Intégration

Fiche récapitulative n° 11

Définitions

- Convergence d'une intégrale $\int_a^{+\infty} f$ pour une fonction continue par morceaux sur $[a, +\infty[$.
- Intégrabilité d'une fonction f sur $[a, +\infty[$ / convergence absolue de l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$.
- Intégrale généralisée d'une fonction continue par morceaux sur un intervalle semi-ouvert ou ouvert de $\mathbb{R}$.
- Intégrale absolument convergente sur un intervalle I quelconque.
- Intégrabilité sur I d'une fonction, intégrabilité en $a \in \mathbb{R}$ ou en $\pm\infty$.
- Espace $L^1(I, \mathbb{K})$ des fonctions intégrables de I dans $\mathbb{K}$.

Résultats et propriétés

- Si f positive, caractérisation de la convergence de $\int_a^{+\infty} f$ par le caractère majoré de $x \mapsto \int_a^x f$.
- Si f et g sont deux fonctions continues par morceaux sur $[a, +\infty[$ telles que $0 \leqslant f \leqslant g$, la convergence de $\int_a^{+\infty} g$ implique celle de $\int_a^{+\infty} f$.
- Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, nature de l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} \mathrm{d}t$.
- Pour $a \in \mathbb{R}$, nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-at} \mathrm{d}t$.
- Si f est intégrable sur $[a, +\infty[$, alors $\int_a^{+\infty} f$ converge.
- Théorème de comparaison pour f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a, +\infty[$, avec $f(x) = O\left(g(x)\right)$, $f(x) = o\left(g(x)\right)$, ou $f(x) \sim \left(g(x)\right)$.
- Propriétés des intégrales généralisées : linéarité, positivité, croissance, relation de Chasles.
- Intégration par parties sur un intervalle quelconque.
- Changement de variable.
- La convergence absolue implique la convergence.
- Inégalité triangulaire.
- Si f est continue et intégrable sur I, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et si $\int_I f = 0$, alors f est nulle.
- Adaptation du théorème de comparaison en une borne quelconque.
- Si $\alpha \in \mathbb{R}$, nature de l'intégrale de Riemann $\int_a^b \frac{1}{|x-a|^\alpha} \mathrm{d}x$.
- f est intégrable en a (resp. b) si et seulement si $t \mapsto f(a+t)$ (resp. $t \mapsto f(b-t)$) est intégrable en 0.
- Intégration des relations de comparaison, pour les intégrales partielles ou les restes : domination, négligeabilité, équivalence.
- Théorème de convergence dominée.
- Théorème d'intégration terme à terme pour une suite (f_n) de fonctions positives.
- Théorème d'intégration terme à terme pour une suite (f_n) de fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$.
- Théorème de continuité d'une fonction définie par une intégrale à paramètre.
- Théorème de de dérivabilité d'une fonction définie par une intégrale à paramètre.
- Extension à la classe $\mathcal{C}^k$ du théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre.