Chapitre 12

Équations différentielles linéaires

Révisions MP2I

Revoir les chapitres 12 et 33.

1 Généralités

1.1 Rappels

Rappel :

- Une *équation différentielle linéaire du premier ordre* est de la forme $a(x)y' + b(x)y = c(x)$ avec a, b et c des fonctions scalaires continues sur un intervalle I. En pratique on cherche à résoudre sur un intervalle où a ne s'annule pas, ce qui revient à étudier la forme $y' = a(x)y + b(x)$. l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée $y' = a(x)y$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 1 :
$$\mathcal{S} = \{x \mapsto k\,\mathrm{e}^{A(x)}, k \in \mathbb{K}\} = \mathrm{vect}(x \mapsto \mathrm{e}^{A(x)})$$
avec A une primitive de a sur I.
- Une *équation différentielle linéaire du second ordre* est de la forme $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x)$. Là encore, on se ramène à la forme $y'' = a(x)y' + b(x)y + c(x)$. Lorsque c est nul (équation homogène) et a et b constants, on introduit l'*équation caractéristique* (EC) $r^2 = ar + b$ et l'ensemble des solutions est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2 :
$$\mathcal{S} = \{x \mapsto k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x), (k_1, k_2) \in \mathbb{K}^2\} = \mathrm{vect}(f_1, f_2)$$
où :
  — si EC admet deux racines distinctes $r_1, r_2 \in \mathbb{K}$, on peut prendre $f_i : x \mapsto \mathrm{e}^{r_i x}$ pour $i = 1, 2$.
  — si EC admet une racine double r, on peut prendre $f_1 : x \mapsto \mathrm{e}^{rx}$ et $f_2 : x \mapsto x\,\mathrm{e}^{rx}$.
  — dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et si EC admet deux racines complexes distinctes conjugées $r \pm i\omega$, on peut aussi prendre $f_1 : x \mapsto \mathrm{e}^{rx}\cos(\omega x)$ et $f_2 : x \mapsto \mathrm{e}^{rx}\sin(\omega x)$.

Remarques :

- On va chercher dans ce chapitre à généraliser le cas d'une équation différentielle linéaire à un système de plusieurs équations, par exemple :
$$\begin{cases} y_1' = a_{1,1}(x)y_1 + a_{1,2}(x)y_2 + b_1(x) \\ y_2' = a_{2,1}(x)y_1 + a_{2,2}(x)y_2 + b_2(x) \end{cases}$$
Cela peut s'écrire matriciellement $Y' = A(x)Y + B(x)$.
- Une équation différentielle du second ordre $y'' = a(x)y' + b(x)y + c(x)$ peut se ramener à un tel système du premier ordre ! Il suffit de poser $y_1 = y$, $y_2 = y'$ dans l'équation :
$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = b(x)y_1 + a(x)y_2 + c(x) \end{cases}$$
ce qui matriciellement donne $A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b(x) & a(x) \end{pmatrix}$

La propriété de *linéarité* d'une équation différentielle se généralise ainsi au cas de *systèmes différentiels linéaires*, ce qu'on peut encore écrire de façon plus abstraite comme une équation différentielle portant sur une inconnue *vectorielle* $x : I \to E$, avec E un espace vectoriel.

1.2 Définition

Dans toute la suite, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie, et I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide.

Définition 1. On appelle équation différentielle linéaire (vectorielle) sur I et dans E toute équation de la forme :

$$x' = a(t) \cdot x + b(t)$$

où :
- a est une application continue de I dans $\mathcal{L}(E)$;
- b est une application continue de I dans E, appelée *second membre*.

Une fonction $f : I \to E$ est solution de cette équation lorsque f est dérivable sur I et vérifie :

$$\forall t \in I, \quad f'(t) = a(t)\big(f(t)\big) + b(t)$$

L'équation $x' = a(t) \cdot x$ est appelée *équation homogène associée* à l'équation $x' = a(t) \cdot x + b(t)$.

Remarques :
- Vu la continuité de a et de b, une solution f est nécessairement de classe $\mathcal{C}^1$. l'ensemble des solutions est donc une partie de $\mathcal{C}^1(I, E)$.
- La notation $a(t) \cdot x$ doit se comprendre comme $a(t)\big(x\big)$.
- Une base $\mathcal{B}$ de E étant fixée, l'équation $x' = a(t) \cdot x + b(t)$ peut s'écrire matriciellement $X' = A(t)X + B(t)$, avec $A(t) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B(t) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ qui représentent respectivement $a(t)$ et $b(t)$ dans $\mathcal{B}$.

