Révisions MP2I
Limite d'une fonction
Continuité
Continuité et Linéarité
Espaces vectoriels normés de dimension finie

Continuité des fonctions entre EVN, dimension finie

Lundi 22 septembre 2025

Table des matières

1. Limite d'une fonction
2. Continuité
3. Continuité et Linéarité
4. Espaces vectoriels normés de dimension finie

Table des matières

1 Limite d'une fonction

2 Continuité

3 Continuité et Linéarité

4 Espaces vectoriels normés de dimension finie

Chapitre 4

Limite d'une fonction
Limite d'une fonction en un point.
Caractérisation séquentielle.
Operations sur les limites.
Continuité
Continuité et Linéarité
Espaces vectoriels normés de dimension finie

1. Limite d'une fonction

Chapitre 4

Limite d'une fonction
Limite d'une fonction en un point.
Caractérisation séquentielle.
Operations sur les limites.
Continuité
Continuité et Linéarité
Espaces vectoriels normés de dimension finie

1.1. Limite d'une fonction en un point.

Chapitre 4

Limite d'une fonction
Limite d'une fonction en un point.
Caractérisation séquentielle.
Operations sur les limites.
Continuité
Continuité et Linéarité
Espaces vectoriels normés de dimension finie

Definition 1

Soit $A \subset E$, $f : A \to F$ et $a \in \overline{A}$. On dit que la fonction f *admet la limite* $\ell \in F$ en a (ou *tend vers* ℓ) lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists \eta > 0\,,\ \forall x \in A\,,\ \|x - a\|_E \leqslant \eta \Longrightarrow \left\|f(x) - \ell\right\|_F \leqslant \varepsilon.$$

Remarque :

On a alors nécessairement $\ell \in \overline{f(A)}$.

1.1. Limite d'une fonction en un point.

Chapitre 4

Limite d'une fonction
Limite d'une fonction en un point.
Caractérisation séquentielle.
Operations sur les limites.
Continuité
Continuité et Linéarité
Espaces vectoriels normés de dimension finie

Proposition 1

Si f admet une limite en a, cette limite est unique.

Remarque :

Notation $\ell = \lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x)$, $\ell = \lim\limits_{a} f$ ou $f(x) \underset{x \longrightarrow a}{\longrightarrow} \ell$.

Chapitre 4

Limite d'une fonction
Limite d'une fonction en un point.
Caractérisation séquentielle.
Operations sur les limites.
Continuité
Continuité et Linéarité
Espaces vectoriels normés de dimension finie

Remarque :

Extensions de la notion de limite pour $f : A \to F$

- limite de $f(x)$ lorsque $\|x\|$ tend vers $+\infty$
- limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ lorsque $A \subset \mathbb{R}$
- limite infinie en a adhérent à A pour f à valeurs dans $\mathbb{R}$

Chapitre 4

Limite d'une fonction
Limite d'une fonction en un point.
Caractérisation séquentielle.
Operations sur les limites.
Continuité
Continuité et Linéarité
Espaces vectoriels normés de dimension finie

1.2. Caractérisation séquentielle.

1.2. Caractérisation séquentielle.

Proposition 2

Soit f une application de $A \subset E$ dans F, $a \in E$ un point adhérent à A et $\ell \in F$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(i) f admet la limite ℓ en a.

(ii) Pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A convergeant vers a, la suite $\left(f(x_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Chapitre 4

Limite d'une fonction
Limite d'une fonction en un point.
Caractérisation séquentielle.
Operations sur les limites.
Continuité
Continuité et Linéarité
Espaces vectoriels normés de dimension finie

1.2. Caractérisation séquentielle.

Exercice 1

Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(i) f admet une limite finie en a.

