Devoir à la maison n° 1

À rendre le lundi 15 septembre 2025

Ce premier devoir maison est (partiellement) commun aux groupes MPI et MPI*. Il est constitué de deux petits problèmes et de deux exercices supplémentaires pour les étudiants MPI*.

I. Problème : Supplémentaire commun à deux sous-espaces

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. On se donne A et B deux sous-espaces vectoriels de E et on cherche à prouver l'existence d'un sous-espace vectoriel C, tel que :

$$E = A \oplus C = B \oplus C.$$

1. Montrer que si C existe, on a nécessairement $\dim(A) = \dim(B)$.

Dans la suite de cette étude, on suppose $\dim(A) = \dim(B)$ et on va montrer qu'un tel sous-espace vectoriel C existe.

2. Résoudre le problème lorsque $A = B$.

Dans toute la suite, on suppose $A \neq B$.

3. On étudie pour commencer le cas où A et B sont de dimension $n-1$ (ce sont des *hyperplans*).

a) Justifier l'existence de vecteurs $u \in A$ et $v \in B$ tels que $u \notin B$ et $v \notin A$.

b) Montrer que le vecteur $w = u + v$ n'est pas dans $A \cup B$.

c) Vérifier que $C = \mathrm{vect}(w)$ est solution du problème posé.

4. On revient au cas général, où on suppose seulement $\dim(A) = \dim(B)$ et $A \neq B$.

a) Justifier l'existence d'un sous-espace vectoriel $A' \neq \{0\}$, tel que $(A \cap B) \oplus A' = A$.
De manière symétrique, on introduit B', tel que $(A \cap B) \oplus B' = B$.

b) Montrer que $A' \cap B' = \{0\}$ et que $\dim(A') = \dim(B') \geqslant 1$.
Dans la suite, on pose $p = \dim(A') = \dim(B')$. On considère $(e_1, \ldots, e_p)$ et $(f_1, \ldots, f_p)$ des bases de A' et B' respectivement.

c) Montrer que la famille $(g_1, \ldots, g_p)$, définie par $g_i = e_i + f_i$ pour $i \in [\![1, p]\!]$, est libre.
Quelle est la dimension de $G = \mathrm{vect}(g_1, \ldots, g_p)$?

d) Montrer que $A \cap G = B \cap G = \{0\}$ et que $A + B = A \oplus G = B \oplus G$.

e) Soit H un supplémentaire de $A + B$. Montrer que la somme $G + H$ est directe et que $C = G \oplus H$ est un supplémentaire commun à A et à B.

II. Problème : Pseudo-inverse d'une matrice

Dans ce problème $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, n un entier strictement positif, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices carré à n lignes et n colonnes, et $GL_n(\mathbb{K})$ le groupe des matrices inversibles.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Une matrice $A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est appelée un *pseudo-inverse* de A lorsque les trois propriétés suivantes sont satisfaites :

$$(1)\ \ AA' = A'A\,; \qquad (2)\ \ A = AA'A\,; \qquad (3)\ \ A' = A'AA'.$$

On note a l'endomorphisme canoniquement associé à A, c'est-à-dire l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ dont A est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

1. Montrer que l'existence d'un pseudo-inverse de A implique que $\mathrm{rg}(a) = \mathrm{rg}(a^2)$.

2. Réciproquement, on suppose que $\mathrm{rg}(a) = \mathrm{rg}(a^2)$. On note r cet entier.

a) Montrer que l'image et le noyau de a sont supplémentaires : $\mathrm{Im}(a) \oplus \mathrm{Ker}(a) = \mathbb{K}^n$.

b) En déduire qu'il existe $B \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{K})$ et $W \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que $A = W \begin{pmatrix} B & (0) \\ (0) & (0) \end{pmatrix} W^{-1}$.

c) Montrer enfin que A admet au moins un pseudo-inverse.

