Chapitre 1

Revisions MP2

Dérivabilité

Opérations su les fonctions dérivables.

Integration su

Formules de

Compléments d'algèbre linéaire

Lundi 1er septembre 2025

Table des matières

Chapitre 1

Revisions MP2

Dérivabilité

Opérations s les fonctions dérivables.

Integration su un segment

Formules de

- Dérivabilité.
- 2 Opérations sur les fonctions dérivables.
- 3 Intégration sur un segment
- Formules de Taylor

Table des matières

Chapitre 1

Dérivabilité.

Comparaisons voisinage d'un

Dérivabilité en L point.

Développement limité d'ordre 1

Interprétation cinématique.

Utilisation d'une base.

Dérivabilité sur

Opérations su les fonctions dérivables

Intégration su un segment

Formules de Tavlor

- Dérivabilité.
- 2 Opérations sur les fonctions dérivables
 - 3 Intégration sur un segment
- 4 Formules de Taylor

Chapitre 1

Dérivabilité

1. Rappels fondamentaux

1. Rappels fondamentaux

Chapitre 1

Dérivabilité.

Comparaisons au voisinage d'un point

Dérivabilité en un point.

Développeme

Interprétation

Interprétation cinématique.

base.

base. Dérivabilité sur

Opérations su les fonctions

integration su un segment

Formules d Taylor 1.1. Noyau et image d'une application linéaire

1.1. Noyau et image d'une application linéaire

Chapitre 1

Dérivabilité.

Comparaisons au voisinage d'un point

point. Développement limité d'ordre 1

Interprétation cinématique.

Utilisation d'une base. Dérivabilité sur un intervalle.

Opérations sur les fonctions dérivables.

Intégration su un segment

Formules de Tavlor

Definition 1

Soit E et F deux espaces vectoriels et soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

• On appelle *noyau* de f l'ensemble

$$\mathrm{Ker}(f) = \{x \in E \mid f(x) = 0\}$$

• On appelle image de f l'ensemble

$$Im(f) = \{ f(x), x \in E \} = \{ y \in F \mid \exists x \in E, y = f(x) \}$$

Remarques:

- Ker(f) est un sous-espace vectoriel de E.
- Im(f) est un sous-espace vectoriel de F.
- rg(f) = dim(Im(f)) est le rang de f.

1.1. Noyau et image d'une application linéaire

Chapitre 1

Dérivabilité

Comparaisons au voisinage d'un point

Dérivabilité en point.

Développemen

limité d'ordre :

Utilisation d'une

base. Dérivabilité sur

Opérations sur les fonctions

Intégration su un segment

Formules de Tavlor

Proposition 1

Soit E et F deux espaces vectoriels et soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

- f est injective si, et seulement si, $Ker(f) = \{0\}$.
- f est surjective si, et seulement si, Im(f) = F.

1. Rappels fondamentaux

Chapitre 1

Dérivabilité.

Comparaisons a voisinage d'un

Dérivabilité en un point.

Développeme

Interprétation

cinématique.

Utilisation d un base.

base. Dérivabilité sur

Opérations su les fonctions dérivables

Integration su un segment

Formules de Taylor

1.2. Théorème du rang

1.2. Théorème du rang

Chapitre 1

Dérivabilité en un

Opérations sur

Theoreme 1

(forme géométrique du théorème du rang) Soient E et F deux espaces vectoriels et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Pour tout supplémentaire H de Ker(f), $f_{|_{H}}$ réalise un isomorphisme de H sur Im(f).

Theoreme 2

(du rang) Si E est de dimension finie, alors dim(E) = dim(Ker(f)) + rg(f).

<u>1.2. T</u>héorème du rang

Chapitre 1

Dérivabilité en un

Opérations sur

Corollaire 1

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie tels que $\dim(E) = \dim(F)$ et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On a alors

f est injective \Leftrightarrow f est surjective \Leftrightarrow f est bijective

Corollaire 2

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = I_E$. Alors f et g sont inversibles et inverse l'une de l'autre.

1. Rappels fondamentaux

Chapitre 1

Dérivabilité.

