11011310113 1111

Généralité:

Solutions d'une équation différentielle linéaire

Exponentielle d'un endomor phisme, d'une

systèmes différentiels linéaires homogènes coefficients constants

Résolution de l'équation avec second

Équations différentielles linéaires

Lundi 8 décembre 2025

Table des matières

Chapitre 12

Révisions MP2

Généralité

Solutions d'une équatio différentielle linéaire

Exponentielle d'un endomoi phisme, d'une matrice

systèmes différentiels linéaires homogènes : coefficients constants

Résolution de l'équation avec second

- Généralités
- 2 Solutions d'une équation différentielle linéaire
- 3 Exponentielle d'un endomorphisme, d'une matrice
- 4 systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants
- 6 Résolution de l'équation avec second membre

Table des matières

Chapitre 12

Généralités

Rappels

Système

Système différenti linéaire

Principe o

Problème de Cauchy Représentatio

d'une équation scalaire linéaire d'ordre n

Solutions d'une équat différentielle linéaire

Exponentielle d'un endomor phisme, d'une

systèmes différentiels linéaires homogènes : coefficients

Généralités

- 2 Solutions d'une équation différentielle linéaire
- 3 Exponentielle d'un endomorphisme, d'une matrice
- 4 systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants
- 5 Résolution de l'équation avec second membre

Généralités

Définition

Definition

Système différentie

linéaire Dringing d

superposition

Problème d Cauchy

Représentation

d'une équation scalaire linéaire d'ordre n

Solutions d'une équation différentielle

Exponentielle d'un endomorphisme, d'une matrice

systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients

1. Généralités

1. Généralités

Chapitre 12

Généralité

Rappels

Système différentie

différentie linéaire

superposition Problème d

Problème de Cauchy

Représentation d'une équation scalaire linéaire

Solutions d'une équatio différentielle

Exponentielle d'un endomor phisme, d'une matrice

systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients

1.1. Rappels

1.1. Rappels

Chapitre 12

Rappels

linéaire

linéaires coefficients

Rappel:

• y' = a(x)y + b(x): équation différentielle linéaire du premier ordre, homogène si b = 0.

$$S_H = \{x \mapsto k e^{A(x)}, k \in \mathbb{K}\}, \quad A \text{ primitive de } a$$

• y'' = a(x)y' + b(x)y + c(x): équation différentielle linéaire du second ordre, homogène si c = 0.

Équation caractéristique $r^2 = ar + b$ si a et b constants

$$S_H = \{x \mapsto k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x), (k_1, k_2) \in \mathbb{K}^2\}$$
 avec:

- Deux solutions $r_1, r_2 \in \mathbb{K}$ distinctes, $f_i : x \mapsto e^{r_i x}$.
- Une racine double $r, f_1: x \mapsto e^{rx}$ et $f_2: x \mapsto x e^{rx}$.
- Cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et deux racines complexes distinctes conjugées $r + i\omega$, $f_1: x \mapsto e^{rx} \cos(\omega x)$ et $f_2: x \mapsto e^{rx} \sin(\omega x)$.

1.1. Rappels

Chapitre 12

Rappels

linéaire Exponentielle

linéaires coefficients

Remarques:

Généralisation à un système d'équations :

$$\begin{cases} y_1' = a_{1,1}(x)y_1 + a_{1,2}(x)y_2 + b_1(x) \\ y_2' = a_{2,1}(x)y_1 + a_{2,2}(x)y_2 + b_2(x) \end{cases}$$

Matriciellement : Y' = A(x)Y + B(x).

• y'' = a(x)y' + b(x)y + c(x) peut se ramener à un tel système, avec $v_1 = v$, $v_2 = v'$ dans:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = b(x)y_1 + a(x)y_2 + c(x) \end{cases}$$

Matrice
$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b(x) & a(x) \end{pmatrix}$$

1. Généralités

Chapitre 12

Généralité

Rappels

Définition

Système différentie

Principe d

superposition

Problème de Cauchy

Représentation d'une équation scalaire linéaire

Solutions

d une équation différentielle l:-----

Exponentielle d'un endomor phisme, d'une

systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients

1.2. Définition

1.2. Définition

Definition 1

Chapitre 12

On appelle équation différentielle linéaire (vectorielle) sur I et dans E toute équation de la forme :

$$x' = a(t) \cdot x + b(t)$$

où:

- a est une application continue de I dans $\mathcal{L}(E)$;
- b est une application continue de I dans E, appelée second membre.

Une fonction $f: I \to E$ est solution de cette équation lorsque f est dérivable sur I et vérifie :

$$\forall t \in I, \quad f'(t) = a(t)(f(t)) + b(t)$$

L'équation $x' = a(t) \cdot x$ est appelée équation homogène associée à l'équation $x' = a(t) \cdot x + b(t)$.

