# Devoir à la maison n° 2 - MPI

*À rendre le lundi 29 septembre 2025*

Ce second devoir MPI est constitué de deux problèmes d'analyse autour de la manipulation de normes.

## Problème 1 : Des normes sur $\mathbb{R}^2$

On considère dans $\mathbb{R}^2$ les deux normes définies pour $x = (x_1, x_2)$ par :

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| \qquad \text{et} \qquad \|x\|_\infty = \sup(|x_1|, |x_2|)$$

**1.** Déterminer deux réels positifs $\alpha$ et $\beta$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}^2$ :

$$\alpha\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_1 \leqslant \beta\|x\|_\infty$$

**2.** On pose, pour $a, b \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^2$ : $N(x) = a\|x\|_1 + b\|x\|_\infty$.
On considère les vecteurs $x = (1, 0)$, $y = (0, 1)$, $x' = (1, 1)$ et $y' = (-1, 1)$.

- **a)** Calculer $N(x)$, $N(y)$, $N(x')$, $N(y')$.
- **b)** En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que $N$ soit une norme.

On supposera que cette condition est vérifiée par la suite.

**3.** Sur un même repère, construire les sphères unités $S_1$ pour $\|\cdot\|_1$, $S_\infty$ pour $\|\cdot\|_\infty$ et $S_N$ pour la norme $N$ dans le cas $a = b = \dfrac{1}{2}$.

**4.** On suppose toujours $a = b = \dfrac{1}{2}$.
On note $B_1(R)$, $B_\infty(R)$ et $B_N(R)$ les boules de rayons $R$ centrées en $(0, 0)$ pour les normes respectives $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_N$. Montrer qu'il existe un nombre $R$ tel que :

$$B_1(R) \subset B_N(1) \subset B_\infty(R)$$

## Problème 2 : Continuité de la longueur d'une courbe

Pour toute fonction $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, on note

$$L(f) = \int_0^1 \sqrt{1 + (f'(t))^2}\mathrm{d}t$$

une expression intégrale de la longueur de la courbe représentative de $f$.

On rappelle que l'application

$$f \mapsto \|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$$

définit une norme sur l'espace $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ des applications continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$.

On note $E_1 = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continûment dérivables de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ et pour toute fonction $f \in E_1$, on note

$$\|f\| = |f(0)| + \|f'\|_\infty$$

**1.** Montrer que l'application $f \mapsto \|f\|$ définit une norme sur $E_1$.

**2.** Montrer que

$$\forall f \in E_1, \quad \|f\|_\infty \leqslant \|f\|$$

**3.** Les normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont-elles équivalentes sur $E_1$ ?

On désigne par $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définie sur $[0,1]$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall t \in [0,1], \quad f_n(t) = \frac{\sin(n\pi t)}{\sqrt{n}}$$

**4.** Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $[0,1]$, c'est-à-dire :

$$\|f_n - 0\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

**5.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$L(f_n) \geqslant 2\sqrt{n}$$

**6.** L'application $L : f \mapsto L(f)$ est-elle continue sur $(E_1, \|\cdot\|_\infty)$ ?

**7.** L'application $L : f \mapsto L(f)$ est-elle continue sur $(E_1, \|\cdot\|)$ ?
*Indication : On pourra majorer $|L(f) - L(g)|$ pour $f$ et $g$ dans $E_1$.*