ENS Maths C MP-MPI (ULSR) 2023 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Julie Gauthier (professeur agrégé) ; il a été relu par Corentin Fierobe (chercheur agrégé) et Gilbert Monna (professeur honoraire en CPGE).

Ce problème traite d'équations différentielles et des problèmes de Cauchy qui leur sont associés. On y démontre un résultat intermédiaire important pour la théorie sur les équations différentielles : le théorème d'Ascoli-Arzela que l'on utilise ensuite pour établir l'existence de solutions aux problèmes de Cauchy sous réserve de continuité. Enfin, on se penche sur une notion plus générale, les inclusions différentielles.

- Dans la partie I, on traite des exemples de problèmes de Cauchy pour des équations différentielles ordinaires non linéaires et on établit un résultat de convergence simple des solutions dans ces cas particuliers.
- L'objectif de la partie II est de démontrer le théorème d'Ascoli-Arzela qui caractérise les parties relativement compactes de l'espace des fonctions continues définies sur un compact à valeurs dans un espace métrique, ici $\mathbb{R}^d$. On utilise en particulier la notion d'équicontinuité donnée dans l'introduction du sujet qui est au cœur de cette caractérisation.
- On considère dans la partie III un problème de Cauchy en toute généralité avec F continue et, en utilisant le théorème d'Ascoli-Arzela prouvé dans la partie II, on obtient l'existence de solutions à ce problème. Enfin, à l'aide d'un exemple, on montre qu'il n'y a a priori pas unicité de telles solutions dans la dernière question de cette partie.
- Dans la partie IV, on s'intéresse à des problèmes d'inclusions différentielles. Ici, la dérivée première de y n'est pas fixée par le problème mais elle peut prendre n'importe quelle valeur dans une partie compacte dépendant de la valeur de y. Dans la première question, on établit une condition suffisante pour obtenir l'unicité d'une solution à un tel problème, sous réserve d'existence. Dans les deux questions suivantes, on traite de cas particuliers, l'un dans lequel cette condition suffisante est vérifiée et l'autre dans lequel elle ne l'est pas.

C'est un sujet long, difficile et calculatoire. De plus, certaines questions demandent de la virtuosité technique en termes de rédaction.

Indications

Partie I

I-1.(a) Traiter d'abord l'inégalité de droite : un développement limité à l'ordre 0 permet de l'établir. L'inégalité de gauche s'obtient ensuite par stricte croissance.

I-1.(b) Se ramener à une équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre 1 à coefficients constants.

I-1.(c) Utiliser la formule établie à la question I-1.(b).

I-2. Utiliser une méthode similaire à celle de la question I-1.(b).

I-3.(a) Effectuer un développement limité de l'exponentielle à l'ordre 1.

I-3.(b) Procéder de même qu'à la question I-3.(a) en utilisant les formules obtenues aux questions I-1.(b) et I-2.

Partie II

II-1. Utiliser la définition de l'équicontinuité donnée dans l'introduction du sujet.

II-2. Raisonner par double implication. Pour l'implication réciproque, approcher chaque terme d'une suite à valeurs dans l'adhérence de A par un élément de A pour montrer que l'adhérence de A est compacte.

II-3. Suivre l'indication donnée dans l'énoncé et utiliser le résultat de la question II-2..

II-4. D'après le résultat de la question II-3., il suffit de montrer que $\mathrm{A}(x)$ est bornée pour tout $x \in \mathrm{K}$. On peut le faire en raisonnant par l'absurde.

II-5.(a) Procéder par récurrence en utilisant le caractère borné de chacun des $\mathrm{A}(x_p)$ pour $p \in \mathbb{N}$.

II-5.(b) Utiliser le résultat de la question précédente et remarquer que pour n suffisamment grand, la suite donnée dans l'énoncé est extraite d'une suite convergente.

II-6.(a) Le caractère dénombrable de $\mathbb{Q}$ permet de construire une suite $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ bien choisie et de lui appliquer le résultat de la question II-5.(b).

II-6.(b) Résoudre cette question dans le cas où $\mathbb{Q} \cap \mathrm{K}$ est dense dans K. Utiliser le résultat de la question II-6.(a) et l'équicontinuité de A pour démontrer qu'il y a au plus une valeur d'adhérence. Le caractère borné de $\mathrm{A}(x)$ assure son existence.

II-7.(a) Utiliser le résultat de la question II-6.(b) et l'équicontinuité de A pour obtenir la continuité de g via la définition.

II-7.(b) Utiliser des inégalités triangulaires, les résultats des questions II-6.(b) et II-7.(a) ainsi que l'équicontinuité de A.

II-7.(c) Combiner les résultats des questions II-7.(a) et II-7.(b).

Partie III

III-1. Se placer dans une boule fermée et définir T de façon pertinente. Raisonner par récurrence sur $[\![0\,;\mathrm{N}]\!]$.

III-2. Il existe un unique segment reliant deux points distincts du plan.

III-3. Travailler avec la partie $\mathrm{A} = \{\phi_{\mathrm{N}} \quad \mathrm{N} \in \mathbb{N}^*\}$. Montrer que toutes les fonctions ϕ_{N} sont k-lipschitziennes pour un $k > 0$ indépendant de N puis appliquer les résultats des questions II-1. et II-2.. Ensuite, le résultat de la question III-1. donne que $\mathrm{A}(t)$ est bornée pour tout $t \in [\,0\,;\mathrm{T}\,]$.

III-4. Poser $\psi_{\mathrm{N}} = y_n$ sur $[\,n\Delta t\,;(n+1)\Delta t\,[$ et montrer par récurrence qu'elle convient en utilisant en particulier l'unicité de ϕ_{N} obtenue dans la réponse à la question III-2..

III-5. Utiliser la même extractrice que celle de la réponse à la question III-3..

III-6. Combiner les résultats des questions III-1. à III-5. et appliquer le théorème de convergence dominée.

III-7. Noter que la fonction $t \mapsto t^3$ vérifie ce problème de Cauchy et que, quel que soit $t_0 \in [\,0\,;+\infty\,[$, on peut construire une solutions nulle sur $[\,0\,;t_0\,]$ et non nulle sur $]\,t_0\,;+\infty\,[$.

Partie IV

IV-1. Utiliser l'indication donnée dans l'énoncé. En posant $\varphi : t \mapsto \|\mathrm{X}(t)-\mathrm{Y}(t)\|^2$, montrer que φ vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre 1 dont le second membre est négatif et la résoudre. Conclure que ϕ est nulle par double inégalité.

IV-2.(a) Procéder par disjonction de cas.

IV-2.(b) Si ϕ est une solution, noter que sa deuxième coordonnée vérifie une équation différentielle ordinaire. Trouver une solution évidente pour la première coordonnée. Utiliser les résultats des questions IV-1. et IV-2.(a) pour conclure.

IV-2.(c) Dans ce cas, on peut d'abord supposer que chacune des deux coordonnées d'une solution ϕ vérifie une équation différentielle ordinaire qu'il suffit de résoudre. Utiliser à nouveau les résultats des questions IV-1. et IV-2.(a) pour conclure.

IV-3.(a) Se placer dans un compact contenant $(0, 0)$ en son intérieur.

IV-3.(b) Montrer que la deuxième coordonnée d'une solution ϕ vérifie une équation différentielle ordinaire et la résoudre. Concernant sa première coordonnée, établir sa croissance puis en déduire qu'elle vérifie une équation différentielle ordinaire et la résoudre pour conclure.

IV-3.(c) Raisonner de même qu'à la question IV-3.(b). Trouver ensuite toutes les solutions du problème d'inclusion différentielle en considérant la borne inférieure de $\{t \in [\,0\,;\mathrm{T}\,[\quad \phi_1(t) > 0\}$ si elle existe, où l'on a noté ϕ_1 la première coordonnées des solutions cherchées.

I. Premiers exemples

I-1.(a) En tant que solution du problème de Cauchy (1) associé à F_0, la fonction ϕ_0 est continue et à valeurs strictement positives sur $[\,0\,;+\infty\,[$ vu qu'elle est dans l'argument d'un logarithme et que $\theta > 0$. On obtient le développement limité de ϕ_0 au voisinage de 0 à l'ordre 0. Pour tout $t \in [\,0\,;+\infty\,[$, on a

$$\begin{aligned}\phi_0(t) &= \phi_0(0) + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}(1)\\ &= y_{\text{init}} + f_0(t)\end{aligned}$$

avec f_0 une fonction définie sur $[\,0\,;+\infty\,[$ et dont la limite en 0 est 0. Posons

$$\delta = \theta - y_{\text{init}} > 0$$

Alors, il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall\, t \in [\,0\,;\varepsilon\,] \qquad f_0(t) < \delta$$

donc $$\forall\, t \in [\,0\,;\varepsilon\,] \qquad \phi_0(t) < y_{\text{init}} + \delta = \theta$$

Par ailleurs, le fait que ϕ_0 soit une solution du problème (1) associé à F_0 assure aussi sa dérivabilité pour que cela ait un sens. Par stricte positivité de a et de ϕ_0, on en déduit que ϕ_0' est du signe de $\ln(\theta/\phi_0)$. En particulier,

$$\forall\, t \in [\,0\,;\varepsilon\,] \qquad \phi_0'(t) > 0$$

vu que $\phi_0 < \theta$ sur cet intervalle. Ceci assure la stricte croissance de ϕ_0 sur $[\,0\,;\varepsilon\,]$. Ainsi, comme $\phi_0(0) = y_{\text{init}}$

$$\boxed{\exists\, \varepsilon > 0 \quad \forall\, t \in\,]\,0\,;\varepsilon\,] \qquad y_{\text{init}} < \phi_0(t) < \theta}$$

Proposons aussi une rédaction qui ne fait pas intervenir le développement limité de ϕ_0.

Remarquons d'abord qu'en tant que solution du problème, ϕ_0 est continue, dérivable et à valeurs strictement positives sur $[\,0\,;+\infty\,[$. La continuité en 0 donne

$$\lim_{t\to 0^+} \varphi_0(t) = y_{\text{init}}$$

Autrement dit,

$$\forall\, \alpha > 0 \quad \exists\, \varepsilon > 0 \quad \forall\, t \in [\,0\,;+\infty\,[\qquad 0 < t < \varepsilon \implies \left|\phi_0(t) - y_{\text{init}}\right| < \alpha$$

En particulier,

$$\forall\, \alpha > 0 \quad \exists\, \varepsilon > 0 \quad \forall\, t \in [\,0\,;+\infty\,[\qquad 0 < t < \varepsilon \implies 0 < \phi_0(t) < y_{\text{init}} + \alpha$$

Or, $\theta > y_{\text{init}}$. Choisissons donc $\alpha = \theta - y_{\text{init}}$ et un $\varepsilon > 0$ associé. Alors

$$\forall\, t \in [\,0\,;+\infty\,[\qquad 0 < t < \varepsilon \implies 0 < \phi_0(t) < \theta$$

Ainsi, $\theta/\phi_0(t) > 1$ pour tout $t \in\,]\,0\,;\varepsilon\,]$ donc son logarithme est strictement positif. En tant que produit de facteurs strictement positifs, il en découle que

$$\forall\, t \in\,]\,0\,;\varepsilon\,] \qquad \phi_0'(t) = a\phi_0(t)\ln\left(\frac{\theta}{\phi_0(t)}\right) > 0$$

Dès lors, ϕ_0 est strictement croissante sur $]\,0\,;\varepsilon\,]$ et la conclusion s'en suit.

$$\exists\, \varepsilon > 0 \quad \forall\, t \in\,]\,0\,;\varepsilon\,] \qquad y_{\text{init}} = \phi_0(0) < \phi_0(t) < \theta$$

