Fiche d'exercices n^{o} 7

Fonctions vectorielles à une variable

Exercice 1.

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f : \mathbb{R} \to E$ dérivable en 0. On suppose

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = 2f(x)$$

Montrer que f est linéaire

Exercice 2.

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{C}^1([a,b[, E)$.
Montrer que f admet un prolongement de classe $\mathcal{C}^1$ à $[a,b]$ si, et seulement si, f' a une limite en b.

Exercice 3.

Soit $f\colon [0,1] \to E$ dérivable à droite en 0 et vérifiant $f(0) = 0$.
Déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f\big(k/n^2\big)$$

Exercice 4.

Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telle que f et f'' soient bornées.
Montrer, à l'aide d'une formule de Taylor, que

$$\|f'\|_\infty^2 \leqslant 4\|f\|_\infty \|f''\|_\infty$$

Exercice 5.

Soit $f\colon [0,1] \to E$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que

$$f(0) = f'(0) = f'(1) = 0 \ \textbf{ET}\ \big\|f(1)\big\| = 1$$

Montrer en écrivant deux formules de Taylor que $\|f''\|_\infty \geqslant 4$.

Exercice 6.

Soit $k \in]0,1[$ et $f : \mathbb{R} \to E$, avec E un espace vectoriel normé de dimension finie, continue en 0 et vérifiant :

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{f(x) - f(kx)}{x} \right) = L \in E$$

a) On fixe $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad 0 < |x| \leqslant \eta \Rightarrow \left\| \frac{f(k^i x) - f(k^{i+1}x)}{x} - k^i L \right\| \leqslant \varepsilon k^i$$

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in]-\eta, \eta[$,

$$\left\| \frac{f(x) - f(k^n x)}{x} - \frac{1-k^n}{1-k} L \right\| \leqslant \varepsilon \frac{1-k^n}{1-k}$$

c) Montrer que f est dérivable en 0 et exprimer $f'(0)$ en fonction de L et k.

Exercice 7. ⋆

Soit A une $\mathbb{K}$-algèbre de dimension finie et $U(A)$ son groupe des éléments inversibles. Soit $f : I \to A$ dérivable en $a \in I$. On suppose que $f(a) \in U(A)$.

Montrer qu'il existe un voisinage V de a tel que pour tout $t \in I \cap V$, $f(t) \in U(A)$. Montrer que la fonction $f^{-1} : t \mapsto \big(f(t)\big)^{-1}$ est dérivable en a et qu'on a :

$$(f^{-1})'(a) = -\big[f(a)\big]^{-1} f'(a) \big[f(a)\big]^{-1}$$

Exercice 8. ⋆⋆ *produit de convolution*

Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$ fixé et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}_n[X]$ définie par $f(t) = P(tX)$. À l'aide des applications composantes de f suivant la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$, montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa fonction dérivée.

Exercice 9. ⋆

Soit $f :]-1,1[\to \mathbb{R}^2$ définie par $f(t) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}, 2t\right)$ et soit $s : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $s(x,y) = x+y$. Calculer $s\left(\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)\mathrm{d}t\right)$.

Exercice 10.

Soit $f \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{C}^*)$. Montrer que $\left|\displaystyle\int_{[a,b]} f\right| = \displaystyle\int_{[a,b]} |f|$ si, et seulement si $f(x)$ est d'argument constant sur $[a,b]$.

Exercice 11.

Soit f une application continue par morceaux et croissante d'un segment $[a,b]$ vers $\mathbb{R}$. Pour tout entier $n > 0$, on pose

$$R_n = \int_{[a,b]} f - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right).$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant R_n \leqslant \dfrac{b-a}{n}\,(f(b) - f(a))$.

Exercice 12. ⋆

Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \int_0^{\sin^2 x} \arcsin(\sqrt{t})\mathrm{d}t + \int_0^{\cos^2 x} \arccos(\sqrt{t})\mathrm{d}t$$

est constante.

Exercice 13. ⋆

Trouver le minimum de $\displaystyle\int_0^1 (f'')^2$ quand f décrit l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $f(0) = f(1) = 0$ et $f'(0) = \alpha$, où α est un réel donné.