Cahier estival MPI-MPI*

Pour bien préparer la rentrée

Avant toute chose, prenez le temps de bien planifier votre été avec les périodes de vacances et celles de travail. Évaluez le nombre d'heures que vous pouvez accorder aux Mathématiques. Ensuite, prenez connaissance en détail du travail proposé ci-dessous et planifiez vos séances. Pour chacune des 23 sections, il s'agira de :

- Chercher à répondre à chaque question de cours (définition, énoncé d'un résultat, petit exercice) sans aller regarder votre cours au début (prenez le temps de chercher en puisant dans vos souvenirs).
- Allez ensuite retrouver les énoncés précis et/ou corrections dans votre cours pour confronter à ce que vous avez écrit, et profitez-en à chaque fois pour étudier la périphérie de la notion (remarques, exemples, démonstration des résultats).
- Essayer de faire les exercices CCINP associés (quand il y en a), sans aller voir tout de suite le corrigé ! Il faut chercher pour progresser.
- *Suggestion : faire les fiches proposées du cachier de calcul, avec au moins les calculs à 1 ou 2 horloges dans un premier temps. Elles ne suivent pas nécessairement tout à fait la thématique de la session pour une répartion homogène.*
- Enfin, pour le groupe MPI*, il y a encore dans chaque section quelques exercices supplémentaires que vous devez chercher.

Concernant le cahier de calcul, vous pouvez aussi le faire à votre rythme, selon vos besoin et choisissant les points spécifiques que vous souhaitez travailler.

Idéalement, une fois que toutes les sections ont été traitées, reprenez-les une par une pour vérifier la bonne assimilation des notions, pour refaire bien au propre quelques exercices CCINP, et terminer les fiches de calculs (3 ou 4 horloges).

1 Logique, ensembles, dénombrement, calculs divers

1.1 Cours

- Soit E un ensemble et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E. À l'aide d'un raisonnement par équivalence et avec des quantificateurs, montrer que le complémentaire de l'union des A_i est égal à l'intersection des complémentaires des A_i.
- Soit $f : E \to F$. Définir l'image directe par f de $K \subset E$ et l'image réciproque par f de $H \subset F$.
- Définir la notion d'injectivité et de surjectivité d'une fonction $f : E \to F$.
- Définir la notion de relation d'équivalence sur un ensemble E.
- Dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ factoriser $a^n - b^n$ par $a - b$.
- Donner des expressions simplifiées de $\sum_{k=1}^{n} k$, $\sum_{k=1}^{n} k^2$ et $\sum_{k=1}^{n} z^k$ (pour $z \in \mathbb{C}$).
- Qu'est-ce que $\binom{n}{k}$? Écrire la formule du binôme de Newton.

1.2 Exercices CCINP

- Banque CCINP 2025 Exercice 112 probabilité.

1.3 Fiches cahier de calcul

- Fiche 1 : Fractions
- Fiche 2 : Puissances

1.4 Autres exercices MPI*

Exercice 1. Soit $f : E \to F$ une application. Montrer que

a) f est injective si et seulement si $\forall A \subset E,\ A = f^{-1}(f(A))$.

b) f est surjective si et seulement si $\forall B \subset F,\ B = f(f^{-1}(B))$.

Exercice 2. Soit E un ensemble non-vide et $\alpha \subset \mathcal{P}(E)$ vérifiant la propriété suivante :

$$\forall (X, Y) \in \alpha^2,\ \exists Z \in \alpha,\ Z \subset (X \cap Y)$$

On définit sur $\mathcal{P}(E)$ la relation $\sim$ par

$$A \sim B \Leftrightarrow \exists X \in \alpha,\ X \cap A = X \cap B.$$

a) Prouver que ceci définit une relation d'équivalence sur $\mathcal{P}(E)$.

b) Quelles sont les classes d'équivalence de $\varnothing$ et de E ?

Exercice 3. Soient n et p deux entiers non nuls tels que $n \geqslant p$. Quel est le nombre d'applications strictement croissantes de $\{1, \dots, p\}$ dans $\{1, \dots, n\}$?

Exercice 4. Soit E un ensemble à np éléments ($n \in \mathbb{N}^*,\ p \in \mathbb{N}^*$).
On note $P_{n,p}$ le nombre de partitions de E en n parties à p éléments.
Montrer que :

$$P_{n,p} = \frac{1}{n}\binom{np}{p} P_{n-1,p}.$$

En déduire $P_{n,p}$.

