

Soient  $A$  et  $B$  deux matrices symétriques de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  dont les valeurs propres sont notées respectivement  $(a_k, 1 \leq k \leq n)$  et  $(b_k, 1 \leq k \leq n)$ , répétées suivant leur multiplicité. On veut démontrer l'inégalité :

$$\det(A + B) \leq \max_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \prod_{k=1}^n (a_k + b_{\sigma(k)}), \quad (1)$$

où  $\mathfrak{S}_n$  désigne le groupe des permutations de l'ensemble  $\{1, \dots, n\}$ .

## Notations

On note par  $\|\cdot\|$  la norme euclidienne canonique sur  $\mathbb{R}^n$  et on munit  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  de la norme matricielle subordonnée que, pour alléger les notations, on notera aussi  $\|\cdot\|$ . Pour toute matrice carrée  $M$ , on note  $M^t$  sa matrice transposée,  $\det(M)$  son déterminant et  $\text{tr}(M)$  sa trace. La matrice identité de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est notée  $I$ .

Une matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est dite symétrique (respectivement anti-symétrique) lorsque  $M = M^t$  (respectivement  $M^t = -M$ ). On note  $\mathcal{S}_n$  (respectivement  $\mathcal{A}_n$ ) le sous-espace vectoriel des matrices symétriques (respectivement anti-symétriques).

## Résultats admis

On admet les propriétés suivantes :

- P1 – Si  $A$  et  $B$  sont deux matrices diagonalisables et si elles commutent, il existe une base de diagonalisation commune à  $A$  et  $B$ .
- P2 – Si  $A$  et  $B$  commutent alors  $\exp(A + B) = \exp(A) \exp(B)$ .

## I. Préliminaires

- 1) Montrer que

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n \oplus \mathcal{A}_n.$$

- 2) On note  $(E_{(i,j)}, (i,j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\})$  la base canonique de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

Pour  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , expliciter  $\text{tr}(ME_{(i,j)})$  en fonction des coefficients de  $M$ .

- 3) Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que pour toute matrice  $T \in \mathcal{A}_n$ ,  $\text{tr}(MT) = 0$ . La matrice  $M$  est-elle symétrique ou anti-symétrique?
- 4) Soit  $T \in \mathcal{A}_n$ , montrer que  $e^T$  est orthogonale.
- 5) Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Montrer que, pour  $s$  au voisinage de 0,

$$e^{sM} = \mathbf{I} + sM + O(s^2). \quad (2)$$

- 6) Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Pour  $j \in \{0, \dots, n\}$ , on note  $\alpha_j(M)$  le coefficient de  $X^j$  dans le polynôme caractéristique de  $M$ :

$$\det(M - X\mathbf{I}) = \sum_{j=0}^n \alpha_j(M)X^j.$$

Montrer que pour tout  $j \in \{0, \dots, n\}$ , l'application  $(M \mapsto \alpha_j(M))$  est continue.

- 7) Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Montrer que pour  $s$  au voisinage de 0,

$$\det(\mathbf{I} + sM) = 1 + s \text{tr}(M) + O(s^2),$$

et que

$$\det(\mathbf{I} + sM + O(s^2)) = 1 + s \text{tr}(M) + O(s^2). \quad (3)$$

- 8) On suppose que  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  n'est pas inversible. Construire une matrice  $N_0$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  telle que, pour tout  $s > 0$ , on ait  $\det(M + sN_0) > 0$ .
- 9) Montrer que l'on peut choisir  $N_0$ , à coefficients réels, diagonalisable (respectivement symétrique) si  $M$  est diagonalisable (respectivement symétrique).

## II. Démonstration de l'inégalité (1)

**On rappelle que  $A$  et  $B$  sont des matrices réelles symétriques.**

- 10) Montrer que si les matrices  $A$  et  $B$  commutent alors il existe  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  telle que:

$$\det(A + B) = \prod_{k=1}^n (a_k + b_{\sigma(k)}).$$

- 11) Soit  $\mathcal{O}_n$  l'ensemble des matrices orthogonales de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Montrer que  $\mathcal{O}_n$  est une partie compacte de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .
- 12) Pour tout  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on considère la partie  $\mathcal{O}_n(M)$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  définie par

