Espaces vectoriels normés

Lundi 15 septembre 2025

Table des matières

Table des matières

1. Norme sur un espace vectoriel.

1.1. Définition.

1.1. Définition.

Définition 1

On appelle *norme* sur E toute application $N : E \to \mathbb{R}_+$ vérifiant :

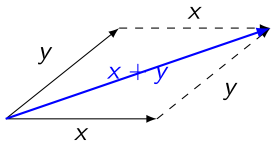
- *Séparation* :
- *Homogenéité* :
- *Inégalité triangulaire* :

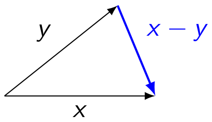
Si N est une norme sur E, on dit que (E, N) (ou plus simplement E) est un *espace vectoriel normé*.

Remarque :

Notation $\| \cdot \| : x \mapsto \|x\|$.

1.1. Définition.





Proposition 1

Si N est une norme E, on a pour tout $(x, y) \in E^2$:

$$\big|N(x) - N(y)\big| \leqslant N(x - y)$$

Remarque :

En résumé :

$$\big|N(x) - N(y)\big| \leqslant N(x \pm y) \leqslant N(x) + N(y)$$

1.2. Distance associée, boules.

1.2. Distance associée, boules.

Definition 2

Soit N une norme sur E. L'application

$$d : \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ (x, y) & \longmapsto & N(y - x) \end{array}$$

est appelée appelée *distance associée* à N.

Remarque :

Les inégalités triangulaires se réécrivent :

$$\left|\mathrm{d}(x, y) - \mathrm{d}(y, z)\right| \leqslant \mathrm{d}(x, z) \leqslant \mathrm{d}(x, y) + \mathrm{d}(y, z),$$

1.2. Distance associée, boules.

Definition 3

Soit N une norme sur E, et d la distance associée. Pour tout point $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}_+$, on appelle :

- *boule ouverte* de centre a et de rayon r l'ensemble $B(a,r) = \left\{x \in E \;/\; \mathrm{d}(x,a) < r\right\}$.
- *boule fermée* de centre a et de rayon r l'ensemble $B_f(a,r) = \left\{x \in E \;/\; \mathrm{d}(x,a) \leqslant r\right\}$.
- *sphère* de centre a et de rayon r l'ensemble $S(a,r) = \left\{x \in E \;/\; \mathrm{d}(x,a) = r\right\}$.

Remarque :

$B_f(a,r) = B(a,r) \sqcup S(a,r)$

1.2. Distance associée, boules.

Definition 4

Pour $a, b \in E$, on appelle *segment* d'extrémités a et b, l'ensemble

$$[a, b] = \{\lambda b + (1-\lambda)a\,,\ \lambda \in [0,1]\}$$

Remarque :

Généralisation d'un segment de $\mathbb{R}$ mais avec $[a, b] = [b, a]$.

Definition 5

On dit qu'une partie A d'un espace vectoriel E est *convexe* lorsque :

$$\forall a, b \in A, \quad [a, b] \subset A$$

Exercice 1

Soit un intervalle I de $\mathbb{R}$ et une fonction $f : I \to \mathbb{R}$. On considère $A = \left\{(x, y) \in I \times \mathbb{R} \,|\, y \geqslant f(x)\right\}$ (appelé *épigraphe* de f). Montrer que f est convexe **ssi** A est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$.

Proposition 2

Si (E, N) est un espace vectoriel normé, les boules (ouvertes et fermées) de E sont des parties convexes.

1.3. Objets bornés dans un e.v.n.

1.3. Objets bornés dans un e.v.n.

Definition 6

On dit qu'une partie quelconque A de E (E, N) est *bornée* lorsqu'il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $A \subset B_f(0, M)$, autrement dit lorsque :

$$\exists\, M \in \mathbb{R}_+^*\,,\ \forall\, x \in A\,,\quad N(x) \leqslant M.$$

Remarques :

- Dépend de N
- $B(0, M)$ au lieu de $B_f(0, M)$?
- Partie non bornée :

1.3. Objets bornés dans un e.v.n.

Définition 7

- Une application $f : X \to E$ est bornée lorsque :

$$\exists\, M \in \mathbb{R}_+^*\,,\ \forall\, x \in X\,,\quad N\big(f(x)\big) \leqslant M.$$

- Une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E est bornée lorsque :

$$\exists\, M \in \mathbb{R}_+^*\,,\ \forall\, n \in \mathbb{N}\,,\quad N\big(v_n\big) \leqslant M.$$

Remarque :

Notations $\mathcal{B}(X, E)$, $\mathcal{B}(\mathbb{N}, E)$.