3. Considérons maintenant un pseudo-inverse A' quelconque de A et notons a' l'endomorphisme canoniquement associé.

a) Montrer que $\mathrm{Ker}(a)$ et $\mathrm{Im}(a)$ sont stables par a'

b) En déduire qu'il existe $D \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$ telle que $A' = W \begin{pmatrix} D & (0) \\ (0) & (0) \end{pmatrix} W^{-1}$.

c) Montrer que aa' est un projecteur dont on précisera le noyau et l'image en fonction de a, et préciser ce que vaut $W^{-1}AA'W$.

d) En déduire que A admet au plus un pseudo-inverse.

Exercice 1. (MPI*)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$, $\mathcal{B}$ une base de E, et soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Pour $(x_1, \dots, x_n) \in E$, on pose :

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_{i-1}, u(x_i), x_{i+1}, \dots, x_n)$$

Montrer que f est n-linéaire alternée, puis que $f = \mathrm{tr}(u) \det_{\mathcal{B}}$.

Exercice 2. (MPI*)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que f est un projecteur si, et seulement si, $\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(f - Id) = n$.

Un corrigé

I. Problème : Supplémentaire commun à deux sous-espaces

1. Si C existe, on a $n = \dim(E) = \dim(A \oplus C) = \dim(B \oplus C)$. Les deux sommes étant directes, cette égalité se réécrit $\dim(A) + \dim(C) = \dim(B) + \dim(C)$ d'où nécessairement $\dim(A) = \dim(B)$. pace vectoriel C existe.

2. Si $A = B$, il suffit d'invoquer l'existence d'un supplémentaire de A (car E est de dimension finie), qui sera bien sûr aussi un supplémentaire de B.

3. On étudie pour commencer le cas où A et B sont de dimension $n-1$ (ce sont des *hyperplans*).

a) Si l'un des deux sous-espaces A et B était contenu dans l'autre, on aurait $A = B$ à cause de l'égalité des dimensions. C'est exclu par hypothèse. Ainsi on peut trouver à la fois $u \in A$ avec $u \notin B$ et $v \in B$ avec $v \notin A$.

b) Il s'agit de montrer que w n'est ni dans A, ni dans B. Par l'absurde, si $w \in A$, alors $v = w - u \in A$ car $u \in A$. De même, si $w \in B$, alors $u = w - v \in B$ car $v \in B$. On obtient dans les deux cas une contradiction.

c) Soit $x \in A \cap C$. De $x \in C$ on déduit l'existence de $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $x = \lambda w$. Si $\lambda \neq 0$, on déduit de $x \in A$ que $w = \dfrac{1}{\lambda} x \in A$, contrairement au résultat de la question **3.b)**. Ainsi, $\lambda = 0$ et $x = 0$. On a donc montré que la somme $A + C$ est directe. On a alors $\dim(A \oplus C) = \dim A + \dim C = n - 1 + 1 = \dim(E)$, d'où $A \oplus C = E$.

Par symétrie des rôles joués par A et B, on a aussi $B \oplus C = E$, et $C = \mathrm{vect}(w)$ répond donc bien au problème posé.

4. On revient au cas général, où on suppose seulement $\dim(A) = \dim(B)$ et $A \neq B$.

a) $A \cap B$ est un sous-espace vectoriel de A, qui est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle. L'inclusion est même stricte : l'égalité $A \cap B = A$, équivalente à l'inclusion $A \subset B$, impliquerait en effet $A = B$ en vertu de l'égalité des dimensions, ce qui est exclu par hypothèse. $A \cap B$ admet donc un supplémentaire dans A, non réduit à $\{0\}$.

b) Soit $x \in A' \cap B'$. Puisque $A' \subset A$ et $B' \subset B$, on a également $x \in A \cap B$. On a donc $x \in (A \cap B) \cap A'$, ce qui prouve $x = 0$ puisque la somme $(A \cap B) + A'$ est directe.
En terme de dimension, les sommes étant directes on a :

$$\dim A = \dim \big(A' \oplus (A \cap B)\big) = \dim A' + \dim(A \cap B),$$
$$\dim B = \dim \big(B' \oplus (A \cap B)\big) = \dim B' + \dim(A \cap B).$$

L'égalité $\dim A = \dim B$ entraine donc $\dim A' = \dim B'$, avec bien sûr $p = \dim A' \geqslant 1$ puisque $A' \neq \{0\}$.

c) Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i g_i = 0$. Cette égalité se réécrit, par réarrangement des termes :

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i = 0.$$

Il s'agit de la décomposition de 0 sur la somme directe $A' \oplus B'$. Chaque terme est donc nul : $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i = 0$, d'où l'on tire $\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0$, car la famille $(e_1, \ldots e_p)$ est libre.