Rappels Définition

Système différentie

linéaire

superposition

Problème de Cauchy

Représentation d'une équation scalaire linéair

Solutions d'une équatio différentielle linéaire

Exponentielle d'un endomor phisme, d'une matrice

systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants

1. Généralités

Chapitre 12

Système différentiel

linéaire

1.3. Système différentiel linéaire

1.3. Système différentiel linéaire

Chapitre 12

Généralité Rappels

Système différentiel linéaire

linéaire Principe

superposit

Problème (

Cauchy

d'une équations scalaire linéai

Solutions d'une équati différentielle linéaire

Exponentielle d'un endomor phisme, d'une matrice

systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants

Definition 2

On appelle sytème différentiel linéaire d'ordre 1 sur I (sous forme résolue) à n inconnues tout système de la forme :

$$\begin{cases} x'_1 = a_{1,1}(t)x_1 + a_{1,2}(t)x_2 + \dots + a_{1,n}(t)x_n + b_1(t) \\ x'_2 = a_{2,1}(t)x_1 + a_{2,2}(t)x_2 + \dots + a_{2,n}(t)x_n + b_2(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x'_n = a_{n,1}(t)x_1 + a_{n,2}(t)x_2 + \dots + a_{n,n}(t)x_n + b_n(t) \end{cases},$$

où $(a_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$ et $(b_i)_{1 \le i \le n}$ sont des familles d'applications continues de I dans \mathbb{K} , appelées respectivement *coefficients* et *second membres*.

Remarque:

Matriciellement, X' = A(t)X + B(t). Équivalent à une représentation matricielle de $x' = a(t) \cdot x + b(t)$.

1. Généralités

Chapitre 12

Généralité

Rannels

Définition

Système différentie

linéaire Principe de

superposition

Problème d

Représentation d'une équation

d'une équation scalaire linéaire d'ordre n

Solutions d'une équatio différentielle

Exponentielle d'un endomorphisme, d'une matrice

systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients

1.4. Principe de superposition

1.4. Principe de superposition

Chapitre 12

Généralit Rappels Définition

Système différentiel linéaire

Principe de superposition

Problème de Cauchy

Représentation d'une équation scalaire linéaire d'ordre n

d'une équations différentielle linéaire

Exponentielle d'un endomorphisme, d'une matrice

systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants

Proposition 1

Soit une équation différentielle linéaire homogène $x'=a(t)\cdot x$ sur I dans E et soient $b,c:I\to E$ deux applications continues. Alors si f est solution de $x'=a(t)\cdot x+b(t)$ et g est solution de $x'=a(t)\cdot x+c(t)$, la fonction $\lambda f+\mu g$ est solution de $x'=a(t)\cdot x+\lambda b(t)+\mu c(t)$ pour tout $\lambda,\mu\in\mathbb{K}$.

Corollaire 1

L'ensemble des solution d'une équation différentielle linéaire homogène $x'=a(t)\cdot x$ sur I dans E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(I,E)$.

1. Généralités

Chapitre 12

Généralité

Daniela.

Définition

Système

différenti

Principe d

superposit

Problème de

Cauchy

d'une équation scalaire linéaire d'ordre n

Solutions d'une équatio différentielle

Exponentielle d'un endomor phisme, d'une

systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients

1.5. Problème de Cauchy

1.5. Problème de Cauchy

Chapitre 12

Généralité Rappels

Système différentiel linéaire Principe de

Problème de Cauchy

Représentation d'une équation scalaire linéair d'ordre n

Solutions d'une équation différentielle linéaire

Exponentielle d'un endomorphisme, d'une matrice

systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants

Definition 3

On appelle problème de Cauchy (linéaire) la donnée d'une équation différentielle linéaire $x'=a(t)\cdot x+b(t)$ et d'une condition intiale $(t_0,x_0)\in I\times E$. On dit que f est solution de ce problème de Cauchy lorsque f est solution de l'équation et $f(t_0)=x_0$.

Remarques:

• Présentation sous forme d'un système :

$$\begin{cases} x' = a(t) \cdot x + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

• Forme intégrale :

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t \left(a(u) \cdot x(u) + b(u) \right) du$$

1. Généralités

Chapitre 12

Représentation d'une équation scalaire linéaire d'ordre n

coefficients

1.6. Représentation d'une équation scalaire linéaire d'ordre n

Généralit Rappels

Système différentiel linéaire Principe de superpositio

Problème d Cauchy

Représentation d'une équation scalaire linéaire d'ordre n

Solutions d'une équation différentielle linéaire

Exponentielle d'un endomor phisme, d'une matrice

systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients

Definition 4

On appelle équation différentielle linéaire scalaire d'ordre n une équation de la forme

$$y^{(n)} = a_0(t)y + a_1(t)y' + \cdots + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + b(t)$$

avec $a_0, \ldots, a_{n-1}, b: I \to \mathbb{K}$ continues. b est appelé second membre. Une solution est une fonction $f: I \to \mathbb{K}$ de classe C^n telle que

$$\forall t \in I, \quad f^{(n)}(t) = a_0(t)f(t) + \cdots + a_{n-1}(t)f^{(n-1)}(t) + b(t)$$