2 Complexes et trigonométrie

2.1 Cours

- Écrire les formules qui simplifie le cosinus et le sinus de $\pi \pm x$, $\dfrac{\pi}{2} \pm x$.
- Écrire les formules pour $\cos(a \pm b)$ et $\sin(a \pm b)$, et retrouver alors toutes les formules habituelles de trigonométrie que vous pouvez.
- Écrire $\cos(x)$ et $\sin(x)$ en fonction de $t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$.
- Définir le conjugué, le module, et un argument d'un nombre complexe z.
- Écrire les formules de Moivre et d'Euler.
- Factoriser $1 \pm \mathrm{e}^{i\theta}$, puis $\mathrm{e}^{ip} \pm \mathrm{e}^{iq}$ par la technique de l'angle moitié. Interpréter géométriquement.
- Détailler une méthode algébrique pour obtenir les deux racines carré d'un nombre complexe non nul $a + ib$, avec $a, b \in \mathbb{R}$. L'illustrer avec le nombre $5 + 12i$.
- Décrire l'ensemble $\mathbb{U}_n$ des racines n-ièmes de l'unité, interpréter géométriquement.

2.2 Exercices CCINP

- Banque CCINP 2025 Exercice 84 algèbre
- Banque CCINP 2025 Exercice 89 algèbre

2.3 Fiches cahier de calcul

- Fiche 16 : Nombres complexes
- Fiche 17 : Trigonométrie et nombres complexes

2.4 Autres exercices MPI*

Exercice 5.

a) Soient $z, z' \in \mathbb{C}$. Montrer l'égalité $|z+z'|^2+|z-z'|^2 = 2\left(|z|^2 + |z'|^2\right)$ et interpréter géométriquement le résultat.

b) Soit $u \in \mathbb{C}$ tel que $u^2 = zz'$. Montrer que : $|z| + |z'| = \left|u + \dfrac{z+z'}{2}\right| + \left|u - \dfrac{z-z'}{2}\right|$.

Exercice 6. Soit a un nombre complexe avec $|a| = 1$. On note $z_1, z_2, \ldots, z_n$ les solutions de l'équation $z^n = a$. Montrer que les points du plan complexe dont les affixes sont $(1+z_1)^n, \ldots, (1+z_n)^n$ sont alignés.

Exercice 7. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ième de l'unité. Calculer $\sum\limits_{z\in\mathbb{U}_n} |z-1|$.

3 Suites réelles et complexes

3.1 Cours

- Définir ce qu'est la borne supérieure d'une partie A de $\mathbb{R}$, en cas d'existence. Rappeler la propriété fondamentale de la borne supérieure sur $\mathbb{R}$.
- Donner la définition d'une suite réelle ou complexe bornée, stationnaire, monotone.
- Donner la définition de la convergence d'une suite réelle ou complexe avec des quantificateurs.
- Montrer que toute suite convergente est bornée.
- Écrire le théorème de la limite monotone pour une suite réelle.
- Rappeler la définition de deux suites adjacentes et écrire le théorème des suites adjacentes.
- Donner la définition d'une suite extraite d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- Énoncer le théorème de Bolzano-Weierstrass.
- Donner la définition d'une partie dense de $\mathbb{R}$.
- Montrer que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
- Comment caractérise-t-on séquentiellement la densité ?
- Qu'est-ce qu'une suite arithmético-géométrique ? comment ramène-t-on son étude à celle d'une suite géométrique ?
- Qu'appelle-t-on suite f-récurrente pour une fonction f de la variable réelle ? Comment vérifier qu'une telle suite est bien définie ? Comment la monotonie de f a-t-elle une incidence sur le comportement d'une telle suite ? Que peut-on dire de la limite ℓ d'une telle suite lorsqu'elle converge si f est continue en ℓ ?
- Qu'est-ce qu'une suite réelle ou complexe à récurrence linéaire homogène d'ordre 2 ? Qu'appelle-t-on son équation caractéristique ? Comment les solutions de celles-ci permettent-elles d'obtenir une formule explicite pour une telle suite ?

3.2 Exercices CCINP

- Banque CCINP 2025 Exercice 43 analyse
- Banque CCINP 2025 Exercice 55 analyse

3.3 Fiches cahier de calcul

- Fiche 4 : racines carrées
- Fiche 21 : suites numériques

3.4 Autres exercices MPI*

Exercice 8. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $\begin{cases} u_0 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & \sqrt{u_n+6} \end{cases}$
Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et calculer sa limite.

Exercice 9. On donne la suite (u_n) définie par : $u_1 = \sqrt{2}$ et $u_n = \sqrt{2-u_{n-1}}$.
En étudiant les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}), montrer que la suite (u_n) est convergente.

Exercice 10. Étudier la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}(1+u_n+\lfloor u_n \rfloor)$.

4 généralités sur les fonctions réelles

4.1 Cours

- Donner la définition d'une fonction paire, impaire, périodique.
- Montrer que toute fonction s'écrit de façon unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
- Donner la définition d'une fonction majorée, minorée, bornée.
- Donner la définition d'une fonction croissante, strictement croissante.
- Donner le domaine de définition, et dessiner l'allure des courbes représentatives des fonctions $x \mapsto x^\alpha$, $x \mapsto a^x$, ln, arcsin, arccos, arctan, sh, ch, th.

