Devoir surveillé n° 4 - MPI

Samedi 29 novembre 2025.

Ce devoir surveillé, d'une durée de 4h, est constitué d'un exercice et de deux problèmes tout à fait indépendants issus des concours. On attachera une attention particulière au soin et à la présentation, et à la rigueur de l'argumentation, tout en évitant les lourdeurs inutiles.

Exercice

Q1. Questions de cours

a) Soit f une fonction continue sur le segment $[a, b]$.
Donner, sans démonstration, la limite quand n tend vers l'infini de l'expression :

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right).$$

b) Soit $m \in \mathbb{N}$. Déterminer en fonction de m la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{j=0}^{n-1}\left(\frac{j}{n}\right)^m$.

c) Soit n un entier non nul. Donner, sans démonstration, l'espérance d' une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.

* * * * **

Soient k et n deux éléments de $\mathbb{N}^*$. On dispose de k urnes contenant chacune n boules numérotées de 1 à n.

On tire une boule au hasard de chaque urne et on désigne par X_n la variable aléatoire égale au plus grand des numéros obtenus. On suppose que les tirages sont indépendants les uns des autres.

Q2. Donner l'ensemble J des valeurs prises par X_n.

Q3. Soit $j \in J$. Évaluer $\mathbb{P}(X_n \leqslant j)$ et prouver que l'on a $\mathbb{P}(X_n = j) = \dfrac{j^k - (j-1)^k}{n^k}$.

Q4. Démontrer que l'espérance $\mathbb{E}(X_n)$ de la variable aléatoire X_n peut s'écrire :

$$\mathbb{E}(X_n) = \sum_{j=0}^{n-1}\mathbb{P}(X_n > j)$$

Q5. Calculer $\mathbb{E}(X_n)$ et en donner un équivalent lorsque n tend vers l'infini.

Q6. Lorsque $k = 1$, reconnaître la loi de X_n et vérifier la cohérence du résultat obtenu à la question précédente.

Problème 1 : Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

On considère une particule se déplaçant sur une droite graduée par les entiers relatifs. Sa position à l'instant initial $t = 0$ est $k = 0$. À chaque instant $t \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, elle se déplace aléatoirement de sa position $k \in \mathbb{Z}$ à la position $k+1$ ou $k-1$.
Soit $p \in]0, 1[$. On définit sur un espace probabilisé $(\Omega, \Sigma, \mathrm{P})$ une suite de variables aléatoires indépendantes $(X_t)_{t\in\mathbb{N}\backslash\{0\}}$ et identiquement distribuées dont la loi est définie par :

$$\forall t \in \mathbb{N}\backslash\{0\}, \quad \mathrm{P}(X_t = 1) = p, \quad \text{et :} \quad \mathrm{P}(X_t = -1) = 1-p.$$

Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, on pose : $S_n = \sum_{t=1}^{n} X_t$.
Pour tout $t \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, la variable aléatoire X_t modélise le déplacement de la particule à l'instant t. Si $X_t = 1$, la particule se déplace vers la droite. Si $X_t = -1$, la particule se déplace vers la gauche. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, S_n modélise la position de la particule après n déplacements.
On rappelle la formule de Stirling :

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

I. Un développement en série entière

Q7. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha \notin \mathbb{N}$. Donner sans démonstration un développement en série entière de la fonction réelle $x \mapsto (1+x)^\alpha$ au voisinage de 0 en précisant son rayon de convergence.

Q8. En déduire que pour tout $x \in]-1,1[$:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}x^n.$$

II. Probabilité de retour à l'origine

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}\backslash\{0\}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}, \quad u_n = \mathrm{P}(S_n = 0).$$

Q9. Pour tout $t \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, déterminer la loi de la variable aléatoire $\dfrac{X_t+1}{2}$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, la variable aléatoire $\displaystyle\sum_{t=1}^{n}\frac{X_t+1}{2}$ suit la loi binomiale dont on précisera les paramètres.

Q10. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$:

$$u_n = \begin{cases} \dbinom{n}{n/2}(p(1-p))^{n/2} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Q11. Déterminer la limite de la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}\backslash\{0\}}$ lorsque n tend vers $+\infty$ selon les valeurs de p et interpréter le résultat.

III. Nombre de passages par l'origine

Pour tout $j \in \mathbb{N}$, on note O_{2j} la variable aléatoire égale à 1 si la particule est à l'origine à l'instant $t = 2j$, et 0 sinon. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $T_n = \sum_{j=0}^{n} O_{2j}$. On note $\mathrm{E}(T_n)$ l'espérance de la variable aléatoire T_n.
Dans cette partie, on souhaite déterminer : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{E}(T_n)$.