Générali Rappels

Système différentiel linéaire

Principe de superposition

Problème d

Problème d Cauchy

Représentation d'une équation scalaire linéaire d'ordre n

Solutions d'une équation différentielle linéaire

Exponentielle d'un endomor phisme, d'une

systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients

Proposition 2

f est solution de l'équation précédente **ssi** $(f, f', \dots, f^{(n-1)})$ est solution du système X' = A(t)X + B(t) avec

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ a_0(t) & a_1(t) & a_2(t) & \cdots & a_{n-1}(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$$

Definition 5

Un problème de Cauchy pour une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre *n* est de la forme :

$$\begin{cases} y^{(n)} = a_0(t)y + a_1(t)y' + \dots + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + b(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

Cela correspond donc à la donnée d'une équation et de n conditions initiales pour les valeurs de $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ en t_0 .

Generali Rappels

Système différentie linéaire

Principe de superposition Problème de

Problème de Cauchy Représentation

d'une équation scalaire linéaire d'ordre n

Solutions d'une équation différentielle linéaire

Exponentielle d'un endomor phisme, d'une matrice

systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients

Table des matières

Chapitre 12

Solutions

d'une équation différentielle linéaire

Structure de l'ensemble de solutions

Théorème de Cauchy linéaire e conséquence

Cas des équations calaires d'ordre 1 ou 2 non normalisées (raccords, séries

Exponentielle d'un endomor phisme, d'une

systèmes différentiels linéaires homogènes coefficients

Résolution de

Généralité

2 Solutions d'une équation différentielle linéaire

3 Exponentielle d'un endomorphisme, d'une matrice

4 systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants

5 Résolution de l'équation avec second membre

Généralité:

Solutions d'une équation différentielle linéaire

Structure de l'ensemble des

Théorème de Cauchy linéaire

Cauchy linéaire conséquence

Cas des équation scalaires d'ordre 1 ou 2 non normalisées (raccords, séries

Exponentielle d'un endomorphisme, d'une

systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients 2. Solutions d'une équation différentielle linéaire

2. Solutions d'une équation différentielle linéaire

Chapitre 12

Généralité

Solutions d'une équatio différentielle

Structure de l'ensemble des solutions

Théorème de Cauchy linéaire

Cas des équatio scalaires d'ordre 1 ou 2 non normalisées (raccords, séries

Exponentielle d'un endomor phisme, d'une

systèmes différentiels linéaires homogènes : coefficients 2.1. Structure de l'ensemble des solutions

2.1. Structure de l'ensemble des solutions

Chapitre 12

Généralit

Solutions d'une équatio

d'une équatio différentielle linéaire

Structure de l'ensemble des solutions

Théorème de Cauchy linéaire de conséquence

Cas des équation scalaires d'ordre 1 ou 2 non normalisées (raccords, séries

Exponentielle d'un endomorphisme, d'une matrice

systèmes différentiels linéaires homogènes coefficients constants

Proposition 3

Pour une **ed** linéaire homogène $x' = a(t) \cdot x$ sur I dans E, l'ensemble S_H des solutions est un **sev** de $C^1(I, E)$.

Remarque:

Noyau de $\Phi: f \mapsto f' - a \cdot f$.

Proposition 4

Pour une **ed** linéaire $x' = a(t) \cdot x + b(t)$ sur I dans E, et f_0 une solution particulière, l'ensemble $\mathcal S$ des solutions est un sous-espace affine de $\mathcal C^1(I,E)$, dirigé par le **sev** $\mathcal S_H$ des solutions de l'équation homogène associée :

$$\mathcal{S} = f_0 + \mathcal{S}_H = \{f_0 + f, f \in \mathcal{S}_H\}$$

2. Solutions d'une équation différentielle linéaire

Chapitre 12

Généralités

Solutions d'une équation différentielle

Structure de l'ensemble des solutions

Théorème de Cauchy linéaire et conséquence

Cas des équation scalaires d'ordre 1 ou 2 non normalisées (raccords, séries

Exponentielle d'un endomor phisme, d'une

systèmes différentiels linéaires homogènes coefficients

Résolution de

2.2. Théorème de Cauchy linéaire et conséquence

2.2. Théorème de Cauchy linéaire et conséquence

Chapitre 12

. . .

Généralité

Solutions d'une équation différentielle linéaire

Structure de l'ensemble des solutions

Théorème de Cauchy linéaire et conséquence

Cas des équations scalaires d'ordre 1 ou 2 non normalisées (raccords, séries

Exponentielle d'un endomorphisme, d'une matrice

systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants

Theoreme 1

Étant donné un problème de Cauchy linéaire

$$\begin{cases} x' = a(t) \cdot x + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases},$$

avec $a: I \to \mathcal{L}(E), b: I \to E$, et $(t_0, x_0) \in I \times E$, il existe une unique fonction $f: I \to E$ de classe \mathcal{C}^1 , solution sur I.

