interrogation de cours n° 0

lundi 1er septembre 2025

Pour cette interrogation de pré-rentrée, il s'agit de vérifier certains de vos acquis de 1ère année en algèbre linéaire.

1. Décrire les trois types d'opérations élémentaires sur les lignes ou colonnes d'une matrice et leur notation.

MPI: interpréter chacune de ces opérations par la multiplication d'une certaine matrice, que l'on précisera.*

2. Qu'est-ce qu'une matrice symétrique ? Antisymétrique ? Montrer que tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ s'écrit de façon unique comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

3. Qu'appelle-t-on la trace d'une matrice carrée $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$? En admettant que $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$, montrer que deux matrices semblables ont même trace.

4. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant q}$ une famille finie de E. Quand dit-on que (e_i) est Libre ? Génératrice ? Que dire de (e_i) si elle est à la fois libre et génératrice ?

5. Quand dit-on que deux sous-espaces vectoriels F et G d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E sont supplémentaires ?

MPI: Montrer alors que E et $F \times G$ sont isomorphes*

6. Soient deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E et F et $f : E \to F$ une application linéaire. Donner la définition de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$, et montrer que ce sont des sous-espaces vectoriels de E et F respectivement.

7. On reprend les notations de la question précédente et on suppose E de dimension finie. Énoncer le théorème du rang pour f.

MPI: Énoncer la forme plus générale de ce théorème lorsque E est de dimension quelconque.*

8. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ et Soient $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ deux bases de E.

a) Expliquer ce qu'est la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$.

b) Pour $x \in E$, on note $X = \underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(x)$ et $X' = \underset{\mathcal{B}'}{\mathrm{Mat}}(x)$. Donner les dimensions de X et X' et une relation matricielle entre X, X' et P.

c) Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, on note $M = \underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(u)$ et $M' = \underset{\mathcal{B}'}{\mathrm{Mat}}(u)$. Donner les dimensions de M et M' et une relation matricielle entre M, M' et P.