$$\mathcal{O}_n(M) = \{UMU^{-1}; U \in \mathcal{O}_n\}.$$

Montrer qu'il existe  $B_0 \in \mathcal{O}_n(B)$  telle que

$$\det(A + B_0) = \sup_{C \in \mathcal{O}_n(B)} \det(A + C).$$

### II.1 $A + B_0$ inversible

De cette question à la question 17, on suppose que  $A + B_0$  est inversible. Pour  $T \in \mathcal{A}_n$  et pour tout réel  $s$ , on définit  $\psi_T(s)$  par

$$\psi_T(s) = \det(A + e^{sT} B_0 e^{-sT}).$$

- 13) Montrer que pour  $s$  au voisinage de 0, on a

$$\psi_T(s) = \det(A + B_0) [1 + s \operatorname{tr}((TB_0 - B_0 T)(A + B_0)^{-1})] + O(s^2). \quad (4)$$

- 14) Montrer que pour tout  $s$  réel, on a  $\psi_T(s) \leq \psi_T(0)$ .

- 15) Montrer l'égalité suivante:

$$\operatorname{tr}(TB_0(A + B_0)^{-1}) = \operatorname{tr}(T(A + B_0)^{-1}B_0). \quad (5)$$

- 16) Montrer que  $B_0$  commute avec  $(A + B_0)^{-1}$  et  $A$ .

- 17) Montrer l'inégalité (1).

### II.2 $A + B_0$ singulière

On suppose dorénavant que  $A + B_0$  n'est pas inversible.

- 18) Montrer qu'il existe deux suites de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $(B_k, k > 0)$  et  $(N_k, k > 0)$  telles que
- (i)  $N_k$  converge vers  $B_0$  quand  $k$  tend vers  $+\infty$ ,

- (ii)  $B_k \in \mathcal{O}_n(N_k)$  pour tout  $k > 0$ ,
  - (iii)  $\det(A + N_k) \leq \det(A + B_k)$  pour tout  $k > 0$ ,
  - (iv)  $B_k$  commute avec  $A$  pour tout  $k > 0$ .
- 19) Montrer l'inégalité (1).

### III. Une permutation qui réalise le maximum

Indépendamment des matrices  $A$  et  $B$ , étant données deux suites de réels  $(a_k, 1 \leq k \leq n)$  et  $(b_k, 1 \leq k \leq n)$ , on se propose de préciser l'inégalité (1), en explicitant une permutation  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  pour laquelle le produit

$$P(\sigma) = \prod_{k=1}^n (a_k + b_{\sigma(k)})$$

est maximum. On supposera que les hypothèses suivantes sont vérifiées :

$$\begin{cases} a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \\ b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n \\ a_i + b_j > 0 \text{ pour tout } (i, j). \end{cases} \quad (\text{H})$$

Pour tout entier  $n \geq 1$ , on considère la propriété  $\pi(n)$  suivante : pour toutes les suites  $(a_k, 1 \leq k \leq n)$  et  $(b_k, 1 \leq k \leq n)$  vérifiant (H) et toute permutation  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ , on a

$$\prod_{k=1}^n (a_k + b_{\sigma(k)}) \leq \prod_{k=1}^n (a_k + b_{n-k+1}).$$

- 20) Établir  $\pi(n)$  pour tout  $n \geq 2$ .

*Indication :* pour  $n > 2$  et  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  donnés, on distinguera deux cas :

Cas 1 :  $\sigma$  vérifie  $\sigma(n) = 1$ . On montrera qu'il existe alors  $\tau \in \mathfrak{S}_{n-1}$  telle que pour  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ ,  $\sigma(i) = \tau(i) + 1$ .

Cas 2 : Il existe  $i < n$  et  $j > 1$  tels que  $\sigma(i) = 1$  et  $\sigma(n) = j$  et on ramènera l'étude du second cas au premier en factorisant  $P(\sigma)$  par  $(a_i + b_1)(a_n + b_j)$ .

FIN DU PROBLÈME

## MATHEMATIQUES II - filière MP

### I) REMARQUES GENERALES

Le sujet de ce problème avait pour objectif d'établir une inégalité relative au déterminant de la somme de deux matrices. Il faisait appel aux notions de base d'une partie assez large du programme (algèbre, matrices, analyse, fonctions continues, ...). Les démonstrations demandées permettaient de vérifier la bonne compréhension des connaissances acquises par les candidats. Cette épreuve départageait bien les candidats puisqu'il y avait de très bonnes copies et que toute l'échelle de la notation était représentée.

Faisons d'abord une remarque générale pour toutes les questions : la réponse "d'après le cours" à une question n'est pas prise en compte s'il n'y a pas une démonstration correcte pour étayer l'affirmation.