Remarque:

En particulier pour une **ed** linéaire scalaire d'ordre n: Il existe une seule solution à $y^{(n)} = a_0(t)y + a_1(t)y' + \cdots + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + b(t)$, vérifiant des conditions initiales

$$y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}.$$

2.2. Théorème de Cauchy linéaire et conséquence

Chapitre 12

Generalites

Solutions d'une équation différentielle linéaire

Structure de l'ensemble de solutions

Théorème de Cauchy linéaire et conséquence

Cas des équations scalaires d'ordre 1 ou 2 non normalisées (raccords, séries

Exponentielle d'un endomor phisme, d'une matrice

systèmes différentiels linéaires homogènes coefficients constants

Proposition 5

Étant donné une équation différentielle linéaire homogène sur I dans E, l'espace vectoriel \mathcal{S}_H des solutions est de dimension n: pour tout $t_0 \in I$, l'application $f \mapsto f(t_0)$ réalise un isomorphisme de \mathcal{S}_H sur E.

Remarques:

- résoudre une **ed** linéaire homogène en dimension *n* : trouver *n* solutions indépendantes.
- (f_1, \ldots, f_n) est libre dans $C^1(I, E)$ ssi $(f_1(t_0), \ldots, f_n(t_0))$ est libre dans E!
- Pour une **ed** non homogène : sous-espace affine de dimension n.

2.2. Théorème de Cauchy linéaire et conséquence

Chapitre 12

Généralité

Solutions d'une équation différentielle linéaire

Structure de l'ensemble des solutions

Théorème de Cauchy linéaire et conséquence

Cas des équations scalaires d'ordre 1 ou 2 non normalisées (raccords, séries

Exponentielle d'un endomor phisme, d'une

systèmes différentiels linéaires homogènes coefficients Proposition 6

L'ensemble des solutions d'une **ed** scalaire d'ordre n <u>homogène</u> est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^n(I,\mathbb{K})$ de dimension n.

Remarques:

- Une base de S_H est une famille de solutions (f_1, \ldots, f_n) libre dans $C^n(I, \mathbb{K})$.
- ullet Pour une **ed** non homogène : sous-espace affine de dimension n.

2. Solutions d'une équation différentielle linéaire

Chapitre 12

Généralités

Solutions d'une équati différentielle

Structure de l'ensemble des

solutions Théorème de

Théorème de Cauchy linéaire conséquence

Cas des équations scalaires d'ordre 1 ou 2 non normalisées (raccords, séries entières)

Exponentielle d'un endomoi phisme, d'une

systèmes différentiels linéaires homogènes coefficients 2.3. Cas des équations scalaires d'ordre 1 ou 2 non normalisées (raccords, séries entières)

عبدا ـــــــاده

Solutions d'une équatio différentielle

Structure de l'ensemble de solutions

Théorème de Cauchy linéaire e

Cas des équations scalaires d'ordre 1 ou 2 non normalisées (raccords, séries entières)

Exponentielle d'un endomorphisme, d'une matrice

systèmes différentiels linéaires homogènes coefficients constants

Méthode :

Cas a(t)x' + b(t)x = c(t) ou a(t)x'' + b(t)x' + c(t)x = d(t):

- Partition de *I* en sous-intervalle où *a* ne s'annule pas, étude des *raccords*.
- Analyse-synthèse pour des solutions **dse**.

Exercice 1

Résoudre, en étudiant les raccords :

a)
$$ty' - 2y = t^3$$

b)
$$t^2y' - y = 0$$

c)
$$(1-t)y'-y=t$$
.

Exercice 2

Résoudre, en cherchant une solution **dse** : $xy'' - y' + 4x^3y = 0$.

Table des matières

Chapitre 12

- Généralité
- Solutions d'une équation différentielle linéaire
- Exponentielle d'un endomorphisme, d'une matrice

Définition

Exponentielle d'une matrice de valeurs propres Régularité de l'exponentielle matricielle

systèmes différentiels linéaires homogènes coefficients

Résolution de l'équation avec second

- Généralité
 - Solutions d'une équation différentielle linéaire
 - 3 Exponentielle d'un endomorphisme, d'une matrice
 - 4 systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants
 - 6 Résolution de l'équation avec second membre

Généralité

Solutions d'une équation différentielle

Exponentielle d'un endomorphisme, d'une matrice

BIC W

Exponentielle d'une matrice et valeurs propres Régularité de l'exponentielle

systèmes différentiels

linéaires homogènes coefficients

Résolution de l'équation avec second 3. Exponentielle d'un endomorphisme, d'une matrice

3. Exponentielle d'un endomorphisme, d'une matrice

Chapitre 12

Généralités

d'une équations différentielle

d'un endomo phisme, d'une

Définition

Exponentielle d'une matrice valeurs propres Régularité de l'exponentielle

systèmes différentiels linéaires homogènes coefficients

Résolution de l'équation avec second

3.1. Définition

3.1. Définition

Chapitre 12

Généralités

Solutions d'une équatio différentielle linéaire

Exponentielle d'un endomor phisme, d'une matrice

Définition

Exponentielle d'une matrice e valeurs propres Régularité de l'exponentielle matricielle

systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants

Résolution de l'équation avec second membre

Proposition 7

- Pour tout $a \in \mathcal{L}(E)$, la série $\sum \frac{1}{n!} a^n$ est absolument convergente, donc convergente.
- Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la série $\sum \frac{1}{n!}A^n$ est absolument convergente, donc convergente.