Q12. Soit $n \in \mathbb{N}$. Que modélise la variable aléatoire T_n ?

Q13. Soit $j \in \mathbb{N}$. Déterminer la loi de la variable aléatoire O_{2j}. En déduire que :

$$\mathrm{E}(T_n) = \sum_{j=0}^{n}\binom{2j}{j}(p(1-p))^j.$$

Q14. On suppose dans cette question que $p \neq \frac{1}{2}$. En utilisant le résultat de la **Q8.**, calculer : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{E}(T_n)$, et interpréter le résultat.

Q15. On suppose dans cette question que $p = \dfrac{1}{2}$. Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{E}(T_n) = \frac{2n+1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}$$

et en déduire : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{E}(T_n)$.

Problème 2 : Étude d'un couple de variables aléatoires

Présentation générale

On considère l'expérience aléatoire suivante.

On dispose d'une pièce de monnaie donnant Pile avec une probabilité $p \in]0,1[$ et Face avec une probabilité $1-p$. On effectue une répétition de lancers de cette pièce. Si le premier Pile a été obtenu au n-ème lancer, on place n boules indiscernables au toucher numérotées de 1 à n dans une urne et on pioche une de ces boules au hasard. On admet l'existence d'un espace probabilisé (Ω, P) modélisant cette expérience aléatoire. On note alors :

- X la variable aléatoire représentant le rang du premier Pile obtenu dans la suite de lancers ;
- N la variable aléatoire représentant le numéro de la boule piochée ensuite dans l'urne.

Prenons un exemple de tirage pour fixer les idées (on note P pour Pile, F pour Face). Si les lancers successifs de la pièce donnent FFFPFF..., alors X vaut 4. On place alors quatre boules numérotées de 1 à 4 dans l'urne (on a alors une chance sur quatre de piocher chacune d'entre elles au tirage qui suit). Le but de l'exercice est de décrire certains aspects des lois de X et N.

I. Quelques résultats préliminaires sur les séries entières

On considère dans cette partie des séries d'une variables réelles.

Q16. Donner le rayon de convergence et l'expression de la somme de la série géométrique $\sum\limits_{n\geqslant 0} x^n$.

Q17. Donner le rayon de convergence et l'expression de la somme de la série dérivée de la précédente série.

Q18. Donner le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction $x \mapsto \ln(1-x)$. On précisera le rayon de convergence de cette série entière.

II. Loi et espérance de X

Q19. Rappeler la loi de X. On précisera l'ensemble des valeurs prises par X (noté $X(\Omega)$) et, pour chaque entier n dans cet ensemble, la valeur de $P(X=n)$.

Q20. Justifier l'existence de l'espérance de X, notée $E(X)$, et calculer celle-ci.

III. Loi de N

Q21. Quel est l'ensemble des valeurs prises par N ? On le notera $N(\Omega)$.

Q22. Donner, pour tout $n \in X(\Omega)$ et $k \in N(\Omega)$, la valeur de la probabilité conditionnelle $P_{[X=n]}(N = k)$.

On distinguera les cas $1 \leqslant k \leqslant n$ et $k > n$.

Q23. Montrer que, pour $k \in N^*$:

$$P(N=k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n} p(1-p)^{n-1}.$$

On ne cherchera pas à calculer la somme de cette série.

Q24. Calculer la valeur de $P(N=1)$.

IV. Étude de l'indépendance de X et N

Q25. Rappeler la définition de l'indépendance de deux variables aléatoires discrètes Y_1 et Y_2 définies sur un espace probabilisé et à valeurs respectivement dans les ensembles E_1 et E_2.

Q26. Montrer que $P(N = 2) > 0$.

Q27. Que vaut $P([X = 1] \cap [N = 2])$?
Les variables aléatoires X et N sont-elles indépendantes ?

V. Espérance de N

Q28. Montrer que, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $P(N = k) \leqslant (1 - p)^{k-1}$.
On pourra remarquer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et $n \geqslant k$:

$$\frac{1}{n}p(1-p)^{n-1} \leqslant p(1-p)^{n-1}$$

Q29. En déduire que N admet une espérance et que :

$$E(N) = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{k}{n} p(1-p)^{n-1}$$

Q30. Justifier la possibilité d'intervertir ci-dessus l'ordre de sommation montrer que l'on a :

$$E(N) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{p}\right).$$

Q31. Montrer que $E(N) \leqslant E(X)$.
Ce résultat était-il prévisible ?