(ii) Pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A convergeant vers a, la suite $\big(f(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Chapitre 4

Limite d'une fonction
Limite d'une fonction en un point.
Caractérisation séquentielle.
Operations sur les limites.
Continuité
Continuité et Linéarité
Espaces vectoriels normés de dimension finie

1.3. Operations sur les limites.

1.3. Operations sur les limites.

Proposition 3

Soit $f, g : A \to F$ et $a \in \overline{A}$. On suppose $\lim_a f = b$ et $\lim_a g = c$. Alors

- Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, $f(x) + \lambda g(x) \to b + \lambda c$ en a.
- Cas $F = \mathbb{K}$: $f(x)g(x) \to bc$ en a. Si de plus $b \neq 0$, alors $f \neq 0$ au voisinage de a et $\dfrac{1}{f(x)} \to \dfrac{1}{b}$ en a.

Remarque :

Que dire de l'ensemble des fonctions définies sur A et admettant une limite en $a \in \overline{A}$?

1.3. Operations sur les limites.

Chapitre 4

Limite d'une fonction
Limite d'une fonction en un point.
Caractérisation séquentielle.
Operations sur les limites.
Continuité
Continuité et Linéarité
Espaces vectoriels normés de dimension finie

Proposition 4

Soient $f : A \to F$ et $g : B \to G$ avec $\mathrm{Im}(f) \subset B$, soient $a \in \overline{A}, b \in \overline{B}$.
Si $\lim_a f = b$ et $\lim_b f = c$, alors $\lim_a (g \circ f) = c$.

Limite d'une fonction
Continuité
Definition
Opérations sur les fonctions continues
Continuité et densité
Caractérisation globale
Continuité uniforme
Applications lipschitziennes.
Continuité sur un compact
Connexité par arcs et théorème des valeurs intermédiaires
Continuité et Linéarité
Espaces vectoriels normés de dimension finie

Table des matières

1 Limite d'une fonction

2 Continuité

3 Continuité et Linéarité

4 Espaces vectoriels normés de dimension finie

Chapitre 4

Limite d'une fonction

Continuité

Definition

Opérations sur les fonctions continues

Continuité et densité

Caractérisation globale

Continuité uniforme

Applications lipschitziennes.

Continuité sur un compact

Connexité par arcs et théorème des valeurs intermédiaires

Continuité et Linéarité

Espaces vectoriels normés de dimension finie

2. Continuité

Chapitre 4

Limite d'une fonction

Continuité

Definition

Opérations sur les fonctions continues

Continuité et densité

Caractérisation globale

Continuité uniforme

Applications lipschitziennes.

Continuité sur un compact

Connexité par arcs et théorème des valeurs intermédiaires

Continuité et Linéarité

Espaces vectoriels normés de dimension finie

2.1. Definition

2.1. Definition

Definition 2

Soit $A \subset E$, $f : A \to F$, et $a \in A$. On dit que f est *continue* en a lorsque $f(x) \to f(a)$ lorsque $x \to a$.

Remarques :

- En fait la limite est nécessairement $f(a)$!
- La caractérisation séquentielle s'applique.

2.1. Definition

Definition 3

Soit A une partie de E, et $f : A \to F$. On dit que f est *continue* sur A lorsque f est continue en tout point de A.

Remarque :

f continue sur $B \subset A$ lorsque $f_{|_B}$ continue en tout point de B.

(pourquoi $f_{|_B}$ et pas simplement f ?)

Exemple :

L'application *norme* $x \mapsto \|x\|_E$ est continue sur E.

Chapitre 4

Limite d'une fonction

Continuité

Definition

Opérations sur les fonctions continues

Continuité et densité

Caractérisation globale

Continuité uniforme

Applications lipschitziennes.

Continuité sur un compact

Connexité par arcs et théorème des valeurs intermédiaires

Continuité et Linéarité

Espaces vectoriels normés de dimension finie

2.2. Opérations sur les fonctions continues

2.2. Opérations sur les fonctions continues

Chapitre 4

Limite d'une fonction

Continuité

Definition

Opérations sur les fonctions continues

Continuité et densité

Caractérisation globale

Continuité uniforme

Applications lipschitziennes.

Continuité sur un compact

Connexité par arcs et théorème des valeurs intermédiaires

Continuité et Linéarité

Espaces vectoriels normés de dimension finie

Proposition 5

Soient $f, g : A \to F$ et $\lambda : A \to \mathbb{K}$ continues, alors l'application $x \mapsto f(x) + \lambda(x)g(x)$ est continue.

