MPI - Lycée Colbert

Concours Blanc 2025
Mathématiques 1

Mardi 16 décembre 2025
13h30-17h30

Sujet CCINP

Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème tous indépendants.

EXERCICE I.

I.1. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Déterminer sa fonction génératrice, puis en déduire son espérance et sa variance.

EXERCICE II.

On note $I =]0,+\infty[$ et on définit pour n entier naturel non nul et pour $x \in I$, $f_n(x) = e^{-nx} - 2e^{-2nx}$.

II.1. Justifier que pour tout entier naturel non nul n, les fonctions f_n sont intégrables sur I et calculer $\int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x$. Que vaut alors la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} (\int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x)$?

II.2. Démontrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur I. Déterminer sa fonction somme S et démontrer que S est intégrable sur I. Que vaut alors $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\right)\mathrm{d}x$?

II.3. Donner, sans aucun calcul, la nature de la série $\sum\limits_{n\geq 1}\left(\displaystyle\int_0^{+\infty}|f_n(x)|\mathrm{d}x\right)$.

PROBLEME.

Toutes les fonctions étudiées dans ce problème sont à valeurs réelles. On pourra identifier un polynôme et la fonction polynomiale associée.

On rappelle le théorème d'approximation de Weierstrass pour une fonction continue sur $[a,b]$: si f est une fonction continue sur $[a,b]$, il existe une suite de fonctions polynômes (P_n) qui converge uniformément vers la fonction f sur $[a,b]$.

Le problème aborde un certain nombre de situations en lien avec ce théorème qui sera démontré dans la dernière partie.

Partie 1. Exemples et contre-exemples

III.1. Soit h la fonction définie sur l'intervalle $]0,1]$ par : $\quad \forall x \in\,]0,1]\,,\quad x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

Expliquer pourquoi h ne peut être uniformément approchée sur l'intervalle $]0,1]$ par une suite de fonctions polynômes. Analyser ce résultat par rapport au théorème de Weierstrass.

III.2. Soit N entier naturel non nul, on note $\mathscr{P}_N$ l'espace vectoriel des fonctions polynômiales sur $[a,b]$, de degré inférieur ou égal à N. Justifier que $\mathscr{P}_N$ est une partie fermée de l'espace des applications continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme de la convergence uniforme.

Que peut-on dire d'une fonction qui est limite uniforme sur $[a,b]$ d'une suite de polynômes de degré inférieur ou égal à un entier donné ?

III.3. Cette question illustre la dépendance d'une limite vis-à-vis de la norme choisie.

Soit $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. Soient N_1 et N_2 deux applications définies sur $\mathbb{R}[X]$ ainsi :

$$\text{pour tout polynôme } P \text{ de } \mathbb{R}[X],\ N_1(P) = \sup_{x\in[-2,-1]}|P(x)| \quad \text{et} \quad N_2(P) = \sup_{x\in[1,2]}|P(x)|.$$

III.3.a. Vérifier que N_1 est une norme sur $\mathbb{R}[X]$. On admettra que N_2 en est également une.

III.3.b. On note f la fonction définie sur l'intervalle $[-2,2]$ ainsi :

pour tout $x \in [-2,-1]$, $f(x) = x^2$, pour tout $x \in [-1,1]$, $f(x) = 1$ et pour tout $x \in [1,2]$, $f(x) = x^3$.

Représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle $[-2,2]$ et justifier l'existence d'une suite de fonctions polynômes (P_n) qui converge uniformément vers la fonction f sur $[-2,2]$.

Démontrer que cette suite de polynômes (P_n) converge dans $\mathbb{R}[X]$ muni de la norme N_1 vers X^2 et étudier sa convergence dans $\mathbb{R}[X]$ muni de la norme N_2.

Partie 2. Application : un théorème des moments

III.4. Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. On suppose que pour tout entier naturel k,
$\displaystyle\int_a^b x^k f(x)\mathrm{d}x = 0 \qquad \left(\int_a^b x^k f(x)\,\mathrm{d}x \text{ est le moment d'ordre } k \text{ de } f \text{ sur } [a,b]\right).$

III.4.a. Si P est une fonction polynôme, que vaut l'intégrale $\displaystyle\int_a^b P(x)f(x)\mathrm{d}x$?

III.4.b. Démontrer, en utilisant le théorème de Weierstrass, que nécessairement f est la fonction nulle. On pourra utiliser sans le démontrer le résultat suivant : si (g_n) est une suite de fonctions qui converge uniformément vers une fonction g sur une partie I de $\mathbb{R}$ et si f est une fonction bornée sur I, alors la suite de fonctions $(f.g_n)$ converge uniformément sur I vers la fonction $f.g$.

III.5. Application
Soit E l'espace vectoriel des applications continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ muni du produit scalaire défini pour tout couple $(f,\, g)$ d'éléments de E par $(f\,|g\,) = \displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$.

On note F le sous-espace vectoriel de E formé des fonctions polynômes définies sur $[a,b]$ et $F^\perp$ l'orthogonal de F. Déterminer $F^\perp$. A-t-on $E = F \oplus F^\perp$?

III.6.

III.6.a. Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n e^{-(1-i)x}\,\mathrm{d}x$. Après avoir démontré l'existence de ces intégrales, établir une relation entre I_{n+1} et I_n et démontrer que, pour tout n non nul, $I_n = \dfrac{n!}{(1-i)^{n+1}}$.

III.6.b. En déduire que, pour tout entier naturel k, $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{4k}e^{-x}x^3 \sin x\,\mathrm{d}x = 0$.

