# Continuité des fonctions entre EVN, dimension finie

Lundi 22 septembre 2025

# Table des matières

# Table des matières

# 1. Limite d'une fonction

# 1.1. Limite d'une fonction en un point.

# 1.1. Limite d'une fonction en un point.

## Definition 1

Soit $A \subset E$, $f : A \to F$ et $a \in \overline{A}$. On dit que la fonction $f$ *admet la limite* $\ell \in F$ en $a$ (ou *tend vers* $\ell$) lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists \eta > 0\,,\ \forall x \in A\,,\ \ \|x - a\|_E \leqslant \eta \Longrightarrow \left\|f(x) - \ell\right\|_F \leqslant \varepsilon.$$

## Remarque :

On a alors nécessairement $\ell \in \overline{f(A)}$.

# 1.1. Limite d'une fonction en un point.

## Proposition 1

Si $f$ admet une limite en $a$, cette limite est unique.

## Remarque :

Notation $\ell = \lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x)$, $\ell = \lim\limits_{a} f$ ou $f(x) \underset{x \longrightarrow a}{\longrightarrow} \ell$.

# 1.1. Limite d'une fonction en un point.

**Remarque :**

Extensions de la notion de limite pour $f : A \to F$

- limite de $f(x)$ lorsque $\|x\|$ tend vers $+\infty$
- limite de $f(x)$ quand $x$ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ lorsque $A \subset \mathbb{R}$
- limite infinie en $a$ adhérent à $A$ pour $f$ à valeurs dans $\mathbb{R}$

# 1.2. Caractérisation séquentielle.

# 1.2. Caractérisation séquentielle.



## Proposition 2

Soit $f$ une application de $A \subset E$ dans $F$, $a \in E$ un point adhérent à $A$ et $\ell \in F$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $f$ admet la limite $\ell$ en $a$.

(ii) Pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $A$ convergeant vers $a$, la suite $\big(f(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell$.

# 1.2. Caractérisation séquentielle.

**Exercice 1**

Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $f$ admet une limite finie en $a$.

(ii) Pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $A$ convergeant vers $a$, la suite $\big(f(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

## 1.3. Operations sur les limites.

# 1.3. Operations sur les limites.

**Proposition 3**

Soit $f, g : A \to F$ et $a \in \overline{A}$. On suppose $\lim_a f = b$ et $\lim_a g = c$. Alors

- Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, $f(x) + \lambda g(x) \to b + \lambda c$ en $a$.
- Cas $F = \mathbb{K}$ : $f(x)g(x) \to bc$ en $a$. Si de plus $b \neq 0$, alors $f \neq 0$ au voisinage de $a$ et $\dfrac{1}{f(x)} \to \dfrac{1}{b}$ en $a$.

**Remarque :**

Que dire de l'ensemble des fonctions définies sur $A$ et admettant une limite en $a \in \overline{A}$ ?

# 1.3. Operations sur les limites.



**Proposition 4**

Soient $f : A \to F$ et $g : B \to G$ avec $\mathrm{Im}(f) \subset B$, soient $a \in \overline{A}, b \in \overline{B}$.
Si $\lim_a f = b$ et $\lim_b f = c$, alors $\lim_a (g \circ f) = c$.

# Table des matières

# 2. Continuité

# 2.1. Definition

# 2.1. Definition

**Definition 2**

Soit $A \subset E$, $f : A \to F$, et $a \in A$. On dit que $f$ est *continue* en $a$ lorsque $f(x) \to f(a)$ lorsque $x \to a$.

**Remarques :**

- En fait la limite est nécessairement $f(a)$ !
- La caractérisation séquentielle s'applique.

# 2.1. Definition



**Definition 3**

Soit $A$ une partie de $E$, et $f : A \to F$. On dit que $f$ est *continue* sur $A$ lorsque $f$ est continue en tout point de $A$.

**Remarque :**

$f$ continue sur $B \subset A$ lorsque $f_{|_B}$ continue en tout point de $B$.

*(pourquoi $f_{|_B}$ et pas simplement $f$ ?)*

**Exemple :**

L'application *norme* $x \mapsto \|x\|_E$ est continue sur $E$.

# 2.2. Opérations sur les fonctions continues

# 2.2. Opérations sur les fonctions continues



**Proposition 5**

Soient $f, g : A \to F$ et $\lambda : A \to \mathbb{K}$ continues, alors l'application $x \mapsto f(x) + \lambda(x)g(x)$ est continue.

