Fiche d'exercices n° 4

Continuité dans les espaces vectoriels normés

Exercice 1. *caractère fermé ou ouvert d'un sous-espace vectoriel*

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E.

a) Montrer que si F est ouvert, alors $F = E$.

b) Montrer que si E est de dimension finie, alors F est fermé.

Exercice 2. *séparation de deux fermés disjoints*

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Pour toute partie A de E et tout point $x \in E$, on note :

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} \|x - y\|.$$

a) Soient F une partie fermée non vide de E et $x \in E$. Montrer :

$$d(x, F) = 0 \Leftrightarrow x \in F.$$

b) Soient F et G deux fermés non vides disjoints de E. Montrer qu'il existe deux ouverts U et V tels que $F \subset U$, $G \subset V$ et $U \cap V = \varnothing$.

Exercice 3. ⋆

Pour $r \in [\![0, n]\!]$, on note E_r l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de rang supérieur ou égal à r. Montrer que E_r est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 4. ⋆

Montrer que l'ensemble des polynômes réels de degré n scindés à racines simples est une partie ouverte de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 5.

a) Proposer une fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, telle que $f(\mathbb{R})$ est un intervalle ouvert (et borné). Est-ce encore possible pour $f(I)$, avec I un intervalle fermé et borné ?

b) Proposer une fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, telle que $f(\mathbb{R})$ est un intervalle fermé (et borné). Est-ce encore possible pour $f(I)$, avec I un intervalle ouvert et borné ?

Exercice 6.

Soient E et F deux espaces vectoriels normés et $f : E \to F$. Montrer l'équivalence des trois assertions suivantes :

(i) f est continue.

(ii) Pour tout $A \subset E$, $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$

(iii) Pour tout $B \subset F$, $f^{-1}(\mathring{B}) \subset \left(f^{-1}(B)\right)^\circ$

Exercice 7.

Soit E et F deux espaces vectoriels normés, dont on notera $\|\cdot\|$ les normes et soit $A \subset E$ une partie de E, non réduite à un singleton. On note $\mathrm{Lip}(A, F)$ l'ensemble des fonctions Lipschitzienne sur A, et pour tout $f \in \mathrm{Lip}(A, F)$, on note $\mu(f)$ le plus petit module de Lipschitz pour f.

a) Montrer que $\mu(f)$ est bien défini pour tout $f \in \mathrm{Lip}(A, F)$.

b) Montrer que $\mathrm{Lip}(A, F)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathcal{C}(A, F)$.

c) On fixe $a \in A$. Montrer que l'application $N : f \mapsto \|f(a)\| + \mu(f)$ définit une norme sur $\mathrm{Lip}(A, F)$.

Exercice 8.

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, K une partie compacte de E et $r > 0$. On pose $L = \bigcup_{x \in K} B_F(x, r)$. Démontrer que L est compact.

Exercice 9.

Soit E un espace vectoriel normé et soient A et B deux parties connexes par arcs de E.

a) Démontrer que $A \times B$ est connexe par arcs

b) Démontrer que $A + B$ est connexe par arcs

c) L'intérieur de A est-t-il toujours connexe par arcs ?

d) Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $A \cup B$ soit connexe par arcs.

Exercice 10.

soient E et F deux espaces vectoriels normés et $f : E \to F$. On appelle *graphe* de f l'ensemble note $\mathrm{Gr}(f) = \{(x, f(x)),\, x \in E\} = \{(x, y) \in E \times F \,|\, y = f(x)\}$.

a) Montrer que si f est continue, alors $\mathrm{Gr}(f)$ est fermé dans $E \times F$.

b) Prouver la réciproque lorsque $f(E)$ est inclus dans un compact de F.

c) Donner un contre-exemple si $f(E)$ n'est pas inclus dans un compact.

Exercice 11.

Soit A une partie compacte d'un espace vectoriel normé et $f : A \to A$ telle que :

$$\forall (x, y) \in A^2, \quad x \neq y \Rightarrow d\big(f(x), f(y)\big) < d(x, y)$$

a) Montrer que f admet un point fixe unique, a. *(Indication : considérer l'application $x \mapsto d(x, f(x))$)*

b) Soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de A telle que $x_{n+1} = f(x_n)$. Montrer qu'elle converge vers a.

Exercice 12.

Soient deux espaces vectoriels normées E et F, A un compact de E et soit $f : A \to F$ continue et injective.

a) Montrer que $f^{-1} : f(A) \to A$ est aussi continue.

b) Donner un exemple où A n'est pas compact et f^{-1} n'est pas continue.

Exercice 13.

