

Continuité des fonctions entre EVN, dimension finie

Lundi 22 septembre 2025

Table des matières

Chapitre 4

Révisions MP2I

Limite d'une
fonction

Continuité

Continuité et
Linéarité

Espaces
vectoriels
normés de
dimension finie

① Limite d'une fonction

② Continuité

③ Continuité et Linéarité

④ Espaces vectoriels normés de dimension finie

Table des matières

Chapitre 4

Limite d'une fonction

Limite d'une fonction en un point.

Caractérisation séquentielle.

Operations sur les limites.

Continuité

Continuité et Linéarité

Espaces vectoriels normés de dimension finie

1 Limite d'une fonction

2 Continuité

3 Continuité et Linéarité

4 Espaces vectoriels normés de dimension finie

Chapitre 4

Limite d'une fonction

Limite d'une fonction en un point.

Caractérisation séquentielle.

Opérations sur les limites.

Continuité

Continuité et Linéarité

Espaces vectoriels normés de dimension finie

1. Limite d'une fonction

1. Limite d'une fonction

Chapitre 4

Limite d'une
fonction

**Limite d'une
fonction en un
point.**

Caractérisation
séquentielle.

Operations sur
les limites.

Continuité

Continuité et
Linéarité

Espaces
vectoriels
normés de
dimension finie

1.1. Limite d'une fonction en un point.

1.1. Limite d'une fonction en un point.

Chapitre 4

Limite d'une
fonction

Limite d'une
fonction en un
point.

Caractérisation
séquentielle.

Operations sur
les limites.

Continuité

Continuité et
Linéarité

Espaces
vectoriels
normés de
dimension finie

Definition 1

Soit $A \subset E$, $f : A \rightarrow F$ et $a \in \overline{A}$. On dit que la fonction f *admet la limite* $\ell \in F$ en a (ou *tend vers* ℓ) lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in A, \|x - a\|_E \leq \eta \implies \|f(x) - \ell\|_F \leq \varepsilon.$$

Remarque :

On a alors nécessairement $\ell \in \overline{f(A)}$.

1.1. Limite d'une fonction en un point.

Chapitre 4

Limite d'une
fonction

Limite d'une
fonction en un
point.

Caractérisation
séquentielle.

Opérations sur
les limites.

Continuité

Continuité et
Linéarité

Espaces
vectoriels
normés de
dimension finie

Proposition 1

Si f admet une limite en a , cette limite est unique.

Remarque :

Notation $\ell = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$, $\ell = \lim_a f$ ou $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$.

1.1. Limite d'une fonction en un point.

Chapitre 4

Limite d'une
fonction

Limite d'une
fonction en un
point.

Caractérisation
séquentielle.

Opérations sur
les limites.

Continuité

Continuité et
linéarité

Espaces
vectoriels
normés de
dimension finie

Remarque :

Extensions de la notion de limite pour $f : A \rightarrow F$

- limite de $f(x)$ lorsque $\|x\|$ tend vers $+\infty$
- limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ lorsque $A \subset \mathbb{R}$
- limite infinie en a adhérent à A pour f à valeurs dans \mathbb{R}

1. Limite d'une fonction

Chapitre 4

Limite d'une fonction

Limite d'une fonction en un point.

Caractérisation séquentielle.

Opérations sur les limites.

Continuité

Continuité et Linéarité

Espaces vectoriels normés de dimension finie

1.2. Caractérisation séquentielle.

1.2. Caractérisation séquentielle.

Chapitre 4

Limite d'une
fonction

Limite d'une
fonction en un
point.

Caractérisation
séquentielle.

Opérations sur
les limites.

Continuité

Continuité et
linéarité

Espaces
vectoriels
normés de
dimension finie

Proposition 2

Soit f une application de $A \subset E$ dans F , $a \in E$ un point adhérent à A et $\ell \in F$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) f admet la limite ℓ en a .
- (ii) Pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de A convergeant vers a , la suite $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ .

1.2. Caractérisation séquentielle.

Chapitre 4

Limite d'une
fonction

Limite d'une
fonction en un
point.

Caractérisation
séquentielle.

Opérations sur
les limites.

Continuité

Continuité et
linéarité

Espaces
vectoriels
normés de
dimension finie

Exercice 1

Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) f admet une limite finie en a .
- (ii) Pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de A convergeant vers a , la suite $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

1. Limite d'une fonction

Chapitre 4

Limite d'une fonction

Limite d'une fonction en un point.

Caractérisation séquentielle.

Operations sur les limites.