Definition 6

- On appelle exponentielle de $a \in \mathcal{L}(E)$ l'endomorphisme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} a^n$. On le note $\exp(a)$ ou e^a .
- On appelle exponentielle de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} A^n$. On la note $\exp(A)$ ou e^A .

3.1. Définition

Chapitre 12

Généralités

Solutions d'une équation différentielle linéaire

Exponentielle d'un endomoi phisme, d'une matrice

Définition

Exponentielle d'une matrice de valeurs propres Régularité de l'exponentielle matricielle

systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants

Résolution de l'équation avec second membre

Proposition 8

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ représente $a \in \mathcal{L}(E)$ dans une base \mathcal{B} de E alors

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(e^{a}) = e^{A}$$

Remarques:

- Continuité de Mat
- Continuité de $u\mapsto u(x)$: la série $\sum \frac{1}{n!}a^n(x)$ est convergente, de somme $e^a(x)$.

3. Exponentielle d'un endomorphisme, d'une matrice

Chapitre 12

Généralité:

Solutions d'une équation différentielle linéaire

Exponentielle d'un endomoi phisme, d'une matrice

Définiti

Exponentielle d'une matrice et valeurs propres Régularité de

l'exponentielle matricielle systèmes

linéaires homogènes coefficients

Résolution de l'équation avec second 3.2. Exponentielle d'une matrice et valeurs propres

3.2. Exponentielle d'une matrice et valeurs propres

Chapitre 12

Généralit

Solutions d'une équation différentielle

linéaire Exponentielle d'un endomoi

d'un endomoi phisme, d'une matrice

Définition

Exponentielle
d'une matrice et

d une matrice e valeurs propres Régularité de l'exponentielle matricielle

systèmes différentiels linéaires homogènes a coefficients constants

Résolution de l'équation avec second membre

Proposition 9

Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont deux matrices semblables, alors e^A et e^B sont semblables.

Remarques:

- Même matrice *P* dans les relations de similitude.
- e^A et e^B représente le même endomorphisme e^u .

Proposition 10

Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de A, alors e^{λ} est valeur propre de e^{A} .

Remarque:

$$\{\mathsf{e}^{\lambda_1},\dots,\mathsf{e}^{\lambda_p}\}\subset \operatorname{Sp}(\mathsf{e}^A) \text{ si } \operatorname{Sp}(A)=\{\lambda_1,\dots,\lambda_p\}. \text{ \'Egalit\'e si } \mathbb{K}=\mathbb{C}.$$

3.2. Exponentielle d'une matrice et valeurs propres

Chapitre 12

Cánávalitás

Solutions d'une équation différentielle linéaire

Exponentielle d'un endomorphisme, d'une matrice

matrice

Définition

Exponentielle
d'une matrice et

valeurs propres Régularité de l'exponentielle matricielle

systèmes différentiels linéaires homogènes a coefficients constants

Résolution de l'équation avec second membre

Proposition 11

- Si A est diagonale avec $A = \operatorname{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $e^A = \operatorname{Diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$.
- Si A est triangulaire supérieure, de diagonale $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, alors e^A est triangulaire supérieure de diagonale $(e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n})$

Proposition 12

- Si A est diagonalisable, e^A est diagonalisable
- Si A est trigonalisable, e^A est trigonalisable

Remarques:

- Même matrice $P \in GL_n(\mathbb{K})$ pour les relations de similitude.
- Réciproques fausses!

3.2. Exponentielle d'une matrice et valeurs propres

Chapitre 12

Exponentielle d'une matrice et valeurs propres

linéaires coefficients

Résolution de

Exercice 3

Déterminer $\exp(tJ)$ avec $t \in \mathbb{R}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Que vaut $\exp(2\pi J)$?

3. Exponentielle d'un endomorphisme, d'une matrice

Chapitre 12

Généralité

Solutions d'une équation différentielle linéaire

Exponentielle d'un endomoi phisme, d'une matrice

Exponentielle d'une matrice e valeurs propres

Régularité de l'exponentielle matricielle

systèmes différentiels linéaires homogènes coefficients

Résolution de l'équation avec second 3.3. Régularité de l'exponentielle matricielle

3.3. Régularité de l'exponentielle matricielle

Chapitre 12

Généralité

d'une équations différentielle linéaire

Exponentielle d'un endomor phisme, d'une matrice

Définiti

Exponentielle d'une matrice e valeurs propres Régularité de

Régularité de l'exponentielle matricielle

systèmes différentiels linéaires homogènes coefficients constants

Résolution de l'équation avec second

Proposition 13

- La fonction exp : $a \mapsto e^a$ est continue sur $\mathcal{L}(E)$.
- La fonction exp : $A \mapsto e^A$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