III.6.c. Proposer une fonction f continue sur $[0,+\infty[$, non nulle et vérifiant :

$$\text{pour tout entier naturel } k,\ \int_0^{+\infty} u^k f(u)\mathrm{d}u = 0.$$

III.6.d. Expliquer pourquoi la fonction f proposée à la question précédente ne peut être uniformément approchée sur $[0,+\infty[$ par une suite de polynômes.

Partie 3. Exemple via un théorème de Dini

III.7. Question préliminaire
Soit $x \in [0,1]$, on note $I =]-\infty, \sqrt{x}]$ et on pose, pour tout $t \in I$, $g_x(t) = t + \frac{1}{2}(x - t^2)$. On définit la suite (u_n) par $u_0 = 0$ et la relation de récurrence valable pour tout entier naturel n par :

$$u_{n+1} = u_n + \tfrac{1}{2}\left(x - (u_n)^2\right) = g_x(u_n).$$

Démontrer que la suite (u_n) converge et déterminer, en fonction du réel x, sa limite.

III.8. Proposer un exemple de suite (f_n) de fonctions continues sur $[a,b]$ qui converge simplement mais non uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction f qui est continue. Il sera possible de s'appuyer sur une représentation graphique sans nécessairement donner f_n sous forme analytique.

Pour traiter la suite de cette partie, on pourra admettre le résultat suivant. Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[a,b]$ qui converge simplement vers une fonction f elle même continue sur $[a,b]$. Si la suite (f_n) est croissante, c'est-à-dire : pour tout entier naturel n et pour tout $t \in [a,b]$, $f_n(t) \leq f_{n+1}(t)$, alors la suite (f_n) converge uniformément vers la fonction f sur $[a,b]$.

III.9. Application

Soit (P_n) la suite de fonctions polynômes définie par :

$$P_0(x) = 0 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}\left(x - (P_n(x))^2\right).$$

III.9.a. Justifier que la suite (P_n) converge simplement vers la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ sur l'intervalle $[0,1]$.

III.9.b. Démontrer que la suite (P_n) converge uniformément vers la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ sur l'intervalle $[0,1]$.

Partie 4. Démonstration du théorème d'approximation de Weierstrass

On propose dans cette partie une démonstration probabiliste du théorème d'approximation de Weierstrass pour une fonction continue sur $[0,1]$.

Dans toute cette partie, $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, n un entier naturel non nul et $x \in [0,1]$.

On pose : $B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$ (polynôme de Bernstein).

III.10. Soit S_n une variable aléatoire réelle suivant une loi binomiale $\mathscr{B}(n,x)$.

III.10.a. Démontrer que, pour tout réel $\alpha > 0$, $P(|S_n - nx| > n\alpha) \leq \dfrac{1}{4n\alpha^2}$.

III.10.b. Soit la variable aléatoire $f\left(\frac{S_n}{n}\right)$, démontrer que son espérance vérifie :

$$E\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right] = B_n(f)(x).$$

III.11.

III.11.a. Soit $\varepsilon > 0$, justifier simplement qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout couple $(a,b) \in [0,1]^2$, $|a-b| \leq \alpha$ entraîne $|f(a) - f(b)| < \varepsilon$, puis majorer $\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right|$, pour tout entier k entre 0 et n vérifiant $\left|\frac{k}{n} - x\right| \leq \alpha$.

III.11.b. Justifier que $\left| \displaystyle\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|>\alpha} \left(f\left(\tfrac{k}{n}\right) - f(x)\right) P(S_n = k) \right| \leq 2\|f\|_\infty P\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \alpha\right)$.

III.11.c. Démontrer qu'il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ et tout réel $x \in [0,1]$, $|B_n(f)(x) - f(x)| \leq 2\varepsilon$, puis conclure.

Fin de l'énoncé

IMPRIMERIE NATIONALE – 15 1310 – D'après documents fournis

CCP 2015 - Filière MP
Corrigé de l'épreuve Mathématiques I

Damien Broizat & Nicolas Basbois
Lycée Jules Ferry - Institut Stanislas, Cannes

EXERCICE I.

I.1. Par définition, la fonction génératrice g_X de la variable aléatoire X (qui prend ici ses valeurs dans $\mathbb{N}$) est la somme de la série entière :

$$g_X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}z^n.$$

On reconnaît là le développement en série entière de l'exponentielle (qui a un rayon de convergence infini) :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad g_X(z) = e^{-\lambda}e^{\lambda z} = e^{\lambda z-\lambda}.$$

La restriction de g_X à $\mathbb{R}$ est donc de classe C^∞ et se dérive terme à terme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g'_X(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X=n)nx^{n-1}.$$

En évaluant en $x=1$, on obtient l'espérance de X :

$$E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} nP(X=n) = g'_X(1) = \frac{d}{dx}\left(e^{\lambda x-\lambda}\right)_{x=1} = \lambda.$$

Pour calculer le moment d'ordre 2 de X, on dérive une seconde fois et on évalue en $x=1$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g''_X(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} P(X=n)n(n-1)x^{n-2},$$

donc

$$g''_X(1) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)P(X=n) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)P(X=n) = E(X^2) - E(X).$$

D'où

$$E(X^2) = E(X) + g''_X(1) = \lambda + \frac{d^2}{dx^2}\left(e^{\lambda x-\lambda}\right)_{x=1} = \lambda + \lambda^2,$$

et on déduit la variance de X avec la formule de Huygens :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = (\lambda+\lambda^2) - \lambda^2 = \lambda.$$

EXERCICE II.

