Chapitre 5

Suites et Séries de fonctions

Révisions MP2I

Revoir les chapitres 32 et 35.

1 Compléments sur les séries numériques

1.1 Convergence et divergence

Remarque : Dans toute cette section, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie.

On rappelle que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle ou complexe, on appelle *série* de *terme général* u_n, et on note $\left(\sum u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, ou plus simplement $\sum u_n$, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, S_n s'appelle *somme partielle* de rang n de la série $\sum u_n$.

On généralise sans difficulté cette notion pour une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans l'espace vectoriel normé E. On rappelle qu'on distingue en pratique la série $\sum u_n$ et la suite $(S_n)_n$ de ses sommes partielles, mais qu'il s'agit fondamentalement des mêmes objets, par définition. Cette distinction n'est qu'une affaire d'interprétation, le concept de série $\sum u_n$ traduisant l'idée de vouloir sommer les termes de la suite $(u_n)_n$ jusqu'à «l'infini» : $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$.

Définition 1. Soit $\sum u_n$ une série de E et $(S_n)_n$ la suite de ses sommes partielles. On dit que la série $\sum u_n$ est convergente lorsque la suite $(S_n)_n$ est convergente, on dit qu'elle est divergente sinon.

En cas de convergence, la limite S de $(S_n)_n$ est alors appelée *somme* de la série, et on peut la noter :

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Remarque : E étant de dimension finie, nul besoin d'expliciter la norme utilisée pour la convergence puisqu'elles sont toutes équivalentes.

Définition 2. Pour une série $\sum u_n$ <u>convergente</u>, de sommes partielles $(S_n)_n$ et de somme S, la suite de ses *restes* est définie par :

$$R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

Proposition 1. *En cas de convergence d'une série $\sum u_n$, la suite $(R_n)_n$ de ses restes converge vers 0.*

Exercice 1. Rappeler la nature de la série géométrique $\sum z^n$ suivant la valeur de $z \in \mathbb{C}$ et le cas échéant expliciter la somme et la suite des restes.

1.2 Propriétés

Les séries considérées ici sont à valeurs dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie E.

Proposition 2. *Si* $\sum u_n$ *est convergente alors* $u_n \to 0$

Remarques :
- la réciproque est fausse
- On dit d'une série dont le terme général ne tend pas vers 0 qu'elle diverge grossièrement.

Proposition 3. *Une suite* $(u_n)_n$ *converge si, et seulement si, la série* $\sum(u_{n+1} - u_n)$ *converge.*

Remarque : Une série de la forme $\sum(u_{n+1} - u_n)$ est dite *telescopique.*

Proposition 4. *Si* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *sont deux séries convergentes et si* $\lambda \in \mathbb{K}$, *alors la série* $\sum(u_n + \lambda v_n)$ *est convergente de somme :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(u_n + \lambda v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

1.3 Convergence absolue

Rappel : Une série réelle ou complexe $\sum u_n$ est absolument convergente lorsque $\sum |u_n|$ est convergente.

On peut généraliser cette notion dans le cas d'une série d'un espace vectoriel de dimension finie.

Proposition 5. *Étant donné deux normes* $\|\cdot\|$ *et* $\|\cdot\|'$ *sur* E, *la série* $\sum \|u_n\|$ *converge si, et seulement si, la série* $\sum \|u_n\|'$ *converge.*

Définition 3. On dit qu'une série $\sum u_n$ est *absolument convergente* lorsque la série $\sum \|u_n\|$ est convergente, où $\|\cdot\|$ est une norme quelconque sur E.

Théorème 1. *Si* $\sum u_n$ *est absolument convergente, alors* $\sum u_n$ *est convergente. On a par ailleurs :*

$$\left\|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right\| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \|u_n\|$$

Remarque : Comme vous l'avez vu en MP2I pour les séries réelles ou complexe, la réciproque est fausse. Une série convergente mais pas absolument convergente est dite *semi-convergente.*

Exemple : Soit $p \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. Si $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, la série $\sum \frac{1}{n!}\|A\|^n$ est convergente, de somme $\mathrm{e}^{\|A\|}$. La série $\sum \frac{1}{n!}A^n$ est donc absolument convergente.