Cette écriture matricielle peut se traduire par un système de n équations différentielles scalaires. Prenons maintenant le point de vue inverse et partons de la définition d'un tel système différentiel linéaire.

1.3 Système différentiel linéaire

Définition 2. On appelle *sytème différentiel linéaire* d'ordre 1 sur I (sous forme résolue) à n inconnues tout système de la forme :

$$\begin{cases} x_1' = a_{1,1}(t)x_1 + a_{1,2}(t)x_2 + \cdots + a_{1,n}(t)x_n + b_1(t) \\ x_2' = a_{2,1}(t)x_1 + a_{2,2}(t)x_2 + \cdots + a_{2,n}(t)x_n + b_2(t) \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ x_n' = a_{n,1}(t)x_1 + a_{n,2}(t)x_2 + \cdots + a_{n,n}(t)x_n + b_n(t) \end{cases},$$

où $(a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et $(b_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ sont des familles d'applications continues de I dans $\mathbb{K}$, appelées respectivement *coefficients* et *second membres*.

Remarque : Un tel système est noté de façon plus concise

$$X' = A(t)X + B(t),$$

où $A = (a_{i,j})_{i,j} : I \to \mathcal{C}^0\big(I, \mathcal{M}_n(\mathbb{K})\big)$ est appellée la *matrice* du système et $B = (b_i)_i : I \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \simeq \mathbb{K}^n$ le *second membre*. La famille $(x_i)_i$ des n inconnues s'interprète donc comme une seule inconnue *vectorielle* $X : I \to \mathbb{K}^n$: les solutions cherchées sont des applications dérivables de I vers $\mathbb{K}^n$.

On retrouve donc une équation de la forme $x' = a(t) \cdot x + b(t)$ dans l'espace $E = \mathbb{K}^n$ en considérenant l'endomorphisme $a(t)$ canoniquement associé à $A(t)$ pour tout $t \in I$.

1.4 Principe de superposition

Proposition 1. *Soit une équation différentielle linéaire homogène $x' = a(t) \cdot x$ sur I dans E et soient $b, c : I \to E$ deux applications continues. Alors si f est solution de $x' = a(t) \cdot x + b(t)$ et g est solution de $x' = a(t) \cdot x + c(t)$, la fonction $\lambda f + \mu g$ est solution de $x' = a(t) \cdot x + \lambda b(t) + \mu c(t)$ pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.*

Corollaire 1. *L'ensemble des solution d'une équation différentielle linéaire homogène $x' = a(t) \cdot x$ sur I dans E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(I, E)$.*

1.5 Problème de Cauchy

Définition 3. On appelle *problème de Cauchy* (linéaire) la donnée d'une équation différentielle linéaire $x' = a(t) \cdot x + b(t)$ et d'une *condition intiale* $(t_0, x_0) \in I \times E$. On dit que f est solution de ce problème de Cauchy lorsque f est solution de l'équation et $f(t_0) = x_0$.

Remarques :

- On peut présenter un problème de Cauchy sous la forme d'un système

$$\begin{cases} x' = a(t) \cdot x + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

- Le problème de Cauchy précédent peut être mis sous la forme *intégrale* suivante, qui lui est complétement équivalente :

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \big(a(u) \cdot x(u) + b(u)\big) \mathrm{d}u$$

1.6 Représentation d'une équation scalaire linéaire d'ordre n

Définition 4. On appelle *équation différentielle linéaire scalaire d'ordre* n une équation de la forme

$$y^{(n)} = a_0(t)y + a_1(t)y' + \cdots + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + b(t)$$

avec $a_0, \ldots, a_{n-1}, b : I \to \mathbb{K}$ continues. b est appelé *second membre*. Une solution est une fonction $f : I \to \mathbb{K}$ de classe $\mathcal{C}^n$ telle que

$$\forall t \in I, \quad f^{(n)}(t) = a_0(t)f(t) + \cdots + a_{n-1}(t)f^{(n-1)}(t) + b(t)$$

Proposition 2. *f est solution de l'équation précédente si, et seulement si, $(f, f', \ldots, f^{(n-1)})$ est solution du système $X' = A(t)X + B(t)$ avec*

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ a_0(t) & a_1(t) & a_2(t) & \cdots & a_{n-1}(t) \end{pmatrix} \quad et \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$$

Dans la définition suivante, on ne fait que considérer la notion de problème de Cauchy pour une équation différentielle vectorielle d'ordre 1 en dimension n dans le cadre de la traduction vectorielle précédente d'une équation différentielle scalaire d'ordre n.

