Séries entières

Lundi 6 octobre 2025

Table des matières

Table des matières

1. Rayon de convergence.

1.1. Convergence d'une série entière.

1.1. Convergence d'une série entière.

Definition 1

On appelle *série entière* d'une variable complexe $z \in \mathbb{C}$ une série de la forme $\sum a_n z^n$, avec $a_n \in \mathbb{C}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarques :

- Notation ambigüe : série numérique ou série de fonctions ?
- Et pour une variable réelle ?

1.1. Convergence d'une série entière.

Remarque :

Domaine de convergence $\mathcal{D}$:

Exemples :

- $\sum z^n$:
- $\sum nz^n$:
- $\sum \dfrac{z^n}{n^2}$:
- $\sum \dfrac{z^n}{n}$:

1.2. Lemme d'Abel et disque de convergence.

1.2. Lemme d'Abel et disque de convergence.

Définition 2

Pour $R \geqslant 0$, *disque ouvert* et *disque fermé* de rayon R :

$$\mathcal{D}(R) = \{z \in \mathbb{C} \ ; \ |z| < R\} \qquad \mathcal{D}_f(R) = \{z \in \mathbb{C} \ ; \ |z| \leqslant R\}.$$

Remarque :

Cas $R = +\infty$?

1.2. Lemme d'Abel et disque de convergence.

Theoreme 1

(**Lemme d'Abel**) Soit $\sum a_n z^n$ une série entière et soit $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la suite numérique $(a_n z_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit bornée. Alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

1.2. Lemme d'Abel et disque de convergence.

Définition 3

On appelle *rayon de convergence* d'une série entière $\sum a_n z^n$:

$$R = \sup\left\{r \in \mathbb{R}^+ \,/\, a_n r^n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}(1)\right\}$$

Remarque :

$R = +\infty$ si l'ensemble n'est pas borné.

1.2. Lemme d'Abel et disque de convergence.

Proposition 1

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière, $\mathcal{D}$ son domaine de convergence et R son rayon de convergence. Alors on a :

$$\mathcal{D}(R) \subset \mathcal{D}_f \subset \mathcal{D}_F(R).$$

En outre :

- Il y a convergence absolue sur $\mathcal{D}(R)$.
- Il y a divergence grossière sur $\left(\mathcal{D}_f(R)\right)^c$

Remarques :

- Comportement "*atypiques*" de $\sum a_n z_0^n$: $R = |z_0|$
- Cas d'une variable réelle : intervalle de convergence.

1.3. Utilisation du critère de d'Alembert.

1.3. Utilisation du critère de d'Alembert.

Proposition 2

Soit $(\sum a_n z^n)$ une série entière et R son rayon de convergence. s'il existe $\ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, tel que $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, alors $R = \frac{1}{\ell}$.

Exemple :

$$\sum \frac{n!}{n^n} z^n$$

Proposition 3

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la série entière $\sum n^\alpha z^n$ a pour rayon de convergence $R = 1$.

Table des matières

2. Opérations sur les séries entières, comparaison des rayons.

2.1. Comparaison de deux séries entières.

2.1. Comparaison de deux séries entières.

Proposition 4

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b.

a) Si $a_n = \mathrm{O}(b_n)$, et en particulier si $a_n = \mathrm{o}(b_n)$, alors $R_a \geqslant R_b$.

b) Si $a_n \sim b_n$, alors $R_a = R_b$.

Remarque :

$R \neq 1$: comportement asymptotique "violent" de $(a_n)_n$ ...

2.2. Somme de deux séries entières.

2.2. Somme de deux séries entières.

Proposition 5

Si $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ sont deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b, alors le rayon R de la série entière $\sum (a_n + b_n) z^n$ vérifie $R \geqslant \min(R_a, R_b)$ (avec égalité lorsque $R_a \neq R_b$) et pour $|z| < \min(R_a, R_b)$, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n.$$

Remarque :

Cas $R_a = R_b$?