Comparaisons a voisinage d'un point

Dérivabilité en un

Développement

limité d'ordre 1

cinématique.

Utilisation d'une base.

base.

Dérivabilité si un intervalle.

Opérations su les fonctions dérivables.

un segment

Formules de Taylor

1.3. Projecteurs et symétries

1.3. Projecteurs et symétries

Chapitre 1

Dérivab

Comparaisons au voisinage d'un point Dérivabilité en un point.

Développement limité d'ordre 1

Interprétation

Utilisation d'une base. Dérivabilité sur

Opérations sur les fonctions

Intégration su un segment

Formules de Tavlor

Definition 2

Soit E un espace vectoriel et soient F et G deux sous-espaces supplémentaires de E. Tout vecteur $x \in E$ se décompose donc de façon unique $x = x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$.

ullet On appelle *projecteur* sur F et parallèlement à G l'application :

$$p: x = x_F + x_G \mapsto x_F$$

On appelle symétrie par rapport à F et parallèlement à G
 l'application :

$$s: x = x_F + x_G \mapsto x_F - x_G$$

1.3. Projecteurs et symétries

Chapitre 1

Dérivabilit

Comparaisons au voisinage d'un point Dérivabilité en un point

Développement limité d'ordre 1

Interprétation cinématique.

Utilisation d'une base. Dérivabilité sur

Opérations sur les fonctions dérivables.

Intégration su un segment

Formules de Tavlor

Proposition 2

Soient $p, s : E \rightarrow E$.

- a) Les deux assertions suivantes sont équivalentes :
 - (i) p est un projecteur de E;
 - (ii) $p \in \mathcal{L}(E)$ et $p^2 = p$.

Dans ces conditions, p est le projecteur sur Im(p) = Ker(p - ld) parallèlement à Ker(f).

- b) Les deux assertions suivantes sont équivalentes :
 - (i) s est une symétrie de E;
 - (ii) $s \in \mathcal{L}(E)$ et $s^2 = I_E$.

Dans ces conditions, s est la symétrie par rapport à Ker(s - ld) parallèlement à Ker(s + ld).

Table des matières

Chapitre 1

Dérivabilité

Opérations sur les fonctions

les fonctions dérivables.

linéaire. Dérivabilité «

Dérivabilité e composition.

Dérivabilité da application

linéaire. Dérivabilité

Dérivabilité application

multilinéaire Fonctions d

Linéarité et multilinéarité pour les classe

Intégration su un segment

Formules d

Dérivabilité.

Opérations sur les fonctions dérivables.

3 Intégration sur un segment

4 Formules de Taylor

Chapitre 1

Dérivabilité

Opérations sur les fonctions dérivables.

Dérivabilité et combinaison

Dérivabilité e

composition.

Dérivabilité e

Dérivabilité et application linéaire.

application bilinéaire.

Dérivabilité application

Fonctions d

Linéarité et multilinéarité pour les classe

Intégration sur un segment

Formules de Tavlor

2. Somme de sous-espaces vectoriels

2. Somme de sous-espaces vectoriels

Chapitre 1

Dérivabilité

Opérations su

Dérivabilité et combinaison linéaire

Dérivabilité e

composition.

Dérivabilité

application linéaire.

application bilinéaire.

Dérivabilité application

Fonctions de

Linéarité et multilinéarité pour les classe

Intégration su un segment

Formules de

2.1. Définition d'une somme

2.1. Définition d'une somme

Chapitre 1

Opérations sur

Dérivabilité et combinaison linéaire.

Tavlor

Definition 3

Soit un entier $q \ge 2$ et soient $(E_i)_{1 \le i \le q}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E. On appelle somme de cette famille l'ensemble :

$$\sum_{i=1}^{q} E_{i} = \{x_{1} + \dots + x_{q}, (x_{1} \dots, x_{q}) \in E_{1} \times \dots \times E_{q}\}$$

$$= \{x \in E \mid \exists (x_{1} \dots, x_{q}) \in E_{1} \times \dots \times E_{q}, x = x_{1} + \dots + x_{q}\}$$

Proposition 3

Si E_1, \ldots, E_q sont des sous-espaces vectoriels de E_i $\sum E_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

2. Somme de sous-espaces vectoriels

Chapitre 1

Dérivabilité

Opérations sur les fonctions

Dérivabilité e combinaison

Dérivabilité et composition.

