Fiche d'exercices n$^{\text{o}}$ 4

Continuité dans les espaces vectoriels normés

Exercice 1. *caractère fermé ou ouvert d'un sous-espace vectoriel*

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E.

a) Montrer que si F est ouvert, alors $F = E$.

b) Montrer que si E est de dimension finie, alors F est fermé.

Exercice 2. *séparation de deux fermés disjoints*

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Pour toute partie A de E et tout point $x \in E$, on note :

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} \|x - y\|.$$

a) Soient F une partie fermée non vide de E et $x \in E$. Montrer :

$$d(x, F) = 0 \Leftrightarrow x \in F.$$

b) Soient F et G deux fermés non vides disjoints de E. Montrer qu'il existe deux ouverts U et V tels que $F \subset U$, $G \subset V$ et $U \cap V = \varnothing$.

Exercice 3.

Pour $r \in [\![0, n]\!]$, on note E_r l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de rang supérieur ou égal à r. Montrer que E_r est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 4.

Montrer que l'ensemble des polynômes réels de degré n scindés à racine simples est une partie ouverte de $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 5.

a) Proposer une fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, telle que $f(\mathbb{R})$ est un intervalle ouvert (et borné). Est-ce encore possible pour $f(I)$, avec I un intervalle fermé et borné ?

b) Proposer une fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, telle que $f(\mathbb{R})$ est un intervalle fermé (et borné). Est-ce encore possible pour $f(I)$, avec I un intervalle ouvert et borné ?

Exercice 6.

Soient E et F deux espaces vectoriels normés et $f : E \to F$. Montrer l'équivalence des trois assertions suivantes :

(i) f est continue.

(ii) Pour tout $A \subset E$, $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$

(iii) Pour tout $B \subset F$, $f^{-1}(\mathring{B}) \subset \left(f^{-1}(B)\right)^\circ$

Exercice 7.

Soit E et F deux espaces vectoriels normés, dont on notera $\|\cdot\|$ les normes et soit $A \subset E$ une partie de E, non réduite à un singleton. On note $\mathrm{Lip}(A, F)$ l'ensemble des fonctions Lipschitzienne sur A, et pour tout $f \in \mathrm{Lip}(A, F)$, on note $\mu(f)$ le plus petit module de Lipschitz pour f.

a) Montrer que $\mu(f)$ est bien défini pour tout $f \in \mathrm{Lip}(A, F)$.

b) Montrer que $\mathrm{Lip}(A, F)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathcal{C}(A, F)$.

c) On fixe $a \in A$. Montrer que l'application $N : f \mapsto \|f(a)\| + \mu(f)$ définit une norme sur $\mathrm{Lip}(A, F)$.

Exercice 8.

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, K une partie compacte de E et $r > 0$. On pose $L = \bigcup_{x \in K} B_F(x, r)$. Démontrer que L est compact.

Exercice 9.

Soit E un espace vectoriel normé et soient A et B deux parties connexes par arcs de E.

a) Démontrer que $A \times B$ est connexe par arcs

b) Démontrer que $A + B$ est connexe par arcs

c) L'intérieur de A est-t-il toujours connexe par arcs ?

d) Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $A \cup B$ soit connexe par arcs.

Exercice 10.

soient E et F deux espaces vectoriels normés et $f : E \to F$. On appelle *graphe* de f l'ensemble note $\mathrm{Gr}(f) = \{(x, f(x)), x \in E\} = \{(x, y) \in E \times F \,|\, y = f(x)\}$.

a) Montrer que si f est continue, alors $\mathrm{Gr}(f)$ est fermé dans $E \times F$.

b) Prouver la réciproque lorsque $f(E)$ est inclus dans un compact de F.

c) Donner un contre-exemple si $f(E)$ n'est pas inclus dans un compact.

Exercice 11.

Soit A une partie compacte d'un espace vectoriel normé et $f : A \to A$ telle que :

$$\forall (x, y) \in A^2, \quad x \neq y \Rightarrow d\big(f(x), f(y)\big) < d(x, y)$$

a) Montrer que f admet un point fixe unique, a. *(Indication : considérer l'application $x \mapsto d(x, f(x))$)*

b) Soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de A telle que $x_{n+1} = f(x_n)$. Montrer qu'elle converge vers a.

Exercice 12.

Soient deux espaces vectoriels normées E et F, A un compact de E et soit $f : A \to F$ continue et injective.

a) Montrer que $f^{-1} : f(A) \to A$ est aussi continue.

b) Donner un exemple où A n'est pas compact et f^{-1} n'est pas continue.

Exercice 13.

Soit A une partie connexe par arcs d'un espace vectoriel normé E, et soit $B \subset A$ à la fois ouverte et fermée relativement à A. On définit $f : A \to \mathbb{R}$ par $f(x) = 1$ si $x \in B$ et $f(x) = 0$ si $x \notin B$.

a) Démontrer que f est continue.

b) En déduire que $B = \varnothing$ ou $B = A$.

Exercice 14.

a) Démontrer que les composantes connexes d'un ouvert A d'un espace vectoriel normé sont ouvertes.

b) Application : Montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}$ est une réunion finie ou dénombrable d'intervalles ouverts disjoints.

Exercice 15.

