

Chapitre 6

Révisions MP2I

Rayon de convergence.

Opérations sur les séries entières, comparaison des rayons.

Régularité de la fonction somme.

Développement en série entière.

Séries entières

Lundi 6 octobre 2025

Table des matières

Chapitre 6

Révisions MP2I

Rayon de convergence.

Opérations sur les séries entières, comparaison des rayons.

Régularité de la fonction somme.

Développement en série entière.

- 1 Rayon de convergence.
- 2 Opérations sur les séries entières, comparaison des rayons.
- 3 Régularité de la fonction somme.
- 4 Développement en série entière.

Table des matières

Chapitre 6

Rayon de convergence.

Convergence d'une série entière.

Lemme d'Abel et disque de convergence.

Utilisation du critère de d'Alembert.

Opérations sur les séries entières, comparaison des rayons.

Régularité de la fonction somme.

Développement en série entière.

1 Rayon de convergence.

2 Opérations sur les séries entières, comparaison des rayons.

3 Régularité de la fonction somme.

4 Développement en série entière.

Chapitre 6

Rayon de convergence.

Convergence d'une série entière.

Lemme d'Abel et disque de convergence.

Utilisation du critère de d'Alembert.

Opérations sur les séries entières, comparaison des rayons.

Régularité de la fonction somme.

Développement en série entière.

1. Rayon de convergence.

1. Rayon de convergence.

Chapitre 6

Rayon de convergence.

Convergence d'une série entière.

Lemme d'Abel et disque de convergence.

Utilisation du critère de d'Alembert.

Opérations sur les séries entières, comparaison des rayons.

Régularité de la fonction somme.

Développement en série entière.

1.1. Convergence d'une série entière.

1.1. Convergence d'une série entière.

Chapitre 6

Rayon de convergence.

Convergence d'une série entière.

Lemme d'Abel et disque de convergence.

Utilisation du critère de d'Alembert.

Opérations sur les séries entières, comparaison des rayons.

Régularité de la fonction somme.

Développement en série entière.

Definition 1

On appelle *série entière* d'une variable complexe $z \in \mathbb{C}$ une série de la forme $\sum a_n z^n$, avec $a_n \in \mathbb{C}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarques :

- Notation ambiguë : série numérique ou série de fonctions ?
- Et pour une variable réelle ?

1.1. Convergence d'une série entière.

Chapitre 6

Rayon de convergence.

Convergence d'une série entière.

Lemme d'Abel et disque de convergence.

Utilisation du critère de d'Alembert.

Opérations sur les séries entières, comparaison des rayons.

Régularité de la fonction somme.

Développement en série entière.

Remarque :

Domaine de convergence \mathcal{D} :

Exemples :

- $\sum z^n$:
- $\sum nz^n$:
- $\sum \frac{z^n}{n^2}$:
- $\sum \frac{z^n}{n}$:

1. Rayon de convergence.

Chapitre 6

Rayon de convergence.

Convergence d'une série entière.

Lemme d'Abel et disque de convergence.

Utilisation du critère de d'Alembert.

Opérations sur les séries entières, comparaison des rayons.

Régularité de la fonction somme.

Développement en série entière.

1.2. Lemme d'Abel et disque de convergence.

1.2. Lemme d'Abel et disque de convergence.

Chapitre 6

Rayon de convergence.

Convergence d'une série entière.

Lemme d'Abel et disque de convergence.

Utilisation du critère de d'Alembert.

Opérations sur les séries entières, comparaison des rayons.

Régularité de la fonction somme.

Développement en série entière.

Définition 2

Pour $R \geqslant 0$, *disque ouvert* et *disque fermé* de rayon R :

$$\mathcal{D}(R) = \{z \in \mathbb{C} ; |z| < R\} \qquad \mathcal{D}_f(R) = \{z \in \mathbb{C} ; |z| \leqslant R\}.$$

Remarque :

Cas $R = +\infty$?

1.2. Lemme d'Abel et disque de convergence.

Chapitre 6

Rayon de convergence.

Convergence d'une série entière.

Lemme d'Abel et disque de convergence.