$\boxed{\textbf{I-1.(b)}}$ Pour $t \in \,]\,0\,;\varepsilon\,]$, on définit $z_0(t) = \ln\big(\phi_0(t)/\theta\big)$. La fonction z_0 est bien définie et dérivable car ϕ_0 est dérivable et à valeurs strictement positives. Comme ϕ_0 vérifie le problème (1) associé à F_0, on a

$$\forall\, t \in \,]\,0\,;\varepsilon\,] \qquad z_0'(t) = \frac{\phi_0'(t)}{\phi_0(t)} = \frac{a\phi_0(t)\ln\left(\dfrac{\theta}{\phi_0(t)}\right)}{\phi_0(t)} = -az_0(t)$$

On reconnaît une équation différentielle ordinaire d'ordre 1 à coefficients constants et il vient par continuité de z_0 en 0 que

$$\forall\, t \in [\,0\,;\varepsilon\,] \qquad z_0(t) = z_0(0)\mathrm{e}^{-at} = \ln\left(\frac{y_{\text{init}}}{\theta}\right)\mathrm{e}^{-at}$$

Il vient par conséquent,

$$\forall\, t \in [\,0\,;\varepsilon\,] \qquad \phi_0(t) = \theta\mathrm{e}^{z_0(t)} = \theta\mathrm{e}^{\ln\left(\frac{y_{\text{init}}}{\theta}\right)\mathrm{e}^{-at}} = \theta\Big(\frac{y_{\text{init}}}{\theta}\Big)^{\mathrm{e}^{-at}}$$

Cette formule est en réalité valable pour tout $t \in [\,0\,;+\infty\,[$ quitte à vérifier par le calcul que le problème de Cauchy (1) est vérifié car ϕ_0 en est une solution maximale. En conclusion,

$$\boxed{\forall\, t \in [\,0\,;+\infty\,[\qquad \phi_0(t) = \theta\Big(\frac{y_{\text{init}}}{\theta}\Big)^{\mathrm{e}^{-at}}}$$

$\boxed{\textbf{I-1.(c)}}$ La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-at}$ est strictement décroissante vu le signe de a. Or, on sait que $y_{\text{init}}/\theta \in \,]\,0\,;1\,[$ donc $x \mapsto (y_{\text{init}}/\theta)^x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. En outre, $\theta > 0$ puis par produit et composition de deux fonctions strictement décroissantes,

$$\boxed{\text{La fonction } \phi_0 \text{ est strictement croissante sur } [\,0\,;+\infty\,[.}$$

De plus, $\phi_0(0) = y_{\text{init}}$ donc par stricte croissance

$$\forall\, t \in \,]\,0\,;+\infty\,[\qquad \phi_0(t) > y_{\text{init}}$$

Par ailleurs, comme $y_{\text{init}}/\theta \in \,]\,0\,;1\,[$, $\theta > 0$ et $\mathrm{e}^{-at} \leqslant 1$ pour $t \geqslant 0$, il vient

$$\forall\, t \in [\,0\,;+\infty\,[\qquad \theta\Big(\frac{y_{\text{init}}}{\theta}\Big)^{\mathrm{e}^{-at}} < \theta$$

En conclusion, $\boxed{\forall\, t \in \,]\,0\,;+\infty\,[\qquad y_{\text{init}} < \phi_0(t) < \theta}$

$\boxed{\textbf{I-2.}}$ On sait que le problème (1) associé à F_μ admet une unique solution maximale que l'on note ϕ_μ. De plus, d'après l'introduction de la partie I dans l'énoncé, cette solution est globale. Or, F_μ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ donc ϕ_μ est à valeurs strictement positives. Dès lors, on peut définir $z_\mu : t \mapsto \phi_\mu(t)^{-\mu}$ sur $[\,0\,;+\infty\,[$. Alors

$$\forall\, t \in [\,0\,;+\infty\,[\qquad z_\mu(t) = \mathrm{e}^{-\mu\ln(\phi_\mu(t))}$$

ce qui assure que z_μ est dérivable car ϕ_μ l'est et est à valeurs strictement positives et pour tout $t \in [\,0\,;+\infty\,[$, en utilisant le fait que ϕ_μ vérifie le problème de Cauchy associé à F_μ, on obtient

$$\begin{aligned}
z_\mu'(t) &= -\mu\phi_\mu'(t)\phi_\mu(t)^{-\mu-1}\\
&= -\mu\frac{a}{\mu}\phi_\mu(t)\left(1-\left(\frac{\phi_\mu(t)}{\theta}\right)^\mu\right)\phi_\mu(t)^{-\mu-1}\\
&= -az_\mu(t)\left(1-\frac{1}{z_\mu(t)\theta^\mu}\right)\\
z_\mu'(t) &= -az_\mu(t)+\frac{a}{\theta^\mu}
\end{aligned}$$

Ainsi z_μ vérifie l'équation différentielle linéaire avec second membre $y'+ay=a/\theta^\mu$ avec la condition initiale $z(0)={y_{\text{init}}}^{-\mu}$. Résolvons dans un premier temps l'équation homogène $y'+ay=0$. Ses solutions sont de la forme $z_{\text{H}} : t\mapsto \mathrm{K}\mathrm{e}^{-at}$ avec $\mathrm{K}\in\mathbb{R}$. Cherchons maintenant une solution particulière de la forme du second membre qui est une constante. Soit $z_{\text{P}}=\mathrm{C}\in\mathbb{R}$. En particulier, ${z_{\text{P}}}'=0$. Si z_{P} satisfait $y'+ay=a/\theta^\mu$ alors $az_{\text{P}}=a\mathrm{C}=a/\theta^\mu$. Ainsi $z_{\text{P}}=\theta^{-\mu}$ est une solution particulière. Les solutions de $y'+ay=a/\theta^\mu$ sont donc de la forme $z : t\mapsto \mathrm{K}\mathrm{e}^{-at}+\theta^{-\mu}$ avec $\mathrm{K}\in\mathbb{R}$.

> On aurait aussi pu appliquer la méthode de la variation de la constante pour déterminer une solution particulière. Voici une proposition de rédaction.
>
> Déterminons une solution particulière de l'équation différentielle avec second membre $y'+ay=a/\theta^\mu$ sous la forme $z_{\text{P}} : t\mapsto \mathrm{K}(t)\mathrm{e}^{-at}$ où $\mathrm{K}\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$. Dans ce cas, z_{P} est elle aussi de classe $\mathscr{C}^1$ car c'est un produit de telles fonctions et on a
>
> $$z_{\text{P}}' : t\mapsto \mathrm{K}'(t)\mathrm{e}^{-at}-a\mathrm{K}(t)\mathrm{e}^{-at}$$
>
> de sorte que z_{P} vérifie $y'+ay=a/\theta^\mu$ si, et seulement si,
>
> $$\forall\, t\in\mathbb{R}\qquad \mathrm{K}'(t)\mathrm{e}^{-at}-a\mathrm{K}(t)\mathrm{e}^{-at}+a\mathrm{K}(t)\mathrm{e}^{-at}=\frac{a}{\theta^\mu}$$
>
> si, et seulement si, $\qquad \forall\, t\in\mathbb{R}\qquad \mathrm{K}'(t)\mathrm{e}^{-at}=\dfrac{a}{\theta^\mu}$
>
> si, et seulement si, $\qquad \forall\, t\in\mathbb{R}\qquad \mathrm{K}'(t)=\dfrac{a}{\theta^\mu}\mathrm{e}^{at}$
>
> Il suffit donc de choisir $\mathrm{K} : t\mapsto \mathrm{e}^{at}\theta^{-\mu}$ pour que $z_{\text{P}} : t\mapsto \mathrm{K}(t)\mathrm{e}^{-at}=\theta^{-\mu}$ soit solution de l'équation différentielle $y'+ay=a/\theta^\mu$.

Or, la solution recherchée satisfait $z(0)={y_{\text{init}}}^{-\mu}$ donc $\mathrm{K}+\theta^{-\mu}={y_{\text{init}}}^{-\mu}$ ce qui impose $\mathrm{K}={y_{\text{init}}}^{-\mu}-\theta^{-\mu}$. Ainsi,

$$\forall\, t\in[\,0\,;+\infty\,[\qquad z_\mu(t)=({y_{\text{init}}}^{-\mu}-\theta^{-\mu})\mathrm{e}^{-at}+\theta^{-\mu}$$

donc
$$\boxed{\forall\, t\in[\,0\,;+\infty\,[\qquad \phi_\mu(t)=\left(({y_{\text{init}}}^{-\mu}-\theta^{-\mu})\mathrm{e}^{-at}+\theta^{-\mu}\right)^{-\frac{1}{\mu}}}$$

$\boxed{\textbf{I-3.(a)}}$ Soit $y\in\,]\,0\,;+\infty\,[$. Écrivons un développement limité d'ordre 1 de F_μ fonction de y pour $\mu>0$ au voisinage de 0. Dans ce cas, $\ln(y/\theta)$ peut être vu comme une constante éventuellement nulle et on obtient

$$
\begin{aligned}
\mathrm{F}_\mu(y) &= \frac{a}{\mu} y\left(1-\left(\frac{y}{\theta}\right)^\mu\right) \\
&= \frac{a}{\mu} y\big(1-\mathrm{e}^{\,\mu\ln(y/\theta)}\big) \\
&= \frac{a}{\mu} y\left(1-\left(1+\mu\ln\left(\frac{y}{\theta}\right)+\underset{\mu\to 0}{\mathrm{o}}(\mu)\right)\right) \\
&= -ay\ln\left(\frac{y}{\theta}\right)+\underset{\mu\to 0}{\mathrm{o}}(1) \\
&= ay\ln\left(\frac{\theta}{y}\right)+\underset{\mu\to 0}{\mathrm{o}}(1) \\
\mathrm{F}_\mu(y) &= \mathrm{F}_0(y)+\underset{\mu\to 0}{\mathrm{o}}(1)
\end{aligned}
$$

Ceci étant valable pour tout $y > 0$, on en déduit que

$$\boxed{\text{Lorsque } \mu \text{ tend vers } 0,\ \mathrm{F}_\mu \text{ converge simplement vers } \mathrm{F}_0.}$$

I-3.(b) Fixons $t \geqslant 0$. D'après la formule obtenue dans la réponse à la question I-2., pour tout $\mu > 0$,

$$
\begin{aligned}
\phi_\mu(t) &= \big(({y_{\mathrm{init}}}^{-\mu}-\theta^{-\mu})\mathrm{e}^{\,-at}+\theta^{-\mu}\big)^{-\frac{1}{\mu}} \\
&= \exp\left(-\frac{1}{\mu}\ln\Big((\mathrm{e}^{\,-\mu\ln y_{\mathrm{init}}}-\mathrm{e}^{\,-\mu\ln\theta})\mathrm{e}^{\,-at}+\mathrm{e}^{\,-\mu\ln\theta}\Big)\right)
\end{aligned}
$$

Effectuons un développement limité lorsque μ tend vers 0.

$$
\begin{aligned}
\phi_\mu(t) &= \exp\left(-\frac{1}{\mu}\ln\Big(\big(1-\mu\ln y_{\mathrm{init}}-(1-\mu\ln\theta)\big)\mathrm{e}^{\,-at}+1-\mu\ln\theta+\underset{\mu\to 0}{\mathrm{o}}(\mu)\Big)\right) \\
&= \exp\left(-\frac{1}{\mu}\ln\left(1+\mu\ln\left(\frac{\theta}{y_{\mathrm{init}}}\right)\mathrm{e}^{\,-at}-\mu\ln\theta+\underset{\mu\to 0}{\mathrm{o}}(\mu)\right)\right) \\
\phi_\mu(t) &= \exp\left(-\frac{1}{\mu}\left(\mu\ln\left(\frac{\theta}{y_{\mathrm{init}}}\right)\mathrm{e}^{\,-at}-\mu\ln\theta+\underset{\mu\to 0}{\mathrm{o}}(\mu)\right)\right)
\end{aligned}
$$

On obtient donc

$$\phi_\mu(t) = \exp\left(\ln\left(\frac{\theta}{y_{\mathrm{init}}}\right)\mathrm{e}^{\,-at}+\ln\theta+\underset{\mu\to 0}{\mathrm{o}}(1)\right) = \theta\left(\frac{\theta}{y_{\mathrm{init}}}\right)^{\mathrm{e}^{\,-at}}\big(1+\underset{\mu\to 0}{\mathrm{o}}(1)\big)$$

La formule obtenue pour ϕ_0 dans la réponse à la question I-1.(b) assure alors que

$$\lim_{\mu\to 0}\phi_\mu(t) = \phi_0(t)$$

Ceci étant valable pour tout $t \geqslant 0$, on conclut que

$$\boxed{\text{Lorsque } \mu \text{ tend vers } 0,\ \phi_\mu \text{ converge simplement vers } \phi_0.}$$

II. Un théorème de compacité

> Le vocabulaire choisi dans le sujet ne correspond pas à celui des programmes. En effet, le sujet mentionne des sous-suites ce qui correspond aux suites extraites dans la terminologie habituelle.

