Probabilités et variables aléatoires discrètes

Lundi 10 novembre 2025

Table des matières

Table des matières

1. Prerequis : dénombrabilité et sommabilité

1.1. Ensembles dénombrables

1.1. Ensembles dénombrables

Definition 1

Soient deux ensembles quelconques E et F. On dit que E est *équipotent* à F lorsqu'il existe une application $\varphi : E \to F$ bijective.

Remarques :

- Notation $E \simeq F$?
- Relation d'équivalence ?
- $E \simeq [\![1, n]\!]$: E fini de cardinal n.

1.1. Ensembles dénombrables

Definition 2

On dit qu'un ensemble E est *dénombrable* lorsqu'il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \to E$ bijective.

Remarques :

- E dénombrable : $E \simeq \mathbb{N}$.
- On peut écrire $E = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$, les x_n 2 à 2 $\neq$.

Exemples :

- $2\mathbb{N} = \{2n, n \in \mathbb{N}\}$;
- $\{n^2, n \in \mathbb{N}\}$;
- L'ensemble des nombres premiers ?

1.1. Ensembles dénombrables

Proposition 1

a) Toute partie infinie de $\mathbb{N}$ est dénombrable.

b) Un ensemble E est fini ou dénombrable **ssi** il est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$.

Remarque :

"Au plus dénombrable" = fini ou dénombrable.

1.1. Ensembles dénombrables

Proposition 2

a) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable.

b) Pour $p \in \mathbb{N}^*$, si $E_1, \dots, E_p$ sont des ensembles dénombrables, alors $E_1 \times \cdots \times E_p$ est dénombrable.

c) Si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille dénombrable d'ensembles dénombrables, alors $\bigcup_{i \in I} A_i$ est dénombrable.

Remarque :

b) et **c)** vrais avec "au plus dénombrable" au lieu de "dénombrable".

1.1. Ensembles dénombrables

Corollaire 1

- $\mathbb{Z}$ est dénombrable
- $\mathbb{Q}$ est dénombrable
- $\mathbb{Q}[X]$ est dénombrable

Theoreme 1

$\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Remarques :

- Théorème de Cantor : pas de bijection entre E et $\mathcal{P}(E)$. On peut montrer $\mathbb{R} \simeq \mathcal{P}(\mathbb{N})$.
- Hypothèse du continu : pas d'*intermédiaire* entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$.

1.2. Sommation des familles positives

1.2. Sommation des familles positives

Définition 3

Dans $[0,+\infty] = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$:

a) $a + (+\infty) = +\infty + a = +\infty$ et $a \times (+\infty) = +\infty \times a = ?$

b) $a \leqslant \infty$ pour tout $a \in [0,+\infty[$.

c) Pour $A \subset [0,+\infty]$, $\sup(A) = ?$

Proposition 3

- $\leqslant$ est un ordre total sur $[0,+\infty]$
- $+$ est une *l.c.i.* associative et commutative compatible avec $\leqslant$.
- Toute partie non vide de $[0,+\infty]$ admet une borne supérieure dans $[0,+\infty]$.

1.2. Sommation des familles positives

Definition 4

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de $[0,+\infty]$, avec I un ensemble quelconque. On définit

$$\sum_{i\in I} u_i = \sup\left\{\sum_{i\in F} u_i \quad : \quad F\subset I,\ F \text{ fini}\right\}$$

Lorsque $\sum_{i\in I} u_i < +\infty$, on dit que la famille $(u_i)_{i\in I}$ est *sommable*.

Proposition 4

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de $[0,+\infty]$. Pour toute bijection $\sigma : I\to I$, on a :

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I} u_{\sigma(i)}$$

1.2. Sommation des familles positives

Proposition 5

Si $\sum u_n$ est une série positive, alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$$

Remarque :

Convention pour une série positive $\sum u_n$ divergente : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$.

Proposition 6

Soient $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ deux familles de $[0,+\infty]$, et $\lambda \in [0,+\infty]$. Alors :

- Si $u_i \leqslant v_i$ pour tout $i \in I$, on a $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i \leqslant \sum_{i\in I} v_i$.
- $\displaystyle\sum_{i\in I} \lambda u_i = \lambda \sum_{i\in I} u_i$.
- $\displaystyle\sum_{i\in I} (u_i + v_i) = \sum_{i\in I} u_i + \sum_{i\in I} v_i$

1.2. Sommation des familles positives

Definition 5

Pour $A \subset I$, on note $\mathbb{1}_A : i \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } i \in A \\ 0 \text{ si } i \notin A \end{cases}$. On l'appelle *fonction indicatrice de A* dans I.

Proposition 7

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de $[0, +\infty]$ et $A \subset I$. Alors

$$\sum_{i\in A} u_i = \sum_{i\in I} \mathbb{1}_A(i) u_i$$

1.2. Sommation des familles positives

Proposition 8

Soient $(u_i)_{i\in I}$ une famille de $[0,+\infty]$, et A, B deux parties non vides de I.

a) Si $A \subset B$, $\displaystyle\sum_{i\in A} u_i \leqslant \sum_{i\in B} u_i$.

b) Si $A \cap B = \varnothing$, $\displaystyle\sum_{i\in A\sqcup B} u_i = \sum_{i\in A} u_i + \sum_{i\in B} u_i$

Remarque :

Généralisation par récurrence du second point ?

