Chapitre 10

Endomorphismes d'un espace euclidien

On considère dans tout ce chapitre un espace préhilbertien réel E de dimension finie $n \geqslant 1$, autrement dit un espace euclidien, muni d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$.

Révisions MP2I

Revoir les chapitres 48 et 52.

1 Adjoint d'un endomorphisme dans un espace euclidien

1.1 Représentation d'une forme linéaire dans un espace euclidien

Proposition 1. *Pour toute forme linéaire $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ il existe un unique vecteur $v \in E$ tel que :*

$$\forall x \in E, \quad \varphi(x) = (v|x)$$

Plus précisément, l'application $v \mapsto (v|\cdot)$ réalise un isomorphisme de E sur $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$.

Remarques :

- Les composantes de $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ et de son représentant v dans $\mathcal{B}$ sont les mêmes : en notant $V, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ les matrices colonnes de v et x, on a $\varphi(x) = (v|x) = V^\top X = \sum_{i=1} v_i x_i$. La forme linéaire φ est donc représentée par la matrice ligne $V^\top$
- Cela ne tient plus si $\mathcal{B}$ n'est pas orthonormée : les composantes $(a_1, \dots, a_n)$ de φ et de v ne sont plus les mêmes, on a plus précisément (le vérifier !) :

  $$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad a_i = \sum_{j=1}^{n} v_i (e_i|e_j)$$

  Matriciellement, cela donne $\varphi(x) = (v|x) = V^\top M X$, avec $M = \big((e_i|e_j)\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, et φ est donc représentée par la matrice ligne $V^\top M$.

1.2 Définition et propriétés de l'adjoint

Définition 1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On appelle *adjoint* de u, et on note u^*, l'application qui à tout $y \in E$ associe le représentant de la forme linéaire $x \mapsto \big(y|u(x)\big)$. l'adjoint u^* de u est donc défini par la relation fondamentale :

$$\forall x, y \in E, \quad \big(u^*(y)|x\big) = \big(y|u(x)\big)$$

Remarque : Vu la symétrie du produit scalaire, on peut aussi écrire cela :

$$\forall x, y \in E, \quad \big(u(x)|y\big) = \big(x|u^*(y)\big)$$

ou d'autres façons encore.

Proposition 2.
a) *Pour tout* $u \in \mathcal{L}(E)$, $u^* \in \mathcal{L}(E)$.
b) *L'application* $u \mapsto u^*$ *est linéaire : c'est donc un endomorphisme de* $\mathcal{L}(E)$, ie *un élément de* $\mathcal{L}\big(\mathcal{L}(E)\big)$ *!*
c) *Pour tout* $u, v \in \mathcal{L}(E)$, $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$.
d) *Pour tout* $u \in \mathcal{L}(E)$, $(u^*)^* = u$ *: l'application* $u \mapsto u^*$ *est involutive donc bijective et égale à sa réciproque.*

Proposition 3. *Soit* $u \in \mathcal{L}(E)$ *et* $M = \underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(u) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. *Alors* $v = u^*$ *si, et seulement si,* $\underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(v) = M^\top$.

Remarques :
- La relation fondamentale $\big(u(x)|y\big) = \big(x|u^*(y)\big)$ définissant l'adjoint correspond matriciellement à la relation matricielle "évidente" :

$$\forall X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \quad (MX)^\top Y = X^\top (M^\top Y)$$

- Bien sûr cela n'est plus valable si la base $\mathcal{B}$ n'est pas orthonormée !

Proposition 4. *Soit* $u \in \mathcal{L}(E)$ *et* F *un sous-espace vectoriel de* E *stable par* u. *Alors* $F^\perp$ *est stable par* u^*.

2 Matrices orthogonales

2.1 Définition et caractérisations

Définition 2. Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *orthogonale* lorsque $A^\top A = I_n$.
On note $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathrm{O}(n)$ l'ensemble des matrices orthogonales d'ordre n.

Remarque : Les matrices orthogonales sont donc les matrices inversibles dont l'inverse est égale à la transposée.

