Intégration

Lundi 1er décembre 2025

Table des matières

Table des matières

1. Intégrales généralisées

Definition 1

On dit que $f : I \to \mathbb{K}$ est continue par morceaux lorsque f est continue par morceaux sur tout segment de I.

Exercice 1

Montrer que l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction continue par morceaux sur I est au plus dénombrable.

1. Intégrales généralisées

1.1. intégrale généralisée sur $[a, +\infty[$

1.1. intégrale généralisée sur $[a, +\infty[$

Définition 2

Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{K}$ continue par morceaux. On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ est convergente (en $+\infty$) lorsque $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ admet une limite finie en $+\infty$. Lorsqu'elle existe, Cette limite est encore notée $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$, ou bien $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$.

Remarques :

- Si f continue, F est une primitive de f,
- Si $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ convergente, $G : x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ est bien définie.

1.1. intégrale généralisée sur $[a, +\infty[$

Proposition 1

Pour $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue par morceaux et positive, $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ est convergente **ssi** $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est majorée sur $[a, +\infty[$.

Remarque :

Pour $f \geqslant 0$, on peut écrire $\displaystyle\int_a^{+\infty} f = +\infty$ en cas de divergence.

Proposition 2

Si $0 \leqslant f \leqslant g$ sur $[a, +\infty[$, la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} g$ implique celle de $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$.

Exemples :

- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} \mathrm{d}t$
- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} \mathrm{d}t$

1.2. Intégrabilité sur $[a, +\infty[$

1.2. Intégrabilité sur $[a, +\infty[$

Definition 3

On dit que $f : [a, +\infty[\to \mathbb{K}$ est *intégrable* (en $+\infty$) lorsque :

a) f est continue par morceaux sur $[a, +\infty[$

b) l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f|$ est convergente

Remarques :

- **b)** dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ est *absolument convergente*.
- Revient à montrer que $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f| < +\infty$.

1.2. Intégrabilité sur $[a, +\infty[$

Proposition 3

Si f est intégrable sur $[a, +\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ est convergente et :

$$\left|\int_a^{+\infty} f\right| \leqslant \int_a^{+\infty} |f|$$

Remarque :

Réciproque fausse en général ! Il y a des intégrales *semi-convergente*.

Exercice 2

Montrer que la fonction $f : t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t}$ n'est pas intégrable sur $[0, +\infty[$ mais que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ est néanmoins convergente.

1.3. Théorèmes de comparaison

1.3. Théorèmes de comparaison

Theoreme 1

Soient $f, g : [a, +\infty[\to \mathbb{K}$ continues par morceaux.

a) Si $f(x) = O\big(g(x)\big)$ en $+\infty$, l'intégrabilité de g en $+\infty$ implique celle de f

b) Si $f(x) \sim g(x)$ en $+\infty$, l'intégrabilité de g équivaut à celle de f.

Remarques :

- Cas $f(x) = o\big(g(x)\big)$?
- Pour **a)** : utilisation de la contraposée.

1.4. Intégrale généralisée sur un intervalle quelconque

Définition 4

Pour $a = \inf I \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b = \sup I \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, et $f : I \to \mathbb{K}$ continue par morceaux, on dit que

a) $(I = [a, b[)$: $\displaystyle\int_a^b f$ est convergente (en b) lorsque

$$F : x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t \text{ admet une limite dans } \mathbb{K} \text{ en } b.$$

b) $(I =]a, b])$: $\displaystyle\int_a^b f$ est convergente (en a) lorsque

$$F : x \mapsto \int_x^b f(t)\mathrm{d}t \text{ admet une limite dans } \mathbb{K} \text{ en } a.$$

c) $(I =]a, b[)$: $\displaystyle\int_a^b f$ est convergente lorsqu'il existe $c \in]a, b[$ telles que $\displaystyle\int_a^c f$ et $\displaystyle\int_c^b f$ sont convergentes.

1.4. Intégrale généralisée sur un intervalle quelconque

Remarques :

- Cas **c)**, on note alors :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} \int_x^c f(t)\mathrm{d}t + \lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} \int_c^x f(t)\mathrm{d}t.$$

  On démontre que tout $c \in]a, b[$ convient et donne cette valeur.
- Deux bornes ouvertes : deux études de convergence à faire !
- La *nature* (convergence ou divergence) d'une intégrale généralisée ne dépend que du comportement de f au voisinage des bornes de I.

Proposition 4

(intégrales classiques)

- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ converge **ssi** $\alpha > 1$.
- $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ converge **ssi** $\alpha < 1$.
- $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t$ converge **ssi** $a > 0$.
- $\displaystyle\int_0^{1} \ln(t)\mathrm{d}t$ converge.

Remarque :

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ toujours divergente !

1.5. Propriétés des intégrales généralisées

1.5. Propriétés des intégrales généralisées

Remarques :

- Linéarité, positivité, croissance, relation de Chasles.
- Attention : intégrale nulle d'une fonction positive n'implique pas fonction nulle, sauf si f continue.

