# Séries entières

Lundi 6 octobre 2025

# Table des matières

# Table des matières

# 1. Rayon de convergence.

# 1.1. Convergence d'une série entière.

# 1.1. Convergence d'une série entière.



### Definition 1

On appelle *série entière* d'une variable complexe $z \in \mathbb{C}$ une série de la forme $\sum a_n z^n$, avec $a_n \in \mathbb{C}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

### Remarques :

- Notation ambigüe : série numérique ou série de fonctions ?
- Et pour une variable réelle ?

# 1.1. Convergence d'une série entière.



**Remarque :**

Domaine de convergence $\mathcal{D}$ :

**Exemples :**

- $\sum z^n$ :
- $\sum nz^n$ :
- $\sum \dfrac{z^n}{n^2}$ :
- $\sum \dfrac{z^n}{n}$ :

## 1.2. Lemme d'Abel et disque de convergence.

# 1.2. Lemme d'Abel et disque de convergence.



**Définition 2**

Pour $R \geqslant 0$, *disque ouvert* et *disque fermé* de rayon $R$ :

$$\mathcal{D}(R) = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z| < R\} \qquad \mathcal{D}_f(R) = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z| \leqslant R\}.$$

**Remarque :**

Cas $R = +\infty$ ?

# 1.2. Lemme d'Abel et disque de convergence.

**Theoreme 1**

(**Lemme d'Abel**) Soit $\sum a_n z^n$ une série entière et soit $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la suite numérique $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée. Alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

# 1.2. Lemme d'Abel et disque de convergence.

**Définition 3**

On appelle *rayon de convergence* d'une série entière $\sum a_n z^n$ :

$$R = \sup \left\{ r \in \mathbb{R}^+ \,/\, a_n r^n \underset{n \to +\infty}{=} \mathrm{O}(1) \right\}$$

**Remarque :**

$R = +\infty$ si l'ensemble n'est pas borné.

# 1.2. Lemme d'Abel et disque de convergence.

## Proposition 1

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière, $\mathcal{D}$ son domaine de convergence et $R$ son rayon de convergence. Alors on a :

$$\mathcal{D}(R) \subset \mathcal{D}_f \subset \mathcal{D}_F(R).$$

En outre :

- Il y a convergence absolue sur $\mathcal{D}(R)$.
- Il y a divergence grossière sur $\left(\mathcal{D}_f(R)\right)^c$

## Remarques :

- Comportement "*atypiques*" de $\sum a_n z_0^n$ : $R = |z_0|$
- Cas d'une variable réelle : intervalle de convergence.

# 1.3. Utilisation du critère de d'Alembert.

# 1.3. Utilisation du critère de d'Alembert.

## Proposition 2

Soit $(\sum a_n z^n)$ une série entière et $R$ son rayon de convergence. s'il existe $\ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, tel que $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, alors $R = \dfrac{1}{\ell}$.

## Exemple :

$$\sum \frac{n!}{n^n} z^n$$

## Proposition 3

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la série entière $\sum n^\alpha z^n$ a pour rayon de convergence $R = 1$.

# Table des matières

# 2. Opérations sur les séries entières, comparaison des rayons.

# 2.1. Comparaison de deux séries entières.

# 2.1. Comparaison de deux séries entières.

**Proposition 4**

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs $R_a$ et $R_b$.

a) Si $a_n = \mathrm{O}(b_n)$, et en particulier si $a_n = \mathrm{o}(b_n)$, alors $R_a \geqslant R_b$.
b) Si $a_n \sim b_n$, alors $R_a = R_b$.

**Remarque :**

$R \neq 1$ : comportement asymptotique "violent" de $(a_n)_n \dots$

## 2.2. Somme de deux séries entières.

# 2.2. Somme de deux séries entières.

## Proposition 5

Si $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ sont deux séries entières de rayons de convergence respectifs $R_a$ et $R_b$, alors le rayon $R$ de la série entière $\sum (a_n + b_n) z^n$ vérifie $R \geqslant \min(R_a, R_b)$ (avec égalité lorsque $R_a \neq R_b$) et pour $|z| < \min(R_a, R_b)$, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n.$$

## Remarque :

Cas $R_a = R_b$ ?

