Devoir surveillé n° 3 - MPI*

Samedi 18 octobre 2025.

Ce devoir surveillé, d'une durée de 4h est constitué de deux problèmes tout à fait indépendants issus des concours. Le premier est commun avec les MPI. On attachera une attention particulière au soin et à la présentation, et à la rigueur de l'argumentation, tout en évitant les lourdeurs inutiles.

On maintient la petite règle supplémentaire du dernier devoir : ne pas répondre à une question si vous n'êtes pas sûr de le faire soigneusement, et avec les idées à peu près claires. Bon courage !

Problème 1 : Étude d'une famille de séries entières

Dans tout le problème, α désigne un nombre réel. On note $\mathbb{D}_\alpha$ l'ensemble des réels x pour lesquels la série entière $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n^\alpha}$ est convergente et on pose, pour tout $x \in \mathbb{D}_\alpha$:

$$f_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^\alpha}$$

Objectifs :

Ce problème est composé de deux **parties** indépendantes.
Dans la **partie I**, on étudie quelques propriétés élémentaires des fonctions f_α.
L'objectif de la **partie II** est de construire un logarithme complexe.

I. Quelques propriétés des fonctions f_α

Q1. Déterminer le rayon de convergence R commun aux séries entières définissant les fonctions f_α.

Q2. Déterminer, suivant les valeurs du réel α, le domaine de définition $\mathbb{D}_\alpha$ de la fonction f_α. *On distinguera les cas $\alpha \in]-\infty, 0]$, $\alpha \in]0,1]$ et $\alpha \in]1,+\infty[$.*

Q3. On suppose dans cette question $\alpha > 0$. Déterminer, pour tout $x \in \mathbb{D}_\alpha$, le signe de $f_\alpha(x)$.

Q4. Expliciter f_0, f_{-1} et f_1.

Q5. Soit $\alpha > 1$. Prouver que f_α est continue sur $\mathbb{D}_\alpha$.

Q6. Soit $\alpha \leqslant 1$. Prouver que $\lim_{x\to 1^-} f_\alpha(x) = +\infty$. *On pourra comparer f_α à f_1.*

II. Un logarithme complexe

Q7. Donner sans démonstration le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction qui à $x \in]-1,1[$ associe $\ln(1+x)$.

Pour tout nombre complexe z, tel que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-z)^n}{n}$ est convergente, on note :

$$S(z) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-z)^n}{n}$$

Q8. Donner le rayon de convergence R de la série entière définissant S. Pour tout x réel élément de $]-R,R[$, déterminer la valeur de $\exp(S(x))$.

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $|z_0| < R$. On considère la série entière de la variable *réelle* t suivante :

$$\sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n-1}\frac{z_0^n}{n}t^n.$$

En cas de convergence, on note $g(t)$ sa somme.
On a donc, pour $t \in \mathbb{R}$ tel que la série est convergente, $g(t) = S(tz_0)$.

Q9. Déterminer le rayon de convergence de la série entière définissant g.

Q10. Prouver que g est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1]$. Déterminer, pour tout $t \in [0,1]$, $g'(t)$.

Q11. On pose $h = \exp \circ g$. Prouver que pour tout $t \in [0,1]$:

$$h'(t) = \frac{z_0}{1+tz_0}h(t).$$

Q12. Résoudre l'équation différentielle de la question précédente et en déduire que :

$$\exp(S(z_0)) = z_0 + 1.$$

Problème 2 : Dérivation de la somme d'une série de fonctions

Objectifs :

Ce problème étudie la dérivation des sommes de séries de fonctions $\sum f_n$. Pour conclure à une formule du type $\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n\right)^{(K)} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n^{(K)}$ avec K entier supérieur ou égal à 2 , les théorèmes usuels contiennent généralement au moins une hypothèse sur les dérivées intermédiaires $f_n', \dots, f_n^{(K-1)}$ (par exemple de convergence simple sur tout l'intervalle ou même en un seul point). Le sujet montre que l'on peut affaiblir l'hypothèse de contrôle des dérivées intermédiaires par une hypothèse de convergence de séries numériques de la forme $\sum f_n(x)$ où x parcourt un ensemble fini.

