Différentielle d'une fonction

Opérations sur les différentielles et les dérivées partielles

Applications géométriques et optimisation au premier ordre

Classe $\mathcal{C}^k$ et optimisation au second ordre

Calcul différentiel et optimisation

Mardi 6 janvier 2026

Table des matières

1. Différentielle d'une fonction
2. Opérations sur les différentielles et les dérivées partielles
3. Applications géométriques et optimisation au premier ordre
4. Classe $\mathcal{C}^k$ et optimisation au second ordre

Table des matières

1. Différentielle d'une fonction
2. Opérations sur les différentielles et les dérivées partielles
3. Applications géométriques et optimisation au premier ordre
4. Classe $\mathcal{C}^k$ et optimisation au second ordre

Différentielle d'une fonction
Dérivation partielle
Différentiabilité en un point
Différentielle en un point
Différentielle sur un ouvert
Opérations sur les différentielles et les dérivées partielles
Applications géométriques et optimisation au premier ordre
Classe $\mathcal{C}^k$ et optimisation au second ordre

1. Différentielle d'une fonction

Chapitre 13

Différentielle d'une fonction
Dérivation partielle
Différentiabilité en un point
Différentielle en un point
Différentielle sur un ouvert
Opérations sur les différentielles et les dérivées partielles
Applications géométriques et optimisation au premier ordre
Classe $\mathcal{C}^k$ et optimisation au second ordre

1.1. Dérivation partielle

Chapitre 13

Différentielle d'une fonction

- **Dérivation partielle**
- Différentiabilité en un point
- Différentielle en un point
- Différentielle sur un ouvert

Opérations sur les différentielles et les dérivées partielles

Applications géométriques et optimisation au premier ordre

Classe $\mathcal{C}^k$ et optimisation au second ordre

Definition 1

Soit $v \in E$ un vecteur non nul. On dit que f est dérivable en a selon le vecteur $v \in E$ lorsque l'application $t \mapsto f(a+tv)$ est dérivable en 0. La dérivée en 0 de cette application est alors appelée *dérivée* de f en a selon v, et notée $D_v f(a)$.

Remarques :

- limite en 0 de $\dfrac{1}{t}\big(f(a+tv) - f(a)\big)$.
- "parcours" de la droite $D = a + \mathrm{vect}(v)$, à une "vitesse" v.
- $D_{\lambda v} f(a) = \lambda D_v f(a)$.

Exercice 1

Calculer la dérivée de $f : (x, y) \mapsto x^2 - y^2$ au point $a = (1, 2)$ suivant le vecteur $v = (3, 5)$.

1.1. Dérivation partielle

Definition 2

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. On dit que f admet des dérivées partielles en a dans $\mathcal{B}$ lorsque f est dérivable en a selon e_i, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. La dérivée $D_{e_i} f(a)$ est alors notée $\partial_i f(a)$ ou $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, et s'appelle i-ème dérivée partielle en a (dans $\mathcal{B}$).

Remarques :

- Interprétation(s) ?

Exercice 2

Étudier l'existence et éventuellement la valeur des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$ des fonctions définies par :

$$f_1(x, y) = e^x \cos(y), \qquad f_2(x, y) = \sqrt{1 + x^2 y^2}, \qquad f_3(x, y) = x^y$$

Chapitre 13

Différentielle d'une fonction
Dérivation partielle
Différentiabilité en un point
Différentielle en un point
Différentielle sur un ouvert

Opérations sur les différentielles et les dérivées partielles

Applications géométriques et optimisation au premier ordre

Classe $\mathcal{C}^k$ et optimisation au second ordre

1.2. Différentiabilité en un point

Différentielle d'une fonction
Dérivation partielle
Différentiabilité en un point
Différentielle en un point
Différentielle sur un ouvert
Opérations sur les différentielles et les dérivées partielles
Applications géométriques et optimisation au premier ordre
Classe $\mathcal{C}^k$ et optimisation au second ordre

1.2. Différentiabilité en un point

Remarque :

Rappel : $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable en a **ssi** $f(a+h) = f(a) + f'(a)h + o(h)$.
L'application $h \mapsto f'(a)h$ est linéaire.

Definition 3

On dit que $f : \mathcal{U} \to F$ est *différentiable* en $a \in \mathcal{U}$ lorsqu'il existe une application linéaire $L : E \to F$ telle que pour $h \in E$ au voisinage de 0 :

$$f(a+h) = f(a) + L(h) + o(\|h\|)$$

Remarques :

- Signification de $o(\|h\|)$?
- Différentiable en a = existence en a d'un DL d'ordre 1.

1.2. Différentiabilité en un point

Chapitre 13

Différentielle d'une fonction
Dérivation partielle
Différentiabilité en un point
Différentielle en un point
Différentielle sur un ouvert

Opérations sur les différentielles et les dérivées partielles

Applications géométriques et optimisation au premier ordre

Classe $\mathcal{C}^k$ et optimisation au second ordre

Proposition 1

En notant $(f_1, \ldots, f_p)$ les composantes de f dans une base de F, f est différentiable en a **ssi** toutes les f_i le sont.