Utilisation du critère de d'Alembert.

Opérations sur les séries entières, comparaison des rayons.

Régularité de la fonction somme.

Développement en série entière.

Theoreme 1

(Lemme d'Abel) Soit $\sum a_n z^n$ une série entière et soit $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la suite numérique $(a_n z_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit bornée. Alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

1.2. Lemme d'Abel et disque de convergence.

Chapitre 6

Rayon de convergence.

Convergence d'une série entière.

Lemme d'Abel et disque de convergence.

Utilisation du critère de d'Alembert.

Opérations sur les séries entières, comparaison des rayons.

Régularité de la fonction somme.

Développement en série entière.

Définition 3

On appelle *rayon de convergence* d'une série entière $\sum a_n z^n$:

$$R = \sup \left\{ r \in \mathbb{R}^+ / a_n r^n = O(1) \right\}_{n \rightarrow +\infty}$$

Remarque :

$R = +\infty$ si l'ensemble n'est pas borné.

1.2. Lemme d'Abel et disque de convergence.

Chapitre 6

Rayon de convergence.

Convergence d'une série entière.

Lemme d'Abel et disque de convergence.

Utilisation du critère de d'Alembert.

Opérations sur les séries entières, comparaison des rayons.

Régularité de la fonction somme.

Développement en série entière.

Proposition 1

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière, \mathcal{D} son domaine de convergence et R son rayon de convergence. Alors on a :

$$\mathcal{D}(R) \subset \mathcal{D}_f \subset \mathcal{D}_F(R).$$

En outre :

- Il y a convergence absolue sur $\mathcal{D}(R)$.
- Il y a divergence grossière sur $(\mathcal{D}_f(R))^c$

Remarques :

- Comportement "atypiques" de $\sum a_n z_0^n : R = |z_0|$
- Cas d'une variable réelle : intervalle de convergence.

1. Rayon de convergence.

Chapitre 6

Rayon de convergence.

Convergence d'une série entière.

Lemme d'Abel et disque de convergence.

Utilisation du critère de d'Alembert.

Opérations sur les séries entières, comparaison des rayons.

Régularité de la fonction somme.

Développement en série entière.

1.3. Utilisation du critère de d'Alembert.

1.3. Utilisation du critère de d'Alembert.

Chapitre 6

Rayon de convergence.

Convergence d'une série entière.

Lemme d'Abel et disque de convergence.

Utilisation du critère de d'Alembert.

Opérations sur les séries entières, comparaison des rayons.

Régularité de la fonction somme.

Développement en série entière.

Proposition 2

Soit $(\sum a_n z^n)$ une série entière et R son rayon de convergence.

s'il existe $\ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, tel que $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$, alors $R = \frac{1}{\ell}$.

Exemple :

$$\sum \frac{n!}{n^n} z^n$$

Proposition 3

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la série entière $\sum n^\alpha z^n$ a pour rayon de convergence $R = 1$.

Table des matières

Chapitre 6

Rayon de convergence.

Opérations sur les séries entières, comparaison des rayons.

Comparaison de deux séries entières.

Somme de deux séries entières.

Produit de deux séries entières.

Régularité de la fonction somme.

Développement en série entière.

1 Rayon de convergence.

2 Opérations sur les séries entières, comparaison des rayons.

3 Régularité de la fonction somme.

4 Développement en série entière.

Chapitre 6

Rayon de convergence.

Opérations sur les séries entières, comparaison des rayons.

Comparaison de deux séries entières.

Somme de deux séries entières.

Produit de deux séries entières.

Régularité de la fonction somme.

Développement en série entière.

2. Opérations sur les séries entières, comparaison des rayons.

2. Opérations sur les séries entières, comparaison des rayons.

Chapitre 6

Rayon de convergence.

Opérations sur les séries entières, comparaison des rayons.

Comparaison de deux séries entières.

Somme de deux séries entières.

Produit de deux séries entières.

Régularité de la fonction somme.

Développement en série entière.

2.1. Comparaison de deux séries entières.

2.1. Comparaison de deux séries entières.

Chapitre 6

Rayon de convergence.

