

Interrogation de cours n° 1

Lundi 8 septembre 2025

E et F sont des \mathbb{K} -espace vectoriels, avec \mathbb{K} un sous-corps de \mathbb{C} . Durée: 20 min.

Définitions et énoncés (5 pts)

1. Comment définit-on le noyau et l'image d'une application linéaire $f : E \rightarrow F$?
2. Énoncer la forme géométrique du théorème du rang pour f .
3. Donner la définition **géométrique** d'un projecteur $p : E \rightarrow E$.
4. Comment définir le fait qu'une somme $E_1 + E_2 + E_3$ de sous-espaces vectoriels de E est directe ?
5. Quand dit-on que $x \in E$ est vecteur propre d'un endomorphisme u de E ?

Démonstrations (6 pts)

- a) Soient deux endomorphismes u et v de E qui commutent. Montrer que le noyau et l'image de u sont stables par v .
- b) Soient λ_1 et λ_2 deux valeurs propres distinctes d'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que les sous-espaces propres associés sont en somme directe.
- c) Montrer que deux matrices A et B semblables ont même spectre.