**Corollaire 1**

L'ensemble $\mathcal{C}(A, F)$ des fonctions continues sur $A$ et à valeurs dans $F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(A, F)$.

## 2.3. Continuité et densité

# 2.3. Continuité et densité

**Proposition 6**

Soient $f, g : E \to F$ deux applications continues qui coïncident sur une partie $A$ dense dans $E$. Alors $f$ et $g$ coincident sur $E$.

**Remarque :**

Cas $f, g : B \to F$ avec $B \subset E$ ?

**Exercice 2**

Déterminer toutes les fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$.

# 2.4. Caractérisation globale

# 2.4. Caractérisation globale



**Remarque :**

Ici $f : E \to F$, mais on adaptera à $f : A \to F$ avec $A \subset E$.

**Proposition 7**

Soit $f : E \to F$. Les trois assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $f$ est continue sur $E$.

(ii) Pour tout ouvert $U$ de $F$, $f^{-1}(U)$ est un ouvert.

(iii) pour touf fermé $V$ de $F$, $f^{-1}(V)$ est un fermé.

# 2.4. Caractérisation globale

## Corollaire 2

Soit $f$ une application continue de $E$ dans $\mathbb{R}$. Alors :

- L'ensemble $\left\{x \in E \,/\, f(x) > 0\right\}$ est un ouvert de $E$.
- L'ensemble $\left\{x \in E \,/\, f(x) \geqslant 0\right\}$ est un fermé de $E$.
- L'ensemble $\left\{x \in E \,/\, f(x) = 0\right\}$ est un fermé de $E$.

## Exercice 3

Montrer (plus simplement qu'au chapitre précédent) que dans un espace vectoriel normé :

- Les boules ouvertes sont ouvertes
- Les boules fermées et les sphères sont fermées

# 2.5. Continuité uniforme

# 2.5. Continuité uniforme



## Definition 4

On dit que $f : A \to F$ est *uniformément continue* sur $A$ lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \mu > 0,\ \forall (x, y) \in A^2,\ \|x - y\|_E \leqslant \mu \Rightarrow \|f(x) - f(y)\|_F \leqslant \varepsilon$$

## Remarques :

- Différence avec la continuité en tout point ?
- Module d'uniforme continuité associé à $\varepsilon$.

# 2.5. Continuité uniforme

**Proposition 8**

Si $f : A \to F$ est uniformément continue sur $A$, alors $f$ est continue sur $A$.

**Remarque :**

Réciproque fausse. Contre-exemple ?

## 2.6. Applications lipschitziennes.

# 2.6. Applications lipschitziennes.



**Definition 5**

On dit qu'une fonction $f : A \to F$, avec $A \subset E$, est *lipschitzienne* lorsqu'il existe $k \geqslant 0$, tel que :

$$\forall (x, y) \in A^2, \quad \|f(x) - f(y)\|_F \leqslant k\|x - y\|_E.$$

On peut préciser alors que $f$ est $k$-lipschitzienne.

**Remarque :**

$k$ est appelé *module de Lipschitz* pour $f$.

# 2.6. Applications lipschitziennes.



## Proposition 9

$f$ est lipschitzienne **ssi** l'ensemble suivant est majoré :

$$\left\{ \frac{\|f(x) - f(y)\|_F}{\|x - y\|_E}, \; x, y \in E, x \neq y \right\}$$

La borne supérieure $k_0$ de cet ensemble est alors le plus petit module de Lipschitz pour $f$, et l'ensemble de tous les modules est $[k_0, +\infty[$.

# 2.6. Applications lipschitziennes.

**Proposition 10**

Toute fonction $f : A \to F$ lipschitzienne est uniformément continue, et donc continue.

**Exemples :**

Pour des fonctions réelles (vu en MP2I) :

- fonctions affines réelles $x \mapsto ax + b$
- fonction $x \mapsto x^2$
- La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$

# 2.6. Applications lipschitziennes.



**Remarque :**

Deux exemples à connaitre :

**Proposition 11**

**a)** L'application "norme" $x \mapsto \|x\|$ est 1-lipschitzienne.

**b)** Pour une partie $A$ non vide, l'application "distance à $A$" $x \mapsto \mathrm{d}(x, A)$ est 1-lipschitzienne.

## Exercice 4

Soient $A$ et $B$ sont deux fermés disjoints de $(E, \|\cdot\|)$.

**a)** A l'aide des fonctions $d_A : x \mapsto d(x, A)$ et $d_B : x \mapsto d(x, B)$, construire une application continue $f : E \to \mathbb{R}$ telle que $f_{|_A} = 0$ et $f_{|_B} = 1$.