Définition 5. Un problème de Cauchy pour une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre n est de la forme :

$$\begin{cases} y^{(n)} = a_0(t)y + a_1(t)y' + \cdots + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + b(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

Cela correspond donc à la donnée d'une équation et de n conditions initiales pour les valeurs de $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ en t_0.

2 Solutions d'une équation différentielle linéaire

2.1 Structure de l'ensemble des solutions

Proposition 3. *Étant donnée une équation différentielle linéaire homogène $x' = a(t) \cdot x$ sur I dans E, l'ensemble $\mathcal{S}_H$ des solutions est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, sous-espace de $\mathcal{C}^1(I, E)$.*

Remarque : C'est une conséquence déjà vue du principe de superposition. On peut aussi voir $\mathcal{S}_H$ comme le noyau de l'application linéaire $\Phi : \mathcal{C}^1(I, E) \to \mathcal{C}^0(I, E)$ définie par $\Phi : f \mapsto f' - a \cdot f$.

Proposition 4. *Étant donnée une équation différentielle linéaire $x' = a(t) \cdot x + b(t)$ sur I dans E, et une solution particulière f_0, l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions est un sous-espace affine de $\mathcal{C}^1(I, E)$, dirigé par le sous-espace vectoriel de l'ensemble $\mathcal{S}_H$ des solutions de l'équation homogène associée, et passant par f_0 :*

$$\mathcal{S} = f_0 + \mathcal{S}_H = \{f_0 + f, f \in \mathcal{S}_H\}$$

2.2 Théorème de Cauchy linéaire et conséquence

Théorème 1. *Étant donné un problème de Cauchy linéaire*

$$\begin{cases} x' = a(t) \cdot x + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases},$$

avec $a : I \to \mathcal{L}(E)$, $b : I \to E$, et $(t_0, x_0) \in I \times E$, il existe une unique fonction $f : I \to E$ de classe $\mathcal{C}^1$, solution sur I.

Remarque : Cela s'applique en particulier au cas d'un problème de Cauchy pour une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre n : Il existe une unique solution à une équation de la forme $y^{(n)} = a_0(t)y + a_1(t)y' + \cdots + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + b(t)$, vérifiant des conditions initiales $y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}$.

Ce théorème permet ainsi, en fixant $t_0 \in I$, d'établir une bijection entre E et l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions (un ensemble de fonctions à valeurs dans E). Vu la structure linéaire ou affine de $\mathcal{S}$, cela donne même un isomorphisme :

Proposition 5. *Étant donné une équation différentielle linéaire homogène sur I dans E, l'espace vectoriel $\mathcal{S}_H$ des solutions est de dimension n : pour tout $t_0 \in I$, l'application $f \mapsto f(t_0)$ réalise un isomorphisme de $\mathcal{S}_H$ sur E.*

Remarques :
- Résoudre une équation différentielle linéaire homogène vectorielle d'ordre 1 et de dimension n revient donc à trouver n solutions $f_1, \ldots, f_n$ libres. Toute autre solution sera une combinaison linéaire de cette base $(f_1, \ldots, f_n)$ de $\mathcal{S}_H$.
- Pour qu'une telle famille soit libre dans $\mathcal{C}^1(I, E)$, il suffit en fait qu'il existe $t_0 \in I$ telle que la famille $(f_1(t_0), \ldots, f_n(t_0))$ soit une base de E !
- Pour une équation non homogène, l'application $f \mapsto f(t_0)$ n'est pas un isomorphisme d'espaces vectoriels puisque $\mathcal{S}$ n'est pas un espace vectoriel. Néanmoins, c'est un sous-espace affine dirigé par le sous-espace vectoriel $\mathcal{S}_H$ (solutions de l'équation homogène) qui est de dimension n, donc on peut tout de même dire que $\mathcal{S}$ est de dimension n.

On peut adapter ces résultats au cas d'une équation différentielle scalaire d'ordre n :

Proposition 6. *L'ensemble des solutions d'une équation différentielle scalaire d'ordre n homogène est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$ de dimension n.*

Remarques :
- Une base de $\mathcal{S}_H$ sera alors une famille de solutions $(f_1, \ldots, f_n)$ libre dans $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$.
- Dans le cas d'une équation non homogène, il s'agit plutôt d'un sous-espace affine de dimension n.