Dérivabilité e application linéaire

linéaire. Dérivabilité e

Dérivabilité

Fonctions de

Linéarité et multilinéarité pour les classe

Intégration sur un segment

Formules de

2.2. Somme directe

2.2. Somme directe

Chapitre 1

Dérivabilité et composition

Taylor

Definition 4

La somme $E_1 + \cdots + E_q$ est dite *directe* lorsque :

$$\forall (x_1,\ldots,x_q) \in E_1 \times \cdots \times E_q, \quad \sum_{i=1}^q x_i = 0 \Rightarrow x_1 = \cdots = x_q = 0$$

On peut noter alors la somme $E_1 \oplus \cdots \oplus E_q$ ou encore $\bigoplus E_i$.

Remarque:

Injectivité de
$$S:(x_1,\ldots,x_q)\mapsto x_1+\cdots+x_q$$

2.2. Somme directe

Chapitre 1

Dérivabilité. Opérations sur

les fonctions dérivables. Dérivabilité et

combinaison linéaire. Dérivabilité et

composition.

Dérivabilité application linéaire.

Dérivabilité application bilinéaire.

Dérivabilité e application

Fonctions de classe C^k .

Linéarité et multilinéarité pour les classes

Intégration su un segment

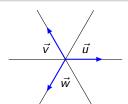
Formules de Tavlor

Exercice 1

On suppose $E_i \neq \{0\}$ pour tout $i \in [1, q]$. Montrer que la somme $E_1 + \cdots + E_q$ est directe **ssi** pour tout $e_1 \in E_1, \ldots, e_q \in E_q$ tous non nuls, la famille (e_1, \ldots, e_q) est libre.

Remarque:

F + G est directe **ssi** $F \cap G = \{0\}$. Peut-on généraliser?



$$\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$$

2.2. Somme directe

Chapitre 1

Dérivabilité

Opérations su les fonctions

Dérivabilité e combinaison linéaire

Dérivabilité et composition.

Dérivabilité e application

linéaire. Dérivabilité e

Dérivabilité application

Fonctions de

Linéarité et multilinéarité pour les classe

Intégration su un segment

Formules de

Proposition 4

La somme $E_1 + \cdots + E_q$ est directe si, et seulement si :

$$\forall i \in [1, q-1], (E_1 + \cdots + E_i) \cap E_{i+1} = \{0\}.$$

2. Somme de sous-espaces vectoriels

Chapitre 1

Dérivabilité

Opérations su les fonctions

dérivables.

combinaison linéaire.

Dérivabilité e composition.

Dérivabilité et application

linéaire. Dérivabilité e

bilinéaire. Dérivabilité

multilinéaire

Linéarité et multilinéarité

Intégration su

Formules de

2.3. Décomposition en somme directe.

2.3. Décomposition en somme directe.

Chapitre 1

Derivabilite

Opérations sur les fonctions dérivables.

linéaire.

Dérivabilité et composition.

Dérivabilité et application linéaire

application bilinéaire. Dérivabilité d

multilinéaire Fonctions de

Linéarité et multilinéarité pour les classe

Intégration su un segment

Formules de Tavlor

Definition 5

Soient E_1, \ldots, E_q des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. On dit qu'ils réalisent une décomposition en somme directe de E lorsque la somme $E_1 + \cdots + E_q$ est directe $\underline{\operatorname{et}}\ E = E_1 + \cdots + E_q$.

Remarques:

- Notation $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_q$. Cas q = 2?
- Pour tout $x \in E$, existence et unicité d'une décomposition
- E et $E_1 \times \cdots \times E_q$ isomorphes.

2. Somme de sous-espaces vectoriels

Chapitre 1

Dérivabilit

Opérations su les fonctions

les fonctions dérivables.

Dérivabilité e combinaison linéaire.

Dérivabilité (

composition.

