Devoir à la maison n° 4 - MPI

À rendre le lundi 10 novembre 2025

Algèbres : exemples et propriétés

Dans tout ce problème, les espaces vectoriels seront des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. On appelle **algèbre** tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{A}$ qui est muni d'une opération interne nommée multiplication ou produit. Cette multiplication est associative, et vérifie la propriété de distributivité :

$$\forall a \in \mathbb{A}, \forall b \in \mathbb{A}, \forall c \in \mathbb{A}, \quad a(b+c) = ab + uc, \quad (b+c)a = ba + cu$$

ainsi que :

$$\forall u \in \mathbb{A}, \forall b \in \mathbb{A}, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad u(\lambda b) = (\lambda a)b = \lambda(ub)$$

On suppose de plus qu'il existe un élément noté 1 ou 1_A et appelé élément neutre pour le produit, tel que :

$$\forall a \in \mathbb{A}, a1 = 1a = a\ .$$

Enfin si cette multiplication est commutative, l'algèbre est dite commutative. La dimension d'une algèbre est sa dimension en tant qu'espace vectoriel. Une sous-algèbre de $\mathbb{A}$ est un sous-ensemble non vide de $\mathbb{A}$ qui est lui-même une algèbre (pour les mêmes opérations) et qui possède le même élément neutre que $\mathbb{A}$. Pour que $\mathbb{B}$ soit une sous-algèbre de $\mathbb{A}$, il suffit que ce soit un sous-espace vectoriel de $\mathbb{A}$, qu'il contienne 1 et que :

$$\forall b \in \mathbb{B}, \forall b' \in \mathbb{B}, bb' \in \mathbb{B}$$

On appelle morphisme d'algèbre entre deux algèbres $\mathbb{A}$ et B, toute application linéaire f de $\mathbb{A}$ dans B qui vérifie en plus :

$$\forall a \in \mathbb{A}, \forall a' \in \mathbb{A}, f(aa') = f(a)f(a') \text{ et } f(1_A) = 1_B$$

Un morphisme d'algèbre qui est une bijection est appelé isomorphisme d'algèbre. On vérifie alors que son application réciproque est également un morphisme d'algèbre. On dira que deux algèbres sont isomorphes s'il existe un isomorphisme d'algèbre entre les deux. Dans tout le problème, n désigne un entier strictement positif. Dans ce cas, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est l'espace vectoriel des matrices carrées à n lignes et n colonnes et à coefficients réels ; c'est une algèbre pour les opérations habituelles. L'élément neutre pour le produit est la matrice de l'identité, notée I_n. La trace d'une matrice $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est :

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\ .$$

C'est la somme des éléments diagonaux de la matrice A. Une matrice scalaire est une matrice de la forme λI_n, où λ est un réel. Une matrice diagonale est une matrice dont les éléments non diagonaux sont tous nuls. L'ensemble des matrices scalaires et l'ensemble des matrices diagonales forment chacun une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Ce problème étudie certaines propriétés des algèbres, et, en particulier, s'intéresse aux algèbres qui sont des corps, c'est-à-dire dans lesquelles tout élément non nul admet un inverse pour le produit.

I. Étude d'un exemple

1. Soit A une matrice quelconque de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Vérifier que :

$$A^2 - \operatorname{tr}(A)A + \det(A)I_2 = 0\,.$$

2. Soit A une matrice non scalaire ; on note $\mathbb{A}$ l'ensemble

$$\mathbb{A} = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \;/\; \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\; M = aI_2 + bA\}$$

Vérifier que $\mathbb{A}$ est une algèbre de dimension deux, sous-algèbre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

3. Montrer que $\mathbb{A}$ contient une matrice B telle que $B^2 = -I_2$ si, et seulement si, $(\operatorname{tr} A)^2 < 4 \det A$.

4. Vérifier qu'alors I_2 et B forment une base de $\mathbb{A}$ et en déduire un isomorphisme d'algèbre entre A et le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

5. On suppose que A est non scalaire et vérifie : $(\operatorname{tr} A)^2 = 4 \det A$. Déterminer toutes les matrices de $\mathbb{A}$ telles que $M^2 = 0$, et en déduire que $\mathbb{A}$ n'est pas un corps.

6. Soit B une matrice non scalaire de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On lui associe l'algèbre $\mathbb{B}$ comme dans la question **2.** Démontrer que si A et B sont semblables, $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ sont des algèbres isomorphes.

7. On suppose que $\mathbb{A}$ est telle que : $(\operatorname{tr} A)^2 > 4 \det A$. Vérifier que A est diagonalisable de valeurs propres distinctes. En déduire que $\mathbb{A}$ est isomorphe à l'algèbre des matrices diagonales. Est-ce que $\mathbb{A}$ est un corps ?

II. Quelques résultats généraux

Soit $\mathbb{D}$ une algèbre de dimension finie n.