On note $\exp(A) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}A^n$ (exponentielle de la matrice A).

1.4 Sommation de relations de comparaison

Rappelons d'abord comment des relations de comparaison asymptotique permettent de déterminer la nature d'une série à partir de séries de référence.

Rappel : Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries **positives**. Alors :
- Si $u_n = \mathrm{O}(v_n)$ ou si $u_n = \mathrm{o}(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge
- Si $u_n \sim v_n$, les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Remarque : Dans le cas de séries non positives (à valeurs dans $\mathbb{K}$, ou plus généralement dans un $\mathbb{K}$-espace un vectoriel normé de dimension finie), on se ramène au cas positif en passant par la convergence absolue.

On va voir ici comment une relation de comparaison asymptotique portant sur le terme général peut être "sommée" pour en déduire une relation de comparaison entre les sommes partielles (série divergente) ou les restes (série convergente) d'une série.

Théorème 2. ***(de sommation d'une relation de comparaison)*** *Soient deux séries numériques $\sum u_n$ et $\sum v_n$, $(U_n)_n$ et (V_n) leur suite de sommes partielles respective, et, en cas de convergence, $(R_n)_n$ et $(T_n)_n$ les suites des restes. On suppose que v_n est positive à partir d'un certain rang. Alors :*

a) *Si $u_n = \mathrm{o}(v_n)$, on a :*
- *Si $\sum v_n$ diverge, $U_n = \mathrm{o}(V_n)$*
- *Si $\sum v_n$ converge, $\sum u_n$ aussi et $R_n = \mathrm{o}(T_n)$*

b) *Si $u_n = \mathrm{O}(v_n)$, on a :*
- *Si $\sum v_n$ diverge, $U_n = \mathrm{O}(V_n)$*
- *Si $\sum v_n$ converge, $\sum u_n$ aussi et $R_n = \mathrm{O}(T_n)$*

c) *Si $u_n \sim v_n$, $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature avec :*
- *En cas de divergence, $U_n \sim V_n$*
- *En cas de convergence, $R_n \sim T_n$*

Corollaire 1. ***(lemme de Cesàro)*** *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :*

$$V_n = \frac{u_0 + \cdots + u_n}{n+1}$$

Alors si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite ℓ (finie ou infinie), la suite $(V_n)_n$ tend vers ℓ également.

Remarque : La suite $(V_n)_n$ est appelée *moyenne de Cesàro* de la suite $(u_n)_n$.

1.5 Comparaison série-intégrale

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ une fonction continue positive et monotone. Vous avez dû voire en MP2I comment obtenir des encadrements permettant de comparer les sommes partielles de la série $\sum f(n)$ avec des intégrales de f. On revoit brièvement ici la méthode.

Méthode :

- Si f est décroissante, pour tout $k \in \mathbb{N}$, et pour tout $t \in [k, k+1]$, on a $f(k+1) \leqslant f(t) \leqslant f(k)$. En intégrant sur $[k, k+1]$ on en déduit :

$$0 \leqslant \int_k^{k+1} f(t)\mathrm{d}t - f(k+1) \leqslant f(k) - f(k+1)$$

Une sommation sur $k \in [\![0, n-1]\!]$ (pour $n \in \mathbb{N}^*$), accompagnée d'une relation de Chasles et d'un telecospage, permet d'obtenir alors au final que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f(n) \leqslant \sum_{k=0}^{n} f(k) - \int_0^n f(t)\mathrm{d}t \leqslant f(0)$$

- Si f est croissante, on obtient de façon analogue :

$$f(0) \leqslant \sum_{k=0}^{n} f(k) - \int_0^n f(t)\mathrm{d}t \leqslant f(n)$$

On peut bien sûr adapter cet encadrement au cas d'une fonction f non définie en 0 en sommant à partir de $k = 1$, ou d'une valeur plus grande encore au besoin. Dans le cas de f décroissante, on obtient en fait que pour tout $p, n \in \mathbb{N}$ avec $p \leqslant n$:

$$f(n) \leqslant \sum_{k=p}^{n} f(k) - \int_p^n f(t)\mathrm{d}t \leqslant f(p)$$

Les encadrements précédents peuvent conduire à un résultat pratique d'application pour l'étude de la nature d'une série, qu'on pourra écrire de façon simplifiée une fois vu le concept d'intégrale *généralisée*. Contentons-nous pour l'instant d'appliquer la méthode précédente à un exemple formateur.

