Suites et séries de fonctions

Fiche récapitulative n^o 5

Définitions

- Sommes partielles, convergence, divergence d'une série d'un evn de dimension finie.
- Somme et reste d'une série convergente.
- Divergence grossière.
- Série absolument convergente.
- Convergence simple d'une suite de fonctions
- Convergence uniforme d'une suite de fonctions, interprétation en terme de norme.
- Convergence simple d'une série de fonctions.
- Convergence uniforme d'une série de fonctions.
- Convergence normale d'une série de fonctions.

Résultats et propriétés

- Linéarité de la somme d'une série numérique ou vectorielle.
- Le terme général d'une série convergente tend vers 0.
- La convergence absolue implique la convergence en dimension finie.
- Règle de d'Alembert.
- Sommation des relations de comparaison : domination, négligeabilité, équivalence, dans les cas convergent et divergent.
- Lemme de Cesàro.
- La convergence uniforme entraîne la convergence simple.
- Convergence uniforme et continuité en un point.
- Limite uniforme de fonction continues.
- Affaiblissement de l'hypothèse de convergence uniforme à une vérification locale (typiquement sur tout segment).
- Intégration d'une limite uniforme sur un segment.
- Dérivation de la limite d'une suite (u_n) de fonctions dérivables dont la suite (u_n') converge uniformément.
- Extension aux suites de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$.
- Caractérisation de la convergence uniforme d'une série de fonctions par la convergence uniforme des restes vers 0.
- La convergence normale implique la convergence uniforme.
- La convergence normale implique la convergence absolue en tout point.
- Adaptation des résultats associées la convergence uniforme au cas des séries de fonctions (continuité, intégration, dérivation).
- Approximation uniforme d'une fonction continue par morceaux sur un segment par des fonctions en escalier.
- Théorème de Weierstrass (Démo NE).