## 2.3. Produit de deux séries entières.

# 2.3. Produit de deux séries entières.

## Proposition 6

Si $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ sont deux séries entières de rayons de convergence respectifs $R_a$ et $R_b$, alors le rayon de convergence $R$ de la série entière $\sum c_n z^n$, avec $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, vérifie $R \geqslant \min(R_a, R_b)$ et pour $|z| < \min(R_a, R_b)$, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) z^n = \left( \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right) \left( \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \right).$$

## Remarques :

- Cas $R_a = R_b$ ?
- Cas d'une série entière donnant un polynôme ? (Exemple $z^2 - 2z + 3$).

# Table des matières

# 3. Régularité de la fonction somme.

## 3.1. Convergence normale et continuité de la somme.

# 3.1. Convergence normale et continuité de la somme.

## Proposition 7

Pour tout $r < R$, la série entière $\sum a_n z^n$ converge normalement sur le disque fermé $\mathcal{D}_f(r)$. Elle converge donc normalement sur tout compact de $\mathcal{D}(R)$.

## Corollaire 1

La fonction somme $S : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ est continue sur $\mathcal{D}_O(R)$.

## Remarque :

Cas $|z_0| = R$ ? On ne peut (presque) rien dire en général ...

# 3.2. Intégration de la somme.

# 3.2. Intégration de la somme.

**Définition 4**

On appelle *série primitive* de la série $\sum a_n z^n$ la série entière $\sum \dfrac{a_n}{n+1} z^{n+1}$, ou encore $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{a_{n-1}}{n} z^n$.

# 3.2. Intégration de la somme.

**Lemme**

*$\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.*

**Remarque :**

Plus généralement $\sum a_n z^n$ et $\sum n^\alpha z^n$ ?

# 3.2. Intégration de la somme.





## Proposition 8

La série entière $\sum a_n x^n$ et sa série primitive $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{a_{n-1}}{n} x^n$ ont le même rayon de convergence $R$, et la somme $F$ sur $]-R, R[$ de la série primitive, est une primitive de la somme $f$ de $\sum a_n x^n$, plus précisément celle qui s'annule en 0.

## Exemple :

- En primitivant $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$, $\ln(1+x) =$
- En primitivant $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$, $\arctan(x) =$

# 3.3. Dérivation de la somme.

# 3.3. Dérivation de la somme.

## Définition 5

On appelle *série dérivée* de la série $\sum a_n z^n$ la série entière $\sum_{n\geqslant 1} n a_n z^{n-1}$, on encore $\sum (n+1) a_{n+1} z^n$.

## Proposition 9

La série entière $\sum a_n x^n$ et sa série dérivée $\sum (n+1) a_{n+1} z^n$ ont le même rayon de convergence $R$, la somme $f$ de la série $\sum a_n x^n$ est dérivable sur $]-R, R[$ et a pour dérivée la somme de sa série dérivée.

## Remarque :

Dérivation terme à terme ...

# 3.3. Dérivation de la somme.

**Proposition 10**

La somme $f$ de la série entière $\sum a_n x^n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$, et ses dérivées s'obtiennent par dérivation terme à terme. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ :

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+k)!}{n!} a_{n+k} x^n.$$

# Table des matières

# 4. Développement en série entière.

# 4.1. Définition.

# 4.1. Définition.

## Definition 6

Une fonction $f$ de la variable complexe et à valeurs dans $\mathbb{C}$, définie au voisinage de 0, est dite *développable en série entière* (en 0) lorsqu'il existe une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$, telle que pour $z$ au voisinage de 0 :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

## Remarques :

- "au voisinage de 0" ?
- Et pour la variable réelle ?

# 4.1. Définition.

**Exemples :**

- $z \mapsto \dfrac{1}{1-z}$
- $z \mapsto \exp z$
- $x \mapsto \ln(1+x)$

## 4.2. Et en un point quelconque ? *(hors-programme)*

# 4.2. Et en un point quelconque ? *(hors-programme)*

## 4.3. Unicité d'un développement en série entière

# 4.3. Unicité d'un développement en série entière

## Proposition 11

Soit une fonction $f$ de la variable réelle développable en série entière en 0. Alors $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un voisinage de 0 et la suite $(a_n)_n$ du développement vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

## Remarque :

Cas d'une variable complexe ?

