DM n°7 - à rendre le lundi 12 janvier

Notations

Soit J un intervalle de $\mathbf{R}$.

- L'ensemble $\mathcal{C}^k(J, \mathbf{R})$ avec $k \in \mathbf{N}^*$ désigne l'ensemble des fonctions $f : J \to \mathbf{R}$ dont les dérivées jusqu'à l'ordre k existent et telles que $f^{(k)}$ soit continue sur J.

- L'ensemble $\mathcal{C}^\infty(J, \mathbf{R})$ désigne l'ensemble des fonctions $f : J \to \mathbf{R}$ indéfiniment dérivables sur J.

- Si $f : J \to \mathbf{R}$ une fonction bornée, on note

$$\|f\|_{\infty,J} = \sup\left\{|f(x)|,\, x \in J\right\}.$$

Introduction

Dans ce sujet, on étudie l'équation différentielle non linéaire

$$(E) : \quad y'(x) + y(x) + 1 = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{y(x)},$$

dont l'inconnue est une fonction $y : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$. On montrera en Partie V que cette équation peut-être utilisée pour caractériser la propagation d'une épidémie non létale au sein d'une population d'individus.

On admet dans tout le sujet que le problème de Cauchy

$$(C) : \quad \begin{cases} y'(x) + y(x) + 1 = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{y(x)} \\ y(0) = 0 \end{cases},$$

admet une unique solution $y \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$, que l'on va chercher à approcher de plusieurs manières.

Partie I : Linéarisation de (E)

Pour approcher la solution y du problème de Cauchy (C), on propose dans un premier temps de linéariser l'équation (E). Comme y est continue et vérifie $y(0) = 0$, on remarque au voisinage de 0 que

$$\exp(y(x)) \approx 1 + y(x).$$

On propose donc d'approcher y par la solution de l'équation différentielle linéaire

$$(E_\ell) : \quad u'(x) + u(x) + 1 = \frac{1}{2}(1 + u(x)),$$

dont l'inconnue est une fonction $u : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$. On introduit de même le problème de Cauchy associé

$$(C_\ell) : \quad \begin{cases} u'(x) + u(x) + 1 = \frac{1}{2}(1 + u(x)) \\ u(0) = 0 \end{cases} .$$

1 ▷ Justifier qu'il existe une unique solution u au problème de Cauchy (C_ℓ), donner son expression et dresser son tableau de variation.

2 ▷ Montrer qu'il existe une unique solution constante de l'équation (E_ℓ), notée $\gamma \in \mathbf{R}$, et vérifier que la solution u trouvée en question 1 satisfait

$$\lim_{x \to +\infty} u(x) = \gamma.$$

On admet à présent dans toute la suite du sujet que les propriétés observées sur u, la solution de (C_ℓ), restent vérifiées sur y, la solution de (C). En particulier, on admet que :

- y est décroissante sur $\mathbf{R}_+$,
- $\lim_{x \to +\infty} y(x) = c$, où $c \in \mathbf{R}$.

3 ▷ Montrer que c est une solution constante de (E), puis que (E) admet exactement deux solutions constantes notées c_1 et c_2 telles que $c_1 < 0 < c_2$. En déduire la valeur de c en fonction de c_1 et c_2.

Partie II : Séries de Dirichlet

On propose dans cette partie d'étudier des séries de fonctions particulières appelées séries de Dirichlet.

Définition 1 *Une série de fonctions* $\sum_{n \geq 0} f_n$ *est dite de Dirichlet si*

$$\forall x \in \mathbf{R}_+ \quad f_n(x) = a_n e^{-\lambda_n x},$$

où la suite de réels $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifie, pour une valeur donnée $M \in \mathbf{R}_+^*$,

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad |a_n| \leq \frac{M}{2^n},$$

et la suite de réels $(\lambda_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est strictement croissante et vérifie

$$\lambda_0 = 0, \qquad \lim_{n\to+\infty} \lambda_n = +\infty, \qquad \textit{et} \qquad \lambda_n \underset{n\to+\infty}{=} O(n).$$

Pour tout $k \in \mathbf{N}$, on définit alors la quantité $b_k = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^k a_n$.

4 ▷ Montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}$, les réels b_k sont bien définis.

5 ▷ Montrer que toute série de Dirichlet $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément sur $\mathbf{R}_+$. On note alors f sa somme. Justifier que f est continue sur $\mathbf{R}_+$.

6 ▷ Exprimer $f(0)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ en fonction de a_0 et b_0.

