Chapitre 10

Révisions MP2

Adjoint d'un endomorphisme dans un espace euclidien

Matrices orthogonales

Isométries vectorielles d'un espace

Endomorphismes

Endomorphismes d'un espace euclidien

Lundi 24 novembre 2025

Table des matières

Chapitre 10

Révisions MP

Adjoint d'ur endomorphisme dans un espace euclidien

Matrices orthogonale

Isométries vectorielles d'un espace

Endomorphismes

- Adjoint d'un endomorphisme dans un espace euclidien
- 2 Matrices orthogonales
- 3 Isométries vectorielles d'un espace euclidien
- 4 Endomorphismes autoadjoints

Table des matières

Chapitre 10

Adjoint d'un endomorphisme dans un espace euclidien

Représentation d'une forme linéaire dans un espace euclidier Définition et propriétés de

Matrices orthogonale

Isométries vectorielles d'un espace euclidien

Endomorphismes

- Adjoint d'un endomorphisme dans un espace euclidien
- 2 Matrices orthogonales
- 3 Isométries vectorielles d'un espace euclidier
- 4 Endomorphismes autoadjoints

Chapitre 10

Adjoint d'un endomorphisme dans un espace euclidien

Représentation d'une forme linéaire dans un espace euclidien Définition et

l adjoint Matrices

orthogonales Isométries

vectorielles d'un espace euclidien

Endomorphismes

1. Adjoint d'un endomorphisme dans un espace euclidien

1. Adjoint d'un endomorphisme dans un espace euclidien

Chapitre 10

Représentation d'une forme linéaire dans un espace euclidien

Endomorphismes

1.1. Représentation d'une forme linéaire dans un espace euclidien

1.1. Représentation d'une forme linéaire dans un espace euclidien

Chapitre 10

Adjoint d'ui endomorphisme dans un espace euclidien

Représentation d'une forme linéaire dans un espace euclidien Définition et

Natrices

Isométries vectorielles d'un espace euclidien

Endomorphismes

Proposition 1

Pour toute forme linéaire $\varphi \in \mathcal{L}(E,\mathbb{R})$ il existe un unique vecteur $v \in E$ tel que :

$$\forall x \in E, \quad \varphi(x) = (v|x)$$

L'application $v \mapsto (v|\cdot)$ réalise un isomorphisme de E sur $\mathcal{L}(E,\mathbb{R})$.

Remarques:

- φ et v ont les mêmes composantes dans $\mathcal B$ orthonormale : Matrice ligne $L=V^{\top}$
- Si \mathcal{B} quelconque : $L = V^{\top}M$ avec $M = ((e_i|e_j))_{1 \le i, i \le n}$.

1. Adjoint d'un endomorphisme dans un espace euclidien

Chapitre 10

Adjoint d'un endomorphisme dans un espace

Représentation d'une forme linéaire dans un espace euclidier Définition et

Définition et propriétés de l'adjoint

Matrices orthogonales

Isométries vectorielles d'un espace euclidien

Endomorphismes

1.2. Définition et propriétés de l'adjoint

Chapitre 10

Adjoint d'ur endomorphisme dans un espace euclidien

d'une forme linéaire dans ur espace euclidies Définition et propriétés de

Matrices orthogonales

l'adjoint

Isométries vectorielles d'un espace euclidien

Endomorphismes autoadjoints

Definition 1

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On appelle *adjoint* de u, et on note u^* , l'application qui à tout $y \in E$ associe le représentant de la forme linéaire $x \mapsto \big(y|u(x)\big)$. l'adjoint u^* de u est donc défini par la relation fondamentale :

$$\forall x, y \in E, \quad (u^*(y)|x) = (y|u(x))$$

Remarque:

On écrira plutôt :

$$\forall x, y \in E, \quad (u(x)|y) = (x|u^*(y))$$

Chapitre 10

Adjoint d'ur endomorphisme dans un espace euclidien

d'une forme linéaire dans ur espace euclidie Définition et propriétés de l'adjoint

Matrices orthogonales

Isométries vectorielles d'un espace euclidien

Endomorphismes

Proposition 2

- a) Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, $u^* \in \mathcal{L}(E)$.
- **b)** $u \mapsto u^*$ est linéaire : élément de $\mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$!
- c) $\forall u, v \in \mathcal{L}(E)$, $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$.
- **d)** $\forall u \in \mathcal{L}(E), (u^*)^* = u : u \mapsto u^*$ est involutive.