4.2 Fiches cahier de calcul

- Fiche 3 : Calcul littéral
- Fiche 20 : Manipulation des fonctions usuelles

4.3 Autres exercices MPI*

Exercice 11. Déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y)f(x-y) = f(x)^2 f(y)^2$$

5 Limite et continuité

5.1 Cours

- Pour une fonction réelle f, écrire les définitions avec quantificateurs de $\lim_a f = \ell$, suivant que $a, \ell \in \mathbb{R}$ ou $a, \ell = \pm\infty$.
- Comment caractérise-t-on séquentiellement (*ie* à l'aide de suites) ces définitions ?
- Donner la définition de la continuité de $f : I \to \mathbb{R}$ en $a \in I$, d'un prolongement par continuité de $f : I \to \mathbb{R}$ en $a \notin I$ (avec a adhérent à I) ?
- Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires.
- Énoncer le théorème des bornes atteintes.
- Écrire avec des quantificateurs la définition de la continuité uniforme d'une fonction $f : I \to \mathbb{K}$.
- Énoncer le théorème de Heine.
- Montrer qu'une fonction uniformément continue n'est pas nécessairement lipschitzienne.

5.2 Fiches cahier de calcul

- Fiche 5 : Expressions algèbriques
- Fiche 6 : Équations du second degré
- Fiche 7 : Exponentielle et Logarithme

5.3 Autres exercices MPI*

Exercice 12. Si f est une fonction réelle continue sur un intervalle I, montrer que f est injective si, et seulement si f est strictement monotone.

Exercice 13. Soient $f, g : [0,1] \to [0,1]$ continues vérifiant $f \circ g = g \circ f$.
Montrer qu'il existe $x_0 \in [0,1]$ telle que $f(x_0) = g(x_0)$.

Exercice 14. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. On suppose que chaque $y \in \mathbb{R}$ admet au plus deux antécédents par f.
Montrer qu'il existe un $y \in \mathbb{R}$ possédant exactement un antécédent.

6 Dérivabilité

6.1 Cours

- Définir la notion de dérivabilité de $f : I \to \mathbb{R}$ en un point $a \in I$.
- Énoncer le théorème de Rolle.
- Énoncer le théorème des accroissements finis.
- Qu'appelle-t-on l'inégalité des accroissements finis ? Quel est le rapport avec la notion de fonction lipschitzienne ?
- Énoncer le théorème de la limite de la dérivée.
- Qu'est-ce qu'une fonction de classe $\mathcal{C}^k$?
- Écrire la formule de Leibniz pour la dérivée n-ième d'un produit fg.
- Expliciter les dérivées des fonctions $x \mapsto x^\alpha$, $x \mapsto a^x$, ln, arcsin, arccos, arctan, sh, ch, th.

6.2 Exercices CCINP

- Banque CCINP 2025 Exercice 3 analyse
- Banque CCINP 2025 Exercice 4 analyse

6.3 Fiches cahier de calcul

- Fiche 8 : Trigonométrie
- Fiche 9 : Dérivation

6.4 Autres exercices MPI*

Exercice 15. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^n$ s'annulant en $n+1$ points distincts de I.

a) Montrer que la dérivée n-ième de f s'annule au moins une fois sur I.

b) Soit α un réel. Montrer que la dérivée $(n-1)$ -ième de $f' + \alpha f$ s'annule au moins une fois sur I.
(indication : on pourra introduire une fonction auxiliaire.)

Exercice 16. Soit $f \in \mathcal{C}^3([a,b])$, $a < b$.

a) Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que : $f(b) - f(a) = (b-a)\dfrac{f'(b) + f'(a)}{2} - \dfrac{1}{12}(b-a)^3 f^{(3)}(c)$.

b) Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que : $f(b) - f(a) = (b-a)f'\left(\dfrac{a+b}{2}\right) + \dfrac{1}{24}(b-a)^3 f^{(3)}(c)$.

7 Équations différentielles linéaires

7.1 Cours

- Écrire la forme générale des solutions d'une équation différentielle $y' = a(x)y$.
- Pour une équation non homogène $y' = a(x)y + b(x)$, vérifier le principe de fonctionnement de la méthode de variation de la constante.
- Pour une équation de la forme $y'' = ay' + by$, avec a, b constants, détailler la méthode de résolution.
- Sous quelle forme chercher une solution particulière d'une équation avec second membre de la forme $y'' = ay' + by + P(x)\,\mathrm{e}^{\alpha x}$, avec P un polynôme et $\alpha \in \mathbb{C}$?

7.2 Exercices CCINP

- Banque CCINP 2025 Exercice 42 analyse

7.3 Fiches cahier de calcul

- Fiche 10 : Primitives
- Fiche 28 : Équations différentielles

8 Convexité

8.1 Cours

- Donner la définition d'une application $f : I \to \mathbb{R}$ convexe, et interpréter géométriquement (position du graphe par rapport aux sécantes).
- Écrire l'inégalité de Jensen qui généralise cette définition.
- Caractériser la convexité lorsque f est dérivable.
- Comment est positionné alors le graphe de f par rapport à ses tangentes ?