7 ▷ Soit $k \in \mathbf{N}^*$. Montrer que $f \in \mathcal{C}^k(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$ et donner une expression de $x \mapsto f^{(k)}(x)$. Exprimer ensuite $f^{(k)}(0)$ en fonction de b_k.

8 ▷ Montrer que si $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbf{R}_+$ alors $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Partie III : Relations sur les coefficients de la série de Dirichlet

Revenons au problème de Cauchy (C), et à l'étude de sa solution $y \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$. Supposons dorénavant que y est la somme d'une série de Dirichlet, c'est-à-dire que

$$\forall x \in \mathbf{R}_+ \quad y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \mathrm{e}^{-\lambda_n x},$$

où les suites $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(\lambda_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifient les propriétés mentionnées en Définition 1. On introduit également la fonction $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$ définie par

$$\forall x \in \mathbf{R}_+ \quad g(x) = \mathrm{e}^{y(x)}.$$

9 ▷ Exprimer a_0 et b_0 en fonction de la constante c introduite en partie I.

10 ▷ En utilisant l'équation (E) satisfaite par y, calculer b_1.

11 ▷ Montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}^*$,

$$g^{(k)}(0) = (-1)^k d_k,$$

où les coefficients d_k sont définis par

$$d_0 = 1, \qquad \text{et} \qquad \forall k \geq 1 \quad d_k = \sum_{i=1}^{k} \binom{k-1}{i-1} d_{k-i} b_i.$$

12 ▷ Soit $k \in \mathbf{N}^*$. En utilisant l'équation (E), satisfaite par y, exhiber une relation de récurrence liant b_{k+1}, b_k et d_k.

Partie IV : Approximation de la solution y

Soit $N \in \mathbf{N}^*$. Pour approcher la solution y de (C), on propose dans cette partie de tronquer toutes les sommes en s'arrêtant au terme de rang N. Les résultats de la Partie III permettent d'obtenir une approximation des quantités β_k définies pour tout $k \in \mathbf{N}$ par

$$\beta_k = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n^k a_n.$$

On introduit également la fonction tronquée $y_N : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbf{R}_+ \quad y_N(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n \mathrm{e}^{-\lambda_n x}.$$

En se donnant les valeurs de la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbf{N}}$, on veut dans cette partie calculer les valeurs des coefficients a_n pour n de 1 à N. On utilisera les notations

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^N, \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{N-1} \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^N.$$

13 ▷ Montrer que

$$\|y_N - y\|_{\infty,\mathbf{R}_+} \leq \frac{M}{2^N},$$

et déduire que y_N converge uniformément vers y sur $\mathbf{R}_+$. Proposer ensuite un intervalle $J \subset \mathbf{R}_+$ où la majoration de $\|y_N - y\|_{\infty,J}$ serait plus fine.

14 $\triangleright$ Montrer que $VA = B$ où $V \in \mathcal{M}_N(\mathbf{R})$ est une matrice que l'on explicitera.

15 $\triangleright$ Prouver que le système $VA = B$ admet une unique solution $A \in \mathbf{R}^N$.

Partie V : Modèle de propagation d'épidémie SIR

Pour modéliser la propagation d'une épidémie non létale au sein d'une population d'individus, on peut utiliser le modèle de propagation d'épidémie appelé SIR. Dans ce modèle, la population est séparée en trois groupes :

- Le groupe des personnes susceptibles, n'ayant pas attrapé la maladie, est noté S et sa proportion au cours du temps est représentée par la fonction $S \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$.

- Le groupe des personnes infectées par la maladie est noté I et sa proportion au cours du temps est représentée par la fonction $I \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$.

- Le groupe des personnes ayant contracté la maladie puis récupéré est noté R. On suppose qu'un individu ne peut attraper la maladie qu'une seule fois dans sa vie. Une fois dans le groupe des individus récupérés, il y reste définitivement et ne redevient jamais susceptible. La proportion du groupe R au cours du temps est représentée par la fonction $R \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$.

On a ainsi la relation

$$\forall x \in \mathbf{R}_+ \qquad S(x) + I(x) + R(x) = 1.$$

Dans un modèle de propagation d'épidémie SIR, ces trois fonctions sont de plus des solutions d'un problème de Cauchy associé à un système d'équations différentielles non linéaires

$$(F) : \quad \begin{cases} S'(x) = -I(x)S(x) \\ I'(x) = I(x)S(x) - I(x) \\ R'(x) = I(x) \\ S(0) = S_0, \quad I(0) = I_0, \quad R(0) = R_0 \end{cases},$$

où $S_0, I_0, R_0 \in [0,1]$ sont les conditions initiales. On admet dans la suite le résultat suivant :