Chapitre 10

Adjoint d'ur endomorphisme dans un espace euclidien

Représentation d'une forme linéaire dans un espace euclidier Définition et propriétés de

l'adjoint Matrices

Isométries vectorielles d'un espace euclidien

Endomorphismes autoadjoints

Proposition 3

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $M = \underset{\mathcal{B}}{\operatorname{Mat}}(u) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors $v = u^*$ ssi $\underset{\mathcal{A}}{\operatorname{Mat}}(v) = M^\top$.

Remarques:

- $(u(x)|y) = (x|u^*(y))$ donne matriciellement $(MX)^\top Y = X^\top (M^\top Y)$
- Plus valable si $\mathcal B$ pas orthonormée!

Chapitre 10

Adjoint d'ur endomorphisme dans un espace euclidien

Représentation d'une forme linéaire dans un espace euclidie Définition et

propriétés de l'adjoint

Matrices orthogonales

Isométries vectorielles d'un espace euclidien

Endomorphismes

Proposition 4

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E stable par u. Alors F^{\perp} est stable par u^* .

Table des matières

Chapitre 10

Adjoint d'ur endomorphisme dans un espace euclidien

Matrices orthogonales

Définition et

caractérisation

orthogonal
Orientation d'un
espace vectoriel
réel de dimensio

Isométries vectorielles d'un espace

Endomorphismes

- Adjoint d'un endomorphisme dans un espace euclidier
- 2 Matrices orthogonales
 - Isométries vectorielles d'un espace euclidien
- 4 Endomorphismes autoadjoints

Chapitre 10

Adjoint d'un endomorphisme dans un espace

Matrices orthogonales

Définition et

C-----

Groupe orthogonal

Orientation d'un espace vectoriel réel de dimension

Isométries vectorielles d'un espace

Endomorphismes

2. Matrices orthogonales

2. Matrices orthogonales

Chapitre 10

Adjoint d'un endomorphisme dans un espace

Matrices orthogonales

Définition et

Groupe orthogonal Orientation d'u espace vectorie réel de dimensi

Isométries vectorielles d'un espace

Endomorphismes

2.1. Définition et caractérisations

2.1. Définition et caractérisations

Chapitre 10

Adjoint d'ur endomorphisme dans un espace euclidien

Matrices orthogonale

Définition et

Groupe orthogonal Orientation d'un espace vectoriel réel de dimension

Isométries vectorielles d'un espace

Endomorphismes

Definition 2

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *orthogonale* lorsque $A^\top A = I_n$. On note $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathrm{O}(n)$ l'ensemble des matrices orthogonales d'ordre n.

Remarque:

A orthonormale ssi A inversible et $A^{-1} = A^{\top}$.

Endomorphismes autoadjoints

Proposition 5

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
- (ii) La famille (C_1, \ldots, C_n) des colonnes est orthonormale.
- (iii) La famille (L_1, \ldots, L_n) des lignes est orthonormale.

Remarques:

- Produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$.
- $\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} a_{j,k} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i} a_{k,j} = \delta_{i,j}.$

2.1. Définition et caractérisations

Chapitre 10

Adjoint d'ur endomorphisme dans un espace euclidien

Matrices orthogonales Définition et caractérisations

Groupe orthogonal Orientation d'un espace vectoriel réel de dimension finie.

Isométries vectorielles d'un espace euclidien

Endomorphismes autoadjoints

Proposition 6

Soit \mathcal{B}' une base quelconque de E, et soit $P = \operatorname{Mat}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ la matrice de passage de la base \mathcal{B} orthonormale vers la base \mathcal{B}' .

Alors \mathcal{B}' est orthonormale ssi P est orthogonale.

Remarques:

- Changement de base pour un vecteur : $X' = P^{-1}X = P^{\top}X$.
- Changement de base pour un endomorphisme :

$$M' = P^{-1}MP = P^{\top}MP.$$

M et M' orthogonalement semblables.