On a montré ainsi que la famille $(g_1, \ldots, g_p)$ est libre. Elle est donc une base du sous-espace $G = \mathrm{vect}(g_1, \ldots, g_p)$ qu'elle engendre : $\dim(G) = p$.

d) Soit $x \in A \cap G$. Écrivons en particulier

$$x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i g_i = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i = u + v,$$

avec $u \in A'$ et $v \in B'$. On a alors $v = x - u \in A$ car $x \in A$ et $u \in A' \subset A$. Mais on a aussi $v \in B' \subset B$. Ainsi, $v \in (A \cap B) \cap B' = \{0\}$ puisque la somme $A \cap B + B'$ est directe. D'où $v = \sum_{i=1} \lambda_i f_i = 0$, ce qui implique $\lambda_1 = \ldots = \lambda_p = 0$, et enfin $x = 0$.

La somme $A + G$ est donc directe. On termine en raisonnant sur les dimensions :

$$\dim(A \oplus G) = \dim A + p = \dim A + \dim B - \dim(A \cap B) = \dim(A + B),$$

l'avant dernière égalité résultant de ce que $B = B' \oplus (A \cap B)$, et la dernière de la formule de Grassman.

Puisque $G \subset A + B$, on a $A \oplus G \subset A + B$. Mais l'égalité des dimensions que l'on vient d'établir prouve $A \oplus G = A + B$.

A et B jouant un rôle totalement symétrique dans la preuve que l'on vient d'achever, on a également $B \oplus G = A + B$.

e) $A + B$ est un sous-espace vectoriel E qui est de dimension finie, et admet donc bien un supplémentaire H. $A + B$ et H sont donc en particulier en somme directe, et donc G et H également puisque $G \subset A + B$. On a ainsi :

$$E = (A + B) \oplus H = (A \oplus G) \oplus H = A \oplus (G \oplus H)$$

On obtient de même :

$$E = (B \oplus G) \oplus H = B \oplus (G \oplus H)$$

Le sous-espace $C = G \oplus H$ est donc bien un supplémentaire commun à A et B.

(On a utilisé le fait que la somme directe est "associative", ce qui se vérifie facilement)

II. Problème : Pseudo-inverse d'une matrice

1. Soit $A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ un pseudo-inverse de A. Commençons par remarquer qu'en combinant les propriétés (1) et (2), on a l'égalité $A = A^2 A'$.

En notant a' l'endomorphisme canoniquement associé à A', cette égalité traduit que $a = a^2 a'$. En particulier $\mathrm{Im}(a) = \mathrm{Im}(a^2 a') \subset \mathrm{Im}(a^2)$.

L'inclusion réciproque $\mathrm{Im}(a^2) \subset \mathrm{Im}(a)$ étant toujours vraie, il y a égalité des images, et en particulier de leur dimension : $\mathrm{rg}(a) = \mathrm{rg}(a^2)$.

2. Réciproquement, on suppose maintenant que $\mathrm{rg}(a) = \mathrm{rg}(a^2)$. On note r cet entier.

a) Le théorème du rang imposant $\dim\big(\mathrm{Ker}(a)\big) + \dim\big(\mathrm{Im}(a)\big) = \dim(\mathbb{K}^n)$, il suffit de montrer que la somme $\mathrm{Im}(a) + \mathrm{Ker}(a)$ est directe, ou bien qu'elle est égale à E. Détaillons les deux possibilités.