Théorème 1 *Pour (S_0, I_0, R_0) fixés, le problème de Cauchy (F) admet une unique solution $(S, I, R) \in (\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}))^3$. De plus, si (S, I, R) et $(\widetilde{S}, \widetilde{I}, \widetilde{R})$ sont les solutions associées aux conditions initiales (S_0, I_0, R_0) et $(\widetilde{S_0}, \widetilde{I_0}, \widetilde{R_0})$, alors*

$$(S_0, I_0, R_0) \neq (\widetilde{S_0}, \widetilde{I_0}, \widetilde{R_0}) \quad \Rightarrow \quad \forall x \in \mathbf{R}_+ \quad (S(x), I(x), R(x)) \neq \left(\widetilde{S}(x), \widetilde{I}(x), \widetilde{R}(x)\right).$$

16 $\triangleright$ Supposons que $S_0 = 0$. Donner l'expression du triplet solution (S, I, R) du système (F).

17 $\triangleright$ Montrer que si $S_0 > 0$ alors la fonction S du triplet solution (S, I, R) de (F) ne s'annule jamais, et en déduire que S est strictement positive.

18 $\triangleright$ Supposons que $S_0 > 0$. Montrer que la fonction S du triplet solution (S, I, R) de (F) vérifie la relation

$$\left(-\frac{S'}{S}\right)' = -S' + \frac{S'}{S}.$$

On se place à partir de maintenant dans le cas où $S_0 = 1/2$, $I_0 = 1/2$ et $R_0 = 0$. On introduit de plus la fonction $h : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbf{R}_+ \quad h(x) = \ln\left(\frac{S(x)}{S_0}\right) = \ln\left(2S(x)\right).$$

19 $\triangleright$ Montrer que h est solution du problème de Cauchy (C).

Pour approcher la fonction S, on introduit la fonction $S_N : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbf{R}_+ \quad S_N(x) = S_0 \mathrm{e}^{y_N(x)} = \frac{1}{2}\exp\left(\sum_{n=0}^{N} a_n \mathrm{e}^{-\lambda_n x}\right).$$

20 $\triangleright$ Montrer que S_N converge uniformément vers S sur $\mathbf{R}_+$ quand $N \to +\infty$ et que

$$\|S_N - S\|_{\infty,\mathbf{R}_+} \leq \frac{M\mathrm{e}^{2M}}{2^{N+1}}.$$

Partie VI : Modèle probabiliste

Toutes les variables aléatoires que l'on sera amené à considérer dans la suite sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. On rappelle que $\binom{a}{b}$ est nul si $b > a$.

Pour toute suite de variables aléatoires $(U_n)_{n\geq 0}$, on note :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \Delta U_n = U_{n+1} - U_n.$$

Dans tout ce qui suit, on considère une population $\mathcal{P}$ de $M \geq 1$ individus, et l'on fixe $K \in \{0, \ldots, M\}$. On note

$$E = \{(s, i, r) \in \mathbf{N}^3,\ s + i + r = M\}.$$

On considère maintenant un autre modèle de propagation de la même épidémie non létale pendant plusieurs jours au sein de la population $\mathcal{P}$.

Chaque matin, la population se répartit en trois classes distinctes : les personnes susceptibles (jamais infectées), les personnes infectées, et les personnes rétablies (et désormais immunisées). On note $\tilde{S}_n, \tilde{I}_n$ et $\tilde{R}_n$ les effectifs des trois classes au matin du n-ième jour et l'on convient que

$$\tilde{S}_0 > 0, \tilde{I}_0 \geq 1,$$

de sorte que l'on ne soit pas dans un cas trivial où l'épidémie est finie ou ne peut pas commencer.

Lorsqu'au matin du n-ième jour, $(\tilde{S}_n, \tilde{I}_n, \tilde{R}_n) = (s, i, r) \in E$, l'évolution quotidienne est la suivante :

— dans la journée, chacune des s personnes saines rencontre, indépendamment des autres, K personnes au hasard parmi les M personnes de la population totale. Dès que l'une au moins des rencontres se fait avec une personne infectée, la personne saine en question devient infectée le lendemain matin ;

— dans le même temps, chaque personne infectée peut guérir à la fin de la journée avec une probabilité ρ fixée dans $]0, 1[$.

21 ▷ Soit $(s, i, r) \in E$. Conditionnellement à l'événement $\Big((\tilde{S}_n, \tilde{I}_n, \tilde{R}_n) = (s, i, r)\Big)$, quelle est la probabilité, notée $p(i)$, pour une personne susceptible d'être infectée lors de cette journée ?