1.6. Intégration par parties.

1.6. Intégration par parties.

Proposition 5

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, avec $a < b$ et soient f, g continues et dérivables sur $]a, b[$. Alors si fg admet des limites en a et b, et en notant $[fg]_a^b = \lim_b(fg) - \lim_a(fg)$, les intégrales $\displaystyle\int_a^b f'g$ et $\displaystyle\int_a^b fg'$ sont de même nature, et on a, en cas de convergence :

$$\int_a^b f(t)g'(t)\mathrm{d}t = [fg]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\mathrm{d}t.$$

Remarque :

Et si fg n'a pas de limite en a et/ou en b ?

Exemple :

$$\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

1.7. Changement de variable.

1.7. Changement de variable.

Proposition 6

Soient $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, avec $a < b$ et $\alpha < \beta$, et soit $\varphi :]\alpha, \beta[\to]a, b[$ une bijection strictement croissante de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $f :]a, b[\to \mathbb{K}$ continue par morceaux. Alors les intégrales généralisées $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_\alpha^\beta f\left(\varphi(u)\right)\varphi'(u)\mathrm{d}u$ sont de même nature, et égales en cas de convergence.

Remarques :

- On écrit $t = \varphi(u)$ ou $u = \varphi^{-1}(t)$, et $\mathrm{d}t = \varphi'(u)\mathrm{d}u$.
- Cas φ strictement décroissant : interversion des bornes.

Exemple :

Calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$?

1.8. Intégrales absolument convergentes et fonctions intégrables

1.8. Intégrales absolument convergentes et fonctions intégrables

Definition 5

Soit $f : I \to \mathbb{K}$, $a = \inf I$ et $b = \sup I$.

- Si f est continue par morceaux, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ est absolument convergente (sur I) lorsque $\displaystyle\int_a^b |f|$ est convergente.
- On dit que f est intégrable (sur I) lorsque f est continue par morceaux et d'intégrale absolument convergente sur I.

Remarques :

- On peut préciser l'intégrabilité (ou pas) en a et/ou en b.
- f est intégrable en a (*resp.* b) **ssi** $t \mapsto f(a+t)$ (*resp.* $t \mapsto f(b-t)$) est intégrable en 0.

1.8. Intégrales absolument convergentes et fonctions intégrables

Proposition 7

L'ensemble des fonctions intégrables sur I est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^I$, noté $L^1(I, \mathbb{K})$ ou plus simplement $L^1(I)$.

Proposition 8

Pour tout $f \in L^1(I)$, on a $\left|\int_I f\right| \leqslant \int_I |f|$.

Proposition 9

Si $f \in L^1(I)$ et si f est continue, alors $\int_I |f| = 0$ implique f identiquement nulle.

Remarque :

On peut noter $L_c^1(I, \mathbb{K}) = L^1(I, \mathbb{K}) \cap \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$.

Corollaire 1

l'application $f \mapsto \displaystyle\int_I |f|$ est une norme sur $L_c^1(I, \mathbb{K})$.

Remarque :

Sur $L^1(I, \mathbb{K})$, il s'agit seulement d'une semi-norme.

1.8. Intégrales absolument convergentes et fonctions intégrables

Theoreme 2

(de comparaison) Soit $f, g : I \to \mathbb{K}$ continues par morceaux et a une borne de I Alors :

- si $f = \mathrm{O}(g)$ au voisinage de a, l'intégrabilité de g en a implique celle de f.
- Si $f \sim g$ au voisinage de a, l'intégrabilité de g en a équivaut à celle de f.

Proposition 10

Pour $\alpha \in \mathbb{K}$, l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{|x-a|^\alpha}\mathrm{d}x$ converge **ssi** $\alpha < 1$.

1.9. Fonctions de carré intégrable

Proposition 11

Si $f, g : I \to \mathbb{R}$ sont continues par morceaux et de carré intégrable sur I, alors fg est intégrable sur I.

Proposition 12

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. l'ensemble des fonctions $I \to \mathbb{K}$ continues par morceaux et de carré intégrable sur I est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, noté $\mathcal{L}^2(I, \mathbb{K})$.

1.9. Fonctions de carré intégrable

Remarque :

Notation $\mathcal{L}_c^2(I, \mathbb{R}) = \mathcal{L}^2(I, \mathbb{K}) \cap \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$.

Proposition 13

$\mathcal{L}_c^2(I, \mathbb{R})$ et un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et

$$(f, g) \mapsto \int_I f(t)g(t)\mathrm{d}t$$

y définit un produit scalaire.

Corollaire 2

L'application :

$$\| \cdot \|_2 : f \mapsto \sqrt{\int_I |f(t)|^2 \mathrm{d}t}$$

définit une norme sur $\mathcal{L}_c^2(I)$.

Remarque :

$\| \cdot \|_2$ reste définie sur $\mathcal{L}^2(I, \mathbb{K})$, mais c'est une *semi-norme*.

