Fiche d'exercices n° 13

Calcul différentiel et optimisation

Calcul différentiel

Exercice 1.

Pour les fonctions suivantes, justifier l'existence des dérivées partielles, et les calculer :

a) $f(x,y) = \mathrm{e}^x \cos(y)$ **b)** $f(x,y) = (x^2+y^2)\cos(xy)$ **c)** $f(x,y) = \sqrt{1+x^2y^2}$

Exercice 2.

Montrer que les deux fonctions suivantes admettent des dérivées en $(0,0)$ suivant tout vecteur mais ne sont pas continues en $(0,0)$

a) $f(x,y) = \begin{cases} y^2 \ln|x| \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ **b)** $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

Exercice 3.

Montrer que la fonction suivante, définie sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ se prolonge par continuité en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$:

$$f : (x,y) \mapsto xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

Exercice 4.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. Calculer les dérivées partielles de :

a) $g(x,y) = f(x+y)$ **b)** $h(x,y) = f(x^2+y^2)$ **c)** $k(x,y) = f(xy)$

Exercice 5.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Calculer les dérivées (éventuellement partielles) des fonctions suivantes :

a) $g(x,y) = f(y,x)$
b) $g(x) = f(x,x)$
c) $g(x,y) = f(y, f(x,x))$
d) $g(x) = f(x, f(x,x))$

Exercice 6.

Justifier que les applications suivantes sont différentiables et calculer leur matrice jacobienne :

a) $f(x,y,z) = \left(\dfrac{1}{2}(x^2-y^2), \sin(x)\sin(y)\right)$ **b)** $g(x,y) = \left(xy, \dfrac{1}{2}x^2+y, \ln(1+x^2)\right)$

Exercice 7.

Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = M^2$. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et déterminer la différentielle de f en tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 8.

Soit $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ l'application exponentielle matricielle.

a) Montrer que exp est différentiable en 0 et expliciter $\mathrm{d}\exp(0)$.

b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique et $t \in \mathbb{R}$. Pour $n = 2$ ou $n = 3$, interpréter géométriquement $\exp(tA)$ et son approximation donnée, pour t petit, par la formule de Taylor à l'ordre 1.

Exercice 9.

Soit $f : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = M^{-1}$. Démontrer que f est différentiable en tout point M de $GL_n(\mathbb{R})$ et déterminer sa différentielle *(on pourra commencer par le cas $M = I_n$).*

Exercice 10.

Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par $f(M) = \det(M)$.

a) Montrer que f est différentiable en I_n et que $\mathrm{d}f(0) = \mathrm{tr}$.

b) En déduire que pour tout $M \in GL_n(\mathbb{R})$, f est différentiable en M et expliciter $\mathrm{d}f(M)$.

c) Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

d) Montrer finalement que f est différentiable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et expliciter $\mathrm{d}f(M)$ pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, à l'aide de la comatrice $\mathrm{Com}(M)$.

Exercice 11. *dérivation complexe*

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$. On dit que f est dérivable ou *holomorphe* en $z_0 \in \mathcal{U}$ lorsque l'application

$$w \mapsto \frac{f(z_0 + w) - f(z - 0)}{w}$$

admet une limite finie en 0, qu'on note alors $f'(z_0)$. On identifie f à une fonction $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ en posant

$$F(x, y) = \big(P(x, y), Q(x, y)\big) \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} P(x, y) = \mathrm{Re}\big(f(x + iy)\big) \\ Q(x, y) = \mathrm{Im}\big(f(x + iy)\big) \end{cases},$$

Soit $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathcal{U}$. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(i) f est holomorphe en z_0.

(ii) F est différentiable en (x_0, y_0) et P et Q vérifient les *relations de Cauchy-Riemann* :

$$\begin{cases} \partial_x P(x_0, y_0) = \partial_y Q(x_0, y_0) \\ \partial_x Q(x_0, y_0) = -\partial_Y P(x_0, y_0) \end{cases}$$

On vérifiera que dans ces conditions, la jacobienne $J_F(x_0, y_0)$ est de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, avec $f'(z_0) = a + ib$.

Remarque : l'approximation linéaire des variations de F au voisinage de z_0 est donc une similitude directe *de rapport* $\sqrt{a^2 + b^2} = \|f'(z_0)\|$ *et d'angle* $\arg f'(z_0)$. *De telles applications sont dites* conformes *car elles conservent les angles orientés*

Exercice 12.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}^2$, on a $|f(x) - f(y)| \leqslant \|x - y\|^2$. Montrer que f est constante.

Exercice 13.