Proposition 5. *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*
(i) *A est orthogonale.*
(ii) *La famille* $(C_1, \ldots, C_n)$ *des colonnes de* A *est orthonormale.*
(iii) *La famille* $(L_1, \ldots, L_n)$ *des lignes de* A *est orthonormale.*

Remarques :
- Il s'agit ici du produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$.
- Les équivalences précédentes se résument explicitement par la double inégalité, pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} a_{j,k} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i} a_{k,j} = \delta_{i,j}$$

A est donc orthogonale si, et seulement si, c'est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ vers une autre base orthonormale. Cela peut se généraliser :

Proposition 6. *Soit* $\mathcal{B}'$ *une base quelconque de* E, *et soit* $P = \mathrm{Mat}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ *la matrice de passage de la base* $\mathcal{B}$ *orthonormale vers la base* $\mathcal{B}'$.
Alors $\mathcal{B}'$ *est* orthonormale *si, et seulement si,* P *est* orthogonale.

Remarques :
- Dans ces conditions, pour un vecteur $x \in E$ représenté par $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{B}$ et par $X' \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{B}'$, on a :

$$X' = P^{-1}X = P^\top X.$$

- De même, pour un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ représenté par $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{B}$ et par $M' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{B}'$, on a :

$$M' = P^{-1}MP = P^\top MP.$$

On dit alors que les matrices M' et M sont *orthogonalement semblables*.

2.2 Groupe orthogonal

Proposition 7. *L'ensemble* $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ *des* matrices orthogonales *de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*, muni du produit matriciel, constitue un sous-groupe de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$*. Il est appelé* groupe orthogonal d'ordre n.

Proposition 8. *Pour toute matrice* $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, $\left|\det(A)\right| = 1$.

Définition 3. Soit $A \in O_n(\mathbb{R})$. On dit que A est orthogonale *positive* ou *directe* lorsque $\det(A) = 1$ et orthogonale *négative* ou *indirecte* lorsque $\det(A) = -1$.

Proposition 9. *l'ensemble des matrices orthogonales positives forme un sous-groupe de* $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$*, appelé* groupe spécial orthogonal *d'ordre* n*, et noté* $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ *ou* $\mathrm{SO}(n)$.

Rappelons qu'on appelle *groupe spécial linéaire d'ordre* n, et on note $SL_n(\mathbb{R})$ ou $SL(n)$ le sous-groupe

$$\left\{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\right\}$$

Remarque : On a donc $SO_n(\mathbb{R}) = \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \cap SL_n(\mathbb{R})$.

2.3 Orientation d'un espace vectoriel réel de dimension finie.

Les définitions et résultats (sauf le dernier) de cette sous-section ne nécessitent pas de produit scalaire : ils sont valables pour tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie $n \geqslant 1$.

Commençons par quelques rappels à propos de la notion de déterminant :

- L'ensemble des formes n-linéaires alternées sur E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 1 (sous-espace de l'espace de dimension n^n de toutes les formes n-linéaires).
- En particulier, il existe une unique forme n-linéaire alternée sur E, notée $\det_{\mathcal{B}}$, qui vérifie $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$. On l'appelle *déterminant* relativement à la base $\mathcal{B}$. En notant $(x_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n}$ les coordonnées de x_j dans $\mathcal{B}$, on a :
$$\det_{\mathcal{B}} = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} x_{\sigma(j),j}$$
- $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n) = 0$ si, et seulement si, $(x_1, \ldots, x_n)$ est une famille liée.
- $\left|\det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n)\right|$ s'interprète comme le *volume* du "parallèpipède" qui s'appuie sur les n vecteurs $x_1, \ldots, x_n$.

Lorsque $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ est libre (donc une base de E), le signe de $\det_{\mathcal{B}}(e'_1, \ldots, e'_n)$ s'interprète alors comme "l'orientation" de $\mathcal{B}'$ par rapport à $\mathcal{B}$. C'est ce que nous allons formaliser ici.

Proposition 10. *La relation binaire* $\mathcal{R}$ *définie par*

$$\mathcal{B}\,\mathcal{R}\,\mathcal{B}' \;\Leftrightarrow\; \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') > 0$$

est une relation d'équivalence sur l'ensemble des bases de E*. Elle définit exactement deux classes d'équivalences.*

Définition 4. On appelle *orientation* de E le choix de l'une des deux classes d'équivalence de la relation précédente. Les bases de cette classe sont appelée alors *directes* et celles de l'autre sont appelées *indirectes*.

Dans ces conditions, on dit que E est un espace vectoriel *orienté*.

Exemple : (de référence) On appelle *orientation canonique* de $\mathbb{R}^n$ le choix de la classe qui contient la base canonique : on "décide" donc simplement que la base canonique est directe !