II.1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n : x \mapsto e^{-nx} - 2e^{-2nx}$ est continue sur $I =]0;+\infty[$ et se prolonge continûment en 0, donc elle est intégrable sur tout segment $[0,X]$ avec $X > 0$.
En outre, pour tout réel $p > 0$, la fonction positive $x \mapsto e^{-px}$ est intégrable sur $[0;+\infty[$ car elle est continue et

$$\forall X > 0, \qquad \int_0^X e^{-px}dx = \frac{1-e^{-pX}}{p} \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{p}.$$

Par combinaison linéaire, la fonction f_n est donc intégrable sur I pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et

$$\int_0^{+\infty} f_n(x)dx = \int_0^{+\infty} e^{-nx}dx - 2\int_0^{+\infty} e^{-2nx}dx = \frac{1}{n} - \frac{2}{2n} = 0.$$

La série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} f_n(x)dx\right)$ est donc convergente (puisque son terme général est nul), et on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} f_n(x)dx\right) = 0.$$

II.2. Pour tout $x > 0$, les séries géométriques $\sum_{n\geq 1} e^{-nx}$ et $\sum_{n\geq 1} e^{-2nx}$ sont convergentes car leurs raisons e^{-x} et e^{-2x} appartiennent à $]0;1[$. Par combinaison linéaire, on en déduit que la série $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ converge, et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(e^{-x})^n - 2\sum_{n=1}^{+\infty}(e^{-2x})^n = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} - \frac{2e^{-2x}}{1-e^{-2x}}.$$

Ceci montre que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur l'intervalle I vers la fonction

$$S : x \longmapsto \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} - \frac{2e^{-2x}}{1-e^{-2x}} = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} - \frac{2e^{-2x}}{(1-e^{-x})(1+e^{-x})} = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}.$$

Etudions l'intégrabilité de S sur I. Tout d'abord, S est continue sur I, et se prolonge continûment en 0, donc S est intégrable sur tout segment $[0, X]$ avec $X > 0$. Ensuite :

$$S(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{-x},$$

et la fonction positive $x \mapsto e^{-x}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$, donc S aussi. Ceci montre que S est intégrable sur I. Enfin, on a

$$\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\right)dx = \int_0^{+\infty} S(x)dx = \lim_{X\to+\infty}\int_0^{X}\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx = \lim_{X\to+\infty}\left[-\ln(1+e^{-x})\right]_0^X = \ln(2).$$

II.3. La série $\sum_{n\geq 1}\left(\int_0^{+\infty} |f_n(x)|dx\right)$ est divergente. En effet, si elle était convergente, alors on pourrait appliquer le théorème d'intégration terme à terme (car la série $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement vers une fonction S continue par morceaux sur I), et on aurait alors

$$\int_0^{+\infty} S(x)dx = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} f_n(x)dx\right) = 0,$$

ce qui n'est pas le cas d'après la question précédente.

PROBLEME.

Partie 1 : Exemples et contre-exemples

III.1. Supposons qu'il existe une suite (P_n) de polynômes qui converge uniformément vers $h : x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0;1]$. Vu que les polynômes P_n possèdent tous une limite dans $\mathbb{R}$ lorsque $x \to 0^+$, on peut appliquer le théorème de la double limite, ce qui a pour conséquence que h possède une limite dans $\mathbb{R}$ (donc finie !) en 0^+, et cela est contradictoire. Une telle suite de polynômes n'existe donc pas.
Ce résultat illustre le fait qu'on ne peut pas se passer de l'hypothèse de compacité du domaine $[a, b]$ dans le théorème de Weierstrass (l'approximation polynomiale uniforme de la fonction continue $h : x \mapsto \frac{1}{x}$ est impossible sur $]0, 1]$ par exemple).

III.2. Dans l'espace vectoriel normé $E = (\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}), \| \|_\infty)$, l'ensemble $\mathcal{P}_N = Vect((x \mapsto x^k)_{0\leq k\leq N})$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie $(N+1)$, donc c'est une partie fermée de E.
Si une fonction $f \in E$ est limite uniforme de polynômes de degré inférieur ou égal à un entier N fixé, alors on a une suite (P_n) de vecteurs de $\mathcal{P}_N$ qui converge vers f (au sens de la norme sur E), donc sa limite f reste dans $\mathcal{P}_N$ (puisqu'il s'agit d'une partie fermée, elle est stable par passage à la limite).
Cette fonction f est donc elle-même un polynôme de degré inférieur ou égal à N.

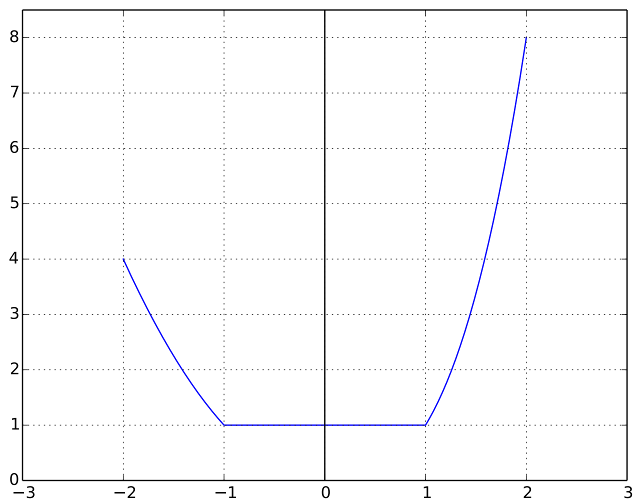
III.3.

