convergentes. On note alors :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} \int_x^c f(t)\mathrm{d}t + \lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} \int_c^x f(t)\mathrm{d}t.$$

On démontre que n'importe quel $c \in]a, b[$ peut convenir.

Remarques :

- Lorsqu'il y a ainsi deux bornes ouvertes, il y a deux études de convergence à effectuer et on peut préciser si l'intégrale est convergente (ou pas) en a et/ou en b : l'intégrale est convergente (tout court) si, et seulement si, elle est convergente en a et en b.
- La *nature* (convergence ou divergence) d'une intégrale généralisée $\displaystyle\int_I f$ ne dépend que du comportement de f au voisinage des bornes de I : elle est invariante par modification de f sur un segment quelconque $J \subset I$ (*voir une fois de plus le parallèle avec la nature d'une série*).

Proposition 4. ***(intégrales classiques)***

- *Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ (dite de Riemann) converge si, et seulement si, $\alpha > 1$. En cas de convergence, l'intégrale vaut $\dfrac{1}{\alpha - 1}$*
- *Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ (dite de Riemann également) converge si, et seulement si, $\alpha < 1$. En cas de convergence, l'intégrale vaut $\dfrac{1}{1 - \alpha}$*
- *Pour $a \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, $a > 0$. En cas de convergence, l'intégrale vaut $\dfrac{1}{a}$.*
- *L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}t$ converge et a pour valeur 1.*

1.5 Propriétés des intégrales généralisées

Les propriétés classiques de linéarité, positivité, croissance, relation de Chasles, vues pour l'intégrale des fonctions continues par morceaux sur un segment, se généralisent sans problème au cas des intégrales généralisées sur un intervalle I quelconque : il suffira à chaque fois d'écrire la propriété sur un segment de I, et de faire tendre les bornes vers celles de I.

Remarque : Attention cependant à la propriété concernant l'annulation d'une fonction positive f lorsque son intégrale sur I est nulle : on pourra seulement en déduire que, sur tout segment de I, f est nulle sauf en un nombre fini de points (ce qui ne garantit pas que l'ensemble des points de I en lesquels f s'annule est fini, mais garantit qu'il est au plus dénombrable).

1.6 Intégration par parties.

Ce procédé, bien connu pour l'intégrale sur un segment, se généralise à un intervalle quelconque, en prenant bien garde à ce que, l'intégrale devenant généralisée, il faut vérifier sa convergence.

Proposition 5. *Soit $a, b \in \mathbb{R}$, avec $a < b$ et soient f, g continues et dérivables sur $]a, b[$. Alors si fg admet des limites en a et b, et en notant $[fg]_a^b = \lim_b(fg) - \lim_a(fg)$, les intégrales $\displaystyle\int_a^b f'g$ et $\displaystyle\int_a^b fg'$ sont de même nature, et on a, en cas de convergence :*

$$\int_a^b f(t)g'(t)\mathrm{d}t = [fg]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\mathrm{d}t.$$

Remarques :
- c'est l'existence des limites du produit fg aux bornes de l'intervalle d'intégration qui assure que les intégrales de fg' et $f'g$ sont de même nature.
- Si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b fg'$ est convergente, mais pas $\displaystyle\int_a^b f'g$, alors $[fg]_a^b$ n'est pas finie (fg n'admet pas de limite en a et/ou en b). Mais on peut généralement quand même s'en sortir en écrivant l'intégration par partie sur un segment $[x, y]$ de $]a, b[$, et en faisant tendre ensuite x vers a et/ou y vers b : il doit y avoir en effet une "compensation" entre $[fg]_x^y$ et $\displaystyle\int_x^y f'(t)g(t)\mathrm{d}t$ qu'il faut expliciter avant de passer à la limite.