### II) REMARQUES PARTICULIERES

Considérons maintenant cette épreuve question par question.

**Question 1.** La plupart des candidats démontrent correctement que  $M_n(R)$  est somme de  $A_n$  et  $S_n$ . Pour établir que la somme est directe, on peut alors soit calculer le sous-espace intersection de  $A_n$  et  $S_n$  ou bien calculer la dimension de  $A_n$  et la dimension de  $S_n$ . Ce sont les deux méthodes le plus fréquemment utilisées par les candidats. En général, l'intersection de  $A_n$  et  $S_n$  est calculée correctement. On trouve dans un petit nombre de copies que les deux sous-espaces vectoriels ont une intersection vide, sans doute un lapsus de la part des candidats. Pour montrer qu'une matrice  $M$  est la matrice nulle, certains pensent qu'il suffit de montrer que  $M^2$  est nulle sans réfléchir au cas des matrices nilpotentes d'indice 2. Pour le calcul des dimensions de  $A_n$  et  $S_n$ , on trouve beaucoup d'erreurs, même si à la fin, la somme des deux dimensions fait  $n^2$ . Pour cette question, certains candidats donnent des démonstrations assez sophistiquées mais justes : ils considèrent l'opérateur linéaire qui à une matrice associe la matrice transposée. Cet opérateur a pour polynôme annulateur  $X^2 - 1$  ; par le théorème de décomposition des noyaux, ils obtiennent la décomposition en somme directe des deux sous-espaces  $A_n$  et  $S_n$ . Certains démontrent directement la propriété de somme directe des noyaux sans utiliser le polynôme annulateur.

**Question 2.** Une bonne partie des candidats a répondu correctement. Toutefois la réponse fausse souvent obtenue "trace  $(MEi,j) = m_{i,j}$ " permettait d'obtenir le bon résultat à la question 3 avec  $m_{ij} - m_{ji} = 0$ .

**Question 3.** Certains pour démontrer 3) n'utilisent ni 1) ni 2). Ils écrivent directement l'expression de la trace de  $MT$  comme  $\sum_{i < j} (m_{ij} - m_{ji})t_{ji}$ . Avec cette méthode, beaucoup s'embrouillent dans les indices, "i,j" et "ij" ... La connaissance du produit scalaire "trace ( $AB$ )" sur l'espace des matrices réelles d'ordre  $n$  permettait aussi de répondre à la question. Avec ce point de vue, on trouve des démonstrations assez longues qui n'aboutissent pas toujours. Beaucoup répondent à côté et montrent que les conditions "M est symétrique et T est antisymétrique" impliquent que trace  $(MT)$  est zéro. Ceci n'était pas demandé. Il y avait aussi des démonstrations assez compliquées utilisant la décomposition d'une matrice en somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique. Les candidats obtenaient parfois un résultat correct. Dans un nombre assez restreint de copies, on trouve aussi quelques erreurs assez grossières comme écrire la trace d'un produit de matrices comme un produit de traces.

**Question 4.** Les justifications sont souvent fantaisistes. Par exemple "  $e^T$  est une matrice inversible et de déterminant 1, donc  $e^T$  appartient à  $O_n(R)$ ", ou bien "  $e^T$  est orthogonale car  $\det(e^T) = 1$ ". Cette dernière erreur se reproduit aussi à la question 11. Un certain nombre de candidats ne connaissent pas la définition de l'exponentielle d'une matrice  $M$ . Pour eux, il suffit de prendre la matrice qui a pour coefficients les exponentiels des coefficients de  $M$ . Cette erreur se reproduit aussi dans la question 5) où certains identifient la matrice  $e^{sM}$  avec la matrice  $\sum_{i,j} e^{smij} \cdot E_{ij}$ . D'autres traitent la question dans le cas où la matrice antisymétrique est d'ordre 2.

**Question 5.** Considérer le développement limité de la fonction de la variable réelle  $e^{\lambda x}$  au point  $x = 0$  puis remplacer  $x$  par la matrice  $M$  n'est pas une démonstration suffisante. Il faut utiliser des majorations sur les normes de matrices pour montrer la propriété " $0(s^2)$ ". Beaucoup n'ont pas réussi cette question : on trouve des inégalités variées mais sur des matrices, certaines faisant intervenir le reste intégral de Taylor-Young. Certains citent la formule de Taylor tout en ignorant la signification de l'expression  $e^{sM}$ . Parmi les candidats qui connaissent une norme sur l'espace vectoriel  $M_n(R)$ , certains récitent le cours sur la convergence normale et uniforme des séries entières. D'autres utilisent le critère de d'Alembert sur la limite du rapport  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ,  $n \rightarrow \infty$ . Malheureusement, rien de cela ne permettait d'obtenir la bonne réponse. Les majorations de  $\sum_{k \geq 2} \frac{s^k M^k}{k!}$  étaient souvent sans justification ou erronées.