8.2 Fiches cahier de calcul

- Fiche 18 : Sommes et produits
- Fiche 19 : Coefficients binomiaux

8.3 Autres exercices MPI*

Exercice 17. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que g est convexe si, et seulement si pour toute fonction $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux, on a :

$$g\left(\int_0^1 h(t)\mathrm{d}t\right) \leqslant \int_0^1 g\big(h(t)\big)\mathrm{d}t$$

Exercice 18. Soit un intervalle $I \subset \mathbb{R}_+^*$ et $J = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{1}{x} \in I\right\}$. Soit f continue sur I, g définie sur J par $g(x) = f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ et h définie sur I par $h(x) = xf(x)$.

a) Montrer que J est un intervalle de $\mathbb{R}_+^*$.

b) Montrer que pour tout $x, y \in I$: $\forall \lambda \in [0,1], \quad \exists \mu \in [0,1], \quad \dfrac{1}{\lambda x + (1-\lambda)y} = \mu\dfrac{1}{x} + (1-\mu)\dfrac{1}{y}$

c) Montrer que g est convexe si, et seulement si h est convexe.

9 Analyse asymptotique

9.1 Cours

- Définir les relations de domination, de négligeabilité, et d'équivalence entre deux fonctions $f, g : I \to \mathbb{R}$ en un point $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ (avec a extrémité de I).
- Qu'est-ce qu'un développement limité de $f : I \to \mathbb{K}$ en $a \in I$ à l'ordre n ?
- Montrer que $f : I \to \mathbb{K}$ est dérivable en $a \in I$ si, et seulement si f admet un développement limité en a à l'ordre 1.
- Écrire la formule de Taylor-Young pour le DL à l'ordre n en $a \in I$ de $h \mapsto f(a+h)$.
- Donner le développement limité en 0 et à tout ordre de exp, sin, cos, sh, ch, $x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, $x \mapsto (1+x)^\alpha$, arctan.
- Déterminer le DL à l'ordre 3 en 0 de la fonction tan

9.2 Fiches cahier de calcul

- Fiche 11 : Calcul d'intégrales
- Fiche 22 : Développements limités

9.3 Autres exercices MPI*

Exercice 19. On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $u_n = \sqrt{n + \sqrt{(n-1) + \cdots + \sqrt{2 + \sqrt{1}}}}$.

a) Montrer que (u_n) diverge vers $+\infty$.

b) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

c) Montrer que $u_n \leqslant n$ puis que $u_n = o(n)$.

d) Donner un équivalent simple de (u_n).

e) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - \sqrt{n}$.

Exercice 20.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, justifier que l'équation

$$x + \mathrm{e}^x = n$$

possède une unique solution $x_n \in \mathbb{R}$.

b) Déterminer la limite de (x_n) puis un équivalent de x_n.

c) Former un développement asymptotique à trois termes de x_n quand $n \to +\infty$

10 Intégration

10.1 Cours

- Comment définit-on une subdivision d'un segment $[a, b]$
- Qu'est-ce qu'une fonction continue par morceaux sur un segment ?
- Comment s'écrit la somme de Riemann $S_n(f)$ d'une fonction continue par morceaux $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ pour une subdivision régulière de pas $\dfrac{b-a}{n}$? Vers quoi converge la suite $(S_n(f))_n$?
- Pour une fonction $f : I \to \mathbb{K}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, écrire la formule de Taylor d'ordre n en $a \in I$, avec reste intégral.
- Donner des primitives des fonctions $x \mapsto x^\alpha$, $x \mapsto a^x$, ln, sh, ch, th, $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$, $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- Écrire la formule générale d'un intégration par parties.
- Écrire la formule générale d'un changement de variables $x = \varphi(t)$ dans une intégrale.

10.2 Fiches cahier de calcul

- Fiche 12 : Intégration par parties
- Fiche 13 : Changement de variables
- Fiche 14 : Intégration des fractions rationnelles

10.3 Autres exercices MPI*

Exercice 21. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]0, \pi[$.

a) Justifier l'existence de
$$I_n = \int_0^\pi \frac{\cos(nt) - \cos(nx)}{\cos t - \cos x}\,\mathrm{d}t$$

b) Exprimer I_n. On pourra commencer par calculer $I_{n+1} + I_{n-1}$.