2.3 Cas des équations scalaires d'ordre 1 ou 2 non normalisées (raccords, séries entières)

Il s'agit d'étudier ici le cas d'équations de la forme $a(t)x' + b(t)x = c(t)$ ou $a(t)x'' + b(t)x' + c(t)x = d(t)$. On va essentiellement voir deux méthodes, qui peuvent se compléter.

Méthode : On partitionne l'intervalle I en sous-intervalles sur lesquels $a(t)$ ne s'annule pas, on cherche à résoudre l'équation équivalente normalisée sur ces sous-intervalles et on étudie les *raccords* possibles.

Méthode : On raisonne par analyse-synthèse pour obtenir l'ensemble des solutions de l'équation qui sont développables en série entière. La connaissance de la dimension de l'espace des solutions sur des intervalles où a ne s'annule pas (grâce au théorème de Cauchy linéaire) peut permettre de savoir si on obtient ainsi toutes les solutions ou pas.

Exercice 1. Résoudre, en étudiant les raccords :

a) $ty' - 2y = t^3$

b) $t^2y' - y = 0$

c) $(1-t)y' - y = t$.

Exercice 2. Résoudre, en cherchant une solution **dse** : $xy'' - y' + 4x^3y = 0$.

3 Exponentielle d'un endomorphisme, d'une matrice

Comme précédemment, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. On fixe une norme $\|\cdot\|$ sur E. On peut définir toutes sortes de normes sur $\mathcal{L}(E)$, toutes équivalentes entre elles puisque $\mathcal{L}(E)$ est lui-même de dimension finie n^2, mais il sera commode ici de considérer la norme $|||\cdot|||$ subordonnée à $\|\cdot\|$. De même, sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on considérera la norme $|||\cdot|||$ subordonnée à une norme $\|\cdot\|$ de $\mathbb{K}^n$ (on confond matrice et endomorphisme canoniquement associé).

3.1 Définition

Proposition 7.
- *Pour tout $a \in \mathcal{L}(E)$, la série $\sum \frac{1}{n!}a^n$ est absolument convergente, donc convergente.*
- *Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la série $\sum \frac{1}{n!}A^n$ est absolument convergente, donc convergente.*

Définition 6.
- On appelle *exponentielle* de $a \in \mathcal{L}(E)$ l'endomorphisme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}a^n$. On le note $\exp(a)$ ou e^a.
- On appelle *exponentielle* de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}A^n$. On la note $\exp(A)$ ou e^A.

Proposition 8. *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ représente $a \in \mathcal{L}(E)$ dans une base $\mathcal{B}$ de E alors*

$$\underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}\big(\mathrm{e}^a\big) = \mathrm{e}^A$$

Remarques :
- On peut invoquer la continuité de l'application linéaire $\underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}$.
- Noter également que si $x \in E$, la série $\sum \frac{1}{n!}a^n(x)$ est convergente et sa somme est bien $\mathrm{e}^a(x)$, par continuité de l'application linéaire $u \mapsto u(x)$ de $\mathcal{L}(E)$ sur E.

3.2 Exponentielle d'une matrice et valeurs propres

Proposition 9. *Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont deux matrices semblables, alors e^A et e^B sont semblables.*

Remarques :
- On peut utiliser la même matrice $P \in GL_n(\mathbb{K})$ dans ces deux relations de similitude.
- Ce résultat, de nature algébrique, peut aussi se démontrer dans le cadre d'une interprétation géométrique à l'aide de la proposition précédente : on considère un endomorphisme représenté par A et B dans deux bases différentes.

Proposition 10. *Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de A, alors e^λ est valeur propre de e^A.*

Remarque : Ainsi, lorsque $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$, alors $\{\mathrm{e}^{\lambda_1}, \dots, \mathrm{e}^{\lambda_p}\} \subset \mathrm{Sp}(\mathrm{e}^A)$. Attention cependant, il n'y a pas égalité en général lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: e^A peut avoir une valeur propre réelle qui ne peut pas s'écrire e^λ pour une valeur propre réelle de A.