Opérations sur les séries entières, comparaison des rayons.

Comparaison de deux séries entières.

Somme de deux séries entières.

Produit de deux séries entières.

Régularité de la fonction somme.

Développement en série entière.

Proposition 4

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b .

- a) Si $a_n = O(b_n)$, et en particulier si $a_n = o(b_n)$, alors $R_a \geq R_b$.
- b) Si $a_n \sim b_n$, alors $R_a = R_b$.

Remarque :

$R \neq 1$: comportement asymptotique "violent" de $(a_n)_n \dots$

2. Opérations sur les séries entières, comparaison des rayons.

Chapitre 6

Rayon de convergence.

Opérations sur les séries entières, comparaison des rayons.

Comparaison de deux séries entières.

Somme de deux séries entières.

Produit de deux séries entières.

Régularité de la fonction somme.

Développement en série entière.

2.2. Somme de deux séries entières.

2.2. Somme de deux séries entières.

Chapitre 6

Rayon de convergence.

Opérations sur les séries entières, comparaison des rayons.

Comparaison de deux séries entières.

Somme de deux séries entières.

Produit de deux séries entières.

Régularité de la fonction somme.

Développement en série entière.

Proposition 5

Si $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ sont deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b , alors le rayon R de la série entière $\sum (a_n + b_n) z^n$ vérifie $R \geq \min(R_a, R_b)$ (avec égalité lorsque $R_a \neq R_b$) et pour $|z| < \min(R_a, R_b)$, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n.$$

Remarque :

Cas $R_a = R_b$?

2. Opérations sur les séries entières, comparaison des rayons.

Chapitre 6

Rayon de convergence.

Opérations sur les séries entières, comparaison des rayons.

Comparaison de deux séries entières.

Somme de deux séries entières.

Produit de deux séries entières.

Régularité de la fonction somme.

Développement en série entière.

2.3. Produit de deux séries entières.

2.3. Produit de deux séries entières.

Chapitre 6

Rayon de convergence.

Opérations sur les séries entières, comparaison des rayons.

Comparaison de deux séries entières.

Somme de deux séries entières.

Produit de deux séries entières.

Régularité de la fonction somme.

Développement en série entière.

Proposition 6

Si $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ sont deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b , alors le rayon de convergence R de la série entière $\sum c_n z^n$, avec $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, vérifie $R \geq \min(R_a, R_b)$ et pour $|z| < \min(R_a, R_b)$, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \right).$$

Remarques :

- Cas $R_a = R_b$?
- Cas d'une série entière donnant un polynôme ?
(Exemple $z^2 - 2z + 3$).

Table des matières

Chapitre 6

Rayon de convergence.

Opérations sur les séries entières, comparaison des rayons.

Régularité de la fonction somme.

Convergence normale et continuité de la somme.

Intégration de la somme.

Dérivation de la somme.

Développement en série entière.

1 Rayon de convergence.

2 Opérations sur les séries entières, comparaison des rayons.

3 Régularité de la fonction somme.

4 Développement en série entière.

Chapitre 6

Rayon de convergence.

Opérations sur les séries entières, comparaison des rayons.

Régularité de la fonction somme.

Convergence normale et continuité de la somme.

Intégration de la somme.

Dérivation de la somme.

Développement en série entière.

3. Régularité de la fonction somme.

3. Régularité de la fonction somme.

Chapitre 6

Rayon de convergence.

Opérations sur les séries entières, comparaison des rayons.

Régularité de la fonction somme.

Convergence normale et continuité de la somme.

Intégration de la somme.

Dérivation de la somme.

Développement en série entière.

3.1. Convergence normale et continuité de la somme.

3.1. Convergence normale et continuité de la somme.

Chapitre 6

Rayon de convergence.

Opérations sur les séries entières, comparaison des rayons.

Régularité de la fonction somme.

Convergence normale et continuité de la somme.

Intégration de la somme.

Dérivation de la somme.

Développement en série entière.

Proposition 7

Pour tout $r < R$, la série entière $\sum a_n z^n$ converge normalement sur le disque fermé $\mathcal{D}_f(r)$. Elle converge donc normalement sur tout compact de $\mathcal{D}(R)$.