11 Séries numériques

11.1 Cours

- Donner la définition de la convergence d'une série numérique $\sum u_n$.
- Quand dit-on qu'une série diverge grossièrement ? Donner une exemple de série qui diverge, mais pas grossièrement.
- Pour $z \in \mathbb{C}$, montrer que la série $\sum z^n$ converge si, et seulement si, $|z| < 1$.
- Pour $z \in \mathbb{C}$, comment e^z est-t-il défini à partir d'une série ?
- Montrer qu'une suite $(u_n)_n$ converge si, et seulement si, la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge.
- Rappeler les règles de comparaisons de deux séries positives $\sum u_n$ et $\sum v_n$ à partir des relations de comparaisons asymptotiques des suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$.
- Définir ce qu'est la convergence absolue d'une série.
- Comment appelle-t-on une série qui converge, mais qui n'est pas absolument convergente ? Donner un exemple.
- Définir ce qu'est une série alternée et énoncer le théorème des séries alternées.

11.2 Exercices CCINP

- Banque CCINP 2025 Exercice 7 analyse
- Banque CCINP 2025 Exercice 46 analyse
- Banque CCINP 2025 Exercice 6 analyse

11.3 Fiches cahier de calcul

- Fiche 29 : Séries numériques

11.4 Autres exercices MPI*

Exercice 22. Donner un développement asymptotique à 2 termes de $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$

Exercice 23. En utilisant des comparaisons séries intégrales, montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

où $\gamma \in]0,1[$ est appelée la constante d'Euler.

12 Calcul différentiel

12.1 Cours

- Pour une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$, que signifie précisément que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U ?
- Écrire le développement limité à l'ordre 1 d'une telle fonction en $(x_0, y_0) \in U$.
- Qu'appelle-t-on point critique d'une telle fonction ? Montrer que si f atteint un extremum local en (x_0, y_0), alors (x_0, y_0) est un point critique.
- Qu'est-ce que la matrice hessienne en $(x_0, y_0) \in U$ d'une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$? Comment permet-elle d'étudier la nature d'un point critique (x_0, y_0) ?

12.2 Exercices CCINP

- Banque CCINP 2025 Exercice 33 analyse
- Banque CCINP 2025 Exercice 52 analyse
- Banque CCINP 2025 Exercice 56 analyse

12.3 Fiches cahier de calcul

- Fiche 32 : Fonctions de deux variables

13 Probabilités

13.1 Cours

- Qu'appelle-t-on distribution de probabilité sur un ensemble E ?
- Comment définit-on la probabilité conditionnelle $P_A(B)$ pour deux évènements A et B ?
- Montrer que si A et B sont indépendants, alors A et $\overline{B}$ sont indépendants.
- Écrire la définition de l'espérance $E(X)$ et de la variance $V(X)$ d'une variable aléatoire X définie sur un espace probabilisé fini (Ω, P).
- Donner la définition d'une loi de Bernoulli de paramètre p pour une variable aléatoire X, son espérance et sa variance.
- Donner la définition d'une loi Binomiale de paramètres n et p pour une variable aléatoire X, son espérance et sa variance.
- Écrire l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour une variable aléatoire X définie sur un espace probabilisé fini (Ω, P).

13.2 Exercices CCINP

- Banque CCINP 2025 Exercice 95 probabilités
- Banque CCINP 2025 Exercice 98 probabilités
- Banque CCINP 2025 Exercice 99 probabilités
- Banque CCINP 2025 Exercice 101 probabilités
- Banque CCINP 2025 Exercice 104 probabilités
- Banque CCINP 2025 Exercice 105 probabilités
- Banque CCINP 2025 Exercice 107 probabilités
- Banque CCINP 2025 Exercice 109 probabilités

14 Structures algébriques usuelles

14.1 Cours

- Que veut dire qu'une loi de composition interne $*$ sur un ensemble est associative ? Commutative ?
- Rappeler la définition d'un élément neutre pour une loi de composition interne $*$ sur un ensemble. Montrer son unicité.
- Donner la définition d'un groupe, d'un sous-groupe, d'un morphisme de groupes.
- Qu'est-ce qu'un anneau ? Un anneau intègre ?
- Qu'est-ce qu'un élément inversible dans un anneau ? Montrer que l'ensemble des élements inversible d'un anneau forme un groupe.
- Qu'est-ce que le groupe symétrique d'ordre n ?
- Comment définit-on la signature d'une permutation ?

14.2 Fiches cahier de calcul

- Fiche 31 : Groupes symétriques

14.3 Autres exercices MPI*

Exercice 24. Montrer que les groupes multiplicatifs $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ et $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ ne sont pas isomorphes.

Exercice 25. Soit $(G,+)$ un groupe commutatif. On note $\mathrm{End}(G)$ l'ensemble des endomorphismes de G sur lequel on définit la loi $+$ par $f+g : G \to G$, $x \mapsto f(x)+g(x)$.
Montrer que $(\mathrm{End}(G),+,\circ)$ est un anneau.

Exercice 26. Soit σ un automorphisme de $\mathbb{R}$.

a) Montrer que si $x \geqslant 0$ alors $\sigma(x) \geqslant 0$.

b) Montrer que σ est croissante.

c) Déterminer σ.