III.3.a. L'application N_1 est bien définie (car tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ est continu, donc borné sur le segment $[-2,-1]$), et clairement positive. De plus :

- Si $N_1(P) = 0$, alors $\sup\limits_{[-2,-1]} |P| = 0$, ce qui signifie que la fonction positive $|P|$ est nulle sur le segment $[-2,-1]$. Le polynôme P possède alors une infinité de racines, ce qui entraîne $P = 0$.
- Pour tout $(\lambda, P) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}[X]$, on a
$$N_1(\lambda P) = \sup_{x\in[-2,-1]} |\lambda P|(x) = \sup_{x\in[-2,-1]} |\lambda||P(x)| = |\lambda| \times \sup_{x\in[-2,-1]} |P(x)|$$
(car la constante $|\lambda|$ est positive). Donc $N_1(\lambda P) = |\lambda| N_1(P)$.
- Pour tous polynômes P, Q et pour tout $x \in [-2,-1]$, on a
$$|P+Q|(x) = |P(x)+Q(x)| \leq |P(x)| + |Q(x)| \leq N_1(P) + N_1(Q),$$
(puisque $|P(x)| \leq N_1(P)$ et $|Q(x)| \leq N_1(Q)$).
Le réel $N_1(P) + N_1(Q)$ est un majorant de l'ensemble $\{|P+Q|(x),\ x \in [-2,-1]\}$, il est donc plus grand que la borne supérieure de cet ensemble, i.e.
$$N_1(P) + N_1(Q) \geq \sup\{|P+Q|(x),\ x \in [-2,-1]\} = N_1(P+Q).$$

L'application N_1 est donc bien une norme sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$.

III.3.b. Voici la représentation graphique de f :



La fonction f étant clairement continue sur $[-2;2]$, il existe, d'après le théorème de Weierstrass, une suite de polynômes (P_n) qui converge uniformément vers f sur $[-2;2]$.
Cela signifie que $\sup\limits_{x\in[-2;2]} |P_n(x) - f(x)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
En outre, en considérant la fonction polynomiale $f_1 : x \mapsto x^2$ (qui coïncide avec f sur $[-2;-1]$), on a
$$N_1(P_n - f_1) = \sup_{x\in[-2;-1]} |P_n(x) - f(x)| \leq \sup_{x\in[-2;2]} |P_n(x) - f(x)|,$$
donc on a aussi $N_1(P_n - f_1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui prouve que dans l'espace normé $(\mathbb{R}[X], N_1)$, la suite (P_n) converge vers le polynôme X^2.
De façon similaire, dans l'espace normé $(\mathbb{R}[X], N_2)$, la même suite (P_n) converge vers le polynôme X^3 (puisque la fonction $f_2 : x \mapsto x^3$ coïncide avec f sur $[1;2]$).

Partie 2 : Application : un théorème des moments

Remarque
Il faut supposer que $a < b$, même si l'énoncé ne le précise pas !
En effet, si $a = b$, alors le théorème des moments est bien entendu faux.

III.4.

III.4.a. Par linéarité de l'intégrale sur un segment, l'hypothèse $\left(\forall k \in \mathbb{N},\ \int_a^b x^k f(x)dx = 0\right)$ entraîne que $\int_a^b P(x)f(x)dx = 0$ pour tout polynôme P.

III.4.b. Considérons une suite de polynômes (P_n) qui converge uniformément vers f sur $[a, b]$ (une telle suite existe d'après le théorème de Weierstrass puisque f est continue).
D'après la question précédente, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ \int_a^b P_n(x)f(x)dx = 0$.
Or, $\int_a^b P_n(x)f(x)dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f^2(x)dx$, puisque

$$\left|\int_a^b P_n(x)f(x)dx - \int_a^b f^2(x)dx\right| \leq \int_a^b |P_n(x) - f(x)||f(x)|dx \leq \underbrace{\left(\int_a^b |f(x)|dx\right)}_{cste} \times \underbrace{\|P_n - f\|_{\infty,[a,b]}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}.$$

On en déduit donc, en faisant tendre $n \to +\infty$, que $\int_a^b f^2(x)dx = 0$. Cela entraîne la nullité de f^2 sur $[a, b]$ (puisque f^2 est continue et positive), et donc la nullité de f.

Remarque
L'indication fournie est inutilement compliquée, puisqu'elle demande d'utiliser deux "boîtes noires" :

- la convergence uniforme sur $[a, b]$ du produit $P_n f$ vers f^2 ;
- l'interversion "limite-intégrale" en cas de convergence uniforme sur un segment.

III.5. L'ensemble $F^\perp$ est formé des fonctions $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ qui vérifient $\int_a^b P(x)f(x)dx = 0$ pour tout fonction polynomiale P. D'après la question préécécédente, seule la fonction nulle $f = 0$ vérifie cette condition. On a donc $F^\perp = \{0_E\}$, donc $F \oplus F^\perp = F$.
Vu que $F \neq E$ (il existe des fonctions continues sur $[a, b]$ non polynomiales, par exemple $x \mapsto e^x$!), on a donc $F \oplus F^\perp \neq E$.

III.6.