Exercice 2. À l'aide de la méthode précédente précédent, retrouver la nature de la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ suivant la valeur de α et :

- En cas de divergence, donner un équivalent asymptotique des sommes partielles $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$.
- En cas de convergence, un équivalent asymptotique des restes $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

1.6 Règle de d'Alembert

Le critère suivant revient à la mise en place d'une comparaison avec une série géométrique. Attention à l'utiliser correctement !

Proposition 6. *Soit $\sum u_n$ une série réelle ou complexe à termes non nuls telle que $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}$ admet une limite $l \in \mathbb{R}^+ \cup +\infty$. Alors :*
- *Si $\ell < 1$ la série $\sum u_n$ est absolument convergente (donc convergente)*
- *si $\ell > 1$ la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.*

Remarque : On ne peut rien conclure en général lorsque $\ell = 1$. C'est le cas par exemple de toutes les séries de Riemann ! Ce critère est en fait assez grossier (on peut néanmoins l'affiner via la règle de *Rhaabe-Duhamel*), et n'est essentiellement utile que pour des séries dont le terme général a un comportement asymptotique plus "rapide" que les puissances de n.

Exercice 3. Établir la convergence de la série positive $\sum \frac{n!}{n^n}$.

2 Modes de convergence des suites et séries de fonctions

Dans toute la suite de ce chapitre, E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés de dimension finie et A une partie de E. On s'intéresse à une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où pour $n \in \mathbb{N}$, f_n est une application de A dans F. Dans la plupart des situations pratiques, Les fonctions f_n seront plus simplement définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeur dans $\mathbb{K}$.

2.1 Convergence simple.

Intuitivement, on a envie de dire que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge vers une fonction f, lorsque pour tout x, $f_n(x)$ converge vers $f(x)$. C'est exactement ce que traduit le mode de convergence *simple* :

Définition 4. On dit que la suite $(f_n)_n$ *converge simplement* sur A si, pour tout $x \in A$, $\big(f_n(x)\big)_n$ est une suite de F convergente.

Dans ce cas, l'application f définie sur A par $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ est appelée *limite simple* de $(f_n)_n$.

Remarque : Il se peut que $(f_n(x))_n$ ne converge par pour tout $x \in A$. Étudier la convergence simple de la suite $(f_n)_n$ sur A signifie alors trouver la plus grande partie $B \subset A$ sur laquelle $(f_n)_n$ converge simplement.

Exemple : Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction $f_n : x \mapsto x^n$, définie sur $\mathbb{R}$. La suite $(f_n)_n$ converge simplement sur $]-1,1]$ vers la fonction :

$$f \;:\; x \longmapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x \in]-1,1[\\ 1 \text{ si } x = 1 \end{cases}$$

Exercice 4. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, convergeant simplement vers $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Montrez les propriétés suivantes :

a) Si f_n est croissante pour tout n, f est croissante.

b) Si f_n est T-périodique pour tout n, alors f est T-périodique.

Certaines propriétés que peuvent vérifier les $(f_n)_n$ sont ainsi *stables* par passage à la limite. Mais cela ne fonctionne pas pour des propriétés de *régularité* (continuité, dérivabilité) : de telles propriétés nécessitent l'étude d'un passage à la limite pour la variable x, ce qui conduit à envisager une *infinité* de x, et pose problème dans le passage à la limite pour n.

2.2 Convergence uniforme.

Définition 5. On dit que la suite $(f_n)_n$ *converge uniformément* sur A vers une fonction $f : A \to F$, lorsque :

$$\forall\,\varepsilon > 0\,,\ \ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\,,\ \ \forall\, x \in A\,,\ \ \forall n \in \mathbb{N}\,,\ \ n \geqslant n_0 \Longrightarrow \big\|f_n(x) - f(x)\big\| \leqslant \varepsilon.$$

Remarque : En terme de quantificateurs, la définition de la convergence simple vers f s'écrit :

$$\forall\, x \in A\,,\ \ \forall\,\varepsilon > 0\,,\ \ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\,,\ \ \forall n \in \mathbb{N}\,,\ \ n \geqslant n_0 \Longrightarrow \big\|f_n(x) - f(x)\big\| \leqslant \varepsilon.$$

En comparant avec la convergence uniforme, on remarquera le déplacement du quantificateur "$\forall\, x \in A$". Pour la convergence simple, le rang n_0 à partir duquel on a $\big\|f(x) - f_n(x)\big\| \leqslant \varepsilon$ dépend de ε <u>et</u> de x. Pour la convergence uniforme, ce rang ne dépend plus <u>que</u> de ε.

