Modes de convergence

Compléments à la fiche n^o 5

Cette petite fiche récapitule le vocabulaire associé aux différentes façon de converger pour une suite ou une série. On peut à chaque fois se ramener à la convergence d'une suite **positive** vers 0, ce qu'on notera $\boxed{a_n \to 0}$.

Suite / série numérique

$(u_n)_n$ est une suite de $\mathbb{K}$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou de $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

$\sum u_n$ est une série numérique de terme général u_n. En notant $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_n$, $(S_n)_n$ est la suite numérique des sommes partielles de $\sum u_n$.

- La suite $(u_n)_n$ **converge** : il existe $\ell \in \mathbb{K}$ tel que $\boxed{|u_n - \ell| \to 0}$. On dit que $(u_n)_n$ converge vers $\ell = \lim u_n$.
- La série $\sum u_n$ **converge** : il existe $S \in \mathbb{K}$ tel que $\boxed{|S_n - S| \to 0}$. On dit que $\sum u_n$ converge et a pour somme $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
- La série $\sum u_n$ **converge absolument** : la série positive $\sum |u_n|$ converge.

Théorème : La convergence absolue implique la convergence.

Suite / série vectorielle en dimension finie

E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel **de dimension finie** (exemple : $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$). $\|\cdot\|$ est une norme quelconque sur E (elles sont toutes équivalentes).

$(u_n)_n$ est une suite de E.

$\sum u_n$ est une série vectorielle de terme général u_n. En notant $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_n$, $(S_n)_n$ est la suite vectorielle des sommes partielles de $\sum u_n$.

- La suite $(u_n)_n$ **converge** : il existe $\ell \in E$ tel que $\boxed{\|u_n - \ell\| \to 0}$. On dit que $(u_n)_n$ converge vers $\ell = \lim u_n$ - cela ne dépend pas de la norme utilisée.
- La série $\sum u_n$ **converge** : il existe $S \in E$ tel que $\boxed{\|S_n - S\| \to 0}$. On dit que $\sum u_n$ converge et a pour somme $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
- La série $\sum u_n$ **converge absolument** : la série positive $\sum \|u_n\|$ converge - cela ne dépend pas de la norme utilisée.

Théorème : La convergence absolue implique la convergence.

Suite / série de fonctions réelles ou complexes

I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Si $g : I \to \mathbb{K}$ est une fonction bornée, on notera $\|g\|_\infty = \sup\limits_{x \in I} |g(x)|$. Pour $a, b \in I$, avec $a < b$, on notera, lorsque c'est possible :

$$\|g\|_\infty^{[a,b]} = \sup_{x \in [a,b]} |g(x)| \qquad \|g\|_1^{[a,b]} = \int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t \qquad \|g\|_2^{[a,b]} = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 \mathrm{d}t}$$

.

$(f_n)_n$ est une suite de fonctions définies sur I et à valeurs numériques : $f_n : I \to \mathbb{K}$.

$\sum f_n$ est une série de fonctions de terme général f_n. En notant $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_n$, $(S_n)_n$ est la suite de fonctions des sommes partielles de $\sum f_n$.

- La suite $(f_n)_n$ **converge simplement sur** I : il existe une fonction $f : I \to \mathbb{K}$ telle que pour tout $x \in I$, $\boxed{|f_n(x) - f(x)| \to 0}$. On dit que $(f_n)_n$ converge simplement vers f sur I, f est appelée limite (simple) de la suite $(f_n)_n$.
- La série $\sum f_n$ **converge simplement sur** I : il existe une fonction $S : I \to \mathbb{K}$ telle que pour tout $x \in I$, $\boxed{|S_n(x) - S(x)| \to 0}$. S est appelée somme (simple) de la série $\sum f_n$.
- La suite $(f_n)_n$ **converge uniformément sur** I : il existe une fonction $f : I \to \mathbb{K}$ telle que $\boxed{\|f_n - f\|_\infty \to 0}$. On dit que $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur I, f est appelée limite (uniforme) de la suite $(f_n)_n$.
- La série $\sum f_n$ **converge uniformément sur** I : il existe une fonction $S : I \to \mathbb{K}$ telle que $\boxed{\|S_n - S\|_\infty \to 0}$. S est appelée somme (uniforme) de la série $\sum f_n$.
- La série $\sum f_n$ **converge normalement sur** I : La série numérique positive $\sum \|f_n\|_\infty$ est convergente.

Remarque : On a la convergence normale ou uniforme **sur tout segment** en remplaçant $\|\cdot\|_\infty$ ci-dessus par $\|\cdot|_\infty^{[a,b]}$ pour tout $a, b \in I$ tels que $a < b$.

Théorèmes :

- De façon générale la convergence normale ou uniforme sur I implique la convergence normale ou uniforme sur tout segment.
- $(f_n)_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers $f \Rightarrow (f_n)_n$ converge simplement sur I vers f.
- $\sum f_n$ converge normalement sur tout segment de $I \Rightarrow \sum f_n(x)$ converge absolument pour tout $x \in I \Rightarrow \sum f_n$ converge simplement sur I.
- $\sum f_n$ converge normalement sur I (*resp.* sur tout segment de I) $\Rightarrow \sum f_n$ converge uniformément sur I (*resp.* sur tout segment de I). *(la preuve consiste à introduire d'abord la somme $S : I \to \mathbb{K}$ grâce la convergence simple, ce qui permet ensuite de considérer les restes $R_n = S - S_n$ pour montrer la convergence uniforme de la suite $(R_n)_n$ vers la fonction nulle)*

D'autres modes de convergences (encore !) : si les f_n sont continues sur $[a, b]$:

- La suite $(f_n)_n$ **converge en moyenne** sur $[a, b]$: il existe $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ telle que $\boxed{\|f_n - f\|_1 \to 0}$. Autrement dit $\int_a^b |f_n(t) - f(t)|\mathrm{d}t \to 0$.
- La suite $(f_n)_n$ **converge en moyenne quadratique** sur $[a, b]$: il existe $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ telle que $\boxed{\|f_n - f\|_2 \to 0}$. Autrement dit $\int_a^b |f_n(t) - f(t)|^2\mathrm{d}t \to 0$.

Remarque : la convergence uniforme sur $[a, b]$ implique la convergence en moyenne quadratique, qui implique à son tour la convergence en moyenne. Les réciproques sont fausses. Cela résulte de la comparaison des normes :

$$\forall f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K}), \qquad \|f\|_1^{[a,b]} \quad \leqslant \quad \sqrt{b-a}\, \|f\|_2^{[a,b]} \quad \leqslant \quad (b-a)\, \|f\|_\infty^{[a,b]}$$

On n'a pas cependant des inégalités dans l'autre sens : aucune de ces normes ne sont équivalentes entre elles. **Préciser le mode de convergence our la norme utilisée pour une suite ou série de fonctions est essentiel !**