Le sujet est divisé en deux **parties** :

- la **partie I** étudie une inégalité, qualifiée d'inégalité d'interpolation, qui permet de contrôler les dérivées intermédiaires d'une fonction de classe $\mathcal{C}^K$;
- la **partie II** utilise la partie I pour démontrer un résultat de transfert du caractère $\mathcal{C}^K$ à une somme de série de fonctions ;

Notations :

- Pour tous entiers i et j vérifiant $i \leqslant j$, la notation $[\![i,j]\!]$ désigne l'intervalle d'entiers $[i,j] \cap \mathbb{N}$.
- La lettre K désigne systématiquement un entier naturel non nul.
- Le symbole $\mathbb{R}_{K-1}[X]$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à $K-1$ à coefficients réels.
- Pour tout intervalle I, on note $\mathcal{C}^K(I)$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^K$. Pour tous $f \in \mathcal{C}^K(I)$ et $k \in [\![0,K]\!]$, on note $f^{(k)}$ la dérivée d'ordre k (et donc $f^{(0)} = f$, $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$).
- Dans le cas $I = [0,1]$, pour toute fonction bornée $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, on note $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$.

I. Inégalités d'interpolation des dérivées

Soit K réels distincts $x_1 < \cdots < x_K$ de l'intervalle $[0,1]$. Le but de cette partie est de montrer le résultat suivant : il existe une constante $C > 0$ (dépendant des réels $x_1, \ldots, x_K$) telle que

$$\forall f \in \mathcal{C}^K([0,1]), \quad \max_{0 \leqslant k \leqslant K-1} \left\| f^{(k)} \right\|_\infty \leqslant \left\| f^{(K)} \right\|_\infty + C \sum_{\ell=1}^{K} |f(x_\ell)| \qquad (I.1)$$

Une inégalité du type précédent est appelée *inégalité d'interpolation* à l'ordre K.

I.A - Cas particulier $K = 1$

On fixe $x_1 \in [0,1]$ et on étudie une inégalité d'interpolation à l'ordre 1,

$$\forall f \in \mathcal{C}^1([0,1]), \quad \|f\|_\infty \leqslant \left\|f'\right\|_\infty + C\,|f(x_1)| \qquad (I.2)$$

Q1. Montrer l'inégalité d'interpolation $(I.2)$ avec $C = 1$.

Q2. Soit $C \in]0,1[$. à l'aide d'un exemple simple de fonction f, montrer que l'inégalité d'interpolation (I.2) est fausse.

I.B - Cas particulier $K = 2$

On fixe deux réels distincts $x_1 < x_2$ de $[0,1]$. On veut construire une constante $C > 0$ telle qu'on ait l'inégalité d'interpolation à l'ordre 2,

$$\forall f \in \mathcal{C}^2([0,1]), \quad \max\left(\|f\|_\infty, \left\|f'\right\|_\infty\right) \leqslant \left\|f''\right\|_\infty + C\left(|f(x_1)| + |f(x_2)|\right) \qquad (I.3)$$

Q3. Pour tous $x \in [0,1]$ et $f \in \mathcal{C}^2([0,1])$, démontrer l'inégalité

$$\left| f'(x) - \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \right| \leqslant \left\|f''\right\|_\infty$$

Q4. En déduire que, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^2([0,1])$, on a $\|f'\|_\infty \leqslant \|f''\|_\infty + \dfrac{|f(x_1)| + |f(x_2)|}{x_2 - x_1}$.

Q5. Conclure le cas $K = 2$ en montrant l'inégalité d'interpolation $(I.3)$ avec $C = 1 + \dfrac{1}{x_2 - x_1}$.