II-1. Soient $x \in \mathrm{K}$ et $\varepsilon > 0$. On sait que $k > 0$ ce qui permet de définir $r = \varepsilon/k > 0$. Pour toute $f \in \mathrm{B}$ et tout $y \in \mathrm{B}(x,r)$, f étant k-lipschitzienne,

$$\|f(x) - f(y)\| \leqslant k\|x - y\| \leqslant kr = \varepsilon$$

Ainsi, par définition,

$$\boxed{\text{L'ensemble B est équicontinu.}}$$

II-2. Raisonnons par double implication.

- $(\Rightarrow)$: Supposons que A est relativement compacte. Cela signifie qu'il existe $\mathscr{K}$ une partie compacte de $\mathscr{C}(\mathrm{K},\mathbb{R}^d)$ telle que $\mathrm{A} \subset \mathscr{K}$. Considérons $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{A}^{\mathbb{N}}$. Alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{K}^{\mathbb{N}}$ et $\mathscr{K}$ est une partie compacte pour la norme infinie donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente pour la norme infinie. On note $f \in \mathscr{K} \subset \mathscr{C}(\mathrm{K},\mathbb{R}^d)$ sa limite. Alors, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite qui converge uniformément vers f ce qui permet de conclure.

- $(\Leftarrow)$: Réciproquement, supposons que de toute suite de fonctions de A on peut extraire une sous-suite uniformément convergente. Notons $\mathscr{K}$ l'adhérence de A pour la norme infinie. On sait déjà que $\mathrm{A} \subset \mathscr{K}$. Montrons que $\mathscr{K}$ est compacte. Soit $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{K}^{\mathbb{N}}$. Par définition de l'adhérence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $f_n \in \mathrm{A}$ telle que

$$\|g_n - f_n\|_\infty \leqslant \frac{1}{n+1}$$

Or, comme $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions de A, elle admet une sous-suite qui converge uniformément. Notons $f \in \mathscr{C}(\mathrm{K},\mathbb{R}^d)$ sa limite et fixons une extractrice $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f. Alors

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \|g_{\varphi(n)} - f\|_\infty &\leqslant \|g_{\varphi(n)} - f_{\varphi(n)}\|_\infty + \|f_{\varphi(n)} - f\|_\infty \\ &\leqslant \frac{1}{\varphi(n)+1} + \|f_{\varphi(n)} - f\|_\infty \end{aligned}$$

Or, $$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\varphi(n)+1} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \|f_{\varphi(n)} - f\|_\infty = 0$$

donc, par encadrement,

$$\lim_{n\to+\infty} \|g_{\varphi(n)} - f\|_\infty = 0$$

Autrement dit, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite qui converge uniformément et sa limite est un élément de $\mathscr{C}(\mathrm{K},\mathbb{R}^d)$. De plus, le caractère fermé de $\mathscr{K}$ en tant qu'adhérence de A assure que cette limite est un élément de $\mathscr{K} \subset \mathscr{C}(\mathrm{K},\mathbb{R}^d)$. On a ainsi montré que $\mathscr{K}$ est compacte donc $\mathrm{A} \subset \mathscr{K}$ est relativement compacte.

> Toute partie A de $\mathscr{C}(\mathrm{K},\mathbb{R}^d)$ est relativement compacte si, et seulement si, de toute suite à valeurs dans A on peut extraire une suite qui converge uniformément et dont la limite est un élément de $\mathscr{C}(\mathrm{K},\mathbb{R}^d)$.

II-3. Soit A une partie relativement compacte de $\mathscr{C}(\mathrm{K},\mathbb{R}^d)$. Supposons que A n'est pas équicontinue c'est-à-dire qu'il existe $x_0 \in \mathrm{K}$ et $\varepsilon_0 > 0$ tels que

$$\forall r > 0 \quad \exists f \in \mathrm{A} \quad \exists y \in \mathrm{B}(x_0, r) \qquad \|f(x_0) - f(y)\| > \varepsilon_0$$

En particulier, avec $r = 1/(n+1)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{A}^{\mathbb{N}}$ et une suite $(y_n) \in \mathrm{K}^{\mathbb{N}}$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \|f_n(x_0) - f_n(y_n)\| > \varepsilon_0 \quad \text{et} \quad \|y_n - x_0\| \leqslant \frac{1}{n+1}$$

Or, d'après le résultat de la question II-2., A étant relativement compacte, il existe une extractrice $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante et $f \in \mathscr{C}(\mathrm{K},\mathbb{R}^d)$ telles que $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f. Par inégalité triangulaire, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &< \|f_{\varphi(n)}(x_0) - f_{\varphi(n)}(y_{\varphi(n)})\| \\ &\leqslant \|f_{\varphi(n)}(x_0) - f(x_0)\| + \|f(x_0) - f(y_{\varphi(n)})\| + \|f(y_{\varphi(n)}) - f_{\varphi(n)}(y_{\varphi(n)})\| \quad (*) \end{aligned}$$

D'une part, la convergence uniforme de $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ vers f assure que

$$\lim_{n\to\infty} \|f_{\varphi(n)}(x_0) - f(x_0)\| = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} \|f(y_{\varphi(n)}) - f_{\varphi(n)}(y_{\varphi(n)})\| = 0$$

D'autre part, la suite $(y_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers x_0 car

$$\|y_{\varphi(n)} - x_0\| \leqslant \frac{1}{\varphi(n)+1}$$

La continuité de f permet alors d'obtenir

$$\lim_{n\to\infty} \|f(x_0) - f(y_{\varphi(n)})\| = 0$$

Puis, en passant à la limite dans $(*)$, on obtient que $\varepsilon_0 \leqslant 0$ ce qui est absurde. Ainsi, A est équicontinue. En conclusion,

> Toute partie relativement compacte de $\mathscr{C}(\mathrm{K},\mathbb{R}^d)$ est équicontinue.

II-4. Soit A une partie de $\mathscr{C}(\mathrm{K},\mathbb{R}^d)$. On suppose que (P1) est vraie pour A c'est-à-dire que A est relativement compacte. Comme on l'a vu dans la réponse à la question II-3., on sait dans ce cas que A est équicontinue. Soit $x \in \mathrm{K}$. Par l'absurde, supposons que $\mathrm{A}(x)$ n'est pas bornée. Dans ce cas,

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists f_n \in \mathrm{A} \qquad \|f_n(x)\| \geqslant n$$

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une telle suite de fonctions. En particulier, on a que

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n(x)\| = +\infty$$

De plus, comme $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans A qui est relativement compacte, il existe une certaine fonction $f \in \mathscr{C}(\mathrm{K},\mathbb{R}^d)$ et une extractice $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f. En particulier, $\big(f_{\varphi(n)}(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$ car la convergence uniforme implique la convergence simple. Puis, par continuité de la norme dans $\mathbb{R}^d$,

$$\lim_{n\to\infty} \|f_{\varphi(n)}(x)\| = \|f(x)\|$$

ce qui contredit le fait que $\left(\|f_n(x)\|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$. Ainsi, $\mathrm{A}(x)$ est bornée. On a montré que

$$\boxed{(\mathrm{P1}) \implies (\mathrm{P2})}$$

II-5.(a) Montrons par récurrence que la propriété

$\mathscr{P}(p)$: il existe $(\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_p) \in (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^{p+1}$ telle que pour tout $q \in [\![0\,; p]\!]$, φ_q est strictement croissante et la suite $\left(f_{\psi_p(n)}(x_p)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, où ψ_p est définie par les conditions

$$\psi_0 = \varphi_0 \quad \text{et} \quad \forall\, q \in [\![0\,; p-1]\!] \qquad \psi_{q+1} = \psi_q \circ \varphi_{q+1}$$

est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}$.

- <u>$\mathscr{P}(0)$</u> : Considérons la suite $\left(f_n(x_0)\right)_{n\in\mathbb{N}}$. C'est une suite à valeurs dans l'ensemble $\mathrm{A}(x_0) \subset \mathbb{R}^d$ qui est borné par hypothèse. On peut donc en extraire une sous-suite convergente. Autrement dit, il existe $\varphi_0 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que la suite $\left(f_{\varphi_0(n)}(x_0)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Ainsi, $\mathscr{P}(0)$ est vraie en posant $\psi_0 = \varphi_0$.
- <u>$\mathscr{P}(p) \implies \mathscr{P}(p+1)$</u> : Supposons que, pour un entier $p \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathscr{P}(p)$ est vraie. La suite $\left(f_{\psi_p(n)}(x_{p+1})\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans $\mathrm{A}(x_{p+1}) \subset \mathbb{R}^d$ qui est borné car A vérifie (P2). Il est donc possible d'en extraire une sous-suite convergente : il existe $\varphi_{p+1} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction strictement croissante telle que la suite $\left(f_{\psi_p\circ\varphi_{p+1}(n)}(x_{p+1})\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. En prenant $\psi_{p+1} = \psi_p \circ \varphi_{p+1}$, on a donc bien la convergence de la suite $\left(f_{\psi_{p+1}(n)}(x_{p+1})\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ce qui prouve que $\mathscr{P}(p+1)$ est vraie.
- <u>Conclusion</u> : D'après le principe de récurrence, $\mathscr{P}(p)$ est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}$.

> Il existe $(\varphi_p)_{p\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ telle que pour tout $p \in \mathbb{N}$, φ_p est strictement croissante et la suite $\left(f_{\psi_p(n)}(x_p)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, où ψ_p est définie par les conditions
>
> $$\psi_0 = \varphi_0 \quad \text{et} \quad \forall\, q \in [\![0\,; p-1]\!] \qquad \psi_{q+1} = \psi_q \circ \varphi_{q+1}$$

II-5.(b) Soit $p \in \mathbb{N}$. On sait que la suite $\left(f_{\psi_p(n)}(x_p)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge d'après le résultat de la question II-5.(a). Pour $n \geqslant p$, remarquons que

$$\psi_n(n) = \psi_p \circ \varphi_{p+1} \circ \cdots \circ \varphi_n(n)$$

et utilisons cette expression pour montrer que la suite $(f_{\psi_n(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de $(f_{\psi_p(n)})_{n\in\mathbb{N}}$. Montrons que la fonction

$$\Phi : \begin{cases} \{n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant p\} \longrightarrow \mathbb{N} \\ \qquad n \qquad\qquad \longmapsto \varphi_{p+1} \circ \cdots \circ \varphi_n(n) \end{cases}$$

est strictement croissante. Pour ce faire, remarquons d'abord que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a l'inégalité $\varphi_n(n) \geqslant n$. En effet, si ce n'était pas le cas, cela contredirait la stricte croissance de $\varphi_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Considérons maintenant $n \geqslant p$. Vu la remarque faite précédemment puis par stricte croissance des φ_q pour $q \in \mathbb{N}$, il vient

$$\begin{aligned} \Phi(n+1) &= \varphi_{p+1} \circ \cdots \circ \varphi_n \circ \varphi_{n+1}(n+1) \\ &\geqslant \varphi_{p+1} \circ \cdots \circ \varphi_n(n+1) \\ &> \varphi_{p+1} \circ \cdots \circ \varphi_n(n) \\ \Phi(n+1) &> \Phi(n) \end{aligned}$$

On a ainsi obtenu que Φ est une extractrice et donc que la suite

$$\left(f_{\psi_n(n)}(x_p)\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(f_{\psi_p\circ\Phi(n)}(x_p)\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

est une suite extraite de la suite $\left(f_{\psi_p(n)}(x_p)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge d'après le résultat de la question II-5.(a). Ceci assure que

$$\boxed{\text{La suite } \left(f_{\psi_n(n)}(x_p)\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge pour tout } p\in\mathbb{N}.}$$

> Le procédé utilisé dans cette question s'appelle une extraction diagonale.

