Interrogation de cours n° 7

Lundi 3 novembre 2025

Dans tout l'énoncé, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, et on considère une fonction $f : I \to E$. On fixera également $a, b \in I$ avec $a < b$.

Définitions et énoncés (5 pts)

1. Donner la définition de la dérivabilité de f en a.

2. Si f est de classe $\mathcal{C}^k$ et $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ une forme bilinéaire, exprimer la dérivée k-ième de $g : t \mapsto \varphi\big(f(t), f(t)\big)$ à l'aide de φ et des dérivées successives de f.

3. Si f est continue par morceaux sur $[a, b]$, comment définit-on l'intégrale de f sur $[a, b]$?

4. Énoncer l'inégalité des accroissements finis pour f sur $[a, b]$ si f est de classe $\mathcal{C}^1$.

5. On suppose f de classe $\mathcal{C}^{p+1}$. Écrire la formule de Taylor avec reste intégral sur $[a, b]$, à l'ordre p.

Démonstrations (6 pts)

a) Montrer que f est dérivable en a si, et seulement si elle admet un développement limité d'ordre 1 en a.

b) Si F est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie et $g \in \mathcal{L}(E, F)$, montrer que la dérivabilité de f sur I implique celle de $g \circ f$.

c) En reprenant l'écriture de la formule de Taylor avec reste intégral de la question **5**, montrer comment on en déduit l'inégalité de Taylor-Lagrange.