Interrogation de cours n$^{\text{o}}$ 3

lundi 22 septembre 2025

E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé, de norme $\|\cdot\|$, avec $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{K}=\mathbb{C}$. Durée: 25 min.

Définitions et énoncés (5 pts)

1. Définition du segment $[a,b]$ pour $a,b\in E$, définition d'une partie convexe de E.

2. Dans le cas où $E=\mathbb{K}^n$, donner les formules définissant les normes standart $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$.

3. Soit $A\subset E$ et $a\in E$. Quand dit-on que a est intérieur à A ? Quand dit-on que a est adhérent à A ?

4. Comment caractérise-t-on séquentiellement les fermés de E ?

5. Définition de la densité dans E d'une partie A de E.

Démonstrations (6 pts)

a) Montrer que si une suite $(u_n)_n$ de E converge, alors sa limite est unique.

b) Montrer que les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sur $\mathbb{K}^n$ sont équivalentes.

c) (MPI) Soient $A,B\in\mathcal{P}(E)$. Montrer que si $A\subset B$, alors $\mathring{A}\subset\mathring{B}$.

c) (MPI*) Soient $F,K\in\mathcal{P}(E)$. Montrer que si F est fermé et K est compact, alors $F\cap K$ est compact.