Theoreme 2

(de sommation par paquets, cas positif)
Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de $[0,+\infty]$ et $(A_j)_{j\in J}$ une *partition* de I. Alors

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{j\in J}\sum_{i\in A_j} u_i$$

Remarque :

Cas classiques :

- $A_j = \{j\}\times\mathbb{N}$ ou $A_j = \mathbb{N}\times\{j\}$.
- $A_j = \{(n,k)\in\mathbb{N}^2 \mid n+k=j\}$.

Exercice 1

La famille $\left(\dfrac{1}{nk(n+k)}\right)_{(n,k)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est-elle sommable ?

Theoreme 3

(de Fubini, cas positif)
Soit deux ensembles I et J, et soit $(u_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille de $[0,+\infty]$. ALors :

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} u_{i,j} = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} u_{i,j}$$

Remarque :

Ces deux sommes sont égales à $\displaystyle\sum_{(i,j)\in I\times J} u_{i,j}$.

Exercice 2

étudier la nature de la série $\sum R_n$, avec $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$.

1.3. Sommabilité d'une famille réelle ou complexe

1.3. Sommabilité d'une famille réelle ou complexe

Definition 6

On dit qu'une famille $(u_i)_{i\in I}$ de $\mathbb{K}$ est *sommable* lorsque $\sum\limits_{i\in I} |u_i| < +\infty$.

On note $\ell^1(I)$ ou $\ell(I)$ l'ensemble des familles sommables indexées par I.

Remarques :

- Cas d'une famille positive ?
- Cas d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
- I dénombrable en général ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, ...)

Exercice 3

Montrer que le *support* J d'une famille sommable $(u_i)_{i\in I}$ de nombres complexes, c'est-à-dire l'ensemble $\{i \in I \mid u_i \neq 0\}$, est au plus dénombrable.

Definition 7

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $x^+ = \max(x, 0)$ et $x^- = \max(-x, 0)$.
x^+ et x^- s'appelle respectivement partie positive et négative de x.

Proposition 9

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$x^+ \geqslant 0 \quad , \quad x^- \geqslant 0 \quad , \quad x = x^+ - x^- \quad , \quad |x| = x^+ + x^-.$$

Definition 8

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille sommable réelle ou complexe. On définit la somme de cette famille par :

$$\sum_{i\in I} u_i = \left(\sum_{i\in I} \mathrm{Re}(u_i)^+ - \sum_{i\in I} \mathrm{Re}(u_i)^-\right) + i\left(\sum_{i\in I} \mathrm{Im}(u_i)^+ - \sum_{i\in I} \mathrm{Im}(u_i)^-\right)$$

Remarque :

Pour une famille non positive non sommable : somme non définie !

Proposition 10

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ réelle ou complexe est sommable **ssi** $\sum u_n$ est une série absolument convergente et on a alors :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

1.3. Sommabilité d'une famille réelle ou complexe

Proposition 11

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille sommable et $\varepsilon > 0$. Alors il existe une partie finie $F \subset I$ telle que :

$$\left| \sum_{i \in I} u_i - \sum_{i \in F} u_i \right| \leqslant \varepsilon$$

Proposition 12

Si $(u_i)_{i \in I}$ est une famille sommable et σ une permutation de I alors $(u_{\sigma(i)})_{i \in I}$ est sommable et

$$\sum_{i \in I} u_{\sigma(i)} = \sum_{i \in I} u_i$$

1.3. Sommabilité d'une famille réelle ou complexe

Proposition 13

a) Si $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ sont sommables, $(u_i+\lambda v_i)_{i\in I}$ est sommable et :

$$\sum_{i\in I}(u_i+\lambda v_i)=\sum_{i\in I}u_i+\lambda\sum_{i\in I}v_i$$

b) Si $(u_i)_{i\in I}$ est sommable, alors

$$\left|\sum_{i\in I}u_i\right|\leqslant\sum_{i\in I}|u_i|$$

Corollaire 2

$\ell^1(I)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^I$, et l'application $u\mapsto\sum_{i\in I}u_i$ est une forme linéaire continue sur l'espace vectoriel normé $(\ell^1(I),\|\cdot\|_1)$.

1.3. Sommabilité d'une famille réelle ou complexe

Theoreme 4

(de sommation par paquets)
Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille réelle ou complexe et $(A_j)_{j\in J}$ une *partition* de I. Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(i) la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable.

(ii) pour tout $j \in J$, $(u_i)_{i\in A_j}$ est sommable, et la famille $\left(\sum_{i\in A_j} |u_i|\right)_{j\in J}$ est sommable.

Ces conditions étant vérifiées, on a alors :

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{j\in J} \sum_{i\in A_j} u_i$$

Theoreme 5

(de Fubini)
Soit deux ensembles I et J, et soit $(u_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille réelle ou complexe. Les trois assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $(u_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ est sommable

(ii) Pour tout $i \in I$, la famille $(u_{i,j})_{j\in J}$ est sommable, et la famille $\left(\sum_{j\in J} |u_{i,j}|\right)_{i\in I}$ est sommable.

(iii) Pour tout $j \in J$, la famille $(u_{i,j})_{i\in I}$ est sommable, et la famille $\left(\sum_{i\in I} |u_{i,j}|\right)_{j\in J}$ est sommable.