II-6.(a) On sait que $\mathbb{Q}$ est dénombrable donc $\mathbb{Q}\cap\mathrm{K}$ est soit infini dénombrable soit fini. Dans tous les cas, on peut énumérer les éléments de $\mathbb{Q}\cap\mathrm{K}$. Autrement dit, il existe une suite $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall\, x\in\mathbb{Q}\cap\mathrm{K}\quad \exists\, p\in\mathbb{N}\qquad x = x_p$$

D'après le résultat de la question II-5.(b), on peut extraire une sous-suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\left(g_n(x_p)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge pour tout $p\in\mathbb{N}$. Par surjectivité de $p\mapsto x_p$ de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Q}\cap\mathrm{K}$, cela signifie que $\left(g_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge pour tout $x\in\mathbb{Q}\cap\mathrm{K}$. Autrement dit,

$$\boxed{\text{La suite } (g_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ extraite de } (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge simplement sur } \mathbb{Q}\cap\mathrm{K}.}$$

II-6.(b)

> Il y a une erreur d'énoncé ici : on doit supposer de plus que $\mathbb{Q}\cap\mathrm{K}$ est dense dans K. En effet, par exemple pour $\mathrm{K} = \{\sqrt{2}\}$ et $\mathrm{A} = \mathscr{C}(\mathrm{K},\mathbb{R})$ qui vérifie bien (P2), en prenant pour tout $n\in\mathbb{N}$,
>
> $$f_n(\sqrt{2}) = g_n(\sqrt{2}) = (-1)^n$$
>
> on a que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge simplement sur $\mathrm{K}\cap\mathbb{Q} = \varnothing$. Pourtant, $\left(g_n(\sqrt{2})\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet deux valeurs d'adhérence.

Supposons que $\mathbb{Q}\cap\mathrm{K}$ est dense dans K. Soit $x\in\mathrm{K}$. Par densité, il existe une suite $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}\in(\mathbb{Q}\cap\mathrm{K})^{\mathbb{N}}$ qui converge vers x. Comme $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathrm{A}^{\mathbb{N}}$ et A est équicontinue car (P2) est vérifiée,

$$\forall\,\varepsilon>0\quad \exists\,\mathrm{P}\in\mathbb{N}\quad \forall\, n\in\mathbb{N}\quad \forall p\in\mathbb{N}\qquad p\geqslant \mathrm{P} \implies \|g_n(x)-g_n(x_p)\|\leqslant\varepsilon$$

Or, vu le résultat de la question II-6.(a), pour tout $p\in\mathbb{N}$, comme $x_p\in\mathbb{Q}\cap\mathrm{K}$, la suite $\left(g_n(x_p)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Notons $g(x_p)$ sa limite. Soit $y\in\mathbb{R}^d$ une valeur d'adhérence de $\left(g_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ si elle existe. Il existe alors $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} g_{\varphi(n)}(x) = y$$

Dès lors, on peut écrire

$$\forall\,\varepsilon>0\quad \exists\,\mathrm{P}\in\mathbb{N}\quad \forall\, n\in\mathbb{N}\quad \forall p\in\mathbb{N}\qquad p\geqslant \mathrm{P} \implies \|g_{\varphi(n)}(x)-g_{\varphi(n)}(x_p)\|\leqslant\varepsilon$$

Puis, en faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient

$$\forall\,\varepsilon>0\quad \exists\,\mathrm{P}\in\mathbb{N}\quad \forall p\in\mathbb{N}\qquad p\geqslant \mathrm{P} \implies \|y-g(x_p)\|\leqslant\varepsilon$$

Cela signifie que $$\lim_{p\to\infty} g(x_p) = y$$

Par unicité de la limite, il vient que $\big(g_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ admet au plus une valeur d'adhérence. Or, cette suite est à valeurs dans $\mathrm{A}(x)$ qui est borné car A vérifie (P2) donc elle admet au moins une valeur d'adhérence. Ainsi,

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathrm{K}, \text{ la suite } \big(g_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}} \text{ admet exactement une valeur d'adhérence notée } g(x).}$$

Or, une suite d'un compact admettant une unique valeur d'adhérence est convergente. En conclusion

$$\boxed{\text{La suite } (g_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge simplement vers } g \text{ sur K.}}$$

II-7.(a) Soit $x \in \mathrm{K}$. Montrons que g est continue en x. Prenons $\varepsilon > 0$. On sait que A est équicontinue donc on peut trouver $r > 0$ tel que

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \forall\, y \in \mathrm{B}(x,r) \qquad \|g_n(x) - g_n(y)\| \leqslant \varepsilon$$

Ainsi, pour $y \in \mathrm{B}(x,r)$, en passant à la limite lorsque n tend vers $+\infty$ et en utilisant le résultat de la question II-6.(b) et la continuité de la norme, il vient $\|g(x)-g(y)\| \leqslant \varepsilon$. Ceci signifie que g est continue en x. Ceci étant valable pour tout $x \in \mathrm{K}$, on en déduit que

$$\boxed{\text{La fonction } g \text{ est continue sur K.}}$$

II-7.(b) Supposons que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers g c'est-à-dire

$$\exists\, \varepsilon_0 > 0 \quad \forall\, \mathrm{N} \in \mathbb{N} \quad \exists\, n_\mathrm{N} \in \mathbb{N} \qquad \begin{cases} n_\mathrm{N} > \mathrm{N} \\ \exists\, x_{n_\mathrm{N}} \in \mathrm{K} \qquad \|g_{n_\mathrm{N}}(x_{n_\mathrm{N}}) - g(x_{n_\mathrm{N}})\| > \varepsilon_0 \end{cases}$$

Soient un tel ε_0 et une suite $(n_\mathrm{N})_{\mathrm{N}\in\mathbb{N}}$ que l'on peut supposer strictement croissante sans perte de généralité. Considérons alors la suite $(x_{n_\mathrm{N}})_{\mathrm{N}\in\mathbb{N}}$ induite par ce choix. C'est une suite à valeurs dans K qui est une partie compacte donc il existe une extractrice φ et $y \in \mathrm{K}$ tels que $(x_{n_{\varphi(\mathrm{N})}})_{\mathrm{N}\in\mathbb{N}}$ converge vers y. Par inégalités triangulaires, il vient alors

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &< \big\| g_{n_{\varphi(\mathrm{N})}}(x_{n_{\varphi(\mathrm{N})}}) - g(x_{n_{\varphi(\mathrm{N})}}) \big\| \\ &\leqslant \big\| g_{n_{\varphi(\mathrm{N})}}(x_{n_{\varphi(\mathrm{N})}}) - g_{n_{\varphi(\mathrm{N})}}(y) \big\| + \big\| g_{n_{\varphi(\mathrm{N})}}(y) - g(y) \big\| + \big\| g(y) - g(x_{n_{\varphi(\mathrm{N})}}) \big\| \end{aligned}$$

pour tout $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$. Étudions séparément chacun de ces trois termes.

- L'équicontinuité de A assure l'existence de $r > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $(x,x') \in \mathrm{K}^2$ tel que $|x - x'| < r$, on ait

  $$\big\| g_n(x) - g_n(x') \big\| \leqslant \frac{\varepsilon_0}{4}$$

  Or, la suite $(x_{n_{\varphi(\mathrm{N})}})_{\mathrm{N}\in\mathbb{N}}$ converge vers y, donc il existe $\mathrm{N}_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $\mathrm{N} \geqslant \mathrm{N}_1$, on ait $\big|x_{n_{\varphi(\mathrm{N})}} - y\big| < r$. On en déduit que

  $$\forall\, \mathrm{N} \geqslant \mathrm{N}_1 \qquad \big\| g_{n_{\varphi(\mathrm{N})}}(x_{n_{\varphi(\mathrm{N})}}) - g_{n_{\varphi(\mathrm{N})}}(y) \big\| \leqslant \frac{\varepsilon_0}{4}$$

- La convergence simple de $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ démontrée dans la question II-6.(b) et la stricte croissance de $(n_\mathrm{N})_{\mathrm{N}\in\mathbb{N}}$ assure la convergence simple de $(g_{n_{\varphi(\mathrm{N})}})_{\mathrm{N}\in\mathbb{N}}$ vers g et donc qu'il existe $\mathrm{N}_2 \in \mathbb{N}$ tel que

  $$\forall\, \mathrm{N} \geqslant \mathrm{N}_2 \qquad \big\| g_{n_{\varphi(\mathrm{N})}}(y) - g(y) \big\| \leqslant \frac{\varepsilon_0}{4}$$

- La continuité de g obtenue à la question $\text{II}-7.(a)$ donne l'existence de $\text{N}_3 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall\, \text{N} \geqslant \text{N}_3 \qquad \big\|\, g(y) - g(x_{n_{\varphi(\text{N})}})\,\big\| \leqslant \frac{\varepsilon_0}{4}$$

Pour $\text{N} = \max\{\text{N}_1, \text{N}_2, \text{N}_3\}$, en combinant ces trois inégalités, on obtient que

$$0 < \varepsilon_0 \leqslant \frac{3}{4}\varepsilon_0$$

ce qui est absurde. En conclusion,

$$\boxed{\text{La suite } (g_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge uniformément sur K.}}$$

II-7.(c) Soit A une partie de $\mathscr{C}(\text{K}, \mathbb{R}^d)$ vérifiant (P2). Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \text{A}^{\mathbb{N}}$. D'après le résultat de la question II-7.(b), on peut en extraire une sous-suite uniformément convergente sur K et de plus, le résultat de la question II-7.(a) assure que sa limite est continue sur K. Ceci étant vrai pour toute suite à valeurs dans A, le résultat de la question II-2. assure que A est relativement compacte c'est-à-dire qu'elle vérifie (P1). En conclusion,

$$\boxed{(\text{P2}) \implies (\text{P1})}$$

III. Existence de solutions

III-1. On sait que Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$ contenant y_{init} donc il existe $r > 0$ tel que la boule ouverte $\text{B}(y_{\text{init}}, r)$ est incluse dans Ω. Alors, la boule fermée $\bar{\text{B}}(y_{\text{init}}, r/2)$ est incluse dans Ω et est compacte car fermée bornée en dimension finie. Considérons $\widetilde{\text{F}}$ la restriction de F au compact $\bar{\text{B}}(y_{\text{init}}, r/2)$. Par continuité de F, la fonction $\widetilde{\text{F}}$ est elle aussi continue sur le compact sur lequel elle est définie. Donc, elle est bornée et atteint ses bornes. Ceci assure l'existence de

$$\text{M} = \max\big(\{\|\widetilde{\text{F}}(y)\| \quad y \in \bar{\text{B}}(y_{\text{init}}, r/2)\} \cup \{1\}\big) > 0 \quad \text{et} \quad \text{T} = \frac{r}{3\text{M}} > 0$$

