Compléments d'algèbre linéaire et de réduction

Lundi 2 février 2026

Table des matières

Table des matières

1. Décomposition en somme directe et représentation matricielle

Definition 1

Soit $(E_i)_{1\leqslant i\leqslant q}$ une famille de sous-espaces de E telle que $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_q$. Si pour tout $i \in [\![1, q]\!]$, on note p_i le projecteur sur E_i parallèlement à $\displaystyle\bigoplus_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} E_k$, la famille $(p_i)_{1\leqslant i\leqslant q}$ s'appelle *famille des projecteurs associée à la décomposition en somme directe* $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{q} E_i$.

Remarque :

Pour $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{q} x_i$, on a $p_i(x) = x_i$.

Proposition 1

En reprenant les notations précédentes :

- Pour tout $i \in [\![1, q]\!]$, on a $p_i \circ p_i = p_i$.
- Pour tout $i, j \in [\![1, q]\!]$, avec $i \neq j$, on a $p_i \circ p_j = p_j \circ p_i = 0$.
- $\displaystyle\sum_{i=1}^{q} p_i = Id_E$.

Proposition 2

Soient E, F deux espaces vectoriels, et $E_1, \ldots, E_q$ des sous-espaces de E réalisant une décomposition en somme directe $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_q$. Étant donné pour tout $i \in [\![1, q]\!]$ une application linéaire $u_i \in \mathcal{L}(E_i, F)$, il existe un unique $u \in \mathcal{L}(E, F)$ tel que :

$$\forall\, i \in [\![1, q]\!]\,, \quad u_{|_{E_i}} = u_i.$$

Remarque :

Isomorphisme $u \mapsto \left(u_{|_{E_1}}, \ldots, u_{|_{E_q}}\right)$

Exercice 1

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes.

(i) $u^2 = 0 \quad \text{et} \quad \exists v \in \mathcal{L}(E),\ u \circ v + v \circ u = id$

(ii) $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Ker}(u)$

Remarque :

Représentation par blocs de la décomposition de u en $\left(u_{|_{E_1}}, \dots, u_{|_{E_q}}\right)$:

$$\left(\begin{array}{c|c|c} M_1 & \cdots & M_q \end{array} \right),$$

Exercice 2

Plus généralement, interpréter géométriquement le bloc $M_{i,j}$, pour $(i,j) \in [\![1,r]\!] \times [\![1,q]\!]$, d'un découpage d'une matrice M en $r \times q$ blocs. *(pour le découpage "vertical", considérer la famille de projecteurs associés à une décomposition en somme directe)*

Proposition 3

Soit $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_q$, $\mathcal{B}$ une base adaptée à cette décomposition et soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors tous les E_i sont stables par u **ssi** $\underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(u)$ est bloc-diagonale

$$\underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(u) = \begin{pmatrix} \boxed{M_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \boxed{M_q} \end{pmatrix}, \quad \text{avec} \quad M_i \in \mathcal{M}_{n_i}(\mathbb{K})$$

Pour tout $i \in [\![1, q]\!]$, M_i représente l'endomorphisme induit par u sur E_i.

Exemple :

Pour $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, avec $F = \mathrm{vect}(e_1, e_2)$ et $G = \mathrm{vect}(e_3)$, F et G sont stables par u défini par :

$$\begin{cases} u(e_1) = e_1 - e_2 \\ u(e_2) = e_1 + e_2 \\ u(e_3) = 2e_3 \end{cases}, \quad \text{dont la matrice est } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Table des matières

2. Trigonalisation et sous-espaces caractéristiques

2.1. Trigonalisation effective, cas euclidien

2.1. Trigonalisation effective, cas euclidien

Theoreme 1

u est trigonalisable **ssi** χ_u est scindé.

Remarque :

Analogue matriciel : $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ trigonalisable **ssi** χ_M scindé.

Exercice 3

Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ est trigonalisable dans $\mathbb{R}$ mais pas diagonalisable, et déterminer $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ soit triangulaire supérieure.

2.1. Trigonalisation effective, cas euclidien

Theoreme 2

Soit E un espace euclidien non réduit à $\{0\}$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_u est scindé. Alors u est trigonalisable en base orthonormée.

Corollaire 1

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que χ_M est scindé. Alors il existe $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure telle que

$$M = PTP^{-1} = PTP^{\top}$$

Corollaire 2

Théorème spectral !