2. Matrices orthogonales

Chapitre 10

Adjoint d'un endomorphisme dans un espace

Matrices orthogonales Définition et

Groupe

orthogonal

Orientation d'u espace vectorie réel de dimensi

Isométries vectorielles d'un espace

Endomorphismes autoadjoints

2.2. Groupe orthogonal

2.2. Groupe orthogonal

Chapitre 10

Adjoint d'ur endomorphisme dans un espace euclidien

Matrices orthogonales Définition et

Groupe orthogonal

Orientation d'un espace vectoriel réel de dimension finie.

Isométries vectorielles d'un espace euclidien

Endomorphismes autoadjoints

Proposition 7

 $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Proposition 8

Pour toute matrice $A \in O_n(\mathbb{R})$, $|\det(A)| = 1$.

2.2. Groupe orthogonal

Chapitre 10

Adjoint d'un endomorphisme dans un espace euclidien

Matrices orthogonales Définition et

Groupe orthogonal

Orientation d'ur espace vectoriel réel de dimensio finie.

Isométries vectorielles d'un espace euclidien

Endomorphismes autoadjoints

Definition 3

Soit $A \in O_n(\mathbb{R})$. On dit que A est orthogonale *positive* ou *directe* lorsque $\det(A) = 1$ et orthogonale *négative* ou *indirecte* lorsque $\det(A) = -1$.

Proposition 9

l'ensemble des matrices orthogonales positives forme un sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$, appelé *groupe spécial orthogonal* d'ordre n, et noté $SO_n(\mathbb{R})$ ou SO(n).

Remarques:

- Rappel : groupe spécial linéaire d'ordre n $SL_n(\mathbb{R}) = \{ A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1 \}$
- $SO_n(\mathbb{R}) = O_n(\mathbb{R}) \cap SL_n(\mathbb{R}).$

2. Matrices orthogonales

Chapitre 10

Orientation d'un espace vectoriel réel de dimension

Endomorphismes

2.3. Orientation d'un espace vectoriel réel de dimension finie.

2.3. Orientation d'un espace vectoriel réel de dimension finie.

Chapitre 10

Proposition 10

Adjoint d'un endomorphisme dans un espace euclidien

Matrices orthogonales Définition et

Groupe orthogonal Orientation d'u

Orientation d'un espace vectoriel réel de dimension finie.

Isométries vectorielles d'un espace euclidien

Endomorphismes autoadjoints

$$\mathcal{B}\,\mathcal{R}\,\mathcal{B}' \;\Leftrightarrow\; \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') > 0$$

définit une relation d'équivalence sur l'ensemble des bases de E, avec exactement deux classes.

Définition 4

On appelle *orientation* de *E* l'une de ces deux classes : ensemble des bases appelées *directes*. Les autres sont appelées *indirectes*. *E* est alors un espace vectoriel *orienté*.

Exemple:

Orientation canonique de \mathbb{R}^n : classe contenant la base canonique.

2.3. Orientation d'un espace vectoriel réel de dimension finie.

Chapitre 10

Adjoint d'ur endomorphisme dans un espace euclidien

Matrices orthogonales

Définition et caractérisation

Groupe

Orientation d'un espace vectoriel réel de dimension finie.

Isométries vectorielles d'un espace euclidien

Endomorphismes autoadjoints

Proposition 11

Si E est euclidien orienté, \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases orthonormales directes, on a $\det_{\mathcal{B}} = \det_{\mathcal{B}'}$.

Remarque:

 $\det_{\mathcal{B}}(x_1,\ldots,x_n)$ est le "volume orienté" d'un "parallèpipède".

Table des matières

Chapitre 10

Adjoint d'ui endomorphisme dans un espace euclidien

Matrices orthogonales

Isométries vectorielles d'un espace

d'un espace euclidien

Propriétés et caractérisation

Caractérisation matricielle groupe orthogonal

vectorielles e dimension 2 Réduction de

Endomorphismes autoadioints

- Adjoint d'un endomorphisme dans un espace euclidien
- 2 Matrices orthogonales
- 3 Isométries vectorielles d'un espace euclidien
- 4 Endomorphismes autoadjoints

Chapitre 10

Isométries vectorielles d'un espace

euclidien

Endomorphismes

3. Isométries vectorielles d'un espace euclidien

3. Isométries vectorielles d'un espace euclidien

Chapitre 10

Adjoint d'un endomorphisme dans un espace euclidien

Matrices orthogonales

Isométries vectorielles

Définition.