Remarque :

On se ramène donc au cas de fonctions $E \to \mathbb{K}$.

Proposition 2

Si f est différentiable en a, alors f est continue en a.

Remarque :

Réciproque fausse.

Chapitre 13

Différentielle d'une fonction
Dérivation partielle
Différentiabilité en un point
Différentielle en un point
Différentielle sur un ouvert
Opérations sur les différentielles et les dérivées partielles
Applications géométriques et optimisation au premier ordre
Classe $\mathcal{C}^k$ et optimisation au second ordre

1.3. Différentielle en un point

1.3. Différentielle en un point

Proposition 3

Si f est différentiable en a, avec $f(a+h) = f(a) + L(h) + \mathrm{o}(\|h\|)$, l'application linéaire L est unique.

Definition 4

Cette application linéaire est appelée *différentielle* de f en a, et est notée $\mathrm{d}f(a)$.

Remarques :

- Attention : $\mathrm{d}f(a) \in \mathcal{L}(E, F)$.
- DL(1) unique : $f(a+h) = f(a) + \mathrm{d}f(a) \cdot h + \mathrm{o}(\|h\|)$.
- Lien avec la dérivée d'une fonction $f : I \to F$?

Chapitre 13

Différentielle d'une fonction
Dérivation partielle
Différentiabilité en un point
Différentielle en un point
Différentielle sur un ouvert

Opérations sur les différentielles et les dérivées partielles

Applications géométriques et optimisation au premier ordre

Classe $\mathcal{C}^k$ et optimisation au second ordre

Exercice 3

Montrer que l'application $f : (x, y) \mapsto x^2 - y^2$ est différentiable en $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et expliciter sa différentielle. Que vaut $\mathrm{d}f(1, 2) \cdot (3, 5)$? Comparer avec la dérivée en $(1, 2)$ selon le vecteur $(3, 5)$.

Chapitre 13

Différentielle d'une fonction

Dérivation partielle

Différentiabilité en un point

Différentielle en un point

Différentielle sur un ouvert

Opérations sur les différentielles et les dérivées partielles

Applications géométriques et optimisation au premier ordre

Classe $\mathcal{C}^k$ et optimisation au second ordre

Proposition 4

Si f est différentiable en a, alors pour tout $v \in E$, f est dérivable en a selon v, avec

$$D_v f(a) = \mathrm{d}f(a) \cdot v$$

Remarque :

Réciproque fausse !

Chapitre 13

Différentielle d'une fonction
Dérivation partielle
Différentiabilité en un point
Différentielle en un point
Différentielle sur un ouvert
Opérations sur les différentielles et les dérivées partielles
Applications géométriques et optimisation au premier ordre
Classe $\mathcal{C}^k$ et optimisation au second ordre

Exercice 4

Soit $f : (x, y) \mapsto y \sin\left(\dfrac{x}{y}\right)$ définie sur $\mathbb{R}^2 \backslash \mathrm{vect}\{(1,0)\}$.

a) Montrer que l'on peut prolonger f à $\mathbb{R}^2$ par continuité.

b) Montrer que f admet des dérivées partielles en 0 selon n'importe quel vecteur.

c) f est-elle différentiable en 0 ?

Chapitre 13

Différentielle d’une fonction
Dérivation partielle
Différentiabilité en un point
Différentielle en un point
Différentielle sur un ouvert
Opérations sur les différentielles et les dérivées partielles
Applications géométriques et optimisation au premier ordre
Classe $\mathcal{C}^k$ et optimisation au second ordre

1.4. Différentielle sur un ouvert

1.4. Différentielle sur un ouvert

Definition 5

On dit que $f : \mathcal{U} \to F$ est *différentiable* sur $\mathcal{U}$ lorsque f est différentiable en tout point de $\mathcal{U}$. L'application $\mathrm{d}f : x \mapsto \mathrm{d}f(x)$ s'appelle alors *différentielle* de f.

Remarques :

- Attention : $\mathrm{d}f : E \to \mathcal{L}(E, F)$.
- Pour f à variable réelle, différentiable $\Leftrightarrow$ dérivable avec $\mathrm{d}f(x) : h \mapsto hf'(x)$.

Exemples :

- Si f est constante, $\mathrm{d}f = 0$
- Si f est linéaire, $\mathrm{d}f$ est constante avec $\mathrm{d}f : x \mapsto f$.

