Chapitre 15

Compléments de Probabilités

1 Distribution de probabilité discrète

Une probabilité sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$ est une fonction définie sur la tribu $\mathcal{A}$. Lorsque $\mathcal{A}$ est la tribu pleine $\mathcal{P}(\Omega)$, on peut dans certains cas définir $\mathbb{P}$ à partir de la valeur qu'elle prend sur les singletons.

Définition 1. Soit Ω un ensemble quelconque. Une *distribution de probabilité discrète* sur Ω est une famille $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$ de $\mathbb{R}_+$ telle que

$$\sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1$$

Exemple : La famille $(2^{-n-p})_{(n,p)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est une distribution de probabilités discrète sur $(\mathbb{N}^*)^2$.

Définition 2. On appelle *support* d'une distribution de probabilité discrète $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$ sur Ω l'ensemble $\{\omega \in \Omega \mid p_\omega > 0\}$.

Proposition 1. *Le support d'une distribution de probabilité discrète est au plus dénombrable.*

Lorsqu'on dispose d'une distribution de probabilité discrète sur Ω, il y a alors une façon naturelle de définir une probabilité $\mathbb{P}$ sur la tribu pleine $\mathcal{P}(\Omega)$:

Proposition 2. *On considère l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{P}(A))$ et soit $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$ une distribution de probabilité discrète sur Ω. Alors il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ telle que :*

$$\forall \omega \in \Omega, \quad \mathbb{P}(\{\omega\}) = p_\omega$$

Une telle probabilité est définie par

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \quad P(A) = \sum_{\omega \in A} p_\omega$$

Remarque : Lorsque Ω est au plus dénombrable, il est toujours possible de choisir la tribu pleine $\mathcal{P}(\Omega)$ et toute probabilité $\mathbb{P}$ peut se définir à partir d'une distribution de probabilité discrète $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$: il suffit de poser $p_\omega = \mathbb{P}(\{\omega\})$ pour tout $\omega \in \Omega$.

Exemples :

- avec Ω fini de cardinal n, on munit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ de la probabilité *uniforme* en définissant $\mathbb{P}$ à partir de la distribution de probabilité constante : $p_\omega = \dfrac{1}{n}$ pour tout $\omega \in \Omega$. On a alors :

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \quad \mathbb{P}(A) = \frac{\operatorname{card}(A)}{\operatorname{card}(\Omega)}$$

- avec $\Omega = \mathbb{N}$, et la distribution de probabilité $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $p_n = \dfrac{1}{2^{n+1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit une probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ suivant un modèle *géométrique* de paramètre $\dfrac{1}{2}$ (voir plus loin la section sur les lois usuelles).

Remarques :

- Faire le lien à faire avec la loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète : $(\mathbb{P}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est une distribution de probabilité sur $X(\Omega)$, et $\big(X(\Omega), \mathcal{P}(X(\Omega)), \mathbb{P}_X\big)$ est donc un espace probabilisé discret.
- Faire le lien avec l'indépendance des variables aléatoires discrètes : X et Y sont indépendantes si, et seulement si, la distribution de probabilité de (X, Y) est le produit des distributions de probabilité de X et de Y.

2 Existence d'un bon espace probabilisé

Le résultat théorique suivant justifie le fait de pouvoir modéliser une situation probabiliste par une suite de variables aléatoires discrètes indépendantes, suivant chacune une loi particulière, sans se préoccuper de la définition de l'univers probabilisé sur lequel elles sont définies.

Théorème 1. *Soit une suite d'ensembles $(E_n)_{n\in\mathbb{N})}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, E_n est au plus dénombrable et muni d'une distribution de probabilité discrète $(p_{n,x})_{x\in E_n}$. Alors il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et une suite de variables aléatoires indépendantes $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad , \forall x \in E_n, \quad \mathbb{P}(X_n = x) = p_{n,x}$$

Remarque : Concrètement, On peut poser $\Omega = \prod_{n\in\mathbb{N}} E_n$ (produit cartésien infini) et tenter de définir $\mathcal{A}$ et $\mathbb{P}$ de sorte que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in E_n$, on ait $A_{n,x} = \prod_{k\leqslant n-1} E_k \times \{x\} \times \prod_{k\geqslant n} E_k \in \mathcal{A}$ et $\mathbb{P}(A_{n,x}) = p_{n,x}$. Le problème fondamental est qu'un tel univers Ω est indénombrable et qu'il est donc illusoire en général d'espérer définir $\mathbb{P}$ à partir d'une distribution de probabilité discrète sur Ω (voir exemple ci-dessous). Ces difficultés se résolvent au travers d'une théorie générale de la mesure et de l'intégration, abordée en L3.

Exemple : (Modélisation du jeu de pile ou face infini) Pour $p \in [0, 1]$, il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sur lequel on peut définir une suite de variables aléatoires discrètes indépendantes $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n \sim \mathcal{B}(p)$.

On dit qu'il s'agit d'une suite i.i.d. de variables de Bernoulli.

- Rappelons qu'on a alors : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n \sim \mathcal{B}(n, p)$.
- On peut aussi montrer qu'en notant $X = \min\{n \in \mathbb{N}^* \mid X_n = 1\}$, on a $X \sim \mathcal{G}(p)$ (pour $p > 0$).

Dans cet exemple, on peut essayer de définir $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ comme expliqué dans la remarque ci-dessus en posant $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Tout élément ω de Ω est alors une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\{0, 1\}$ et $\{\omega\}$ se comprend comme l'évènement élémentaire $\{X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots\}$. On peut donc supposer que la tribu $\mathcal{A}$ des événements contient les singletons. Mais si $p \in]0, 1[$, il apparait que tous ces événements élémentaires doivent être négligeables. En effet, par continuité décroissante, on doit avoir :

$$\mathbb{P}(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) = \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X_k = x_k) \leqslant \lim(r^n) = 0,$$

en notant $r = \max(p, 1 - p)$. Il est donc impossible de définir $\mathbb{P}$ à partir d'une distribution de probabilité.