Propriétés et caractérisation

groupe

orthogonal

dimension 2
Réduction de

Endomorphismes

3.1. Définition.

3.1. Définition.

Chapitre 10

phisme dans un espace euclidien Matrices

orthogonales

vectorielles

Définition.

Propriétés et caractérisation Caractérisation matricielle groupe orthogonal

Isométries vectorielles e dimension 2 Réduction de isométries

Endomorphismes autoadjoints

Definition 5

Une isométrie vectorielle de E est un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant :

$$\forall x \in E, \quad \|u(x)\| = \|x\|.$$

Remarque:

On en déduit d(u(x), u(y)) = d(x, y) pour tout x, y

3. Isométries vectorielles d'un espace euclidien

Chapitre 10

vectorielles

Propriétés et caractérisation

Endomorphismes

3.2. Propriétés et caractérisation

3.2. Propriétés et caractérisation

Chapitre 10

Matrices

vectorielles

Propriétés et caractérisation

Endomorphismes

Proposition 12

Si u est une isométrie vectorielle de E , u est un automorphisme de E, et u^{-1} est également une isométrie vectorielle.

3.2. Propriétés et caractérisation

Chapitre 10

Adjoint d'ui endomorphisme dans un espace euclidien

Matrices orthogonales

Isométries vectorielles d'un espace euclidien

euclidier Définition

Propriétés et caractérisation

Caractérisation matricielle - groupe orthogonal

Isométries vectorielles er dimension 2 Réduction de isométries

Endomorphismes autoadjoints

Proposition 13

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les trois assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) u est une isométrie vectorielle;
- (ii) pour tout $x, y \in E$, (u(x)|u(y)) = (x|y).
- (iii) Pour toute base orthonormale (e_1, \ldots, e_n) , $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ est une base orthonormale.

Remarques:

- en particulier $x \perp y \Rightarrow u(x) \perp u(y)$
- appellation alternative : automorphisme orthogonal.

Proposition 14

u est une isométrie vectorielle **ssi** $u^* = u^{-1}$.

3. Isométries vectorielles d'un espace euclidien

Chapitre 10

Matrices

vectorielles

Caractérisation matricielle groupe orthogonal

Endomorphismes

3.3. Caractérisation matricielle - groupe orthogonal

3.3. Caractérisation matricielle - groupe orthogonal

Chapitre 10

Proposition 15

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, représentée par $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans la base (orthonormale) \mathcal{B} . Alors u est une isométrie vectorielle **ssi** M est orthogonale.

Proposition 16

L'ensemble des *isométries vectorielles* de E, muni de la loi \circ , constitue un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$. Il est appelé *groupe orthogonal* de E, et noté $\mathrm{O}(E)$.

Remarque:

 $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}:\mathcal{L}(E)\to\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ induit un isomorphisme } \mathcal{O}(E)\to\mathcal{O}_n(\mathbb{R}).$

Adjoint d'ur endomorphisme dans un espace euclidien

Matrices orthogonales

vectorielles d'un espace euclidien

Propriétés et caractérisation

Caractérisation matricielle groupe orthogonal

Isométries vectorielles er dimension 2 Réduction des isométries

Endomorphismes autoadjoints

3.3. Caractérisation matricielle - groupe orthogonal

Chapitre 10

Adjoint d'ur endomorphisme dans un espace euclidien

Matrices orthogonales

vectorielles d'un espace euclidien

euclidien Définition.

Propriétés et caractérisation

matricielle groupe orthogonal

vectorielles e dimension 2 Réduction de isométries

Endomorphismes

Proposition 17

Pour toute isométrie vectorielle $u \in O(E)$, $|\det(u)| = 1$.

Remarques:

- \bullet det(u) = 1: isométrie *directe*
- det(u) = -1 : isométrie *indirecte*

3.3. Caractérisation matricielle - groupe orthogonal

Chapitre 10

Adjoint d'un endomorphisme dans un espace euclidien

Matrices orthogonales

Isométries vectorielles

d un espace euclidien

Propriétés et

Caractérisation matricielle groupe orthogonal

Isométries vectorielles e dimension 2 Réduction de

Endomorphismes autoadjoints

Proposition 18

L'ensemble des isométries vectorielles de déterminant 1 forme un sous-groupe de O(E), appelé groupe spécial orthogonal de E et noté SO(E).