Table des matières

1. Différentielle d'une fonction
2. Opérations sur les différentielles et les dérivées partielles
3. Applications géométriques et optimisation au premier ordre
4. Classe $\mathcal{C}^k$ et optimisation au second ordre

Différentielle d'une fonction

Opérations sur les différentielles et les dérivées partielles

Différentielle et dérivées partielles, matrice jacobienne

Gradient

Différentielle et linéarité

Différentielle et composition : règle de la chaîne

Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Applications géométriques et optimisation au premier ordre

Classe $\mathcal{C}^k$ et optimisation au second ordre

2. Opérations sur les différentielles et les dérivées partielles

Chapitre 13

Différentielle d'une fonction

Opérations sur les différentielles et les dérivées partielles

Différentielle et dérivées partielles, matrice jacobienne

Gradient

Différentielle et linéarité

Différentielle et composition : règle de la chaîne

Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Applications géométriques et optimisation au premier ordre

Classe $\mathcal{C}^k$ et optimisation au second ordre

2.1. Différentielle et dérivées partielles, matrice jacobienne

2.1. Différentielle et dérivées partielles, matrice jacobienne

Chapitre 13

Différentielle d'une fonction

Opérations sur les différentielles et les dérivées partielles

Différentielle et dérivées partielles, matrice jacobienne

Gradient

Différentielle et linéarité

Différentielle et composition : règle de la chaîne

Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Applications géométriques et optimisation au premier ordre

Classe $\mathcal{C}^k$ et optimisation au second ordre

Proposition 5

On suppose E muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Si f est différentiable sur $\mathcal{U}$, alors f admet des dérivées partielles sur $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{B}$. Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, on a :

$$\partial_j f : x \mapsto \mathrm{d}f(x) \cdot e_j$$

Remarques :

- DL d'ordre 1 : $f(x+h) = f(x) + \sum_{j=1}^{n} h_j \partial_j f(x) + \mathrm{o}(\|h\|)$
- Si $(f_1, \dots, f_p)$ composantes de f dans une base de F, la matrice $\big(\partial_j f_i(x)\big)_{i,j}$ représente $\mathrm{d}f(x)$.

2.1. Différentielle et dérivées partielles, matrice jacobienne

Definition 6

On suppose ici que $\mathcal{U}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^p$. différentiable en $a \in \mathcal{U}$. On appelle *matrice jacobienne* de f en a la matrice $J_f(a)$ représentative de $\mathrm{d}f(a)$ dans les bases canonique. On a explicitement

$$J_f(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{i,j} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$$

Remarque :

Matriciellement,le DL d'ordre 1 est $f(a+h) = f(a) + J_f(a)h + \mathrm{o}(\|h\|)$

Exercice 5

Écrire la jacobienne de l'application $f : (x, y, z) \mapsto (xyz, x^2y + y)$ en tout point de $\mathbb{R}^3$.

Chapitre 13

Différentielle d'une fonction

Opérations sur les différentielles et les dérivées partielles

Différentielle et dérivées partielles, matrice jacobienne

Gradient

Différentielle et linéarité

Différentielle et composition : règle de la chaîne

Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Applications géométriques et optimisation au premier ordre

Classe $\mathcal{C}^k$ et optimisation au second ordre

2.2. Gradient

2.2. Gradient

Remarque :

Pour $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ différentiable en a, $\mathrm{d}f(a)$ est représentée par une matrice ligne :

Definition 7

Si E est euclidien et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ est différentiable en $a \in \mathcal{U}$, on appelle *gradient* de f en a l'unique vecteur de E, noté $\nabla f(a)$ tel que

$$\forall h \in E, \quad \mathrm{d}f(a) \cdot h = \left\langle \nabla f(a), h \right\rangle$$

Remarque :

DL de f en a : $f(x) = f(a) + \left\langle \nabla f(a), x - a \right\rangle + \mathrm{o}(\|x - a\|)$

2.2. Gradient

Proposition 6

Si $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de E, les coordonnées de $\nabla f(a)$ dans $\mathcal{B}$ sont les dérivées partielles $\big(\partial_1 f(a), \ldots, \partial_n f(a)\big)$.

Remarques :

- Non valable si la base n'est pas orthonormée
- Identification naturelle dans le cas $E = \mathbb{R}^n$ avec base et produit scalaire canonique.

Exercice 6

Montrer que $\nabla f(a)$ est positivement colinéaire au vecteur unitaire selon laquelle la dérivée partielle de f en a est maximale.

Chapitre 13

Différentielle d'une fonction

Opérations sur les différentielles et les dérivées partielles

Différentielle et dérivées partielles, matrice jacobienne

Gradient

Différentielle et linéarité

Différentielle et composition : règle de la chaîne

Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Applications géométriques et optimisation au premier ordre

Classe $\mathcal{C}^k$ et optimisation au second ordre

2.3. Différentielle et linéarité

Chapitre 13

Différentielle d'une fonction

Opérations sur les différentielles et les dérivées partielles

Différentielle et dérivées partielles, matrice jacobienne

Gradient

Différentielle et linéarité

Différentielle et composition : règle de la chaîne

Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Applications géométriques et optimisation au premier ordre