Soit $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ l'ensemble des suites réelles convergentes muni de la norme $\|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$. Soit $L : u \mapsto \lim(u)$. Montrer que L est une application linéaire continue et calculer sa norme subordonnée.

Exercice 16.

On note $E = \mathcal{C}^\infty([0, +\infty[, \mathbb{R})$ et D l'endomorphisme de dérivation $D : f \mapsto f'$.

a) Montrer qu'il n'existe aucune norme sur E pour laquelle D soit continu (considérer $x \mapsto \mathrm{e}^{\alpha x}$).

b) Soit F le sous-espace vectoriel constitué des fonctions polynomiales. Trouver une norme sur F pour laquelle $D_{|F}$ est continu.

Exercice 17.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et f une forme linéaire sur E.

a) Montrer que f est continue si, et seulement si, $\mathrm{Ker}(f)$ est fermé.

b) On suppose f continue. Soit $x \in E$. Montrer que $|f(x)| = |||f|||\mathrm{d}(x, \mathrm{Ker}(f))$.

Exercice 18. *application linéaire non continue*

On suppose ici $E = \mathcal{C}\big([0,1], \mathbb{R}\big)$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Vérifier que l'application $N_1 : E \to \mathbb{R}^+$ définie par

$$N_1 : f \mapsto \int_0^1 \big|f(t)\big| \mathrm{d}t$$

est une norme sur E.

a) En considérant la suite $(f_n)_n$ de E définie par $f_n : x \mapsto x^n$, montrer que la forme linéaire $u : f \mapsto f(1)$ n'est pas continue sur E.

b) Proposer une norme sur E pour laquelle u devient continue.

Exercice 19. *théorème de Riesz*

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace vectoriel normé E.

a) Démontrer que pour tout $a \in E$, il existe $x \in F$ tel que $d(a, F) = \|x - a\|$.

b) On suppose $F \neq E$. Soit $a \in F^c$ et soit $x \in F$ tel que $d(a, F) = \|a - x\|$. On pose $b = \dfrac{1}{\|a - x\|}(a - x)$. Montrer que $d(b, F) = 1$ et $\|b\| = 1$.

c) On suppose E de dimension infinie. Construire une suite $(b_n)_n$ de E telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|b_n\| = 1 \qquad \text{et} \qquad d\big(b_n, \mathrm{vect}(b_0, \dots, b_{n-1})\big) = 1$$

d) En déduire que la boule unité fermée de E n'est pas compacte.

(Remarque : D'après un résultat de cours, Si E est de dimension finie, la boule unité fermée est compacte. Cet exercice prouve qu'il y a en fait équivalence. C'est le théorème de Riesz : La compacité de la boule unité fermée caractérise la dimension finie)

Exercice 20.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soit $g : E \to E$ définie par $g : x \mapsto \dfrac{x}{1 + \|x\|}$. Démontrer que g est une bijection de E sur $B(0,1)$ et montrer que g et g^{-1} sont continues.

Exercice 21.

Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_\infty$. Démontrer que $\varphi : E \to \mathbb{R}$, définie par $\varphi : f \mapsto \inf_{[0,1]} f$, est continue.

Exercice 22.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $T \in \mathcal{L}(E)$.

a) Montrer que T est k-lipchitzienne si et seulement si, pour tout $x \in E$, $\|T(x)\| \leqslant k\|x\|$.

b) Peut-on trouver une norme sur $\mathcal{C}^\infty([0,1], \mathbb{R})$ telle que $D : f \mapsto f'$ soit lipschitzienne ?

c) Peut-on trouver une norme sur $\mathbb{R}[X]$ telle que $D : P \mapsto P'$ soit lipschitzienne ?

Exercice 23. (mines-ponts)

On note ϕ l'application définie sur l'ensemble E des fonctions continues sur $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\phi(f) = \int_0^{1/2} f(t)\mathrm{d}t - \int_{1/2}^1 f(t)\mathrm{d}t$$

On munit E de la norme N_∞ définie par $N_\infty(f) = \sup\limits_{[0,1]} |f|$.

a) Déterminer $M = \sup\limits_{f \in E, N_\infty(f)=1} \left|\phi(f)\right|$ et montrer que M n'est pas dans l'ensemble A qu'il majore.

b) Montrer que $F = \left\{f \in E,\ \phi(f) = 1\right\}$ est fermé et calculer la distance de la fonction nulle à F.

Exercice 24. (mines-ponts)

On pose $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}$ muni de la norme N_∞. Soit l'ensemble $F = \left\{f \in E \,|\, f(0) = f(1)\right\}$. Déterminer l'adhérence et l'intérieur de F.

Exercice 25. (ens)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé et soient $a_1, \ldots, a_n \in E$.
On pose $C = \left\{\displaystyle\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i,\ \lambda_i \geqslant 0\right\}$.

a) Montrer que, pour tout $x \in E$, il existe $c \in C$ tel que $\|x - c\| = \inf\left\{\|x - a\|,\ a \in C\right\}$.

b) En déduire que C est fermé.

Exercice 26. (x)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et H un hyperplan de E. Montrer que $E \backslash H$ est connexe par arc si, et seulement si, H n'est pas fermé.

Exercice 27. (ens)

Soit f une fonction polynomiale sur $\mathbb{C}$. Montrer que l'image par f de tout fermé est un fermé.