L'examen de la défintion montre en fait que la convergence uniforme n'est rien d'autre que la convergence au sens de la norme *infini*.

Proposition 7. *En munissant l'espace $\mathcal{B}(A, F)$ des fonctions bornées de la norme $N_\infty^A : f \mapsto \sup\limits_{x\in A} \|f(x)\|$, une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{B}(A, F)$ converge uniformément sur A vers $f : A \to F$ si, et seulement si, elle converge au sens de N_∞^A.*

Remarques :

- On notera généralement $\|\cdot\|_\infty$ cette norme plutôt que $N_\infty^A(\cdot)$ la norme de la convergence uniforme, notamment lorsque les fonctions sont à valeurs réelles ou complexes. Le domaine de définition A considéré est supposé connu implicitement.
- En fait, les fonctions f_n n'ont pas besoin d'être bornées sur A ; ce qui importe, c'est que les fonctions $f_n - f$ le soient. On s'autorise donc à utiliser cette norme $\|\cdot\|_\infty$ pour une suite $(f_n)_n$ qui converge uniformément même s'il ne s'agit pas d'une suite de $\mathcal{B}(A, F)$.

Proposition 8. *Si la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur A, alors elle converge simplement vers f sur A. La réciproque est fausse.*

Exemple : Reprenons l'exemple de la suite $(f_n)_n$ avec $f_n : x \mapsto x^n$: elle converge simplement sur $]-1, 1]$ vers f, mais pas uniformément. En effet $f_n(x)$ finit toujours par "s'éloigner" de 0 lorsque x est assez proche de 1 ou de -1 : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ne peut pas faire "rentrer" leur graphe dans le "tube" défini par $-\frac{1}{2} \leqslant y \leqslant \frac{1}{2}$ (par exemple). Ainsi $\varepsilon = \frac{1}{2}$ (en fait n'importe quel $\varepsilon < 1$ convient) invalide l'expression :

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N}\,,\ \ \forall\, x \in]-1, 1]\,,\ \ \forall n \in \mathbb{N}\,,\ \ n \geqslant n_0 \Longrightarrow \big|f_n(x) - f(x)\big| \leqslant \varepsilon.$$

Plus simplement, on peut remarquer que $\|f_n - f\|_\infty = 1$. Notons que ce qui met en défaut la convergence uniforme est le comportement de $f_n(x)$ quand x s'approche de 1 ou de -1. Ouvrir la borne en 1 ne change rien : il n'y a toujours pas convergence uniforme sur $]-1, 1[$. En revanche, on montre facilement qu'il y a convergence uniforme sur tout segment de $]-1, 1[$. En effet, si on se restreint à $[-a, a]$, avec $0 \leqslant a < 1$, on a :

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x\in[-a,a]} |x^n| = a^n \to 0$$

Une façon d'invalider la convergence uniforme consiste à trouver une "bonne suite" de l'ensemble de définition, qui "surfe" sur la "vague" caractérisant l'écart donné par $\|f_n - f\|_\infty$, en exploitant la contraposée du résultat suivant.

Proposition 9. *Si la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur A, alors pour toute suite $(x_n)_n$ de A, on a $\|f_n(x_n) - f(x_n)\| \to 0$.*

Exercice 5. Soit $a > 0$. Étudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f_n : x \mapsto n^a x\,\mathrm{e}^{-nx}$. Interpréter géométriquement avec les représentations graphiques.

2.3 Convergence simple et uniforme pour une série de fonctions

De façon générale, on va retrouver les modes de convergence simple et uniforme pour une série de fonctions : il suffira simplement de les appliquer à la suite des *sommes partielles*.