Classe $\mathcal{C}^k$ et optimisation au second ordre

Proposition 7

Si $f_1, \dots, f_q : \mathcal{U} \to F$ sont différentiables sur $\mathcal{U}$, alors pour tous $\lambda_1, \dots, \lambda_q \in \mathbb{R}$, l'application $f = \sum_{k=1}^{q} \lambda_k f_k$ est différentiable sur $\mathcal{U}$ et

$$\mathrm{d}f = \sum_{k=1}^{q} \lambda_k \mathrm{d}f_k$$

2.3. Différentielle et linéarité

Proposition 8

Soient $G, F_1, \ldots, F_q$ des $\mathbb{R}$ espaces vectoriels normés et $M : F_1 \times \cdots \times F_q \to G$ une application multinéaire. Si $f_1 : \mathcal{U} \to F_1, \ldots, f_q : \mathcal{U} \to F_q$ sont différentiables sur $\mathcal{U}$, alors l'application $f = M(f_1, \ldots, f_q)$ aussi et

$$\mathrm{d}f(x) : h \mapsto \sum_{k=1}^{q} M\big(f_1(x), \ldots, \mathrm{d}f_k(x) \cdot h, \ldots, f_q(x)\big)$$

Exercice 7

Ecrire une formule donnant le gradient $\nabla(fg)$ de deux fonctions $f, g : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ différentiables sur un ouvert $\mathcal{U}$ d'un espace euclidien E.

Chapitre 13

Différentielle d'une fonction

Opérations sur les différentielles et les dérivées partielles

Différentielle et dérivées partielles, matrice jacobienne

Gradient

Différentielle et linéarité

Différentielle et composition : règle de la chaîne

Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Applications géométriques et optimisation au premier ordre

Classe $\mathcal{C}^k$ et optimisation au second ordre

2.4. Différentielle et composition : règle de la chaîne

2.4. Différentielle et composition : règle de la chaîne

Rappel :

$(g \circ f)' = f' \times g' \circ f.$

Remarque :

Peut s'écrire $\dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}u} = \dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\,\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}$

Proposition 9

E, F et G étant trois espaces vectoriels normés de dimension finie, $\mathcal{U}$ un ouvert de E et $\mathcal{V}$ un ouvert de F, on considère $f : \mathcal{U} \to F$ tel que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathcal{V}$ et $g : \mathcal{V} \to G$. Si f est différentiable sur $\mathcal{U}$ et g différentiable sur $\mathcal{V}$, alors $g \circ f$ est différentiable sur $\mathcal{U}$ avec pour tout $x \in \mathcal{U}$:

$$\mathrm{d}(g \circ f)(x) = \mathrm{d}g\big(f(x)\big) \circ \mathrm{d}f(x)$$

2.4. Différentielle et composition : règle de la chaîne

Exercice 8

a) Retrouver la formule de dérivation d'une composée rappelée plus haut.

b) On suppose $\varphi : I \to E$ (avec I intervalle de $\mathbb{R}$) et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Retrouver un résultat déjà vu à propos de la dérivation de $f \circ \varphi$.

c) Plus généralement, pour $\gamma : I \to E$ dérivable à valeurs dans $\mathcal{U}$ et $f : \mathcal{U} \to F$ différentiable, écrire la dérivée de $f \circ \gamma$ à l'aide de γ' et de $\mathrm{d}f$.

2.4. Différentielle et composition : règle de la chaîne

Proposition 10

On reprend les notations de la proposition ci-dessus avec $G = \mathbb{R}$, et on suppose fixées des bases de E et de F, de dimensions respectives n et p. Si f et g sont différentiables, on a, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$:

$$\partial_j(g \circ f)(u) = \sum_{i=1}^{p} \partial_i g\big(f(u)\big)\partial_j f_i(u)$$

Remarques :

- Règle de la chaine : $\dfrac{\partial g}{\partial u_j} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial g}{\partial x_i}\dfrac{\partial x_i}{\partial u_j}$
- Cas $t \mapsto g\big(x_1(t), \ldots, x_n(t)\big)$: $g \circ \gamma)' = \dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial g}{\partial x_i} x_i'$

2.4. Différentielle et composition : règle de la chaîne

Exercice 9

Appliquer la formule des dérivées partielles d'une composition au cas de la transformation dans le plan de coordonnées cartésiennes à polaires, pour une fonction $(x, y) \mapsto g(x, y)$, avec $x : (r, \theta) \mapsto r\cos(\theta)$ et $y : (r, \theta) \mapsto r\sin(\theta)$.

Chapitre 13

Différentielle d'une fonction

Opérations sur les différentielles et les dérivées partielles

Différentielle et dérivées partielles, matrice jacobienne

Gradient

Différentielle et linéarité

Différentielle et composition : règle de la chaîne

Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Applications géométriques et optimisation au premier ordre

Classe $\mathcal{C}^k$ et optimisation au second ordre

2.5. Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

2.5. Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Chapitre 13

Différentielle d'une fonction

Opérations sur les différentielles et les dérivées partielles

Différentielle et dérivées partielles, matrice jacobienne

Gradient

Différentielle et linéarité

Différentielle et composition : règle de la chaîne

Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Applications géométriques et optimisation au premier ordre

Classe $\mathcal{C}^k$ et optimisation au second ordre

Definition 8

On dit que $f : \mathcal{U} \to F$ est de classe $\mathcal{C}^1$ lorsque f est différentiable et $\mathrm{d}f$ continue sur $\mathcal{U}$.