Ces conditions étant vérifiées, on a :

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} u_{i,j} = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} u_{i,j} = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} u_{i,j}$$

1.3. Sommabilité d'une famille réelle ou complexe

Proposition 14

Soient $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_j)_{j\in J}$ deux familles sommables. Alors $(u_i v_j)_{(i,j)\in I\times J}$ est sommable et

$$\left(\sum_{i\in I} u_i\right)\left(\sum_{j\in J} v_j\right) = \sum_{(i,j)\in I\times J} u_i v_j$$

Remarque :

Généralisation à un produit fini de familles sommables :

$$\prod_{k=1}^{p}\left(\sum_{i_k\in I_k} u_{k,i_k}\right) = \sum_{(i_1,\dots,i_k)\in I_1\times\cdots\times I_k} u_{1,i_1}\cdots u_{p,i_p}$$

1.3. Sommabilité d'une famille réelle ou complexe

Proposition 15

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes, leur produit de Cauchy $\sum w_n$ est une série absolument convergente, et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$$

Remarque :

Rappel : $w_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$.

Table des matières

2. Cadre théorique

2.1. Tribu sur un ensemble

2.1. Tribu sur un ensemble

Définition 9

On appelle *tribu* sur un ensemble Ω toute partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ vérifiant :

a) $\Omega \in \mathcal{A}$,

b) $\forall A \in \mathcal{A},\ \overline{A} = \Omega \backslash A \in \mathcal{A}$.

c) $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}},\ \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

$(\Omega, \mathcal{A})$ est alors un *espace probabilisable*.

Remarques :

- nécessairement $\varnothing \in \mathcal{A}$
- **c)** vrai aussi pour une réunion finie.

2.1. Tribu sur un ensemble

Exemples :

- Tribu triviale $\{\varnothing, \Omega\}$
- Tribu pleine $\mathcal{P}(\Omega)$
- Tribu *engendrée* par $A \subset \Omega$: $\{\Omega, \varnothing, A, \overline{A}\}$.
- Tribu engendrée par deux parties $A, B \subset \Omega$?

Proposition 16

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable. Alors pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{A}$, $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

2.1. Tribu sur un ensemble

Remarques :

- Ω est l'*univers* et $\mathcal{A}$ la *tribu des événements*. $\{\omega\} \in \mathcal{A}$ est un *événement élémentaire*.
- Terminologie probabiliste / ensembliste.
  - "*non* A" : $\overline{A} = \Omega \backslash A$ *événement contraire*
  - "A *ou* B" : $A \cup B$;
  - "A *et* B" : $A \cap B$;
  - "A implique B" : $A \subset B$;
- Généralisation à des suites :
  - "$\exists n \in \mathbb{N}, A_n$" : $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$;
  - "$\forall n \in \mathbb{N}, A_n$" : $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$.
- $\varnothing$: événement impossible, Ω : événement certain.

Exercice 4

Soit Ω un ensemble infini et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de parties de Ω réalisant une *partition* de Ω :

$$n \neq m \Rightarrow A_n \cap A_m = \varnothing \text{ et } \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \Omega$$

On pose

$$\mathcal{A} = \left\{ \bigcup_{n\in T} A_n \;\middle|\; T \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \right\}$$

a) Montrer que $\mathcal{A}$ est une tribu de Ω.

b) On suppose l'ensemble Ω dénombrable. Montrer que toute tribu infinie sur Ω est de la forme ci-dessus pour une certaine famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

c) Existe-t-il des tribus dénombrables ?

2.2. Espace probabilisé

2.2. Espace probabilisé

Definition 10

Si Ω est un ensemble et $\mathcal{A}$ une tribu sur Ω, on appelle *probabilité* sur $(\Omega, \mathcal{A})$ une application $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to [0,1]$ vérifiant :

a) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

b) Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements deux à deux incompatibles,

$$\mathbb{P}\left(\bigsqcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est alors appelé *espace probabilisé*.

Remarque :

b) : *additivité dénombrable.*

2.2. Espace probabilisé

Proposition 17

Soit $\mathbb{P}$ une probabilité sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$. On a alors les propriétés suivantes :

a) $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$.

b) Pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$

c) Pour toute famille finie $(A_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ d'événements deux à deux incompatibles,

$$\mathbb{P}\left(\bigsqcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k) \qquad \textit{(additivité finie)}$$

d) Pour $A, B \in \mathcal{A}$, on a $A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$ *(croissance)*

2.2. Espace probabilisé

Proposition 18

(formule de Grassmann) Pour $A, B \in \mathcal{A}$,
$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

Remarques :

- Cas général : *formule du crible.*
- Conséquence : $\mathbb{P}(A \cup B) \leqslant \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

Corollaire 3

(sous-additivité finie) Pour toute famille finie $(A_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ d'événements, on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) \leqslant \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(A_k)$$

Proposition 19

(continuité croissante et décroissante)

- si $(A_n)_n$ est croissante, alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

- si $(A_n)_n$ est décroissante, alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

Remarque :

$(A_n)_n$ croissante signifie $A_n \subset A_{n+1}$ pour tout n

2.2. Espace probabilisé

Remarque :

Plus généralement pour $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quelconque :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right)$$

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right)$$

Corollaire 4

(sous-additivité dénombrable)

Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements, on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

2.2. Espace probabilisé

Definition 11

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $A \in \mathcal{A}$.

- On dit que A est un événement *négligeable* lorsque $\mathbb{P}(A) = 0$.
- On dit que A est un événement *presque sûr* lorsque $\mathbb{P}(A) = 1$.

Remarque :

Attntion $A = \varnothing \Rightarrow \mathbb{P}(A) = 0$ mais réciproque fausse !