III.6.a.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $x \mapsto x^n e^{-(1-i)x}$ est continue (à valeurs complexes) sur $[0, +\infty[$, et on a $\left|x^n e^{-(1-i)x}\right| = x^n e^{-x}$, donc $\lim_{x\to+\infty} x^2 \left|x^n e^{-(1-i)x}\right| = \lim_{x\to+\infty} x^{n+2}e^{-x} = 0$ par croissance comparée, ce qui montre que $|x^n e^{-(1-i)x}|$ est négligeable devant $\frac{1}{x^2}$ au voisinage de $+\infty$, donc intégrable.
  Ceci montre que l'intégrale I_n est absolument convergente, donc convergente.
- Ensuite, on fait une intégration par parties à partir de I_{n+1}, en dérivant $x \mapsto x^{n+1}$ et en intégrant $x \mapsto e^{-(1-i)x}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+1} = \int_0^{+\infty} x^{n+1}e^{-(1-i)x}dx = \left[\frac{e^{-(1-i)x}}{-(1-i)}x^{n+1}\right]_0^{+\infty} + \frac{n+1}{1-i}\int_0^{+\infty} x^n e^{-(1-i)x}dx,$$

  et ceci a du sens car $\lim_{X\to+\infty}\left[\frac{e^{-(1-i)x}}{-(1-i)}x^{n+1}\right]_0^X = \lim_{X\to+\infty} \frac{e^{-(1-i)X}}{-(1-i)}X^{n+1}$ existe
  (en effet, $\left|\frac{e^{-(1-i)X}}{-(1-i)}X^{n+1}\right| = \frac{X^{n+1}e^{-X}}{\sqrt{2}} \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} 0$).
  On obtient donc la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} = \frac{n+1}{1-i}I_n$.

- On en déduit par récurrence sur n que $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \dfrac{n!}{(1-i)^{n+1}}$.

  En effet, c'est vrai pour $n = 0$ $\left(\text{puisque } I_0 = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-(1-i)x}dx = \left[\frac{e^{-(1-i)x}}{-(1-i)}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{1-i}\right)$, et si pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, on a $I_n = \dfrac{n!}{(1-i)^{n+1}}$, alors

$$I_{n+1} = \frac{n+1}{1-i} I_n = \frac{n+1}{1-i} \times \frac{n!}{(1-i)^{n+1}} = \frac{(n+1)!}{(1-i)^{n+2}}.$$

Remarque
L'énoncé ne demandait la formule que pour $n \geq 1$. Curieux...

III.6.b. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\int_0^{+\infty} x^{4k} e^{-x} x^3 \sin(x) dx = \int_0^{+\infty} Im\left(x^{4k+3} e^{-(1-i)x}\right) dx = Im(I_{4k+3}).$$

Or, d'après les formules établies précédemment, $I_{4k+3} = \dfrac{(4k+3)!}{((1-i)^4)^{k+1}} = \dfrac{(4k+3)!}{(-4)^{k+1}} \in \mathbb{R}$, donc la partie imaginaire de I_{4k+3} est nulle. On en déduit la nullité de l'intégrale considérée.

III.6.c. Effectuons le changement de variable $u = x^4$ dans l'intégrale impropre convergente précédente. L'application $x \mapsto x^4$ est une bijection de classe C^1 de $]0; +\infty[$ dans $]0; +\infty[$, donc

$$\int_0^{+\infty} x^{4k} e^{-x} x^3 \sin(x) dx \underset{du=4x^3dx}{=} \frac{1}{4} \int_0^{+\infty} u^k \sin(u^{1/4}) e^{-u^{1/4}} du.$$

En posant $f(u) = \sin(u^{1/4})e^{-u^{1/4}}$ pour tout $u \geq 0$, on définit une fonction $f \in \mathcal{C}^0([0; +\infty[, \mathbb{R})$ qui est non nulle ($f(1) = \sin(1)e^{-1} \neq 0$ par exemple) et dont tous les moments sont nuls.

Remarque
Le théorème des moments montré à la question **III.4.** ne se généralise donc pas aux intervalles non compacts.

III.6.d. Supposons que f soit limite uniforme sur $[0; +\infty[$ d'une suite de polynômes (P_n).
Nous avons alors $\|P_n - f\|_{\infty,[0,+\infty[} \leq 1$ pour n supérieur à un certain rang $N \in \mathbb{N}$, ce qui implique

$$\forall n \geq N,\ \forall x \in [0; +\infty[, \quad |P_n(x)| \leq 1 + |f(x)|$$

Mais la fonction limite f est elle-même bornée sur $[0; +\infty[$ (car elle est continue et tend vers 0 en $+\infty$, puisque $|f(u)| \leq e^{-u^{1/4}}$). On en déduit que pour tout $n \geq N$, le polynôme P_n est borné sur $[0; +\infty[$, donc constant (puisqu'un polynôme de degré ≥ 1 a une limite infinie en $+\infty$).
Ainsi, pour tout $x \in [0; +\infty[$, on a (par convergence simple de (P_n) vers f) :

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} P_n(x) = \lim_{n\to+\infty} P_n(0) = f(0),$$

ce qui entraîne que f est constante, et ceci est contradictoire ($f(1) \neq f(0)$ par exemple).
La fonction f n'est donc pas une limite uniforme de polynômes sur $[0; +\infty[$.

Partie 3 : Exemple via un théorème de Dini

III.7. Une étude rapide montre que la fonction polynomiale $g_x : t \mapsto t + \frac{1}{2}(x - t^2)$ est strictement croissante sur $I =]-\infty, \sqrt{x}]$, et que $g_x(I) =]-\infty, \sqrt{x}] = I$ (puisque $g_x(\sqrt{x}) = \sqrt{x}$).
Le premier terme $u_0 = 0$ est dans I (puisque $x \geq 0$), donc une récurrence facile montre que $u_n \in I$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite (u_n) est donc majorée par $\sqrt{x}$.
D'autre part, $u_1 = g_x(u_0) = g_x(0) = \frac{x}{2} \geq u_0$, donc la croissance de g_x sur l'intervalle I implique (par récurrence) celle de la suite (u_n), puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n \leq u_{n+1} \implies g_x(u_n) \leq g_x(u_{n+1}) \implies u_{n+1} \leq u_{n+2}.$$

La suite (u_n) est donc croissante et majorée, ce qui entraîne sa convergence vers un réel ℓ tel que $g_x(\ell) = \ell$ par continuité de g_x, c'est-à-dire tel que $x - \ell^2 = 0$. Or, (u_n) ne peut pas converger vers $-\sqrt{x}$ si $x > 0$ (car $\ell = \sup_{n\in\mathbb{N}} u_n \geq u_0 = 0$), donc elle converge nécessairement vers $\sqrt{x}$.