Continuité

Continuité et Linéarité

Espaces vectoriels normés de dimension finie

1.3. Operations sur les limites.

1.3. Operations sur les limites.

Chapitre 4

Limite d'une
fonction

Limite d'une
fonction en un
point.

Caractérisation
séquentielle.

Operations sur
les limites.

Continuité

Continuité et
linéarité

Espaces
vectoriels
normés de
dimension finie

Proposition 3

Soit $f, g : A \rightarrow F$ et $a \in \overline{A}$. On suppose $\lim_a f = b$ et $\lim_a g = c$.
Alors

- Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, $f(x) + \lambda g(x) \rightarrow b + \lambda c$ en a .
- Cas $F = \mathbb{K} : f(x)g(x) \rightarrow bc$ en a . Si de plus $b \neq 0$, alors $f \neq 0$ au voisinage de a et $\frac{1}{f(x)} \rightarrow \frac{1}{b}$ en a .

Remarque :

Que dire de l'ensemble des fonctions définies sur A et admettant une limite en $a \in \overline{A}$?

1.3. Operations sur les limites.

Chapitre 4

Limite d'une
fonction

Limite d'une
fonction en un
point.

Caractérisation
séquentielle.

**Operations sur
les limites.**

Continuité

Continuité et
Linéarité

Espaces
vectoriels
normés de
dimension finie

Proposition 4

Soient $f : A \rightarrow F$ et $g : B \rightarrow G$ avec $\text{Im}(f) \subset B$, soient $a \in \overline{A}, b \in \overline{B}$.
Si $\lim_a f = b$ et $\lim_b g = c$, alors $\lim_a (g \circ f) = c$.

Table des matières

Chapitre 4

Limite d'une
fonction

Continuité

Définition

Opérations sur
les fonctions
continues

Continuité et
densité

Caractérisation
globale

Continuité
uniforme

Applications
lipschitziennes.

Continuité sur un
compact

Connexité par
arcs et théorème
des valeurs
intermédiaires

Continuité et
Linéarité

Espaces
vectoriels
normés de
dimension finie

1 Limite d'une fonction

2 Continuité

3 Continuité et Linéarité

4 Espaces vectoriels normés de dimension finie

Chapitre 4

Limite d'une
fonction

Continuité

Définition

Opérations sur
les fonctions
continues

Continuité et
densité

Caractérisation
globale

Continuité
uniforme

Applications
lipschitziennes.

Continuité sur un
compact

Connexité par
arcs et théorème
des valeurs
intermédiaires

Continuité et
Linéarité

Espaces
vectoriels
normés de
dimension finie

2. Continuité

2. Continuité

Chapitre 4

Limite d'une
fonction

Continuité

Définition

Opérations sur
les fonctions
continues

Continuité et
densité

Caractérisation
globale

Continuité
uniforme

Applications
lipschitziennes.

Continuité sur un
compact

Connexité par
arcs et théorème
des valeurs
intermédiaires

Continuité et
Linéarité

Espaces
vectoriels
normés de
dimension finie

2.1. Définition

2.1. Definition

Chapitre 4

Limite d'une
fonction

Continuité

Definition

Opérations sur
les fonctions
continues

Continuité et
densité

Caractérisation
globale

Continuité
uniforme

Applications
lipschitziennes.

Continuité sur un
compact

Connexité par
arcs et théorème
des valeurs
intermédiaires

Continuité et
Linéarité

Espaces
vectoriels
normés de
dimension finie

Definition 2

Soit $A \subset E$, $f : A \rightarrow F$, et $a \in A$. On dit que f est *continue* en a lorsque $f(x) \rightarrow f(a)$ lorsque $x \rightarrow a$.

Remarques :

- En fait la limite est nécessairement $f(a)$!
- La caractérisation séquentielle s'applique.

2.1. Definition

Chapitre 4

Limite d'une
fonction

Continuité

Definition

Opérations sur
les fonctions
continues

Continuité et
densité

Caractérisation
globale

Continuité
uniforme

Applications
lipschitziennes.

Continuité sur un
compact

Connexité par
arcs et théorème
des valeurs
intermédiaires

Continuité et
Linéarité

Espaces
vectoriels
normés de
dimension finie

Definition 3

Soit A une partie de E , et $f : A \rightarrow F$. On dit que f est *continue* sur A lorsque f est continue en tout point de A .

Remarque :

f continue sur $B \subset A$ lorsque $f|_B$ continue en tout point de B .
(pourquoi $f|_B$ et pas simplement f ?)

Exemple :

L'application *norme* $x \mapsto \|x\|_E$ est continue sur E .