Exemple : Considèrons l'intégrale généralisée positive $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$, avec $x > 0$. D'une part, on a $t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t} \sim \dfrac{1}{t^{1-x}}$ pour $t \to 0$, ce qui prouve par comparaison que l'intégrale est convergente sur $]0, 1]$. D'autre part $t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t} = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ pour $t \to +\infty$, ce qui prouve la convergence de l'intégrale sur $[1, +\infty[$. Ainsi, l'intégrale est convergente sur $]0, +\infty[$. Notons $\Gamma(x)$ sa valeur. En notant $f : t \mapsto t^x$ et $g : t \mapsto -\mathrm{e}^{-t}$, on a $\lim_{+\infty} fg - \lim_0 fg = 0 - 0 = 0$, et, par intégration par partie :

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f(t)g'(t)\mathrm{d}t = -\int_0^{+\infty} f'(t)g(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} xt^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = x\Gamma(x).$$

On en déduit notamment $\Gamma(n) = (n-1)!$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1.7 Changement de variable.

On se limitera au cas d'un changement de variable strictement monotone, ce qui permet de pouvoir effectuer le changement "dans les deux sens".

Proposition 6. *Soient $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, avec $a < b$ et $\alpha < \beta$, et soit $\varphi :]\alpha, \beta[\to]a, b[$ une bijection strictement croissante de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $f :]a, b[\to \mathbb{K}$ continue par morceaux. Alors les intégrales généralisées $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_\alpha^\beta f\big(\varphi(u)\big)\varphi'(u)\mathrm{d}u$ sont de même nature, et égales en cas de convergence.*

Remarques :
- On pourra, de façon informelle, écrire qu'on a effectué le changement de variable $t = \varphi(u)$ (et/ou $u = \varphi^{-1}(t)$), et écrire $\mathrm{d}t = \varphi'(u)\mathrm{d}u$ (on a alors $\mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}t}{\varphi'\big(\varphi^{-1}(t)\big)}$).
- On peut adapter sans difficulté ce résultat au cas d'un changement de variable φ strictement décroissant : il suffit d'intervertir les bornes d'intégration.

Exemple : Considérons l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$. On montre facilement qu'elle est convergente par comparaison, et pour la calculer, on effectue le changement de variable $u = \sqrt{t}$, ce qui donne $\mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}t}{2\sqrt{t}}$, d'où, en terminant par une intégration par parties :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} 2u\,\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = \Big[-2u\,\mathrm{e}^{-u}\Big]_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u = 2.$$

1.8 Intégrales absolument convergentes et fonctions intégrables

Définition 5. Soit $f : I \to \mathbb{K}$, $a = \inf I$ et $b = \sup I$.

- Si f est continue par morceaux, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ est absolument convergente (sur I) lorsque $\displaystyle\int_a^b |f|$ est convergente.
- On dit que f est intégrable (sur I) lorsque f est continue par morceaux et d'intégrale absolument convergente sur I.

Remarques :

- lorsque f est continue par morceaux, on utilise indifféremment les expressions "f est intégrable" et "l'intégrale de f est absolument convergente".
- Lorsque f est continue par morceaux mais n'est pas intégrable on peut néanmoins préciser si f est intégrable (ou pas) en a et en b.
- f est intégrable en a (*resp.* b) si, et seulement si, $t \mapsto f(a+t)$ (*resp.* $t \mapsto f(b-t)$) est intégrable en 0.
- Lorsque f est intégrable, on peut aussi écrire $\displaystyle\int_I f$ la valeur de l'intégrale.

Proposition 7. *L'ensemble des fonctions intégrables sur I est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^I$, noté $L^1(I, \mathbb{K})$ ou plus simplement $L^1(I)$.*

Proposition 8. *Pour tout $f \in L^1(I)$, on a $\displaystyle\left|\int_I f\right| \leqslant \int_I |f|$.*

Proposition 9. *Si $f \in L^1(I)$ et si f est continue, alors $\displaystyle\int_I |f| = 0$ implique f identiquement nulle.*

Remarque : On notera aussi $L^1_c(I, \mathbb{K})$ l'espace des fonctions continues et intégrables sur I : $L^1_c(I, \mathbb{K}) = L^1(I, \mathbb{K}) \cap \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$.