22 ▷ Soit Z une variable aléatoire à valeurs dans $\{0, \ldots, M\}$, montrer que :

$$\mathbf{E}[Z] = \sum_{(s,i,r)\in E} \left(\sum_{k=0}^{M} k\ \mathbf{P}\Big(Z = k \,\Big|\, (\tilde{S}_n, \tilde{I}_n, \tilde{R}_n) = (s, i, r)\Big) \right) \mathbf{P}\Big((\tilde{S}_n, \tilde{I}_n, \tilde{R}_n) = (s, i, r)\Big). \tag{1}$$

23 ▷ Justifier que pour tout $n \geq 0$, les variables aléatoires $\tilde{S}_n$, $\tilde{I}_n$ et $\tilde{R}_n$ ainsi que les variables aléatoires $\Delta\tilde{S}_n$, $\Delta\tilde{I}_n$ et $\Delta\tilde{R}_n$, ont une espérance finie.

24 ▷ Établir l'identité suivante :

$$\mathbf{E}\left[\Delta\tilde{R}_n\right] = \rho\mathbf{E}\left[\tilde{I}_n\right].$$

25 ▷ Établir l'identité suivante : pour $(s,i,r) \in E$, pour tout $k \in \{0, \cdots, s\}$,

$$\mathbf{P}\Big(\Delta \tilde{S}_n = -k \,\Big|\, (\tilde{S}_n, \tilde{I}_n, \tilde{R}_n) = (s,i,r)\Big) = \binom{s}{k} \Big(p(i)\Big)^k \Big(1 - p(i)\Big)^{s-k}.$$

26 ▷ Montrer que

$$\mathbf{E}\left[\Delta \tilde{S}_n\right] = -\mathbf{E}\left[\tilde{S}_n \, p(\tilde{I}_n)\right],$$

puis en déduire l'équation satisfaite par $\mathbf{E}\left[\Delta \tilde{I}_n\right]$.

Fin du problème

Rapport du jury DM7 : remarques générales

1.7 Mathématiques 2 - filière PSI

1.7.1 Présentation générale et intérêt scientifique du sujet

Le sujet étudiait un modèle probabiliste de propagation d'épidémie de type SIR (Sains-Infectés-Rétablis). Ce modèle prend la forme d'un système différentiel autonome, dont l'étude d'une condition initiale particulière se réduisait à celle de l'équation différentielle non linéaire

$$u'(x) + u(x) + 1 = \frac{e^{u(x)}}{2}\cdot$$

Ce type d'équation différentielle – qu'il s'agisse des systèmes différentiels autonomes ou des équations différentielles scalaires non linéaires – ne figure pas au programme de la filière PSI, et aucune connaissance spécifique n'était nécessaire ni utile pour traiter convenablement les différentes parties du sujet.

1.7.2 Structure du sujet

Le sujet comprenait de nombreuses parties permettant d'évaluer la maîtrise de techniques variées enseignées en première comme en deuxième année. La première partie évaluait les connaissances sur les équations différentielles linéaires à coefficients constants, ainsi que diverses techniques générales d'analyse. La deuxième partie faisait la part belle aux séries de fonctions et nécessitait une bonne maîtrise du cours de deuxième année (justification de la convergence d'une série, convergence normale, dérivation terme à terme d'une série de fonctions). La partie III demandait d'avoir bien identifié les résultats obtenus dans la partie précédente. La partie IV reposait sur une majoration explicite assez élémentaire, suivie de la reconnaissance d'un système de Vandermonde. La partie V reposait sur la résolution successive d'équations différentielles élémentaires ainsi que d'identités obtenues par dérivation-intégration, à l'exception de sa dernière question (qui reposait sur une technique de majoration). La dernière partie évaluait enfin la maîtrise des techniques en probabilités, notamment via des calculs d'espérance conditionnelle (à nouveau, sans que des connaissances spécifiques sur cette notion hors-programme ne soient nécessaires au bon traitement des questions posées).

Remarques générales sur la présentation et la rédaction

Le jury déplore à nouveau que la présentation des copies soit parfois peu soigneuse, mais ce point est en progrès depuis les précédentes éditions. L'orthographe est en revanche de plus en plus négligée. La rigueur est trop régulièrement absente dans le discours sur les objets : confusions innombrables entre la fonction f et la valeur $f(x)$, usage de la notation $f(x)'$ dénuée de sens, absence de quantification des propositions mathématiques.