Dérivabilité e application

Dérivabilité et application bilinéaire.

Dérivabilité e application

Fonctions d

Linéarité et multilinéarité pour les classe

Intégration su un segment

Formules de

2.4. Somme et dimension finie.

2.4. Somme et dimension finie.

Chapitre 1

Dérivabilité

Opérations sur

dérivables.

Dérivabilité et combinaison

Dérivabilité e composition.

Dérivabilité et application

Dérivabilité et application bilinéaire

Dérivabilité et application multilinéaire

Fonctions de

Linéarité et multilinéarité pour les classe

Intégration su un segment

Formules de Tavlor

Proposition 5

Soient E_1, \ldots, E_q des sous-espaces vectoriels de dimension finie d'un espace vectoriel E. La somme $E_1 + \cdots + E_q$ est de dimension finie et :

$$\dim\left(\sum_{i=1}^q E_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^q \dim(E_i),$$

avec égalité si, et seulement si, la somme est directe.

2.4. Somme et dimension finie.

Chapitre 1

Dérivabilité

Opérations sur les fonctions

Dérivabilité e combinaison linéaire.

Dérivabilité e composition.

Dérivabilité et application linéaire.

Dérivabilité et application bilinéaire.

application multilinéaire

Linéarité et multilinéarité

Intégration su un segment

Formules de

Corollaire 3

Supposons E de dimension finie et $\sum_{i=1}^{r} \dim E_i = \dim(E)$. On a alors :

$$\sum_{i=1}^{q} E_i \text{ est directe } \Leftrightarrow E = \sum_{i=1}^{q} E_i \Leftrightarrow E = \bigoplus_{i=1}^{q} E_i$$

2. Somme de sous-espaces vectoriels

Chapitre 1

Dérivabilité

Opérations su les fonctions

dérivables. Dérivabilité et

combinaison linéaire.

Dérivabilité e

composition.

Dérivabilité de application linéaire

linéaire.

Dérivabilité e

Dérivabilité et application multilinéaire

Fonctions o

Linéarité et multilinéarité pour les classe

Intégration sur un segment

Formules de

2.5. Bases adaptées.

2.5. Bases adaptées.

Chapitre 1

Dérivabilité

Opérations sur les fonctions dérivables

dérivables.

Dérivabilité et combinaison

Dérivabilité composition.

Dérivabilité et application linéaire.

application bilinéaire. Dérivabilité et

application multilinéaire

Fonctions C^k .

Linéarité et multilinéarité pour les classe

Intégration su un segment

Formules d Tavlor

Definition 6

Soit E un espace vectoriel de dimension finie non nulle, et soit $F \neq \{0\}$ un sous-espace vectoriel de E. On dit qu'une base de E est adaptée à F si ses premiers éléments forment une base de F.

Remarque:

Plus explicitement avec $n = \dim(E)$ et $p = \dim(F)$?

2.5. Bases adaptées.

Chapitre 1

Dérivabilit

Opérations sur les fonctions dérivables.

Dérivabilité et combinaison linéaire.

Dérivabilité e composition.

Dérivabilité e application linéaire.

linéaire.

Dérivabilité e application

Dérivabilité et application multilinéaire

Fonctions d

Linéarité et multilinéarité pour les classes

Intégration su un segment

Formules de Tavlor

Definition 7

Soit E_1,\ldots,E_q des sous-espaces vectoriels, non réduits à $\{0\}$, réalisant une décomposition en somme directe d'un espace E de dimension finie. On dit qu'une base de E est adaptée à cette décomposition lorsque ses éléments consécutifs forment successivement des bases des E_i , pour $1 \le i \le q$.

Remarque:

Plus explicitement avec $n_i = \dim(E_i)$?

2.5. Bases adaptées.

Chapitre 1

Dérivabilité

Opérations si les fonctions

Dérivabilité combinaison linéaire.