Remarques :

- Si f est de $\mathcal{C}^1$, les fonctions dérivées partielles $\partial_i f$ sont continues.
- Si f est de $\mathcal{C}^1$, la fonction jacobienne $J_f : \mathcal{U} \to \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ est continue.
- Si E euclidien et f de classe $\mathcal{C}^1$, la fonction gradient $\nabla f : \mathcal{U} \to E$ est continue.

2.5. Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Différentielle d'une fonction
Opérations sur les différentielles et les dérivées partielles
Différentielle et dérivées partielles, matrice jacobienne
Gradient
Différentielle et linéarité
Différentielle et composition : règle de la chaîne
Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$
Applications géométriques et optimisation au premier ordre
Classe $\mathcal{C}^k$ et optimisation au second ordre

Theoreme 1

Une base quelconque de E étant fixée, $f : \mathcal{U} \to F$ est de classe $\mathcal{C}^1$ **ssi** f admet des dérivées partielles continues sur $\mathcal{U}$.

Remarque :

Ainsi montre-t-on généralement la différentiabilité.

2.5. Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Proposition 11

- Une combinaison linéaire d'applications de classe $\mathcal{C}^1$ est de classe $\mathcal{C}^1$;
- Un produit (ou plus généralement une composition multilinéaire) d'applications de classe $\mathcal{C}^1$ est de classe $\mathcal{C}^1$;
- La composition de deux applications de classe $\mathcal{C}^1$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Table des matières

1 Différentielle d'une fonction

2 Opérations sur les différentielles et les dérivées partielles

3 Applications géométriques et optimisation au premier ordre

4 Classe $\mathcal{C}^k$ et optimisation au second ordre

Différentielle d'une fonction
Opérations sur les différentielles et les dérivées partielles
Applications géométriques et optimisation au premier ordre
Dérivation le long d'un arc
Caractérisation des fonctions constantes
Points critiques et extrema
Classe $\mathcal{C}^k$ et optimisation au second ordre

3. Applications géométriques et optimisation au premier ordre

Chapitre 13

Différentielle d'une fonction

Opérations sur les différentielles et les dérivées partielles

Applications géométriques et optimisation au premier ordre

Dérivation le long d'un arc

Caractérisation des fonctions constantes

Points critiques et extrema

Classe $\mathcal{C}^k$ et optimisation au second ordre

3.1. Dérivation le long d'un arc

3.1. Dérivation le long d'un arc

Proposition 12

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\gamma : I \to E$ une application. Si γ est dérivable en $t \in I$ et si $f : \mathcal{U} \to F$ est différentiable en $\gamma(t)$, alors $f \circ \gamma$ est dérivable en t et :

$$(f \circ \gamma)'(t) = \mathrm{d}f\big(\gamma(t)\big) \cdot \gamma'(t)$$

On dit qu'il s'agit de la dérivation de f en $\gamma(t)$ *le long de l'arc* γ.

Remarques :

- avec $\gamma : t \mapsto a + tv$ on retrouve $(f \circ \gamma)'(0) = \mathrm{d}f(a) \cdot v = D_v f(a)$.
- $\gamma'(t)$ s'interprète comme un vecteur *tangent* à l'arc γ au point $\gamma(t)$.

3.1. Dérivation le long d'un arc

Proposition 13

Soit $f : \mathcal{U} \to F$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $\gamma : [0,1] \to \mathcal{U}$ de classe $\mathcal{C}^1$ également. Si $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$, on a :

$$f(b) - f(a) = \int_0^1 \mathrm{d}f\big(\gamma(t)\big) \cdot \gamma'(t)\mathrm{d}t.$$

Remarque :

En particulier pour un segment $[a,b] \subset \mathcal{U}$ avec $v = b - a$:

$$f(b) - f(a) = \int_0^1 \mathrm{d}f(a + tv) \cdot v = \int_0^1 D_v f\big(a(1-t) + tb\big)\mathrm{d}t$$

Chapitre 13

Différentielle d'une fonction

Opérations sur les différentielles et les dérivées partielles

Applications géométriques et optimisation au premier ordre

Dérivation le long d'un arc

Caractérisation des fonctions constantes

Points critiques et extrema

Classe $\mathcal{C}^k$ et optimisation au second ordre

3.2. Caractérisation des fonctions constantes

3.2. Caractérisation des fonctions constantes

Chapitre 13

Différentielle d'une fonction

Opérations sur les différentielles et les dérivées partielles

Applications géométriques et optimisation au premier ordre

Dérivation le long d'un arc

Caractérisation des fonctions constantes

Points critiques et extrema

Classe $\mathcal{C}^k$ et optimisation au second ordre

Proposition 14

Si $\mathcal{U}$ est un ouvert connexe par arcs de E et si $f : \mathcal{U} \to F$ est de classe $\mathcal{C}^1$, alors f est constante **ssi** $\mathrm{d}f$ est nulle.

Remarque :

Si plusieurs composantes connexes, $\mathrm{d}f = 0$ implique f constante sur chaque composante.