1.10. Intégration des relations de comparaison

1.10. Intégration des relations de comparaison

Theoreme 3

(d'intégration d'une relation de comparaison) Soient $f : [a, b[\to \mathbb{K}$ et $g : [a, b[\to \mathbb{R}$ continues par morceaux, avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, et g de signe constant au voisinage de a.

a) Si $f = \mathrm{o}(g)$ en b :

- Si g n'est pas intégrable en b, $\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = \mathrm{o}\left(\int_a^x g(t)\mathrm{d}t\right)$.
- Si g est intégrable en b, f aussi et $\displaystyle\int_x^b f(t)\mathrm{d}t = \mathrm{o}\left(\int_x^b g(t)\mathrm{d}t\right)$.

b) Si $f \sim g$ en b, f est intégrable en b **ssi** g aussi et :

- En cas de divergence, $\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t \sim \int_a^x g(t)\mathrm{d}t$.
- En cas de convergence, $\displaystyle\int_x^b f(t)\mathrm{d}t \sim \int_x^b g(t)\mathrm{d}t$.

Remarque :

Dans **a)**, on peut remplacer o par O.

Table des matières

2. Suites, séries, et fonctions définies par une intégrales

2.1. Théorème de la convergence dominée.

2.1. Théorème de la convergence dominée.

Theoreme 4

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues par morceaux sur I telle que :

- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f continue par morceaux ;
- il existe φ intégrable sur I telle que $|f_n| \leqslant \varphi$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Alors les fonctions f_n et f sont intégrables sur I et :

$$\int_I f_n(t)\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_I f(t)\mathrm{d}t.$$

Remarques :

- Souvent, f est la fonction de domination.
- $|f_n| \leqslant \varphi$ à partir d'un certain rang est possible.
- Cas d'une série de fonctions ?

Exercice 3

Écrire un énoncé du *théorème de convergence dominée pour une série de fonctions*

2.2. Théorème d'intégration terme à terme.

2.2. Théorème d'intégration terme à terme.

Theoreme 5

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions **positives** continues par morceaux sur I telles que :

- les f_n sont intégrables sur I ;
- la série $\sum f_n$ converge simplement, et sa somme est continue par morceaux sur I.

Alors :

$$\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t) \mathrm{d}t$$

Remarques :

- Intégrale à valeurs dans $[0, +\infty]$.
- $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ intégrable **ssi** $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t) \mathrm{d}t < +\infty$.

2.2. Théorème d'intégration terme à terme.

Theoreme 6

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues par morceaux sur I telles que :

- Les f_n sont intégrables sur I ;
- La série $\sum f_n$ converge simplement, et sa somme est continue par morceaux sur I ;
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I |f_n(t)| \mathrm{d}t < +\infty.$

Alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est intégrable sur I, et :

$$\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f(t) \right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t) \mathrm{d}t$$

Exercice 4

Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Remarques :

- Théorème d'intégration terme à terme plus pratique que convergence dominée.
- Mais convergence dominée plus fin (situation de semi-convergence par exemple).

Exercice 5

Soient $a, b > 0$ et $f_n : t \mapsto (-1)^n t^{an+b-1}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ sur $[0, 1]$.

a) Vérifier que la série $\sum f_n$ converge simplement sur $]0, 1[$.

b) Quelle est la nature de la série $\sum \int_0^1 |f_n(t)| \mathrm{d}t$?

c) À l'aide du théorème de convergence dominée, montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{an+b} = \int_0^1 \frac{t^{b-1}}{1+t^a} \mathrm{d}t.$$

2.3. Théorème de continuité d'une intégrale à paramètres

Theoreme 7

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé de dimension finie, I un intervalle de $\mathbb{R}$, et soit une fonction $f : A \times I \to \mathbb{K}$ telle que :

- pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur A ;
- pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;
- Il existe une fonction φ intégrable sur I telle que pour tout $x \in A$, $\left|f(x,\cdot)\right| \leqslant \varphi$.

Alors la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\mathrm{d}t$ est définie et continue sur A.

Remarques :

- Hypothèse de domination "locale" : affaiblissement des hypothèses.
- Cas le plus courant : A intervalle de $\mathbb{R}$, hypothèse de domination sur tout segment.

Exercice 6

Montrer que la fonction $\Gamma : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ est bien définie et continue sur $]0, +\infty[$.

2.4. Théorème de dérivabilité d'une intégrale à paramètre

Theoreme 8

Soit I et A deux intervalles de $\mathbb{R}$, et soit une fonction $f : A \times I \to \mathbb{K}$ telle que :

- pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A ;
- pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I ;
- pour tout $x \in A$, $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;
- Il existe une fonction φ positive intégrable sur I telle que pour tout $x \in A$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,.)\right| \leqslant \varphi$;

Alors $g : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A, et pour tout $x \in A$:

$$g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t.$$

Remarques :

- OK pour une hypothèse de domination sur tout segment.
- Généralisation à la classe $\mathcal{C}^k$.

Exercice 7

Montrer que $\Gamma : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ et exprimer $\Gamma^{(k)}$ comme une intégrale à paramètre, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.