Remarque:

Isomorphisme $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}: SO(E) \to SO_n(\mathbb{R}).$

3. Isométries vectorielles d'un espace euclidien

Chapitre 10

vectorielles

Isométries

vectorielles en dimension 2

Endomorphismes

3.4. Isométries vectorielles en dimension 2

3.4. Isométries vectorielles en dimension 2

Chapitre 10

Adjoint d'un endomorphisme dans un espace euclidien

Matrices orthogonales

Isométries vectorielles

euclidien

Définitio

Propriétés et caractérisation

Caractérisation matricielle - groupe

Isométries vectorielles en dimension 2 Réduction des isométries

Endomorphismes autoadjoints

Proposition 19

Soit $M \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$. Il existe un unique $\theta \in]-\pi,\pi]$, tel que :

• Si det(M) = 1 (ie. $M \in SO_2(\mathbb{R})$):

$$M = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

• Si det(M) = -1 (ie., $M \in O_2(\mathbb{R}) \backslash SO_2(\mathbb{R})$:

$$M = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}.$$

Remarque:

cas det(M) = -1: $\chi_M = X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1)$ donc M diagonalisable.

3.4. Isométries vectorielles en dimension 2

Chapitre 10

Adjoint d'un endomorphisme dans un espace euclidien

Matrices orthogonales

Isométries vectorielles d'un espace euclidien

Définition

Propriétés et caractérisation Caractérisation matricielle groupe

Isométries vectorielles en dimension 2 Réduction des

Endomorphismes autoadjoints Proposition 20

L'application $R: t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$ est un morphisme surjectif du groupe $(\mathbb{R}, +)$ sur le groupe $(\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}), \times)$, de noyau $2\pi\mathbb{Z}$.

Remarque:

S'identifie au morphisme $t \mapsto e^{it}$, via l'isomorphisme

$$x + iy \mapsto \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$$

Corollaire 1

Le groupe $SO_2(\mathbb{R})$ est commutatif.

3.4. Isométries vectorielles en dimension 2

Chapitre 10

Adjoint d'ur endomorphisme dans un espace euclidien

Matrices orthogonales

Isométries vectorielles

euclidien Définition

Propriétés

Caractérisation

Caractérisation

matricielle -

groupe orthogonal

vectorielles en dimension 2 Réduction des isométries

Endomorphismes autoadjoints

Definition 6

Les éléments de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ sont appelées matrices de rotation. $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ lui-même est souvent appelé groupe des rotations.

Remarques:

- Traduction de $R(\theta)R(\theta') = R(\theta + \theta')$?
- Angle orienté (u, v)?
- (a, b) image de (1, 0): angle donnée par arg(a + ib).

3. Isométries vectorielles d'un espace euclidien

Chapitre 10

vectorielles

Réduction des isométries

Endomorphismes

3.5. Réduction des isométries

Chapitre 10

Adjoint d'ur endomorphisme dans un espace euclidien

Matrices orthogonales

Isométries vectorielles

l'un espace uclidien

Définitio

Propriétés et caractérisation Caractérisation

matricielle groupe orthogonal

Réduction des

Endomorphismes autoadjoints

Proposition 21

Soit $f \in O(E)$ et F un sous-espace de E stable par f. Alors F^{\perp} est stable par f.

Remarque:

Représentation dans une BON adaptée à $F \oplus F^{\perp}$.

Chapitre 10

Matrices

Réduction des isométries

Endomorphismes autoadioints

Proposition 22

Si $f \in O(E)$, $\operatorname{Sp}(f) \subset \{-1, 1\}$.

Exercice 1

Montrer plus généralement que si $f \in O(E)$, $\operatorname{Sp}_{|_{\mathbb{C}}}(f) \subset \mathbb{U}$, autrement dit que toutes les valeurs propres complexes de f sont de module 1.