Corollaire 1. *l'application $\displaystyle f \mapsto \int_I |f|$ est une norme sur $L^1_c(I, \mathbb{K})$.*

Remarque : Sur $L^1(I, \mathbb{K})$, il s'agit seulement d'une semi-norme.

Théorème 2. ***(de comparaison)*** *Soit $f, g : I \to \mathbb{K}$ continues par morceaux et a une borne de I Alors :*

- *si $f = \mathrm{O}(g)$ au voisinage de a, l'intégrabilité de g en a implique celle de f.*
- *Si $f \sim g$ au voisinage de a, l'intégrabilité de g en a équivaut à celle de f.*

Proposition 10. *Pour $\alpha \in \mathbb{K}$, l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{|x-a|^\alpha}\mathrm{d}x$ converge si, et seulement si, $\alpha < 1$.*

1.9 Fonctions de carré intégrable

Là aussi, on va pouvoir dégager une structure de sous-espace vectoriel, mais la stabilité pour les combinaisons linéaires est un peu plus délicate, à cause du carré, et nécessite déjà de démontrer le résultat suivant :

Proposition 11. *Si $f, g : I \to \mathbb{R}$ sont continues par morceaux et de carré intégrable sur I, alors fg est intégrable sur I.*

On est maintenant en mesure de montrer :

Proposition 12. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. l'ensemble des fonctions $I \to \mathbb{K}$ continues par morceaux et de carré intégrable sur I est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, noté $\mathcal{L}^2(I, \mathbb{K})$.*

Comme pour les fonctions intégrables, on va pouvoir, en se restreignant au sous-espaces des fonctions continues, définir une norme adaptée. Elle a ici un gros avantage, celui d'être associée à une structure préhilbertienne :

Proposition 13. *L'ensemble des fonctions $I \to \mathbb{R}$ continues et de carré intégrable sur I est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, noté $\mathcal{L}_c^2(I, \mathbb{R})$, et l'application*

$$(f, g) \mapsto \int_I f(t)g(t)\mathrm{d}t$$

y définit un produit scalaire.

Corollaire 2. *L'application :*

$$\|\cdot\|_2 : f \mapsto \sqrt{\int_I |f(t)|^2 \mathrm{d}t}$$

définit une norme sur $\mathcal{L}_c^2(I)$.

Remarque : Comme pour l'espace $\mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$ avec $\|\cdot\|_1$, l'application $\|\cdot\|_2$ est encore définie sur $\mathcal{L}^2(I, \mathbb{K})$, mais c'est une *semi-norme*. On peut dire que c'est une norme si on raisonne modulo les fonctions nulles presque partout.

Ainsi, on peut étudier la convergence d'une suite de fonctions $(f_n)_n$ de carré intégrables, au sens de la norme $\|\cdot\|_2$. En cas de convergence, on parle de convergence *en moyenne quadratique*.

Puisqu'on a un produit scalaire, l'inégalité de Cauchy-Schwarz s'applique. Explicitement, elle dit que pour deux fonctions f et g de carrés intégrable sur I :

$$\left(\int_I f(t)g(t)\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \left(\int_I f^2(t)\mathrm{d}t\right)\left(\int_I g^2(t)\mathrm{d}t\right),$$

avec, <u>dans le cas continu</u>, égalité si, et seulement si f et g sont colinéaires (*ie.* "proportionnelles").

