Fiche d'exercices n$^{\text{o}}$ 3

Espaces vectoriels normés

Exercice 1.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On dit qu'une application $E \to \mathbb{R}^+$ est une *semi-norme* lorsqu'elle vérifie les propriétés d'homogénéité et d'inégalité triangulaire (mais pas nécessairement celle de séparation)

a) Si $\varphi : E \to \mathbb{R}$ est une forme linéaire, montrer que l'application $x \mapsto |\varphi(x)|$ est une semi-norme sur E.

b) Montrer que si $s_1, \ldots, s_p$ sont des semi-normes sur E, alors l'application $x \mapsto \sup\big(s_1(x), \ldots, s_p(x)\big)$ est une semi-norme sur E.

c) Soit $(\varphi_1, \ldots, \varphi_p)$ une famille de formes linéaires sur E. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que l'application $x \mapsto \sup\big(|\varphi_1(x)|, \ldots, |\varphi_p(x)|\big)$ soit une norme.

Exercice 2.

On note $E = \mathbb{K}^{\mathbb{N}} = \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ l'espace vectoriel des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$. En vous inspirant des normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, et $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{K}^p$, proposez des applications analogues sur certains sous-espaces (à définir) de E, et vérifiez qu'il s'agit bien de normes.

Exercice 3. ⋆

Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on admet que l'application $\|\cdot\|_p : x \mapsto \left(\sum_{k=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ définit une norme sur $\mathbb{K}^n$.

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{K}^n$, $\|x\|_p \xrightarrow[p \to +\infty]{} \|x\|_\infty$.

Exercice 4. ⋆

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose $\|P\|_A = \sup_{x \in A} |P(x)|$. Quelle(s) condition(s) A doit-elle satisfaire pour que l'on obtienne ainsi une norme $\|\cdot\|_A$ sur $\mathbb{R}[X]$?

Exercice 5.

Lorsque A est une partie bornée non vide d'un espace normé (E, N), on introduit le *diametre* de A par :

$$\delta(A) = \sup_{(x,y) \in A^2} N(y - x)$$

Soient A et B deux parties bornées et non vides de E.

a) Justifier l'existence de la borne supérieure définissant $\delta(A)$

b) Établir

$$A \subset B \Rightarrow \delta(A) \leqslant \delta(B)$$

c) On suppose de plus $A \cap B \neq \varnothing$. Montrer

$$\delta(A \cap B) \leqslant \delta(A) + \delta(B)$$

Exercice 6. ⋆

Soit $E = \mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid (a,b) \in \mathbb{Q}^2\}$.

a) Montrer que E est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension 2.

b) Montrer que les applications

$$a + b\sqrt{2} \mapsto |a| + |b| \qquad \text{et} \quad a + b\sqrt{2} \mapsto \left|a + b\sqrt{2}\right|$$

définissent deux normes sur E.

c) À l'aide de $u_n = \left(1 + \sqrt{2}\right)^n$, montrer qu'elles ne sont pas équivalentes.

Exercice 7.

Soit (E, N) un espace vectoriel normé, et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E. Montrer que si $(x_n)_n$ converge vers $\ell \in E$, alors la suite $\big(N(x_n)\big)_n$ converge vers $N(\ell)$. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 8.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé, et soient $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ deux suites de E. On dit qu'elles sont (asymptotiquement) *équivalentes*, et on note $x_n \sim y_n$ lorsque :

$$x_n - y_n \ = \ \mathrm{o}\big(\|y_n\|\big).$$

a) Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des suites de E.

b) On suppose $x_n \sim y_n$ Montrer alors que $(x_n)_n$ converge vers $\ell \in E$ si, et seulement si, $(y_n)_n$ converge vers ℓ.

Exercice 9.

Pour un polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$, on définit les applications N_1, N_2 et N_∞ par les formules suivantes :

$$N_1(P) = \sum_{k=0}^{n} |a_k| \quad ; \quad N_2(P) = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} |a_k|^2} \quad ; \quad N_\infty(P) = \sup_{0\leqslant k\leqslant n} |a_k|$$

a) Vérifier que N_1, N_2 et N_∞ définissent des normes sur $\mathbb{R}[X]$.

b) En considérant les polynômes $P_n = \sum_{k=0}^{n} X^k$, montrer que les normes N_1, N_2 et N_∞ ne sont pas équivalentes.

c) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, les normes N_1, N_2 et N_∞ restreintes à $\mathbb{R}_n[X]$ sont équivalentes.

Exercice 10.

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue et $N_f : P \mapsto \sup_{x\in[0,1]} \left|f(x)P(x)\right|$ définie sur $\mathbb{K}[X]$.

a) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur f pour que N_f soit une norme sur $\mathbb{K}[X]$.

b) Montrer que s'il existe $a, b > 0$ tels que $a|f| \leqslant |g| \leqslant b|f|$, alors les normes N_f et N_g sont équivalentes.

Exercice 11.

Soit (E, N) un espace vectoriel normé et O un ouvert de E.

a) Montrer que pour tout $a \in E$, l'ensemble $a + O = \{a + x,\ x \in O\}$ est un ouvert de E.

b) Montrer que si $A \subset E$, l'ensemble $A + O$ est un ouvert de E. Montrer, à l'aide d'un exemple, que $A + O$ peut être ouvert sans que O (ni A) se soit ouvert.