Exercice 27. Soit E un ensemble fini non vide muni d'une opération interne $*$ associative pour laquelle tout élément est régulier à droite et à gauche :

$$\forall (x,y,z) \in E^3, \quad x*y = x*z \Rightarrow y=z \quad \text{et} \quad y*x = z*x \Rightarrow y=z$$

Montrer que E est un groupe.

Donner un exemple d'ensemble infini muni d'une loi vérifiant cette propriété mais qui n'est pas un groupe.

15 Arithmétique des entiers

15.1 Cours

- Définir la relation de divisibilité dans $\mathbb{Z}$. Est-ce une relation d'ordre ?
- Écrire le théorème de la division euclidienne.
- Définir le PGCD et le PPCM de deux entiers.
- Énoncer le théorème de Bezout.
- Énoncer le lemme de Gauss.
- Qu'est-ce que la valuation p-adique d'un entier $n \in \mathbb{Z}$, pour p un nombre premier ?
- Énoncer le petit théorème de Fermat.

15.2 Exercices CCINP

- Banque CCINP 2025 Exercice 86 algèbre
- Banque CCINP 2025 Exercice 94 algèbre

15.3 Fiches cahier de calcul

- Fiche 23 : Arithmétique

15.4 Autres exercices MPI*

Exercice 28. Soient $a, b \in \mathbb{Z}$.

a) On suppose $a \wedge b = 1$. Montrer que $(a+b) \wedge ab = 1$.

b) On revient au cas général. Calculer $(a+b) \wedge (a \vee b)$.

Exercice 29. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note d_n le nombre de diviseurs positifs de n.

a) Montrer que si $n = ab$, avec $a \wedge b = 1$, alors $d_n = d_a d_b$.

b) Montrer que n est un carré parfait si, et seulement si d_n est impair.

c) Montrer que $\displaystyle\prod_{d|n} d = \sqrt{n}^{d_n}$.

Exercice 30. Montrer que tout nombre premier p divise $(p-1)! + 1$

16 Polynômes

16.1 Cours

- Montrer que $\mathbb{K}[X]$ est un anneau intègre.
- Écrire le théorème de la division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$ (et revoir l'algorithme de cette division).
- Pour $P \in \mathbb{K}[A]$, montrer que $\lambda \in \mathbb{K}$ est racine de P si, et seulement si $X - \lambda$ divise P.
- Donner la définition de la multiplicité d'une racine λ d'un polynôme P.
- Qu'est-ce qu'un polynôme scindé ?
- Retrouver les relations entre coefficients et racines d'un polynôme à l'aide des fonctions symétriques élémentaires (formules de Viète).
- Décomposer un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ avec la formule de Taylor polynomiale (en $a \in \mathbb{K}$).
- Expliciter la famille $(L_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ des polynômes de Lagrange associées à une famille $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ distincts deux à deux. A quel problème d'interpolation cette famille est-elle associée ?
- Décomposer $\dfrac{1}{X(X^4-1)}$ en éléments simples.

16.2 Exercices CCINP

- Banque CCINP 2025 Exercice 85 algèbre
- Banque CCINP 2025 Exercice 87 algèbre
- Banque CCINP 2025 Exercice 90 algèbre

16.3 Fiches cahier de calcul

- Fiche 24 : polynômes
- Fiche 25 : décomposition en éléments simples

16.4 Autres exercices MPI*

Exercice 31. Soit $P \in \mathbb{R}[X]\backslash\{0\}$ vérifiant

$$P(X^2) = P(X)P(X+1)$$

a) Montrer que si a est racine de P, alors a^2 l'est aussi.

b) En déduire que les racines de P dans $\mathbb{C}$ sont nulles ou de module 1.

c) En déduire que les seules racines possibles de P sont 0, 1, $-j$, $-j^2$.

d) conclure quant à l'ensemble des solutions du problème.

Exercice 32. Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$ un polynôme irréductible, et soit $\alpha \in \mathbb{C}$ une racine de P. Montrer que α est racine simple de P.

Exercice 33. Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ de modules tous distincts tels que : $\forall p \in [\![1, 3]\!], \quad a^p + b^p + c^p \in \mathbb{R}$. Montrer que a, b, c sont des réels.

17 Calcul matriciel

17.1 Cours

- Que sont les matrices élémentaires $E_{i,j}$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$? Que vaut $E_{i,j}E_{k,l}$, avec $E_{i,j} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $E_{k,l} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$?
- Donner les trois types d'opérations élémentaires sur les lignes ou colonnes d'une matrice, leur notation, et leur interprétation par la multiplication d'une certaine matrice qu'on précisera.
- Qu'est-ce qu'un système linéaire ? Comment peut-il être représenté matriciellement ?
- Qu'est-ce qu'une matrice symétrique ? Antisymétrique ? Montrer que toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ s'écrit de façon unique comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.
- Montrer que le produit de deux matrices triangulaires supérieures est triangulaire supérieure.
- Si A est une matrice inversible, montrer que A^T est inversible et que $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.
- Rappeler la méthode de Gauss-Jordan, à base d'opérations élémentaires, pour obtenir l'inverse d'une matrice inversible.
- Quand dit-on que deux matrices sont équivalentes ?
- Quand dit-on que deux matrices sont semblables ?
- Qu'appelle-t-on la trace d'une matrice carrée ? Montrer que deux matrices semblables ont même trace.