Proposition 20

- Toute réunion au plus dénombrable d'événements négligeables est un événement négligeable.
- Toute intersection au plus dénombrable d'événements presque sûrs est un événement presque sûr.

2.2. Espace probabilisé

Definition 12

Une famille $(A_i)_{i\in I}$ au plus dénombrable d'événements est un système :

- *complet* lorsqu'elle réalise une partition de Ω.
- *quasi-complet* lorsque les A_i sont deux à deux incompatibles et $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = 1$.

Remarque :

Cas quasi-complet : "Aucun A_i réalisé" pas impossible mais négligeable..

2.3. Variable aléatoire discrète

2.3. Variable aléatoire discrète

Definition 13

On appelle *variable aléatoire discrète* sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans un ensemble E toute application $X : \Omega \to E$ vérifiant :

- $X(\Omega)$ est au plus dénombrable
- pour tout $x \in X(\Omega)$, $X^{-1}(\{x\}) \in \mathcal{A}$.

Proposition 21

Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A})$. Pour toute partie $U \subset X(\Omega)$, on a $X^{-1}(U) \in \mathcal{A}$.

Remarque :

Reste vrai pour tout $U \subset E$.

2.3. Variable aléatoire discrète

Remarque :

Notations :

- $\{X \in U\}$ ou $(X \in U)$ au lieu de $X^{-1}(U)$
- $\{X = x\}$ ou $(X = x)$ au lieu de $X^{-1}(\{x\})$.
- Si $E = \mathbb{R}$: $\{X \leqslant x\}$, $\{x > x\}$, etc ...

2.4. Loi d'une variable aléatoire discrète

Definition 14

Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On appelle *loi de probabilité* de X la fonction $\mathbb{P}_X : \mathcal{P}\big(X(\Omega)\big) \to [0,1]$ définie par :

$$\forall U \subset X(\Omega)\,,\ \ \mathbb{P}_X(U) = \mathbb{P}(X \in U) = \mathbb{P}\big(X^{-1}(U)\big).$$

Remarque :

$\mathbb{P}_X$ plus généralement définie sur $\mathcal{P}(E)$.

Exemple :

$X : \Omega \to \mathbb{R}$ avec $X(\Omega) = \mathbb{Z}$: $\mathbb{P}_X(U) = \displaystyle\sum_{n \in U \cap \mathbb{Z}} \mathbb{P}(X = n)$.

2.4. Loi d'une variable aléatoire discrète

Proposition 22

Pour toute variable aléatoire discrète X sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$:

a) la loi de X est uniquement déterminée par la famille $\big(\mathbb{P}(X = x)\big)_{x \in X(\Omega)}$.

b) $\mathbb{P}_X$ définit une probabilité sur l'espace probabilisable $\big(X(\Omega), \mathcal{P}(X(\Omega))\big)$.

Remarques :

- $\big(\mathbb{P}(X = x)\big)_{x \in X(\Omega)}$ est une *distribution de probabilité discrète*
- Définir $\mathbb{P}_X$ revient à donner $\mathbb{P}(X = x)$ pour tout x.
- $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$ **ssi** $X(\Omega) = Y(\Omega)$ et $\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(Y = x)$, $\forall x$. On note $X \sim Y$.

Définition 15

Lois usuelles

- **Loi uniforme** $X \sim \mathcal{U}(E)$: $\forall x \in E,\ P(X = x) = \dfrac{1}{n}$. .
- **Loi de Bernoulli** $X \sim \mathcal{B}(p)$: $\mathbb{P}(X = 1) = p$ et $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$.
- **Loi Binomiale** $X \sim \mathcal{B}(n, p)$:
  $\forall k \in [\![0, n]\!],\ \mathbb{P}(X = k) = \dbinom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$.
- **Loi géométrique** $X \sim \mathcal{G}(p)$:
  $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X = k) = (1 - p)^{k-1} p$.
- **Loi de Poisson** $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$: $\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X = k) = \dfrac{\lambda^k}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda}$.

2.5. Fonction d'une variable aléatoire

2.5. Fonction d'une variable aléatoire

Proposition 23

Si X est une *v.a.d* à valeurs dans E et $f : E \to F$, alors $f(X)$ est une *v.a.d* à valeurs dans F. De plus :

a) La loi de $f(X)$ est uniquement déterminée par f et par $\big(\mathbb{P}(X = x)\big)_{x \in X(\Omega)}$.

b) Si $X \sim Y$, alors $f(X) \sim f(Y)$.

Remarques :

- Notation $f(X)$ pour $f \circ X$!
- $\displaystyle \mathbb{P}(f(X) = y) = \sum_{f(x)=y} \mathbb{P}(X = x)$.

Exemple :

Pour $X \sim \mathcal{U}(\{-1, 0, 1\})$, loi de X^2 ?

Table des matières

3. Conditionnement et indépendance

3.1. Probabilité conditionnelle.

3.1. Probabilité conditionnelle.

Definition 16

Soient $A, B \in \mathcal{A}$ deux événements tels que $\mathbb{P}(B) > 0$. On appelle *probabilité conditionnelle* de A sachant B le réel

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

On la note habituellement $\mathbb{P}(A \mid B)$.

Proposition 24

Un événement $B \in \mathcal{A}$ tel que $\mathbb{P}(B) > 0$ étant fixé, l'application $\mathbb{P}_B : A \mapsto \mathbb{P}(A \mid B)$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Proposition 25

(formule des probabilités composées) Soit $A_1, \ldots, A_n$ des événements tels que $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) > 0$. On a alors :
$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\cdots\mathbb{P}(A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})$.