1.10 Intégration des relations de comparaison

Revoir ici le résultat analogue dans les séries : "sommations des relations de comparaison"

Théorème 3. ***(d'intégration d'une relation de comparaison)*** *Soient $f : [a, b[\to \mathbb{K}$ et $g : [a, b[\to \mathbb{R}$ continues par morceaux, avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, et g de signe constant au voisinage de a.*

***a)** Si $f = \mathrm{o}(g)$ en b :*

- *Si g n'est pas intégrable en b, $\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = \mathrm{o}\left(\int_a^x g(t)\mathrm{d}t\right)$.*
- *Si g est intégrable en b, f aussi et $\displaystyle\int_x^b f(t)\mathrm{d}t = \mathrm{o}\left(\int_x^b g(t)\mathrm{d}t\right)$.*

***b)** Si $f \sim g$ en b, f est intégrable en b si, et seulement si, g aussi et :*

- *En cas de divergence, $\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t \sim \int_a^x g(t)\mathrm{d}t$.*
- *En cas de convergence, $\displaystyle\int_x^b f(t)\mathrm{d}t \sim \int_x^b g(t)\mathrm{d}t$.*

Remarque : On a un résultat analogue au **a)** avec la relation $f = \mathrm{O}(g)$.

2 Suites et séries d'intégrales, intégrales à paramètre

2.1 Théorème de la convergence dominée.

Dans un chapitre précédent, on a déjà eu affaire à des suites ou des séries d'intégrales. Mais on était dans le cas limité des fonctions continues sur des segments. De plus il nous fallait une hypothèse forte de convergence uniforme pour pouvoir dire que "la limite des intégrales est l'intégrale de la limite" et "la somme des intégrales est l'intégrale de la somme". On va voir ici des théorèmes bien plus puissants qui ne nécessitent pas l'hypothèse contraignante d'une convergence forte, et qui sont valables sur des intervalles quelqconques.

Théorème 4. *Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continues par morceaux sur I convergeant simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux et telle qu'il existe une fonction φ continue par morceaux et intégrable sur I vérifiant $|f_n| \leqslant \varphi$ pour tout n, alors les fonctions f_n et f sont intégrables sur I et :*

$$\int_I f_n(t)\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_I f(t)\mathrm{d}t.$$

Exemple : $f_n : x \mapsto \left(1 - \dfrac{x^2}{n}\right)^n$ sur $[0, \sqrt{n}]$, 0 sinon.

Remarques :
- Un cas de figure classique : f joue le rôle de la fonction de domination. Cela peut être notamment le cas lorsque $(f_n(x))_n$ est positive croissante pour tout $x \in I$.
- Ce théorème reste bien sûr valable dans le cas d'hypothèse de domintation $|f_n| \leqslant \varphi$ qui ne serait vérifiée qu'à partir d'un certain rang.
- On peut utiliser ce résultat pour une série de fonctions $\sum f_n$ ce qui permet d'échanger sommation et intégration. L'hypothèse de domination doit être vérifiée pour les sommes partielles. Lorsqu'il s'agit d'une série positive, on est dans le cas de suites $(S_n(x))_n$ positives croissantes et $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ peut jouer le rôle de la fonction de domination.

Exercice 3. Écrire un énoncé du *théorème de convergence dominée pour une série de fonctions*

Le théorème de convergence s'étend au cas d'une famille à paramètre réel $(f_\lambda)_{\lambda\in J}$, avec J un intervalle de $\mathbb{R}$: si pour tout $t \in I$, $f_\lambda(t) \underset{\lambda\to\alpha}{\longrightarrow} f(t)$ avec $\alpha \in \overline{J}$ (éventuellement $\alpha = \pm\infty$) fixé, et f continue par morceaux sur I, et s'il existe $\varphi : I \to \mathbb{R}_+$ intégrable telle que $|f_\lambda| \leqslant \varphi$ pour tout $\lambda \in J$, alors

$$\int_I f_\lambda(t)\mathrm{d}t \underset{\lambda\to\alpha}{\longrightarrow} \int_I f(t)\mathrm{d}t$$

L'hypothèse de domination peut n'être en fait vérifiée que pour λ au voisinage de α.

