Devoir à la maison n° 6 - MPI

À rendre le lundi 8 décembre 2025

Ce devoir maison n° 6 est composé de deux petits problèmes très classiques, le premier correspondant tout simplement à la démonstration d'un résultat fondamental du cours.

Problème 1. Théorème spectral

On considère dans ce problème un espace euclidien E de dimension $n \geqslant 1$. On notera $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire. Soit u un endomorphisme de E.

1. **a)** À l'aide d'un polynôme annulateur de u, montrer que si u n'admet pas de valeur propre réelle, alors il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $u^2 + au + bId$ n'est pas injectif.

b) En déduire que E admet nécessairement un sous-espace vectoriel F de dimension 1 ou 2 stable par u.

2. On suppose dans cette question que u est autoadjoint.

a) Montrer que si x et y sont deux vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes λ et μ de u, on a $x \perp y$.

b) Montrer que si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u, et que u induit sur F et $F^\perp$ des endomorphismes autoadjoints.

c) Montrer que si $n = 2$, alors u est diagonalisable dans une base orthonormée de E.

On pourra considérer le polynôme caractéristique de u, calculé à partir d'une représentation matricielle de u dans une base orthonormée quelconque de E

d) À l'aide des questions précédentes, rédiger une récurrence sur n prouvant que u est diagonalisable en base orthonormée : il existe une base $\mathcal{B}$ orthonormée de E telle que $\underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(u)$ est diagonale.

3. **(MPI* seulement) Réduction des isométries vectorielles.**

On suppose maintenant dans cette question que u est une isométrie vectorielle. En s'inspirant de la démarche de la question précédente, rédiger une récurrence sur n prouvant qu'il existe une base orthonormée de E dans laquelle u est représentée par une matrice diagonale par blocs de la forme :

$$M = \begin{pmatrix} I_p & & & & \\ & -I_q & & & \\ & & R_1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & R_s \end{pmatrix},$$

avec $p, q, s \in \mathbb{N}$, et pour tout $i \in [\![1, s]\!]$, $R_i = \begin{pmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i) \end{pmatrix}$, où $\theta_i \in \mathbb{R} \backslash \{\pi\mathbb{Z}\}$.

Problème 2. Matrices symétriques positives

Dans ce problème, on note E l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique. Tout vecteur x de E est immédiatement identifié à une matrice colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

On note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On rappelle qu'une matrice symétrique M de $\mathcal{S}_n$ est dite *positive* lorsque pour tout $x \in E$:

$$X^T M X \geqslant 0.$$

Elle est dite *définie positive* lorsque pour tout $x \in E$ <u>non nul</u> :

$$X^T M X > 0.$$

On note $\mathcal{S}_n^+$ l'ensemble des matrices symétriques positives et $\mathcal{S}_n^{++}$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives.

Dans toute la suite, on considère une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
- (i) $A \in \mathcal{S}_n^+$;
- (ii) $A \in S_n$ et $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}^+$;
- (iii) $\exists\, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\,,\ \ A = M^T M$

2. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
- (i) $A \in \mathcal{S}_n^{++}$;
- (ii) $A \in S_n$ et $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$;
- (iii) $\exists\, M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\,,\ \ A = M^T M$

3. **a)** Si $A \in \mathcal{S}_n^+$, montrer que A est limite d'une suite de matrices de $\mathcal{S}_n^{++}$;
b) Montrer que $\mathcal{S}_n^+$ est une partie fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

4. On suppose $A \in \mathcal{S}_n^+$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
a) Montrer qu'il existe une unique matrice $A' \in \mathcal{S}_n^+$ telle que $A = A'^k$.
(on pourra noter alors $A' = \sqrt[k]{A}$.)
b) Montrer qu'il existe un polynôme $P_A \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\sqrt[k]{A} = P_A(A)$.
(On pourra utiliser les polynômes interpolateurs de Lagrange.)