Chapitre 10

Adjoint d'ur endomorphisme dans un espace euclidien

Matrices orthogonales

vectorielles d'un espace euclidien

Propriétés et caractérisation Caractérisation matricielle groupe orthogonal

dimension 2 Réduction des isométries

Endomorphismes autoadjoints

Proposition 23

Pour toute isométrie vectorielle directe $f \in SO(\mathbb{R}^3)$, il existe une droite \mathcal{D} et un réel $\theta \in \mathbb{R}$, telle que :

- pour tout $x \in \mathcal{D}$, f(x) = x;
- l'endomorphisme induit par f sur $\mathcal{P}=\mathcal{D}^{\perp}$ soit la rotation d'angle θ .

Remarques:

- ullet f rotation d'angle heta et d'axe $\mathcal D$
- Ambiguité sur le sens de rotation.

Chapitre 10

Adjoint d'ur endomorphisme dans un espace euclidien

Matrices orthogonales

Isométries vectorielles

euclidien

Propriétés et caractérisation

matricielle groupe

orthogonal Isométries

Réduction des

Endomorphismes

Corollaire 2

Pour toute matrice $M \in SO_3(\mathbb{R})$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que M soit orthogonalement semblable à la matrice

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Chapitre 10

Adjoint d'ur endomorphisme dans un espace euclidien

Matrices orthogonales

Isométries

euclidie

Definition

caractérisation

groupe orthogonal

Réduction des

Endomorphismes autoadjoints

Theoreme 1

Soit u une isométrie vectorielle de E. Alors il existe une base orthonormée dans laquelle u est diagonales par blocs, avec des blocs de la forme :

(1) ,
$$(-1)$$
 ou $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$

Table des matières

Chapitre 10

- Adjoint d'un endomorphisme dans un espace euclidien
- Matrices orthogonales Isométries
- Isométries vectorielles d'un espace euclidien
- Endomorphisme autoadjoints
- matricielle.

 Exemple 1 : le
- Exemple 2 : le symétries
- orthogonales.
- spectral.
 Endomorphism

- Adjoint d'un endomorphisme dans un espace euclidier
- 2 Matrices orthogonales
- 3 Isométries vectorielles d'un espace euclidier
- 4 Endomorphismes autoadjoints

Chapitre 10

Adjoint d un endomorphisme dans un espace euclidien

Matrices orthogonales

Isométries vectorielles d'un espace

Endomorphisme

interprétation matricielle.

Exemple 1 : le projecteurs orthogonaux

Exemple 2 : le symétries

Théorèm

Endomorphismes autoadjoints positifs et défini

4. Endomorphismes autoadjoints

Chapitre 10

Adjoint d'un endomorphisme dans un espace euclidien

Matrices orthogonales

Isométries vectorielles d'un espace

Endomorphismes

Définition et

matricielle. Exemple 1 : projecteurs

Exemple 2 : le symétries

Théorèn spectral

Endomorphismes autoadjoints positifs et défini 4.1. Définition et interprétation matricielle.

4.1. Définition et interprétation matricielle.

Chapitre 10

Adjoint d'un endomorphisme dans un espace euclidien

Matrices orthogonales

Isométries vectorielles d'un espace euclidien

autoadjoints
Définition et interprétation matricielle.

Endomorphismes

Exemple 1 : le projecteurs orthogonaux.

Exemple 2 : le symétries orthogonales.

Théorèn spectral

spectrai. Endomorphismes autoadjoints positis et défini

Definition 7

On dit qu'un endomorphisme u de E est autoadjoint lorsque $u^*=u$, donc lorsque pour tout $(x,y)\in E$:

$$\langle u(x)|y\rangle = \langle x|u(y)\rangle$$

On note S(E) l'ensemble des endomorphismes autoadjoints.

Proposition 24

L'ensemble S(E) est un sous-espace vectoriel de L(E).

Remarque:

Appelé aussi endomorphisme symétrique.

4.1. Définition et interprétation matricielle.

Chapitre 10

Adjoint d'un endomorphisme dans un espace euclidien

Matrices orthogonales

Isométries vectorielles d'un espace euclidien

Endomorphismes autoadjoints

interprétation matricielle. Exemple 1 : le

orthogonaux.

Exemple 2 : le symétries orthogonales.