Corollaire 1

La fonction somme $S : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ est continue sur $\mathcal{D}_O(R)$.

Remarque :

Cas $|z_0| = R$? On ne peut (presque) rien dire en général ...

3. Régularité de la fonction somme.

Chapitre 6

Rayon de convergence.

Opérations sur les séries entières, comparaison des rayons.

Régularité de la fonction somme.

Convergence normale et continuité de la somme.

Intégration de la somme.

Dérivation de la somme.

Développement en série entière.

3.2. Intégration de la somme.

3.2. Intégration de la somme.

Chapitre 6

Rayon de convergence.

Opérations sur les séries entières, comparaison des rayons.

Régularité de la fonction somme.

Convergence normale et continuité de la somme.

Intégration de la somme.

Dérivation de la somme.

Développement en série entière.

Définition 4

On appelle *série primitive* de la série $\sum a_n z^n$ la série entière $\sum \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$, ou encore $\sum_{n \geq 1} \frac{a_{n-1}}{n} z^n$.

3.2. Intégration de la somme.

Chapitre 6

Rayon de convergence.

Opérations sur les séries entières, comparaison des rayons.

Régularité de la fonction somme.

Convergence normale et continuité de la somme.

Intégration de la somme.

Dérivation de la somme.

Développement en série entière.

Lemme

$\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

Remarque :

Plus généralement $\sum a_n z^n$ et $\sum n^\alpha z^n$?

3.2. Intégration de la somme.

Chapitre 6

Rayon de convergence.

Opérations sur les séries entières, comparaison des rayons.

Régularité de la fonction somme.

Convergence normale et continuité de la somme.

Intégration de la somme.

Dérivation de la somme.

Développement en série entière.

Proposition 8

La série entière $\sum a_n x^n$ et sa série primitive $\sum_{n \geq 1} \frac{a_{n-1}}{n} x^n$ ont le même rayon de convergence R , et la somme F sur $] -R, R[$ de la série primitive, est une primitive de la somme f de $\sum a_n x^n$, plus précisément celle qui s'annule en 0.

Exemple :

- En primitivant $x \mapsto \frac{1}{1+x}$, $\ln(1+x) =$
- En primitivant $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$, $\arctan(x) =$

3. Régularité de la fonction somme.

Chapitre 6

Rayon de convergence.

Opérations sur les séries entières, comparaison des rayons.

Régularité de la fonction somme.

Convergence normale et continuité de la somme.

Intégration de la somme.

Dérivation de la somme.

Développement en série entière.

3.3. Dérivation de la somme.

3.3. Dérivation de la somme.

Chapitre 6

Rayon de convergence.

Opérations sur les séries entières, comparaison des rayons.

Régularité de la fonction somme.

Convergence normale et continuité de la somme.

Intégration de la somme.

Dérivation de la somme.

Développement en série entière.

Définition 5

On appelle *série dérivée* de la série $\sum a_n z^n$ la série entière $\sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1}$, on encore $\sum (n+1) a_{n+1} z^n$.

Proposition 9

La série entière $\sum a_n x^n$ et sa série dérivée $\sum (n+1) a_{n+1} z^n$ ont le même rayon de convergence R , la somme f de la série $\sum a_n x^n$ est dérivable sur $] -R, R[$ et a pour dérivée la somme de sa série dérivée.

Remarque :

Dérivation terme à terme ...

3.3. Dérivation de la somme.

Chapitre 6

Rayon de convergence.

Opérations sur les séries entières, comparaison des rayons.

Régularité de la fonction somme.

Convergence normale et continuité de la somme.

Intégration de la somme.

Dérivation de la somme.

Développement en série entière.

Proposition 10

La somme f de la série entière $\sum a_n x^n$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -R, R[$, et ses dérivées s'obtiennent par dérivation terme à terme. Pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+k)!}{n!} a_{n+k} x^n.$$

Table des matières

Chapitre 6

Rayon de convergence.

Opérations sur les séries entières, comparaison des rayons.