2. Continuité

Chapitre 4

Limite d'une
fonction

Continuité

Définition

**Opérations sur
les fonctions
continues**

Continuité et
densité

Caractérisation
globale

Continuité
uniforme

Applications
lipschitziennes.

Continuité sur un
compact

Connexité par
arcs et théorème
des valeurs
intermédiaires

Continuité et
Linéarité

Espaces
vectoriels
normés de
dimension finie

2.2. Opérations sur les fonctions continues

2.2. Opérations sur les fonctions continues

Chapitre 4

Limite d'une
fonction

Continuité

Définition

Opérations sur
les fonctions
continues

Continuité et
densité

Caractérisation
globale

Continuité
uniforme

Applications
lipschitziennes.

Continuité sur un
compact

Connexité par
arcs et théorème
des valeurs
intermédiaires

Continuité et
linéarité

Espaces
vectoriels
normés de
dimension finie

Proposition 5

Soient $f, g : A \rightarrow F$ et $\lambda : A \rightarrow \mathbb{K}$ continues, alors l'application $x \mapsto f(x) + \lambda(x)g(x)$ est continue.

Corollaire 1

L'ensemble $\mathcal{C}(A, F)$ des fonctions continues sur A et à valeurs dans F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(A, F)$.

2. Continuité

Chapitre 4

Limite d'une
fonction

Continuité

Définition

Opérations sur
les fonctions
continues

**Continuité et
densité**

Caractérisation
globale

Continuité
uniforme

Applications
lipschitziennes.

Continuité sur un
compact

Connexité par
arcs et théorème
des valeurs
intermédiaires

Continuité et
Linéarité

Espaces
vectoriels
normés de
dimension finie

2.3. Continuité et densité

2.3. Continuité et densité

Chapitre 4

Limite d'une
fonction

Continuité

Définition

Opérations sur
les fonctions
continues

Continuité et
densité

Caractérisation
globale

Continuité
uniforme

Applications
lipschitziennes.

Continuité sur un
compact

Connexité par
arcs et théorème
des valeurs
intermédiaires

Continuité et
Linéarité

Espaces
vectoriels
normés de
dimension finie

Proposition 6

Soient $f, g : E \rightarrow F$ deux applications continues qui coïncident sur une partie A dense dans E . Alors f et g coïncident sur E .

Remarque :

Cas $f, g : B \rightarrow F$ avec $B \subset E$?

Exercice 2

Déterminer toutes les fonctions continues $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $f(x + y) = f(x) + f(y)$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$.

2. Continuité

Chapitre 4

Limite d'une
fonction

Continuité

Définition

Opérations sur
les fonctions
continues

Continuité et
densité

**Caractérisation
globale**

Continuité
uniforme

Applications
lipschitziennes.

Continuité sur un
compact

Connexité par
arcs et théorème
des valeurs
intermédiaires

Continuité et
Linéarité

Espaces
vectoriels
normés de
dimension finie

2.4. Caractérisation globale

2.4. Caractérisation globale

Chapitre 4

Limite d'une
fonction

Continuité

Définition

Opérations sur
les fonctions
continues

Continuité et
densité

**Caractérisation
globale**

Continuité
uniforme

Applications
lipschitziennes.

Continuité sur un
compact

Connexité par
arcs et théorème
des valeurs
intermédiaires

Continuité et
linéarité

Espaces
vectoriels
normés de
dimension finie

Remarque :

Ici $f : E \rightarrow F$, mais on adaptera à $f : A \rightarrow F$ avec $A \subset E$.

Proposition 7

Soit $f : E \rightarrow F$. Les trois assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) f est continue sur E .
- (ii) Pour tout ouvert U de F , $f^{-1}(U)$ est un ouvert.
- (iii) pour tout fermé V de F , $f^{-1}(V)$ est un fermé.

2.4. Caractérisation globale

Chapitre 4

Limite d'une
fonction

Continuité

Définition

Opérations sur
les fonctions
continues

Continuité et
densité

Caractérisation
globale

Continuité
uniforme

Applications
lipschitziennes.

Continuité sur un
compact

Connexité par
arcs et théorème
des valeurs
intermédiaires

Continuité et
Linéarité

Espaces
vectoriels
normés de
dimension finie

Corollaire 2

Soit f une application continue de E dans \mathbb{R} . Alors :

- L'ensemble $\{x \in E / f(x) > 0\}$ est un ouvert de E .
- L'ensemble $\{x \in E / f(x) \geq 0\}$ est un fermé de E .
- L'ensemble $\{x \in E / f(x) = 0\}$ est un fermé de E .