Soit A une partie connexe par arcs d'un espace vectoriel normé E, et soit $B \subset A$ à la fois ouverte et fermée relativement à A. On définit $f : A \to \mathbb{R}$ par $f(x) = 1$ si $x \in B$ et $f(x) = 0$ si $x \notin B$.

a) Démontrer que f est continue.

b) En déduire que $B = \varnothing$ ou $B = A$.

Exercice 14.

a) Démontrer que les composantes connexes d'un ouvert A d'un espace vectoriel normé sont ouvertes.

b) Application : Montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}$ est une réunion finie ou dénombrable d'intervalles ouverts disjoints.

Exercice 15.

Soit $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ l'ensemble des suites réelles convergentes muni de la norme $\|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$. Soit $L : u \mapsto \lim(u)$. Montrer que L est une application linéaire continue et calculer sa norme subordonnée.

Exercice 16.

On note $E = \mathcal{C}^\infty([0, +\infty[, \mathbb{R})$ et D l'endomorphisme de dérivation $D : f \mapsto f'$.

a) Montrer qu'il n'existe aucune norme sur E pour laquelle D soit continu (considérer $x \mapsto e^{\alpha x}$).

b) Soit F le sous-espace vectoriel constitué des fonctions polynomiales. Trouver une norme sur F pour laquelle $D_{|_F}$ est continu.

Exercice 17.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et f une forme linéaire sur E.

a) Montrer que f est continue si, et seulement si, $\operatorname{Ker}(f)$ est fermé.

b) On suppose f continue. Soit $x \in E$. Montrer que $|f(x)| = |||f|||\mathrm{d}(x, \operatorname{Ker}(f))$.

Exercice 18. *application linéaire non continue*

On suppose ici $E = \mathcal{C}\big([0, 1], \mathbb{R}\big)$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. Vérifier que l'application $N_1 : E \to \mathbb{R}^+$ définie par

$$N_1 : f \mapsto \int_0^1 \big|f(t)\big|\mathrm{d}t$$

est une norme sur E.

a) En considérant la suite $(f_n)_n$ de E définie par $f_n : x \mapsto x^n$, montrer que la forme linéaire $u : f \mapsto f(1)$ n'est pas continue sur E.

b) Proposer une norme sur E pour laquelle u devient continue.

Exercice 19. *théorème de Riesz*

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace vectoriel normé E.

a) Démontrer que pour tout $a \in E$, il existe $x \in F$ tel que $d(a, F) = \|x - a\|$.

b) On suppose $F \neq E$. Soit $a \in F^c$ et soit $x \in F$ tel que $d(a, F) = \|a - x\|$. On pose $b = \dfrac{1}{\|a - x\|}(a - x)$. Montrer que $d(b, F) = 1$ et $\|b\| = 1$.

c) On suppose E de dimension infinie. Construire une suite $(b_n)_n$ de E telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|b_n\| = 1 \qquad \text{et} \qquad d\big(b_n, \operatorname{vect}(b_0, \dots, b_{n-1})\big) = 1$$

d) En déduire que la boule unité fermée de E n'est pas compacte.

(Remarque : D'après un résultat de cours, Si E est de dimension finie, la boule unité fermée est compacte. Cet exercice prouve qu'il y a en fait équivalence. C'est le théorème de Riesz : La compacité de la boule unité fermée caractérise la dimension finie)

Exercice 20.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soit $g : E \to E$ définie par $g : x \mapsto \dfrac{x}{1+\|x\|}$. Démontrer que g est une bijection de E sur $B(0,1)$ et montrer que g et g^{-1} sont continues.

Exercice 21.

Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_\infty$. Démontrer que $\varphi : E \to \mathbb{R}$, définie par $\varphi : f \mapsto \inf_{[0,1]} f$, est continue.

Exercice 22.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $T \in \mathcal{L}(E)$.

a) Montrer que T est k-lipchitzienne si et seulement si, pour tout $x \in E$, $\|T(x)\| \leqslant k\|x\|$.

b) Peut-on trouver une norme sur $\mathcal{C}^\infty([0,1],\mathbb{R})$ telle que $D : f \mapsto f'$ soit lipschitzienne ?

c) Peut-on trouver une norme sur $\mathbb{R}[X]$ telle que $D : P \mapsto P'$ soit lipschitzienne ?

Exercice 23. (mines-ponts)

On note ϕ l'application définie sur l'ensemble E des fonctions continues sur $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\phi(f) = \int_0^{1/2} f(t)\mathrm{d}t - \int_{1/2}^1 f(t)\mathrm{d}t$$

On munit E de la norme N_∞ définie par $N_\infty(f) = \sup\limits_{[0,1]} |f|$.

a) Déterminer $M = \sup\limits_{f\in E, N_\infty(f)=1} \big|\phi(f)\big|$ et montrer que M n'est pas dans l'ensemble A qu'il majore.

b) Montrer que $F = \big\{f \in E,\ \phi(f) = 1\big\}$ est fermé et calculer la distance de la fonction nulle à F.