Dérivabilité e

Dérivabilité

application linéaire. Dérivabilité e

Dérivabilité et application multilinéaire

Fonctions of

Linéarité et multilinéarité pour les classe

Intégration su un segment

Formules de Tavlor

Exemple:

 $\mathbb{K}^6 = E_1 \oplus E_2 \oplus E_3$ de base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6)$. $E_1 = \text{vect}(e_1, e_2), E_2 = \text{vect}(e_3), E_3 = \text{vect}(e_4, e_5, e_6)$.

$$\mathcal{B} = (\overbrace{e_1,e_2}^{\mathcal{B}_1}, \overbrace{e_3}^{\mathcal{B}_2}, \overbrace{e_4,e_5,e_6}^{\mathcal{B}_3}).$$

Table des matières

Chapitre 1

Dérivabilité:

Opérations su les fonctions

Intégration sur un segment

Définition

Linéarité de l'intégrale Intégration e norme

Sommes d

Formules de

Dérivabilité.

- 2 Opérations sur les fonctions dérivables
- 3 Intégration sur un segment
- 4 Formules de Taylor

Chapitre 1

Dérivabilité

les fonctions

Intégration sur un segment

DATE OF

Définition

l'intégrale

norme

Formules d

3. Matrices définies par blocs

3. Matrices définies par blocs

Chapitre 1

Définition

3.1. Définition et exemples

3.1. Définition et exemples

Chapitre 1

Dérivabilité

Opérations sur les fonctions dérivables.

Intégration un segment Définition

Linéarité de l'intégrale

Intégration et norme Sommes de

Riemann

Formules de

Definition 8

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. Une matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est définie (ou présentée) par blocs, lorsqu'elle est écrite sous la forme :

$$M = \left(\begin{array}{ccc} M_{1,1} & \cdots & M_{1,s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{r,1} & \cdots & M_{r,s} \end{array}\right),$$

où les $M_{i,j}$ sont des matrices de dimensions inférieures, appelées blocs.

3.1. Définition et exemples

Chapitre 1

Dérivabilité

Opérations su les fonctions dérivables.

Intégration su un segment

Définition

Linéarité de l'intégrale Intégration et

Intégration et norme

Sommes de

Formules de

Exemple:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1) & (2) \\ (3) & (4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{1,1} & M_{1,2} \\ M_{2,1} & M_{2,2} \end{pmatrix}$$

$$M_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \ M_{1,2} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \ M_{2,1} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \ M_{2,2} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

D'autres découpages sont possibles.

3. Matrices définies par blocs

Chapitre 1

Dérivabilité

Opérations su les fonctions

Intégration su un segment

Définition Linéarité de l'intégrale

Intégration et

norme Sommes de

Formules de

3.2. Opérations sur les matrices par blocs

3.2. Opérations sur les matrices par blocs

Chapitre 1

Dérivabilité

Opérations sur les fonctions

Intégration su un segment

Linéarité de l'intégrale

Intégration et norme

Formules de Taylor

Proposition 6

Soient M et M' définies par blocs :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$
 et $M' = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$.

Alors, sous réserve que les dimensions soit adéquates :

•
$$M + \lambda M' = \begin{pmatrix} A + \lambda A' & B + \lambda B' \\ C + \lambda C' & D + \lambda D' \end{pmatrix}$$

•
$$MM' = \begin{pmatrix} AA' + BC' & AB' + BD' \\ CA' + DC' & CB' + DD' \end{pmatrix}$$
.

$$\bullet \ M^{\top} = \begin{pmatrix} A^{\top} & C^{\top} \\ B^{\top} & D^{\top} \end{pmatrix}$$

3. Matrices définies par blocs

Chapitre 1

Dérivabilité

Opérations su

les fonctions dérivables.

Intégration su un segment ..

Linéarité de

l'intégrale Intégration et

norme

Sommes de Riemann

Formules de Taylor 3.3. Déterminant d'une matrice par blocs

3.3. Déterminant d'une matrice par blocs

Chapitre 1

Dérivabilité

Opérations sur les fonctions

Intégration su

Linéarité de

Intégration et

Sommes de

Formules de

Proposition 7

Soit un entier $n \ge 2$ et soit $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice *triangulaire par blocs* de la forme :

$$T = \begin{pmatrix} A & (*) \\ (0) & B \end{pmatrix},$$

avec deux blocs diagonaux carrés $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$, $1 \leq p \leq n-1$. On a alors :

$$det(T) = det(A) det(B)$$
.