Exercice 5

Dans une urne contenant n boules noires et n boules blanches, on pioche successivement sans remise. Quelle est la probabilité de vider l'urne en alternant parfaitement les couleurs.

3.1. Probabilité conditionnelle.

Definition 17

Si X est une variable aléatoire discrète et A un événement tel que $\mathbb{P}(A) > 0$, l'application $U \mapsto \mathbb{P}(X \in U \mid A)$, définie sur $\mathcal{P}\big(X(\Omega)\big)$, s'appelle *loi de X conditionnellement* à l'événement A.

Remarque :

Elle est déterminée par $\big(\mathbb{P}(X = x \mid A)\big)_{x \in X(\Omega)}$.

3.2. Formule des probabilités totales et de Bayes

Theoreme 6

(formule des probabilités totales) Soit $(A_i)_{i\in I}$ un système quasi-complet d'événements, tels que $\mathbb{P}(A_i) > 0$ pour tout $i \in I$. On a alors, pour tout événement B :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(B \cap A_i) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i).$$

Remarques :

- Encore valide si certains A_i sont négligeables : convention $\mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i) = 0$.
- En pratique $I = [\![1, n]\!]$, ou $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{N}^2$, ...

Proposition 26

(formule de Bayes) Soient deux événements A et B de probabilité non nulle. Alors

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$$

Theoreme 7

(théorème de Bayes)

Soit $(A_i)_{i\in I}$ un sytème quasi-complet d'événements. On a alors, pour tout événement $B \in \mathcal{A}$ de probabilité non nulle, et pour tout $k \in I$:

$$\mathbb{P}(A_k|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A_k)\mathbb{P}(A_k)}{\sum_{i\in I}\mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)}.$$

Exercice 6

Un test de dépistage pour un certain type rare de cancer, touchant en moyenne $0,01\%$ de la population, a un taux de fiabilité de 99%, à la fois pour les personnes atteintes et non atteintes. En cas de résultat positif au test pour une personne prise au hasard, quelle est la probabilité qu'elle soit atteinte ?

3.3. Indépendance d'événements

3.3. Indépendance d'événements

Definition 18

Soient A et B deux événements. On dit qu'ils sont *indépendants* lorsque $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

Remarque :

Ne pas confondre incompatibilité et indépendance ! !

Proposition 27

On suppose $\mathbb{P}(B) > 0$. A et B sont indépendants si, et seulement si, $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$.

Proposition 28

Supposons que A et B sont indépendants. Alors :

a) $\overline{A}$ et B sont indépendants

b) A et $\overline{B}$ sont indépendants

c) $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

Definition 19

On dit que $(A_i)_{i\in I}$ est une famille d'événements *(mutuellement) indépendants* lorsque pour toute partie finie $F \subset I$:

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in F} A_i\right) = \prod_{i\in F} \mathbb{P}(A_i).$$

Remarque :

L'indépendance 2 à 2 n'implique pas l'indépendance (mutuelle).

3.4. Loi conjointe et lois marginales d'un couple.

3.4. Loi conjointe et lois marginales d'un couple.

Proposition 29

Soit X et Y deux *v.a.d.* sur $(\Omega, \mathcal{A})$. L'application (X, Y) définie sur Ω par :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad (X, Y)(\omega) = \big(X(\omega), Y(\omega)\big).$$

est une *v.a.d.* sur $(\Omega, \mathcal{A})$, et à valeurs dans $X(\Omega) \times Y(\Omega)$.

Remarque :

l'événement $(X, Y)^{-1}(\{(x, y)\}) = X^{-1}(\{x\}) \cap Y^{-1}(\{y\})$ est noté $\{X = x, Y = y\}$ et sa probabilité $\mathbb{P}(X = x, Y = y)$.

Definition 20

On appelle *loi conjointe* de (X, Y) la loi de probabilité du couple (X, Y) en tant que *v.a.d.* sur Ω.
Les lois de X et Y sont appelées *lois marginales* de (X, Y).

3.4. Loi conjointe et lois marginales d'un couple.

Proposition 30

Si X et Y deux *v.a.d.* sur Ω, on a :

$$P(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P(X = x, Y = y)$$

$$P(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x, Y = y)$$

Remarques :

- Procédé de *marginalisation*.
- Les lois marginales ne suffisent pas pour retrouver la loi conjointe.
- Généralisation à un n-uplet $(X_1, \ldots, X_n)$

3.5. Indépendance de deux variables aléatoires discrètes

3.5. Indépendance de deux variables aléatoires discrètes

Definition 21

On dit que deux *v.a.d.* X et Y sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sont *indépendantes* lorsque pour tout $U \subset X(\Omega)$ et tout $V \subset Y(\Omega)$, les événements $\{X \in U\}$ et $\{Y \in V\}$ sont indépendants. On note alors $X \perp\!\!\!\perp Y$.

Proposition 31

X et Y sont indépendantes **ssi** pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$:

$$\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x)P(Y = y).$$

Corollaire 5

Si $X \perp\!\!\!\perp Y$, la loi conjointe de (X, Y) est uniquement déterminée par les lois marginales de X et Y.

3.5. Indépendance de deux variables aléatoires discrètes

Proposition 32

Si X et Y sont deux *v.a.d.* indépendantes, alors pour toutes fonctions f et g définies sur $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ respectivement, on a $f(X) \perp\!\!\!\perp g(Y)$.