**Question 6.** Il y a beaucoup d'écritures fausses du déterminant de la matrice  $I + \delta M$ . Pour démontrer la continuité de l'application  $M \rightarrow \alpha_j(M)$ , certaines réponses sont totalement inattendues et assez fréquentes, par exemple, cela résulterait de ce que "l'espace vectoriel de départ est de dimension finie  $n^2$ ", ou bien c'est "une combinaison linéaire des coefficients de  $M$ ", ou bien c'est "une projection, donc une application linéaire continue", ou encore « l'application est multilinéaire » etc... Beaucoup de phrases qui ressemblent d'assez loin au cours, et qui montrent un manque de sérieux et de réflexion chez certains. Il y a aussi ceux qui utilisent le critère de continuité des applications linéaires, ce qui évidemment ne convient pas. Remarquons que la notation  $\|M\|$  pour désigner la norme de la matrice  $M$ , ne doit pas être utilisée pour  $\alpha_j(M)$ , écrire  $\|\alpha_j(M)\|$  n'est pas correct car  $\alpha_j(M)$  n'est pas une matrice, il faut noter  $|\alpha_j(M)|$  puisque  $\alpha_j(M) \in R$ . Pour quelques uns, la continuité de  $\alpha_j$  résulte du théorème de Cayley-Hamilton. Dans plus de la moitié des copies, une solution juste a été donnée à la question. La fonction déterminant est une fonction polynomiale des coefficients de la matrice et la projection  $p_j : \sum_{k=1}^n \alpha_k x^k \rightarrow \alpha_j$  de l'espace vectoriel des polynômes de degré  $n$  sur  $R$  est continue. Certains candidats ont écrit avec soin l'application  $M \rightarrow \alpha_j(M)$  comme composée d'applications continues mais ils n'ont pas toujours abouti à de bonnes démonstrations.

**Question 7.** En général, cette question n'a pas été traitée convenablement. La dérivabilité de la fonction  $s \rightarrow \det(I + sM)$  n'est pas une justification suffisante pour conclure à l'existence du développement limité. Certains ont utilisé l'identité " $\det \exp(sM)) = \exp(s \operatorname{trace}(M))$ "; ce qui est juste mais ne suffisait pas pour conclure et était en fait hors sujet. On trouve beaucoup d'écritures fausses et compliquées du déterminant d'une matrice.

**Question 8.** Une bonne méthode pour aborder cette question plus difficile était de réduire la matrice à la forme triangulaire et de construire  $No$  en utilisant la nouvelle base. Environ un dixième des candidats a réussi à résoudre cette question. Les valeurs propres de  $M$  ne sont pas forcément réelles, mais si  $\lambda$  est valeur propre, le nombre complexe conjugué de  $\lambda$  est aussi valeur propre. Dans les diverses démonstrations, on trouve des inégalités sur les nombres complexes. Il fallait aussi faire attention, la matrice  $No$  doit être indépendante du paramètre  $s$ . Les démonstrations qui faisaient intervenir une décomposition de  $R^n$  en somme directe  $\text{Ker } M \oplus F$  n'aboutissaient pas en général. De même, écrire  $M$  comme limite d'une suite de matrices inversibles ne répondait pas à la question.

**Question 9.** Certains ont traité correctement cette question directement sans avoir résolu la question 8.

**Question 10.** Moins de la moitié des candidats a réussi à justifier la permutation  $\sigma$ . Dans un assez grand nombre de copies, on trouve que  $\sigma$  doit être l'identité. Parmi ceux qui donnent une réponse correcte, certains choisissent d'utiliser deux permutations  $\sigma'$  associée à la matrice  $A$  et  $\sigma''$  associée à la matrice  $B$ , puis  $\sigma = (\sigma')^{-1} \sigma''$ .