Chapitre 13

Différentielle d'une fonction

Opérations sur les différentielles et les dérivées partielles

Applications géométriques et optimisation au premier ordre

Dérivation le long d'un arc

Caractérisation des fonctions constantes

Points critiques et extrema

Classe $\mathcal{C}^k$ et optimisation au second ordre

3.3. Points critiques et extrema

3.3. Points critiques et extrema

Definition 9

Soit $f : \mathcal{U} \to F$ différentiable. On dit que $a \in \mathcal{U}$ est un *point critique* de f lorsque $\mathrm{d}f(a) = 0$.

Remarques :

- Toutes les dérivées partielles doivent s'annuler.
- On a alors $f(x) = f(a) + \mathrm{o}(\|x - a\|)$.

Différentielle d'une fonction
Opérations sur les différentielles et les dérivées partielles
Applications géométriques et optimisation au premier ordre
Dérivation le long d'un arc
Caractérisation des fonctions constantes
Points critiques et extrema
Classe $\mathcal{C}^k$ et optimisation au second ordre

3.3. Points critiques et extrema

Proposition 15

Si $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ est différentiable et admet un extremum local en $a \in \mathcal{U}$, alors a est un point critique de f.

Remarques :

- Cas $n = 1$ "pathologique" : $x \mapsto x^3$ en 0
- Cas $n \geqslant 2$ "courant"

Différentielle d'une fonction
Opérations sur les différentielles et les dérivées partielles
Applications géométriques et optimisation au premier ordre
Dérivation le long d'un arc
Caractérisation des fonctions constantes
Points critiques et extrema
Classe $\mathcal{C}^k$ et optimisation au second ordre

Exemples :

- $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$ admet un minimum local en $(0, 0)$, donc un point critique ;
- $g : (x, y) \mapsto x^2 - y^2$ n'admet pas d'extremum local en $(0, 0)$, qui est néanmoins un point critique.

Exercice 10

Dans chacun des cas suivants, démontrer que f admet un maximum global sur K et le déterminer.

a) $f : (x, y) \mapsto xy(1 - x - y)$ et $K = \{(x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2 \mid x + y \leqslant 1\}$.

b) $f : (x, y) \mapsto x - y + x^3 + y^3$ et $K = [0, 1]^2$;

c) $f : (x, y) \mapsto \sin(x)\sin(y)\sin(x + y)$ et $K = [0, \frac{\pi}{2}]^2$.

Table des matières

1 Différentielle d'une fonction

2 Opérations sur les différentielles et les dérivées partielles

3 Applications géométriques et optimisation au premier ordre

4 Classe $\mathcal{C}^k$ et optimisation au second ordre

4. Classe $\mathcal{C}^k$ et optimisation au second ordre

Chapitre 13

Différentielle d'une fonction

Opérations sur les différentielles et les dérivées partielles

Applications géométriques et optimisation au premier ordre

Classe $\mathcal{C}^k$ et optimisation au second ordre

Dérivées partielles d'ordre supérieur et classe $\mathcal{C}^k$

Théorème de Schwarz

Classe $\mathcal{C}^k$ et opérations

Exemples d'équations aux dérivées partielles

Matrice hessienne

4.1. Dérivées partielles d'ordre supérieur et classe $\mathcal{C}^k$

Chapitre 13
Différentielle d'une fonction
Opérations sur les différentielles et les dérivées partielles
Applications géométriques et optimisation au premier ordre
Classe $\mathcal{C}^k$ et optimisation au second ordre
Dérivées partielles d'ordre supérieur et classe $\mathcal{C}^k$
Théorème de Schwarz
Classe $\mathcal{C}^k$ et opérations
Exemples d'équations aux dérivées partielles
Matrice hessienne

Definition 10

Soit $f : \mathcal{U} \to F$, $a \in \mathcal{U}$ et $(j_1, \dots, j_k) \in [\![1, n]\!]^n$. On dit que f admet une *dérivée partielle k-ième* en a par rapport aux variables $x_{j_1}, \dots, x_{j_k}$ successivement lorsque :

- $\dfrac{\partial f}{\partial x_{j_1}}, \dfrac{\partial}{\partial x_{j_2}}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_{j_1}}\right), \dots, \dfrac{\partial}{\partial x_{j_{k-1}}}\left(\dfrac{\partial}{\partial x_{j_{k-2}}}\left(\cdots\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_{j_1}}\right)\cdots\right)\right)$ existent sur un voisinage de a ;
- $\dfrac{\partial}{\partial x_{j_k}}\left(\dfrac{\partial}{\partial x_{j_{k-1}}}\left(\cdots\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_{j_1}}\right)\cdots\right)\right)(a)$ existe

Ce dernier élément est appelé *dérivée partielle k-ième* en a, par rapport aux variables $x_{j_1}, \dots, x_{j_k}$ successivement.

