Devoir surveillé n$^{\text{o}}$ 1

Samedi 6 septembre 2025.

Ce premier devoir surveillé, d'une durée de 2h, et exceptionnellement commun aux filières MPI et MPI*, est constitué de deux problèmes issus des concours, **à traiter sur deux copies séparées**.

Les deux énoncés sont clairement trop long pour être abordés complètement en 2h, et je ne m'attends absolument pas à ce que vous traitiez toutes les questions, loin de là ! Commencez par le problème qui vous inspire le plus, essayez de l'explorer le plus possible **sans pour autant réfléchir et écrire dans la précipitation**, et réservez-vous du temps pour attaquer un peu l'autre problème.

Je préfère nettement que vous n'ayez répondu au final qu'à une quinzaine de questions, mais en y ayant apporté **du soin dans la présentation, ainsi qu'une rédaction claire, précise et concise**, plutôt que vous ayez cherché à répondre au maximum de questions mais que votre copie ressemble à un brouillon ... N'hésitez pas à sauter les questions qui vous posent trop de problèmes, quitte à y revenir plus tard s'il vous reste du temps.

Bon courage !

Problème 1. Algèbre linéaire

A. Étude d'endomorphismes tels que $u \circ u = 0$.

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, u un endomorphisme **non nul** de E tel que $u \circ u = 0$. Soit r le rang de u et p la dimension du noyau de u.

1. **a)** Montrer que $\operatorname{Im}(u) \subset \operatorname{Ker}(u)$.

b) En déduire que $r \leqslant \dfrac{n}{2}$ et $p \geqslant \dfrac{n}{2}$.

2. Pour cette question, on suppose que $n = 2$.

a) Justifier que $\operatorname{Im}(u) = \operatorname{Ker}(u)$.

b) Soient $\mathbf{i}$ un vecteur non nul appartenant à $\operatorname{Im}(u)$ et $\mathbf{j}$ tel que $u(\mathbf{j}) = \mathbf{i}$. Montrer que $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ est une base de E, et donner une matrice de u dans cette base.

3. Pour cette question, on suppose que $n = 3$.

a) Montrer que $r = 1$. Quelle est la dimension de $\operatorname{Ker}(u)$?

b) Soit $\mathbf{k}$ un vecteur de E n'appartenant pas à $\operatorname{Ker}(u)$ et $\mathbf{i} = u(\mathbf{k})$. Justifier l'existence d'un vecteur $\mathbf{j}$ de $\operatorname{Ker}(u)$, non colinéaire à $\mathbf{i}$, puis démontrer que $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ est une base de E.

c) Déterminer la matrice de u dans cette base.

B. Application à un exemple.

On rappelle que $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels, et $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble constitué des matrices inversibles de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
Dans cette partie, I désigne la matrice identité de $\mathbb{R}^3$ et J est la matrice définie par :

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

4. Soit v l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, dont la matrice relative à la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est J.

a) Vérifier que $v \circ v = 0$.

b) Déterminer le noyau et l'image de v. Préciser leur dimension.

c) Trouver une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle v a pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Dans la suite, on notera P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à $\mathcal{B}$.

5. On considère l'ensemble Δ des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de la forme $M = I + mJ$ $(m \in \mathbb{R})$.

a) Démontrer que Δ est stable pour la multiplication matricielle.

b) Montrer alors que Δ est un sous-groupe multiplicatif de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$, isomorphe à $(\mathbb{R}, +)$.

c) L'ensemble Δ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

6. Soit $M = I + mJ$ où m est un réel non nul. On se propose dans cette question de trouver toutes les matrices X de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ solutions de l'équation (1) : $X^2 = M$.

a) Quelles sont les solutions de (1) appartenant à Δ ?

b) Justifier l'égalité $P^{-1}MP = N$, N désignant la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) Montrer qu'en posant $Y = P^{-1}XP$, l'équation (1) équivaut à l'équation (2) : $Y^2 = N$.

d) Soit $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ solution de (2).

Montrer que $YN = NY$. En déduire que Y est triangulaire supérieure et que $i = a$.

e) Résoudre l'équation (2). On vérifiera qu'il y a une infinité de solutions, dont on précisera la forme.

f) Exprimer alors les solutions de (1) à l'aide de la matrice P (aucun calcul n'est demandé).