1.4. Norme associée à un produit scalaire

1.4. Norme associée à un produit scalaire

Definition 8

Soit E un espace préhilbertien réel. On appelle *norme euclidienne* associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ l'application :

$$N : x \mapsto \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

Proposition 3

(inégalité de Cauchy-Schwarz) Pour tout $x, y \in E$:

$$\langle x, y \rangle \leqslant N(x)N(y)$$

avec égalité **ssi** x et y sont colinéaires.

Proposition 4

Une norme euclidienne est une norme.

1.5. Normes usuelles sur $\mathbb{K}^n$.

1.5. Normes usuelles sur $\mathbb{K}^n$.

Proposition 5

Chacune des trois applications suivantes définit une norme sur $\mathbb{K}^n$:

- $\|\cdot\|_1 : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{k=1}^{n} |x_k|$.
- $\|\cdot\|_2 : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.
- $\|\cdot\|_\infty : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \max \left\{ |x_1|, \dots, |x_n| \right\}$.

On les appelle respectivement *norme 1*, *norme 2*, et *norme infini*.

Remarques :

- $|\cdot|$ sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
- $\|\cdot\|_2$ norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 2

Pour chacune de ces trois normes, dessiner la boule unité (boule de centre 0 et de rayon 1) de $\mathbb{R}^2$.

1.6. Normes classiques sur les espaces de fonctions

1.6. Normes classiques sur les espaces de fonctions

Proposition 6

Soit X un ensemble quelconque non vide. L'ensemble $\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ des fonctions bornées de X vers $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et l'application :

$$N_\infty^X : f \mapsto \sup_{x \in X} \left| f(x) \right|.$$

est une norme sur cet espace, appelée *norme de la convergence uniforme*

Remarques :

- Notation $\| \cdot \|_\infty$
- Généralisation à $\mathcal{B}(X, E)$

1.6. Normes classiques sur les espaces de fonctions

Proposition 7

Sur $E = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$, les applications suivantes sont des normes :

- $N_1^{[a,b]} : f \mapsto \displaystyle\int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t$
- $N_2^{[a,b]} : f \mapsto \sqrt{\displaystyle\int_a^b |f(t)|^2\mathrm{d}t}$

Remarques :

- $N_1^{[a,b]}$ ou $\|\cdot\|_1$: norme de la convergence en moyenne
- $N_2^{[a,b]}$ ou $\|\cdot\|_2$: norme de la convergence en moyenne quadratique (c'est une norme euclidienne).

Table des matières

2. Suites dans un espace vectoriel normé

2.1. Convergence et divergence d'une suite

Definition 9

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E, et soit $\ell \in E$. On dit que la suite $(x_n)_n$ *converge* vers ℓ lorsque la suite réelle positive $\big(\mathrm{d}(x_n, \ell)\big)_n$ converge vers 0. ℓ est alors appelée *limite* de la suite, et notée $\lim x_n$.

Remarque :

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \ \exists\ n_0 \in \mathbb{N}\,,\ \ \forall\, n \in \mathbb{N}\,,\ \ n \geqslant n_0 \implies \|x_n - \ell\| \leqslant \varepsilon.$$

2.1. Convergence et divergence d'une suite

Definition 10

On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E est *convergente* lorsqu'il existe $\ell \in E$ tel que la suite converge vers ℓ. Une suite qui ne converge pas est dite *divergente*.

Proposition 8

Si une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E est *convergente*, alors sa limite est unique.

2.2. Opérations sur les suites convergentes

2.2. Opérations sur les suites convergentes

Proposition 9

Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de E, convergeant respectivement vers x et y, et soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{K}$ convergeant vers λ. Alors la suite $(x_n + \lambda_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $x + \lambda y$.

Corollaire 1

L'ensemble des suites convergentes de E est un sous-espace vectoriel de l'espace $E^{\mathbb{N}}$ des suites de E.

2.3. Suites bornées

2.3. Suites bornées

Proposition 10

L'ensemble $\mathcal{B}(\mathbb{N}, E)$ des suites bornées de E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et l'application :

$$N_\infty : (x_n)_n \mapsto \sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\|$$

est une norme sur cet espace.