Proposition 11.
- *Si A est diagonale avec $A = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\mathrm{e}^A = \mathrm{Diag}(\mathrm{e}^{\lambda_1}, \dots, \mathrm{e}^{\lambda_n})$.*
- *Si A est triangulaire supérieure, de diagonale $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, alors e^A est triangulaire supérieure de diagonale $(\mathrm{e}^{\lambda_1}, \dots, \mathrm{e}^{\lambda_n})$*

Proposition 12.
- *Si A est diagonalisable, e^A est diagonalisable*
- *Si A est trigonalisable, e^A est trigonalisable*

Remarques :
- On peut dans les deux cas prendre la même matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ pour la relation de similitude.
- Attention les réciproques sont fausses !

Exercice 3. Déterminer $\exp(tJ)$ avec $t \in \mathbb{R}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Que vaut $\exp(2\pi J)$?

Les résultats précédents peuvent s'adapter au cas d'un endomorphisme $a \in \mathcal{L}(E)$: les valeurs propres de $\exp(a)$ sont les exponentielles des valeurs propres de a et a diagonlisable (*resp.* trigonalisable) implique $\exp(a)$ diagonalisable (*resp.* trigonalisable).

3.3 Régularité de l'exponentielle matricielle

Proposition 13.
- *La fonction $\exp : a \mapsto \mathrm{e}^a$ est continue sur $\mathcal{L}(E)$.*
- *La fonction $\exp : A \mapsto \mathrm{e}^A$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

Proposition 14. *Soit $a \in \mathcal{L}(E)$ et soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*
- *La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{ta}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $t \mapsto a \circ \mathrm{e}^{ta} = \mathrm{e}^{ta} \circ a$*
- *La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{tA}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $t \mapsto A\,\mathrm{e}^{tA} = \mathrm{e}^{tA} A$.*

Corollaire 2. *Les fonctions $t \mapsto \mathrm{e}^{ta}$ et $t \mapsto \mathrm{e}^{tA}$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.*

Proposition 15.
- *Soient $a, b \in \mathcal{L}(E)$ tels que $a \circ b = b \circ a$. Alors $\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a \circ \mathrm{e}^b = \mathrm{e}^b \circ \mathrm{e}^a$.*
- *Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tels que $AB = BA$. Alors $\mathrm{e}^{A+B} = \mathrm{e}^A\,\mathrm{e}^B = \mathrm{e}^B\,\mathrm{e}^A$.*

Remarque : Attention, si a et b (*resp.* A et B) ne commutent pas, ces relations ne sont plus vérifiées !

4 systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants

4.1 Résolution explicite du problème de Cauchy

Théorème 2. *pour $a \in \mathcal{L}(E)$ (constant) le problème de Cauchy $x' = a \cdot x$ et $x(t_0) = x_0$ admet comme unique solution :*

$$f(t) = \mathrm{e}^{(t-t_0)a} \cdot x_0$$

Remarques :
- On a bien sûr une formulation matricielle de ce résultat : l'unique solution du problème de Cauchy $X' = AX$ et $X(t_0) = X_0$ s'écrit :
$$f(t) = \mathrm{e}^{(t-t_0)A}\,X_0$$
- En particulier (en prenant $t_0 = 0$), l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ du système $X' = AX$ est donné par
$$\mathcal{S} = \left\{t \mapsto \mathrm{e}^{tA}\,X_0\,,\ X_0 \in \mathbb{K}^n\right\}$$
Tout choix particulier de $X_0 \in \mathbb{K}^n$ donne une solution particulière (celle qui vaut X_0 en 0).

4.2 Cas diagonalisable

Proposition 16. *Si a est diagonalisable, $(x_1, \dots, x_n)$ une base de vecteurs propres, et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ la famille des valeurs propres associées, alors pour $f_i : t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda_i t} x_i$, $(f_1, \dots, f_n)$ est une base de l'espace des solutions.*

‘

Exercice 4. Résoudre l'équation différentielle $X' = AX$ avec $A = \begin{pmatrix} 2 & & (1) \\ & \ddots & \\ (1) & & 2 \end{pmatrix}$.

4.3 Cas de la dimension 2 et 3

On considère un système différentiel $X' = AX$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ constant. Si A est diagonalisable (éventuellement dans $\mathbb{C}$), la question est réglée. Lorsque A n'est pas diagonalisable mais trigonalisable, on peut tout de même se rammener à un système différentiel triangulaire que l'on peut chercher à résoudre à la main.