Définition 6. On dit que la série $\sum f_n$ *converge simplement* sur A, lorsque pour tout $x \in A$, la série vectorielle $\sum f_n(x)$ converge.

Dans ce cas, l'application S définie sur A par $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est appelée *somme* de la série $\sum f_n$.

Exemple : La série $\sum f_n$, avec $f_n : x \mapsto x^n$ converge simplement sur l'intervalle $]-1,1[$, et a pour somme l'application :

$$S : x \mapsto \frac{1}{1-x}.$$

Définition 7. On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ *converge uniformément* sur A lorsque la suite $(S_n)_n$ des sommes partielles converge uniformément sur A.

Remarque : La notion de convergence uniforme d'une suite de fonctions $(f_n)_n$ nécessitant l'introduction de la limite f de la suite, on ne peut écrire la convergence uniforme de $\sum f_n$ que si on dispose déjà de la somme S de cette série. Cela ne pose pas de problème en pratique puisqu'on commence généralement par l'étude de la convergence simple, pour pouvoir utiliser ensuite le résultat suivant :

Proposition 10. *Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\sum f_n$ *converge uniformément sur A.*

(ii) $\sum f_n$ *converge simplement sur A et la suite $(R_n)_n$ des restes converge uniformément sur A vers la fonction nulle.*

Exemple : La série de fonctions $\sum f_n$, avec $f_n : x \mapsto x^n$, converge simplement sur $]-1,1[$, et a pour somme la fonction :

$$S : x \mapsto \frac{1}{1-x}.$$

Cependant, pour $n \in \mathbb{N}$, le reste de rang n est la fonction :

$$R_n : x \mapsto \frac{x^{n+1}}{1-x},$$

et l'étude de la convergence uniforme de la suite $(f_n)_n$ prouve que la suite des restes $(R_n)_n$ ne converge pas uniformément sur $]-1,1[$ vers la fonction nulle : $\sum f_n$ ne converge donc pas uniformément sur $]-1,1[$. En revanche, on peut montrer qu'elle converge uniformément sur tout segment $[-a,a]$ avec $0 \leqslant a < 1$.

2.4 Convergence normale.

Il s'agit d'un mode de convergence spécifique aux séries de fonctions.

Définition 8. On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ *converge normalement* sur A si f_n est bornée pour tout $n \in \mathbb{N}$ et si la série numérique $\sum \sup_{x \in A} \|f_n(x)\|$ est convergente.

Remarque : En notant $\|\cdot\|_\infty : f \mapsto \sup_{x\in A} \|f(x)\|$, on a vu qu'on définit une norme sur l'espace $B(A,F)$ des fonctions bornées sur A. Dès lors, pour une série de fonctions $\sum f_n$ avec $f_n \in B(A,F)$:

- La convergence uniforme de $\sum f_n$ s'interprète simplement comme la convergence de cette série au sens de $\|\cdot\|_\infty$, c'est-à-dire la convergence de la suite des sommes partielles au sens de cette norme.
- La convergence normale, en revanche, s'interpète comme la convergence "absolue" de $\sum f_n$ au sens de $\|\cdot\|_\infty$, c'est-à-dire la convergence de $\sum \|f_n\|_\infty$.

Bien distinguer ici la norme $\|\cdot\|$ de l'espace F, qu'on peut choisir quelconque car F est de dimension finie, et la norme $\|\cdot\|_\infty$ sur l'espace $B(A,F)$.

En pratique, on travaillera le plus souvent avec des suites de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$: $(f_n)_n$ est alors une suite de $B(I,\mathbb{K})$ et $\|f_n\|_\infty = \sup\limits_{x\in I}|f(x)|$

Du point de vue de la norme $\|\cdot\|_\infty$, on peut généraliser le résultat "la convergence absolue d'une série implique sa convergence" :

Proposition 11. *Si la série de fonction $\sum f_n$ converge normalement sur A, alors elle converge uniformément sur A.*

Remarque : Tout comme la situation en dimension finie, la réciproque est fausse : la convergence normale d'une série de fonctions est une propriété plus forte que la convergence uniforme.

Exemple : La série de fonction $\sum f_n$, avec $f_n : x \mapsto \dfrac{(-1)^n}{n+x}$ définies sur $I =]0,+\infty[$, converge uniformément sur I, mais pas normalement.