Proposition 33

Soient deux *v.a.d.* X et Y. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) X et Y sont indépendantes

(ii) pour tout $x \in X(\Omega)$ et tout $y \in Y(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(Y = y) > 0$, on a $\mathbb{P}(X = x | Y = y) = \mathbb{P}(X = x)$

3.5. Indépendance de deux variables aléatoires discrètes

Definition 22

On dit que les *v.a.d.* $X_1, \ldots, X_n$ sont (mutuellement) indépendantes lorsque pour tout $(U_1, \ldots, U_n) \in \mathcal{P}(X_1(\Omega)) \times \cdots \times \mathcal{P}(X_n(\Omega))$, $\left(\{X_i \in U_i\}\right)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une famille d'événements (mutuellement) indépendants.

Exercice 7

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $X \sim Y \sim \mathcal{B}(1/2)$, et soit $Z = X + Y \mod 2$. Étudier l'indépendance de X, Y, Z.

Proposition 34

$X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes **ssi** :

$$\forall (x_i) \in (X_i(\Omega)), \quad \mathbb{P}(X_1 = x_1, \cdots, X_n = x_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = x_i)$$

Proposition 35

(lemme des coalitions) Soient $n \geqslant 2$ variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ indépendantes, soit $m \in [\![1, n-1]\!]$, et soient deux applications :

$$f : \prod_{k=1}^{m} X_k(\Omega) \to E, \qquad g : \prod_{k=m+1}^{n} X_k(\Omega) \to F$$

Alors $f(X_1, \ldots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \ldots, X_n)$ sont indépendantes.

Remarque :

Généralisation à p coalitions ...

3.5. Indépendance de deux variables aléatoires discrètes

Definition 23

On dit qu'une famille $(X_i)_{i\in I}$ de *v.a.d.* est une famille de variables *indépendantes* lorsque pour toute partie finie $F \subset I$, $(X_i)_{i\in F}$ est une famille finie de variables indépendantes.

Definition 24

On dit que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de *v.a.d. indépendantes identiquement distribuées*, ce qu'on note *i.i.d* lorsque les X_n sont indépendantes et suivent toutes la même loi.

Exemple :

$X_n \sim \mathcal{B}(p)$: pile ou face infini.

Table des matières

4. Espérance et variance, compléments sur les variables aléatoires

4.1. Espérance

4.1. Espérance

Definition 25

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $[0,+\infty]$. On appelle *espérance* de X l'élément de $[0,+\infty]$ défini par :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X = x)$$

Remarques :

- $\mathbb{E}(X) < +\infty$ **ssi** $\left(x\mathbb{P}(X = x)\right)_{x \in X(\Omega)}$ est sommable.
- $\mathbb{P}(X = +\infty) > 0 \Rightarrow \mathbb{E}(X) = +\infty$. Réciproque fausse.

Exemples :

- $\mathbb{P}(X = n) = \dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$
- $\mathbb{P}(X = n) = \dfrac{1}{n(n+1)}$

4.1. Espérance

Proposition 36

Si X est à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, on a :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geqslant n)$$

Definition 26

Soit X une *v.a.d.* réelle ou complexe. On dit que X est d'*espérance finie* lorsque la famille $\big(x\mathbb{P}(X = x)\big)_{x \in X(\Omega)}$ est sommable. L'espérance est alors définie par :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X = x)$$

Remarques :

- $X(\Omega)$ fini $\Rightarrow$ espérance de X finie.
- Si $X(\Omega) = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ dénombrable, l'espérance est finie **ssi** $\sum x_n\mathbb{P}(X = x_n)$ absolument convergente.
- Notation $X \in L^1$.

4.2. Espérance des lois classiques, Propriétés de l'espérance

Proposition 37

(espérances classiques)

- Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, $\mathbb{E}(X) = np$.
- Si $X \sim \mathcal{G}(p)$, $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{p}$.
- Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $\mathbb{E}(X) = \lambda$.

Theoreme 8

(formule de transfert)

Soit X une *v.a.d.* sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, et soit $f : X(\Omega) \to \mathbb{R}$. Alors $f(X)$ est d'espérance finie **ssi** la famille $(f(x)\mathbb{P}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable. On a dans ce cas :

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)\mathbb{P}(X = x)$$

4.2. Espérance des lois classiques, Propriétés de l'espérance

Proposition 38

Soient X et Y deux *v.a.d.* réelles ou complexes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ d'espérances finies. Alors :

- *linéarité* : $\forall \lambda \in \mathbb{C},\ X + \lambda Y \in L^2$ et $\mathbb{E}(X + \lambda Y) = \mathbb{E}(X) + \lambda \mathbb{E}(Y)$.
- *Positivité* : $X \geqslant 0 \Rightarrow \mathbb{E}(X) \geqslant 0$
- *Croissance* : si X et Y réelles, $X \leqslant Y \Rightarrow \mathbb{E}(X) \leqslant \mathbb{E}(Y)$.
- *Inégalité triangulaire* : $\big|\mathbb{E}(X)\big| \leqslant \mathbb{E}\big(|X|\big)$

Remarque :

Attention : $\mathbb{P}(X + Y = n) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k, Y = n - k)$ (pour des *v.a.d.* à valeurs dans $\mathbb{N}$)

Proposition 39

Soit X une *v.a.d.* réelle ou complexe. On a :

a) $X \in L^1$ **ssi** $\mathbb{E}(|X|) < +\infty$.

b) Si $|X| \leqslant Y$ pour une *v.a.d.* positive $Y \in L^1$, alors $X \in L^1$.