Régularité de la fonction somme.

Développement en série entière.

Définition.

Et en un point quelconque ?
(hors-programme)

Unicité d'un développement en série entière

Série de Taylor

Développements classiques.

Utilisation d'une équation différentielle linéaire

1 Rayon de convergence.

2 Opérations sur les séries entières, comparaison des rayons.

3 Régularité de la fonction somme.

4 Développement en série entière.

Chapitre 6

Rayon de convergence.

Opérations sur les séries entières, comparaison des rayons.

Régularité de la fonction somme.

Développement en série entière.

Définition.

Et en un point quelconque ?
(hors-programme)

Unicité d'un développement en série entière

Série de Taylor

Développements classiques.

Utilisation d'une équation différentielle linéaire

4. Développement en série entière.

4. Développement en série entière.

Chapitre 6

Rayon de convergence.

Opérations sur les séries entières, comparaison des rayons.

Régularité de la fonction somme.

Développement en série entière.

Définition.

Et en un point quelconque ?
(hors-programme)

Unicité d'un développement en série entière

Série de Taylor

Développements classiques.

Utilisation d'une équation différentielle linéaire

4.1. Définition.

4.1. Définition.

Chapitre 6

Rayon de convergence.

Opérations sur les séries entières, comparaison des rayons.

Régularité de la fonction somme.

Développement en série entière.

Définition.

Et en un point quelconque ?
(hors-programme)

Unicité d'un développement en série entière
Série de Taylor

Développements classiques.

Utilisation d'une équation différentielle linéaire

Définition 6

Une fonction f de la variable complexe et à valeurs dans \mathbb{C} , définie au voisinage de 0, est dite *développable en série entière* (en 0) lorsqu'il existe une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$, telle que pour z au voisinage de 0 :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

Remarques :

- "au voisinage de 0" ?
- Et pour la variable réelle ?

4.1. Définition.

Chapitre 6

Rayon de convergence.

Opérations sur les séries entières, comparaison des rayons.

Régularité de la fonction somme.

Développement en série entière.

Définition.

Et en un point quelconque ?
(hors-programme)

Unicité d'un développement en série entière

Série de Taylor

Développements classiques.

Utilisation d'une équation différentielle linéaire

Exemples :

- $z \mapsto \frac{1}{1-z}$
- $z \mapsto \exp z$
- $x \mapsto \ln(1+x)$

4. Développement en série entière.

Chapitre 6

Rayon de convergence.

Opérations sur les séries entières, comparaison des rayons.

Régularité de la fonction somme.

Développement en série entière.

Définition.

Et en un point quelconque ?
(hors-programme)

Unicité d'un développement en série entière

Série de Taylor

Développements classiques.

Utilisation d'une équation différentielle linéaire

4.2. Et en un point quelconque ? *(hors-programme)*

4.2. Et en un point quelconque? (*hors-programme*)

Chapitre 6

Rayon de convergence.

Opérations sur les séries entières, comparaison des rayons.

Régularité de la fonction somme.

Développement en série entière.

Définition.

Et en un point quelconque ? (*hors-programme*)

Unicité d'un développement en série entière

Série de Taylor

Développements classiques.

Utilisation d'une équation différentielle linéaire

4. Développement en série entière.

Chapitre 6

Rayon de convergence.

Opérations sur les séries entières, comparaison des rayons.

Régularité de la fonction somme.

Développement en série entière.

Définition.

Et en un point quelconque ?
(hors-programme)

Unicité d'un développement en série entière

Série de Taylor

Développements classiques.

Utilisation d'une équation différentielle linéaire

4.3. Unicité d'un développement en série entière

4.3. Unicité d'un développement en série entière

Chapitre 6

Rayon de convergence.

Opérations sur les séries entières, comparaison des rayons.

Régularité de la fonction somme.

Développement en série entière.

Définition.

Et en un point quelconque ? (hors-programme)

Unicité d'un développement en série entière

Série de Taylor

Développements classiques.