3.3. Régularité de l'exponentielle matricielle

Chapitre 12

Généralité

Solutions d'une équatio différentielle linéaire

Exponentielle d'un endomor phisme, d'une matrice

Définiti

d'une matrice e valeurs propres Régularité de l'exponentielle matricielle

systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants

Résolution de l'équation avec second membre

Proposition 14

Soit $a \in \mathcal{L}(E)$ et soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- La fonction t → e^{ta} est dérivable sur ℝ de dérivée
 t → a ∘ e^{ta} = e^{ta} ∘ a
- La fonction $t \mapsto e^{tA}$ est dérivable sur \mathbb{R} de dérivée $t \mapsto A e^{tA} = e^{tA} A$.

Corollaire 2

Les fonctions $t \mapsto e^{ta}$ et $t \mapsto e^{tA}$ sont de classe C^{∞} sur \mathbb{R} .

3.3. Régularité de l'exponentielle matricielle

Chapitre 12

Généralités

Solutions d'une équatio différentielle linéaire

Exponentielle d'un endomor phisme, d'une matrice

Définiti

Exponentielle
d'une matrice et
valeurs propres
Régularité de
l'exponentielle

systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants

matricielle

Résolution de l'équation avec second membre

Proposition 15

- Soient $a, b \in \mathcal{L}(E)$ tels que $a \circ b = b \circ a$. Alors $e^{a+b} = e^a \circ e^b = e^b \circ e^a$.
- Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tels que AB = BA. Alors $e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A$.

Remarque:

Plus valable si a et b (ou A et B) ne commutent pas!

Table des matières

Chapitre 12

différentielle

systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants

- 4 systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants

Chapitre 12

Généralité

Solutions d'une équation différentielle linéaire

Exponentielle d'un endomorphisme, d'une matrice

systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients

constants

Résolution
explicite du
problème de
Cauchy

Cas

Cas de la

Résolution d l'équation avec second membre 4. systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants

4. systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants

Chapitre 12

Généralité

Solutions d'une équation différentielle linéaire

Exponentielle d'un endomoi phisme, d'une matrice

systèmes différentiels linéaires homogènes coefficients

Résolution explicite du problème de Cauchy

Cas diagonalisab

Cas de la dimension 2 et

Résolution d l'équation avec second membre 4.1. Résolution explicite du problème de Cauchy

4.1. Résolution explicite du problème de Cauchy

Chapitre 12

Généralités

Solutions d'une équation différentielle linéaire

Exponentielle d'un endomor phisme, d'une matrice

systèmes différentiels linéaires homogènes : coefficients constants

Résolution explicite du problème de Cauchy

Cas diagonalisabl

Cas de la dimension 2 et 3 Theoreme 2

pour $a \in \mathcal{L}(E)$ (constant) le problème de Cauchy $x' = a \cdot x$ et $x(t_0) = x_0$ admet comme unique solution :

$$f(t) = e^{(t-t_0)a} \cdot x_0$$

Remarques:

- Formulation matricielle pour X' = AX et $X(t_0) = X_0$: $f(t) = e^{(t-t_0)A} X_0$.
- If en résulte $S = \{t \mapsto e^{tA} X_0, X_0 \in \mathbb{K}^n\}.$

4. systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants

Chapitre 12

Généralité:

d'une équations différentielle linéaire

Exponentielle d'un endomor phisme, d'une matrice

systèmes différentiels linéaires homogènes coefficients

Résolution explicite du problème de

Cas diagonalisable

Cas de la dimension 2 et

Résolution (l'équation avec second membre 4.2. Cas diagonalisable

4.2. Cas diagonalisable

Chapitre 12

Généralités

Solutions d'une équatio différentielle linéaire

Exponentielle d'un endomor phisme, d'une matrice

systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients

Résolution explicite du problème de Cauchy

Cas diagonalisable

Cas de la dimension 2 et 3

Résolution de l'équation avec second membre

Proposition 16

Si a est diagonalisable, (x_1,\ldots,x_n) une base de vecteurs propres, et $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ la famille des valeurs propres associées, alors pour $f_i:t\mapsto \mathrm{e}^{\lambda_i t}\,x_i,\; (f_1,\ldots,f_n)$ est une base de l'espace des solutions.