8. Soit a un élément de $\mathbb{D}$, démontrer que l'application ϕ_a, définie par :

$$\phi_a : \begin{cases} \mathbb{D} & \to & \mathbb{D} \\ x & \mapsto & ax \end{cases}$$

est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{D}$.

9. On note $\mathcal{B}$ une base de $\mathbb{D}$. $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi_a)$ désigne la matrice de l'endomorphisme ϕ_a, dans la base $\mathcal{B}$. Démontrer que l'application :

$$\Psi : \begin{cases} \mathbb{D} & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ a & \mapsto & \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi_a) \end{cases}$$

est un morphisme injectif d'algèbres. Vérifier que $\Psi(\mathbb{D})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et en déduire que $\mathbb{D}$ est isomorphe à une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

10. On suppose que $\mathbb{D} = \mathbb{C}$, corps des nombres complexes. On munit $\mathbb{C}$, considéré comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel, de la base $\mathcal{B} = (1, i)$. Pour tout nombre complexe $z = a + ib$, (a et b réels), écrire la matrice $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi_z)$.

11. Soit maintenant $\mathbb{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On s'intéresse à quelques cas où on peut affirmer que $\mathbb{A}$ est, ou n'est pas, un corps.

- **a)** On suppose que $\mathbb{A}$ contient une matrice non scalaire A qui a une valeur propre réelle λ. Montrer que $\mathbb{A}$ ne peut pas être un corps. On utilisera une matrice bien choisie, combinaison linéaire de I_n et de A.
- **b)** En déduire que si $\mathbb{A}$ contient une matrice diagonalisable ou trigonalisable non scalaire, elle ne peut pas être un corps.
- **c)** On suppose que $\mathbb{A}$ est intègre, c'est-à-dire que :

$$\forall A \in \mathbb{A}, \forall B \in \mathbb{A}, AB = 0 \implies A = 0 \text{ ou } B = 0\,.$$

Montrer que, si A est une matrice non nulle de $\mathbb{A}$, l'application $\Phi_A : X \mapsto AX$ est un isomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{A}$. En déduire que $\mathbb{A}$ est un corps.

Un corrigé

I. Étude d'un exemple

1. Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ son polynôme caractéristique χ_A vaut :

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} a - X & b \\ c & d - X \end{vmatrix} = X^2 - (a+d)X + (ad - bc) = X^2 - \mathrm{tr}(A)X + \det(A)$$

or d'après le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_A(A) = 0$ donc $A^2 - \mathrm{tr}(A)A + \det(A)I_2 = 0$.
On peut bien sûr obtenir également ce résultat par un calcul direct.

2. Par définition, $\mathbb{A}$ est le sous-espace vectoriel engendré par I_2 et A donc c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\mathbb{A}$ contient I_2. De plus, A n'est pas une matrice scalaire donc (I_2, A) est une famille libre et par conséquent une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{A}$. Enfin, $\mathbb{A}$ est stable pour le produit car si $(a, b, a', b') \in \mathbb{R}^4$,

$$(aI_2 + bA)(a'I_2 + b'A) = (aa' - bb'\det(A))I_2 + (ab' + a'b + bb'\mathrm{tr}(A))A \in \mathbb{A}$$

3. $\diamond$ Supposons qu'il existe une matrice $B = aI_2 + bA \in \mathbb{A}$ telle que $B^2 = -I_2$. Alors toute valeur propre λ de B vérifie $\lambda^2 = -1$ donc B ne possède pas de valeur propre réelle. On en déduit que A ne possède pas non plus de valeur propre réelle (car μ valeur propre de A implique $a + b\mu$ valeur propre de B). Le polynôme caractéristique de A n'a donc pas de racine réelle donc son discriminant $\Delta = (\mathrm{tr}A)^2 - 4\det A$ est strictement négatif.

$\diamond$ *Réciproquement*, supposons $(\mathrm{tr}A)^2 - 4\det A < 0$.
Si $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $(aI_2 + bA)^2 = (a^2 - b^2\det A)I_2 + (2ab + b^2\mathrm{tr}A)A$. Or le système

$$\begin{cases} a^2 - b^2\det A = -1 \\ 2ab + b^2\mathrm{tr}A = 0 \end{cases}$$

équivaut à

$$\begin{cases} b^2\det A = a^2 + 1 \\ a = -\frac{b}{2}\mathrm{tr}A \end{cases}$$

ou encore à

$$\begin{cases} b^2 = \frac{4}{4\det A - (\mathrm{tr}A)^2} \\ a = -\frac{b}{2}\mathrm{tr}A \end{cases}$$

Il existe donc des matrices de $\mathbb{A}$ dont le carré vaut $-I_2$ par exemple

$$B = \frac{2}{\sqrt{4\det A - (\mathrm{tr}A)^2}}\left(\left(-\frac{\mathrm{tr}A}{2}\right)I_2 + A\right)$$

4. On suppose que $B \in \mathbb{A}$ est telle que $B^2 = -I_2$. Alors B n'est pas une matrice scalaire (car si $\lambda \in \mathbb{R}$, $(\lambda I_2)^2 = \lambda^2 I_2 \neq -I_2$) donc (I_2, B) est une famille libre de $\mathbb{A}$. Comme $\mathbb{A} = \mathrm{vect}\{I_2, A\}$ on en déduit que $\mathbb{A}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension deux et que (I_2, B) en est une base.