Utilisation d'une équation différentielle linéaire

Proposition 11

Soit une fonction f de la variable réelle développable en série entière en 0. Alors f est de classe \mathcal{C}^∞ sur un voisinage de 0 et la suite $(a_n)_n$ du développement vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Remarque :

Cas d'une variable complexe ?

4.3. Unicité d'un développement en série entière

Chapitre 6

Rayon de convergence.

Opérations sur les séries entières, comparaison des rayons.

Régularité de la fonction somme.

Développement en série entière.

Définition.

Et en un point quelconque ? (hors-programme)

Unicité d'un développement en série entière

Série de Taylor

Développements classiques.

Utilisation d'une équation différentielle linéaire

Corollaire 2

- Deux séries entières de rayons de convergence non nuls ont la même somme sur un voisinage de 0 **ssi** ce sont les mêmes séries.
- Une série entière de rayon de convergence non nul a une somme nulle au voisinage de 0 **ssi** tous les coefficients sont nuls.

Remarque :

DSE en 0 $\Rightarrow \mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0 \Rightarrow DL à tout ordre en 0.
Réciproques fausses.

4.3. Unicité d'un développement en série entière

Chapitre 6

Rayon de convergence.

Opérations sur les séries entières, comparaison des rayons.

Régularité de la fonction somme.

Développement en série entière.

Définition.

Et en un point quelconque ? (hors-programme)

Unicité d'un développement en série entière

Série de Taylor

Développements classiques.

Utilisation d'une équation différentielle linéaire

Remarque :

On peut en fait alléger les hypothèses pour avoir l'unicité :

Proposition 12

Si deux fonctions $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $g : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$, définie au voisinage de 0, coïncident sur un intervalle $]0, \alpha]$, avec $\alpha > 0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = b_n$.

Remarque :

Encore vrai en supposant seulement $f(x_k) = g(x_k)$ pour une certaine suite $(x_k)_k$ de \mathbb{R}^* qui converge vers 0.

4. Développement en série entière.

Chapitre 6

Rayon de convergence.

Opérations sur les séries entières, comparaison des rayons.

Régularité de la fonction somme.

Développement en série entière.

Définition.

Et en un point quelconque ?
(hors-programme)

Unicité d'un développement en série entière

Série de Taylor

Développements classiques.

Utilisation d'une équation différentielle linéaire

4.4. Série de Taylor

4.4. Série de Taylor

Chapitre 6

Rayon de convergence.

Opérations sur les séries entières, comparaison des rayons.

Régularité de la fonction somme.

Développement en série entière.

Définition.

Et en un point quelconque ? (hors-programme)

Unicité d'un développement en série entière

Série de Taylor

Développements classiques.

Utilisation d'une équation différentielle linéaire

Définition 7

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ de classe \mathcal{C}^∞ au voisinage de 0.

On appelle *série de Taylor* de f en 0 la série entière $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

Remarques :

- Le DSE d'une fonction est uniquement déterminé par sa série de Taylor.
- Attention : La série de Taylor peut exister, avec un rayon non nul, sans que f soit DSE.

Exemple :

$f : x \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$ prolongée par continuité.

4.4. Série de Taylor

Chapitre 6

Rayon de convergence.

Opérations sur les séries entières, comparaison des rayons.

Régularité de la fonction somme.

Développement en série entière.

Définition.

Et en un point quelconque ? (hors-programme)

Unicité d'un développement en série entière

Série de Taylor

Développements classiques.

Utilisation d'une équation différentielle linéaire

Exercice 1

Soit $f : [-r, r] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^∞ . On suppose qu'il existe $A, K > 0$ vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sup f^{(n)} \leqslant Kn!A^n$. Montrer que f est développable en série entière en 0.

Exercice 2

On suppose f de classe \mathcal{C}^∞ au voisinage de 0, avec $f^{(n)} \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que f est développable en série entière en 0. (*on pourra penser à utiliser la formule de Taylor avec reste intégral*).

4. Développement en série entière.

Chapitre 6

Rayon de convergence.

Opérations sur les séries entières, comparaison des rayons.

Régularité de la fonction somme.

Développement en série entière.

Définition.

Et en un point quelconque ?
(hors-programme)

Unicité d'un développement en série entière

Série de Taylor

Développements classiques.