Soit $\text{N} \in \mathbb{N}^*$. Considérons alors $(y_n)_{n\in[\![\,0\,;\,\text{N}\,]\!]}$ telle que définie dans le sujet et montrons par récurrence sur $n \in [\![\,0\,;\text{N}\,]\!]$ la propriété

$$\mathscr{P}(n)\colon \qquad y_n \in \bar{\text{B}}(y_{\text{init}}, r/2) \subset \Omega \quad \text{et} \quad \|y_n - y_{\text{init}}\| \leqslant \frac{n}{\text{N}}\frac{r}{2}$$

- $\underline{\mathscr{P}(0)}$ est vraie car $y_0 = y_{\text{init}} \in \bar{\text{B}}(y_{\text{init}}, r/2) \subset \Omega$ et $y_0 - y_{\text{init}} = 0$.
- $\underline{\mathscr{P}(n) \implies \mathscr{P}(n+1)}$: pour un $n \in [\![\,0\,;\text{N}-1\,]\!]$, supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Remarquons que le fait que $y_n \in \Omega$ assure l'existence de $y_{n+1} = y_n + \Delta t\text{F}(y_n)$. En outre, par inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned}
\|y_{n+1}-y_{\text{init}}\| &\leqslant \|y_{n+1}-y_n\|+\|y_n-y_{\text{init}}\| \\
&\leqslant \|y_{n+1}-y_n\|+\frac{n}{\mathrm{N}}\frac{r}{2} && (\mathscr{P}(n)) \\
&\leqslant \Delta t\|\mathrm{F}(y_n)\|+\frac{n}{\mathrm{N}}\frac{r}{2} && (\text{définition de } y_{n+1}) \\
&\leqslant \frac{\mathrm{T}}{\mathrm{N}}\mathrm{M}+\frac{n}{\mathrm{N}}\frac{r}{2} && (y_n\in\bar{\mathrm{B}}(y_{\text{init}},r/2) \text{ car } n\leqslant \mathrm{N}) \\
&\leqslant \frac{1}{\mathrm{N}}\frac{r}{2}+\frac{n}{\mathrm{N}}\frac{r}{2} && (\text{définition de T}) \\
\|y_{n+1}-y_{\text{init}}\| &\leqslant \frac{n+1}{\mathrm{N}}\frac{r}{2}
\end{aligned}$$

En particulier, $$\frac{n+1}{\mathrm{N}}\leqslant 1$$

car $n\leqslant \mathrm{N}-1$.

Donc $$\|y_{n+1}-y_{\text{init}}\|\leqslant \frac{r}{2}$$

Autrement dit, $y_{n+1}\in\bar{\mathrm{B}}(y_{\text{init}},r/2)\subset\Omega$. Les deux points ont été prouvés donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

- Conclusion : $$\forall\, n\in [\![0\,;\mathrm{N}]\!] \qquad \|y_n-y_{\text{init}}\|\leqslant \frac{n}{\mathrm{N}}\frac{r}{2}$$

En particulier, $$\forall\, n\in [\![0\,;\mathrm{N}]\!] \qquad y_n\in\mathrm{B}(y_{\text{init}},r)$$

On a choisi $r>0$ et $\mathrm{T}>0$ de sorte que $\mathrm{B}(y_{\text{init}},r)\subset\Omega$ et la suite $(y_n)_{n\in[\![0\,;\mathrm{N}]\!]}$ est à valeurs dans $\mathrm{B}(y_{\text{init}},r)$ pour tout $\mathrm{N}\in\mathbb{N}^*$.

III-2. Fixons $\mathrm{N}\in\mathbb{N}^*$ et considérons la suite $(y_n)_{n\in[\![0\,;\mathrm{N}]\!]}$ définie dans la question III-1. Pour tout $n\in[\![0\,;n-1]\!]$, il existe un unique segment reliant les points de $[\,0\,;\mathrm{T}\,]\times\mathbb{R}^d$ de coordonnées $(n\Delta t,y_n)$ et $\big((n+1)\Delta t,y_{n+1}\big)$ que l'on peut paramétrer par

$$\phi_{\mathrm{N},n}:\begin{cases}[\,n\Delta t\,;(n+1)\Delta t\,]\longrightarrow\mathbb{R}^d\\ \qquad t \qquad\longmapsto \phi_{\mathrm{N},n}(t)\end{cases}$$

avec $$\phi_{\mathrm{N},n}(n\Delta t)=y_n \quad\text{et}\quad \phi_{\mathrm{N},n}\big((n+1)\Delta t\big)=y_{n+1}$$

de sorte que la fonction ϕ_{N} définie sur $[\,0\,;\mathrm{T}\,]$ par

$$\forall\, t\in[\,0\,;\mathrm{T}\,]\quad \forall\, n\in[\![0\,;n-1]\!]\qquad t\in[\,n\Delta t\,;(n+1)\Delta t\,]\implies \phi_{\mathrm{N}}(t)=\phi_{\mathrm{N},n}(t)$$

est bien définie, affine par morceaux et vérifie

$$\forall\, n\in[\![0\,;\mathrm{N}]\!]\qquad \phi_{\mathrm{N}}(n\Delta t)=y_n$$

et est l'unique fonction affine par morceaux vérifiant cette condition. Ainsi,

Il existe une unique fonction $\phi_{\mathrm{N}}:[\,0\,;\mathrm{T}\,]\to\mathbb{R}^d$ affine par morceaux telle que
$$\forall\, n\in[\![0\,;\mathrm{N}]\!]\qquad \phi_{\mathrm{N}}(n\Delta t)=y_n$$

III-3. Posons $$\mathrm{K}=[\,0\,;\mathrm{T}\,]\quad\text{et}\quad \mathrm{A}=\{\phi_{\mathrm{N}}\quad \mathrm{N}\in\mathbb{N}\}$$

donc K est compact avec $\mathbb{Q}\cap\mathrm{K}$ dense dans K et $\mathrm{A}\subset\mathscr{C}(\mathrm{K},\mathbb{R}^d)$. Pour appliquer le Théorème 1, montrons que A est équicontinue et que pour tout $t\in\mathrm{K}$, $\mathrm{A}(t)$ est bornée.

- Pour tout $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$, la fonction ϕ_{N} est affine par morceaux donc elle est k_{N}-lipschitzienne avec
$$k_{\mathrm{N}} = \max \left\{ \frac{\|y_{n+1} - y_n\|}{\Delta t} \quad n \in [\![0\,; \mathrm{N}-1]\!] \right\} \leqslant \frac{2r}{\Delta t}$$
car pour tout $n \in [\![0\,; \mathrm{N}]\!]$, $y_n \in \mathrm{B}(y_{\text{init}}, r)$ comme on l'a vu dans la réponse à la question III-1.. Ainsi, A est inclus dans l'ensemble des fonctions $2r/\Delta t$-lipschitziennes qui est équicontinu vu le résultat de la question II-1.. Ainsi, A est équicontinue.
- Notons que pour tout $t \in \mathrm{K} = [\,0\,; \mathrm{T}\,]$, $\mathrm{A}(t) \subset \mathrm{B}(y_{\text{init}}, r)$ par convexité de cette dernière et du fait que
$$\forall\, n \in [\![0\,; \mathrm{N}]\!] \qquad y_n \in \mathrm{B}(y_{\text{init}}, r)$$
d'après le résultat de la question III-1.. Ceci assure le caractère borné de $\mathrm{A}(t)$ pour tout $t \in [\,0\,; \mathrm{T}\,]$.

Dès lors, le Théorème 1 s'applique et assure que A est relativement compacte. D'après le résultat de la question II-2., il existe une extractrice φ telle que $\left(\phi_{\varphi(\mathrm{N})}\right)_{\mathrm{N}\in\mathbb{N}}$ converge uniformément dans $\mathscr{C}([\,0\,; \mathrm{T}\,], \mathbb{R}^d)$. En conclusion,

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{On peut extraire une sous-suite de } (\phi_{\mathrm{N}})_{\mathrm{N}\in\mathbb{N}} \text{ qui converge}\\ \text{uniformément et dont la limite } \phi \text{ est continue.}\end{array}}$$

III-4. Soit $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$. Définissons $\psi_{\mathrm{N}} : [\,0\,; \mathrm{T}\,] \to \mathbb{R}^d$ par
$$\boxed{\forall\, t \in [\,0\,; \mathrm{T}\,[\quad \forall\, n \in [\![0\,; \mathrm{N}-1]\!] \qquad t \in [\,n\Delta t\,; (n+1)\Delta t\,[\implies \psi_{\mathrm{N}}(t) = y_n}$$
et
$$\psi_{\mathrm{N}}(\mathrm{T}) = y_{\mathrm{N}}$$
Alors, ψ_{N} est en escalier et pour tout $t \in [\,0\,; \mathrm{T}\,]$,
$$\mathrm{I}_{\mathrm{N}}(t) = y_{\text{init}} + \int_0^t \mathrm{F}\big(\psi_{\mathrm{N}}(s)\big)\mathrm{d}s$$
est bien définie car $s \mapsto \mathrm{F}\big(\psi_{\mathrm{N}}(s)\big)$ est en escalier donc continue par morceaux. De plus, cela assure que I_{N} est continue et affine par morceaux. Montrons par récurrence sur $n \in [\![0\,; \mathrm{N}]\!]$ la propriété
$$\mathscr{P}(n): \qquad \mathrm{I}_{\mathrm{N}}(n\Delta t) = y_n$$

- $\underline{\mathscr{P}(0)}$ est vraie car $y_0 = y_{\text{init}}$.
- $\underline{\mathscr{P}(n) \implies \mathscr{P}(n+1)}$: Pour un $n \in [\![0\,; \mathrm{N}-1]\!]$, supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Alors,
$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_{\mathrm{N}}\big((n+1)\Delta t\big) &= y_{\text{init}} + \int_0^{(n+1)\Delta t} \mathrm{F}\big(\psi_{\mathrm{N}}(s)\big)\mathrm{d}s \\
&= y_{\text{init}} + \int_0^{n\Delta t} \mathrm{F}\big(\psi_{\mathrm{N}}(s)\big)\mathrm{d}s + \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} \mathrm{F}\big(\psi_{\mathrm{N}}(s)\big)\mathrm{d}s \\
&= \mathrm{I}_{\mathrm{N}}(n\Delta t) + \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} \mathrm{F}(y_n)\mathrm{d}s && (\mathscr{P}(n)) \\
&= y_n + \Delta t\mathrm{F}(y_n) \\
\mathrm{I}_{\mathrm{N}}\big((n+1)\Delta t\big) &= y_{n+1} && \text{par définition de } (y_n)_{n\in\mathbb{N}}
\end{aligned}$$
Ainsi, $\mathscr{P}(n+1)$ est vérifiée.