Exercice 5. Résoudre le système

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -x + 3y \end{cases}$$

Une fois rammené à une matrice triangulaire, On pourra aussi utiliser directement une exponentielle matricielle via le résultat suivant, dans le cas $n = 2$:

Proposition 17. *Pour $T = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$:*

$$\mathrm{e}^{tT} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda t} & t\,\mathrm{e}^{\lambda t} \\ 0 & \mathrm{e}^{\lambda t} \end{pmatrix}$$

Pour $n = 3$, et avec A trigonalisable et non diagonalisable, on peut toujours se ramener à une matrice de la forme

$$T = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 1 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \qquad \text{ou} \qquad \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

avec éventuellement $\lambda = \mu$ pour le premier cas. Les exponentielles de ces matrices s'obtiennent "facilement".

5 Résolution de l'équation avec second membre

5.1 cas de l'ordre 1

Rappel : Pour une équation scalaire $y' = a(t)y + b(t)$, et A une primitive de a, les solutions de l'équation homogène associée sont de la forme $t \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{A(t)}$, avec $\lambda \in \mathbb{K}$. La méthode de variation de la constante consiste à chercher une solution particulière sous la forme $f(t) = \lambda(t)\,\mathrm{e}^{A(t)}$, avec $\lambda : I \to \mathbb{K}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On constate en fait que f est solution si, et seulement si, $\lambda'(t) = b(t)\,\mathrm{e}^{-A(t)}$.

Remarque : Si a est constant et $b(t)$ de la forme $P(t)\,\mathrm{e}^{\alpha t}$, avec P un polynôme de degré d, on peut directement trouver une solution particulière $f(t)$ sous la forme $Q(t)\,\mathrm{e}^{\alpha t}$ avec Q un polynôme :
- de degré d si $\alpha \neq a$;
- de degré $d + 1$ et sans terme constant si $\alpha = a$ (on a en fait alors directement $Q' = P$).

5.2 cas de l'ordre 2 à coefficients constants : forme particulière du second membre

Rappel : Pour $x'' = ax + bx' + c(t)$ une équation différentielle scalaire d'ordre 2 à coefficients a et b constants. Lorsque $c(t)$ est de la forme $P(t)\,\mathrm{e}^{\lambda t}$, avec P un polynôme de degré d, on peut trouver une solution particulière sous la forme $f(t) = Q(t)\,\mathrm{e}^{\lambda t}$, avec Q un polynôme :
- de degré d si λ n'est pas racine de l'équation caractéristique ;
- de degré $d + 1$ (sans terme constant) si λ est racine simple de l'équation caractéristique ;
- de degré $d + 2$ (sans terme de degré $\leqslant 1$) si λ est racine double de l'équation caractéristique.

Démonstration : En effet, Q doit vérifier $Q'' + (2\lambda - b)Q' + (\lambda^2 - \lambda b - a)Q = P$.

5.3 Compléments sur l'annulation d'une solution de l'équation homogène

Proposition 18. *Soit $x' = a(t) \cdot x$ une équation homogène et soit f une solution. Alors f est nulle si, et seulement si, il existe $t_0 \in I$ tel que $f(t_0) = 0$.*

Démonstration : Rappelons que I est supposé d'intérieur non vide. Si f est nulle, n'importe quel $t_0 \in I$ convient. Réciproquement, supposons qu'il existe $t_0 \in I$ tel que $f(t_0) = 0$. f est donc solution au problème de Cauchy associé à l'équation $x' = a(t) \cdot x$ et à la condition initiale $(t_0, 0)$, dont 0 est bien sûr solution. Par unicité d'une telle solution d'après le théorème de Cauchy linéaire, $f = 0$.

Proposition 19. *Soient $(f_1, \ldots, f_p)$ une famille de solutions d'une équation homogène sur I. Les trois assertions sont équivalentes :*

(i) *$(f_1, \ldots, f_p)$ est libre*

(ii) *Pour tout $t \in I$, $(f_1(t), \ldots, f_p(t))$ est libre.*

(iii) *Il existe $t \in I$ tel que $(f_1(t), \ldots, f_p(t))$ est libre.*

Démonstration :

- supposons (i) et soit $t \in I$. Soient également $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i(t) = 0$. Alors la fonction $f = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i$ est une solution de l'équation différentielle qui s'annule en t. D'après la proposition précédente, $f = 0$ et donc $\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0$ d'après (i). D'où (ii).
- On a clairement $(ii) \Rightarrow (iii)$ puisque I est supposé non vide.
- Supposons (iii) et soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i = 0$. En évaluant au point t donné par (iii), on conclut immédiatement que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0$. D'où (i).

