Continuité des fonctions entre EVN, dimension finie

Fiche récapitulative n° 4

Définitions

- Limite en un point adhérent à une partie A.
- Extension : limite de $f(x)$ lorsque $\|x\|$ tend vers $+\infty$
- Extension : limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ lorsque A est une partie de $\mathbb{R}$
- Continuité en un point.
- Applications uniformément continues.
- Applications lipschitziennes.
- Notation $\mathcal{L}_c(E, F)$.
- Norme subordonnée (ou d'opérateur) d'une application linéaire continue, notations $|||u|||$, $\|u\|_{\mathrm{op}}$.
- Norme d'opérateur sur un espace de matrices carrés.
- Dans un espace vectoriel normé, chemin (ou arc) joignant deux points.
- Partie connexe par arcs.
- Composantes connexes par arcs.

Résultats et propriétés

- Caractérisation séquentielle de la limite en un point.
- Opérations algébriques sur les limites, limite d'une composée.
- Caractérisation séquentielle de la continuité.
- Opérations algébriques sur les applications continues, composition de deux applications continues.
- Deux applications continues qui coïncident sur une partie dense sont égales.
- Image réciproque d'un ouvert, d'un fermé par une application continue.
- Caractère 1-lipschitzien de l'application $x \mapsto d(x, A)$ où A est une partie non vide de E.
- Image continue d'une partie compacte.
- Théorème de Heine.
- Théorème des bornes atteintes (application numérique continue sur un compact non vide).
- Critère fondamental de continuité d'une application linéaire entre deux espaces normés
- La norme d'opérateur est une norme sur $\mathcal{L}_c(E, F)$.
- Sous-multiplicativité de la norme d'opérateur.
- Relation d'équivalence associée à la connexité par arcs.
- Connexité par arcs des parties convexes, des parties étoilées.
- Les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.
- Image continue d'une partie connexe par arcs.
- Cas particulier des applications à valeurs réelles : théorème des valeurs intermédiaires.
- Équivalence des normes en dimension finie (démo NE)
- Invariance des notions topologiques par rapport au choix d'une norme en dimension finie.
- Topologie naturelle d'un espace normé de dimension finie.
- La convergence d'une suite (ou l'existence de la limite d'une fonction) à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie équivaut à celle de chacune de ses coordonnées dans une base.
- Une partie d'un espace normé de dimension finie est compacte **ssi** elle est fermée et bornée.
- Une suite bornée d'un espace normé de dimension finie converge **ssi** elle a une unique valeur d'adhérence.
- Un sous-espace de dimension finie d'un espace normé est fermé.
- Si E est de dimension finie, $\mathcal{L}(E, F) = \mathcal{L}_c(E, F)$.