- Conclusion : $\forall\, n \in [\![\, 0\,;\mathrm{N}\,]\!] \qquad \mathrm{I_N}(n\Delta t) = y_n$

Ainsi, par unicité de la fonction ϕ_N donnée dans le résultat de la question III-2., on déduit que $\mathrm{I_N} = \phi_\mathrm{N}$ c'est-à-dire

$$\boxed{\forall\, t \in [\,0\,;\mathrm{T}\,] \qquad \phi_\mathrm{N}(t) = y_\mathrm{init} + \int_0^t \mathrm{F}\big(\psi_\mathrm{N}(s)\big)\mathrm{d}s}$$

III-5. Considérons φ l'extractrice obtenue dans la réponse à la question III-3. de sorte que $\big(\phi_{\varphi(\mathrm{N})}\big)_{\mathrm{N}\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers ϕ et montrons qu'il en est de même pour $\big(\psi_{\varphi(\mathrm{N})}\big)_{\mathrm{N}\in\mathbb{N}^*}$. Pour tout $s \in [\,0\,;\mathrm{T}\,]$ et tout $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$, $\varphi(\mathrm{N}) > 0$ et

$$\psi_{\varphi(\mathrm{N})}(s) = \phi_{\varphi(\mathrm{N})}(s_\mathrm{N}) \quad \text{avec} \quad s_\mathrm{N} = \mathrm{E}\left(\frac{\varphi(\mathrm{N})}{\mathrm{T}}s\right)\frac{\mathrm{T}}{\varphi(\mathrm{N})}$$

Encadrons la suite $(s_\mathrm{N})_{\mathrm{N}\in\mathbb{N}}$ afin de déterminer son éventuelle limite. Soit $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$. Par définition de la partie entière,

$$\frac{\varphi(\mathrm{N})}{\mathrm{T}}s - 1 < \mathrm{E}\left(\frac{\varphi(\mathrm{N})}{\mathrm{T}}s\right) \leqslant \frac{\varphi(\mathrm{N})}{\mathrm{T}}s$$

Or, $\mathrm{T}/\varphi(\mathrm{N}) > 0$. Il vient

$$s - \frac{\mathrm{T}}{\varphi(\mathrm{N})} < s_\mathrm{N} \leqslant s$$

Puis, comme $$\lim_{\mathrm{N}\to\infty} \varphi(\mathrm{N}) = +\infty$$

on obtient par encadrement, $$\lim_{\mathrm{N}\to\infty} s_\mathrm{N} = s$$

Ainsi
$$\begin{aligned}\big\|\,\psi_{\varphi(\mathrm{N})}(s) - \phi(s)\,\big\| &= \big\|\,\phi_{\varphi(\mathrm{N})}(s_\mathrm{N}) - \phi(s)\,\big\| \\ &\leqslant \big\|\,\phi_{\varphi(\mathrm{N})}(s_\mathrm{N}) - \phi(s_\mathrm{N})\,\big\| + \big\|\,\phi(s_\mathrm{N}) - \phi(s)\,\big\|\end{aligned}$$

On traite ces deux termes séparément. Soit $\varepsilon > 0$.

- On sait d'après le résultat de la question III-3. que $\big(\phi_{\varphi(\mathrm{N})}\big)_{\mathrm{N}\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers ϕ donc il existe $\mathrm{N}_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que

  $$\forall\, \mathrm{N} \in \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{N} \geqslant \mathrm{N}_1 \implies \big(\forall\, \sigma \in [\,0\,;\mathrm{T}\,] \quad \|\phi_{\varphi(\mathrm{N})}(\sigma) - \phi(\sigma)\| \leqslant \varepsilon/2\big)$$

  En particulier,

  $$\forall\, \mathrm{N} \in \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{N} \geqslant \mathrm{N}_1 \implies \|\phi_{\varphi(\mathrm{N})}(s_\mathrm{N}) - \phi(s_\mathrm{N})\| \leqslant \varepsilon/2$$

- La fonction ϕ est continue sur le compact $[\,0\,;\mathrm{T}\,]$ donc elle est uniformément continue d'après le théorème de Heine. De plus, on a vu que s_N tend vers s lorsque N tend vers $+\infty$. Par conséquent, il existe $\mathrm{N}_2 \in \mathbb{N}^*$ tel que

  $$\forall\, \mathrm{N} \in \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{N} \geqslant \mathrm{N}_2 \implies \big(\forall\, s \in [\,0\,;\mathrm{T}\,] \quad \|\phi(s_\mathrm{N}) - \phi(s)\| \leqslant \varepsilon/2\big)$$

En combinant les deux assertions précédentes, il vient

$$\forall\, \mathrm{N} \in \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{N} \geqslant \max(\mathrm{N}_1, \mathrm{N}_2) \implies \big(\forall\, s \in [\,0\,;\mathrm{T}\,] \quad \|\psi_{\varphi(\mathrm{N})}(s) - \phi(s)\| \leqslant \varepsilon\big)$$

ce qui prouve que $\big(\psi_{\varphi(\mathrm{N})}\big)_{\mathrm{N}\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers ϕ. En conclusion,

$$\boxed{\text{On peut extraire une sous-suite de } (\psi_\mathrm{N})_{\mathrm{N}\in\mathbb{N}^*} \text{ qui converge uniformément vers } \phi.}$$

III-6. Montrons d'abord que l'on peut passer à la limite dans la formule intégrale obtenue à la question III-4. Comme on l'a vu dans les réponses aux questions III-3. et III-5., il existe une extractrice φ et une fonction continue $\phi : [\,0\,;\mathrm{T}\,] \to \mathbb{R}^d$ telles que $\left(\phi_{\varphi(\mathrm{N})}\right)_{\mathrm{N}\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(\psi_{\varphi(\mathrm{N})}\right)_{\mathrm{N}\in\mathbb{N}^*}$ convergent uniformément vers ϕ sur $[\,0\,;\mathrm{T}\,]$. Vérifions les hypothèses du théorème de convergence dominée pour l'appliquer à la suite de fonctions $\left(\mathrm{F}\circ\psi_{\varphi(\mathrm{N})}\right)_{\mathrm{N}\in\mathbb{N}}$ sur l'intervalle $[\,0\,;\mathrm{T}\,]$.

- Les fonctions $\mathrm{F}\circ\psi_{\varphi(\mathrm{N})}$ sont continues par morceaux sur $[\,0\,;\mathrm{T}\,]$ car F est continue et $\psi_{\varphi(\mathrm{N})}$ est une fonction en escaliers pour tout $\mathrm{N}\in\mathbb{N}$.
- La suite de fonctions $\left(\mathrm{F}\circ\psi_{\varphi(\mathrm{N})}\right)_{\mathrm{N}\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $\mathrm{F}\circ\phi$ car la suite de fonctions $\left(\psi_{\varphi(\mathrm{N})}\right)_{\mathrm{N}\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers ϕ et F est continue. De plus, ϕ est continue par morceaux en tant que limite uniforme de fonctions en escaliers. Par composition, $\mathrm{F}\circ\psi$ est elle aussi continue par morceaux sur $[\,0\,;\mathrm{T}\,]$.
- On a vu dans la réponse à la question III-1. que pour tout $\mathrm{N}\in\mathbb{N}^*$, pour tout $n\in[\![\,0\,;\mathrm{N}\,]\!]$, $y_n\in\bar{\mathrm{B}}(y_{\text{init}}, r/2)$ avec r indépendant de N. La continuité de F assure que F est bornée sur le compact $\bar{\mathrm{B}}(y_{\text{init}}, r/2)$. Notons D un majorant de $\left\|\mathrm{F}(y)\right\|$ pour $y\in\bar{\mathrm{B}}(y_{\text{init}}, r/2)$. Alors $s\mapsto \mathrm{D}$ domine $s\mapsto \left\|\mathrm{F}\big(\psi_{\varphi(\mathrm{N})}(s)\big)\right\|$ pour $s\in[\,0\,;\mathrm{T}\,]$ et $\mathrm{N}\in\mathbb{N}^*$. De plus, $s\mapsto\mathrm{D}$ est intégrable sur $[\,0\,;\mathrm{T}\,]$.

Le théorème de convergence dominée permet alors d'obtenir

$$\forall\, t\in[\,0\,;\mathrm{T}\,] \qquad \lim_{\mathrm{N}\to\infty}\int_0^t \mathrm{F}\big(\psi_{\varphi(\mathrm{N})}(s)\big)\mathrm{d}s = \int_0^t \mathrm{F}\big(\phi(s)\big)\mathrm{d}s$$

> C'est assez rare mais on applique ici le théorème de convergence dominée à une suite de fonctions à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie et non $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

En passant à la limite dans l'expression obtenue dans la réponse à la question III-4., il vient alors

$$\forall\, t\in[\,0\,;\mathrm{T}\,] \qquad \phi(t) = y_{\text{init}} + \int_0^t \mathrm{F}\big(\phi(s)\big)\mathrm{d}s$$

En particulier, $\psi(0) = y_{\text{init}}$ et, par continuité de $s\mapsto \mathrm{F}\big(\phi(s)\big)$ en tant que composée de fonctions continues, le théorème fondamental de l'analyse assure le caractère $\mathscr{C}^1$ de ϕ sur $[\,0\,;\mathrm{T}\,]$ ainsi que la formule suivante obtenue par dérivation.

$$\forall\, t\in[\,0\,;\mathrm{T}\,] \qquad \phi'(t) = \mathrm{F}\big(\phi(t)\big)$$

Ainsi, $\boxed{\text{Le couple } (\phi,\mathrm{T}) \text{ est une solution au problème de Cauchy (1).}}$

On a donc obtenu le théorème suivant.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Si F est continue, alors il existe au moins une}\\ \text{solution au problème de Cauchy (1).}\end{array}}$$

III-7. Définissons pour $s\in\mathbb{R}_+$ la fonction

$$\phi_s : \begin{cases} [\,0\,;+\infty\,[\longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad t \quad \longmapsto \begin{cases} 0 \text{ si } t\leqslant s \\ (t-s)^3 \text{ sinon}\end{cases}\end{cases}$$

Alors, pour tout $s\in\mathbb{R}_+$, $\phi_s(0) = 0 = y_{\text{init}}$ et $\phi_s\in\mathscr{C}^1\big([\,0\,;+\infty\,[\smallsetminus\{s\}\big)$ avec

$$\forall\, t \geqslant 0 \qquad \phi_s'(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < s \\ 3(t-s)^2 \text{ si } t > s \end{cases}$$

Puis, comme la dérivée calculée précédemment admet 0 pour limite en s à droite et à gauche, on en conclut que $\phi_s \in \mathscr{C}^1_{\mathrm{pm}}\big(\,[\,0\,;+\infty\,[\,\big)$ avec $\phi_s'(s) = 0$. Par ailleurs,

$$\forall\, t > s \qquad 3\big|\phi_s(t)\big|^{2/3} = 3(t-s)^2 = \phi_s'(t)$$

et
$$\forall\, t \in [\,0\,; s\,] \qquad 3\big|\phi_s(t)\big|^{2/3} = 0 = \phi_s'(t)$$

Ceci prouve que pour tout $s \geqslant 0$, la fonction ϕ_s est solution au problème de Cauchy (1) associé à $\mathrm{F} : y \mapsto |y|^{2/3}$. Ainsi,

> Le problème de Cauchy (1) associé à $\mathrm{F} : y \mapsto |y|^{2/3}$ admet une infinité de solutions globales.

> Dans cette question, on a remarqué que la continuité de F, bien qu'elle assure l'existence de solutions à un problème de Cauchy, ne suffit pas pour obtenir l'unicité. Une condition suffisante pour garantir l'unicité est le caractère localement lipschitzien de F, comme énoncé par le théorème de Cauchy-Lipschitz.