Exercice 6. Soit $a > 0$. Étudier la convergence simple, normale, et uniforme de la série de fonctions $\sum f_n$, avec les f_n définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f_n : x \mapsto n^a x\,\mathrm{e}^{-nx}$.

3 Régularité de la limite ou de la somme

S'il ne fallait retenir qu'un énoncé du contenu de cette section, c'est "avec la convergence uniforme, tout va bien". Continuité, passage à la limite pour x, intégration, dérivabilité, tout cela reste stable lorsqu'on passe à la limite pour une suite de fonction $(f_n)_n$ ou bien pour une somme de série $\sum f_n$. Dans toute la suite, sauf précision, $(f_n)_n$ est une suite de fonctions définies sur une partie $A \subset E$ et à valeurs dans F, avec toujours E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés de dimension finie.

3.1 Continuité

Proposition 12. *Soit $a \in A$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en a. Alors :*
- *Si $(f_n)_n$ converge uniformément sur A, sa limite $f : A \to F$ est continue en a.*
- *Si $\sum f_n$ converge uniformément sur A, sa somme $S : A \to F$ est continue en a.*

Corollaire 2. *Toute limite ou somme uniforme de fonctions continues sur A est continue sur A.*

Remarque : Dans le cas d'une série de fonctions, on peut bien entendu appliquer ce résultat en cas de convergence normale.

La continuité étant une propriété locale, le corollaire précédent s'applique dans le cas où l'hypothèse de convergence uniforme n'est satisfaite que de façon locale. Plus précisément on a le résultat suivant :

Proposition 13. *On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur A et soit $(V_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E telle que tout $a \in A$ admet au moins l'un des V_i comme voisinage. Alors :*
- *Si $(f_n)_n$ converge uniformément sur tout $V_i \cap A$, sa limite f est continue sur A.*
- *Si $\sum f_n$ converge uniformément sur tout $V_i \cap A$, sa somme f est continue sur A.*

Ce résultat est particulièrement utilisé dans le cas de suites ou séries de fonctions f_n définies et continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, avec une convergence uniforme *sur tout segment* de I (le caractère fermé borné des segments étant propice à des majorations faciles en utilisant les bornes).

Exercice 7. Montrer que la fonction *zeta de Riemann* $\zeta : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ est bien définie et continue sur $]1,+\infty[$.

Remarque : Par contraposée, si la limite simple d'une suite de fonctions continues n'est pas continue, il n'y a pas convergence uniforme. Par exemple, la suite $(f_n)_n$, avec $f_n : x \mapsto x^n$ ne peut pas converger uniformément sur $]-1,1]$ puisque sa limite f n'est pas continue en 1 (*cf.* section **??**). Remarquons qu'on avait déjà vu qu'il n'y avait pas non plus convergence uniforme sur $]-1,1[$, ce qui ne peut pas être, *a priori* (*cf.* paragraphe suivant) directement prouvé avec cet argument puisque la limite f est continue sur $]-1,1[$ (c'est la fonction nulle).

3.2 Théorème de la double-limite.

Lorsque a n'est pas un élément de A, mais reste *adhérent* à A, on peut quand même envisager de faire tendre $x \in A$ vers a. Le résultat de la proposition **??** se généralise alors à cette situation :

Théorème 3. ***(de la double limite)*** *On suppose que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers $f : A \to F$ sur A. Soit $a \in \overline{A}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n admet une limite $\ell_n \in F$ en a. Alors la suite $(\ell_n)_n$ admet une limite $\ell \in F$ et $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$. Autrement dit :*

$$\lim_{x \to a} \left(\lim_{n \to +\infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \to +\infty} \left(\lim_{x \to a} f_n(x) \right).$$

Remarques :

- De même que pour la continuité en a, la convergence uniforme sur un voisinage de a est suffisante, le théorème précédent peut s'appliquer dans le cas où la convergence uniforme n'est établie que pour l'intersection de A et d'un voisinage de a.
- Ce théorème peut s'adapter au cas d'une suite de fonctions $(f_n)_n$ définie sur un intervalle I non borné de $\mathbb{R}$, avec $a = \pm\infty$.