Exercice 3

Montrer (plus simplement qu'au chapitre précédent) que dans un espace vectoriel normé :

- Les boules ouvertes sont ouvertes
- Les boules fermées et les sphères sont fermées

2. Continuité

Chapitre 4

Limite d'une
fonction

Continuité

Définition

Opérations sur
les fonctions
continues

Continuité et
densité

Caractérisation
globale

**Continuité
uniforme**

Applications
lipschitziennes.

Continuité sur un
compact

Connexité par
arcs et théorème
des valeurs
intermédiaires

Continuité et
Linéarité

Espaces
vectoriels
normés de
dimension finie

2.5. Continuité uniforme

2.5. Continuité uniforme

Chapitre 4

Limite d'une
fonction

Continuité

Définition

Opérations sur
les fonctions
continues

Continuité et
densité

Caractérisation
globale

Continuité
uniforme

Applications
lipschitziennes.

Continuité sur un
compact

Connexité par
arcs et théorème
des valeurs
intermédiaires

Continuité et
linéarité

Espaces
vectoriels
normés de
dimension finie

Définition 4

On dit que $f : A \rightarrow F$ est *uniformément continue* sur A lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \mu > 0, \forall (x, y) \in A^2, \|x - y\|_E \leq \mu \Rightarrow \|f(x) - f(y)\|_F \leq \varepsilon$$

Remarques :

- Différence avec la continuité en tout point ?
- Module d'uniforme continuité associé à ε .

2.5. Continuité uniforme

Chapitre 4

Limite d'une
fonction

Continuité

Définition

Opérations sur
les fonctions
continues

Continuité et
densité

Caractérisation
globale

Continuité
uniforme

Applications
lipschitziennes.

Continuité sur un
compact

Connexité par
arcs et théorème
des valeurs
intermédiaires

Continuité et
Linéarité

Espaces
vectoriels
normés de
dimension finie

Proposition 8

Si $f : A \rightarrow F$ est uniformément continue sur A , alors f est continue sur A .

Remarque :

Réciproque fausse. Contre-exemple ?

2. Continuité

Chapitre 4

Limite d'une
fonction

Continuité

Définition

Opérations sur
les fonctions
continues

Continuité et
densité

Caractérisation
globale

Continuité
uniforme

**Applications
lipschitziennes.**

Continuité sur un
compact

Connexité par
arcs et théorème
des valeurs
intermédiaires

Continuité et
Linéarité

Espaces
vectoriels
normés de
dimension finie

2.6. Applications lipschitziennes.

2.6. Applications lipschitziennes.

Chapitre 4

Limite d'une
fonction

Continuité

Définition

Opérations sur
les fonctions
continues

Continuité et
densité

Caractérisation
globale

Continuité
uniforme

**Applications
lipschitziennes.**

Continuité sur un
compact

Connexité par
arcs et théorème
des valeurs
intermédiaires

Continuité et
linéarité

Espaces
vectoriels
normés de
dimension finie

Définition 5

On dit qu'une fonction $f : A \rightarrow F$, avec $A \subset E$, est *lipschitzienne* lorsqu'il existe $k \geq 0$, tel que :

$$\forall (x, y) \in A^2, \quad \|f(x) - f(y)\|_F \leq k \|x - y\|_E.$$

On peut préciser alors que f est k -lipschitzienne.

Remarque :

k est appelé *module de Lipschitz* pour f .

2.6. Applications lipschitziennes.

Chapitre 4

Limite d'une
fonction

Continuité

Définition

Opérations sur
les fonctions
continues

Continuité et
densité

Caractérisation
globale

Continuité
uniforme

**Applications
lipschitziennes.**

Continuité sur un
compact

Connexité par
arcs et théorème
des valeurs
intermédiaires

Continuité et
Linéarité

Espaces
vectoriels
normés de
dimension finie

Proposition 9

f est lipschitzienne **ssi** l'ensemble suivant est majoré :

$$\left\{ \frac{\|f(x) - f(y)\|_F}{\|x - y\|_E}, x, y \in E, x \neq y \right\}$$

La borne supérieure k_0 de cet ensemble est alors le plus petit module de Lipschitz pour f , et l'ensemble de tous les modules est $[k_0, +\infty[$.

2.6. Applications lipschitziennes.

Chapitre 4

Limite d'une
fonction

Continuité

Définition

Opérations sur
les fonctions
continues

Continuité et
densité

Caractérisation
globale

Continuité
uniforme

**Applications
lipschitziennes.**

Continuité sur un
compact

Connexité par
arcs et théorème
des valeurs
intermédiaires

Continuité et
linéarité

Espaces
vectoriels
normés de
dimension finie

Proposition 10

Toute fonction $f : A \rightarrow F$ lipschitzienne est uniformément continue, et donc continue.