4.2. Espérance des lois classiques, Propriétés de l'espérance

Definition 27

On dit qu'une *v.a.d.* d'espérance finie est *centrée* lorsque $\mathbb{E}(X) = 0$.

Proposition 40

Si X est d'espérance finie, la *v.a.d.* $X - \mathbb{E}(X)$ est centrée.

Proposition 41

Si X est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, on a $\mathbb{E}(X) = 0$ **ssi** l'événement $\mathbb{P}(X \neq 0)$ est négligeable.

4.2. Espérance des lois classiques, Propriétés de l'espérance

Proposition 42

(Espérance d'un produit) Soient X et Y deux *v.a.d.* réelles ou complexes. Si X et Y sont dans L^1 et indépendantes, alors $XY \in L^1$ et :

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

Remarques :

- Si $X, Y \in L^1$ pas indépendantes, on peut avoir $XY \notin L^1$.
- $XY \in L^1$ et $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ n'implique pas $X \perp\!\!\!\perp Y$!
- Généralisation à n variables ?

4.3. Variance, écart-type

Proposition 43

Si X une *v.a.d.* réelle vérifiant $\mathbb{E}(X^2) < +\infty$, alors $X \in L^1$.

Remarques :

- Notation $X \in L^2$ pour $X^2 \in L^1$.
- On a donc $X \in L^2 \Rightarrow X \in L^1$

Proposition 44

(inégalité de Cauchy-Schwarz)
Si X et Y sont deux *v.a.d.* réelles dans L^2 alors $XY \in L^1$ et

$$\mathbb{E}(XY)^2 \leqslant \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)$$

De plus, il y a égalité **ssi** il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{P}(Y = \lambda X) = 1$

Remarque :

Cas d'égalité : $Y = \lambda X$ *presque sûrement*.

4.3. Variance, écart-type

Definition 28

Pour $X \in L^2$, on appelle *variance* de X le réel :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\big((X - \mathbb{E}(X))^2\big)$$

On appelle *écart-type* de X le réel :

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}.$$

4.4. Propriétés, variances des lois classiques

4.4. Propriétés, variances des lois classiques

Proposition 45

Pour $X \in L^2$ on a $\mathbb{V}(X) = 0$ **ssi** $\mathbb{P}(X = \mathbb{E}(X)) = 1$.

Remarque :

X *presque sûrement* constante.

Proposition 46

(formule de König-Huygens) Pour $X \in L^2$, on a :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \big(\mathbb{E}(X)\big)^2$$

4.4. Propriétés, variances des lois classiques

Proposition 47

Si $X \in L^2$ et $a, b \in \mathbb{R}$, alors $aX + b \in L^2$ et $\mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(X)$

Definition 29

On dit qu'une *v.a.d.* réelle $X \in L^2$ est *réduite* lorsque $\sigma(X) = 1$.

Proposition 48

Si $\sigma(X) > 0$, la variable aléatoire $\dfrac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.

4.4. Propriétés, variances des lois classiques

Proposition 49

(Variances classiques)

- Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, $\mathbb{V}(X) = np(1-p)$.
- Si $X \sim \mathcal{G}(p)$, $\mathbb{V}(X) = \dfrac{1-p}{p^2}$
- Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $\mathbb{V}(X) = \lambda$

4.5. Covariance de deux variables

4.5. Covariance de deux variables

Definition 30

Soient X et Y deux *v.a.d.* réelles telles que $X, Y \in L^2$. On appelle *covariance* de X et Y le réel :

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}\big((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))\big).$$

Si $Cov(X, Y) = 0$, on dit que X et Y sont *décorrélées*

Remarques :

- Interprétation $\mathrm{Cov}(X, Y) > 0$ et $\mathrm{Cov}(X, Y) < 0$?
- *Coefficient de corrélation* : $\rho(X, Y) = \dfrac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$.

4.5. Covariance de deux variables

Proposition 50

(formule de König-Huygens) Pour $X, Y \in L^2$, on a :

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

Corollaire 6

Si X et Y sont indépendantes, alors X et Y sont décorrélées.

Remarque :

Réciproque fausse.

Exemple :

$$\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(Y = -1) = \mathbb{P}(Y = 1) = \frac{1}{2}.$$

Indépendance de X et $Z = XY$ et $\mathrm{Cov}(X, Y)$?

Proposition 51

Si $X, Y \in L^2$, on a :

$$\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + 2\mathrm{Cov}(X,Y) + \mathbb{V}(Y)$$

Remarque :

Plus généralement,
$\mathbb{V}(aX+bY) = a^2\mathbb{V}(X) + 2ab\mathrm{Cov}(X,Y) + b^2\mathbb{V}(Y)$.

4.5. Covariance de deux variables

Corollaire 7

Si X et Y sont indépendantes, alors $\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$.

Remarques :

- Réciproque fausse !
- Toujours $\left|\mathrm{Cov}(X,Y)\right| \leqslant \sigma(X)\sigma(Y)$.

Exercice 8

Montrer cette majoration et donner une condition nécessaire et suffisante d'égalité.