Utilisation d'une équation différentielle linéaire

4.5. Développements classiques.

4.5. Développements classiques.

Chapitre 6

Rayon de convergence.

Opérations sur les séries entières, comparaison des rayons.

Régularité de la fonction somme.

Développement en série entière.

Définition.

Et en un point quelconque ?
(hors-programme)

Unicité d'un développement en série entière

Série de Taylor

Développements classiques.

Utilisation d'une équation différentielle linéaire

Proposition 13

Soit f DSE en 0 et $\sum a_n z^n$ sa série de Taylor. Alors :

- f est paire **ssi** pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{2n+1} = 0$.
- f est impaire **ssi** pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{2n} = 0$.

4.5. Développements classiques.

Chapitre 6

Rayon de convergence.

Opérations sur les séries entières, comparaison des rayons.

Régularité de la fonction somme.

Développement en série entière.

Définition.

Et en un point quelconque ?
(hors-programme)

Unicité d'un développement en série entière
Série de Taylor

Développements classiques.

Utilisation d'une équation différentielle linéaire

Definition 8

La série entière $\sum \frac{1}{n!} z^n$ a un rayon de convergence infini. On appelle *exponentielle complexe* sa somme sur \mathbb{C} , qu'on note e^z .

Remarque :

On montre que pour tout $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$.

4.5. Développements classiques.

Chapitre 6

Rayon de convergence.

Opérations sur les séries entières, comparaison des rayons.

Régularité de la fonction somme.

Développement en série entière.

Définition.

Et en un point quelconque ? (hors-programme)

Unicité d'un développement en série entière

Série de Taylor

Développements classiques.

Utilisation d'une équation différentielle linéaire

Proposition 14

- (i) Les fonctions \cos et \sin sont développables en séries entières en 0. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad \sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

- (ii) Les fonctions ch et sh sont développables en séries entières en 0. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\operatorname{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n} \quad \operatorname{sh}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

4.5. Développements classiques.

Chapitre 6

Rayon de convergence.

Opérations sur les séries entières, comparaison des rayons.

Régularité de la fonction somme.

Développement en série entière.

Définition.

Et en un point quelconque ?
(hors-programme)

Unicité d'un développement en série entière
Série de Taylor

Développements classiques.

Utilisation d'une équation différentielle linéaire

Proposition 15

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$ est développable en série entière en 0. Pour tout $x \in]-1, 1[$:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n.$$

Remarque :

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$$

Remarques :

- $\alpha \in \mathbb{N}^*$: polynôme - binôme de Newton
- $\alpha = -1$: série géométrique
- α entier négatif :

4.5. Développements classiques.

Chapitre 6

Rayon de convergence.

Opérations sur les séries entières, comparaison des rayons.

Régularité de la fonction somme.

Développement en série entière.

Définition.

Et en un point quelconque ?
(hors-programme)

Unicité d'un développement en série entière
Série de Taylor

Développements classiques.

Utilisation d'une équation différentielle linéaire

Exercice 3

Retrouver le plus rapidement possible les développements en série entière des fonctions :

- $x \mapsto \ln(1+x)$
- $x \mapsto \arctan(x)$

Ils doivent au final être connus quasiment par coeur.

4. Développement en série entière.

Chapitre 6

Rayon de convergence.

Opérations sur les séries entières, comparaison des rayons.

Régularité de la fonction somme.

Développement en série entière.

Définition.

Et en un point quelconque ?
(hors-programme)

Unicité d'un développement en série entière

Série de Taylor

Développements classiques.

Utilisation d'une équation différentielle linéaire

4.6. Utilisation d'une équation différentielle linéaire

4.6. Utilisation d'une équation différentielle linéaire

Chapitre 6

Rayon de convergence.

Opérations sur les séries entières, comparaison des rayons.

Régularité de la fonction somme.

Développement en série entière.

Définition.

Et en un point quelconque ?
(hors-programme)

Unicité d'un développement en série entière

Série de Taylor

Développements classiques.

Utilisation d'une équation différentielle linéaire