Exemples :

Pour des fonctions réelles (vu en MP2I) :

- fonctions affines réelles $x \mapsto ax + b$
- fonction $x \mapsto x^2$
- La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$

2.6. Applications lipschitziennes.

Chapitre 4

Limite d'une
fonction

Continuité

Définition

Opérations sur
les fonctions
continues

Continuité et
densité

Caractérisation
globale

Continuité
uniforme

**Applications
lipschitziennes.**

Continuité sur un
compact

Connexité par
arcs et théorème
des valeurs
intermédiaires

Continuité et
Linéarité

Espaces
vectoriels
normés de
dimension finie

Remarque :

Deux exemples à connaître :

Proposition 11

- a) L'application "norme" $x \mapsto \|x\|$ est 1-lipschitzienne.
- b) Pour une partie A non vide, l'application "distance à A " $x \mapsto d(x, A)$ est 1-lipschitzienne.

2.6. Applications lipschitziennes.

Chapitre 4

Limite d'une
fonction

Continuité

Définition

Opérations sur
les fonctions
continues

Continuité et
densité

Caractérisation
globale

Continuité
uniforme

Applications
lipschitziennes.

Continuité sur un
compact

Connexité par
arcs et théorème
des valeurs
intermédiaires

Continuité et
Linéarité

Espaces
vectoriels
normés de
dimension finie

Exercice 4

Soient A et B sont deux fermés disjoints de $(E, \|\cdot\|)$.

- a) A l'aide des fonctions $d_A : x \mapsto d(x, A)$ et $d_B : x \mapsto d(x, B)$, construire une application continue $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f|_A = 0$ et $f|_B = 1$.
- b) En déduire qu'il existe deux ouverts U et V disjoints tels que $A \subset U$ et $B \subset V$.

2. Continuité

Chapitre 4

Limite d'une
fonction

Continuité

Définition

Opérations sur
les fonctions
continues

Continuité et
densité

Caractérisation
globale

Continuité
uniforme

Applications
lipschitziennes.

**Continuité sur un
compact**

Connexité par
arcs et théorème
des valeurs
intermédiaires

Continuité et
Linéarité

Espaces
vectoriels
normés de
dimension finie

2.7. Continuité sur un compact

2.7. Continuité sur un compact

Chapitre 4

Limite d'une
fonction

Continuité

Définition

Opérations sur
les fonctions
continues

Continuité et
densité

Caractérisation
globale

Continuité
uniforme

Applications
lipschitziennes.

**Continuité sur un
compact**

Connexité par
arcs et théorème
des valeurs
intermédiaires

Continuité et
Linéarité

Espaces
vectoriels
normés de
dimension finie

Theoreme 1

L'image d'un compact de E par une application continue $f : A \rightarrow F$ est un compact de F .

Theoreme 2

(des bornes atteintes) Si $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et si K est un compact de E , alors f est bornée sur K et atteint ses bornes.

2.7. Continuité sur un compact

Chapitre 4

Limite d'une
fonction

Continuité

Définition

Opérations sur
les fonctions
continues

Continuité et
densité

Caractérisation
globale

Continuité
uniforme

Applications
lipschitziennes.

**Continuité sur un
compact**

Connexité par
arcs et théorème
des valeurs
intermédiaires

Continuité et
Linéarité

Espaces
vectoriels
normés de
dimension finie

Exercice 5

On suppose E de dimension finie et soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue telle que $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Montrer que f admet un minimum sur E .

(On utilisera le fait que les boules fermées sont compactes en dimension finie, voir section suivante)

2.7. Continuité sur un compact

Chapitre 4

Limite d'une
fonction

Continuité

Définition

Opérations sur
les fonctions
continues

Continuité et
densité

Caractérisation
globale

Continuité
uniforme

Applications
lipschitziennes.

**Continuité sur un
compact**

Connexité par
arcs et théorème
des valeurs
intermédiaires

Continuité et
Linéarité

Espaces
vectoriels
normés de
dimension finie

Theoreme 3

(de Heine) Si $f : A \rightarrow F$ est continue et si K est un compact de E , alors f est uniformément continue sur K .

2. Continuité

Chapitre 4

Limite d'une
fonction

Continuité

Définition

Opérations sur
les fonctions
continues

Continuité et
densité

Caractérisation
globale

Continuité
uniforme

Applications
lipschitziennes.