4.5. Covariance de deux variables

Proposition 52

Soit $(X_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille finie de variables aléatoires réelles discrètes dans L^2. Alors :

$$\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(X_i) + 2\sum_{\substack{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2 \\ i<j}} \mathrm{Cov}(X_i, X_j).$$

Corollaire 8

Soit $(X_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille finie de *v.a.d.* réelles dans L^2, et *deux à deux* décorrélées. Alors :

$$\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(X_i).$$

4.6. Inégalités probabilistes et applications

4.6. Inégalités probabilistes et applications

Proposition 53

(inégalités de Markov)
Soit X une *v.a.d.* réelle dans L^2. Pour tout $t > 0$:

$$P\big(|X| \geqslant t\big) \leqslant \frac{\mathbb{E}\big(|X|\big)}{t} \qquad \text{et} \qquad P\big(|X| \geqslant t\big) \leqslant \frac{\mathbb{E}\big(|X|^2\big)}{t^2}$$

Proposition 54

(inégalité de Bienaymé-Tchebychev)
Soit X une *v.a.d.* réelle dans L^2. Alors

$$\forall\, \varepsilon > 0\,,\ \ P\big(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon\big) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}.$$

Remarque :

Variance : mesure de *dispersion*.

Proposition 55

(loi faible des grands nombres)
Soient $(X_n)_n$ une suite de *v.a.d.* réelles i.i.d, dans L^2 et d'espérance m. Soient $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ pour tout $n \geqslant 1$. Alors on a pour tout $\varepsilon > 0$:

$$P\left(\left|\frac{1}{n}S_n - m\right| \geqslant \varepsilon\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Remarque :

Justification de l'approche fréquentiste.

4.7. Fonctions génératrices

4.7. Fonctions génératrices

Definition 31

Soit X une *v.a.d.* à valeurs dans $\mathbb{N}$. On appelle *série génératrice* de X la série entière réelle $\sum a_n x^n$, avec $a_n = \mathbb{P}(X = n)$. On note G_X la somme de cette série et on l'appelle *fonction génératrice* de X :

$$G_X(t) = \mathbb{E}(t^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) t^n.$$

Proposition 56

La série génératrice de X converge normalement sur $D_f(0,1)$, d'où :

- le rayon R de convergence vérifie $R \geqslant 1$
- G_X est définie continue sur $[-1,1]$ (au moins).

Remarque :

Cas $X(\Omega)$ fini ou presque fini ?

4.7. Fonctions génératrices

Proposition 57

Soient X et Y deux *v.a.d.* à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que $G_X = G_Y$ au voisinage de 0. Alors $X \sim Y$.

Remarques :

- Résulte de l'unicité d'un DSE !
- On dit que la la fonction génératrice caractérise la loi.

Proposition 58

Soit X une *v.a.d.* dans $\mathbb{N}$ et G_X sa fonction génératrice. Alors $X \in L^1$ **ssi** G_X est dérivable à gauche en 1 et on a dans ce cas

$$\mathbb{E}(X) = G_X'(1).$$

Démonstration :

- Supposons $X \in L^1$, donc que $\sum n\mathbb{P}(X = n)$ converge. Cela implique que la série entière $\sum n\mathbb{P}(X = n)t^{n-1}$ converge normalement, donc uniformément, sur $[-1, 1]$. Comme il s'agit de la série dérivée de la série génératrice $\sum \mathbb{P}(X = n)t^n$, on peut appliquer le théorème de dérivation d'une somme de série de fonctions : G_X est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-1, 1]$, avec

$$\forall t \in [-1, 1], \quad G_X'(t) = \sum n\mathbb{P}(X = n)t^{n-1}$$

En particulier, G_X est dérivable à gauche en 1, et $G_X'(1) = \mathbb{E}(X)$.
- Supposons que G_X est dérivable à gauche en 1. Pour $t \in [0, 1[$, on a

4.7. Fonctions génératrices

Proposition 59

Soit X une *v.a.d.* à valeurs dans $\mathbb{N}$ et G_X sa fonction génératrice. Alors $X \in L^2$, si et seulement si G_X est deux fois dérivable en 1 et on a dans ce cas :

$$\mathbb{E}(X^2) = G_X''(1) + G_X'(1).$$

Corollaire 9

Si X^2 est d'espérance finie, on a :

$$\mathbb{V}(X) = G_X''(1) + G_X'(1)\big(1 - G_X'(1)\big).$$

Remarque :

À retrouver rapidement !

Proposition 60

Soient X et Y deux *v.a.d.* indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour tout $t \in [-1, 1]$:

$$G_{X+Y}(t) = G_X(t) G_Y(t).$$

Remarque :

Généralisation à n variables ?

Proposition 61

- Pour $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ et $q = 1 - p$, $G_X(t) = (q + pt)^n$
- Pour $X \sim \mathcal{G}(p)$ et $q = 1 - p$, $G_X(t) = \dfrac{pt}{1 - qt}$.
- Pour $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $G_X(t) = \mathrm{e}^{\lambda(t-1)}$.

4.8. Compléments

Proposition 62

(la loi géométrique est sans mémoire)
Soit X une *v.a.d.* à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Alors X suit une loi géométrique **ssi** pour tout $(n, k) \in \mathbb{N}^2$:

$$P(X = n + k \,|\, X > n) = P(X = k).$$

Proposition 63

(la loi de Poisson approche la loi Binomiale)
Soit $(X_n)_n$ une suite de *v.a.d.* telle que $X_n \sim \mathcal{B}(n, p_n)$, avec $np_n \to \lambda$. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n \to +\infty} P(X_n = k) = \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Remarque :

Loi des événements rares.

Exemple :

Désintégration en moyenne de λ noyaux d'atomes parmi N ?