Lorsqu'on considère de plus le produit scalaire canonique, on dit que $\mathbb{R}^n$ est muni de sa *structure euclidienne orientée canonique*, celle qui fait de la base canonique une Base OrthoNormale Directe (ou "BOND").

Proposition 11. *Si* E *est euclidien orienté,* $\mathcal{B}$ *et* $\mathcal{B}'$ *deux bases orthonormales directes, on a* $\det_{\mathcal{B}} = \det_{\mathcal{B}'}$.

Remarque : Ce résultat s'interprète par l'idée que le "volume orienté" ne dépend pas de la base orthonormée choisie pour le calculer : il est "intrinsèque" à la structure euclidienne orientée fixée pour E. On appelle *produit mixte* des vecteurs $x_1, \dots, x_n$ le réel :

$$[x_1, \dots, x_n] = \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$$

où $\mathcal{B}$ est une base orthonormée directe quelconque. C'est le "volume orienté" du parallèpipède s'appuyant sur ces vecteurs (dans cet ordre).

3 Isométries vectorielles d'un espace euclidien

3.1 Définition.

Comme son nom le suggère, une *isométrie* conserve les "grandeurs".

Définition 5. Une *isométrie vectorielle* de E est un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant :

$$\forall\, x \in E\,,\ \ \|u(x)\| = \|x\|.$$

Remarque : En notant $d(\cdot,\cdot)$ la distance associée à $\|\cdot\|$, on a pour toute isométrie vectorielle u :

$$\forall\,(x,y) \in E^2\,,\ \ d\big(u(x), u(y)\big) = d\big(x,y\big)$$

Cette relation est en fait la définition générale d'une *isométrie* sur un ensemble quelconque muni d'une *distance* (un *espace métrique*). En MPI, le cadre reste celui des *espaces vectoriels normés* et des isométries *vectorielles.*

3.2 Propriétés et caractérisation

Notons déjà qu'une isométrie vectorielle est toujours bijective :

Proposition 12. *Si u est une isométrie vectorielle de E , u est un* automorphisme *de E, et u^{-1} est également une isométrie vectorielle.*

D'autre part, Grâce à une identité de polarisation, la conservation de la norme implique la conservation du produit scalaire. D'où le résultat :

Proposition 13. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les trois assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) u est une isométrie vectorielle ;

(ii) pour tout $x, y \in E$, $\big(u(x)|u(y)\big) = (x|y)$.

(iii) Pour toute base orthonormale $(e_1, \dots, e_n)$, $\big(u(e_1), \dots, u(e_n)\big)$ est une base orthonormale.

Remarques :

- En particulier, si u est une isométrie vectorielle, elle conserve l'*orthogonalité* :

$$\forall\, x, y \in E\,,\ \ x \perp y \Rightarrow u(x) \perp u(y).$$

  Mais il ne s'agit pas là d'une *caractérisation* (*ie.* la réciproque est fausse, penser à une homothétie).
- les propositions 12 et 13 justifient une dénomination alternative : les isométries vectorielles sont également appelées des *endomorphismes orthogonaux.* Attention aux confusions cependant : suivant cette définition, un projecteur orthogonal n'est en général pas un endomorphisme orthogonal !

Vu tout ce qui précède, on a finalement la caractérisation suivante

Proposition 14. *u est une isométrie vectorielle si, et seulement si, $u^* = u^{-1}$.*

3.3 Caractérisation matricielle - groupe orthogonal

Proposition 15. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, représentée par $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans la base (orthonormale) $\mathcal{B}$. Alors u est une isométrie vectorielle si, et seulement si, M est orthogonale.*

On voit donc que par le choix d'une base orthonormale $\mathcal{B}$, les isométries vectorielles s'identifient aux matrices orthogonales. Elles forment ainsi un groupe (sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$).

Proposition 16. *L'ensemble des* isométries vectorielles *de E, muni de la loi $\circ$, constitue un sous-groupe de* $\mathrm{GL}(E)$. *Il est appelé* groupe orthogonal *de E, et noté* $\mathrm{O}(E)$.

Remarque : L'isomorphisme d'algèbre $mat_{\mathcal{B}} : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, qui induit déjà un isomorphisme de groupes de $\mathrm{GL}(E)$ sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, induit encore un ismorphisme de groupes de $O(E)$ sur $O_n(\mathbb{R})$ lorsque $\mathcal{B}$ est une base orthonormale.