2.2. Endomorphismes nilpotents, matrices nilpotentes

2.2. Endomorphismes nilpotents, matrices nilpotentes

Definition 2

On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ (*resp.* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) est nilpotent(e) lorsqu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $u^k = 0$ (*resp.* $A^k = 0$).
On appelle alors *indice de nilpotence* le plus petit entier k en question.

Exercice 4

On suppose que u et v commutent et sont nilpotents. Montrer que $u \circ v$ et $u + v$ sont nilpotents.

2.2. Endomorphismes nilpotents, matrices nilpotentes

Proposition 4

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ (*resp.* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$). Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(i) u (*resp.* A) est nilpotent(e).

(ii) u (*resp.* A) est trigonalisable avec pour seule valeur propre 0.

L'indice de nilpotence est alors toujours majoré par n.

Remarques :

- u (*resp.* A) est donc nilpotent(e) **ssi** son polynôme caractéristique est X^n.
- Pousser un peu plus loin la trigonalisation : réduction de Jordan (hors-programme).

2.2. Endomorphismes nilpotents, matrices nilpotentes

Exercice 5

Obtenir une telle trigonalisation en dimension $n \geqslant 2$ dans les deux cas suivant :

a) u est nilpotent d'indice 2.

b) u est nilpotent d'indice n.

Corollaire 3

u est trigonalisable avec pour seule valeur propre λ **ssi** $u - \lambda I_E$ est nilpotent **ssi** $\chi_u = (X - \lambda)^n$.

2.2. Endomorphismes nilpotents, matrices nilpotentes

Exercice 6

Retrouver rapidement une réduction de Jordan de
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Theoreme 3

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors u est trigonalisable **ssi** il admet un polynôme annulateur scindé **ssi** le polynôme minimal est scindé.

2.3. Sous-espaces caractéristiques

2.3. Sous-espaces caractéristiques

Definition 3

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ de polynôme caractéristique scindé $\chi_u = \prod_{i=1}^{q} (X - \lambda_i)^{m_i}$. On appelle *sous-espace caractéristique* associé à la valeur propre λ_i, le sous-espace :

$$F_i = \mathrm{Ker}\big(u - \lambda_i I_E\big)^{m_i},$$

Remarque :

Définition alternative : $F_i = \mathrm{Ker}\big(u - \lambda_i I_E\big)^{r_i}$, avec r_i la multiplicité de λ_i dans le polynôme minimal

2.3. Sous-espaces caractéristiques

Proposition 5

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ de polynôme caractéristique scindé $\chi_u = \prod_{i=1}^{q}(X - \lambda_i)^{m_i}$ et $(F_i)_{1 \leqslant i \leqslant q}$ les sous-espaces caractéristiques. Alors, on a :

$$E = \bigoplus_{i=1}^{q} F_i$$

De plus, pour tout $i \in [\![1, q]\!]$:

- F_i est stable par u et par $u - \lambda_i I_E$;
- $u - \lambda_i I_E$ induit sur F_i un endomorphisme nilpotent ;
- $\dim(F_i) = m_i$.

Theoreme 4

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_u est scindé. Alors il existe une base de E dans laquelle u est représentée par une matrice diagonale par blocs, chaque bloc diagonal étant triangulaire et à termes diagonaux égaux.

Remarque :

Matrice de la forme

$$T = \begin{pmatrix} T_1 & & \\ & \ddots & \\ & & T_q \end{pmatrix}, \qquad \text{avec} \quad T_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & & (*) \\ & \ddots & \\ & & \lambda_i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m_i}(\mathbb{K})$$

Résultat à adapter pour la trigonalisation d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Theoreme 5

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_u est scindé. Alors il existe un unique couple (d, n) d'endomorphismes vérifiant $u = d + n$ et tels que :

- d est diagonalisable
- n est nilpotent
- d et n commutent

Remarque :

Définition géométrique de d et n à partir de la famille $(p_i)_{1 \leqslant i \leqslant q}$ des projecteurs associés aux F_i avec :

$$d = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i p_i$$

Exercice 7

Si $u \in \mathcal{L}(E)$ est de polynôme caractéristique scindé.

a) Montrer que les projecteurs p_i associés à la décomposition de E en somme directe des sous-espaces caractéristiques sont des polynômes en u.

b) En déduire que dans la décomposition de Dunford $u = n + d$, d et n sont des polynômes en u.

Remarque :

Analogue matriciel de la décomposition de Dunford ?

Exercice 8

Quelle est la décomposition de Dunford de la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$?

Exercice 9

Si E est euclidien et χ_u scindé, montrer que les sous-espaces caractéristiques sont orthogonaux deux à deux, et retrouver alors le résultat du théorème 17.