Remarque:

Généralisation à un nombre quelconque de blocs diagonaux.

3. Matrices définies par blocs

Chapitre 1

Dérivabilité

Opérations su

les fonctions dérivables.

Intégration su un segment

Définition Linéarité de

l'intégrale Intégration et

Sommes de Riemann

Formules de Taylor 3.4. Transvection par blocs

3.4. Transvection par blocs

Chapitre 1

Dérivabilité

Opérations sur les fonctions

Intégration un segment Définition

Linéarité de l'intégrale Intégration e

Sommes de Riemann

Formules de

Exercice 2

Rappeler les trois types d'opérations élémentaires sur les lignes ou sur les colonnes d'une matrice, et le lien avec la multiplication à gauche ou à droite par une certaine matrice inversible.

3.4. Transvection par blocs

Chapitre 1

Dérivabilité

Opérations sur les fonctions

Intégration sur un segment

Linéarité de l'intégrale

Intégration : norme Sommes de

Sommes Riemann

Formules de

Definition 9

On appelle transvection par blocs sur une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une opération de la forme :

- $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$, avec L_i et L_j deux blocs disjoints de lignes consécutives de A et de même taille, et $\lambda \in \mathbb{K}$.
- $C_j \leftarrow C_i + \lambda C_i$, avec C_i et C_j deux blocs disjoints de colonnes consécutives de A et de même taille, et $\lambda \in \mathbb{K}$.

Proposition 8

Le rang et le déterminant d'une matrice est invariant lors de l'application d'une transvection par blocs.

Table des matières

Chapitre 1

Formules de Taylor

Formules de Taylor

Chapitre 1

Dérivabilité

Opérations su les fonctions

Intégration su

Formules de Taylor

Primitive et

Inégalité des accroissements

Formule de Taylor avec reste

Inégalité de Taylor-Lagrang

Formule de

4. Éléments propres d'un endomorphisme ou d'une matrice

4. Éléments propres d'un endomorphisme ou d'une matrice

Chapitre 1

Dérivabilité

Opérations su les fonctions

dérivables.
Intégration si

Formules de Tavlor

Primitive et intégrale

Inégalité des accroissements

Formule de Taylor avec res

Inégalité de Taylor-Lagrang

Formule de Tavlor-Young 4.1. Sous-espace stable et endomorphisme induit

4.1. Sous-espace stable et endomorphisme induit

Chapitre 1

Dérivabilité

es fonctions dérivables.

Formules d

Taylor Primitive et

intégrale

Inégalité des accroissements finis

Formule de Taylor avec rest intégral

Inégalité de Taylor-Lagrange Formule de Definition 10

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit qu'un sous-espace vectoriel F de E est stable par u lorsque $u(F) \subset F$, c'est-à-dire lorsque :

$$\forall x \in E, x \in F \Rightarrow u(x) \in F.$$

Exercice 3

Montrer qu'une droite vectorielle D de E est stable par $u \in \mathcal{L}(E)$ ssi $u_{|_D}$ est une homothétie, c'est-à-dire :

$$\exists \lambda \in \mathbb{K}, \ \forall x \in D, \ u(x) = \lambda x.$$

4.1. Sous-espace stable et endomorphisme induit

Chapitre 1

Sec. 1987

Dérivabilité

Soit E un espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors pour tout $v \in \mathcal{L}(E)$ qui commute avec u, $\mathrm{Ker}(v)$ et $\mathrm{Im}(v)$ sont stables par u.

Opérations sur les fonctions dérivables.

Formules de

Primitive et

Inégalité des

Inégalité des accroissements finis

intégral Inégalité de Taylor-Lagrange

Taylor-Lagrange Formule de Taylor-Young

Definition 11

Proposition 9

Soit E un espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E)$, et F un sous-espace vectoriel stable par u. On appelle endomorphisme induit par u sur F, l'application :

$$u_F: \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & u(x) \end{array}.$$

Remarque:

 $u_F \in \mathcal{L}(F)$, ne pas confondre avec $u_{|_F} \in \mathcal{L}(F, E)$.