Finalement, la suite (u_n) converge (en croissant) vers $\sqrt{x}$.

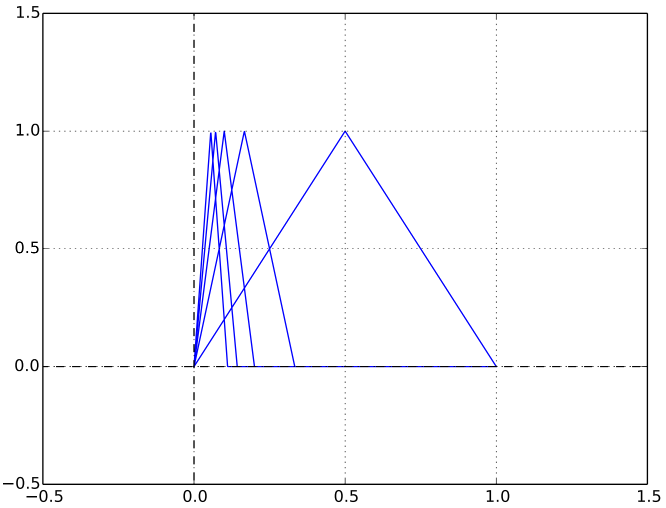
III.8. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par (cette expression n'était pas exigée par le sujet) :

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{2n(x-a)}{b-a} & \text{si } a \leq x < a + \dfrac{b-a}{2n} \\ 2 - \dfrac{2n(x-a)}{b-a} & \text{si } a + \dfrac{b-a}{2n} \leq x < a + \dfrac{b-a}{n} \\ 0 & \text{si } a + \dfrac{b-a}{n} \leq x \leq b \end{cases}.$$

f_n est affine par morceaux, et son graphe est la réunion des segments $[AB_n], [B_nC_n], [C_nD]$, où

$$A = (a,0), \quad B_n = \left(a + \frac{b-a}{2n}, 1\right), \quad C_n = \left(a + \frac{b-a}{n}, 0\right), \quad D = (b,0).$$

Voici le graphe de f_n pour $[a,b] = [0,1]$, et $n \in \{1,3,5,7,9\}$:



Les fonctions f_n sont clairement continues sur $[a,b]$ la suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle (qui est continue), puisque $f_n(a) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et si $x \in]a,b]$, $f_n(x) = 0$ pour $n > \frac{b-a}{x-a}$. Mais la convergence vers 0 n'est pas uniforme puisque

$$\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - 0| = \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x)| = 1,$$

et cette quantité ne tend pas vers 0 quand $n \to +\infty$.

III.9.

III.9.a. Pour $x \in [0;1]$ fixé, la suite $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite (u_n) étudiée à la question **III.7.**, puisque $P_0(x) = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+1}(x) = g_x(P_n(x))$. On a donc $\lim_{n\to+\infty} P_n(x) = \sqrt{x}$.

Ceci étant vrai pour tout $x \in [0;1]$, la suite de polynômes (P_n) converge simplement vers la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ sur l'intervalle $[0;1]$.

III.9.b. Les P_n et la fonction limite $x \mapsto \sqrt{x}$ sont continues sur $[0;1]$, et la suite de fonctions (P_n) est croissante, puisque

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0;1], \quad P_{n+1}(x) - P_n(x) = \frac{1}{2}\left(x - P_n(x)^2\right) \geq 0,$$

puisque d'après **III.7.**, on a $P_n(x) \in [0;\sqrt{x}]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

D'après le théorème de Dini, la convergence des (P_n) vers $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniforme sur l'intervalle $[0;1]$.

Partie 4 : Démonstration du théorème d'approximation de Weierstrass

III.10.

III.10.a. Puisque S_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,x)$, l'espérance de S_n est $E(S_n) = nx$ et sa variance est $V(S_n) = nx(1-x)$. Appliquons alors l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev : pour tout réel $\beta > 0$,

$$P(|S_n - E(S_n)| > \beta) \leq \frac{V(S_n)}{\beta^2}.$$

En choisissant $\beta = n\alpha$ (avec $\alpha > 0$), on obtient ainsi :

$$P(|S_n - nx| > n\alpha) \leq \frac{nx(1-x)}{n^2\alpha^2} = \frac{x(1-x)}{n\alpha^2}.$$

Mais le polynôme $x \mapsto x(1-x)$, qui a pour racines 0 et 1, atteint son maximum en $x = 1/2$, et ce maximum vaut $1/4$. On a donc la majoration

$$P(|S_n - nx| > n\alpha) \leq \frac{1}{4n\alpha^2}.$$

III.10.b. D'après la formule de transfert, on a, puisque $S_n(\Omega) = \{0, 1, \cdots, n\}$,

$$E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) = \sum_{k=0}^{n} P(S_n = k) f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Mais par définition de la loi binomiale, $P(S_n = k) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$ pour tout $k \in \{0, 1, \cdots, n\}$, donc

$$E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right) = B_n(f)(x).$$

III.11.