Définissons alors f comme l'unique application linéaire entre les $\mathbb{R}$-espaces vectoriels $\mathbb{A}$ et $\mathbb{C}$ telle que $f(I_2) = 1$ et $f(B) = i$. Alors f est un isomorphisme d'espaces vectoriels car elle envoie une base de $\mathbb{A}$ sur une base de $\mathbb{C}$. De plus $f(I_2) = 1$. Enfin, si $M = xI_2 + yB$ et $M' = x'I_2 + y'B$ sont deux éléments de $\mathbb{A}$, $MM' = xx'I_2 + (xy' + x'y)B + yy'B^2 = (xx' - yy')I_2 + (xy' + x'y)B$ donc

$$f(MM') = (xx' - yy')f(I_2) + (xy' + x'y)f(B) = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$$

et

$$f(M)f(M') = (x+iy)(x'+iy') = (xx'-yy') + i(xy'+x'y)$$

On a donc $f(MM') = f(M)f(M')$ ce qui achève de montrer que f est un isomorphisme d'algèbres entre $\mathbb{A}$ et $\mathbb{C}$.

5. D'après le calcul fait en question **3.** et A étant non scalaire, si $M = aI_2 + bA$, la condition $M^2 = 0$ équivaut à $\left\{\begin{array}{l} a^2 - b^2 \det A = 0 \\ 2ab + b^2 \mathrm{tr} A = 0 \end{array}\right.$ c'est-à-dire à

$$b = a = 0 \qquad \text{ou} \qquad \left\{\begin{array}{c} a = -\frac{b}{2}\mathrm{tr}A \\ b^2\left(\frac{1}{4}(\mathrm{tr}A)^2 - \det A\right) = 0 \end{array}\right.$$

soit encore, compte-tenu de l'hypothèse $(\mathrm{tr}A)^2 = 4\det A$ à $a = -\frac{b}{2}\mathrm{tr}A$.

Conclusion : Si A n'est pas une matrice scalaire et vérifie $(\mathrm{tr}A)^2 = 4\det A$, les solutions de $M^2 = 0$ dans $\mathbb{A}$ sont les matrices de la forme $b\left(\left(-\frac{\mathrm{tr}A}{2}\right) I_2 + A\right)$ avec $b \in \mathbb{R}$. Il existe donc dans $\mathbb{A}$ des matrices non nulles de carré nul, donc non inversibles, par conséquent $\mathbb{A}$ n'est pas un corps.

6. Par hypothèse, B est une matrice non scalaire de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et il existe $P \in \mathcal{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que $B = P^{-1}AP$. On en déduit que A n'est pas non plus scalaire et (I_2, A) est une base de $\mathbb{A}$. Définissons alors g comme l'unique application linéaire de $\mathbb{A}$ dans $\mathbb{B}$ telle que $g(I_2) = I_2$ et $g(A) = B$. L'application g est alors bijective car est linéaire et envoie une base de $\mathbb{A}$ sur une base de $\mathbb{B}$. De plus, on a $\forall\, M = aI_2 + bA \in \mathbb{A}$, $g(M) = aI_2 + bB = aI_2 + bP^{-1}AP = P^{-1}(aI_2 + bA)P = P^{-1}MP$. On en déduit que si $(M, M') \in \mathbb{A}^2$,

$$g(M)g(M') = P^{-1}MPP^{-1}M'P = P^{-1}MM'P = g(MM')$$

ce qui achève de montrer que g est un isomorphisme d'algèbres. Par suite, $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ sont deux algèbres isomorphes.

7. Si $(\mathrm{tr}A)^2 > 4\det A$ le discriminant du polynôme caractéristique de A est strictement positif donc χ_A possède deux racines réelles distinctes *i.e.* A possède deux valeurs propres réelles distinctes ce qui implique sa diagonalisabilité vu que $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Soit B matrice diagonale semblable à A. D'après la question précédente, $\mathbb{A}$ est isomorphe à $\mathbb{B} = \mathrm{vect}\{I_2, B\}$. Or $\mathbb{B}$ est égal à l'espace $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$ des matrices carrées diagonales d'ordre 2 : en effet $\mathbb{B} \subset \mathcal{D}_2(\mathbb{R})$ et $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{B}) = 2 = \dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{D}_2(\mathbb{R}))$ (car $\left(E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$).