IV. Inclusions différentielles

IV-1. Considérons X et Y deux solutions maximales du problème (2) distinctes. Supposons que X est définie sur l'intervalle $[\,0\,; \mathrm{T_X}\,[$ et que Y l'est sur $[\,0\,; \mathrm{T_Y}\,[$ avec $(\mathrm{T_X}, \mathrm{T_Y}) \in \,]\,0\,;+\infty\,]^{\,2}$. Notons $\mathrm{T} = \min(\mathrm{T_X}, \mathrm{T_Y}) \in \,]\,0\,;+\infty\,]$. Montrons d'abord qu'il existe $t_0 \in \,]\,0\,;\mathrm{T}\,[$ tel que $\mathrm{X}(t_0) \neq \mathrm{Y}(t_0)$. En effet, si ce n'est pas le cas, les fonctions X et Y coïncident sur $]\,0\,;\mathrm{T}\,[$ donc sur $[\,0\,;\mathrm{T}\,[$ vu qu'elles vérifient toutes les deux la condition initiale du problème (2). Dès lors, comme elles sont distinctes, cela impose que $\mathrm{T_X} \neq \mathrm{T_Y}$. Par symétrie des rôles de X et Y, supposons que $\mathrm{T_X} < \mathrm{T_Y}$. Mais dans ce cas, X n'est pas une solution maximale vu la définition donnée dans l'introduction de l'énoncé. Ainsi, il existe $t_0 \in \,]\,0\,;\mathrm{T}\,[$ tel que $\mathrm{X}(t_0) \neq \mathrm{Y}(t_0)$. L'ensemble $\big\{t_0 \in \,]\,0\,;\mathrm{T}\,[\quad \mathrm{X}(t_0) \neq \mathrm{Y}(t_0)\big\}$ est une partie non vide minorée de $\mathbb{R}$. Notons $t_1 \in [\,0\,;\mathrm{T}\,[$ sa borne inférieure. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $[\,t_1\,; t_1+\varepsilon\,] \subset [\,0\,;\mathrm{T}\,[$. Les fonctions X et Y étant solutions du problème (2), elles sont en particulier continues sur le compact $[\,t_1\,; t_1+\varepsilon\,]$. L'image continue d'un compact est un compact donc les ensembles

$$\big\{\mathrm{X}(t) \quad t \in [\,t_1\,; t_1+\varepsilon\,]\,\big\} \quad \text{et} \quad \big\{\mathrm{Y}(t) \quad t \in [\,t_1\,; t_1+\varepsilon\,]\,\big\}$$

sont compacts de sorte que

$$\mathrm{K} = \big\{\mathrm{X}(t) \quad t \in [\,t_1\,; t_1+\varepsilon\,]\,\big\} \cup \big\{\mathrm{Y}(t) \quad t \in [\,t_1\,; t_1+\varepsilon\,]\,\big\}$$

est compact.

> On montre en revenant à la définition que la réunion de deux compacts est un compact quelle que soit la dimension. Ici, en dimension finie, on peut le voir encore plus facilement : cela provient du fait qu'une union de deux fermés bornés est fermée bornée.

Posons
$$\varphi\colon \begin{cases} [\,t_1\,;t_1+\varepsilon\,] \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ \qquad t \qquad \longmapsto \|\mathrm{X}(t)-\mathrm{Y}(t)\|^2 \end{cases}$$

Le caractère $\mathscr{C}^1$ par morceaux de X et Y assure que φ est de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux sur son ensemble de définition. Quitte à prendre $\varepsilon > 0$ plus petit, on peut supposer que X' et Y' n'admettent aucune discontinuité sur $]\,t_1\,;t_1+\varepsilon\,]$. Quitte à remplacer $\mathrm{X}'(t_1)$ et $\mathrm{Y}'(t_1)$ par leurs limites à droite en t_1 si t_1 est un point de discontinuité, on peut écrire

$$\forall\, t \in [\,t_1\,;t_1+\varepsilon\,] \qquad \varphi'(t) = 2\langle \mathrm{X}'(t)-\mathrm{Y}'(t), \mathrm{X}(t)-\mathrm{Y}(t)\rangle$$

> On a utilisé ici le fait que la différentielle du carré de la norme euclidienne au point $x \in \mathbb{R}^d$ est l'application linéaire $2\langle \bullet, x\rangle$.

Par construction, pour tout $t \in [\,t_1\,;t_1+\varepsilon\,]$, $\big(\mathrm{X}(t),\mathrm{Y}(t)\big) \in \mathrm{K}^2$ qui est compact car K l'est et $\big(\mathrm{X}'(t),\mathrm{Y}'(t)\big) \in \mathscr{F}\big(\mathrm{X}(t)\big)\times\mathscr{F}\big(\mathrm{Y}(t)\big)$. Ceci permet d'appliquer la condition (3) donnée dans l'énoncé : il existe $\mathrm{C_K} > 0$ tel que

$$\forall\, t \in [\,t_1\,;t_1+\varepsilon\,] \qquad \varphi'(t) \leqslant 2\mathrm{C_K}\varphi(t)$$

Autrement dit, il existe une fonction $g : [\,t_1\,;t_1+\varepsilon\,] \to \mathbb{R}_-$ telle que $\varphi' - 2\mathrm{C_K}\varphi = g$ sur $[\,t_1\,;t_1+\varepsilon\,]$. La continuité de φ et φ' sur $[\,t_1\,;t_1+\varepsilon\,]$ assure alors celle de g. Donc φ est solution de l'équation différentielle $y' - 2\mathrm{C_K}y = g$ sur $[\,t_1\,;t_1+\varepsilon\,]$. Résolvons cette équation différentielle. Montrons que $\varphi(t_1) = 0$. Par définition de t_1,

$$\forall\, t \in [\,0\,;t_1\,[\qquad \mathrm{X}(t) = \mathrm{Y}(t)$$

donc
$$\forall\, t \in [\,0\,;t_1\,[\qquad \varphi(t) = 0$$

Par continuité de φ en $t_1 \in [\,0\,;\mathrm{T}\,]$, il vient que $\varphi(t_1) = 0$. Résolvons maintenant l'équation différentielle homogène $y' - 2\mathrm{C_K}y = 0$. Ses solutions sont de la forme $y_{\mathrm{H}} : t \mapsto \mathrm{C}\mathrm{e}^{\,2\mathrm{C_K}t}$ avec $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$. On cherche une solution particulière y_{P} par la méthode de la variation de la constante. Supposons qu'il existe $\mathrm{C} : [\,t_1\,;t_1+\varepsilon\,] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\,t_1\,;t_1+\varepsilon\,]$ telle que $y_{\mathrm{P}} : t \mapsto \mathrm{C}(t)\mathrm{e}^{\,2\mathrm{C_K}t}$ vérifie l'équation différentielle $y' - 2\mathrm{C_K}y = g$. Alors, $y_{\mathrm{P}} \in \mathscr{C}^1\big([\,t_1\,;t_1+\varepsilon\,]\big)$ et

$$\forall\, t \in [\,t_1\,;t_1+\varepsilon\,] \qquad y_{\mathrm{P}}'(t) = \big(\mathrm{C}'(t) + 2\mathrm{C_K}\mathrm{C}(t)\big)\mathrm{e}^{\,2\mathrm{C_K}t}$$

de sorte que
$$\forall\, t \in [\,t_1\,;t_1+\varepsilon\,] \qquad g(t) = y_{\mathrm{P}}'(t) - 2\mathrm{C_K}y_{\mathrm{P}}(t) = \mathrm{C}'(t)\mathrm{e}^{\,2\mathrm{C_K}t}$$

Comme y_{P} vérifie l'équation différentielle avec second membre, on en déduit que

$$\forall\, t \in [\,t_1\,;t_1+\varepsilon\,] \qquad \mathrm{C}'(t) = g(t)\mathrm{e}^{\,-2\mathrm{C_K}t}$$

Or, on a déjà remarqué que g est continue par morceaux sur $[\,t_1\,;t_1+\varepsilon\,]$, ce qui assure que la fonction $t \mapsto g(t)\mathrm{e}^{\,-2\mathrm{C_K}t}$ est elle aussi continue par morceaux. Ainsi,

$$y_{\mathrm{P}} : t \mapsto \int_{t_1}^{t} g(s)\mathrm{e}^{\,2\mathrm{C_K}(t-s)}\,\mathrm{d}s$$

est une solution particulière de l'équation différentielle avec second membre. Notons que $y_{\mathrm{P}}(t_1) = 0$. Par unicité de la solution au problème de Cauchy, il vient enfin

$$\forall\, t \in [\,t_1\,;t_1+\varepsilon\,] \qquad \varphi(t) = \int_{t_1}^{t} g(s)\mathrm{e}^{\,2\mathrm{C}_k(t-s)}\,\mathrm{d}s$$

Cela implique que $\varphi \leqslant 0$ car g est à valeurs négatives, l'exponentielle est positive et les bornes de l'intégrale sont rangées dans l'ordre croissant. Or, φ étant à valeurs positives, on en déduit que φ est nulle sur $[\,t_1\,;t_1+\varepsilon\,]$. Or, par définition de t_1 et par caractérisation séquentielle de la borne inférieure, il existe $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \,]\,t_1\,;\mathrm{T}\,[^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{X}(s_n) \neq \mathrm{Y}(s_n) \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} s_n = t_1$$

En particulier, pour $n \in \mathbb{N}$ suffisamment grand, $s_n \in [\,t_1\,;t_1+\varepsilon\,]$ ce qui assure que $\varphi(s_n) = 0$ c'est-à-dire $\mathrm{X}(s_n) = \mathrm{Y}(s_n)$. On a obtenu une contradiction. En conclusion,

> Si la fonction $\mathscr{F}$ vérifie la condition (3), alors le problème (2) admet au plus une solution maximale.

> On a fait le choix ici de raisonner par l'absurde car cela simplifie la rédaction. Néanmoins, on aurait pu s'en passer mais certains points, en particulier la localisation sur un compact, sont dans ce cas très pénibles à rédiger rigoureusement.

IV-2.(a) Soit K un compact de $\mathbb{R}^2$. On prend $(x,y) \in \mathrm{K}^2$ et $(v_x, v_y) \in \mathscr{F}(x)\times\mathscr{F}(y)$. Notons

$$x = (x_1, x_2), \quad y = (y_1, y_2), \quad v_x = (v_{x,1}, v_{x,2}) \quad \text{et} \quad v_y = (v_{y,1}, v_{y,2})$$

On remarque que quels que soient les signes de x_1 et y_1, on a toujours $v_{x,2} = v_{y,2} = 2$. Calculons $\langle v_x - v_y, x - y\rangle = (v_{x,1} - v_{y,1}) \times (x_1 - y_1)$ selon les cas.

- Premier cas : Supposons que $x_1 < 0$ et $y_1 < 0$. Dans ce cas, $v_{x,1} = v_{y,1} = 1$. Ainsi,

$$\langle v_x - v_y, x - y\rangle = 0$$

- Deuxième cas : Supposons que $x_1 < 0$ et $y_1 > 0$. Dans ce cas, $v_{x,1} = 1$ et $v_{y,1} = -1$ donc

$$\langle v_x - v_y, x - y\rangle = 2(x_1 - y_1) < 0$$

- Troisième cas : Supposons que $x_1 < 0$ et $y_1 = 0$. Dans ce cas, $v_{x,1} = 1$ et $v_{y,1} \in [\,-1\,;1\,]$. On a alors $v_{x,1} - v_{y,1} \in [\,0\,;2\,]$ puis

$$\langle v_x - v_y, x - y\rangle = (v_{x,1} - v_{y,1})x_1 \leqslant 0$$

- Quatrième cas : Supposons que $x_1 > 0$ et $y_1 > 0$. Dans ce cas, $v_{x,1} = v_{y,1} = -1$ donc

$$\langle v_x - v_y, x - y\rangle = 0$$

- Cinquième cas : Supposons que $x_1 > 0$ et $y_1 = 0$. Dans ce cas, $v_{x,1} = -1$ et $v_{y,1} \in [\,-1\,;1\,]$ de sorte que $v_{x,1} - v_{y,1} \in [\,-2\,;0\,]$. Il vient alors

$$\langle v_x - v_y, x - y\rangle = (v_{x,1} - v_{y,1})x_1 \leqslant 0$$

- Sixième cas : Supposons que $x_1 = y_1 = 0$. Dans ce cas, on a directement

$$\langle v_x - v_y, x - y\rangle = 0$$

- Les autres cas ont été traités précédemment par symétrie des rôles de x et y.

