# Réduction des endomorphismes

*Fiche récapitulative n° 2*

## Définitions

- Polynôme caractéristique d'une matrice carrée, d'un endomorphisme (notations $\chi_A$, $\chi_u$).
- Multiplicité d'une valeur propre.
- Diagonalisabilité d'un endomorphisme d'un espace vectoriel $E$ de dimension finie : définition par la représentation par une matrice diagonale (existence d'une base de vecteurs propres).
- Diagonalisabilité d'une matrice carré : définition par la similitude à une matrice diagonale (interprétation en termes d'endomorphisme).
- Trigonalisabilité d'un endomorphisme d'un espace vectoriel $E$ de dimension finie : définition par la représentation par une matrice triangulaire (interprétation géométrique).
- Trigonalisabilité d'une matrice carrée : définition par la similitude à une matrice triangulaire (interprétation en termes d'endomorphisme).
- Pour $u$ dans $\mathcal{L}(E)$, morphisme d'algèbres $P \mapsto P(u)$ de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathcal{L}(E)$.
- Idéal annulateur (noyau du morphisme $P \mapsto P(u)$).
- Sous-algèbre commutative $\mathbb{K}[u]$ de $\mathcal{L}(E)$ (image du morphisme $P \mapsto P(u)$).
- Polynôme minimal d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie.
- Polynôme minimal d'un endomorphisme induit.

## Résultats et propriétés

- Coefficients du polynôme caractéristique de degrés 0 et $n-1$.
- Les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique.
- Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.
- Polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire.
- Polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit.
- La dimension du sous-espace propre associé à $\lambda$ est majorée par la multiplicité de $\lambda$.
- Diagonalisabilité des projecteurs, des symétries.
- Pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable, il faut et il suffit que la somme de ses sous-espaces propres soit égale à $E$.
- Caractérisation de la diagonalisabilité par la somme des dimensions des sous-espaces propres.
- Pour qu'un endomorphisme $u$ soit diagonalisable, il faut et il suffit que $\chi_u$ soit scindé et que, pour toute valeur propre de $u$, la dimension de l'espace propre associé soit égale à sa multiplicité.
- Cas où $\chi_u$ est scindé à racines simples.
- Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.
- Expression à l'aide des valeurs propres de la trace et du déterminant d'un endomorphisme trigonalisable, d'une matrice trigonalisable.
- Si $d$ est le degré du polynôme minimal de $u$, alors la famille $(u^k)_{0 \leqslant k \leqslant d-1}$ est une base de $\mathbb{K}[u]$.
- Si $u(x) = \lambda x$, alors $P(u)(x) = P(\lambda)x$.
- Les racines de $\pi_u$ dans $\mathbb{K}$ sont les valeurs propres de $u$.
- Si $P$ annule $u$, toute valeur propre de $u$ est racine de $P$.
- Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement s'il annule un polynôme simplement scindé, ou encore si et seulement si son polynôme minimal est simplement scindé ; traduction matricielle.
- Polynôme minimal d'un endomorphisme induit.
- Diagonalisabilité d'un endomorphisme induit par un endomorphisme diagonalisable.
- Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement s'il annule un polynôme scindé, ou encore si et seulement si son polynôme minimal est scindé ; traduction matricielle.
- Théorème de Cayley-Hamilton.