Proposition 17. *Pour toute isométrie vectorielle $u \in O(E)$,* $\left|\det(u)\right| = 1$.

Remarque : on est ainsi conduit à distinguer deux grandes familles d'isométries vectorielles : celles de déterminant 1 conservent l'orientation tandis que celles de déterminant -1 la modife. On les appelle respectivement isométries *directes* et isométries *indirectes*.

Proposition 18. *L'ensemble des isométries vectorielles de déterminant* 1 *forme un sous-groupe de $O(E)$, appelé* groupe spécial orthogonal *de E et noté $SO(E)$.*

Remarque : Là encore, $SO(E)$ est isomorphe à $SO_n(\mathbb{R})$ par le choix d'une base orthonormée.

3.4 Isométries vectorielles en dimension 2

D'après la prop. 15, étudier les isométries euclidiennes de E revient à étudier $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$. Or, les matrices de ce groupe ont une forme très simple :

Proposition 19. *Soit $M \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$. Il existe un unique $\theta \in]-\pi, \pi]$, tel que :*

- *Si* $\det(M) = 1$ *(*ie. $M \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$*) :*
$$M = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$
- *Si* $\det(M) = -1$ *(ie.. $M \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R}) \backslash \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$:*
$$M = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Remarque : Dans le cas $\det(M) = -1$, on en déduit que $\chi_M = X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$, M est donc diagonalisable et représente une symétrie orthogonale d'axe dirigé par $\left(\cos\dfrac{\theta}{2}, \sin\dfrac{\theta}{2}\right)$. On examinera de façon plus générale cette notion à la section (4.3).

Le groupe spécial orthogonal $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ a une structure assez simple, refletée par la proposition suivante :

Proposition 20. *L'application $R : t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$ est un morphisme surjectif du groupe $(\mathbb{R}, +)$ sur le groupe $(\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}), \times)$, de noyau $2\pi\mathbb{Z}$.*

Remarque : On reconnait quelque part le même morphisme que $t \mapsto \mathrm{e}^{it}$, d'image $\mathbb{U}$: $SO_2(\mathbb{R})$ et $\mathbb{U}$ sont en fait isomorphes : l'application $\mathrm{e}^{it} \mapsto R(t)$ définit un isomorphisme de $\mathbb{U}$ sur $SO_2(\mathbb{R})$, induit par l'isomorphisme $x + iy \mapsto \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$.

Corollaire 1. *Le groupe* $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ *est commutatif.*

Définition 6. Les éléments de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ sont appelées *matrices de rotation.* $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ lui-même est souvent appelé *groupe des rotations.*

Remarques :

- Le fait que $R(\theta)R(\theta') = R(\theta+\theta')$ traduit le fait que la composition de deux rotation de centre O, l'une d'angle θ, et l'autre d'angle θ' est équivalente à une seule rotation de centre O et d'angle $\theta+\theta'$.
- u et v étant deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^2$, il existe un unique $\theta \in \mathbb{R}$, modulo 2π, tel que $\frac{v}{\|v\|}$ soit l'image de $\frac{u}{\|v\|}$ par la rotation (de mesure) d'angle θ. On dit que θ est une mesure de l'angle orienté (u,v).
- Pour obtenir une mesure de l'angle d'une rotation R donnée, il suffit de chercher l'image (a,b) de $(1,0)$ ($\equiv 1$ dans $\mathbb{C}$) et de calculer un argument de $a+ib$.
- deux vecteurs non nuls u et v de $\mathbb{R}^2$ étant assimilé à des nombres complexes z_u et z_v, tout argument de $z_v\overline{z_u}$ est une mesure de l'angle orienté (u,v).

3.5 Réduction des isométries

Proposition 21. *Soit* $f \in O(E)$ *et* F *un sous-espace de* E *stable par* f*. Alors* $F^\perp$ *est stable par* f*.*

Remarque : Ainsi, pour $f \in O(E)$, il suffit que F soit stable par f pour qu'on puisse représenter f dans une base orthonormale (adaptée à la décomposition $F \oplus F^\perp$) par une matrice *diagonale par blocs.*

Proposition 22. *Si* $f \in O(E)$, $\mathrm{Sp}(f) \subset \{-1,1\}$.

Exercice 1. Montrer plus généralement que si $f \in O(E)$, $\mathrm{Sp}_{|\mathbb{C}}(f) \subset \mathbb{U}$, autrement dit que toutes les valeurs propres complexes de f sont de module 1.