En conclusion, en prenant $\mathrm{C_K} = 1$, on obtient le résultat car

$$\mathrm{C_K}\|x-y\|^2 \geqslant \langle v_x - v_y, x-y\rangle$$

$$\boxed{\text{La fonction } \mathscr{F} \text{ vérifie la condition (3).}}$$

IV-2.(b) Le résultat de la question IV-2.(a) assure que $\mathscr{F}$ vérifie la condition (3), donc ce problème admet au plus une solution d'après le résultat de la question IV-1. Si elle existe, notons la $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ et supposons qu'elle est définie sur $[\,0\,;\mathrm{T}\,[$ avec $\mathrm{T} \in \,]\,0\,;+\infty\,]$. On a alors $\varphi_2' = 2$ par définition de $\mathscr{F}$ de sorte que

$$\forall\, t \in [\,0\,;\mathrm{T}\,[\qquad \varphi_2(t) = 2t$$

comme $\varphi_2(0) = 0$. Posons $\varphi_1 : t \mapsto 0$ de sorte que $\varphi_1(0) = 0$ et

$$\forall\, t \in [\,0\,;\mathrm{T}\,[\qquad \mathscr{F}\big(\varphi(t)\big) = [\,-1\,;1\,] \times \{2\} \ni \varphi'(t) = (0,2)$$

Ainsi, en prenant $\mathrm{T} = +\infty$, on vérifie sans peine que $\varphi : t \mapsto (0, 2t)$ est une solution maximale du problème (2). Par unicité d'une telle solution,

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Pour } y_{\text{init}} = (0,0), \text{ le problème (2) admet pour unique}\\ \text{solution maximale } t \mapsto (0,2t) \text{ définie sur } [\,0\,;+\infty\,[.\end{array}}$$

> L'unicité étant assurée, on aurait pu tout à fait poser directement la solution $t \mapsto (0,2t)$ et vérifier qu'elle convient. Le choix de rédaction fait ici permet de comprendre comme trouver cette solution. Cette remarque reste valable dans la réponse à la question suivante.

IV-2.(c) Le résultat de la question IV-2.(a) assure que $\mathscr{F}$ vérifie la condition (3), donc ce problème admet au plus une solution d'après le résultat de la question IV-1. Si elle existe, notons la $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ et supposons qu'elle est définie sur $[\,0\,;\mathrm{T}\,[$ avec $\mathrm{T} \in \,]\,0\,;+\infty\,]$. On a alors $\varphi_2' = 2$ par définition de $\mathscr{F}$ de sorte que

$$\forall\, t \in [\,0\,;\mathrm{T}\,[\qquad \varphi_2(t) = 2t$$

comme $\varphi_2(0) = 0$. On sait que $\varphi_1(0) = 1 > 0$ ce qui impose $\varphi_1'(0) = -1$ et pour tout $t > 0$ tel que $\varphi_1(t) > 0$, on a $\varphi_1'(t) = -1$. Définissons $\varphi_1 : t \mapsto 1 - t$ pour $t \in [\,0\,;1\,]$. Or, $\varphi_1(1) = 0$ donc $\varphi_1'(t) \in [\,-1\,;1\,]$. En définissant ensuite $\varphi_1 : t \mapsto 0$ sur $[\,1\,;+\infty\,[$, on vérifie sans peine que $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ est une solution maximale du problème (2). Par unicité d'une telle solution,

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Pour } y_{\text{init}} = (1,0), \text{ le problème (2) admet pour unique so-}\\ \text{lution maximale } t \mapsto \big(\varphi_1(t), 2t\big) \text{ définie sur } [\,0\,;+\infty\,[\text{ avec}\\ \qquad\qquad \varphi_1 : t \mapsto \begin{cases} 1 - t \text{ si } t \leqslant 1 \\ 0 \text{ sinon}\end{cases}\end{array}}$$

IV-3.(a) La condition $v_1^- \geqslant v_1^+$ donnée dans le sujet n'est pas vérifiée ici.

Prenons $\mathrm{K} = [\,-1\,;1\,]^2$. Par l'absurde, supposons qu'il existe $\mathrm{C_K} > 0$ tel que

$$\forall\,(x,y) \in \mathrm{K}^2 \quad \forall\,(v_x, v_y) \in \mathscr{F}(x) \times \mathscr{F}(y) \qquad \langle v_x - v_y, x - y\rangle \leqslant \mathrm{C_K}\|x-y\|^2$$

Soient $x = (x_1, x_2) \in \mathrm{K}$ et $y = (y_1, y_2) \in \mathrm{K}$ vérifiant les conditions

$$x_1 > 0, \qquad y_1 < 0, \qquad x_2 = y_2 = 0$$

et $\qquad (v_x, v_y) = \big((v_{x,1}, v_{x,2}), (v_{y,1}, v_{y,2})\big) \in \mathscr{F}(x) \times \mathscr{F}(y) = \Big\{\big((1,1),(0,1)\big)\Big\}$

On a alors

$$\langle v_x - v_y, x - y\rangle = (v_{x,1} - v_{y,1}) \times (x_1 - y_1) = (x_1 - y_1) > 0$$

Avec les choix faits précédemment, on obtient

$$(x_1 - y_1) < \mathrm{C_K}(x_1 - y_1)^2$$

Ainsi, pour tout $(x_1, y_1) \in \,]\,0\,;1\,] \times [\,-1\,;0\,[$, $1 < \mathrm{C_K}(x_1 - y_1)$. En prenant $x_1 = 1/n$ et $y_1 = -1/n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ on obtient

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^* \qquad 1 \leqslant 2\frac{\mathrm{C_K}}{n}$$

ce qui est impossible car cette quantité tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. En conclusion,

$$\boxed{\text{La fonction } \mathscr{F} \text{ ne vérifie pas la condition (3).}}$$

> Dans les deux questions suivantes, on résout des problèmes d'inclusions différentielles pour lesquels la condition d'unicité déterminée précédemment n'est pas valable. Par conséquent, trouver une solution n'est plus suffisant pour résoudre ces problèmes. Dès lors, on devra déterminer une condition nécessaire pour être solution du problème.

IV-3.(b) Raisonnons par analyse-synthèse.

- Analyse : Supposons qu'il existe $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ une solution maximale au problème (2) muni de la condition initiale $y_{\text{init}} = (1, 0)$. Notons $\mathrm{T} \in \,]\,0\,;+\infty\,]$ de sorte que φ est définie sur $[\,0\,;\mathrm{T}\,[$. On remarque que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^2 \quad \forall\, v \in \mathscr{F}(x) \qquad v_2 = 1$$

Par conséquent, $\varphi_2' = 1$ sauf en un nombre fini de points de $[\,0\,;\mathrm{T}\,[$ où la dérivée n'est pas définie. On obtient donc $\varphi_2 : t \mapsto t$ par continuité. De plus,

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^2 \quad \forall\, v \in \mathscr{F}(x) \qquad v_1 \in [\,0\,;1\,]$$

ce qui impose que φ_1' est à valeurs dans $[\,0\,;1\,]$ là où elle est définie. Dès lors, φ_1 est croissante sur chaque intervalle où sa dérivée est définie, donc sur $[\,0\,;\mathrm{T}\,[$ par continuité. Or, $\varphi_1(0) = 1$ donc

$$\forall\, t \in [\,0\,;\mathrm{T}\,[\qquad \varphi_1(t) \geqslant 1$$

puis $\qquad \forall\, t \in [\,0\,;\mathrm{T}\,[\,\forall\, v \in \mathscr{F}\big(\varphi(t)\big) \qquad v_1 = {\varphi_1}'(t) = 1$

Par continuité, et en utilisant la condition initiale $\varphi_1(0) = 1$ et la continuité de φ_1, il vient $\varphi_1 : t \mapsto t + 1$.

- Synthèse : Posons

$$\varphi\colon \begin{cases} [\,0\,;+\infty\,[\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \qquad t \qquad \longmapsto (t+1, t) \end{cases}$$

Il s'agit bien d'une solution au problème (2) telle que $\varphi(0) = y_{\text{init}} = (1, 0)$. En effet, il est clair que la condition initiale est satisfaite. En outre, φ est de classe C^1 et

$$\forall t \in [\,0\,;+\infty\,[\qquad \varphi'(t) = (1,1) \in \mathscr{F}\big(\varphi(t)\big) = \big\{(1,1)\big\}$$

car
$$\forall t \in [\,0\,;+\infty\,[\qquad \varphi(t)_1 = t+1 > 0$$

En conclusion,

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Le problème (2) muni de la condition initiale } y_{\text{init}} = (1,0) \\ \text{admet une unique solution maximale donnée par} \\ \qquad \varphi\colon \begin{cases} [\,0\,;+\infty\,[\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \quad t \quad \longmapsto (t+1,t) \end{cases}\end{array}}$$

$\boxed{\textbf{IV-3.(c)}}$ Raisonnons encore par analyse-synthèse.

- Analyse : Supposons qu'il existe $\varphi = (\varphi_1,\varphi_2)$ une solution maximale au problème (2) muni de la condition initiale $y_{\text{init}} = (0,0)$. Notons $\mathrm{T} \in \,]\,0\,;+\infty\,]$ de sorte que φ est définie sur $[\,0\,;\mathrm{T}\,[$. De même qu'à la question IV-3.(b), on obtient que φ_2 est la fonction $\varphi_2 : t \mapsto t$ et que φ_1 est croissante sur $[\,0\,;\mathrm{T}\,[$. Comme $\varphi_1(0) = 0$, on en déduit que φ_1 est à valeurs positives. Supposons qu'il existe $t_1 \in [\,0\,;\mathrm{T}\,[$ tel que $\varphi_1(t_1) > 0$. Notons alors
$$t_0 = \inf \big\{t \in [\,0\,;\mathrm{T}\,[\quad \varphi_1(t) > 0\big\}$$
qui existe bel et bien car c'est une partie non vide minorée de $\mathbb{R}$. Par définition de t_0 et positivité de φ_1, il vient
$$\forall t \in [\,0\,;t_0\,[\qquad \varphi_1(t) = 0$$
Puis, par continuité de φ_1, on obtient
$$\forall t \in [\,0\,;t_0\,] \qquad \varphi_1(t) = 0$$
En outre, par croissance de φ_1,
$$\forall t \in \,]\,t_0\,;\mathrm{T}\,[\qquad \varphi_1(t) > 0$$
ce qui permet d'obtenir, en utilisant le fait que φ vérifie le problème (2), que
$$\forall t \in \,]\,t_0\,;\mathrm{T}\,[\qquad \varphi_1'(t) = 1$$
sauf en un nombre fini de points. Dès lors, par continuité de φ_1, et en utilisant le fait que $\varphi_1(t_0) = 0$, on obtient
$$\varphi_1\colon \begin{cases} [\,0\,;\mathrm{T}\,[\longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad t \quad \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant t_0 \\ t - t_0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$
Remarquons que si t_1 n'existe pas, alors φ_1 est la fonction nulle.
- Synthèse : Les fonctions $\varphi = (\varphi_1,\varphi_2)$ où φ_1 et φ_2 sont définies pour un certain t_0 par
$$\varphi_1\colon \begin{cases} [\,0\,;+\infty\,[\longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad t \quad \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant t_0 \\ t - t_0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases} \qquad \text{et} \quad \varphi_2\colon \begin{cases} [\,0\,;+\infty\,[\longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad t \quad \longmapsto t \end{cases}$$

et la fonction
$$\varphi\colon \begin{cases} [\,0\,;+\infty\,[\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \qquad t \qquad \longmapsto (0,t) \end{cases}$$

sont toutes bel et bien des solutions du problème (2) muni de la condition initiale $y_{\text{init}} = (0,0)$.

Le problème (2) muni de la condition initiale $y_{\text{init}} = (0,0)$ admet pour solutions maximales les fonctions φ de la forme

$$\varphi_1 : \begin{cases} [\,0\,;+\infty\,[\longrightarrow \mathbb{R} \\ \qquad t \qquad \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant t_0 \\ t - t_0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

et
$$\varphi_2 : \begin{cases} [\,0\,;+\infty\,[\longrightarrow \mathbb{R} \\ \qquad t \qquad \longmapsto t \end{cases}$$

ainsi que la fonction
$$\varphi\colon \begin{cases} [\,0\,;+\infty\,[\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \qquad t \qquad \longmapsto (0,t) \end{cases}$$