4.1. Sous-espace stable et endomorphisme induit

Chapitre 1

Dérivabilité

dérivables.

Formules de

Primitive et intégrale

Inégalité des accroissements finis

Formule de Taylor avec rest intégral

Inégalité de Taylor-Lagrange

Formule de Taylor-Young

Proposition 10

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, $u \in \mathcal{L}(E)$, et \mathcal{B} une base de E adaptée à un sous-espace F de dimension $p \geqslant 1$. Alors F est stable par u ssi la matrice de u dans \mathcal{B} est de la forme :

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A & B \\ (0) & C \end{pmatrix}, \quad \operatorname{avec} A \in M_p(\mathbb{K})$$

La matrice A représente l'endomorphisme induit par u sur F.

4. Éléments propres d'un endomorphisme ou d'une matrice

Chapitre 1

Dérivabilité

Opérations su les fonctions

Intégration su

Formules de

Taylor

Primitive et intégrale

Inégalité des accroissements finis

Formule de Taylor avec rest intégral

Inégalité de Taylor-Lagrans

Formule de

4.2. Vecteur propre et valeur propre, spectre

4.2. Vecteur propre et valeur propre, spectre

Chapitre 1

Dérivabilit

dérivables.

un segment

Formules de Taylor

Primitive et intégrale

Inégalité des accroissements finis

Formule de Taylor avec reste intégral

Inégalité de Taylor-Lagrange Formule de

Definition 12

Soit E un espace vectoriel, et $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que $x \in E$ est un vecteur propre lorsque x est non nul et colinéaire à u(x), ie. il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$. Ce scalaire λ est appelé valeur propre associée à x.

Remarques:

- Un vecteur propre n'est jamais nul.
- Un vecteur propre → une seule valeur propre
- Une valeur propre → une infinité de vecteurs propres
- Équation aux éléments propres : $u(x) = \lambda x$.

4.2. Vecteur propre et valeur propre, spectre

Chapitre 1

Inégalité des accroissements finis

Definition 13

Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, avec E de dimension finie, on appelle spectre de u l'ensemble de ses valeurs propres. Il est noté Sp(u).

Exemples:

Homothéties, projecteurs, symétries.

Exercice 4

Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de l'endomorphisme $D: f \mapsto f'$ de l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R})$.

4. Éléments propres d'un endomorphisme ou d'une matrice

Chapitre 1

Formule de Taylor avec reste intégral

4.3. Sous-espaces propres

4.3. Sous-espaces propres

Chapitre 1

Dérivabilité

Opérations sur les fonctions

dérivables. Intégration su

Formules de Taylor

Primitive et

Inégalité des accroissement finis

Formule de Taylor avec reste intégral

Inégalité de Taylor-Lagrange Formule de Taylor-Young

Proposition 11

Soit *E* un espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a :

 λ valeur propre de $u \Leftrightarrow \ker(u - \lambda I_E) \neq \{0\}$

Definition 14

Soit E un espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$. Pour $\lambda \in \mathbb{K}$ valeur propre de u, on appelle sous-espace propre de u associé à λ l'ensemble :

$$E_{\lambda} = \ker(u - \lambda I_E).$$

Remarque:

 E_{λ} est un sev de E. C'est l'ensemble des vecteurs propres pour λ ??

4. Éléments propres d'un endomorphisme ou d'une matrice

Chapitre 1

Dérivabilité

Opérations su les fonctions

Intégration su

Formules de

l aylor
Primitive et

Primitive e intégrale

Inégalité des accroissements finis

intégral Inégalité de

Inégalité de Taylor-Lagrange

Formule de Tavlor-Young 4.4. Propriétés des éléments propres

4.4. Propriétés des éléments propres

Chapitre 1

Inégalité de Taylor-Lagrange

Proposition 12

soient E un espace vectoriel et $u, v \in \mathcal{L}(E)$. Si u et v commutent, tout sous-espace propre de u est stable par v.