Exercice 4

Résoudre l'équation différentielle X' = AX avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \ddots & (1) \\ & \ddots & \\ (1) & & 2 \end{pmatrix}.$$

4. systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants

Chapitre 12

Généralité:

Solutions d'une équati différentielle linéaire

Exponentielle d'un endomor phisme, d'une matrice

systèmes différentiels linéaires

homogènes coefficients constants

Résolution explicite du problème de Cauchy

Cas

Cas de la dimension 2 et 3

Résolution d l'équation avec second membre 4.3. Cas de la dimension 2 et 3

Chapitre 12

Généralité:

Solutions d'une équation différentielle linéaire

Exponentielle d'un endomor phisme, d'une matrice

systèmes différentiels linéaires homogènes :

homogènes à coefficients constants

Résolution explicite du problème de Cauchy

Cas diagonalisab

Cas de la dimension 2 et 3

Résolution de l'équation avec second membre

Exercice 5

Résoudre le système

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -x + 3y \end{cases}$$

Proposition 17

Pour $T=egin{pmatrix} \lambda & 1 \ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, on a pour tout $t\in\mathbb{R}$:

$$\mathbf{e}^{tT} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}^{\lambda t} & t \, \mathbf{e}^{\lambda t} \\ \mathbf{0} & \mathbf{e}^{\lambda t} \end{pmatrix}$$

Table des matières

Chapitre 12

- Généralité
- Solutions d'une équation différentielle linéaire
- Exponentielle d'un endomoi phisme, d'une matrice
- systèmes différentiels linéaires homogènes a coefficients constants
- Résolution de l'équation avec second
- membre

 cas de l'ordre 1

 cas de l'ordre 2 à
 coefficients
 constants : forme
 particulière du
 second membre
 Compléments sur

- Généralités
- 2 Solutions d'une équation différentielle linéaire
- 3 Exponentielle d'un endomorphisme, d'une matrice
- 4 systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants
- 6 Résolution de l'équation avec second membre

Chapitre 12

Généralités

Solutions d'une équation différentielle linéaire

Exponentielle d'un endomorphisme, d'une

systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients

Résolution de l'équation avec second membre

cas de l'ordre 1 cas de l'ordre 2 à coefficients constants : forme particulière du second membre Compléments sur 5. Résolution de l'équation avec second membre

5. Résolution de l'équation avec second membre

Chapitre 12

Généralités

d'une équatio différentielle linéaire

Exponentielle d'un endomor phisme, d'une matrice

systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients

Résolution de l'équation avec second

cas de l'ordre 1

cas de l'ordre 2 à coefficients constants : forme particulière du second membre Compléments sur

5.1. cas de l'ordre 1

Généralité

Solutions d'une équation différentielle linéaire

Exponentielle d'un endomor phisme, d'une matrice

systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants

Résolution de l'équation avec second

cas de l'ordre 1
cas de l'ordre 2 à
coefficients
constants : forme
particulière du
second membre
Compléments sur
l'annulation d'une

Rappel:

Pour y'=a(t)y+b(t), et A une primitive de a, solutions de l'équation homogène de la forme $t\mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{A(t)}$. On cherche une solution particulière de la forme $f(t)=\lambda(t)\,\mathrm{e}^{A(t)}$ (variation de la constante).

Remarque:

Si a constant et b(t) de la forme $P(t)\,\mathrm{e}^{\alpha t}$, avec P polynomial de degré d, solution particulière f(t) de la forme $Q(t)\,\mathrm{e}^{\alpha t}$ avec Q polynomial

- de degré $d \operatorname{si} \alpha \neq a$;
- de degré d+1 (sans terme constant) si $\alpha = a$ (Q' = P).

5. Résolution de l'équation avec second membre

Chapitre 12

Solutions

d'une équations différentielle linéaire

Exponentielle d'un endomor phisme, d'une matrice

systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients

Résolution de l'équation avec second

cas de l'ordre 1

cas de l'ordre 2 à coefficients constants : forme particulière du second membre

Compléments sur l'annulation d'une solution de 5.2. cas de l'ordre 2 à coefficients constants : forme particulière du second membre

Chapitre 12

Généralité

Solutions d'une équation différentielle linéaire

Exponentielle d'un endomoi phisme, d'une matrice

systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants

Résolution de l'équation avec second

cas de l'ordre 1
cas de l'ordre 2 à
coefficients
constants : forme
particulière du
second membre

iénéralités

Rappel:

Soit x'' = ax + bx' + c(t) avec a et b constants et c(t) de la forme $P(t) e^{\lambda t}$, avec P polynomial de degré d, solution particulière de la forme $f(t) = Q(t) e^{\lambda t}$, avec Q polynomial :

- ullet de degré d si λ n'est pas racine de l'équation caractéristique ;
- de degré d+1 si λ est racine simple de l'équation caractéristique;
- de degré d+2 si λ est racine double de l'équation caractéristique.

Démonstration : En effet, Q doit vérifier $Q'' + (2\lambda - b)Q' + (\lambda^2 - \lambda b - a)Q = P$.

5. Résolution de l'équation avec second membre

Chapitre 12

Generalites

d'une équations différentielle linéaire

Exponentielle d'un endomor phisme, d'une matrice

systèmes différentiels linéaires homogènes : coefficients

Résolution de l'équation avec second

cas de l'ordre 1 cas de l'ordre 2 coefficients constants : form particulière du

Compléments sur l'annulation d'une solution de 5.3. Compléments sur l'annulation d'une solution de l'équation homogène

5.3. Compléments sur l'annulation d'une solution de l'équation homogène

Chapitre 12

différentielle

linéaires

coefficients

Résolution de

avec second

Proposition 18

Soit $x' = a(t) \cdot x$ une équation homogène et soit f une solution. Alors f est nulle **ssi** il existe $t_0 \in I$ tel que $f(t_0) = 0$.