Chapitre 13

Différentielle d'une fonction

Opérations sur les différentielles et les dérivées partielles

Applications géométriques et optimisation au premier ordre

Classe $\mathcal{C}^k$ et optimisation au second ordre

Dérivées partielles d'ordre supérieur et classe $\mathcal{C}^k$

Théorème de Schwarz

Classe $\mathcal{C}^k$ et opérations

Exemples d'équations aux dérivées partielles

Matrice hessienne

Remarques :

- Notation $\dfrac{\partial^k f}{\partial x_{j_k} \partial x_{j_{k-1}} \cdots \partial x_{j_1}}(a)$, ou encore $\partial_{j_k} \cdots \partial_{j_1} f(a)$ voire $\partial_{j_k,\dots,j_1} f(a)$.
- répétion d'une même variable : $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_j^2}(a)$ au lieu de $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_j \partial x_j}(a)$

4.1. Dérivées partielles d'ordre supérieur et classe $\mathcal{C}^k$

Definition 11

On dit que $f : \mathcal{U} \to F$ est de classe $\mathcal{C}^k$ lorsqu'elle admet des dérivées partielles successives en tout point de $\mathcal{U}$, jusqu'à l'ordre k inclus et par rapport à toutes les variables, et lorsque toutes ces dérivées partielles sont continues sur $\mathcal{U}$.

Remarque :

f est de classe $\mathcal{C}^k$ **ssi** f est de classe $\mathcal{C}^1$ et les dérivées partielles sont de classe $\mathcal{C}^{k-1}$.

Chapitre 13

Différentielle d'une fonction

Opérations sur les différentielles et les dérivées partielles

Applications géométriques et optimisation au premier ordre

Classe $\mathcal{C}^k$ et optimisation au second ordre

Dérivées partielles d'ordre supérieur et classe $\mathcal{C}^k$

Théorème de Schwarz

Classe $\mathcal{C}^k$ et opérations

Exemples d'équations aux dérivées partielles

Matrice hessienne

4.2. Théorème de Schwarz

4.2. Théorème de Schwarz

Theoreme 2

Si $f : \mathcal{U} \to F$ est de classe $\mathcal{C}^2$, alors pour tout $a \in \mathcal{U}$ on a :

$$\forall (j,k) \in [\![1,n]\!]^n, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(a)$$

Remarque :

En particulier pour $E = \mathbb{R}^2$: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a)$.

Corollaire

Pour $f : \mathcal{U} \to F$ de classe $\mathcal{C}^k$ et $\sigma \in \mathcal{S}_m$:

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \cdots \partial x_{j_m}} = \frac{\partial^m f}{\partial x_{j_{\sigma(1)}} \partial x_{j_{\sigma(2)}} \cdots \partial x_{j_{\sigma(m)}}}$$

Chapitre 13

Différentielle d'une fonction

Opérations sur les différentielles et les dérivées partielles

Applications géométriques et optimisation au premier ordre

Classe $\mathcal{C}^k$ et optimisation au second ordre

Dérivées partielles d'ordre supérieur et classe $\mathcal{C}^k$

Théorème de Schwarz

Classe $\mathcal{C}^k$ et opérations

Exemples d'équations aux dérivées partielles

Matrice hessienne

4.3. Classe $\mathcal{C}^k$ et opérations

4.3. Classe $\mathcal{C}^k$ et opérations

Proposition 17

Si $f, g : \mathcal{U} \to F$ sont de classe $\mathcal{C}^k$, alors :

- Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la fonction $\lambda f + \mu g$ est de classe $\mathcal{C}^k$.
- Si $F = \mathbb{R}$, la fonction fg est de classe $\mathcal{C}^k$.

Remarques :

- $\mathcal{C}^k(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ est donc une $\mathbb{R}$-algèbre commutative.
- Plus une composition multilinéaire d'applications de classe $\mathcal{C}^k$ est de classe $\mathcal{C}^k$.

Proposition 18

Si $f : \mathcal{U} \to F$ et $g : U \to G$, avec U ouvert de F contenant $f(\mathcal{U})$, sont de classe $\mathcal{C}^k$, alors $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^k$.

Chapitre 13

Différentielle d'une fonction

Opérations sur les différentielles et les dérivées partielles

Applications géométriques et optimisation au premier ordre

Classe $\mathcal{C}^k$ et optimisation au second ordre

Dérivées partielles d'ordre supérieur et classe $\mathcal{C}^k$

Théorème de Schwarz

Classe $\mathcal{C}^k$ et opérations

Exemples d'équations aux dérivées partielles

Matrice hessienne

4.4. Exemples d'équations aux dérivées partielles

4.4. Exemples d'équations aux dérivées partielles

Chapitre 13

Différentielle d'une fonction

Opérations sur les différentielles et les dérivées partielles

Applications géométriques et optimisation au premier ordre

Classe $\mathcal{C}^k$ et optimisation au second ordre

Dérivées partielles d'ordre supérieur et classe $\mathcal{C}^k$

Théorème de Schwarz

Classe $\mathcal{C}^k$ et opérations

Exemples d'équations aux dérivées partielles

Matrice hessienne

Chapitre 13

Différentielle d'une fonction

Opérations sur les différentielles et les dérivées partielles

Applications géométriques et optimisation au premier ordre

Classe $\mathcal{C}^k$ et optimisation au second ordre

Dérivées partielles d'ordre supérieur et classe $\mathcal{C}^k$

Théorème de Schwarz

Classe $\mathcal{C}^k$ et opérations

Exemples d'équations aux dérivées partielles

Matrice hessienne

4.5. Matrice hessienne d'une application de classe $\mathcal{C}^2$

4.5. Matrice hessienne d'une application de classe $\mathcal{C}^2$

Definition 12

Soit $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et $a \in \mathcal{U}$. On appelle *matrice hessienne* de f en a la matrice

