

Espaces vectoriels normés

Fiche récapitulative n° 3

Définitions

- Norme sur un \mathbb{K} -espace vectoriel, structure d'espace vectoriel normé.
- Vecteurs unitaires.
- Distance associée à une norme.
- Boules fermées, boules ouvertes, sphères.
- Partie convexe d'un espace vectoriel réel.
- Parties, suites, fonctions bornées.
- Norme associée à un produit scalaire sur un espace préhilbertien réel.
- Normes $\| \cdot \|_1$, $\| \cdot \|_2$, $\| \cdot \|_\infty$ sur \mathbb{K}^n .
- Norme de la convergence uniforme $\| \cdot \|_\infty$ sur l'espace des fonctions bornées à valeurs dans \mathbb{K} .
- Norme de la convergence en moyenne $\| \cdot \|_1$ et de la convergence en moyenne quadratique $\| \cdot \|_2$ sur l'espace des fonctions continues sur un segment à valeurs réelles ou complexes.
- Suite convergente, divergente.
- Suites extraites, valeurs d'adhérence.
- Normes équivalentes.
- Ouvert d'un espace normé.
- Voisinage d'un point.
- Fermé d'un espace normé.
- Point intérieur, intérieur d'une partie.
- Point adhérent, adhérence d'une partie.
- Frontière d'une partie.
- Partie dense.
- Définition d'une partie compacte par la propriété de Bolzano-Weierstrass.

Résultats et propriétés

- Inégalités triangulaires (les deux!)
- Convexité des boules.
- $\sup(kA) = k \sup(A)$ pour A partie non vide de \mathbb{R} et $k \in \mathbb{R}^+$.
- Unicité de la limite d'une suite
- Caractère borné d'une suite convergente.
- Opérations algébriques sur les suites convergentes.
- Une suite ayant au moins deux valeurs d'adhérence diverge.
- Invariance du caractère borné, de la convergence d'une suite.
- Stabilité de l'ensemble des ouverts par réunion quelconque,
- Stabilité de l'ensemble des ouverts par intersection finie.
- Une boule ouverte est un ouvert.
- Stabilité de l'ensemble des fermés par intersection quelconque
- Stabilité de l'ensemble des fermés par réunion finie.
- Une boule fermée, une sphère, sont fermées.
- Caractérisation séquentielle des points adhérents,
- Caractérisation séquentielle des fermés.
- Invariance des notions topologiques par passage à une norme équivalente.
- Une partie compacte est fermée et bornée.
- Une suite d'une partie compacte converge **ssi** elle admet une unique valeur d'adhérence.