Proposition 13

Soient un entier $q \ge 2$ et soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ des valeurs propres distinctes deux à deux d'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors leur sous-espaces propres associés E_1, \ldots, E_q sont en somme directe.

4.4. Propriétés des éléments propres

Chapitre 1

Dérivabilité

les fonctions dérivables.

Intégration sur un segment

Formules de Taylor

Primitive et intégrale Inégalité des

finis
Formule de
Taylor avec rest

Inégalité de Taylor-Lagrange

Formule de Tavlor-Young

Corollaire 4

Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.

Corollaire 5

Si E est un espace vectoriel de <u>dimension finie</u> $n \in \mathbb{N}^*$, et si $u \in \mathcal{L}(E)$, le cardinal de $\mathrm{Sp}(u)$ est fini et inférieur ou égal à n.

4. Éléments propres d'un endomorphisme ou d'une matrice

Chapitre 1

Dérivabilité

Opérations si les fonctions

dérivables.

Formules de

Taylor

Primitive e intégrale

Inégalité des accroissements finis

intégral Inégalité de

Formule de Taylor-Young 4.5. Éléments propres d'une matrice

Chapitre 1

Dérivabilité

Opérations sur les fonctions dérivables.

un segment Formules de

Taylor
Primitive et

Inégalité des accroissements finis

Taylor avec reste intégral Inégalité de Taylor-Lagrange

Formule de Taylor-Young

Definition 15

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- On dit que X ∈ M_{n,1}(K) est un vecteur propre de M, s'il est non nul et s'il existe λ ∈ K (la valeur propre) telle que MX = λX.
- On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est *valeur propre* de M, s'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ non nul (un vecteur propre) tel que $MX = \lambda X$;
- On appelle *spectre* de M, et on note $\mathrm{Sp}(M)$ l'ensemble des valeurs propres de M.

Remarque:

Équation aux éléments propres $MX = \lambda X$.

Chapitre 1

Dérivabilité

Opérations sur

dérivables.

un segment

Formules de Taylor

intégrale Inégalité de accroisseme

Formule de Taylor avec reste intégral

Inégalité de Taylor-Lagrange

Formule de Taylor-Young

Proposition 14

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n>0, muni d'une base \mathcal{B} , et soit $u\in\mathcal{L}(E)$ représenté par la matrice $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans \mathcal{B} . Alors :

- $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de u si, et seulement si, λ est valeur propre de M.
- $x \in E$ est vecteur propre de u si, et seulement si, sa représentation matricielle $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ dans \mathcal{B} est vecteur propre de M.

Corollaire 6

Deux matrices semblables ont même spectre.

Chapitre 1

Dérivabilité

Opérations sur es fonctions Jérivables

Intégration s

Formules de Taylor

Primitive et

Inégalité des accroissements

finis Formule de Tavlor avec rest

Inégalité de Taylor-Lagrange

Formule de Taylor-Young

Remarque:

Indentification de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ à \mathbb{K}^n .

Definition 16

Pour $\lambda \in \mathbb{K}$ valeur propre de $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle sous-espace propre de M associé à λ l'ensemble :

$$E_{\lambda} = \ker(M - \lambda I_n).$$

C'est un sous-espace vectoriel de \mathbb{K}^n , réunion de $\{0\}$ et de l'ensemble des vecteurs propres de M associés à λ .

Chapitre 1

Dérivabilité. Opérations sur

dérivables.

un segment

Formules de Taylor

intégrale Inégalité des accroissement finis

Formule de Taylor avec reste intégral

Inégalité de Taylor-Lagrange Economia da

Formule de Taylor-Young

Remarque:

On peut préciser le corps dans lequel on recherche les valeurs propres (typiquement les valeurs propres complexes d'une matrice réelle).

Proposition 15

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si \mathbb{K} est un sous-corps d'un corps \mathbb{K}' , le spectre $\operatorname{Sp}_{|_{\mathbb{K}'}}(M)$ de M dans \mathbb{K} est contenu dans le spectre $\operatorname{Sp}_{|_{\mathbb{K}'}}(M)$ de M dans \mathbb{K}' .