Corollaire 1

L'ensemble $\mathcal{C}(A, F)$ des fonctions continues sur A et à valeurs dans F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(A, F)$.

Chapitre 4

Limite d'une fonction

Continuité

Definition

Opérations sur les fonctions continues

Continuité et densité

Caractérisation globale

Continuité uniforme

Applications lipschitziennes.

Continuité sur un compact

Connexité par arcs et théorème des valeurs intermédiaires

Continuité et Linéarité

Espaces vectoriels normés de dimension finie

2.3. Continuité et densité

Chapitre 4

Limite d'une fonction
Continuité
Definition
Opérations sur les fonctions continues
Continuité et densité
Caractérisation globale
Continuité uniforme
Applications lipschitziennes.
Continuité sur un compact
Connexité par arcs et théorème des valeurs intermédiaires
Continuité et Linéarité
Espaces vectoriels normés de dimension finie

Proposition 6

Soient $f, g : E \to F$ deux applications continues qui coïncident sur une partie A dense dans E. Alors f et g coincident sur E.

Remarque :

Cas $f, g : B \to F$ avec $B \subset E$?

Exercice 2

Déterminer toutes les fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$.

Chapitre 4

Limite d'une fonction

Continuité

Definition

Opérations sur les fonctions continues

Continuité et densité

Caractérisation globale

Continuité uniforme

Applications lipschitziennes.

Continuité sur un compact

Connexité par arcs et théorème des valeurs intermédiaires

Continuité et Linéarité

Espaces vectoriels normés de dimension finie

2.4. Caractérisation globale

2.4. Caractérisation globale

Remarque :

Ici $f : E \to F$, mais on adaptera à $f : A \to F$ avec $A \subset E$.

Proposition 7

Soit $f : E \to F$. Les trois assertions suivantes sont équivalentes :

(i) f est continue sur E.

(ii) Pour tout ouvert U de F, $f^{-1}(U)$ est un ouvert.

(iii) pour touf fermé V de F, $f^{-1}(V)$ est un fermé.

Chapitre 4

Limite d'une fonction

Continuité

Definition

Opérations sur les fonctions continues

Continuité et densité

Caractérisation globale

Continuité uniforme

Applications lipschitziennes.

Continuité sur un compact

Connexité par arcs et théorème des valeurs intermédiaires

Continuité et Linéarité

Espaces vectoriels normés de dimension finie

Corollaire 2

Soit f une application continue de E dans $\mathbb{R}$. Alors :

- L'ensemble $\{x \in E \,/\, f(x) > 0\}$ est un ouvert de E.
- L'ensemble $\{x \in E \,/\, f(x) \geqslant 0\}$ est un fermé de E.
- L'ensemble $\{x \in E \,/\, f(x) = 0\}$ est un fermé de E.

Exercice 3

Montrer (plus simplement qu'au chapitre précédent) que dans un espace vectoriel normé :

- Les boules ouvertes sont ouvertes
- Les boules fermées et les sphères sont fermées

Chapitre 4

Limite d'une fonction

Continuité

Definition

Opérations sur les fonctions continues

Continuité et densité

Caractérisation globale

Continuité uniforme

Applications lipschitziennes.

Continuité sur un compact

Connexité par arcs et théorème des valeurs intermédiaires

Continuité et Linéarité

Espaces vectoriels normés de dimension finie

2.5. Continuité uniforme

2.5. Continuité uniforme

Chapitre 4

Limite d'une fonction

Continuité

Definition

Opérations sur les fonctions continues

Continuité et densité

Caractérisation globale

Continuité uniforme

Applications lipschitziennes.