Continuité sur un
compact

**Connexité par
arcs et théorème
des valeurs
intermédiaires**

Continuité et
Linéarité

Espaces
vectoriels
normés de
dimension finie

2.8. Connexité par arcs et théorème des valeurs intermédiaires

2.8. Connexité par arcs et théorème des valeurs intermédiaires

Chapitre 4

Limite d'une
fonction

Continuité

Définition

Opérations sur
les fonctions
continues

Continuité et
densité

Caractérisation
globale

Continuité
uniforme

Applications
lipschitziennes.

Continuité sur un
compact

**Connexité par
arcs et théorème
des valeurs
intermédiaires**

Continuité et
linéarité

Espaces
vectoriels
normés de
dimension finie

Définition 6

Soient $a, b \in E$. On appelle *chemin* (ou *arc*) de (ou joignant) a à b toute application $\gamma : [0, 1] \rightarrow E$ continue telle que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$. L'ensemble $\gamma([0, 1])$ est appelé le *support* de l'arc.

Définition 7

On dit qu'une partie A non vide de E est *connexe par arcs* lorsque pour tout $(a, b) \in A$, il existe un chemin γ de a à b à support contenu dans A : $\gamma([0, 1]) \subset A$.

2.8. Connexité par arcs et théorème des valeurs intermédiaires

Chapitre 4

Limite d'une
fonction

Continuité

Définition

Opérations sur
les fonctions
continues

Continuité et
densité

Caractérisation
globale

Continuité
uniforme

Applications
lipschitziennes.

Continuité sur un
compact

**Connexité par
arcs et théorème
des valeurs
intermédiaires**

Continuité et
linéarité

Espaces
vectoriels
normés de
dimension finie

Proposition 12

Soit A une partie de E . La relation binaire \mathcal{R} définie par :

$a \mathcal{R} b \iff$ il existe un chemin de a à b à support contenu dans A
est une relation d'équivalence sur A .

Définition 8

Les classes d'équivalences pour la relation d'équivalence précédente s'appelle les *composantes connexes par arcs* de A .

2.8. Connexité par arcs et théorème des valeurs intermédiaires

Chapitre 4

Limite d'une
fonction

Continuité

Définition

Opérations sur
les fonctions
continues

Continuité et
densité

Caractérisation
globale

Continuité
uniforme

Applications
lipschitziennes.

Continuité sur un
compact

**Connexité par
arcs et théorème
des valeurs
intermédiaires**

Continuité et
Linéarité

Espaces
vectoriels
normés de
dimension finie

Proposition 13

- a) Toute partie étoilée est connexe par arcs.
- b) Toute partie convexe est connexe par arcs.
- c) une partie de \mathbb{R} est connexe par arcs **ssi** c'est un intervalle.

Remarque :

A étoilée signifie $\exists a \in A, \forall b \in A, [a, b] \subset A$

2.8. Connexité par arcs et théorème des valeurs intermédiaires

Chapitre 4

Limite d'une
fonction

Continuité

Définition

Opérations sur
les fonctions
continues

Continuité et
densité

Caractérisation
globale

Continuité
uniforme

Applications
lipschitziennes.

Continuité sur un
compact

**Connexité par
arcs et théorème
des valeurs
intermédiaires**

Continuité et
linéarité

Espaces
vectoriels
normés de
dimension finie

Theoreme 4

Soit $A \subset E$ non vide et $f : A \rightarrow F$ continue. Si A est connexe par arcs, alors $f(A)$ est connexe par arcs.

Theoreme 5

(des valeurs intermédiaires) Soit $A \subset E$ non vide et connexe par arcs et $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Si f prend les valeurs u et v , avec $u \leq v$, alors

$$\forall s \in [u, v], \quad \exists t \in A, \quad f(t) = s$$

Table des matières

Chapitre 4

Limite d'une
fonction

Continuité

**Continuité et
Linéarité**

Critère
fondamental

Norme
subordonnée

Espaces
vectoriels
normés de
dimension finie

1 Limite d'une fonction

2 Continuité

3 Continuité et Linéarité

4 Espaces vectoriels normés de dimension finie

Chapitre 4

Limite d'une
fonction

Continuité

**Continuité et
Linéarité**

Critère
fondamental

Norme
subordonnée

Espaces
vectoriels
normés de
dimension finie

3. Continuité et Linéarité

3. Continuité et Linéarité

Chapitre 4

Limite d'une
fonction

Continuité

Continuité et
Linéarité

**Critère
fondamental**

Norme
subordonnée

Espaces
vectoriels
normés de
dimension finie

3.1. Critère fondamental

3.1. Critère fondamental

Chapitre 4

Limite d'une
fonction

Continuité

Continuité et
Linéarité

Critère
fondamental

Norme
subordonnée

Espaces
vectoriels
normés de
dimension finie

Lemme

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors u est continue sur E **ssi** u est continue en 0.