Problème 2. Analyse

A. Étude d'une fonction.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x\ln(x)}{x+1} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1. Montrer que l'équation $x + 1 + \ln(x) = 0$ admet sur $\mathbb{R}_+^*$ une solution unique α, comprise entre 0 et 1.

2. **a)** La fonction f est-elle continue en 0 ? Est-elle dérivable en ce point ?

b) Étudier les variations de f, et préciser sa limite en $+\infty$.

c) Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé du plan. Déterminer les points d'intersection de (C) et de la droite d'équation $y = -x$.

L'objet de la suite du problème est le calcul de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

B. Somme d'une série.

On considère la série $\sum \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}$, dont on note $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite des sommes partielles.

On rappelle que cela signifie que $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Déterminer un réel a tel que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\int_0^{\pi} at^2\cos(nt)\mathrm{d}t = \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer S_n à l'aide d'une intégrale.

5. Vérifier que, pour tout réel $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$:

$$\sum_{k=1}^{n}\cos(kt) = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2}$$

6. On considère la fonction g définie par :

$$\begin{cases} g(t) = \dfrac{t^2}{\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)} & \text{si } t \in]0, 2\pi[\\ g(0) = 0 \end{cases}$$

Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 2\pi[$.

7. **a)** Vérifier alors que $S_n = \dfrac{\pi^2}{12} - \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} g(t)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)\mathrm{d}t$.

b) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, si h est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left|\int_0^{\pi} h(t)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{|h(0)|}{n+\frac{1}{2}} + \frac{\pi}{n+\frac{1}{2}} \times \max_{t\in[0,\pi]}|h'(t)|$$

c) En déduire la somme de la série $\sum \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ *(c'est-à-dire la limite de la suite (S_n)).*

C. Application au calcul de l'intégrale I.

Pour tout entier $k \geqslant 1$, on considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\begin{cases} f_k(x) = x^k\ln(x) & \text{si } x > 0 \\ f_k(0) = 0 \end{cases}$$

8. **a)** Étudier la continuité de f_1 sur $[0, 1]$.

b) Pour $k \geqslant 2$, montrer que f_k est dérivable sur $[0, 1]$ et exprimer sa dérivée à l'aide de f_{k-1}.

c) Pour tout entier $k \geqslant 1$, calculer l'intégrale $I_k = \displaystyle\int_0^1 f_k(x)\mathrm{d}x$.

d) Montrer que $\left|I - \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}I_k\right| \leqslant m \times \displaystyle\int_0^1 x^n\mathrm{d}x$, avec $m = \max\{f(t), t \in [0,1]\}$.

e) En déduire la valeur de I.

Un corrigé

Problème 1. Algèbre linéaire

A. Étude d'endomorphismes tels que $u \circ u = 0$.

1. a) Soit $y \in \mathrm{Im}(u)$. Il existe donc $x \in E$ tel que $y = u(x)$. On a alors $u(y) = u(u(x)) = u^2(x) = 0$, donc $y \in \mathrm{Ker}(u)$.

b) D'après la question précédente, $r \leqslant p$. D'après le théorème du rang, $r + p = n$. On a donc immédiatement $2r \leqslant n$ et $2p \geqslant n$.

2. L'énoncé suppose ici $n = 2$.

a) u étant supposé non nul, on a nécessairement $r > 0$. Puisque $r \leqslant 1$ d'après la question précédente, on doit avoir $r = 1$ et donc $p = n - r = 1$ également. $\mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u)$ sont donc des sous-espaces vectoriels de même dimension et l'inclusion $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u)$ implique en fait l'égalité $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Ker}(u)$.

b) D'après la question précédente, on a aussi $\mathbf{i} \in \mathrm{Ker}(u)$, de sorte que si $\mathbf{j}$ est colinéaire à $\mathbf{i}$ et s'écrit $\mathbf{j} = \lambda\mathbf{i}$ ($\lambda \in \mathbb{K}$), on a $\mathbf{i} = u(\lambda\mathbf{i}) = \lambda u(\mathbf{i}) = 0$, absurde. La famille $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ est donc libre, et donc une base de E. En notant que $u(\mathbf{i}) = 0$ et que $u(\mathbf{j}) = 1 \times \mathbf{i} + 0 \times \mathbf{j}$, on voit que u est représentée dans cette base par la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. L'énoncé suppose ici $n = 3$.