17.2 Fiches cahier de calcul

- Fiche 26 : Calcul matriciel.

18 Espaces vectoriels

18.1 Cours

- Donner la définition d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et quelques exemples classiques.
- Comment vérifie-t-on qu'une partie F d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel ?
- Qu'est-ce que le sous-espace vectoriel engendré par une partie $A \subset E$?
- Donner la définition d'une famille libre d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
- Donner la définition d'une famille génératrice d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
- Quand dit-on que deux sous-espaces vectoriels F et G d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel sont supplémentaires ?
- Qu'est-ce que la dimension d'un espace vectoriel ?
- Qu'est-ce que le rang d'une famille de vecteurs ?
- Écrire la formule de Grassmann pour la dimension d'une somme de deux sous-espaces vectoriels.
- Qu'est-ce qu'une base adaptée à un sous-espace vectoriel ?
- Quelle est la dimension de $\mathbb{K}_n[X]$, de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$?

18.2 Fiches cahier de calcul

- Fiche 15 : Systèmes linéaires

18.3 Autres exercices MPI*

Exercice 34. Soient F, G, F', G' des sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E vérifiant $F \oplus G = F' \oplus G' = E$ et $F' \subset G$. Montrer que $F \oplus F' \oplus (G \cap G') = E$.

Exercice 35. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $P_k = \dfrac{X(X-1)\dots(X-k+1)}{k!}$.

a) Montrer que la famille $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{Z}, \forall k \in \mathbb{N},\ P_k(x) \in \mathbb{Z}$

c) Trouver tous les polynômes P tels que : $\forall x \in \mathbb{Z}, P(x) \in \mathbb{Z}$

19 Applications linéaires, endomorphismes

19.1 Cours

- Donner la définition d'une application linéaire $f : E \to F$, E et F étant deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
- Donner la définition du noyau d'une application linéaire f, rappeler celle de son image.
- Comment le noyau caractérise-t-il l'injectivité ?
- Comment définit-t-on le rang d'une application linéaire f ?
- Énoncer le théorème du rang, et sa forme géométrique plus générale (en dimension quelconque).
- Qu'est-ce qu'un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E ?
- Donner la définition géométrique d'un projecteur, d'une symétrie (à partir de deux sous-espaces supplémentaires).
- Montrer que si E et F ont même dimension, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est injective si, et seulement si f est surjective.
- Donner la définition d'une forme linéaire.
- Donner deux définitions de la notion d'hyperplan (l'une géométrique, l'autre à partir d'une forme linéaire), et montrer l'équivalence des deux définitions.

19.2 Exercices CCINP

- Banque CCINP 2025 Exercice 71 algèbre
- Banque CCINP 2025 Exercice 64 algèbre

19.3 Fiches cahier de calcul

- Fiche 27 : Algèbre linéaire

19.4 Autres exercices MPI*

Exercice 36. Soient $p, q \in \mathcal{L}(E)$. Montrer l'équivalence entre les assertions :

(i) $p \circ q = p$ et $q \circ p = q$;

(ii) p et q sont des projecteurs de même noyau.

Exercice 37. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et p, q deux projecteurs de E qui commutent. Montrer que $p \circ q$ est un projecteur de E. En déterminer noyau et image.

20 Représentation matricielle

20.1 Cours

- Comment définit-on la matrice d'une famille de vecteurs dans une base $\mathcal{B}$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie ?
- Comment définit-on la matrice d'un endomorphime $f \in \mathcal{L}(E)$ dans une base $\mathcal{B}$ de E ?
- Comment définit-on la matrice de passage d'une base $\mathcal{B}$ à une base $\mathcal{B}'$.
- Que peut-on dire de deux matrices représentant le même endomorphisme dans deux bases différentes ? Ecrire la relation matricielle traduisant ce changement de bases.
- Comment définit-on la trace d'un endomorphisme en dimension finie ?

20.2 Exercices CCINP

- Banque CCINP 2025 Exercice 60 algèbre

21 Espaces préhilbertiens réels

21.1 Cours

- Définir ce qu'est un produit scalaire sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Présenter des exemples fondamentaux sur $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$.
- $\| \cdot \|$ étant la norme euclidienne associée à un produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$, développer $\|x + y\|^2$. Plus généralement, développer $\left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \right\|^2$.
- Écrire l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour deux vecteurs x et y d'un espace préhilbertien réel, et préciser une condition nécessaire et suffisante d'égalité.
- Si F et G sont deux sous-espace orthogonaux d'un espace préhilbertien réel, montrer que la somme $F + G$ est directe.
- Définir ce qu'est l'orthogonal $X^\perp$ d'une partie X d'un espace préhilbertien réel. A-t-on en général $F \oplus F^\perp = E$ pour un sous-espace vectoriel F ?
- Si $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ est une base orthonormale d'un sous-espace vectoriel F dans un espace préhilbertien réel E, expliciter le projeté orthogonal sur F d'un vecteur $x \in E$ à l'aide de $\mathcal{B}$.