$$H_f(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$$

Remarque :

Ne pas confondre matrice jacobienne et matrice hessienne.

Proposition 19

Pour $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et $a \in \mathcal{U}$, la matrice $H_f(a)$ est symétrique.

Chapitre 13

Différentielle d'une fonction

Opérations sur les différentielles et les dérivées partielles

Applications géométriques et optimisation au premier ordre

Classe $\mathcal{C}^k$ et optimisation au second ordre

Dérivées partielles d'ordre supérieur et classe $\mathcal{C}^k$

Théorème de Schwarz

Classe $\mathcal{C}^k$ et opérations

Exemples d'équations aux dérivées partielles

Matrice hessienne

4.6. Formule de Taylor-Young à l'ordre 2

Différentielle d'une fonction
Opérations sur les différentielles et les dérivées partielles
Applications géométriques et optimisation au premier ordre
Classe $\mathcal{C}^k$ et optimisation au second ordre
Dérivées partielles d'ordre supérieur et classe $\mathcal{C}^k$
Théorème de Schwarz
Classe $\mathcal{C}^k$ et opérations
Exemples d'équations aux dérivées partielles
Matrice hessienne

4.6. Formule de Taylor-Young à l'ordre 2

Proposition 20

Soit $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. Alors pour $a \in \mathcal{U}$, et $h \in E$ au voisinage de 0, on a :

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + \langle \nabla f(a) \mid h \rangle + \frac{1}{2} \langle H_f(a) \cdot h \mid h \rangle + \mathrm{o}\big(\|h\|^2\big) \\ &= f(a) + \nabla f(a)^T h + \frac{1}{2} h^T H_f(a) h + \mathrm{o}\big(\|h\|^2\big) \end{aligned}$$

Remarques :

- plus explicitement :
- Relativement à une BON de vecteurs propres, la hessienne est diagonale et :

Chapitre 13

Différentielle d'une fonction

Opérations sur les différentielles et les dérivées partielles

Applications géométriques et optimisation au premier ordre

Classe $\mathcal{C}^k$ et optimisation au second ordre

Dérivées partielles d'ordre supérieur et classe $\mathcal{C}^k$

Théorème de Schwarz

Classe $\mathcal{C}^k$ et opérations

Exemples d'équations aux dérivées partielles

Matrice hessienne

4.7. Étude des points critiques à l'ordre 2

4.7. Étude des points critiques à l'ordre 2

Rappel :

Pour $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$:

- si f admet un minimum local en a, on a $f'(a) = 0$ et $f''(a) \geqslant 0$.
- Si f admet un maximum local en a, on a $f'(a) = 0$ et $f''(a) \leqslant 0$.

Les réciproques des deux énoncés ci-dessus sont fausses à cause du cas $f''(a) = 0$. Mais on a cependant :

- Si $f'(a) = 0$ et $f''(a) > 0$, f admet un minimum local strict en a.
- Si $f'(a) = 0$ et $f''(a) < 0$, f admet un maximum local strict en a.

4.7. Étude des points critiques à l'ordre 2

Proposition 21

Soit $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et $a \in \mathcal{U}$. Si f admet un minimum local en a, alors a est un point critique de f et $H_f(a)$ est une matrice symétrique positive : $H \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

Remarques :

- Dans une BON de vecteur propre :

$$f(a+h) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i h_i'^2 + o(\|h\|^2),$$

- Cas d'un maximum local : $H_f(a)$ est alors symétrique *négative*.
- La réciproque est fausse.

4.7. Étude des points critiques à l'ordre 2

Proposition 22

Soit $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et $a \in \mathcal{U}$. Si a est un point critique de f et si $H_f(a) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors f admet un minimum local (strict) en a.

Remarques :

- adaptation au cas d'une matrice hessienne *strictement négative* : f admet alors un maximum local (strict) en a.
- Dans le cas $n = 2$:
  - Si $\det\big(H_f(a)\big) > 0$ et $\operatorname{tr}\big(H_f(a)\big) > 0$, alors
  - Si $\det\big(H_f(a)\big) > 0$ et $\operatorname{tr}\big(H_f(a)\big) < 0$, alors
  - Si $\det\big(H_f(a)\big) < 0$, alors

Exercice 11

Déterminer les extrema de la fonction
$f : (x, y) \mapsto x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.