Exercice 24. (mines-ponts)

On pose $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}$ muni de la norme N_∞. Soit l'ensemble $F = \big\{f \in E \,|\, f(0) = f(1)\big\}$. Déterminer l'adhérence et l'intérieur de F.

Exercice 25. (ens)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé et soient $a_1, \dots, a_n \in E$.
On pose $C = \left\{\displaystyle\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i,\ \lambda_i \geqslant 0\right\}$.

a) Montrer que, pour tout $x \in E$, il existe $c \in C$ tel que $\|x - c\| = \inf\big\{\|x-a\|,\ a \in C\big\}$.

b) En déduire que C est fermé.

Exercice 26. (x)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et H un hyperplan de E. Montrer que $E\backslash H$ est connexe par arc si, et seulement si, H n'est pas fermé.

Exercice 27. (ens)

Soit f une fonction polynomiale sur $\mathbb{C}$. Montrer que l'image par f de tout fermé est un fermé.

Quelques solutions

Solution 6

— $(i) \Rightarrow (ii)$: supposons f continue et soit $A \subset E$. Si $y = f(a)$ avec $a \in \overline{A}$, il existe une suite $(x_n)_n$ de A telle que $x_n \to a$ et on a donc $f(x_n) \to f(a) = y$ par continuité en a, d'où $y \in \overline{f(a)}$.

— $(ii) \Rightarrow (iii)$: Supposons (ii) et soit $x \in f^{-1}(\mathring{B})$. On a donc $f(x) \in \mathring{B}$, ce qui peut se réécrire $f(x) \notin \overline{B^c}$, et donc $f(x) \notin \overline{f(A)}$ avec $A = f^{-1}(B^c)$. On en déduit $f(x) \notin f(\overline{A})$ et donc $x \notin \overline{A}$: autrement dit $x \in (A^c)^\circ = \big(f^{-1}(B)\big)^\circ$.

— $(iii) \Rightarrow (i)$: Supposons (iii) et soit V un ouvert de F. Comme $V = \mathring{V}$, on a $f^{-1}(V) \subset \big(f^{-1}(V)\big)^\circ$ et donc $f^{-1}(V)$ est ouvert. On a ainsi que l'image réciproque de tout ouvert est ouvert, d'où (i).

Solution 7

a) Un module de Lipchitz est un majorant de l'ensemble non vide $\left\{\dfrac{\|f(x) - f(y)\}}{\|x - y\|}, (x, y) \in A^2, x \neq y\right\}$. Le plus petit module de Lipschitz est donc bien défini comme la borne supérieure de cet ensemble (le plus petit des majorants).

b) Toute fonction lispchitzienne est continue et il est facile de vérifier que si f est k-lipschitzienne et f est k'-lipschitzienne, alors $f + \lambda g$ est $(k + |\lambda|k')$-lipschitzienne, pour $\lambda \in \mathbb{K}$.

c) Par des raisonnements sur les bornes supérieures, on montre sans difficulté que $\mu(\lambda f) = |\lambda|\mu(f)$ et $\mu(f + g) \leqslant \mu(f) + \mu(g)$. Il en résulte immédiatement l'homogénéité et l'inégalité triangulaire pour N. L'introduction de $\|f(a)\|$ dans la définition de N est essentielle pour la séparation. En effet, $\mu(f) = 0$ implique que f est constante, et donc $N(f) = 0$ implique que f est constante et nulle en a, donc nulle sur A.

Solution 8

K est compact donc borné, et on en déduit immédiatement que L est bornée (si $K \subset B_F(0, M)$, $L \subset B_F(0, M + r)$). Comme E est de dimension finie, il suffit de prouver que L est fermée. Soit $(y_n)_n$ une suite de L, convergeant vers $y \in E$. Montrons qu'on a nécessairement $y \in L$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in K$ tel que $y_n \in B_F(x_n, r)$. On définit ainsi une suite du compact K, qui admet donc une valeur d'adhérence $x \in K$: il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(x_{\varphi(n)})_n$ converge vers x. On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\|y_{\varphi(n)} - x_{\varphi(n)}\| \leqslant r$$

Par passage à la limite et continuité de la norme, on en déduit $\|y - x\| \leqslant r$, et il en résulte bien que $y \in L$.