Remarque :

Notation $\ell^\infty(E)$.

2.3. Suites bornées

Proposition 11

Si une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E est *convergente*, alors elle est bornée. De plus, la suite $(\|x_n\|)_n$ est alors convergente et $\lim \|x_n\| = \|\lim x_n\|$.

Remarque :

l'espace des suites convergentes de $(E, \|\cdot\|)$ est un sous-espace vectoriel de $\ell^\infty(E)$.

2.4. Suites extraites et valeurs d'adhérence

2.4. Suites extraites et valeurs d'adhérence

Definition 11

Soit $(x_n)_n$ une suite de E. On appelle *suite extraite* ou *sous-suite* de $(x_n)_n$ toute suite à valeurs dans E de la forme $(x_{\varphi(n)})_n$ où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante.

Remarque :

Cas $\varphi : n \mapsto 2n$ et $\varphi : n \mapsto 2n + 1$.

Definition 12

Soit $(x_n)_n$ une suite de E. On dit que $x \in E$ est une *valeur d'adhérence* de $(x_n)_n$ lorsqu'il existe une suite extraite $(x_{\varphi(n)})_n$ de E qui converge vers x.

2.4. Suites extraites et valeurs d'adhérence

Proposition 12

Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de E convergente, de limite ℓ, alors toute suite extraite converge vers ℓ.

Corollaire 2

Toute suite convergente possède une et une seule valeur d'adhérence : sa limite.

Remarque :

Réciproque fausse. Exemple ?

Corollaire 3

Toute suite ayant au moins deux valeurs d'adhérence est divergente.

Proposition 13

Si les suites extraites paires $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et impaires $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite $\ell \in E$, alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

2.5. Comparaison de normes

2.5. Comparaison de normes

Definition 13

On dit qu'une norme N est équivalente à une norme N' sur E lorsqu'il existe deux réels $\alpha, \beta > 0$ tels que :

$$\forall x \in E, \quad \alpha N(x) \leqslant N'(x) \leqslant \beta N(x)$$

Proposition 14

La relation binaire précédente est une relation d'équivalence sur l'ensemble des normes de E.

2.5. Comparaison de normes

Proposition 15

Si N et N' sont deux normes équivalentes sur E, alors une partie A de E est bornée dans (E, N) **ssi** elle est bornée dans (E, N').

Corollaire 4

Pour deux normes équivalentes N et N' sur E :

- une fonction $f : X \to E$ est bornée pour N **ssi** elle est bornée pour N'
- Une suite $(x_n)_n$ de E est bornée pour N **ssi** elle est bornée pour N'.

2.5. Comparaison de normes

Proposition 16

Si N et N' sont deux normes équivalentes sur E, alors toute suite $(x_n)_n$ de E convergente dans (E, N) est convergente dans (E, N') avec la même limite.

Remarque :

Critère pratique pour montrer que deux normes ne sont pas équivalentes : $x_n \to 0_E$ pour N mais pas pour N'.

2.5. Comparaison de normes

Exemple :

$E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de E définie par
$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in [0,1], \quad f_n(t) = t^n$

- $\|f_n\|_1 =$
- $\|f_n\|_2 =$
- $\|f_n\|_\infty =$

Conclusion ?

Exercice 3

$\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont-elles équivalentes sur $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$?

2.5. Comparaison de normes

Proposition 17

Les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$ sont équivalentes deux à deux.

Remarques :

- On a la suite d'inégalités :
- En fait, toutes les normes sont équiventes en dimension finie !

Table des matières

3. Topologie d'un espace vectoriel normé

3.1. Voisinage d'un point

3.1. Voisinage d'un point

Definition 14

Soit $a \in E$ et $V \subset E$. On dit que V est un *voisinage* de a lorsqu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(a, \varepsilon) \subset V$.