Proposition 14

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors u est continue **ssi** il existe $C \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall x \in E, \quad \|u(x)\|_F \leq C \|x\|_E$$

Remarques :

- Notation : $\mathcal{L}_c(E, F)$ sous-espace des applications linéaires **continues** de E dans F .
- Dépend en général des normes considérées !

3.1. Critère fondamental

Chapitre 4

Limite d'une
fonction

Continuité

Continuité et
Linéarité

**Critère
fondamental**

Norme
subordonnée

Espaces
vectoriels
normés de
dimension finie

Exercice 6

Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme $N_1 : f \mapsto \int_0^1 |f(t)| dt$.

- a) En considérant la suite $(f_n)_n$ de E définie par $f_n : x \mapsto x^n$, montrer que la forme linéaire $u : f \mapsto f(1)$ n'est pas continue.
- b) Proposer une norme sur E pour laquelle u devient continue.

3. Continuité et Linéarité

Chapitre 4

Limite d'une
fonction

Continuité

Continuité et
Linéarité

Critère
fondamental

**Norme
subordonnée**

Espaces
vectoriels
normés de
dimension finie

3.2. Norme subordonnée

3.2. Norme subordonnée

Chapitre 4

Limite d'une
fonction

Continuité

Continuité et
Linéarité

Critère
fondamental

Norme
subordonnée

Espaces
vectoriels
normés de
dimension finie

Proposition 15

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors u est continue ssi l'image de la boule unité $B_F(0, 1)$ de E par u est bornée.

Définition 9

Pour $u \in \mathcal{L}_c(E, F)$, on appelle *norme* de u *subordonnée* à $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$ le nombre :

$$\|u\| = \sup_{x \in B_F(0,1)} \|u(x)\|_F = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|u(x)\|_F$$

$\|u\|$ s'appelle aussi *norme d'opérateur* de u (notation $\|u\|_{op}$).

3.2. Norme subordonnée

Chapitre 4

Limite d'une
fonction

Continuité

Continuité et
Linéarité

Critère
fondamental

**Norme
subordonnée**

Espaces
vectoriels
normés de
dimension finie

Exercice 7

Montrer qu'on a également :

$$\|u\| = \sup_{\|x\|_E < 1} \|u(x)\|_F = \sup_{\|x\|_E = 1} \|u(x)\|_F$$

3.2. Norme subordonnée

Chapitre 4

Limite d'une
fonction

Continuité

Continuité et
Linéarité

Critère
fondamental

Norme
subordonnée

Espaces
vectoriels
normés de
dimension finie

Proposition 16

L'application $\| \cdot \|$ définit une norme sur $\mathcal{L}_c(E, F)$. On a de plus :

$$\forall u \in \mathcal{L}_c(E, F), \quad \forall x \in E, \quad \|u(x)\|_F \leq \|u\| \|x\|_E$$

Remarque :

$\|u\|$ est le plus petit module de Lipschitz de u et :

$$\|u\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E}$$

3.2. Norme subordonnée

Chapitre 4

Limite d'une
fonction

Continuité

Continuité et
linéarité

Critère
fondamental

Norme
subordonnée

Espaces
vectoriels
normés de
dimension finie

Proposition 17

Si E, F, G sont des e.v.n., et $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|'$ et $\|\cdot\|''$ les normes d'opérateurs sur $\mathcal{L}_c(E, F)$, $\mathcal{L}_c(F, G)$ et $\mathcal{L}_c(E, G)$,

$$\forall u \in \mathcal{L}_c(E, F), \quad \forall v \in \mathcal{L}_c(F, G), \quad \|v \circ u\|'' \leq \|v\|' \cdot \|u\|$$

Remarque :

Avec $E = \mathbb{K}^n$ muni d'une norme $\|\cdot\|$, on peut définir $\|\cdot\|$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$. Alors, pour $x \in \mathbb{K}^n$, et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$\|Ax\| \leq \|A\| \|x\| \quad \text{et} \quad \|AB\| \leq \|A\| \|B\|$$