5.4 Méthode générale de variation des constantes

Proposition* 20. *Soit une équation différentielle linéaire vectorielle (E) : $x' = a(t) \cdot x + b(t)$ et soit $(f_1, \ldots, f_n)$ une base de l'espace $\mathcal{S}_H$ des solutions de l'équation homoègne associée. Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ une famille de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *La fonction $f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i$ est solution de (E).*

(ii) $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i' f_i = b$

Démonstration : Notons déjà que $a(t) \cdot f_i(t) = f_i'(t)$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ et pour tout $t \in I$. Dès lors :

$$\begin{aligned}
(i) &\Leftrightarrow \forall t \in I,\ \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i\right)'(t) = a(t) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t) f_i(t)\right) + b(t) \\
&\Leftrightarrow \forall t \in I,\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i'(t) f_i(t) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t) f_i'(t) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t) a(t) \cdot (f_i(t)) + b(t) \\
&\Leftrightarrow \forall t \in I,\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i'(t) f_i(t) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t) f_i'(t) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t) f_i'(t) + b(t) \\
&\Leftrightarrow \forall t \in I,\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i'(t) f_i(t) = b(t) \\
&\Leftrightarrow\ (ii)
\end{aligned}$$

5.5 Cas de l'ordre 2 scalaire : wronskien, variation des constantes

On a vu comment une équation différentielle scalaire d'ordre 2 se ramène à une équation différentielle vectorielle d'ordre 1 (en dimension 2). Deux solutions f, g forment une base (f, g) de l'espace $\mathcal{S}_H$ des solutions de l'équation homogène si, et seulement si, $\begin{pmatrix} f \\ f' \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} g \\ g' \end{pmatrix}$ forment une base de l'espace des solutions de l'équation vectorielle d'ordre 1 équivalente.

Définition 7. On appelle *wronskien* de deux solutions f et g d'une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2 homogène l'application :

$$W : t \mapsto \begin{vmatrix} f(t) & g(t) \\ f'(t) & g'(t) \end{vmatrix}$$

Proposition 21. *Soient f et g deux solutions de l'équation homogène. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) (f, g) *est une base de l'espaces des solutions*

(ii) *pour tout* $t \in I$, $W(t) \neq 0$

(iii) *il existe* $t \in I$ *tel que* $W(t) \neq 0$.

Méthode : Soit (f, g) une base de solutions de l'équation homogène associée à une équation du second ordre $x'' = a(t)x' + b(t)x + c(t)$. On cherche une solution particulière $x(t)$ sous la forme

$$x(t) = \lambda(t)f(t) + \mu(t)g(t)$$

La méthode de variation des constantes s'écrit alors :

$$\begin{cases} \lambda'(t)f(t) + \mu'(t)g(t) = 0 \\ \lambda'(t)f'(t) + \mu'(t)g'(t) = c(t) \end{cases}$$

Exercice 6. Résoudre l'équation $x'' + 4x = \tan(t)$.

Solution : La résolution de l'équation homogène donne $S_H = \mathrm{vect}(t \mapsto \cos(2t), t \mapsto \sin(2t))$. On cherche une solution particulière sous la forme $\lambda(t)\cos(2t) + \mu(t)\sin(2t)$ et on doit résoudre le système :

$$\begin{cases} \lambda'(t)\cos(2) + \mu'(t)\sin(2t) = 0 \\ -2\lambda'(t)\sin(2t) + 2\mu'(t)\cos(2t) = \tan(2t) \end{cases}$$

Deux petites combinaisons montrer que ce système est équivalent à

$$\begin{cases} 2\lambda'(t) = -\sin(2t)\tan(t) \\ 2\mu'(t) = \cos(2t)\tan(t) \end{cases}$$

On parvient à intégrer grâce aux relations $\sin(2t) = 2\cos(t)\sin(t)$, $\cos(2t) = 2\cos^2(t) - 1$ et $\sin^2(t) = \dfrac{1 - \cos(2t)}{2}$.
On obtient :

$$\lambda(t) = \frac{t}{2} - \frac{1}{4}\sin(2t) \qquad \text{et} \qquad \mu(t) = \frac{1}{2}\ln(\cos(t)) - \frac{1}{4}\cos(2t)$$