I.C - Cas général par interpolation de Lagrange

On revient à l'étude du cas général d'inégalité d'interpolation à l'ordre K, donnée par $(I.1)$. On fixe $K \in \mathbb{N}^\star$.

Q6. Démontrer que l'application

$$\Psi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{K-1}[X] & \to & \mathbb{R}^K \\ P & \mapsto & (P(x_1), \ldots, P(x_K)) \end{array} \right.$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Q7. Montrer qu'il existe K polynômes $L_1, \ldots, L_K$ de $\mathbb{R}_{K-1}[X]$ tels que, pour toute fonction f dans $\mathcal{C}^K([0,1])$, le polynôme $P = \sum\limits_{j=1}^{K} f(x_j)\, L_j$ vérifie

$$\forall \ell \in [\![1, K]\!], \quad P(x_\ell) = f(x_\ell)$$

Dans les deux questions suivantes **Q8.** et **Q9.**, on fixe $f \in \mathcal{C}^K([0,1])$ et on note P le polynôme déterminé dans la question **Q7.**.

Q8. Pour tout $k \in [\![0, K-1]\!]$, montrer qu'il existe au moins $K-k$ réels distincts de $[0,1]$ en lesquels la fonction $f^{(k)} - P^{(k)}$ s'annule.

Q9. En déduire l'inégalité $\left\|f^{(k)} - P^{(k)}\right\|_\infty \leqslant \left\|f^{(k+1)} - P^{(k+1)}\right\|_\infty$ pour tout $k \in [\![0, K-1]\!]$.

Q10. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ pour laquelle l'inégalité d'interpolation (I.1) est vérifiée.

II. Dérivation $\mathcal{C}^K$ pour les séries de fonctions

II.A - Énoncé général

On se propose maintenant de démontrer le résultat annoncé dans le préambule. Soit $K \in \mathbb{N}^\star$, on considère

- des réels distincts $x_1 < \cdots < x_K$ d'un intervalle $[a,b]$ (avec $a < b$) ;
- une suite de fonctions (f_n) de classe $\mathcal{C}^K$ sur $[a,b]$ à valeurs réelles et vérifiant les deux hypothèses
  (H1) la série de fonctions $\sum f_n^{(K)}$ converge normalement sur $[a,b]$;
  (H2) pour tout $\ell \in [\![1, K]\!]$ la série numérique $\sum f_n(x_\ell)$ est absolument convergente.

Q11. Dans le cas particulier $[a,b] = [0,1]$, justifier que la série $\sum f_n^{(k)}$ converge normalement sur $[a,b]$ pour tout $k \in [\![0, K-1]\!]$.

Q12. Traiter la question précédente dans le cas général d'un segment $[a,b]$ avec $a < b$.
On pourra examiner $f_n \circ \sigma$ où $\sigma : [0,1] \to [a,b]$ est définie par $\sigma(t) = (1-t)a + tb$ pour tout $t \in [0,1]$.

D'après le résultat de la question précédente, on peut poser $F_k(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}(x)$ pour tout $x \in [a,b]$.

Q13. Démontrer que F_0 est de classe $\mathcal{C}^K$ sur $[a,b]$ et que $F_0^{(k)} = F_k$ pour tout $k \in [\![1, K]\!]$.

II.B - Application sur un exemple

Dans cette sous-partie, on considère un exemple où les dérivées intermédiaires ne s'expriment pas avec les fonctions usuelles.

Q14. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, justifier qu'il existe une unique fonction $f_n \in \mathcal{C}^2(\,]0,+\infty[\,)$ vérifiant

$$f_n(1) = 0,\ f_n(2) = 0 \text{ et } f_n''(x) = (-1)^n 2^{-nx^2} \text{ pour tout } x > 0$$

Q15. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n(x)$ converge normalement sur tout segment inclus dans $]0,+\infty[$ et que la fonction $F : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$.

Q16. Expliciter $F''(x)$.

Q17. Montrer que $|F(x)| \leqslant \dfrac{1}{3}$ pour tout $x \in [1,2]$.