Dans ce cas, $\mathbb{A}$ n'est pas un corps car si h désigne un isomorphisme de $\mathbb{A}$ sur $\mathbb{B} = \mathcal{D}_2(\mathbb{R})$, $h^{-1}(E_{11})$ et $h^{-1}(E_{22})$ sont deux éléments non nuls de $\mathbb{A}$ dont le produit est nul donc qui sont non inversibles.

II. Quelques résultats généraux

8. Comme $\mathbb{D}$ est une algèbre, l'application

$$\begin{array}{cccc} \pi & : & \mathbb{D}^2 & \to & \mathbb{D} \\ & & (x,y) & \mapsto & xy \end{array}$$

est bilinéaire : on en déduit que pour tout $a \in \mathbb{D}$, l'application partielle $\phi_a = \pi(a, \cdot\,)$ est linéaire.

9. $\diamond$ Toujours par bilinéarité de la multiplication dans $\mathbb{D}$, on a $\forall\,(a,b) \in \mathbb{D}^2$, $\forall\,(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$,

$$\phi_{\lambda a + \mu b} = \lambda\phi_a + \mu\phi_b$$

Par ailleurs, par associativité de la multiplication dans $\mathbb{D}$, on a $\forall\,(a,b)\in\mathbb{D}^2$, $\phi_{ab}=\phi_a\circ\phi_b$. Enfin, par définition de l'élément neutre pour le produit, $\phi_{1_{\mathbb{D}}}$ est l'application identité de $\mathbb{D}$.
On en déduit que l'application

$$\begin{array}{rcccc} \phi & : & \mathbb{D} & \to & \mathcal{L}(\mathbb{D}) \\ & & a & \mapsto & \phi_a \end{array}$$

est un morphisme d'algèbres.
Or on sait que, $\mathcal{B}$ étant une base fixée de $\mathbb{D}$, l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(\mathbb{D}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ u & \mapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}u \end{array}$$

est un isomorphisme d'algèbres. On en déduit que Ψ est un morphisme d'algèbres comme composée des deux morphismes d'algèbres précédents. De plus, si $\Psi(a)=0$, on a $\phi_a=0_{\mathcal{L}(\mathbb{D})}$ et, en particulier $a=\phi_a(1_{\mathbb{D}})=0$ donc Ψ est injectif.

$\diamond$ Comme Ψ est un morphisme d'algèbres, $\Psi(\mathbb{D})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ce qu'on peut redémontrer très facilement comme le réclame l'énoncé. Dans ces conditions, Ψ induit un isomorphisme de $\mathbb{D}$ sur $\Psi(\mathbb{D})$ donc $\mathbb{D}$ est isomorphe à la sous-algèbre $\Psi(\mathbb{D})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

10. Si $\mathbb{D}=\mathbb{C}$ et $z=a+ib$, $\phi_z(1)=z=a+ib$ et $\phi_z(i)=(a+ib)i=-b+ia$ donc si $\mathcal{B}=(1,i)$,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi_z)=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

11. **a)** Soit $A\in\mathbb{A}\subset\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui possède une valeur propre réelle λ et n'est pas une matrice scalaire. Alors $A-\lambda I_n$ appartient à $\mathbb{A}$ (car $\mathbb{A}$ est stable par combinaisons linéaires et contient A et I_n), $A-\lambda I_n$ est non inversible (car λ est valeur propre de A) et n'est pas la matrice nulle (car A n'est pas scalaire) ce qui prouve que $\mathbb{A}$ n'est pas un corps.

b) Toute matrice trigonalisable (*a fortiori* diagonalisable) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a un polynôme caractéristique scindé sur $\mathbb{R}$ donc possède au moins une valeur propre réelle. Par suite, d'après (a), si $\mathbb{A}$ contient une matrice non scalaire trigonalisable, $\mathbb{A}$ n'est pas un corps.

c) On suppose $\mathbb{A}$ intègre et $A\in\mathbb{A}\backslash\{0\}$. D'après 1., on sait que $\Phi_A\ :\ X\mapsto AX$ est un endomorphisme de $\mathbb{A}$. De plus, $\mathbb{A}$ étant intègre et A étant non nulle, $\mathrm{Ker}\phi_A=\{0\}$ donc ϕ_A est injectif. Comme ϕ_A est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, on en déduit que ϕ_A est un isomorphisme. En particulier, ϕ_A est surjective donc il existe $B\in\mathbb{A}$ telle que $\phi_A(B)=I_n$. La matrice A possède donc un inverse à droite, donc est inversible d'inverse B appartenant à $\mathbb{A}$. Tout élément non nul de $\mathbb{A}$ possède donc un inverse dans $\mathbb{A}$ donc $\mathbb{A}$ est un corps.