Soit deux espaces vectoriels de dimension finie E et F, $\mathcal{U}$ un ouvert non vide E, $a \in \mathcal{U}$ et $f : \mathcal{U} \to F$ différentiable en a. On suppose que f admet une fonction réciproque $g : f(\mathcal{U}) \to E$ différentiable en $f(a)$. Démontrer que $\dim(E) = \dim(F)$.

Exercice 14.

Soit $f : E \to F$ différentiable, avec E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie. On suppose que pour tout $x \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $f(\lambda x) = \lambda f(x)$. Montrer que f est linéaire.

Exercice 15. *identité d'Euler des fonctions homogènes*

Soient une fonction $f : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$, différentiable en tout point, et k une constante réelle. Montrer que f est homogène de degré k, *i.e.* $f(tx) = t^k f(x)$ pour tout $t > 0$ et tout $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, si et seulement si elle vérifie l'identié d'Euler :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = k f(x)$$

(On pourra dériver la fonction $t \mapsto t^{-k} f(tx)$)

Ordre 2 et optimisation

Exercice 16.

Déterminer les matrices hessiennes dans les deux cas suivants :

a) $f : (x, y, z) \mapsto \sin(xyz)$ **a)** $f : (x, y) \mapsto \sin^2\left(\frac{y}{x}\right)$

Exercice 17.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et $F : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$F(r, \theta) = f(r \cos\theta, r \sin\theta) \qquad \text{(expression de } f \text{ en coordonées polaires)}$$

Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$ et que pour tout $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, et en notant $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(r, \theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}(r, \theta)$$

(Il s'agit du calcul du Laplacien en coordonnées polaires)

Exercice 18.

Soit $f : (x, y) \mapsto \dfrac{x^3 y}{x^2 + y^2}$, définie sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$.

a) Montrer que f se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$.

b) Déterminer les dérivées partielles de f et étudier leur continuité.

c) Montrer que f admet des dérivées partielles secondes en 0 et calculer les. Que remarque-t-on ?

Exercice 19.

Déterminer les extremums de f dans chacun des cas suivants :

a) $f(x, y) = x^3 + 3x^2 y - 15x - 12y$

b) $f(x, y) = -2(x - y)^2 + x^4 + y^4$

c) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$

d) $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 2xy - y + 1$

e) $f(x, y) = x^3 + y^3$

f) $f(x, y) = (x - y)^2 + (x + y)^3$

Exercice 20.

Soit $T \subset \mathbb{R}^2$ l'ensemble

$$T = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geqslant 0, y \geqslant 0, x + y \leqslant 1\right\}$$

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = -x - 2y - 2xy + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{2}y^2$.

a) Démontrer que tout minimum ou maximum local de f sur T se trouve sur la frontière de T.

b) Démontrer que f admet bien un minimum et un maximum sur T et calculer les.

Exercice 21.

Soit $C \subset \mathbb{R}^2$ l'ensemble défini par :

$$C = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ (x^2 - 1)^2 + y^2 = 4\right\}$$

a) Dessiner l'ensemble C.

b) Montrer que la fonction $f : (x, y) \mapsto xy$ admet un minimum et un maximum sur C et les déterminer.

Exercice 22.

Dans chacun des trois cas suivants, rechercher les extremums de f, soumise à la contrainte donnée.

a) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4xy$ avec la contrainte $x^2 + y^2 = 8$.

b) $f(x, y) = x^3 + y^3$ avec la contrainte $x^2 + y^2 = 4$.

c) $f(x, y, z) = (x - 2)^2 + y^2 + z^2$ avec la contrainte $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$.

Exercice 23.

Soit une application $f = (f_1, \dots, f_n)$ de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même.

a) On suppose f de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer que la matrice jacobienne $J_f(x)$ est antisymétrique en tout point $x \in \mathbb{R}^n$ si, et seulement s'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique et $b \in \mathbb{R}^n$ constants tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad f(x) = Ax + b$$

b) On suppose f de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que la matrice jacobienne $J_f(x)$ est symétrique en tout point $x \in \mathbb{R}^n$ si, et seulement s'il existe $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall i \in [\![1, n]\!], \quad f_i(x) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)$$

On pourra prendre $\varphi(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \int_0^1 f_i(tx)\mathrm{d}t$.

Exercice 24. *moindres carrés*

Soient n points (x_i, y_i) de $\mathbb{R}^2$, non tous égaux entre eux. Montrer de deux façons qu'il existe un unique couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ rendant minimum l'expression :

$$\sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2$$

a) De façon géométrique avec une projection orthogonale.

b) De façon analytique avec une recherche de points critiques.