# 4.3. Unicité d'un développement en série entière

## Corollaire 2

- Deux séries entières de rayons de convergence non nuls ont la même somme sur un voisinage de 0 **ssi** ce sont les mêmes séries.
- Une série entière de rayon de convergence non nul a une somme nulle au voisinage de 0 **ssi** tous les coefficients sont nuls.

## Remarque :

DSE en 0 $\Rightarrow$ $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0 $\Rightarrow$ DL à tout ordre en 0.
Réciproques fausses.

# 4.3. Unicité d'un développement en série entière

**Remarque :**

On peut alléger l'hypothèse :

**Proposition 12**

Si deux fonctions $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $g : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$, définie au voisinage de 0, coïncident sur un intervalle $]0, \alpha]$, avec $\alpha > 0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = b_n$.

**Remarque :**

Encore vrai en supposant seulement $f(x_k) = g(x_k)$ pour une certaine suite $(x_k)_k$ de $\mathbb{R}^*$ qui converge vers 0.

# 4.4. Série de Taylor d'une fonction de la variable réelle

# 4.4. Série de Taylor d'une fonction de la variable réelle

**Definition 7**

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0.

On appelle *série de Taylor* de $f$ en 0 la série entière $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

# 4.4. Série de Taylor d'une fonction de la variable réelle

**Proposition 13**

Si $f$ est dévelopable en série entière au voisinage de 0, son développement est unique : c'est la série de Taylor de $f$ en 0.

**Remarque :**

Attention : La série de Taylor peut exister, avec un rayon non nul, sans que $f$ soit DSE.

**Exemple :**

$f : x \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$ prolongée par continuité.

# 4.4. Série de Taylor d'une fonction de la variable réelle

## Exercice 1

Soit $f : [-r, r] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$. On suppose qu'il existe $A, K > 0$ vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sup f^{(n)} \leqslant Kn!A^n$. Montrer que $f$ est développable en série entière en 0.

## Exercice 2

On suppose $f$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0, avec $f^{(n)} \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $f$ est développable en série entière en 0. *(on pourra penser à utiliser la formule de Taylor avec reste intégral)*.

# 4.5. Développements classiques.

# 4.5. Développements classiques.

**Proposition 14**

Soit $f$ DSE en 0 et $\sum a_n z^n$ sa série de Taylor. Alors :

- $f$ est paire **ssi** pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{2n+1} = 0$.
- $f$ est impaire **ssi** pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{2n} = 0$.

# 4.5. Développements classiques.

## Definition 8

La série entière $\sum \frac{1}{n!} z^n$ a un rayon de convergence infini. On appelle *exponentielle complexe* sa somme sur $\mathbb{C}$, qu'on note $\mathrm{e}^z$.

## Remarque :

On montre que pour tout $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $\mathrm{e}^{z_1+z_2} = \mathrm{e}^{z_1}\,\mathrm{e}^{z_2}$.

# 4.5. Développements classiques.

## Proposition 15

(i) Les fonctions cos et sin sont développables en séries entières en 0. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \qquad \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

(ii) Les fonctions ch et sh sont développables en séries entières en 0. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$\mathrm{ch}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n} \qquad \mathrm{sh}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

# 4.5. Développements classiques.

## Proposition 16

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$ est développable en série entière en 0. Pour tout $x \in ]-1,1[$ :

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n.$$

## Remarques :

- $\alpha \in \mathbb{N}^*$ : polynôme - binôme de Newton
- $\alpha = -1$ : série géométrique
- $\alpha$ entier négatif :

# 4.5. Développements classiques.

## Exercice 3

Retrouver le plus rapidement possible les développements en série entière des fonctions :

- $x \mapsto \ln(1+x)$
- $x \mapsto \arctan(x)$

Ils doivent au final être connus quasiment par coeur.

# 4.6. Utilisation d'une équation différentielle linéaire

## 4.6. Utilisation d'une équation différentielle linéaire