Continuité sur un compact

Connexité par arcs et théorème des valeurs intermédiaires

Continuité et Linéarité

Espaces vectoriels normés de dimension finie

Definition 4

On dit que $f : A \to F$ est *uniformément continue* sur A lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \mu > 0,\ \forall (x, y) \in A^2,\ \|x - y\|_E \leqslant \mu \Rightarrow \|f(x) - f(y)\|_F \leqslant \varepsilon$$

Remarques :

- Différence avec la continuité en tout point ?
- Module d'uniforme continuité associé à ε.

2.5. Continuité uniforme

Chapitre 4

Limite d'une fonction

Continuité

Definition

Opérations sur les fonctions continues

Continuité et densité

Caractérisation globale

Continuité uniforme

Applications lipschitziennes.

Continuité sur un compact

Connexité par arcs et théorème des valeurs intermédiaires

Continuité et Linéarité

Espaces vectoriels normés de dimension finie

Proposition 8

Si $f : A \to F$ est uniformément continue sur A, alors f est continue sur A.

Remarque :

Réciproque fausse. Contre-exemple ?

Chapitre 4

Limite d'une fonction

Continuité

Definition

Opérations sur les fonctions continues

Continuité et densité

Caractérisation globale

Continuité uniforme

Applications lipschitziennes.

Continuité sur un compact

Connexité par arcs et théorème des valeurs intermédiaires

Continuité et Linéarité

Espaces vectoriels normés de dimension finie

2.6. Applications lipschitziennes.

2.6. Applications lipschitziennes.

Definition 5

On dit qu'une fonction $f : A \to F$, avec $A \subset E$, est *lipschitzienne* lorsqu'il existe $k \geqslant 0$, tel que :

$$\forall (x,y) \in A^2, \quad \left\|f(x) - f(y)\right\|_F \leqslant k\|x-y\|_E.$$

On peut préciser alors que f est k-lipschitzienne.

Remarque :

k est appelé *module de Lipschitz* pour f.

2.6. Applications lipschitziennes.

Proposition 9

f est lipschitzienne **ssi** l'ensemble suivant est majoré :

$$\left\{ \frac{\|f(x) - f(y)\|_F}{\|x - y\|_E},\ x, y \in E, x \neq y \right\}$$

La borne supérieure k_0 de cet ensemble est alors le plus petit module de Lipschitz pour f, et l'ensemble de tous les modules est $[k_0, +\infty[$.

2.6. Applications lipschitziennes.

Proposition 10

Toute fonction $f : A \to F$ lipschitzienne est uniformément continue, et donc continue.

Exemples :

Pour des fonctions réelles (vu en MP2I) :

- fonctions affines réelles $x \mapsto ax + b$
- fonction $x \mapsto x^2$
- La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$

Limite d'une fonction
Continuité
Definition
Opérations sur les fonctions continues
Continuité et densité
Caractérisation globale
Continuité uniforme
Applications lipschitziennes.
Continuité sur un compact
Connexité par arcs et théorème des valeurs intermédiaires
Continuité et Linéarité
Espaces vectoriels normés de dimension finie

2.6. Applications lipschitziennes.

Remarque :

Deux exemples à connaitre :

Proposition 11

a) L'application "norme" $x \mapsto \|x\|$ est 1-lipschitzienne.

b) Pour une partie A non vide, l'application "distance à A" $x \mapsto \mathrm{d}(x, A)$ est 1-lipschitzienne.

2.6. Applications lipschitziennes.

Exercice 4

Soient A et B sont deux fermés disjoints de $(E, \|\cdot\|)$.

a) A l'aide des fonctions $d_A : x \mapsto d(x, A)$ et $d_B : x \mapsto d(x, B)$, construire une application continue $f : E \to \mathbb{R}$ telle que $f_{|_A} = 0$ et $f_{|_B} = 1$.

b) En déduire qu'il existe deux ouverts U et V disjoints tels que $A \subset U$ et $B \subset V$.

Chapitre 4

Limite d'une fonction

Continuité

Definition

Opérations sur les fonctions continues

Continuité et densité

Caractérisation globale

Continuité uniforme

Applications lipschitziennes.