**b)** En déduire qu'il existe deux ouverts $U$ et $V$ disjoints tels que $A \subset U$ et $B \subset V$.

# 2.7. Continuité sur un compact

# 2.7. Continuité sur un compact



**Theoreme 1**

L'image d'un compact de $E$ par une application continue $f : A \to F$ est un compact de $F$.

**Theoreme 2**

**(des bornes atteintes)** Si $f : A \to \mathbb{R}$ est continue et si $K$ est un compact de $E$, alors $f$ est bornée sur $K$ et atteint ses bornes.

# 2.7. Continuité sur un compact



**Exercice 5**

On suppose $E$ de dimension finie et soit $f : E \to \mathbb{R}$ une application continue telle que $\lim\limits_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty$. Montrer que $f$ admet un minimum sur $E$.

*(On utilisera le fait que les boules fermées sont compactes en dimension finie, voir section suivante)*

# 2.7. Continuité sur un compact



**Theoreme 3**

**(de Heine)** Si $f : A \to F$ est continue et si $K$ est un compact de $E$, alors $f$ est uniformément continue sur $K$.

## 2.8. Connexité par arcs et théorème des valeurs intermédiaires

# 2.8. Connexité par arcs et théorème des valeurs intermédiaires



### Definition 6

Soient $a, b \in E$. On appelle *chemin* (ou *arc*) de (ou joignant) $a$ à $b$ toute application $\gamma : [0, 1] \to E$ continue telle que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$. L'ensemble $\gamma([0, 1])$ est appelé le *support* de l'arc.

### Definition 7

On dit qu'une partie $A$ non vide de $E$ est *connexe par arcs* lorsque pour tout $(a, b) \in A$, il existe un chemin $\gamma$ de $a$ à $b$ à support contenu dans $A$ : $\gamma([0, 1]) \subset A$.

# 2.8. Connexité par arcs et théorème des valeurs intermédiaires

**Proposition 12**

Soit $A$ une partie de $E$. La relation binaire $\mathcal{R}$ définie par :

$$a \mathcal{R} b \quad \Leftrightarrow \quad \text{il existe un chemin de } a \text{ à } b \text{ à support contenu dans } A$$

est une relation d'équivalence sur $A$.

**Definition 8**

Les classes d'équivalences pour la relation d'équivalence précédente s'appelle les *composantes connexes par arcs* de $A$.

### Proposition 13

**a)** Toute partie étoilée est connexe par arcs.

**b)** Toute partie convexe est connexe par arcs.

**c)** une partie de $\mathbb{R}$ est connexe par arcs **ssi** c'est un intervalle.

### Remarque :

$A$ étoilée signifie $\exists a \in A,\ \forall b \in A,\ [a, b] \subset A$

# 2.8. Connexité par arcs et théorème des valeurs intermédiaires

**Theoreme 4**

Soit $A \subset E$ non vide et $f : A \to F$ continue. Si $A$ est connexe par arcs, alors $f(A)$ est connexe par arcs.

**Theoreme 5**

**(des valeurs intermédiaires)** Soit $A \subset E$ non vide et connexe par arcs et $f : A \to \mathbb{R}$ continue. Si $f$ prend les valeurs $u$ et $v$, avec $u \leqslant v$, alors

$$\forall s \in [u, v], \quad \exists t \in A, \quad f(t) = s$$

# Table des matières

# 3. Continuité et Linéarité

# 3.1. Critère fondamental

# 3.1. Critère fondamental

**Lemme**

*Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors $u$ est continue sur $E$ **ssi** $u$ est continue en $0$.*

**Proposition 14**

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors $u$ est continue **ssi** il existe $C \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall x \in E, \quad \|u(x)\|_F \leqslant C\|x\|_E$$

**Remarques :**

- Notation : $\mathcal{L}_c(E, F)$ sous-espace des applications linéaires **continues** de $E$ dans $F$.
- Dépend en général des normes considérées !

# 3.1. Critère fondamental

## Exercice 6

Soit $E = \mathcal{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ muni de la norme $N_1 : f \mapsto \displaystyle\int_0^1 \big|f(t)\big|\mathrm{d}t$.

**a)** En considérant la suite $(f_n)_n$ de $E$ définie par $f_n : x \mapsto x^n$, montrer que la forme linéaire $u : f \mapsto f(1)$ n'est pas continue.