Avant d'aborder le cas général, on commence par étudier spécifiquement le cas des isométries vectorielles directes de $\mathbb{R}^3$.

Proposition 23. *Pour toute isométrie vectorielle directe* $f \in \mathrm{SO}(\mathbb{R}^3)$*, il existe une droite* $\mathcal{D}$ *et un réel* $\theta \in \mathbb{R}$*, telle que :*

- *pour tout* $x \in \mathcal{D}$, $f(x) = x$ *;*
- *l'endomorphisme induit par* f *sur* $\mathcal{P} = \mathcal{D}^\perp$ *soit la rotation d'angle* θ*.*

Remarques :

- Dans ces conditions, on dit que f est la rotation d'angle θ et d'axe $\mathcal{D}$, la droite $\mathcal{D}$ étant le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 (lorsque $\theta \neq 0[2\pi]$).
- il y a encore une ambiguité tant que le plan $\mathcal{P} = \mathcal{D}^\perp$ n'a pas été orienté : quel est le "sens" de rotation ? Le choix d'un vecteur $\vec{u} \in \mathcal{D}$ non nul (choisi généralement unitaire) peut lever cette ambiguité : on peut définir la rotation $r_{\theta,\vec{u}}$ d'angle θ et d'axe $\mathcal{D} = \mathrm{vect}(\vec{u})$ orienté par $\vec{u}$, l'isométrie vectorielle directe qui induit sur $\mathcal{P}$, orienté par le choix d'une base $(\vec{v},\vec{w})$ telle que $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ soit une base directe de $\mathbb{R}^3$, la rotation d'angle θ. On a notamment :

$$r_{\theta,-\vec{u}} = r_{-\theta,\vec{u}} \qquad \text{et} \qquad r_{-\theta,-\vec{u}} = r_{\theta,\vec{u}}.$$

Corollaire 2. *Pour toute matrice* $M \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$*, il existe* $\theta \in \mathbb{R}$ *tel que* M *soit orthogonalement semblable à la matrice*

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

On en vient maintenant au résultat général qui affirme qu'une isométrie vectorielle d'un espace euclidien de dimension n peut se réduire à une "superposition de rotations" (à une réflexion éventuelle près).

Théorème 1. *Soit* u *une isométrie vectorielle de* E*. Alors il existe une base orthonormée dans laquelle* u *est diagonales par blocs, avec des blocs de la forme :*

$$(1) \qquad , \qquad (-1) \qquad \textit{ou} \qquad \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

4 Endomorphismes autoadjoints

4.1 Définition et interprétation matricielle.

Définition 7. On dit qu'un endomorphisme u de E est *autoadjoint* lorsque $u^* = u$, donc lorsque pour tout $(x, y) \in E$:

$$\langle u(x)|y\rangle = \langle x|u(y)\rangle$$

On note $\mathcal{S}(E)$ l'ensemble des endomorphismes autoadjoints.

Proposition 24. *L'ensemble $\mathcal{S}(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.*

Remarque : Les endomorphisme autoadjoints sont également appelées endomorphisme *symétriques*, cela correspond précisément à une caractérisation matricielle dans une base orthonormée.

Proposition 25. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. La base $\mathcal{B}$ étant orthonormée, u est autoadjoint si, et seulement si, $\underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(u)$ est une matrice symétrique.*

Résultat analogue à celui de la proposition 21, le résultat suivant joue un rôle clef dans la démonstration du théorème 2.

Proposition 26. *Soit f autoadjoint et F un sous-espace de E stable par f. Alors $F^\perp$ est également stable par f.*

4.2 Exemple 1 : les projecteurs orthogonaux.

Rappelons que le projecteur orthogonal sur un sous-espace vectoriel F est le projecteur sur F parallèlement à $F^\perp$: il est bien défini car F et $F^\perp$ sont supplémentaires d'après le théorème de la projection orthogonale, E étant de dimension finie et donc F aussi.

Proposition 27. *Soit p un projecteur de E. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) p est un projecteur orthogonal ;

(ii) p est autoadjoint.