Exercice 12.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E.

a) Montrer que l'adhérence de F est un sous-espace vectoriel de E.

b) Montrer que si F est d'intérieur non vide, alors $F = E$.

Exercice 13.

Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$, muni de la norme $\|\cdot\|_1$. Montrer que la fonction constante égale à 1 est adhérente à $F = \{f \in E, f(0) = 0\}$.

Exercice 14. ⋆

Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$, N une norme sur E, et $A = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$.

a) Montrer que A est soit fermé soit dense dans (E, N)

b) Trouver un exemple de norme N_1 tel que A soit fermé dans (E, N_1) et un exemple de norme N_2 tel que A soit dense dans (E, N_2).

Exercice 15.

Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$, muni de la norme N_∞ habituelle.

a) Montrer que l'ensemble $A = \{f \in E, \forall x \in [0,1], f(x) \neq 0\}$ est un ouvert de E pour N_∞.

b) Montrer que l'ensemble des points adhérents à A pour N_∞ est constitué des fonctions continues sur $[0,1]$, positives sur $[0,1]$ ou négatives sur $[0,1]$.

Exercice 16.

Montrer que si K est une partie compacte non vide de $\mathbb{R}$, alors K admet un plus grand et un plus petit élément.

Exercice 17.

Pour $\mathbb{R}[X]$ muni de la norme N_∞, définie pour $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ par $N_\infty(P) = \sup_{0 \leqslant k \leqslant n} |a_k|$, montrer que la boule unitée fermée $B_F(0,1)$ n'est pas compacte.

Exercice 18.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $(K_n)_n$ une suite de compacts non vides décroissante pour l'inclusion.

a) Montrer que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n \neq \varnothing$

b) On suppose de plus que $\delta(K_n) = \sup_{(x,y)\in K_n^2} \|x - y\|$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$. Montrer que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}$ est un singleton.

Exercice 19. ⋆

Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$. On pose

$$U = \{f \in E \;:\; f(1) > 0\} \qquad \text{et} \qquad F = \left\{ f \in E \;:\; \int_0^{1/2} f(t)\mathrm{d}t \leqslant 0 \right\}$$

a) Est-ce que U est un ouvert de $(E, \|\cdot\|_\infty)$? De $(E, \|\cdot\|_1)$?

b) Est-ce que F est un fermé de $(E, \|\cdot\|_\infty)$? De $(E, \|\cdot\|_1)$?

Exercice 20. ⋆

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé et $(u_n)_n$ une suite de E. On note V l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(u_n)_n$

a) Démontrer que $V = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\{u_p \,:\, p \geqslant n\}}$

b) En déduire que V est fermé.

Exercice 21.

Soient E un espace vectoriel normé et m un entier $\geqslant 1$. On note $\mathcal{L}$ la partie de E^m constituée des familles libres $(x_1, \ldots, x_m)$ de vecteurs de E.

Le but de cet exercice est de montrer que $\mathcal{L}$ est un ouvert de E^m.

a) Traiter le cas où E est de dimension finie, à l'aide d'une base de E.

b) Traiter le cas général.

Exercice 22. ⋆

On note $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ et pour $\varphi \in E$, $N_\varphi : E \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$\forall f \in E, \quad N_\varphi(f) = \|f\varphi\|_\infty.$$

a) Montrer que N_φ est une norme sur E si, et seulement si, $\overbrace{\left(\varphi^{-1}(\{0\})\right)}^{\circ} = \varnothing$.

b) Montrer que N_φ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes sur E équivalentes si, et seulement si $\varphi^{-1}(\{0\}) = \varnothing$.

Exercice 23. ⋆

Soient E, F, G trois espaces vectoriels normés, A un ouvert de $E \times F$, B un ouvert de $F \times G$. On définit

$$B \circ A = \big\{(x, y) \in E \times G \,|\, \exists y \in F, (x, y) \in A, (y, z) \in B\big\}$$

Montrer que $B \circ A$ est un ouvert de $E \times G$.

Exercice 24. (ccinp)

Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien réel, dont on note $\|\cdot\|$ la norme associée. On définit deux type de convergences pour $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$:

— La convergence forte vers $x \in E$ lorsque $\|x_n - x\| \to 0$

— La convergence faible vers $x \in E$ lorsque pour tout $y \in E$, $\langle x_n - x, y\rangle \to 0$

a) Montrer l'unicité de la limite pour la convergence faible.

b) Montrer que la convergence forte implique la convergence faible.

c) Montrer que (x_n) converge fortement vers x si, et seulement si (x_n) converge faiblement vers x et $\|x_n\| \to \|x\|$.

d) Montrer qu'en dimension finie, les deux types de convergence sont équivalentes.

Exercice 25. ⋆⋆ (centrale)

Soit E l'ensemble des fonctions f de classe $\mathcal{C}^2$ telles que $f(0) = f'(0) = 0$. Pour $f \in E$, on pose :

$$N_\infty(f) = \sup_{x\in[0,1]} \left|f(x)\right|, \quad N(f) = \sup_{x\in[0,1]} \left|f(x) + f''(x)\right|, \quad N_1(f) = \sup_{x\in[0,1]} \left|f''(x)\right| + \sup_{x\in[0,1]} \left|f(x)\right|$$

a) Montrer que N_∞, N et N_1 sont des normes sur E.

b) Montrer que N_∞ n'est équivalente ni à N_1, ni à N.

c) Montrer que N et N_1 sont équivalentes (introduire l'équation différentielle $y'' + y = g$)