a) D'après la question **1.b)**, $r \leqslant \dfrac{3}{2}$ et donc $r \leqslant 1$ (r est entier !). Puisque u est non nul, $r = 1$. Le théorème du rang prouve alors que $\mathrm{Ker}(u)$ est de dimension 2.

b) On a $\mathbf{i} \in \mathrm{Im}(u)$ (puisque $\mathbf{i}$ est l'image de $\mathbf{k}$) donc $\mathbf{i} \in \mathrm{Ker}(u)$. Mais le fait que $\mathrm{Ker}(u)$ soit de dimension 2 nous assure de l'existence de $\mathbf{j} \in \mathrm{Ker}(u)$ non colinéaire à $\mathbf{i}$, de sorte que $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ forme une base de $\mathrm{Ker}(u)$ (c'est le théorème de la base incomplète). Comme $\mathbf{k} \notin \mathrm{Ker}(u)$, $\mathbf{k}$ n'est pas combinaison linéaire de $\mathbf{i}$ et de $\mathbf{j}$, et donc $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ est une famille libre de E. Cet espace étant de dimension 3, $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ en est une base.

c) Avec $u(\mathbf{i}) = u(\mathbf{j}) = 0$ et $u(\mathbf{k}) = \mathbf{i}$, on voit que u est représentée dans la base $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ par la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

B. Application à un exemple.

Dans cette partie, on a

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

4. a) Puisque J représente v dans la base canonique, J^2 représente $v \circ v$. Un calcul simple montre que J^2 est la matrice nulle, donc que $v \circ v = 0$.

b) Toutes les colonnes de J sont colinéaire, donc J est de rang 1 et son noyau est de dimension 2 (théorème du rang). On peut chercher à résoudre le système $JX = 0$, avec $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})$, ou observer plus simplement que $C_1 + C_2 = 0$ et $C_1 + C_3 = 0$, en notant C_1, C_2, C_3 les colonnes de J. Les vecteurs $(1, 1, 0)$ et $(1, 0, 1)$ forment donc une base de $\mathrm{Ker}(v)$, qu'on peut aussi caractériser comme le plan d'équation $x - y - z = 0$. $\mathrm{Im}(v)$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(1, 2, -1)$ (il suffit de considérer n'importe quelle colonne de J).

c) Il s'agit de faire comme à la question **3.b** et de commencer par fixer un vecteur $\mathbf{k} \notin \mathrm{Ker}(v)$. Choisissons simplement $\mathbf{k} = (1, 0, 0)$ qui convient puisque $\mathbf{i} = v(\mathbf{k}) = (-1, -2, 1)$ (première colonne de J). On complète alors simplement avec (par exemple) $\mathbf{j} = (1, 1, 0)$, qui est bien dans $\mathrm{Ker}(v)$ et qui non colinéaire à $\mathbf{i}$. D'après la question **3.b** (mais on pourrait le vérifier aussi directement ici), la famille $\mathcal{B} = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ est une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle v est représentée par la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Dans la suite, P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à $\mathcal{B}$. On a donc (avec les choix effectués ici) :

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5. **a)** Soient $M = I + mJ$ et $M' = I + m'J$ deux matrices de Δ, avec $m, m' \in \mathbb{R}$. On a $MM' = I^2 + Im'J + mJI + mJm'J = I + m'J + mJ + mm'J^2 = I + (m + m')J$. On a donc bien $MM' \in \Delta$.

b) Soit $M = I + mJ$, avec $m \in \mathbb{R}$ et posons $M' = I - mJ$. D'après la question précédente, on a alors $MM' = I + (m - m)J = I$, de sorte que M est inversible d'inverse $M' \in \Delta$. Cela prouve que $D \subset \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ et que Δ est stable par passage à l'inverse. Comme on a naturellement $I = I + 0 \times J \in \Delta$, on a bien prouvé que Δ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$.