**b)** Proposer une norme sur $E$ pour laquelle $u$ devient continue.

## 3.2. Norme subordonnée

## Proposition 15

Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors $u$ est continue **ssi** l'image de la boule unité $B_F(0,1)$ de $E$ par $u$ est bornée.

## Definition 9

Pour $u \in \mathcal{L}_c(E,F)$, on appelle *norme* de $u$ *subordonnée* à $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$ le nombre :

$$|||u||| = \sup_{x \in B(0,1)} \|u(x)\|_F = \sup_{\|x\|_E \leqslant 1} \|u(x)\|_F$$

$|||u|||$ s'appelle aussi *norme d'opérateur* de $u$ (notation $|||u|||_{op}$).

# 3.2. Norme subordonnée



## Exercice 7

Montrer qu'on a également :

$$|||u||| = \sup_{\|x\|_E < 1} \|u(x)\|_F = \sup_{\|x\|_E = 1} \|u(x)\|_F$$

# 3.2. Norme subordonnée



## Proposition 16

L'application $|||\cdot|||$ définit une norme sur $\mathcal{L}_c(E,F)$. On a de plus :

$$\forall u \in \mathcal{L}_c(E,F), \quad \forall x \in E, \quad \|u(x)\|_F \leqslant |||u|||\,\|x\|_E$$

## Remarque :

$|||u|||$ est le plus petit module de Lipschitz de $u$ et :

$$|||u||| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E}$$

# 3.2. Norme subordonnée

## Proposition 17

Si $E, F, G$ sont des e.v.n., et $|||\cdot|||$, $|||\cdot|||'$ et $|||\cdot|||''$ les normes d'opérateurs sur $\mathcal{L}_c(E,F)$, $\mathcal{L}_c(F,G)$ et $\mathcal{L}_c(E,G)$,

$$\forall u \in \mathcal{L}_c(E,F), \quad \forall v \in \mathcal{L}_c(F,G), \quad |||v \circ u|||'' \leqslant |||v|||' \cdot |||u|||$$

## Remarque :

Avec $E = \mathbb{K}^n$ muni d'une norme $\|\cdot\|$, on peut définir $|||\cdot|||$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$. Alors, pour $x \in \mathbb{K}^n$, et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ :

$$\|Ax\| \leqslant |||A|||\,\|x\| \qquad \text{et} \qquad |||AB||| \leqslant |||A|||\;|||B|||$$

# Table des matières

# 4. Espaces vectoriels normés de dimension finie

# 4.1. Équivalence des normes

# 4.1. Équivalence des normes



## Theoreme 6

Si $E$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sur $E$ sont équivalentes.

## Remarque :

Notion de convergence *intrinsèque*.

## Proposition 18

En dimension finie :

**a)** une suite converge **ssi** toutes les suites coordonnées dans une base convergent.

**b)** une fonction admet une limite en un point **ssi** toutes les fonctions coordonnées dans une base admettent une limite en ce point.

# 4.2. Compacité des fermés bornés, cas des sous-espaces

# 4.2. Compacité des fermés bornés, cas des sous-espaces



**Theoreme 7**

**De Bolzano-Weierestrass**
Si $E$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, toute suite bornée de $E$ admet une valeur d'adhérence.

**Remarque :**

Lié à la propriété de la borne supérieure sur $\mathbb{R}$.

# 4.2. Compacité des fermés bornés, cas des sous-espaces

**Proposition 19**

Lorsque $E$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, une partie $A$ de $E$ est compacte **ssi** elle est fermée et bornée.

**Corollaire 3**

une suite bornée de $E$ converge **ssi** elle admet une unique valeur d'adhérence.

**Proposition 20**

Si $F$ est un sous-espace de dimension finie de $E$, alors $F$ est fermé.

# 4.3. Continuité des applications linéaires

# 4.3. Continuité des applications linéaires

**Proposition 21**

Si $E$ est de dimension finie, alors toutes les applications linéaires de $E$ vers $F$ sont continues : $\mathcal{L}_c(E,F) = \mathcal{L}(E,F)$.

**Remarque :**

Généralisation à la multilinéarité.

# 4.3. Continuité des applications linéaires

## Proposition 22

- Si $E$ est euclidien, le produit scalaire $\langle , \rangle$ est continu sur $E^2$
- l'application det est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
- L'application "produit matriciel" $(A, B) \mapsto AB$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$
- Toute fonction polynomiale en plusieurs variables est continue.

## Exercice 8

Montrer que $GL_n(\mathbb{K})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.