Ce théorème de la double-limite admet bien sûr une version analogue dans le cas d'une série de fonctions. Il s'agit alors de l'échange d'une "limite pour x" et d'une "somme pour n" (qui traduit en fait une limite de sommes partielles).

Théorème 4. ***(de la double limite)*** *On suppose que la série $\sum f_n$ converge uniformément sur A, de somme S. Soit $a \in \overline{A}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n admet une limite $\ell_n \in F$ en a. Alors la série numérique $\sum \ell_n$ converge, et sa somme L est la limite de la fonction S en a. Autrement dit :*

$$\lim_{x \to a} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\lim_{x \to a} f_n(x) \right).$$

Remarques :

- Là encore, la convergence uniforme sur un voisinage de a est suffisante.
- Comme pour le cas de la continuité, on peut bien sûr passer par la convergence normale.
- Comme pour la version avec une suite de fonctions, ce théorème s'adate au cas $a = \pm\infty$ lorsque les f_n sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

3.3 Intégration.

On a vu que la continuité est stable par passage à la limite uniforme. Dans le cas de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, on peut donc intégrer la limite f sur les segments de I. On a tout naturellement envie alors d'affirmer que la valeur de l'intégrale de f s'obtient comme limite des integrales des f_n. Là encore, cela fonctionne parfaitement, grâce à la convergence uniforme.

Proposition 14. *Soit $(u_n)_n$ une suite de fonctions continues définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans F, et soient $a, b \in I$, avec $a < b$.*

a) *Si (u_n) converge uniformément vers u sur $[a, b]$, alors :*

$$\int_a^b u_n(t)\mathrm{d}t \longrightarrow \int_a^b u(t)\mathrm{d}t$$

b) *Si $\sum u_n$ converge uniformément sur $[a, b]$, de somme s alors :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b u_n(t)\mathrm{d}t = \int_a^b s(t)\mathrm{d}t$$

Autrement dit, avec la convergence uniforme, on peut échanger une intégration avec un passage à la limite (pour une suite) ou une somme (pour une série) :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\int_a^b u_n(t)\mathrm{d}t \right) = \int_a^b \lim_{n \to +\infty} u_n(t)\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b u_n(t)\mathrm{d}t = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)\mathrm{d}t$$

Dans un chapitre ultérieur, on découvrira des théorèmes bien plus puissants permettant de faire ce genre d'échanges sans avoir besoin de la convergence uniforme. Une hypothèse supplémentaire sera cependant nécessaire car en général la convergence simple seule ne suffit pas à les autoriser.

Remarque : Pour démontrer la proposition précédente, on a montré au passage que la convergence uniforme de $(f_n)_n$ vers f sur $[a,b]$ implique que $\|f_n - f\|_1 = \displaystyle\int_a^b |f_n(t) - f(t)|\mathrm{d}t \to 0$, ce qui veut dire que $(f_n)_n$ converge *en moyenne* vers f. On a ainsi que la convergence pour $\|\cdot\|_\infty$ implique la convergence pour $\|\cdot\|_1$, ce qui résulte simplement de la comparaison $\|\cdot\|_1 \leqslant (b-a)\|\cdot\|_\infty$.

Exemple : Cas de l'intégration sur $[0,1]$ de $f_n : t \mapsto n^a t\,\mathrm{e}^{-nt}$, avec $a > 0$ fixé.

On déduit de la proposition précédente que la convergence uniforme d'une suite de fonctions continues implique la convergence uniforme de sa suite de primitives s'annulant en un même point fixé. On reprend dans la proposition qui suit les notations de la précédente.

Proposition 15. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $U_n : x \mapsto \displaystyle\int_a^x u_n(t)\mathrm{d}t$.*

a) *Si $(u_n)_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers $u : I \to F$, alors $(U_n)_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers*
$$U : x \to \int_a^x u(t)\mathrm{d}t$$

b) *Si $\sum u_n$ converge uniformément sur tout segment de I, de somme $s : I \to F$, alors $\sum U_n$ converge uniformément sur tout segment de I et a pour somme*
$$S : x \to \int_a^x s(t)\mathrm{d}t$$

3.4 Dérivation.

Si la continuité est stable par passage à la limite uniforme, qu'en est-il des propriétés plus forte de régularité que sont la dérivabilité, et plus généralement le fait d'être de classe $\mathcal{C}^k$? On va voir ici que tout se passe bien avec une hypothèse de convergence uniforme, mais attention : elle doit porter sur la suite des *fonctions dérivées*. Il s'agit en fait d'appliquer "à l'envers" les résultats sur l'intégration.