L'isomorphisme avec $(\mathbb{R}, +)$ s'obtient en définissant $\varphi : \mathbb{R} \to \Delta$ par $\varphi(m) = I + mJ$ pour tout $m \in \mathbb{R}$. La question précédente montre que $\varphi(m + m') = \varphi(m)\varphi(m')$ pour tout $m, m' \in \mathbb{R}$: φ est donc un morphisme de groupe. Il est surjectif par définition de Δ. Il est injectif car $\varphi(m) = I$ signifie $I + mJ = I$ qui implique clairement $m = 0$: cela prouve que $\ker(\varphi) = \{0\}$.

c) L'ensemble Δ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ puisqu'il ne contient même pas la matrice nulle (elle n'est pas inversible !)

6. **a)** Soit $A = I + aJ$, avec $a \in \mathbb{R}$. Alors A est solution de (1) si et seulement si $A^2 = I + 2aJ = I + mJ$ et donc si et seulement si $a = \dfrac{m}{2}$. L'ensemble des solutions de (1) appartenant à Δ est donc réduit à $\left\{I + \dfrac{m}{2}J\right\}$.

b) D'après la question **4.c** et les formules de changement de base pour la représentation matricielle des endomorphismes, on a la relation de similitude

$$P^{-1}JP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit donc

$$P^{-1}MP = P^{-1}(I + mJ)P = P^{-1}IP + P^{-1}mJP = I + mP^{-1}JP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Posons $Y = P^{-1}XP$ dans l'équation $X^2 = M$, ce qui est équivalent à $X = PYP^{-1}$. On a alors :

$$X^2 = M \Leftrightarrow PYP^{-1}PYP^{-1} = M \Leftrightarrow PYIYP^{-1} = M \Leftrightarrow Y^2 = P^{-1}MP \Leftrightarrow Y^2 = N$$

d) On fixe $Y = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ solution de (2).

On a alors $YN = YY^2 = Y^3 = Y^2Y = NY$. Un calcul matriciel donne cependant

$$YN = \begin{pmatrix} a & b & ma+c \\ d & e & md+f \\ g & h & mg+i \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad NY = \begin{pmatrix} a+mg & b+mh & c+mi \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

Par identification du premier coefficient, on a $a = a + mg$ et donc $g = 0$ puisque $m \neq 0$. On prouve de même $d = h = 0$ et $a = i$ en exploitant trois autres identifications. La matrice Y est donc triangulaire supérieure et $i = a$.

e) Poursuivons l'analyse entamée à la question précédente. On peut écrire $Y = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

On a alors :

$$Y^2 = \begin{pmatrix} a^2 & (a+e)b & 2ac+bf \\ 0 & e^2 & (a+e)f \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On peut commencer par en déduire que $a = \pm 1$. Remarquons que $-Y$ est aussi solution, et plaçons-nous dans le cas $a = 1$. Puisque $e^2 = 1$, deux sous-cas se présentent alors :

- Si $e = 1$, on a alors $b = f = 0$ et $2c = m$. On a alors $Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Il s'agit du cas correspondant à l'unique solution de (1) qui appartient à Δ, lorsqu'on revient à $X = PYP^{-1}$.
- Si $e = -1$, alors on a aucune contrainte sur b et f si ce n'est qu'on doit avoir $2c+bf = m$. Dans ce cas, Y est de la forme

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & b & (m-bf)/2 \\ 0 & -1 & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

L'analyse est terminée et on vérifie facilement en synthèse que les formes de matrices obtenue ci-dessus sont solutions de (2), ainsi que leurs opposés. On obtient ainsi une infinité de solutions pour (2). Cet ensemble de solution est constitué de $\pm \begin{pmatrix} 1 & 0 & m/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et de toutes les matrices $\pm \begin{pmatrix} 1 & b & (m-bf)/2 \\ 0 & -1 & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, avec $b, f \in \mathbb{R}$ quelconques.

f) En notant $\mathcal{S}_1$ l'ensemble des solutions de (2), et $\mathcal{S}_2$ l'ensemble des solutions de (2), on a simplement $\mathcal{S}_1 = \{PYP^{-1}, Y \in \mathcal{S}_2\}$.

Problème 2. Analyse

À venir ...