Démonstration : Rapellons que I est supposé d'intérieur non vide. Si f est nulle, n'importe quel $t_0 \in I$ convient. Réciproquement, supposons qu'il existe $t_0 \in I$ tel que $f(t_0) = 0$. f est donc solution au problème de Cauchy associé à l'équation $x' = a(t) \cdot x$ et à la condition initiale $(t_0,0)$, dont 0 est bien sûr solution. Par unicité d'une telle solution d'après le théorème de Cauchy linéaire, f=0.

Proposition 19

Soient (f_1,\ldots,f_p) une famille de solutions d'une équation homogène sur I. Les trois assertions sont équivalentes :

- (i) (f_1, \ldots, f_p) est libre
- (ii) Pour tout $t \in I$, $(f_1(t), \ldots, f_p(t))$ est libre.
- (iii) Il existe $t \in I$ tel que $(f_1(t), \ldots, f_p(t))$ est libre.

cas de l'ordre 1
cas de l'ordre 2 à
coefficients
constants : forme
particulière du
second membre
Compléments sur
l'annulation d'une
solution de

5. Résolution de l'équation avec second membre

Chapitre 12

Généralités

d'une équatio différentielle linéaire

Exponentielle d'un endomor phisme, d'une matrice

systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients

Résolution de l'équation avec second

cas de l'ordre 1
cas de l'ordre 2 à
coefficients
constants : forme
particulière du
second membre
Compléments sur
l'annulation d'une

5.4. Méthode générale de variation des constantes

Exponentielle d'un endomor phisme, d'une matrice

systèmes différentiels linéaires homogènes a coefficients constants

Résolution de l'équation avec second membre

cas de l'ordre 1
cas de l'ordre 2 à
coefficients
constants : forme
particulière du
second membre
Compléments sur
l'annulation d'une
solution de

Proposition 20

Soit une équation différentielle linéaire vectorielle (E): $x' = a(t) \cdot x + b(t)$ et soit (f_1, \ldots, f_n) une base de l'espace \mathcal{S}_H des solutions de l'équation homoègne associée. Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ une famille de fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur I et à valeurs dans \mathbb{K} . Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) La fonction $f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i$ est solution de (E).
- (ii) $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i' f_i = b$

Démonstration : Notons déjà que $a(t) \cdot f_i(t) = f'_i(t)$ pour tout $i \in [1, n]$ et pour tout $t \in I$. Dès lors :

$$(i) \Leftrightarrow \forall t \in I, \ \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_{i} f_{i}\right)'(t) = a(t) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_{i}(t) f_{i}(t)\right) + b(t)$$

5. Résolution de l'équation avec second membre

Chapitre 12

Généralités

d'une équations différentielle linéaire

Exponentielle d'un endomor phisme, d'une matrice

systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients

Résolution de l'équation avec second

cas de l'ordre 1
cas de l'ordre 2 à
coefficients
constants : forme
particulière du
second membre
Compléments sur
l'annulation d'une

5.5. Cas de l'ordre 2 scalaire : wronskien, variation des constantes

Chapitre 12

Definition 7

On appelle wronskien de deux solutions f et g d'une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2 homogène l'application :

$$W: t \mapsto \begin{vmatrix} f(t) & g(t) \\ f'(t) & g'(t) \end{vmatrix}$$

Proposition 21

Soient f et g deux solutions de l'équation homogène. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) (f,g) est une base de l'espaces des solutions
- (ii) pour tout $t \in I$, $W(t) \neq 0$
- (iii) il existe $t \in I$ tel que $W(t) \neq 0$.

différentielle

linéaires coefficients

Résolution de

5.5. Cas de l'ordre 2 scalaire : wronskien, variation des constantes

Chapitre 12

Généralités Solutions d'une équatio différentielle

Exponentielle d'un endomor phisme, d'une matrice

systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients

Résolution de l'équation avec second membre

membre

cas de l'ordre 1

cas de l'ordre 2

coefficients

constants : fori
particulière du
second membre

Compléments s

Méthode :

Soit (f,g) une base de solutions de l'équation homogène associée à x''=a(t)x'+b(t)x+c(t). On cherche une solution particulière x(t) sous la forme $x(t)=\lambda(t)f(t)+\mu(t)g(t)$

Méthode de variation des constantes :

$$\begin{cases} \lambda'(t)f(t) + \mu'(t)g(t) = 0\\ \lambda'(t)f'(t) + \mu'(t)g'(t) = c(t) \end{cases}$$

Exercice 6

Résoudre l'équation $x'' + 4x = \tan(t)$.

Solution

La résolution de l'équation homogène donne $S_H = \text{vect}(t \mapsto \cos(2t), t \mapsto \sin(2t))$. On cherche une solution particulière sous la forme $\lambda(t)\cos(2t) + \mu(t)\sin(2t)$ et on doit