À ce titre, la partie sur les équations différentielles a été particulièrement pénible à lire pour le jury de correction : la logique manque souvent de rigueur, avec notamment des confusions régulières entre l'inconnue de l'équation et les solutions, un flou assez important sur ce qui est supposé dans les raisonnements (bien des candidats supposent que l'équation est vérifiée par la fonction u qu'ils manipulent sans prendre la peine d'expliciter cette hypothèse), on déplore beaucoup d'oublis de réciproques lorsqu'elles sont indispensables, et enfin l'ordre de quantification des propositions est parfois aléatoire (on voit donc nombre de copies écrire $\forall x, \exists C : u(x) = Ce^{-x/2} - 1$ lorsqu'il s'agit de décrire les solutions de (E_ℓ)). On peut s'étonner de ce manque de rigueur dès les toutes premières questions du sujet, dégageant immédiatement une mauvaise impression du correcteur sur les copies concernées. Si on attend des candidats qu'ils maintiennent un niveau de rigueur élevé tout au long du sujet, les candidats doivent être encore plus attentifs à la qualité de leur rédaction sur les toutes premières questions (ce qui ne doit pas non plus les pousser à une rédaction excessivement délayée).

Autres problèmes généralement constatés :

- De nombreuses confusions entre suites et séries de fonctions ; sur ce thème, un manque de maîtrise des objets eux-mêmes, avec la confusion entre une série de fonctions - qui est essentiellement la donnée d'une suite de fonctions - et sa somme. On voit ainsi des candidats parler de convergence normale pour la fonction somme.
- Une grande difficulté à articuler un raisonnement simple et rigoureux en probabilités. Le caractère tardif de cette partie ne suffit pas à expliquer le manque de maîtrise affiché des candidats sur ce thème.

1.7.3 Remarques sur les difficultés rencontrées

Le sujet contenait beaucoup de questions élémentaires demandant une rédaction courte, et dans l'ensemble assez proches du cours. Quelques questions particulièrement difficiles, réparties à peu près uniformément dans le sujet, ont posé des difficultés nettement supérieures aux candidats, et leur taux de réussite ont été particulièrement faibles : il s'agit de la première partie de la question **3**, de la question **8** et de la question **20**. La question **21**, inaugurant la partie « probabilités » du sujet, a étonnamment été très peu réussie.

Dans l'ensemble, beaucoup de candidats ont su prendre des points sur une quantité substantielle de questions, ce qui a conduit à un bon étalement des résultats.

Une analyse détaillée des questions est présentée dans l'annexe F.

F Mathématiques 2 PSI

Q1 - Nous renvoyons aux commentaires généraux quant aux problèmes observés sur la rédaction des questions relatives aux équations différentielles. Les candidats s'appuyant sur le théorème de Cauchy linéaire pour justifier existence et unicité de la solution – ce qui n'était nullement nécessaire ici, puisqu'on pouvait le justifier aussi par le calcul – ont souvent rencontré les plus grandes peines du monde à énoncer correctement les hypothèses de ce théorème (non, tout problème de Cauchy n'a pas une unique solution !). Dans cette situation, plutôt que d'énumérer toute la terminologie (courant ainsi le risque d'oublier une hypothèse critique), nous conseillons aux candidats de présenter les choses de manière formelle : parler donc d'équation différentielle de la forme $u'(x) = a(x)u(x) + b(x)$, avec a et b continues sur l'intervalle envisagé, est donc probablement à la fois plus clair et moins dangereux que de parler d'équation différentielle linéaire résolue d'ordre 1 à coefficients continus ! Parler de « solution homogène » n'a pas de sens : c'est l'équation qui est homogène, pas la solution. Pour l'étude des variations, quelques candidats présentent des tableaux de variations sur $\mathbf{R}$ alors que la solution n'est envisagée que sur $\mathbf{R}_+$.

Q2 - Beaucoup d'oublis de réciproque (candidats ne traitant que l'unicité et pas l'existence, en général), et beaucoup de candidats commettent des fautes logiques graves (démarrant typiquement la démonstration de l'existence par « Soit u une solution »). Une question aussi simple n'aurait dû prendre que quelques lignes aux candidats, pourtant on lit beaucoup de démonstrations excessivement longues. La bonne approche est de chercher les solutions de (E_ℓ) parmi les fonctions constantes, ce qui est quasi-instantané.