2.2 Théorème d'intégration terme à terme.

Théorème 5. *Si $(f_n)_n$ est une suite de fonctions continues par morceaux et intégrables sur I, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, telle que la série $\sum f_n$ converge simplement, avec une somme continue par morceaux sur I. Alors :*

$$\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_I f_n(t)\mathrm{d}t \qquad \textit{(dans } [0,+\infty]\textit{)}$$

Remarque : En particulier, l'intégrabilité de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ sur I équivaut à $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\int_I f_n(t)\mathrm{d}t < +\infty$.

Théorème 6. *Si $(f_n)_n$ est une suite de fonctions continues par morceaux et intégrables sur I, telle que la série $\sum f_n$ converge simplement, de somme une fonction continue par morceaux sur I et telle que*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\int_I |f_n(t)|\mathrm{d}t < +\infty,$$

Alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est intégrable sur I, et :

$$\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_I f_n(t)\mathrm{d}t.$$

Exercice 4. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{\mathrm{e}^t - 1}\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$.

Remarque : Le théorème d'intégration terme à terme est d'usage plus pratique que celui de convergence dominée pour une série de fonctions. Il y a néanmoins des situations de semi-convergence pour la série (typiquement une série alternée), où le théorème d'intégration terme à terme ne peut pas s'appliquer.

Exercice 5. Soient $a > 0$ et $f_n : t \mapsto (-1)^n t^{an}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ sur $[0,1]$.

a) Vérifier que la série $\sum f_n$ converge simplement sur $]0,1[$.

b) Quelle est la nature de la série $\sum \int_0^1 |f_n(t)| \mathrm{d}t$?

c) À l'aide du théorème de convergence dominée, montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{an+1} = \int_0^1 \frac{1}{1+t^a} \mathrm{d}t$.

2.3 Théorème de continuité d'une intégrale à paramètres

Théorème 7. *Soit A une partie d'un espace vectoriel normé de dimension finie, I un intervalle de $\mathbb{R}$, et soit une fonction $f : A \times I \to \mathbb{K}$ telle que :*

- *pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur A ;*
- *pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;*
- *Il existe une fonction φ intégrable sur I telle que pour tout $x \in A$, $\left|f(x,\cdot)\right| \leqslant \varphi$.*

Alors la fonction $x \mapsto \int_I f(x,t)\mathrm{d}t$ est définie et continue sur A.

Remarques :

- La continuité étant une propriété locale, l'hypothèse de domination peut n'être vérifiée que "localement" : pas besoin de chercher une seule fonction intégrable φ qui domine pour tout $x \in A$ (parfois une telle fonction n'existe tout simplement pas). L'existence d'une fonction intégrable φ_a qui domine $f(x,\cdot)$ pour tout x dans un voisinage de a suffit à assurer la continuité en a.
- En pratique, A est un intervalle et l'hypothèse de domination peut n'être vérifiée que sur tout segment de A.

Exercice 6. Montrer que la fonction $\Gamma : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ est bien définie et continue sur $]0,+\infty[$.

2.4 Théorème de dérivabilité d'une intégrale à paramètre

Théorème 8. *Soit I et A deux intervalles de $\mathbb{R}$, et soit une fonction $f : A \times I \to \mathbb{K}$ telle que :*

- *pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A ;*
- *pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I ;*
- *pour tout $x \in A$, $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;*
- *Il existe une fonction φ positive intégrable sur I telle que pour tout $x \in A$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,.)\right| \leqslant \varphi$;*

Alors $g : x \mapsto \int_I f(x,t)\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A, et pour tout $x \in A$:

$$g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t.$$

Remarques :

- Là encore, il suffit de vérifier l'hypothèse de domination sur tout segment de I.
- Ce résultat se généralise pour la classe $\mathcal{C}^k$, $k \geqslant 1$, sous hypothèse de domination de $\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,.)$ et d'intégrabilité des $\dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,.)$, avec $0 \leqslant j \leqslant k-1$.

Exercice 7. Montrer que $\Gamma : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ et exprimer $\Gamma^{(k)}$ comme une intégrale à paramètre, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.