III.11.a. Soit $\varepsilon > 0$. La fonction f est continue sur le compact $[0;1]$, donc uniformément continue (c'est le théorème de Heine). Il existe donc un réel $\alpha > 0$ tel que

$$\forall (a,b) \in [0;1]^2, \quad |a - b| \leq \alpha \implies |f(a) - f(b)| < \varepsilon.$$

Pour tout entier $k \in \{0, 1, \cdots, n\}$, on a alors $0 \leq \frac{k}{n} \leq 1$, donc en utilisant l'implication précédente avec $a = \frac{k}{n}$, on en déduit

$$\forall x \in [0;1], \qquad \left|\frac{k}{n} - x\right| \leq \alpha \implies \left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| < \varepsilon.$$

III.11.b. D'après l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{0 \leq k \leq n,\ \left|\frac{k}{n} - x\right| > \alpha} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right) P(S_n = k)\right| &\leq \sum_{0 \leq k \leq n,\ \left|\frac{k}{n} - x\right| > \alpha} \left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| P(S_n = k) \\
&\leq \sum_{0 \leq k \leq n,\ \left|\frac{k}{n} - x\right| > \alpha} 2\|f\|_\infty P(S_n = k) \\
&= 2\|f\|_\infty \times P\left(\bigcup_{0 \leq k \leq n,\ \left|\frac{k}{n} - x\right| > \alpha} (S_n = k)\right),
\end{aligned}$$

la réunion étant disjointe.
Mais pour tout éventualité $\omega \in \Omega$, on a

$$\begin{aligned}\omega \in \bigcup_{0\leq k\leq n,\ \left|\frac{k}{n}-x\right|>\alpha} (S_n = k) &\iff \exists k \in \{0,\cdots,n\},\ \left|\tfrac{k}{n} - x\right| > \alpha \text{ et } S_n(\omega) = k \\ &\iff \left|\tfrac{S_n(\omega)}{n} - x\right| > \alpha \iff \omega \in \left(\left|\tfrac{S_n}{n} - x\right| > \alpha\right),\end{aligned}$$

ce qui fait que $P\left(\bigcup_{0\leq k\leq n,\ \left|\frac{k}{n}-x\right|>\alpha} (S_n = k)\right) = P\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \alpha\right)$.
La majoration de la somme étudiée se réécrit donc

$$\left|\sum_{0\leq k\leq n,\ \left|\frac{k}{n}-x\right|>\alpha}\left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right)P(S_n = k)\right| \quad \leq \quad 2\|f\|_\infty \times P\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \alpha\right).$$

III.11.c. Soit $\varepsilon > 0$. Considérons le réel $\alpha > 0$ introduit dans la question **III.11.a.**.
Fixons $x \in [0;1]$. Pour estimer la différence $|B_n(f)(x) - f(x)|$, il suffit de réécrire $f(x)$ sous la forme d'une somme :

$$\forall x \in [0;1], \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}f(x)$$

(d'après la formule du binôme). On a alors :

$$\begin{aligned}|B_n(f)(x) - f(x)| &= \left|\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}f\left(\frac{k}{n}\right) - \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}f(x)\right| \\ &= \left|\sum_{k=0}^{n}\left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right)P(S_n = k)\right|.\end{aligned}$$

Décomposons alors cette somme suivant les indices $k \in \{0,1,\cdots,n\}$ tels que $\left|\frac{k}{n} - x\right| \leq \alpha$ et suivant ceux tels que $\left|\frac{k}{n} - x\right| > \alpha$:

$$\begin{aligned}|B_n(f)(x) - f(x)| &= \left|\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\leq\alpha}\left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right)P(S_n = k) + \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|>\alpha}\left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right)P(S_n = k)\right| \\ &\leq \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\leq\alpha}\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right|P(S_n = k) + \left|\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|>\alpha}\left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right)P(S_n = k)\right|.\end{aligned}$$

D'après la question **III.11.a** : on a $\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| \leq \varepsilon$ pour tous les k tels que $\left|\frac{k}{n} - x\right| \leq \alpha$. On en déduit une majoration de la première somme :

$$\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\leq\alpha}\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right|P(S_n = k) \leq \varepsilon \times \underbrace{\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\leq\alpha}P(S_n = k)}_{\leq P(\Omega)} \leq \varepsilon.$$

Quant à la deuxième somme, on peut la majorer en utilisant le résultat de **III.11.b** :

$$\left|\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|>\alpha}\left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right)P(S_n = k)\right| \leq 2\|f\|_\infty \times P\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \alpha\right).$$

Or $P\left(\left|\frac{S_n}{n}-x\right|>\alpha\right)=P\left(|S_n-nx|>n\alpha\right)\leq\frac{1}{4n\alpha^2}$ (d'après **III.10.a.**), donc

$$\left|\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|>\alpha}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)P(S_n=k)\right|\leq\frac{\|f\|_\infty}{2n\alpha^2}.$$

A ce stade, on a montré :

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\alpha>0,\ \forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in[0;1],\qquad |B_n(f)(x)-f(x)|\leq\varepsilon+\frac{\|f\|_\infty}{2n\alpha^2}.$$

Reste à choisir n suffisamment grand : en posant $n_0=E\left(\frac{\|f\|_\infty}{2\alpha^2}\right)+1$, on a

$$n\geq n_0\qquad\Longrightarrow\qquad\forall x\in[0;1],\ |B_n(f)(x)-f(x)|\leq 2\varepsilon.$$

Finalement, on a établi que

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists n_0\in\mathbb{N},\ \forall n\geq n_0,\ \forall x\in[0;1],\qquad |B_n(f)(x)-f(x)|\leq 2\varepsilon,$$

ce qui signifie exactement que la suite des polynômes de Bernstein $(B_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0;1]$. La fonction f étant une quelconque fonction continue de $[0;1]$, on a démontré le théorème de Weierstrass sur $[0;1]$.