Q3 - La première partie de la question reposait sur une difficulté habituelle : pour une fonction $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, l'existence d'une limite finie pour f en $+\infty$ n'implique nullement que f' tende vers 0 en $+\infty$ (ce phénomène est profondément lié au fait que la convergence de l'intégrale sur $\mathbf{R}_+$ d'une fonction continue n'implique pas que cette fonction tende vers 0 en $+\infty$). Les candidats ont tous été confrontés à cette difficulté à plusieurs moments de leur scolarité en classes préparatoires. Malgré cela, un très grand nombre d'entre eux a tenté de passer en force en énonçant un théorème faux. Ici, ce qui sauvait la conclusion (y' tend effectivement vers 0 en $+\infty$) était le fait que l'équation différentielle assure que y' a une limite finie en $+\infty$. À partir de là, par un raisonnement classique (fondé par exemple sur l'inégalité des accroissements finis ou l'intégration des inégalités, mais plusieurs candidats ont trouvé des méthodes plus originales), il est possible de montrer que la seule limite finie possible pour y' en $+\infty$ est 0. Il est à noter que ce type de raisonnement a presque sûrement été rencontré en cours de scolarité par les candidats : on n'attendait donc pas d'initiative extraordinaire de leur part.

Une fois admis ou acquis le fait que c est solution constante de (E), la recherche des solutions constantes reposait sur une simple étude de fonctions. On déplore que les candidats se sentent obligés de longs développements verbeux sur la justification du nombre de solutions, alors qu'à ce stade de leurs études une simple mention du tableau de variations suffit amplement pour peu qu'il contienne toutes les informations utiles : on rappelle à ce titre que les flèches d'un tableau de variations indiquent la monotonie stricte *et* la continuité. Signalons aussi que les preuves à rallonge ont le plus souvent été incomplètes ou imprécises (étude seulement des points de positivité au sens large de la dérivée pour prétendre déterminer le signe précis en tout point, confusions entre monotonie et monotonie stricte, oubli du théorème des valeurs intermédiaires pour justifier l'existence). En définitive, même sur des points qui devraient être acquis depuis la première année (et, osons rêver, depuis la classe de Terminale), bien des candidats affichent leur manque de solidité.

Q4 - L'établissement de la convergence absolue de $\sum_n \lambda_n^k a_n$ a causé bien des soucis aux candidats. On observe beaucoup de tentatives de majoration des valeurs absolues des sommes partielles, révélant ainsi un manque profond de compréhension du cours. Beaucoup de candidats confondent grands O et équivalents, et plus généralement ne connaissent pas la signification d'un grand O. On a vu aussi des considérations très étranges sur les quotients de grands O, devenant subitement un grand O du quotient. Bien des candidats ont le plus grand mal à établir la convergence de $\sum_n n^k x^n$ lorsque $x \in [0,1[$, ce qui relève pourtant d'une simple technique de croissances comparées (on pouvait aussi s'appuyer sur la règle de d'Alembert ou le cours relatif au rayon de convergence de séries entières particulières, que certains candidats ont utilisé judicieusement). Le jury déplore des arguments vagues sur les croissances comparées : que penser de candidats qui laissent $n^2 n^k 2^{-n}$ sans passer à la forme factorisée $n^{2+k} 2^{-n}$, sinon qu'ils semblent tenter de passer en force ? Satisfecit général toutefois : pour les candidats arrivant avec succès à une domination de type $o(1/n^2)$ (ou autre), on voit souvent des explications claires avec une référence au théorème de convergence par domination pour les séries à terme général positif (ou l'absolue convergence).

Q5 - Parmi les questions mobilisant le programme de deuxième année, celle-ci a été la mieux réussie. Il est vrai qu'elle ne faisait intervenir aucune réelle difficulté technique. La convergence normale a le plus souvent bien été repérée, mais on déplore beaucoup d'oublis de valeurs absolues (bien des candidats se contentant de majorer $f_n(x)$). Il est étonnant qu'une proportion substantielle des candidats semble ignorer que les séries géométriques font partie des séries de référence et se sentent obligés de passer par la comparaison avec une série de Riemann pour justifier la convergence de $\sum_n 2^{-n}$. N'est-il pas d'ailleurs beaucoup plus élémentaire d'établir la convergence de $\sum_n 2^{-n}$ que celle de $\sum_n \frac{1}{n^2}$, dans les démonstrations vues en cours ?

Q6 - Beaucoup de candidats n'appliquent pas rigoureusement le théorème d'interversion limite-somme en une borne du domaine de définition, car beaucoup oublient que l'existence des limites (finies) des f_n fait partie des hypothèses (ils écrivent donc directement l'existence d'une limite pour f comme seule conséquence de la convergence uniforme). Trop peu de candidats prennent la peine de justifier convenablement l'existence et les valeurs de $\lim_{+\infty} f_n$: cela nécessitait une invocation claire des propriétés de la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Par ailleurs, la continuité des f_n n'a strictement aucun intérêt pour cette question, ni pour l'évaluation en 0 ni pour le théorème d'interversion limite-somme en $+\infty$.