2.3. Produit de deux séries entières.

2.3. Produit de deux séries entières.

Proposition 6

Si $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ sont deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b, alors le rayon de convergence R de la série entière $\sum c_n z^n$, avec $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, vérifie $R \geqslant \min(R_a, R_b)$ et pour $|z| < \min(R_a, R_b)$, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \right).$$

Remarques :

- Cas $R_a = R_b$?
- Cas d'une série entière donnant un polynôme ? (Exemple $z^2 - 2z + 3$).

Table des matières

3. Régularité de la fonction somme.

3.1. Convergence normale et continuité de la somme.

3.1. Convergence normale et continuité de la somme.

Proposition 7

Pour tout $r < R$, la série entière $\sum a_n z^n$ converge normalement sur le disque fermé $\mathcal{D}_f(r)$. Elle converge donc normalement sur tout compact de $\mathcal{D}(R)$.

Corollaire 1

La fonction somme $S : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ est continue sur $\mathcal{D}_O(R)$.

Remarque :

Cas $|z_0| = R$? On ne peut (presque) rien dire en général ...

3.2. Intégration de la somme.

3.2. Intégration de la somme.

Définition 4

On appelle *série primitive* de la série $\sum a_n z^n$ la série entière $\sum \dfrac{a_n}{n+1} z^{n+1}$, ou encore $\sum_{n \geqslant 1} \dfrac{a_{n-1}}{n} z^n$.

3.2. Intégration de la somme.

Lemme

$\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

Remarque :

Plus généralement $\sum a_n z^n$ et $\sum n^\alpha z^n$?

3.2. Intégration de la somme.

Proposition 8

La série entière $\sum a_n x^n$ et sa série primitive $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{a_{n-1}}{n} x^n$ ont le même rayon de convergence R, et la somme F sur $]-R, R[$ de la série primitive, est une primitive de la somme f de $\sum a_n x^n$, plus précisément celle qui s'annule en 0.

Exemple :

- En primitivant $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$, $\ln(1+x) =$
- En primitivant $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$, $\arctan(x) =$

3.3. Dérivation de la somme.

3.3. Dérivation de la somme.

Définition 5

On appelle *série dérivée* de la série $\sum a_n z^n$ la série entière $\sum_{n\geqslant 1} n a_n z^{n-1}$, on encore $\sum (n+1) a_{n+1} z^n$.

Proposition 9

La série entière $\sum a_n x^n$ et sa série dérivée $\sum (n+1) a_{n+1} z^n$ ont le même rayon de convergence R, la somme f de la série $\sum a_n x^n$ est dérivable sur $]-R, R[$ et a pour dérivée la somme de sa série dérivée.

Remarque :

Dérivation terme à terme ...

3.3. Dérivation de la somme.

Proposition 10

La somme f de la série entière $\sum a_n x^n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$, et ses dérivées s'obtiennent par dérivation terme à terme. Pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+k)!}{n!} a_{n+k} x^n.$$

Table des matières

4. Développement en série entière.

4.1. Définition.

4.1. Définition.

Definition 6

Une fonction f de la variable complexe et à valeurs dans $\mathbb{C}$, définie au voisinage de 0, est dite *développable en série entière* (en 0) lorsqu'il existe une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$, telle que pour z au voisinage de 0 :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

Remarques :

- "au voisinage de 0" ?
- Et pour la variable réelle ?

4.1. Définition.

Exemples :

- $z \mapsto \dfrac{1}{1-z}$
- $z \mapsto \exp z$
- $x \mapsto \ln(1+x)$

4.2. Et en un point quelconque ? *(hors-programme)*

4.2. Et en un point quelconque ? *(hors-programme)*

4.3. Unicité d'un développement en série entière

4.3. Unicité d'un développement en série entière

Proposition 11

Soit une fonction f de la variable réelle développable en série entière en 0. Alors f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un voisinage de 0 et la suite $(a_n)_n$ du développement vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Remarque :

Cas d'une variable complexe ?