Exercice 4

Soit $a \in E$. On note $\mathcal{V}(a)$ l'ensemble des voisinages de a. Traduire en français et montrer :

a) $E \in \mathcal{V}(a)$

b) $\forall V \in \mathcal{V}(a),\ a \in V$

c) $\forall A \in \mathcal{P}(E), \quad (\exists V \in \mathcal{V}(a), V \subset A) \Rightarrow A \in \mathcal{V}(a)$.

d) $V \in \mathcal{V}(a) \ \Leftrightarrow\ \exists \varepsilon > 0,\ B_f(a, \varepsilon) \subset V$

3.2. Ouverts d'un espace vectoriel normé

3.2. Ouverts d'un espace vectoriel normé

Definition 15

Une partie A de E est un *ouvert* (ou une *partie ouverte*) de E lorsqu'elle est voisinage de chacun de ses points :

$$\forall x \in A, \quad \exists \varepsilon > 0, \quad B(x, \varepsilon) \subset A$$

L'ensemble de tous les ouverts de E est appelée la *topologie* de E.

Exemples :

E, $\varnothing$, les intervalles ouverts dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

Exercice 5

Montrer que toute boule ouverte de E est un ouvert.

Proposition 18

Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de E. Alors :

- $\bigcup_{i\in I} A_i$ est un ouvert.
- **si I est fini**, $\bigcap_{i\in I} A_i$ est ouvert.

Remarque :

$\bigcap_{i\in I} A_i$ dans le cas I infini ?

3.3. Fermés d'un espace vectoriel normé

3.3. Fermés d'un espace vectoriel normé

Definition 16

Une partie F de E est un *fermé* (ou une *partie fermée*) de E lorsque son complémentaire F^c est un ouvert de E.

Exemples :

E, $\varnothing$, les intervalles fermés dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

Remarques :

- Partie ni ouverte ni fermée ?
- Partie à la fois ouverte et fermée ?
- **Ne pas confondre fermé et borné.**

3.3. Fermés d'un espace vectoriel normé

Exercice 6

Montrer que toute boule fermée de E est un fermé. Montrer que toute sphère de E est un fermé.

Proposition 19

Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de fermés de E. Alors :

- $\bigcap_{i\in I} F_i$ est un fermé.
- **si I est fini, $\bigcup_{i\in I} F_i$ est fermé.**

Remarque :

$\bigcup_{i\in I} F_i$ dans le cas I infini ?

3.4. Intérieur d'une partie

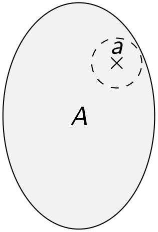
3.4. Intérieur d'une partie

Definition 17

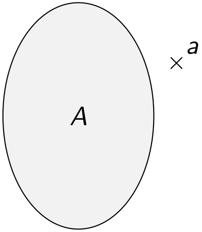
Soit A une partie de E, et $a \in E$. On dit que a est un point *intérieur* à A lorsqu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(a, \varepsilon) \subset A$.

Remarque :

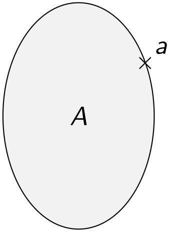
a est intérieur à $A \quad \Leftrightarrow \quad A$ est un voisinage de a.



a intérieur



a pas intérieur



a pas intérieur

3.4. Intérieur d'une partie

Definition 18

Soit A une partie de E. On appelle *intérieur* de A et on note $\mathring{A}$, l'ensemble de tous les points intérieurs à A.

Proposition 20

Pour $A \subset E$, $\mathring{A}$ est la réunion de tous les ouverts contenus dans A.

Remarque :

$\mathring{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans A.

3.4. Intérieur d'une partie

Proposition 21

Soit $A, B \subset E$.

a) $A \subset B \Rightarrow \mathring{A} \subset \mathring{B}$.

b) $\mathring{A} \subset A$ avec égalité **ssi** A est ouvert

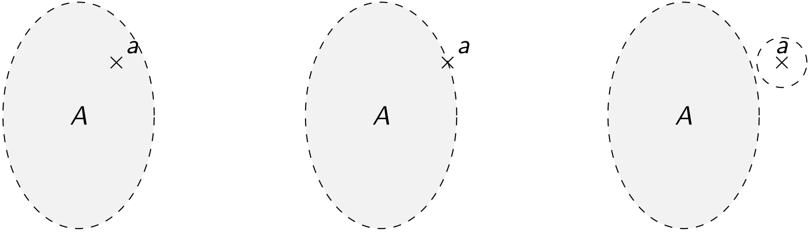
c) $\mathring{\mathring{A}} = \mathring{A}$

3.5. Adhérence d'une partie

3.5. Adhérence d'une partie

Definition 19

Soit A une partie de E et $a \in E$. On dit que a est un point *adhérent* à A lorsque pour tout $r > 0$, $B(a, r) \cap A \neq \varnothing$.



a adhérent — a adhérent — a pas adhérent

Definition 20

Pour une partie non vide A de E et $a \in E$, on appelle *distance* de a à A le réel positif :

$$\mathrm{d}(a, A) = \inf_{x \in A} \mathrm{d}(a, x) = \inf_{x \in A} \|x - a\|$$

Proposition 22

Pour $A \subset E$ non vide, un point $a \in E$ est adhérent à A **ssi** $\mathrm{d}(a, A) = 0$.

