Probabilités et variables aléatoires (1)

Fiche récapitulative n° 9

Définitions

- Définition d'un ensemble dénombrable.
- Convention de calcul et relation d'ordre dans $[0, +\infty]$.
- Somme d'une famille $(u_i)_{i\in I}$ d'éléments de $[0, +\infty]$.
- La famille $(u_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathbb{C}$ est dite sommable si $\sum_{i\in I} |u_i| < +\infty$. Notation $\ell^1(I)$.
- Somme d'une famille sommable de nombres complexes.
- Sommabilité et somme d'une famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (lien avec les séries).
- Tribu sur un ensemble Ω, espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$.
- Généralisation du vocabulaire relatif aux événements introduit en première année.
- Probabilité sur un espace probabilisable, espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
- Événements négligeables, événements presque sûrs.
- Systèmes quasi-complets d'événements.
- Définition d'une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé.
- Notations $(X = x)$, $(X \in A)$, $\{X = x\}$, $\{X \in A\}$.
- Pour une variable réelle, notations $(X \leqslant x), (X \geqslant x), (X < x), (X > x)$ (et analogues avec $\{\cdot\}$).
- Loi P_X d'une variable aléatoire discrète X. Notation $X \sim Y$.
- Rappel des lois vues en première année : Bernoulli, Binomiale.
- Pour $p \in]0, 1[$, loi géométrique de paramètre p. Notation $X \sim \mathcal{G}(p)$ si $P_X = P_Y$.
- Interprétation de la loi géométrique comme rang du premier succès.
- Pour $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, loi de Poisson de paramètre λ. Notation $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.
- Interprétation de la loi de Poisson en termes d'événements rares.

Résultats et propriétés

- Les parties infinies de $\mathbb{N}$ sont dénombrables.
- Un ensemble est au plus dénombrable) ssi est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$.
- Un produit cartésien fini d'ensembles dénombrables est dénombrable (démo NE).
- Une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable (démo NE).
- Les ensembles $\mathbb{N}^p$ ($p \in \mathbb{N}^*$), $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables.
- L'ensemble $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable (démo NE).
- Invariance de la somme d'une famille de $[0, +\infty]$ par permutation.
- Opérations sur les sommes de familles de $[0, +\infty]$: somme, multiplication par un réel positif.
- Le support d'une famille sommable de nombres complexes est dénombrable.
- Approximation de la somme d'une famille sommable par une "somme partielle" finie.
- Linéarité de la somme d'une famille sommable.
- Théorème de sommation par paquets, positif et général (démo HP).
- Cas où I est un produit : théorème de Fubini positif et général.
- Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes.
- Propriéts de σ-additivité pour une probabilité P.
- Continuité croissante, continuité décroissante de P pour une suite d'événements.
- Application : limites quand n tend vers l'infini de $\left(P\left(\bigcup_{k=0}^n A_k\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(P\left(\bigcap_{k=0}^n A_k\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
- Propriété de sous-additivité de P pour une réunion dénombrable d'événements.
- Une réunion au plus dénombrable d'événements négligeables est négligeable.
- Une intersection au plus dénombrable d'événements presque sûrs est presque sûr.
- $f(X) = f \circ X$ est une variable aléatoire discrète et $X \sim Y \Rightarrow f(X) \sim f(Y)$.