- Le théorème du rang donne $\dim\big(\mathrm{Ker}(a)\big) + \mathrm{rg}(a) = n = \dim\big(\mathrm{Ker}(a^2)\big) + \mathrm{rg}(a^2)$ et on en déduit $\dim\big(\mathrm{Ker}(a)\big) = \dim\big(\mathrm{Ker}(a^2)\big)$. Puisque l'inclusion $\mathrm{Ker}(a) \subset \mathrm{Ker}(a^2)$ est toujours vraie (facile), l'égalité des dimensions permet de conclure quant à l'égalité des noyaux.

  Soit maintenant $y \in \mathrm{Im}(a) \cap \mathrm{Ker}(a)$. D'une part il existe $x \in \mathbb{K}^n$ tel que $a(x) = y$. D'autre part $a(y) = a^2(x) = 0$. On a donc $x \in \mathrm{Ker}(a^2) = \mathrm{Ker}(a)$, ce qui par définition signifie $y = a(x) = 0$. Conclusion : la somme $\mathrm{Im}(a) + \mathrm{Ker}(a)$ est directe.
- Soit $y \in E$. Comme on a toujours $\mathrm{Im}(a^2) \subset \mathrm{Im}(a)$, là encore l'égalité des dimensions entraine l'égalité des images. On a ainsi $a(y) \in \mathrm{Im}(a) = \mathrm{Im}(a^2)$. Il existe donc $x \in \mathbb{K}^n$ tel que $a(y) = a^2(x)$. Cette égalité se réécrit par linéarité $a\big(y - a(x)\big) = 0$, ce qui signifie $y - a(x) \in \mathrm{Ker}(a)$. $y = a(x) + y - a(x)$ est ainsi une décomposition permettant de conclure : $E = \mathrm{Im}(a) + \mathrm{Ker}(a)$.

b) Considérons une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{K}^n$ adaptée à la décomposition $E = \mathrm{Im}(a) \oplus \mathrm{Ker}(a)$. $\mathrm{Im}(a)$ étant stable par a, la matrice de a dans $\mathcal{B}$ s'écrit bien $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. B est ici la matrice de l'endomorphisme induit par a sur $\mathrm{Im}(a)$, qui réalise un isomorphisme d'après un théorème fondamental ($\mathrm{Im}(a)$ est un supplémentaire du noyau de a). B est donc bien une matrice inversible d'ordre r, dimension de $\mathrm{Im}(a)$. En notant $W \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$, on a bien la relation de similitude demandée.

c) On vérifie aisément qu'en posant $A' = W \begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} W^{-1}$, les trois conditions (1), (2) et (3) sont vérifiées. L'idée pour en arriver là est la suivante : B étant inversible, il est évident qu'elle admet B^{-1} comme pseudo-inverse. En appliquant la formule du produit par blocs, on voit alors facilement que $\begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est un pseudo-inverse de $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Cela veut exactement dire que A' est un pseudo-inverse de A, en "regardant" A et A' dans une autre base (la base $\mathcal{B}$ évoquée précédemment).

3. Considérons maintenant un pseudo-inverse A' quelconque de A et notons a' l'endomorphisme canoniquement associé.

a) Il s'agit d'un résultat classique compte-tenu du fait que a et a' commutent.
Si $x \in \mathrm{Ker}(a)$, $a(x) = 0$, donc $a\big(a'(x)\big) = (aa')(x) = (a'a)(x) = a'\big(a(x)\big) = a'(0) = 0$, *i.e.* $a'(x) \in \mathrm{Ker}(a)$. $\mathrm{Ker}(a)$ est donc stable par a'.
Soit maintenant $y \in \mathrm{Im}(a)$. Il existe $x \in \mathbb{K}^n$ tel que $y = a(x)$. On a alors $a'(y) = (a'a)(x) = (aa')(x) = a\big(a'(x)\big)$. $a'(x)$ est donc un antécédent de $a'(y)$ par a, ce qui indique que $a'(x) \in \mathrm{Im}(a)$. $\mathrm{Im}(a)$ est donc stable par a'.