1/ Présentation du sujet

Le sujet proposait dans un premier temps deux exercices. Le premier, assez simple, utilisait la fonction génératrice de la loi de Poisson afin d'en déduire des moments. Le deuxième montrait l'importance d'une hypothèse dans un des théorèmes d'intégration terme à terme d'une série de fonctions.

Dans un second temps, un problème étudiait différentes utilisations du théorème d'approximation de Weierstrass pour une fonction continue sur un segment et proposait une démonstration probabiliste de ce théorème.

Cette épreuve interdisait l'usage des calculatrices.

2/ Remarques générales

La moyenne de l'épreuve est de 10,88 et l'écart type est de 4,12. Ce sujet a permis de bien classer les candidats. La moyenne est très convenable et les notes sont bien étalées.

L'énoncé était clair et les questions, de difficulté variée, permettaient à tous les candidats, même faibles de s'exprimer. Les contre-exemples abordés, fournis ou à définir, permettent de bien distinguer les candidats inventifs de ceux qui reproduisent des raisonnements stéréotypés.

Globalement, les candidats ont balayé l'ensemble du sujet.

Un effort a été fait cette année en ce qui concerne le soin apporté aux copies.

Conclusion
L'attention des candidats est attirée sur le fait que les textes des sujets de mathématiques nécessitent une connaissance très précise des points fondamentaux du cours.

Sont ainsi valorisés :

- L'apprentissage du cours et en particulier les démonstrations des points importants, les exercices et exemples de base.
- Les qualités de rigueur et de clarté d'exposition que l'on peut attendre d'un futur ingénieur.
- L'aptitude à savoir manipuler sa calculatrice (cette année en mathématiques 2).
- Le soin apporté à la présentation de son travail.

La devise donnée aux concepteurs est : un candidat de niveau moyen et qui a travaillé doit pouvoir obtenir la moyenne au moins.

3/ Remarques détaillées par question

Premier exercice

Exercice assez bien traité, de niveau assez simple pour ne pas défavoriser les 5/2.
On demandait de déduire l'espérance et la variance à partir de la fonction génératrice de la variable aléatoire. Toute autre réponse, même juste, ne rapportait pas de point.
Plusieurs candidats laissent la fonction génératrice sous forme de série.

Deuxième exercice

Cet exercice a été très moyennement réussi.

1. On constate une grande difficulté pour établir l'intégrabilité d'une fonction non positive :
- oubli de la valeur absolue, oubli de distinguer deux voisinages (intervalle « deux fois » ouvert) ;
- oubli de préciser que la fonction est d'abord continue sur *I*.

En général les questions « simples » sont à traiter avec rigueur.

2. Beaucoup d'erreurs de calcul, en particulier pour une somme géométrique qui commence à $n=1$ (et non $n=0$), quelques confusions entre *x* et *n*.
Curieusement, l'erreur « $\lim\limits_{x\to\infty} f_n(x)=0 \Rightarrow \sum f_n$ converge » est apparue plusieurs fois.

3. « sans aucun calcul » a été mal compris et certaines copies proposent plusieurs lignes de calcul !

Problème

1. L'argument de la non continuité de *h* en 0 a souvent été évoqué, à tort car *h* n'est pas définie en 0 !
La réponse la plus fréquente ici est que le théorème de Weierstrass ne peut pas s'appliquer car l'intervalle $\left]0,1\right]$ n'est pas un segment !
Peu de candidats ont pensé à l'argument : la fonction *h* n'étant pas bornée sur *I*, elle ne peut être approchée uniformément par une suite de polynômes (P_n).

2. Trop peu de candidats pensent à utiliser le fait qu'un espace vectoriel de dimension finie est fermé.

3. Beaucoup de points perdus sur une question simple : démontrer une norme qui utilise un sup…
La rédaction de la convergence de la suite (P_n) pour les normes N_1 et N_2 est en général décevante.

4. Il était indiqué « on pourra utiliser le résultat suivant …» : on ne demande pas de démonstration du résultat !
Le théorème d'interversion limite intégrale est parfois mal expliqué.
L'erreur la plus fréquente est « $\int_a^b f^2 = 0 \Rightarrow f=0$ car f^2 positive ».

5. On rencontre des copies utilisant des notions de dimension pour établir une somme directe mais l'espace ici est de dimension infinie.

Un conseil général est de chercher, en premier, à répondre « non » à une question du type « a-t-on ».

6. On trouve parfois des inégalités faisant intervenir des complexes, ou encore $\left|e^{i\theta}\right| < 1$ ...
On oublie parfois d'initialiser la récurrence.
Sinon question assez bien réussie.

7. Question peu réussie.
On rencontre : $u_{n+1} = g(u_n)$ avec *g* croissante donc la suite (u_n) est croissante !

8. Bien lire la question : on propose souvent des contre-exemples avec une fonction *f* non continue sur l'intervalle.

9. Question assez bien traitée ; les candidats font le lien avec la question 7.

10. Question assez bien traitée. Toutefois, on attendait une légère explication de la majoration de $x(1-x)$. Il n'était pas utile de redémontrer la variance de la loi binomiale.

11. Certaines copies ne reconnaissent pas la continuité uniforme.
Quelques réponses « bricolage » mais, globalement, le candidat qui a pensé à séparer en deux sommes arrive à faire quelque chose. Attention à la rigueur et à l'ordre des quantificateurs dans ce type de questions.