Continuité sur un compact

Connexité par arcs et théorème des valeurs intermédiaires

Continuité et Linéarité

Espaces vectoriels normés de dimension finie

2.7. Continuité sur un compact

2.7. Continuité sur un compact

Theoreme 1

L'image d'un compact de E par une application continue $f : A \to F$ est un compact de F.

Theoreme 2

(des bornes atteintes) Si $f : A \to \mathbb{R}$ est continue et si K est un compact de E, alors f est bornée sur K et atteint ses bornes.

2.7. Continuité sur un compact

Chapitre 4

Limite d'une fonction

Continuité

Definition

Opérations sur les fonctions continues

Continuité et densité

Caractérisation globale

Continuité uniforme

Applications lipschitziennes.

Continuité sur un compact

Connexité par arcs et théorème des valeurs intermédiaires

Continuité et Linéarité

Espaces vectoriels normés de dimension finie

Exercice 5

On suppose E de dimension finie et soit $f : E \to \mathbb{R}$ une application continue telle que $\lim\limits_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty$. Montrer que f admet un minimum sur E.
(On utilisera le fait que les boules fermées sont compactes en dimension finie, voir section suivante)

Chapitre 4

Limite d'une fonction

Continuité

Definition

Opérations sur les fonctions continues

Continuité et densité

Caractérisation globale

Continuité uniforme

Applications lipschitziennes.

Continuité sur un compact

Connexité par arcs et théorème des valeurs intermédiaires

Continuité et Linéarité

Espaces vectoriels normés de dimension finie

Theoreme 3

(de Heine) Si $f : A \to F$ est continue et si K est un compact de E, alors f est uniformément continue sur K.

Chapitre 4

Limite d'une fonction

Continuité

Definition

Opérations sur les fonctions continues

Continuité et densité

Caractérisation globale

Continuité uniforme

Applications lipschitziennes.

Continuité sur un compact

Connexité par arcs et théorème des valeurs intermédiaires

Continuité et Linéarité

Espaces vectoriels normés de dimension finie

2.8. Connexité par arcs et théorème des valeurs intermédiaires

Chapitre 4

Limite d'une fonction

Continuité

Definition

Opérations sur les fonctions continues

Continuité et densité

Caractérisation globale

Continuité uniforme

Applications lipschitziennes.

Continuité sur un compact

Connexité par arcs et théorème des valeurs intermédiaires

Continuité et Linéarité

Espaces vectoriels normés de dimension finie

Definition 6

Soient $a, b \in E$. On appelle *chemin* (ou *arc*) de (ou joignant) a à b toute application $\gamma : [0,1] \to E$ continue telle que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$. L'ensemble $\gamma([0,1])$ est appelé le *support* de l'arc.

Definition 7

On dit qu'une partie A non vide de E est *connexe par arcs* lorsque pour tout $(a, b) \in A$, il existe un chemin γ de a à b à support contenu dans A : $\gamma([0,1]) \subset A$.

2.8. Connexité par arcs et théorème des valeurs intermédiaires

Proposition 12

Soit A une partie de E. La relation binaire $\mathcal{R}$ définie par :

$$a \mathcal{R} b \quad \Leftrightarrow \quad \text{il existe un chemin de } a \text{ à } b \text{ à support contenu dans } A$$

est une relation d'équivalence sur A.

Definition 8

Les classes d'équivalences pour la relation d'équivalence précédente s'appelle les *composantes connexes par arcs* de A.

Chapitre 4

Limite d'une fonction

Continuité

Definition

Opérations sur les fonctions continues

Continuité et densité

Caractérisation globale

Continuité uniforme

Applications lipschitziennes.

Continuité sur un compact

Connexité par arcs et théorème des valeurs intermédiaires

Continuité et Linéarité

Espaces vectoriels normés de dimension finie

Proposition 13

a) Toute partie étoilée est connexe par arcs.

b) Toute partie convexe est connexe par arcs.

c) une partie de $\mathbb{R}$ est connexe par arcs **ssi** c'est un intervalle.