3.5. Adhérence d'une partie

Definition 21

Soit A une partie de E. On appelle *adhérence* de A et on note $\overline{A}$, l'ensemble de tous les points adhérents à A.

Proposition 23

Pour $A \subset E$, $\overline{A}$ est l'intersection de tous les fermés contenant A.

Remarque :

$\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A.

Proposition 24

Soit $A, B \subset E$.

a) $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$.

b) $A \subset \overline{A}$ avec égalité **ssi** A est fermé

c) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$

3.6. Intérieur vs adhérence, frontière

3.6. Intérieur vs adhérence, frontière

Proposition 25

Pour toute partie A de E on a :

- $(\overline{A})^c = (A^c)^\circ$
- $(\mathring{A})^c = \overline{A^c}$

Remarque :

En passant aux complémentaires :

- a intérieur à A **ssi** a pas adhérent à A^c.
- a est adhérent à A **ssi** a n'est pas intérieur à A^c.

3.6. Intérieur vs adhérence, frontière

Definition 22

Soit A une partie de E et $a \in E$. On dit que a est un *point frontière* lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \quad B(a,\varepsilon) \cap A \neq \varnothing \textbf{ et } B(a,\varepsilon) \cap A^c \neq \varnothing$$

On appelle *frontière* de A et on note $\mathrm{Fr}(A)$ l'ensemble des points frontière de A.

Remarque :

$\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \cap \overline{A^c} = \overline{A} \backslash \mathring{A}$. C'est une partie fermée.

Exemples :

Frontière d'une boule ? Frontière de $[0,1[$ dans $\mathbb{R}$?

3.7. Caractérisation séquentielle de l'adhérence et des fermés

3.7. Caractérisation séquentielle de l'adhérence et des fermés

Proposition 26

Soit A une partie de E.

a) $a \in E$ est adhérent à A **ssi** il existe une suite de A qui converge vers a.

b) A est fermée **ssi** toute suite de A qui converge dans E a sa limite dans A.

Remarque :

Une partie fermée empêche les suites de "s'échapper".

3.7. Caractérisation séquentielle de l'adhérence et des fermés

Proposition 27

Si $\|\cdot\|'$ est une norme équivalente à $\|\cdot\|$, $(E, \|\cdot\|)$ et $(E, \|\cdot\|')$ ont la même topologie.

Remarques :

- Mêmes ouverts, fermés, intérieur, adhérence, ensemble de voisinages.
- Boules différentes !

3.8. Densité

3.8. Densité

Definition 23

On dit qu'une partie A de E est *dense* dans E lorsque $\overline{A} = E$.

Proposition 28

Soit A une partie de E. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) A est dense dans E

(ii) Pour toute partie ouverte non vide Ω, on a $A \cap \Omega \neq \varnothing$.

(iii) Pour tout $a \in E$, il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers a.

Exemple :

$\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}^c$ dans $\mathbb{R}$.

3.9. Parties compactes

3.9. Parties compactes

Definition 24

Soit $K \subset E$. On dit que K est un *compact* de E, ou une partie *compacte* de E, lorsque toute suite de K admet une sous-suite convergente vers un élément de K.

Remarques :

- Toute suite de K admet au moins une valeur d'adhérence dans K.
- Propriété de Bolzano-Weierstrass.

3.9. Parties compactes

Exercice 7

Montrer que toute partie finie de E est une partie compacte.

Proposition 29

Soit K un compact de E et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de K. Alors la suite $(u_n)_n$ converge **ssi** elle admet une unique valeur d'adhérence.

3.9. Parties compactes

Proposition 30

Si K est une partie compacte de E, alors K est fermée et bornée.

Remarque :

Réciproque fausse en général, mais vraie en dimension finie !

Proposition 31

Si K est une partie compacte de E et F un fermé, alors $F \cap K$ est compact.