4.3. Unicité d'un développement en série entière

Corollaire 2

- Deux séries entières de rayons de convergence non nuls ont la même somme sur un voisinage de 0 **ssi** ce sont les mêmes séries.
- Une série entière de rayon de convergence non nul a une somme nulle au voisinage de 0 **ssi** tous les coefficients sont nuls.

Remarque :

DSE en 0 $\Rightarrow \mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0 $\Rightarrow$ DL à tout ordre en 0.
Réciproques fausses.

4.3. Unicité d'un développement en série entière

Remarque :

On peut en fait alléger les hypothèses pour avoir l'unicité :

Proposition 12

Si deux fonctions $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $g : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$, définie au voisinage de 0, coïncident sur un intervalle $]0, \alpha]$, avec $\alpha > 0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = b_n$.

Remarque :

Encore vrai en supposant seulement $f(x_k) = g(x_k)$ pour une certaine suite $(x_k)_k$ de $\mathbb{R}^*$ qui converge vers 0.

Chapitre 6

Rayon de convergence.

Opérations sur les séries entières, comparaison des rayons.

Régularité de la fonction somme.

Développement en série entière.

Définition.

Et en un point quelconque ? *(hors-programme)*

Unicité d'un développement en série entière

Série de Taylor

Développements classiques.

Utilisation d'une équation différentielle linéaire

4.4. Série de Taylor

Definition 7

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0.

On appelle *série de Taylor* de f en 0 la série entière $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

Remarques :

- Le DSE d'une fonction est uniquement déterminé par sa série de Taylor.
- Attention : La série de Taylor peut exister, avec un rayon non nul, sans que f soit DSE.

Exemple :

$f : x \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$ prolongée par continuité.

4.4. Série de Taylor

Exercice 1

Soit $f : [-r, r] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$. On suppose qu'il existe $A, K > 0$ vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sup f^{(n)} \leqslant Kn!A^n$. Montrer que f est développable en série entière en 0.

Exercice 2

On suppose f de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0, avec $f^{(n)} \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que f est développable en série entière en 0. *(on pourra penser à utiliser la formule de Taylor avec reste intégral).*

4.5. Développements classiques.

4.5. Développements classiques.

Proposition 13

Soit f DSE en 0 et $\sum a_n z^n$ sa série de Taylor. Alors :

- f est paire **ssi** pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{2n+1} = 0$.
- f est impaire **ssi** pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{2n} = 0$.

4.5. Développements classiques.

Definition 8

La série entière $\sum \frac{1}{n!} z^n$ a un rayon de convergence infini. On appelle *exponentielle complexe* sa somme sur $\mathbb{C}$, qu'on note e^z.

Remarque :

On montre que pour tout $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $\mathrm{e}^{z_1+z_2} = \mathrm{e}^{z_1}\,\mathrm{e}^{z_2}$.

4.5. Développements classiques.

Proposition 14

(i) Les fonctions cos et sin sont développables en séries entières en 0. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \qquad \sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

(ii) Les fonctions ch et sh sont développables en séries entières en 0. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\mathrm{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n} \qquad \mathrm{sh}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

4.5. Développements classiques.

Proposition 15

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$ est développable en série entière en 0. Pour tout $x \in]-1,1[$:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n.$$

Remarque :

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$$

Remarques :

- $\alpha \in \mathbb{N}^*$: polynôme - binôme de Newton
- $\alpha = -1$: série géométrique
- α entier négatif :

Exercice 3

Retrouver le plus rapidement possible les développements en série entière des fonctions :

- $x \mapsto \ln(1+x)$
- $x \mapsto \arctan(x)$

Ils doivent au final être connus quasiment par coeur.

4.6. Utilisation d'une équation différentielle linéaire

4.6. Utilisation d'une équation différentielle linéaire