- Commment définit-on la distance d'un vecteur x à un sous-espace vectoriel F ? Quel est le rapport avec la projection orthogonale ?

21.2 Exercices CCINP

- Banque CCINP 2025 Exercice 76 algèbre
- Banque CCINP 2025 Exercice 77 algèbre
- Banque CCINP 2025 Exercice 79 algèbre
- Banque CCINP 2025 Exercice 80 algèbre
- Banque CCINP 2025 Exercice 81 algèbre
- Banque CCINP 2025 Exercice 82 algèbre
- Banque CCINP 2025 Exercice 92 algèbre

21.3 Autres exercices MPI*

Exercice 38. Soit E un espace euclidien de dimension n. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda > 0$. On dit que f est une similitude de rapport λ si : $\forall\ \vec{x} \in E,\ \|f(\vec{x})\| = \lambda\|\vec{x}\|$.

a) Montrer que f est une similitude de rapport λ si et seulement si : $\forall\ \vec{x}, \vec{y} \in E,\ (f(\vec{x}) \mid f(\vec{y})) = \lambda^2(\vec{x} \mid \vec{y})$.

b) Caractériser les similitudes par leurs matrices dans une base orthonormée.

c) Montrer que f est une similitude si et seulement si f est non nulle et conserve l'orthogonalité, c'est à dire : $\forall\ \vec{x}, \vec{y} \in E,\ \vec{x} \perp \vec{y} \Rightarrow f(\vec{x}) \perp f(\vec{y})$.

Exercice 39. Soient E un espace euclidien et $p \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) p est un projecteur orthogonal

(ii) $p^2 = p$ et $\forall\, x \in E\,,\ \ \|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

Exercice 40. Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$, muni du produit scalaire $(\cdot|\cdot) : (f,g) \mapsto \displaystyle\int_0^1 fg$, et soit $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. Soit F le sous-espace des fonctions polynomiales. On admet le résultat suivant, corollaire du théorème de Weierstrass :

pour tout $f \in E$, il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de F telle que $\|f_n - f\| \to 0$

Déterminer l'orhogonal de F. Est-ce un supplémentaire de F ?

21.4 Fiches cahier de calcul

- Fiche 30 : Structures euclidiennes

22 Déterminant et polynôme caractéristique

22.1 Cours

- Comment définit-on le déterminant d'une matrice carré $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$? Donner une formule.
- Comment définit-on le déterminant d'un endomorphisme ?
- Comment définit-on le déterminant d'une famille de vecteurs relativement à une base ?
- Que veulent dire chacune des propriétés suivantes pour le déterminant d'une famille de vecteurs : forme multilinéaire, alternée, antisymétrique ?

- Donner la formule de développement suivant une ligne ou une colonne.
- Donner la définition du polynôme caractéristique d'une matrice, d'un endomorphisme en dimension finie.
- Si χ est le polynôme caractéristique d'un endomorphisme u, montrer que $\lambda \in \mathbb{K}$ est racine de χ si et seulement si $\mathrm{Ker}(u - \lambda Id) \neq \{0\}$.

22.2 Fiches cahier de calcul

- Fiche 32 : Déterminants

23 Éléments propre et diagonalisation

23.1 Cours

- Qu'appelle-t-on valeur propre et vecteur propre d'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ (E étant un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie) ? D'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$?
- Montrer que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de M si, et seulement si, λ est racine du polynôme caractéristique χ_M.
- Qu'appelle-t-on multiplicité d'une valeur propre ?
- Qu'est-ce que le sous-espace propre associé à une valeur propre ?
- Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont des valeurs propres 2 à 2 distinctes et $e_1, \ldots, e_p$ des vecteurs propres respectivement associés, montrer que la famille $(e_1, \ldots, e_p)$ est libre.
- Comparer la multiplicité d'une valeur propre et la dimension du sous-espace associé.
- Quand dit-on qu'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable ? Qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable ?
- Montrer que tout projecteur et toute symétrie d'un espace vectoriel E de dimension finie est diagonalisable.

23.2 Exercices CCINP

- Banque CCINP 2025 Exercice 59 algèbre
- Banque CCINP 2025 Exercice 67 algèbre
- Banque CCINP 2025 Exercice 69 algèbre
- Banque CCINP 2025 Exercice 70 algèbre
- Banque CCINP 2025 Exercice 72 algèbre
- Banque CCINP 2025 Exercice 73 algèbre
- Banque CCINP 2025 Exercice 83 algèbre