

Interrogation de cours n° 6

Lundi 13 octobre 2025

Définitions et énoncés (5 pts)

1. Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière $\sum a_n z^n$.
2. Donner l'expression du produit de Cauchy de deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$.
3. Donner l'expression de la série dérivée d'une série entière $\sum a_n z^n$.
4. Quelle régularité une fonction f développable en série entière possède-t-elle ? Donner l'expression des coefficients de cette série entière en fonction de f .
5. Expliciter le développement en série entière de $f : x \mapsto \ln(1+x)$ et préciser l'intervalle de convergence.

Démonstrations (6 pts)

- a) Si $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \rightarrow \ell$, montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est $\frac{1}{\ell}$. (On pourra utiliser sans démonstration la règle de d'Alembert concernant la convergence des séries numériques).
- b) Montrer que si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est paire et développable en série entière sur \mathbb{R} , alors les coefficients de rang impair sont tous nuls.
- c) Montrer que les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.