Exercice 2. Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur. Montrer que p est un projecteur othogonal si, et seulement si :

$$\forall\, x \in E \quad , \|p(x)\| \leqslant \|x\|.$$

4.3 Exemple 2 : les symétries orthogonales.

F et G étant deux sous-espaces supplémentaires, rappelons que la symétrie s par rapport à F et parallèlement G associe à tout vecteur $x = x_F + x_G$ (avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$) le vecteur $x_F - x_G$. On en déduit que $F = \mathrm{Ker}(s - Id)$ et $G = \mathrm{Ker}(s + Id)$ (sous-espaces propres associés aux valeurs propres 1 et -1 respectivement).

Définition 8. On dit qu'une symétrie $s \in \mathcal{L}(E)$ est une *symétrie orthogonale* lorsque les deux sous-espaces propres $F = \mathrm{Ker}(s - Id)$ et $G = \mathrm{Ker}(s + Id)$ sont orthogonaux.

Remarque : E étant de dimension finie, le théorème de la projection orthogonale prouve que la symétrie orthogonale s_F par rapport à un sous-espace F est toujours bien définie, car alors $F \oplus F^\perp = E$. Noter que si p_F est le projecteur orthogonal sur F, on a $s_F = 2p_F - Id$.

Proposition 28. *Soit $s \in \mathcal{L}(E)$ une symétrie vectorielle. Les trois assertions sont équivalentes :*

(i) s est une symétrie orthogonale ;

(ii) s est une isométrie vectorielle ;

(iii) s est autoadjoint

Exercice 3. Montrer que si $u \in \mathcal{L}(E)$ est à la fois une isométrie vectorielle et un endomorphisme autoadjoint, alors c'est nécessairement une symétrie (orthogonale).

4.4 Théorème spectral.

Théorème 2. *Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E. Les trois assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) u est autoadjoint

(ii) E est somme orthogonale des sous-espaces propres de u.

(iii) u est diagonalisable dans une base orthonormée.

Corollaire 3. *Pour toute matrice symétrique $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, il existe une matrice orthogonale $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, et une matrice diagonale réelle D telle que :*

$$A = PDP^{-1} = PDP^{\top}.$$

4.5 Endomorphismes autoadjoints positifs et défini positifs

Définition 9.

On dit que $u \in \mathcal{S}(E)$ est autoadjoint *positif* lorsque

$$\forall x \in E, \quad (x|u(x)) \geqslant 0$$

On dit que $u \in \mathcal{S}(E)$ est autoadjoint *défini positif* lorsque

$$\forall x \in E \backslash \{0\}, \quad (x|u(x)) > 0$$

Notation : On note $\mathcal{S}^{+}(E)$ l'ensemble des endomorphismes autoadjoints positfs et $\mathcal{S}^{++}(E)$ l'ensemble des endomorphismes autoadjoints definis positifs.

Proposition 29. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\varphi : (x, y) \mapsto \big(x|u(y)\big)$. Alors :*

- *φ est une forme bilinéaire sur E^2.*
- *Si $u \in \mathcal{S}(E)$, φ est une forme bilinéaire symétrique.*
- *Si $u \in \mathcal{S}^{+}(E)$, φ est une forme bilinéaire symétrique positive.*
- *Si $u \in \mathcal{S}^{++}(E)$, φ est un produit scalaire.*

La traduction matricielle des définitions précédentes dans une base orthonormée conduit aux définitions analogues suivantes.

Définition 10.

On dit que $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est symétrique *positive* lorsque :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad X^{\top} A X \geqslant 0$$

On dit que $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est symétrique *définie positive* lorsque :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \backslash \{0\}, \quad X^{\top} A X > 0$$

Notation : On note $\mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives et $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives.

Proposition 30. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et A sa matrice représentative dans une base orthonormée de E. Alors*

- *$u \in \mathcal{S}^{+}(E)$ si, et seulement si, $A \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$.*
- *$u \in \mathcal{S}^{++}(E)$ si, et seulement si, $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.*

Terminons cette partie et ce chapitre par une caractérisation spectrale du caractère positif ou défini positif d'un endomorphisme symétrique.

Proposition 31. *Soit $u \in \mathcal{S}(E)$. Alors*

- *$u \in \mathcal{S}^{+}(E)$ si, et seulement si, $\mathrm{Sp}(u) \subset [0, +\infty[$.*
- *$u \in \mathcal{S}^{++}(E)$ si, et seulement si, $\mathrm{Sp}(u) \subset]0, +\infty[$.*

Remarque : On a bien sûr une caractérisation analogue dans le cas d'une matrice symétrique.