Remarque :

A étoilée signifie $\exists a \in A,\ \forall b \in A,\ [a, b] \subset A$

2.8. Connexité par arcs et théorème des valeurs intermédiaires

Chapitre 4

Limite d'une fonction

Continuité

Definition

Opérations sur les fonctions continues

Continuité et densité

Caractérisation globale

Continuité uniforme

Applications lipschitziennes.

Continuité sur un compact

Connexité par arcs et théorème des valeurs intermédiaires

Continuité et Linéarité

Espaces vectoriels normés de dimension finie

Theoreme 4

Soit $A \subset E$ non vide et $f : A \to F$ continue. Si A est connexe par arcs, alors $f(A)$ est connexe par arcs.

Theoreme 5

(des valeurs intermédiaires) Soit $A \subset E$ non vide et connexe par arcs et $f : A \to \mathbb{R}$ continue. Si f prend les valeurs u et v, avec $u \leqslant v$, alors

$$\forall s \in [u, v], \quad \exists t \in A, \quad f(t) = s$$

Table des matières

1 Limite d'une fonction

2 Continuité

3 Continuité et Linéarité

4 Espaces vectoriels normés de dimension finie

Chapitre 4

Limite d'une fonction

Continuité

Continuité et Linéarité

Critère fondamental

Norme subordonnée

Espaces vectoriels normés de dimension finie

3. Continuité et Linéarité

Chapitre 4

Limite d'une fonction

Continuité

Continuité et Linéarité

Critère fondamental

Norme subordonnée

Espaces vectoriels normés de dimension finie

3.1. Critère fondamental

3.1. Critère fondamental

Proposition 14

Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors u est continue **ssi** il existe $C \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall x \in E, \quad \|u(x)\|_F \leqslant C\|x\|_E$$

Remarque :

Remarques :

- $u \in \mathcal{L}(E,F)$ continue en $0 \Rightarrow u$ lipschitzienne (donc continue).
- Notation : $\mathcal{L}_c(E,F)$ sous-espace des applications linéaires **continues** de E dans F.
- Dépend en général des normes considérées !

3.1. Critère fondamental

Exercice 6

Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $N_1 : f \mapsto \int_0^1 |f(t)| \mathrm{d}t$.

a) En considérant la suite $(f_n)_n$ de E définie par $f_n : x \mapsto x^n$, montrer que la forme linéaire $u : f \mapsto f(1)$ n'est pas continue.

b) Proposer une norme sur E pour laquelle u devient continue.

Chapitre 4
Limite d'une fonction
Continuité
Continuité et Linéarité
Critère fondamental
Norme subordonnée
Espaces vectoriels normés de dimension finie

3.2. Norme subordonnée

Proposition 15

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors u est continue **ssi** l'image de la boule unité $B_F(0,1)$ de E par u est bornée.

Definition 9

Pour $u \in \mathcal{L}_c(E, F)$, on appelle *norme* de u *subordonnée* à $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$ le nombre :

$$|||u||| = \sup_{x \in B_F(0,1)} \|u(x)\|_F = \sup_{\|x\|_E \leqslant 1} \|u(x)\|_F$$

$|||u|||$ s'appelle aussi *norme d'opérateur* de u (notation $|||u|||_{op}$).

Chapitre 4

Limite d'une fonction

Continuité

Continuité et Linéarité

Critère fondamental

Norme subordonnée

Espaces vectoriels normés de dimension finie

Exercice 7

Montrer qu'on a également :

$$|||u||| = \sup_{\|x\|_E < 1} \|u(x)\|_F = \sup_{\|x\|_E = 1} \|u(x)\|_F$$

3.2. Norme subordonnée

Chapitre 4

Limite d'une fonction

Continuité

Continuité et Linéarité

Critère fondamental

Norme subordonnée

Espaces vectoriels normés de dimension finie

Proposition 16

L'application $|||\cdot|||$ définit une norme sur $\mathcal{L}_c(E,F)$. On a de plus :

$$\forall u \in \mathcal{L}_c(E,F), \quad \forall x \in E, \quad \|u(x)\|_F \leqslant |||u||| \, \|x\|_E$$

Remarque :