Table des matières

Chapitre 4

Limite d'une
fonction

Continuité

Continuité et
Linéarité

**Espaces
vectoriels
normés de
dimension finie**

Équivalence des
normes

Compacité des
fermés bornés,
cas des
sous-espaces

Continuité des
applications
linéaires

1 Limite d'une fonction

2 Continuité

3 Continuité et Linéarité

4 Espaces vectoriels normés de dimension finie

Chapitre 4

Limite d'une
fonction

Continuité

Continuité et
Linéarité

**Espaces
vectoriels
normés de
dimension finie**

Équivalence des
normes

Compacité des
fermés bornés,
cas des
sous-espaces

Continuité des
applications
linéaires

4. Espaces vectoriels normés de dimension finie

4. Espaces vectoriels normés de dimension finie

Chapitre 4

Limite d'une
fonction

Continuité

Continuité et
Linéarité

Espaces
vectoriels
normés de
dimension finie

Équivalence des
normes

Compacité des
fermés bornés,
cas des
sous-espaces

Continuité des
applications
linéaires

4.1. Équivalence des normes

4.1. Équivalence des normes

Chapitre 4

Limite d'une
fonction

Continuité

Continuité et
linéarité

Espaces
vectoriels
normés de
dimension finie

Équivalence des
normes

Compacité des
fermés bornés,
cas des
sous-espaces

Continuité des
applications
linéaires

Theoreme 6

De Bolzano-Weierestrass.

Toute suite bornée de $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ admet une valeur d'adhérence.

Remarque :

Lié à la propriété de la borne supérieure sur \mathbb{R} .

Corollaire 3

Toute partie fermée et bornée de $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ est compacte.

4.1. Équivalence des normes

Chapitre 4

Limite d'une
fonction

Continuité

Continuité et
Linéarité

Espaces
vectoriels
normés de
dimension finie

Équivalence des
normes

Compacité des
fermés bornés,
cas des
sous-espaces

Continuité des
applications
linéaires

Theoreme 7

Équivalence des normes.

Si E est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sur E sont équivalentes.

Remarque :

Notion de convergence *intrinsèque*.

Proposition 18

En dimension finie :

- a) une suite converge **ssi** toutes les suites coordonnées dans une base convergent.
- b) une fonction admet une limite en un point **ssi** toutes les fonctions coordonnées dans une base admettent une limite en ce point.

4. Espaces vectoriels normés de dimension finie

Chapitre 4

Limite d'une
fonction

Continuité

Continuité et
Linéarité

Espaces
vectoriels
normés de
dimension finie

Équivalence des
normes

**Compacité des
fermés bornés,
cas des
sous-espaces**

Continuité des
applications
linéaires

4.2. Compacité des fermés bornés, cas des sous-espaces

4.2. Compacité des fermés bornés, cas des sous-espaces

Chapitre 4

Limite d'une
fonction

Continuité

Continuité et
Linéarité

Espaces
vectoriels
normés de
dimension finie

Équivalence des
normes

Compacité des
fermés bornés,
cas des
sous-espaces

Continuité des
applications
linéaires

Proposition 19

Lorsque E est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, une partie A de E est compacte **ssi** elle est fermée et bornée.

Corollaire 4

une suite bornée de E converge **ssi** elle admet une unique valeur d'adhérence.

Proposition 20

Si F est un sous-espace de dimension finie de E , alors F est fermé.

4. Espaces vectoriels normés de dimension finie

Chapitre 4

Limite d'une
fonction

Continuité

Continuité et
Linéarité

Espaces
vectoriels
normés de
dimension finie

Équivalence des
normes

Compacité des
fermés bornés,
cas des
sous-espaces

Continuité des
applications
linéaires

4.3. Continuité des applications linéaires

4.3. Continuité des applications linéaires

Chapitre 4

Limite d'une
fonction

Continuité

Continuité et
Linéarité

Espaces
vectoriels
normés de
dimension finie

Équivalence des
normes

Compacité des
fermés bornés,
cas des
sous-espaces

Continuité des
applications
linéaires

Proposition 21

Si E est de dimension finie, alors toutes les applications linéaires de E vers F sont continues : $\mathcal{L}_c(E, F) = \mathcal{L}(E, F)$.

Remarque :

Généralisation à la multilinéarité.

4.3. Continuité des applications linéaires

Chapitre 4

Limite d'une
fonction

Continuité

Continuité et
Linéarité

Espaces
vectoriels
normés de
dimension finie

Équivalence des
normes

Compacité des
fermés bornés,
cas des
sous-espaces

Continuité des
applications
linéaires

Proposition 22

- Si E est euclidien, le produit scalaire \langle, \rangle est continu sur E^2
- l'application \det est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
- L'application "produit matriciel" $(A, B) \mapsto AB$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$
- Toute fonction polynomiale en plusieurs variables est continue.

Exercice 8

Montrer que $GL_n(\mathbb{K})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.