Théorème spectral.

spectial. Endomorphismes autoadjoints positifs et défini positifs

Proposition 25

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. La base \mathcal{B} étant orthonormée, u est autoadjoint si, et seulement si, $\mathop{\mathrm{Mat}}_{\mathcal{B}}(u)$ est une matrice symétrique.

Proposition 26

Soit f autoadjoint et F un sous-espace de E stable par f. Alors F^{\perp} est également stable par f.

Chapitre 10

Adjoint d'un endomorphisme dans un espace euclidien

Matrices orthogonales

Isométries vectorielles d'un espace

d'un espace euclidien

autoadjoints

Exemple 1 : les projecteurs orthogonaux.

Exemple 2 : le symétries

Théorèn

Endomorphisme autoadjoints positifs et défini 4.2. Exemple 1 : les projecteurs orthogonaux.

4.2. Exemple 1 : les projecteurs orthogonaux.

Chapitre 10

Adjoint d'ur endomorphisme dans un espace euclidien

Matrices orthogonales

Isométries vectorielles d'un espace euclidien

Endomorphismes autoadjoints Définition et

Exemple 1 : les projecteurs orthogonaux.

Exemple 2 : le symétries

Théorème spectral. Endomorph autoadjoint Remarque :

 $F \oplus F^{\perp} = E$ (dimension finie) : projecteur orthogonal bien défini.

Proposition 27

Soit p un projecteur de E. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) p est un projecteur orthogonal;
- (ii) p est autoadjoint.

Exercice 2

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur. Montrer que p est un projecteur othogonal si, et seulement si :

$$\forall x \in E \quad , \|p(x)\| \le \|x\|.$$

Chapitre 10

Adjoint d'un endomorphisme dans un espace euclidien

Matrices orthogonales

Isométries vectorielles d'un espace euclidien

Endomorphismes autoadjoints

Définition et interprétation matricielle.

Exemple 1 : projecteurs

Exemple 2 : les symétries orthogonales.

Theoreme spectral. Endomorphism autoadjoints positifs et défir 4.3. Exemple 2 : les symétries orthogonales.

4.3. Exemple 2 : les symétries orthogonales.

Chapitre 10

Adjoint d'ur endomorphisme dans un espace euclidien

Matrices orthogonales

Isométries vectorielles d'un espace euclidien

Endomorphismes autoadjoints

interprétation matricielle. Exemple 1 : le projecteurs

Exemple 2 : les symétries orthogonales.

I heoreme spectral. Endomorphismes autoadjoints positifs et défini

Definition 8

On dit qu'une symétrie $s \in \mathcal{L}(E)$ est une *symétrie orthogonale* lorsque les deux sous-espaces propres $F = \operatorname{Ker}(s - Id)$ et $G = \operatorname{Ker}(s + Id)$ sont orthogonaux.

Remarque:

Symétrie orthogonale s_F bien définie : $s_F = 2p_F - Id$.

4.3. Exemple 2 : les symétries orthogonales.

Chapitre 10

Adjoint d'un endomorphisme dans un espace euclidien

orthogonales Isométries vectorielles

d'un espace euclidien Endomorphismes

Définition et interprétation matricielle. Exemple 1 : les projecteurs orthogonaux.

Exemple 2 : les symétries orthogonales.

Théorème spectral. Endomorphisme autoadjoints positife et défini

Proposition 28

Soit $s \in \mathcal{L}(E)$ une symétrie vectorielle. Les trois assertions sont équivalentes :

- (i) s est une symétrie orthogonale;
- (ii) s est une isométrie vectorielle;
- (iii) s est autoadjoint

Exercice 3

Montrer que si $u \in \mathcal{L}(E)$ est à la fois une isométrie vectorielle et un endomorphisme autoadjoint, alors c'est nécessairement une symétrie (orthogonale).

Chapitre 10

Adjoint d'un endomorphisme dans un espace euclidien

Matrices orthogonales

orthogonales Isométries vectorielles

vectorielles d'un espace euclidien

Endomorphismes

Définition et

matricielle.

Exemple 1 : l
projecteurs

Exemple 2 : l symétries

Théorème spectral.

Endomorphismes autoadjoints positifs et défini 4.4. Théorème spectral.