b) Considérons la matrice de a' dans la base $\mathcal{B}$ introduite à la question **2.b**. Cette base étant adaptée à la décomposition $E = \mathrm{Im}(a) \oplus \mathrm{Ker}(a)$, la stabilité de ces deux sous-espace par a' indique que cette matrice peut s'écrire par blocs $\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$, avec $D \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$. On a donc l'égalité $A' = W \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} W^{-1}$.
Il suffit de prouver $C = 0$ pour conclure. Cette matrice de $\mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{K})$ représente l'endomorphisme induit par a' sur $\mathrm{Ker}(a)$. Or si $x \in \mathrm{Ker}(a)$, on a, d'après les relations (1) et (3) : $a'(x) = (a'aa')(x) = (a'^2a)(x) = a'^2(0) = 0$.

c) $p = aa'$ est un endomorphisme qui vérifie $p^2 = (aa')(aa') = (aa'a)a' = aa' = p$ d'après la relation (2). p est donc un projecteur. Montrons qu'il a le même noyau et la même image que a. On a déjà très clairement $\mathrm{Ker}(a) \subset \mathrm{Ker}(a'a) = \mathrm{Ker}(aa')$ et $\mathrm{Im}(aa') \subset \mathrm{Im}(a)$.

D'autre part si $x \in \mathrm{Ker}(aa')$, on a $a(x) = (aa'a)(x) = a\big((aa')(x)\big) = a(0) = 0$. L'égalité $\mathrm{Ker}(aa') = \mathrm{Ker}(a)$ est ainsi prouvée, de même que $\mathrm{Im}(aa') = \mathrm{Im}(a)$ grâce au théorème du rang.

La base $\mathcal{B}$ est donc adaptée à la décomposition $\mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$. Dans cette base, $p = aa'$ est diagonale, et s'écrit ainsi $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. C'est précisément ce que vaut la matrice $W^{-1}AA'W$.

d) En notant B comme dans la question **2.b**, on a la relation $BD = DB = I_r$. D est donc nécessairement la matrice inverse de B. Sous réserve d'existence, un pseudo-inverse A' s'écrit donc comme à la question **3.a**, avec D et W uniquement déterminées par A (il s'agit bien sûr de la même expression que nous avons proposé à la question **2.c**). Le pseudo-inverse est donc unique.

On a montré dans ce problème que A admet un pseudo-inverse si, et seulement si $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^2)$, et que ce pseudo-inverse est alors unique.

Exercice 1. (MPI*)

La n-linéarité résulte immédiatement de la n-linéarité du déterminant et de la linéarité de u. Pour le caractère alterné, fixons $j, k \in [\![1, n]\!]$, avec $j < k$ et considérons $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ tel que $x_j = x_k = x$. Comme la forme n-linéaire $\det_{\mathcal{B}}$ est elle-même alternée, on a :

$$\begin{aligned}
(x_1, \dots, x_n) &= \det_{\mathcal{B}}(\dots, u(x_j), \dots, x_k, \dots) + \det_{\mathcal{B}}(\dots, x_j, \dots, u(x_k), \dots) \\
&= \det_{\mathcal{B}}(\dots, u(x), \dots, x, \dots) + \det_{\mathcal{B}}(\dots, x, \dots, u(x), \dots) \\
&= \det_{\mathcal{B}}(\dots, u(x), \dots, x, \dots) - \det_{\mathcal{B}}(\dots, u(x), \dots, x, \dots) \\
&= 0
\end{aligned}$$

La forme n-linéaire f est donc également alternée.

Rappelons maintenant que l'espace des forme n-linéaires alternées sur E est de dimension 1, de sorte qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f = \lambda \det_{\mathcal{B}}$, et en particulier $f(\mathcal{B}) = \lambda \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = \lambda$. En notant $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, on a alors

$$\lambda = \det_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_{i-1}, u(e_i), e_{i+1}, \dots, x_n) = \mathrm{tr}(u)$$

Exercice 2. (MPI*)

Grâce au théorème du rang, la condition $\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(f - Id) = n$ est équivalente à $\dim(\ker(f)) + \dim(\ker(f - Id)) = n$. Or $\ker(f)$ et $\ker(f - Id)$ sont en somme directe, donc cette condition est encore équivalente à $\ker(f) \oplus \ker(f - Id) = E$, ce qui caractérise le fait que f est un projecteur.