Q7 - Cette question reprenait les éléments techniques des précédentes et nécessitait l'appel au théorème de dérivation terme à terme (pour une dérivation à un ordre quelconque). Il était ici plus judicieux de démontrer la convergence uniforme à tout ordre de dérivation plutôt que d'isoler le dernier ordre utilisé (compliquant ici la rédaction). Puisqu'il s'agit ici d'exponentielles, le jury n'attendait pas de justification détaillée de la classe de régularité des f_n ni de l'expression de leurs dérivées (alors que plusieurs candidats remplissent une page entière sur ce point).

Q8 - Cette question était particulièrement délicate puisque la question précédente était une fausse piste. On a vu beaucoup de tentatives de passage en force, situant à tort le résultat comme une question d'algèbre, pourtant il ne s'agit pas ici de combinaisons linéaires (finies) mais de sommes de séries. La bonne piste était la question **6**, qui donnait directement $a_0 = 0$ comme conséquence de la nullité de f sur $\mathbf{R}_+$. On pouvait repérer l'analogie avec la situation des séries entières (cas où $(\lambda_n)_n = (n)_n$, après changement de variable $e^{-x} = t$) pour construire le raisonnement, mais on ne pouvait pas s'appuyer directement sur le théorème d'unicité des coefficients. On pouvait ainsi soit raisonner par récurrence, soit raisonner par l'absurde en introduisant le plus petit $p \geq 0$ tel que $a_p \neq 0$ (ce qui au fond revient au même). Étonnamment, cette question a eu plus de succès que la **3** bien qu'elle demandait davantage de prise d'initiative.

Q9 - Il suffisait de revenir sur les résultats de la question **6**.

Q10 - La question **7** donnait $b_1 = -f'(0)$, à partir de quoi on pouvait utiliser l'équation et la question précédente. Le taux de réussite a ici été un peu décevant.

Q11 - Question assez délicate à rédiger, et pour laquelle on a vu beaucoup de tentatives interrompues. La relation de récurrence définissant les d_k devait faire penser à la formule de Leibniz. Une fois observé que $g'(x) = y'(x)g(x)$ pour tout $x \geq 0$, cette formule permettait d'obtenir que la suite $((-1)^k g^{(k)}(0))_k$ vérifie la même relation de récurrence que $(d_k)_{k\geq 0}$. Après vérification de la coïncidence en 0, cette observation permettait alors, sans rédiger formellement un raisonnement par récurrence, d'obtenir le résultat indiqué.

Q12 - Il fallait penser à dériver n fois l'équation différentielle. Cette question a régulièrement été bien réussie. Malgré tout, un nombre étonnamment élevé de candidats n'a pas fait disparaître la constante 1 après dérivation.

Q13 - Cette question présentait peu de difficultés mais a mis en évidence le manque de rigueur de bon nombre de candidats, notamment sur le traitement des inégalités (position fantaisiste, voire absence, des valeurs absolues). On attendait une rédaction propre fixant d'abord une variable réelle x (faute de quoi les candidats écrivent des inégalités incontrôlées faisant intervenir des bornes supérieures, inégalités qui ne relèvent d'aucun théorème au programme). Beaucoup de candidats invoquent à tort un théorème des séries alternées pour majorer la valeur absolue de la somme d'une série par celle de son premier terme, ce qui était ici hors de propos et donnait une majoration étrangement plus forte que celle indiquée.

Q14 - Dans beaucoup de copies, les indices décrivant les termes de la matrice V sont incorrectement écrits, ou la taille de V n'est pas la bonne. On aimerait que les candidats évitent d'écrire « $VA = B$ donc V est la matrice $(\lambda_n^{k-1})_{1\leq k,n\leq N}$ », alors qu'il ne s'agit que d'énoncer que *si* on définit V comme cette matrice de Vandermonde *alors* l'expression des β_k en fonction de a_n prend la forme de l'égalité matricielle indiquée.

Q15 - On n'attendait aucunement un calcul du déterminant de Vandermonde, qui est un résultat de cours et peut à ce titre être utilisé sans démonstration. On note une fréquence importante de l'idée fausse que toute matrice de Vandermonde serait inversible, ou de l'erreur dans la formule tendant à inverser les deux indices (on voit ainsi trop régulièrement l'identité fausse $\prod_{1\leq i<j\leq N}(\lambda_i - \lambda_j) = \det V$, qu'il est pourtant facile d'écarter par l'observation du cas $N = 2$).