4.4. Théorème spectral.

Chapitre 10

Adjoint d'ur endomorphisme dans un espace euclidien

Matrices orthogonales

Isométries vectorielles d'un espace euclidien

Endomorphismes autoadjoints
Définition et interprétation matricielle.
Exemple 1 : les projecteurs orthogonaux.

Exemple 2 : le symétries orthogonales.

Théorème spectral.

Endomorphismes autoadjoints positifs et défini positifs

Theoreme 2

Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E. Les trois assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) u est autoadjoint
- (ii) E est somme orthogonale des sous-espaces propres de u.
- (iii) *u* est diagonalisable dans une base orthonormée.

Corollaire 3

Pour toute matrice symétrique $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, il existe une matrice orthogonale $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, et une matrice diagonale réelle D telle que :

$$A = PDP^{-1} = PDP^{\top}$$
.

Chapitre 10

Adjoint d'un endomorphisme dans un espace euclidien

Matrices orthogonales

Isométries vectorielles d'un espace

Endomorphismes

Définition et

Exemple 1 :

Exemple 2 : le symétries

Théorèn

positifs

Endomorphismes autoadjoints positifs et défini 4.5. Endomorphismes autoadjoints positifs et défini positifs

Chapitre 10

Adjoint d'ur endomorphisme dans un espace euclidien

Matrices orthogonales

Isométries vectorielles d'un espace

euclidien Endomorphismes

Définition et interprétation matricielle.

Exemple 1 : projecteurs

Exemple 2 : le symétries

Théorè

Endomorphismes autoadjoints positifs et défini positifs

Definition 9

On dit que $u \in \mathcal{S}(E)$ est autoadjoint *positif* lorsque

$$\forall x \in E, \quad (x|u(x)) \geqslant 0$$

On dit que $u \in \mathcal{S}(E)$ est autoadjoint défini positif lorsque

$$\forall x \in E \setminus \{0\}, \quad (x|u(x)) > 0$$

Chapitre 10

Adjoint d'ur endomorphisme dans un espace euclidien

Matrices orthogonale

Isométries vectorielles d'un espace euclidien

Endomorphismes

Définition et interprétation matricielle

Exemple 1 : projecteurs

Exemple 2 : l

Théorè

Endomorphismes autoadjoints positifs et défini positifs

Proposition 29

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\varphi : (x, y) \mapsto (x|u(y))$. Alors :

- φ est une forme bilinéaire sur E^2 .
- Si $u \in \mathcal{S}(E)$, φ est une forme bilinéaire symétrique.
- Si $u \in S^+(E)$, φ est une forme bilinéaire symétrique positive.
- Si $u \in S^{++}(E)$, φ est un produit scalaire.

Chapitre 10

Adjoint d'ur endomorphisme dans un espace euclidien

Matrices orthogonales

Isométries vectorielles d'un espace euclidien

Endomorphismes

Définition et interprétation matricielle.

Exemple 1 : projecteurs orthogonaux

Exemple 2 : le symétries orthogonales.

Théorè

Endomorphismes autoadjoints positifs et défini positifs

Definition 10

On dit que $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est symétrique *positive* lorsque :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad X^{\top}AX \geqslant 0$$

On dit que $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est symétrique *définie positive* lorsque :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \quad X^{\top}AX > 0$$

Chapitre 10

Adjoint d'un endomorphisme dans un espace euclidien

Matrices orthogonales

Isométries vectorielles d'un espace euclidien

Endomorphismes autoadjoints

matricielle.

Exemple 1 : le

projecteurs orthogonaux.

Exemple 2 : le symétries orthogonales.

Théorè

Endomorphismes autoadjoints positifs et défini positifs

Proposition 30

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et A sa matrice représentative dans une base orthonormée de E. Alors

- $u \in \mathcal{S}^+(E)$ ssi $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
- $u \in \mathcal{S}^{++}(E)$ ssi $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Proposition 31

Soit $u \in \mathcal{S}(E)$. Alors

- $u \in S^+(E)$ ssi $\operatorname{Sp}(u) \subset [0, +\infty[$.
- $u \in \mathcal{S}^{++}(E)$ ssi $\operatorname{Sp}(u) \subset]0, +\infty[$.

Remarque:

Caractérisation analogue pour une matrice symétrique.