**Question 11.** Dans beaucoup de copies, on trouve des non-sens comme " $O_n$  est borné car  $\det M = +1$  ou  $-1$  et le déterminant est continu". On parle de  $M_n(R)$  comme d'un groupe, de la dimension de  $O_n(R)$  comme espace vectoriel, etc... Remarquons que l'image réciproque d'un ensemble compact par une application continue n'est pas forcément compacte, il est facile de trouver de nombreux exemples. Certaines copies relient la notion de compacité avec la convexité ou les suites de Cauchy, sans trop de rapport avec la question demandée. Beaucoup de candidats ne connaissent pas la signification de "matrice orthogonale". Ils pensent à tort qu'une matrice orthogonale est une matrice carrée dont le déterminant est égal à 1 ou -1. Parmi les copies où une solution correcte est donnée, on trouve quelquefois l'utilisation des suites.

**Question 12.** Il est facile de trouver un exemple pour vérifier que  $O_n(M)$  n'est pas un sous-ensemble de  $O_n$ . D'autre part, il n'y a pas de relation d'ordre sur  $O_n(M)$  et  $O_n(M)$  n'admet pas de "borne supérieure". De même, il est absurde de parler de plus grand élément d'un ensemble compact. L'application  $U \rightarrow U M U^{-1}$  n'est pas linéaire. La question 12 a été traitée par moins de la moitié des candidats.

**Question 13.** En général, les candidats ont mené à bien ce calcul. Cependant, dans quelques copies, on voit  $(A + B_0)^{-1}$  écrit sous la forme  $\frac{1}{A + B_0}$ .

**Question 14.** Cette question était traitée correctement dans la majorité des copies.

**Questions 15 et 16.** Ces deux questions étaient résolues seulement dans les bonnes copies.

Pour la question 15, les candidats n'ont pas toujours vu qu'il s'agissait d'utiliser la propriété d'extremum démontrée à la question précédente. Beaucoup ont essayé de démontrer directement l'égalité (5) sur les traces. Ils sont arrivés à une égalité de trace avec un signe opposé à celui demandé. Ils en ont alors conclu qu'il y avait une erreur d'énoncé sans se soucier de savoir si leur propre démonstration ne contenait pas elle-même une erreur. Certains ont refait la démonstration du cours, "trace  $(AB) = \text{trace}(BA)$ ". Cette démonstration était inutile pour la question demandée.

Pour la question 16, beaucoup de candidats n'ont pas vu que par la question 3, la matrice était symétrique. Il fallait aussi démontrer l'antisymétrie. Ceci en général, était bâclé ou ignoré. Les candidats ayant réussi à montrer que  $B_0$  et  $(A + B_0)^{-1}$  commutaient n'ont pas toujours su continuer et montrer que  $A$  et  $B_0$  commutaient. Il y a aussi ceux qui ont admis la commutation de  $B_0$  et  $(A + B_0)^{-1}$  et de là, ils ont démontré que cette commutation implique celle de  $A$  et  $B_0$ . Ce qui est vrai.

**Question 17.** Les candidats ayant abordé cette question l'ont souvent bien maîtrisée.

**Question 18.** Il y avait beaucoup de solutions incorrectes. Un petit nombre de candidats seulement a compris comment construire la suite  $(N_k)$ . Il fallait se servir de la matrice  $N_0$  de la question 8. Certains n'ont pas compris la question et ont essayé de montrer que (i) implique (ii), ...

**Question 19.** La plupart des candidats ayant résolu la 17 n'ont pas compris cette question. Ils n'ont pas vu que la suite  $(B_k, k > 0)$  admettait une sous suite convergente et ils n'ont pas fait le lien entre la limite de cette sous suite et la matrice  $B$ . Très peu de candidats ont résolu cette question correctement.

**Question 20.** Très peu de candidats ont traité entièrement cette question. Parmi ceux qui l'ont abordée, beaucoup se sont limités au cas 1, ou bien simplement au cas où  $n = 2$ .

### **III) CONCLUSION**

**1)** La connaissance et la bonne compréhension des théorèmes du cours sont nécessaires pour bien réussir une épreuve.

**2)** Afin d'éviter d'écrire des non-sens, il est conseillé de réfléchir à la signification des mots et il est important de savoir construire des exemples.

**3)** Avant de conclure trop hâtivement à une erreur d'énoncé comme certains l'ont fait dans la question 15, il faut bien relire sa propre démonstration et s'il y a une contradiction, chercher à comprendre d'où vient la discordance. De toutes façons, il ne faut pas abuser des erreurs d'énoncés.