Q16 - On pouvait raisonner par conditions nécessaires à condition d'indiquer que le théorème 1 garantissait l'existence d'une solution (ou inversement, raisonner par conditions suffisantes en produisant une solution convenable, invoquant le théorème 1 pour justifier l'unicité de la solution). On doit bien sûr, au vu de la modélisation, s'attendre à ce que S reste constamment nulle, mais une simple justification intuitive fondée sur la nature du phénomène modélisé (ici, l'évolution d'une population) ne pouvait pas être acceptée comme valable.

Q17 - On pouvait soit calculer directement S en fonction d'une primitive de I grâce à la première équation du système, ce qui donne directement tous les résultats exigés, soit invoquer le théorème de Cauchy linéaire (cas homogène) pour la première équation, et ses conséquences quant aux zéros de la fonction S, puis conclure grâce au théorème des valeurs intermédiaires (ce qui était plutôt la solution dans la logique de l'énoncé). En revanche, les tentatives d'utilisation du théorème 1 admis, après translation sur la variable temporelle x, se sont heurtées au problème de la vérification de la condition initiale (presque aucun candidat ne pensant tout simplement à décaler la variable temporelle). Le jury a toutefois valorisé les candidats tentant cette deuxième méthode à condition qu'ils aient convenablement mis en évidence une condition initiale à l'instant 0 (ces techniques ne font plus, depuis la disparition des programmes des équations différentielles non linéaires, partie des méthodes enseignées aux élèves de CPGE).

Q18 - Cette question, assez facile et régulièrement bien réussie, demandait principalement de bien combiner les équations du système (F).

Q19 - Question bien moins souvent réussie que la précédente, trop peu de candidats comprenant qu'elle provenait d'une intégration de la relation $(S + I - h)' = 0$, qu'on trouvait facilement. Beaucoup de candidats semblent croire que deux fonctions sont égales dès qu'elles ont la même dérivée.

Q20 - Question presque jamais réussie. Après examen, on se ramène à un problème de majoration de $|e^y - e^z|$ connaissant un majorant de $|y - z|$ et sachant encadrer y et z, ce qui relève de l'inégalité des accroissements finis. Malheureusement, trop de candidats tentent des approches plus élémentaires, essayant maladroitement de majorer $|1 - e^{-x}|$ par $|x|$ en appliquant à l'inégalité (vraie) $1 - e^{-x} \leq x$ la valeur absolue, fonction dont les candidats savent normalement qu'elle n'est pas croissante.

Q21 - Cette première question de probabilités n'était pas profondément difficile mais elle semble avoir déstabilisé les candidats : il fallait en effet absorber la très longue introduction de cette sixième partie avant de l'attaquer. Cela ne suffit tout de même pas à expliquer la collection proprement incroyable de solutions fausses et absurdes proposées par les candidats, débouchant sur un taux de réussite extrêmement faible. En toute rigueur, il fallait considérer que les k individus rencontrés par un individu donné étaient à choisir parmi les $M-1$ individus restants (et non les M individus au total), mais le jury a décidé de ne pas pénaliser les candidats concluant sur la formule $p(i) = 1 - \binom{M-i}{k} / \binom{M}{k}$.

Q22 - Le jury ne sait pas ce qu'est un SCE ni même un SQCE : les candidats doivent faire l'effort d'écrire en français. On note beaucoup de confusions entre variables aléatoires et événements. L'interversion des sommes devait être justifiée : un argument de finitude était ici préférable à un argument de sommabilité.

Q23 - Le fait que les variables aléatoires considérées soient bornées est un argument pleinement suffisant pour justifier l'existence de leur espérance (au sens de la finitude). Un nombre substantiel de candidats indique à tort que toutes les variables aléatoires envisagées dans cette question sont à valeurs dans $[\![0, M]\!]$.

Q24 - Le plus simple et efficace était de repérer (avec justification substantielle) que, pour la probabilité conditionnelle associée à $((\widetilde{S_n}, \widetilde{I_n}, \widetilde{R_n}) = (s, i, r))$, la variable $R_{n+1} - R_n$ suivait la loi binomiale $\mathcal{B}(i, \rho)$. Très peu de réussite sur cette question néanmoins.

Q25 - Cette question, plus guidée, a été légèrement mieux réussie que la précédente, bien que très peu abordée. La plupart des problèmes sont venus du manque d'insistance des candidats sur le conditionnement.

Q26 - On concluait normalement sans grand effort grâce à la question précédente (pour la première identité) et à la valeur connue de l'espérance d'une variable binomiale, puis en repérant que la suite $(R_n + S_n + I_n)_n$ était constante. Le caractère tardif de cette question a évidemment eu pour effet qu'elle n'a quasiment pas été traitée.

RETOUR