

# **MPI - Lycée Colbert**

## **Concours Blanc 2025**

### **Mathématiques 1**

**Mardi 16 décembre 2025**  
**13h30-17h30**

**Sujet CCINP**

**Les calculatrices sont interdites**

**Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème tous indépendants.**

#### **EXERCICE I.**

**I.1.** Soit  $X$  une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda > 0$ . Déterminer sa fonction génératrice, puis en déduire son espérance et sa variance.

#### **EXERCICE II.**

On note  $I = ]0, +\infty[$  et on définit pour  $n$  entier naturel non nul et pour  $x \in I$ ,  $f_n(x) = e^{-nx} - 2e^{-2nx}$ .

**II.1.** Justifier que pour tout entier naturel non nul  $n$ , les fonctions  $f_n$  sont intégrables sur  $I$  et calculer  $\int_0^{+\infty} f_n(x)dx$ . Que vaut alors la somme  $\sum_{n=1}^{+\infty} (\int_0^{+\infty} f_n(x)dx)$  ?

**II.2.** Démontrer que la série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge simplement sur  $I$ . Déterminer sa fonction somme  $S$  et démontrer que  $S$  est intégrable sur  $I$ . Que vaut alors  $\int_0^{+\infty} \left( \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \right) dx$  ?

**II.3.** Donner, sans aucun calcul, la nature de la série  $\sum_{n \geq 1} \left( \int_0^{+\infty} |f_n(x)| dx \right)$ .

## PROBLEME.

Toutes les fonctions étudiées dans ce problème sont à valeurs réelles. On pourra identifier un polynôme et la fonction polynomiale associée.

On rappelle le théorème d'approximation de Weierstrass pour une fonction continue sur  $[a,b]$  : si  $f$  est une fonction continue sur  $[a,b]$ , il existe une suite de fonctions polynômes  $(P_n)$  qui converge uniformément vers la fonction  $f$  sur  $[a,b]$ .

Le problème aborde un certain nombre de situations en lien avec ce théorème qui sera démontré dans la dernière partie.

### Partie 1. Exemples et contre-exemples

**III.1.** Soit  $h$  la fonction définie sur l'intervalle  $]0,1]$  par :  $\forall x \in ]0,1], \quad x \mapsto \frac{1}{x}$

Expliquer pourquoi  $h$  ne peut être uniformément approchée sur l'intervalle  $]0,1]$  par une suite de fonctions polynômes. Analyser ce résultat par rapport au théorème de Weierstrass.

**III.2.** Soit  $N$  entier naturel non nul, on note  $\mathcal{P}_N$  l'espace vectoriel des fonctions polynomiales sur  $[a,b]$ , de degré inférieur ou égal à  $N$ . Justifier que  $\mathcal{P}_N$  est une partie fermée de l'espace des applications continues de  $[a,b]$  dans  $\mathbb{R}$  muni de la norme de la convergence uniforme.

Que peut-on dire d'une fonction qui est limite uniforme sur  $[a,b]$  d'une suite de polynômes de degré inférieur ou égal à un entier donné ?

**III.3.** Cette question illustre la dépendance d'une limite vis-à-vis de la norme choisie.

Soit  $\mathbb{R}[X]$  l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. Soient  $N_1$  et  $N_2$  deux applications définies sur  $\mathbb{R}[X]$  ainsi :

$$\text{pour tout polynôme } P \text{ de } \mathbb{R}[X], \quad N_1(P) = \sup_{x \in [-2, -1]} |P(x)| \quad \text{et} \quad N_2(P) = \sup_{x \in [1, 2]} |P(x)|.$$

**III.3.a.** Vérifier que  $N_1$  est une norme sur  $\mathbb{R}[X]$ . On admettra que  $N_2$  en est également une.

**III.3.b.** On note  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $[-2, 2]$  ainsi :

pour tout  $x \in [-2, -1]$ ,  $f(x) = x^2$ , pour tout  $x \in [-1, 1]$ ,  $f(x) = 1$  et pour tout  $x \in [1, 2]$ ,  $f(x) = x^3$ .

Représenter graphiquement la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[-2, 2]$  et justifier l'existence d'une suite de fonctions polynômes  $(P_n)$  qui converge uniformément vers la fonction  $f$  sur  $[-2, 2]$ .

Démontrer que cette suite de polynômes  $(P_n)$  converge dans  $\mathbb{R}[X]$  muni de la norme  $N_1$  vers  $X^2$  et étudier sa convergence dans  $\mathbb{R}[X]$  muni de la norme  $N_2$ .

## Partie 2. Application : un théorème des moments

**III.4.** Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a,b]$ . On suppose que pour tout entier naturel  $k$ ,  $\int_a^b x^k f(x) dx = 0$      $\left( \int_a^b x^k f(x) dx \text{ est le moment d'ordre } k \text{ de } f \text{ sur } [a,b] \right).$

**III.4.a.** Si  $P$  est une fonction polynôme, que vaut l'intégrale  $\int_a^b P(x) f(x) dx$  ?

**III.4.b.** Démontrer, en utilisant le théorème de Weierstrass, que nécessairement  $f$  est la fonction nulle. On pourra utiliser sans le démontrer le résultat suivant : si  $(g_n)$  est une suite de fonctions qui converge uniformément vers une fonction  $g$  sur une partie  $I$  de  $\mathbb{R}$  et si  $f$  est une fonction bornée sur  $I$ , alors la suite de fonctions  $(f \cdot g_n)$  converge uniformément sur  $I$  vers la fonction  $f \cdot g$ .

