Structures algébriques

Fiche récapitulative n° 8

Définitions

- Structure de groupe, structure d'anneau
- Groupe produit, anneau produit
- Sous-groupe, sous-anneau
- Morphisme de groupe, d'anneau
- Image et noyau d'un groupe, d'un anneau
- Anneau intègre, Corps
- Congruence modulo n
- Sous-groupe engendré par une partie / partie génératrice d'un groupe
- Groupe monogène, groupe cyclique (ex : groupe des racines n-ièmes de l'unité).
- Ordre d'un élément d'un groupe.
- Idéal d'un anneau commutatif
- Idéal principal (engendré par un seul élément).
- Relation de divisibilité dans un anneau.
- Éléments associés dans un anneau intègre. Cas de $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{K}[X]$
- Élément irréductible dans un anneau intègre. Cas de $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{K}[X]$
- Algèbre, sous-algèbre, morphisme d'algèbre.

Résultats et propriétés

- Les sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ sont les $n\mathbb{Z}$.
- L'image et l'image réciproque d'un sous-groupe est un sous-groupe.
- L'intersection de sous-groupes est un sous-groupe
- Un morphisme de groupes est injectif *ssi* son noyau est réduit à l'élément neutre.
- L'ensemble $A^\times$ des éléments inversibles d'un anneau A est un groupe.
- Si $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un ensemble fini de cardinal n
- Compatibilité de la congruence modulo n avec les opérations de $\mathbb{Z}$.
- $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ est un groupe, $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$ est un anneau
- Tout groupe monogène infini est isomorphe à $(\mathbb{Z}, +)$.
- Tout groupe monogène fini de cardinal n est isomorphe à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$.
- Si x est d'ordre fini d et si e désigne le neutre de G, alors, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $x^n = e \Longleftrightarrow d|n$.
- L'ordre d'un élément d'un groupe fini divise le cardinal du groupe.
- Le noyau d'un morphisme d'anneau est un idéal
- L'anneau $\mathbb{Z}$ est principal : les idéaux de $(\mathbb{Z}, +, \times)$ sont les $n\mathbb{Z}$.
- L'anneau $\mathbb{K}[X]$ est principal : les idéaux de $(\mathbb{K}[X], +, \times)$ sont les $P\mathbb{K}[X]$.
- Les générateurs du groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ sont les $\overline{k}$, pour k premier avec n.
- Les inversibles de l'anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$ sont les $\overline{k}$, pour k premier avec n.
- $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$ est un corps *ssi* n est premier.
- Si $a|b$ dans un anneau A, alors $bA \subset aA$.
- Dans un anneau intègre A, $a|b$ et $b|a$ *ssi* il existe $u \in A^\times$ tels que $b = ua$ (a et b sont associés).
- Décomposition en facteurs irréductibles unitaires dans $\mathbb{K}[X]$.
- Théorème de d'Alembert-Gauss.
- Irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$
- L'image d'un morphisme d'algèbre est une sous-algèbre
- Le noyau d'un morphisme d'algèbre est un sous-espace vectoriel et un idéal.