$|||u|||$ est le plus petit module de Lipschitz de u et :

$$|||u||| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E}$$

3.2. Norme subordonnée

Proposition 17

Si E, F, G sont des e.v.n., et $|||\cdot|||$, $|||\cdot|||'$ et $|||\cdot|||''$ les normes d'opérateurs sur $\mathcal{L}_c(E,F)$, $\mathcal{L}_c(F,G)$ et $\mathcal{L}_c(E,G)$,

$$\forall u \in \mathcal{L}_c(E,F), \quad \forall v \in \mathcal{L}_c(F,G), \quad |||v \circ u|||'' \leqslant |||v|||' \cdot |||u|||$$

Remarque :

Avec $E = \mathbb{K}^n$ muni d'une norme $\|\cdot\|$, on peut définir $|||\cdot|||$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$. Alors, pour $x \in \mathbb{K}^n$, et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$\|Ax\| \leqslant |||A|||\,\|x\| \qquad \text{et} \qquad |||AB||| \leqslant |||A|||\,|||B|||$$

Table des matières

1 Limite d'une fonction

2 Continuité

3 Continuité et Linéarité

4 Espaces vectoriels normés de dimension finie

Limite d'une fonction
Continuité
Continuité et Linéarité
Espaces vectoriels normés de dimension finie
Équivalence des normes
Compacité des fermés bornés, cas des sous-espaces
Continuité des applications linéaires

4. Espaces vectoriels normés de dimension finie

Chapitre 4

Limite d'une fonction

Continuité

Continuité et Linéarité

Espaces vectoriels normés de dimension finie

Équivalence des normes

Compacité des fermés bornés, cas des sous-espaces

Continuité des applications linéaires

4.1. Équivalence des normes

4.1. Équivalence des normes

Theoreme 6

De Bolzano-Weierestrass.
Toute suite bornée de $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ admet une valeur d'adhérence.

Remarque :

Lié à la propriété de la borne supérieure sur $\mathbb{R}$.

Corollaire 3

Toute partie fermée et bornée de $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ est compacte.

4.1. Équivalence des normes

Theoreme 7

Équivalence des normes.
Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sur E sont équivalentes.

Remarque :

Notion de convergence *intrinsèque*.

Proposition 18

En dimension finie :

a) une suite converge **ssi** toutes les suites coordonnées dans une base convergent.

b) une fonction admet une limite en un point **ssi** toutes les fonctions coordonnées dans une base admettent une limite en ce point.

Chapitre 4

Limite d'une fonction

Continuité

Continuité et Linéarité

Espaces vectoriels normés de dimension finie

Équivalence des normes

Compacité des fermés bornés, cas des sous-espaces

Continuité des applications linéaires

4.2. Compacité des fermés bornés, cas des sous-espaces

4.2. Compacité des fermés bornés, cas des sous-espaces

Proposition 19

Lorsque E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, une partie A de E est compacte **ssi** elle est fermée et bornée.

Corollaire 4

une suite bornée de E converge **ssi** elle admet une unique valeur d'adhérence.

Proposition 20

Si F est un sous-espace de dimension finie de E, alors F est fermé.

Chapitre 4

Limite d'une fonction

Continuité

Continuité et Linéarité

Espaces vectoriels normés de dimension finie

Équivalence des normes

Compacité des fermés bornés, cas des sous-espaces

Continuité des applications linéaires

4.3. Continuité des applications linéaires

4.3. Continuité des applications linéaires

Proposition 21

Si E est de dimension finie, alors toutes les applications linéaires de E vers F sont continues : $\mathcal{L}_c(E,F) = \mathcal{L}(E,F)$.

Remarque :

Généralisation à la multilinéarité.

4.3. Continuité des applications linéaires

Proposition 22

- Si E est euclidien, le produit scalaire $\langle , \rangle$ est continu sur E^2
- l'application det est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
- L'application "produit matriciel" $(A, B) \mapsto AB$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$
- Toute fonction polynomiale en plusieurs variables est continue.

Exercice 8

Montrer que $GL_n(\mathbb{K})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.