### III.5. Application

Soit  $E$  l'espace vectoriel des applications continues de  $[a,b]$  dans  $\mathbb{R}$  muni du produit scalaire défini pour tout couple  $(f, g)$  d'éléments de  $E$  par  $(f|g) = \int_a^b f(x)g(x) dx$ .

On note  $F$  le sous-espace vectoriel de  $E$  formé des fonctions polynômes définies sur  $[a,b]$  et  $F^\perp$  l'orthogonal de  $F$ . Déterminer  $F = F \oplus F^\perp$  ?

### III.6.

**III.6.a.** Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-(1-i)x} dx$ . Après avoir démontré l'existence de ces intégrales, établir une relation entre  $I_{n+1}$  et  $I_n$  et démontrer que, pour tout  $n$  non nul,  $I_n = \frac{n!}{(1-i)^{n+1}}$ .

**III.6.b.** En déduire que, pour tout entier naturel  $k$ ,  $\int_0^{+\infty} x^{4k} e^{-x} x^3 \sin x dx = 0$ .

**III.6.c.** Proposer une fonction  $f$  continue sur  $[0, +\infty[$ , non nulle et vérifiant :

$$\text{pour tout entier naturel } k, \int_0^{+\infty} u^k f(u) du = 0.$$

**III.6.d.** Expliquer pourquoi la fonction  $f$  proposée à la question précédente ne peut être uniformément approchée sur  $[0, +\infty[$  par une suite de polynômes.

## Partie 3. Exemple via un théorème de Dini

### III.7. Question préliminaire

Soit  $x \in [0,1]$ , on note  $I = ]-\infty, \sqrt{x}]$  et on pose, pour tout  $t \in I$ ,  $g_x(t) = t + \frac{1}{2}(x-t^2)$ . On définit la suite  $(u_n)$  par  $u_0 = 0$  et la relation de récurrence valable pour tout entier naturel  $n$  par :

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2} \left( x - (u_n)^2 \right) = g_x(u_n).$$

Démontrer que la suite  $(u_n)$  converge et déterminer, en fonction du réel  $x$ , sa limite.

**III.8.** Proposer un exemple de suite  $(f_n)$  de fonctions continues sur  $[a,b]$  qui converge simplement mais non uniformément sur  $[a,b]$  vers une fonction  $f$  qui est continue. Il sera possible de s'appuyer sur une représentation graphique sans nécessairement donner  $f_n$  sous forme analytique.

Pour traiter la suite de cette partie, on pourra admettre le résultat suivant. Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions continues sur  $[a,b]$  qui converge simplement vers une fonction  $f$  elle même continue sur  $[a,b]$ . Si la suite  $(f_n)$  est croissante, c'est-à-dire : pour tout entier naturel  $n$  et pour tout  $t \in [a,b]$ ,  $f_n(t) \leq f_{n+1}(t)$ , alors la suite  $(f_n)$  converge uniformément vers la fonction  $f$  sur  $[a,b]$ .

### III.9. Application

Soit  $(P_n)$  la suite de fonctions polynômes définie par :

$$P_0(x) = 0 \text{ et pour tout entier naturel } n, P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2} \left( x - (P_n(x))^2 \right).$$

**III.9.a.** Justifier que la suite  $(P_n)$  converge simplement vers la fonction  $x \mapsto \sqrt{x}$  sur l'intervalle  $[0,1]$ .

**III.9.b.** Démontrer que la suite  $(P_n)$  converge uniformément vers la fonction  $x \mapsto \sqrt{x}$  sur l'intervalle  $[0,1]$ .

## Partie 4. Démonstration du théorème d'approximation de Weierstrass

On propose dans cette partie une démonstration probabiliste du théorème d'approximation de Weierstrass pour une fonction continue sur  $[0,1]$ .

Dans toute cette partie,  $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue,  $n$  un entier naturel non nul et  $x \in [0,1]$ .

On pose :  $B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$  (polynôme de Bernstein).

**III.10.** Soit  $S_n$  une variable aléatoire réelle suivant une loi binomiale  $\mathcal{B}(n,x)$ .

**III.10.a.** Démontrer que, pour tout réel  $\alpha > 0$ ,  $P(|S_n - nx| > n\alpha) \leq \frac{1}{4n\alpha^2}$ .

**III.10.b.** Soit la variable aléatoire  $f\left(\frac{S_n}{n}\right)$ , démontrer que son espérance vérifie :

$$E\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right] = B_n(f)(x).$$

### III.11.

**III.11.a.** Soit  $\varepsilon > 0$ , justifier simplement qu'il existe  $\alpha > 0$  tel que pour tout couple  $(a,b) \in [0,1]^2$ ,  $|a-b| \leq \alpha$  entraîne  $|f(a) - f(b)| < \varepsilon$ , puis majorer  $|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)|$ , pour tout entier  $k$  entre 0 et  $n$  vérifiant  $\left|\frac{k}{n} - x\right| \leq \alpha$ .

**III.11.b.** Justifier que  $\left| \sum_{\left|\frac{k}{n} - x\right| > \alpha} (f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)) P(S_n = k) \right| \leq 2 \|f\|_\infty P\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \alpha\right)$ .

**III.11.c.** Démontrer qu'il existe un entier naturel  $n_0$  tel que pour tout  $n \geq n_0$  et tout réel  $x \in [0,1]$ ,  $|B_n(f)(x) - f(x)| \leq 2\varepsilon$ , puis conclure.

**Fin de l'énoncé**