Solution 11

a) Si a et b sont deux points fixes distincts, on a $d(a, b) = d\big(f(a), f(b)\big) < d(a, b)$, absurde. L'unicité étant établie, passons à l'existence et considérons l'application $\varphi : x \mapsto d(x, f(x)) = \|x - f(x)\|$. La norme étant continue, et f étant continue car 1-lipschitzienne, la fonction φ est continue sur le compact A. D'après le théorème des bornes atteintes, il existe donc $a \in A$ telle que :

$$\forall x \in A, \quad \varphi(a) \leqslant \varphi(x)$$

Supposons $\varphi(a) > 0$, c'est-à-dire $a \neq f(a)$. Alors, par hypothèse, on a :

$$\varphi(f(a)) = d\big(f(a), f(f(a))\big) < d(a, f(a)) = \varphi(a),$$

ce qui contredit la définition de a. On a donc $\varphi(a) = 0$, c'est-à-dire $a = f(a)$. On a bien prouvé l'existence d'un point fixe.

b) On considère la suite réelle positive $\big(d(x_n, a)\big)_n$. Il est facile de vérifier qu'elle est décroissante, et qu'elle admet donc une limite $\ell \geqslant 0$. Comme A est compact, $(x_n)_n$ admet une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_n$ qui converge vers un certain $b \in A$, et on en déduit en particulier que $d(b, a) = \lim d(x_{\varphi(n)}, a) = \ell$. Mais on a aussi

$$d(f(b), f(a)) = \lim d\big(f(x_{\varphi(n)}), a\big) = \lim d(x_{\varphi(n)+1}, a) = \ell$$

L'hypothèse $\ell > 0$ impliquerait donc $\ell = d(f(b), f(a)) < d(b, a) = \ell$, absurde. On a donc bien $d(x_n, a) \to 0$, autrement dit, $x_n \to a$.

Solution 17

a) Si f n'est pas continue, l'image de la boule unité n'est pas bornée et il existe donc une suite $(x_n)_n$ de cette boule telle que $\big|f(x_n)\big| \to +\infty$. A partir d'un certain rang n_0, on a $f(x_n) \neq 0$ et on pose $y_n = x_{n_0} - \dfrac{f(x_{n_0})}{f(x_n)} x_n$, de sorte que $(y_n)_{n \geqslant n_0}$ est une suite de $\operatorname{Ker}(f)$ qui converge vers $x_{n_0} \notin \operatorname{Ker}(f)$.

b) Notons $d = d(x, \operatorname{Ker}(f))$. Pour $\varepsilon > 0$ il existe $y \in \operatorname{Ker}(f)$ tel que $\|x - y\| \leqslant d + \varepsilon$ et on a alors $|f(x)| = |f(x-y)| \leqslant |||f|||(d + \varepsilon)$. Reste à prouver l'autre l'inégalité.

Solution 19

a) L'application $f : x \mapsto \|a - x\|$ est continue sur le compact $K = F \cap \overline{B}(0, 2\|a\|)$ donc atteint un minimum sur K, qui est un minimum sur F puisque $f(x) \geqslant f(0)$ pour $x \notin K$.

b) On montre qu'on a toujours $\|y - b\| \geqslant 1$ pour $y \in F$ (factoriser par $1/\|a - x\|$) et donc que $d(b, F) \geqslant 1$. On a de plus $1 = \|b\| \geqslant d(b, F)$.

c) Pour tout n, on peut choisir a_n dans le complémentaire de $F_n = \operatorname{vect}(b_0, \ldots, b_{n-1})$ puis x_n et enfin b_n comme dans la question précédente (on part de b_0 quelconque de norme 1).

d) La suite $(b_n)_n$ ne peut pas admettre de valeur d'adhérence : on pourrait trouver sinon $n > p$ tel que $\|b_p - b_n\| < 1$, absurde étant donné que $b_p \in F_{n-1}$.

Solution 25

pas simple! récurrence sur n. Initialisation : $\lambda_1 \mapsto \|x - \lambda_1 a_1\|$ est continue, constante si $a_1 = 0$, tend vers $+\infty$ en $+\infty$ sinon donc admet un miminum. Hérédité : On pose C' pour la version de C jusqu'à $n - 1$. si $a_n \in C'$, on voit que $C' = C$, terminé. Sinon, $d(a_n, C') \neq 0$ car C' fermé (HR). On pose $\varphi : \lambda_n \mapsto d(x - \lambda_n a_n, C')$. Comme la distance à D' est 1-lipschitzienne, on a $\varphi(\lambda_n) \geqslant d(\lambda_n a_n, C') - d(x, C') = \lambda_n d(a_n, C') - d(x, C')$ (voir pourquoi), ce qui tend vers $+\infty$ en $+\infty$. φ admet donc un minimum λ_n, et par HR, $d(x - \lambda_n a_n, C')$ est atteint.