Proposition 16. *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans F.*

a) *On suppose que $(f_n)_n$ converge **simplement** sur I vers une fonction f et que $(f_n')_n$ converge **uniformément** sur tout segment de I vers une fonction g. Alors $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur tout segment de I, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $f' = g$.*

b) *On suppose que $\sum f_n$ converge **simplement** sur I, de somme S, et que $\sum f_n'$ converge **uniformément** sur tout segment de I, de somme T. Alors $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment de I, sa somme S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $S' = T$.*

Autrement dit, on peut écrire, en cas de convergence uniforme pour la suite ou la série des fonctions dérivées :

$$\left(\lim_{n\to+\infty} f_n\right)' = \lim_{n\to+\infty} f_n' \qquad \text{et} \qquad \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'.$$

Remarques :
- En pratique, on vérifie la convergence uniforme de $(f_n')_n$ (ou de $\sum f_n'$) sur des intervalles adaptés à la situation, l'idée étant de couvrir des voisinages de tous les points de I.
- La vérification de la convergence simple pour $(f_n)_n$ est suffisante tant qu'on a la convergence uniforme de $(f_n')_n$. La convergence uniforme de $(f_n)_n$ en découlera. Dans des situations pratiques, on sait généralement déjà que la convergence de $(f_n)_n$ est uniforme.

Ce résultat peut en fait se généraliser par récurrence à un ordre de dérivation quelconque :

Proposition 17. *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans F.*

a) *On suppose que $(f_n^{(j)})_n$ converge **simplement** sur I pour tout $j \in [\![0, k-1]\!]$ et que $(f_n^{(k)})_n$ converge **uniformément** sur tout segment de I. Alors toutes les convergences sont en fait uniformes sur tout segment de I, la limite f de $(f_n)_n$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et :*

$$f^{(k)}(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n^{(k)}(x)$$

b) *On suppose que $\sum f_n^{(j)}$ converge **simplement** sur I pour tout $j \in [\![0, k-1]\!]$, et que $\sum f_n^{(k)}$ converge **uniformément** sur tout segment de I. Alors toutes les convergences sont en fait uniformes sur tout segment de I, la somme S de $\sum f_n$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et :*

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}(x)$$

Remarque : Dans des situations pratiques, la preuve de la convergence uniforme pour $(f_n^{(k)})_n$ (ou pour $\sum f_n^{(k)}$) fonctionne pour tout $k \in \mathbb{N}$, ce qui permet de montrer que la limite f (ou la somme S) est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

3.5 Approximation uniforme

Dans cette dernière section, on voit deux théorèmes d'approximation uniforme de fonctions continues sur un segment, c'est-à-dire d'existence de suites de fonctions d'un certain type qui convergent uniformément vers une fonction continue donnée.

Proposition 18. *Soient $a \leqslant b$ dans $\mathbb{R}$ et soit $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ continue par morceaux. Il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escaliers sur $[a, b]$ qui converge uniformément vers f.*

Remarque : Ce résultat est en cohérence avec la définition de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux à partir de l'intégrale des fonctions en escalier (voir cours de MP2I), et du résultat de la proposition **??** : l'intégrale sur $[a, b]$ de f peut s'interpréter comme la limite des intégrales sur $[a, b]$ d'une suite de fonctions en escaliers convergeant uniformément vers f.

Théorème 5. ***(de Weierstrass)*** *Soient $a \leqslant b$ dans $\mathbb{R}$ et soit $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ continue. Il existe une suite $(f_n)_n$ de fonctions polynomiales, à coefficients dans $\mathbb{K}$, qui converge uniformément vers f sur $[a, b]$.*

Corollaire 3. *L'ensemble des fonctions polynomiales sur $[a, b]$ est un sous-espace vectoriel dense dans l'espace $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ des fonctions continues sur $[a, b]$, relativement à la norme $\|\cdot\|_\infty$ sur $[a, b]$.*