Chapitre 4

Continuité des fonctions entre EVN, dimension finie

Le cadre des espaces vectoriels normés présenté au chapitre précédent, ainsi que les aspects topologiques induits (*ie.* points intérieurs, adhérents, partie ouvertes et fermées) vont permettre dans ce chapitre de généraliser aux fonctions à variable et à valeurs dans des e.v.n les notions de limites et de continuité vus en MP2I. Dans tout ce chapitre, $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés.

Révisions MP2I

Revoir les chapitres 27, 28 et 50.

1 Limite d'une fonction

1.1 Limite d'une fonction en un point.

On considère une partie non vide A de E, et une application $f : A \to F$. On veut donner un sens à l'expression "f admet la limite ℓ quand x tend vers a". Pour que cela ait un sens de considérer que la variable $x \in A$ "tend" vers a, on demande à pouvoir trouver des éléments de A arbitrairement "proches" de a (même si $a \notin A$!) : on retrouve la notion de *point adhérent*. On est alors en mesure d'écrire la définition d'une limite (finie) :

Définition 1. Soit $A \subset E$, $f : A \to F$ et $a \in \overline{A}$. On dit que la fonction f *admet la limite* $\ell \in F$ en a (ou *tend vers* ℓ) lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists \eta > 0\,,\ \forall x \in A\,,\ \ \|x - a\|_E \leqslant \eta \implies \left\|f(x) - \ell\right\|_F \leqslant \varepsilon.$$

Remarque : Dans ces conditions, on a alors nécessairement ℓ adhérent à $\mathrm{Im}(f) = f(A)$.

On constatera qu'on retrouve exactement la même définition que celle vue en MP2I dans le cas des fonctions réelles : on a simplement remplacé la valeur absolue $|\cdot|$ par les normes $\|\cdot\|_E$ (espace de départ) et $\|\cdot\|_F$ (espace d'arrivée).

Comme pour les suites , il y a unicité de la limite :

Proposition 1. *En reprenant les notation de la définition précédente Si f admet une limite en a alors cette limite est unique.*

Notation : On note $\ell = \lim\limits_{x \to a} f(x)$, $\ell = \lim\limits_{a} f$ ou encore $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$.

Remarque : La notion de limite pour une fonction $f : A \to F$ admet les extensions suivantes :

- En supposant A non borné, on dit que f admet la limite $\ell \in F$ lorsque $\|x\|_E$ tend vers $+\infty$ si :

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists M \geqslant 0\,,\ \forall x \in A\,,\ \ \|x\|_E \geqslant M \implies \left\|f(x) - \ell\right\|_F \leqslant \varepsilon$$

- En supposant $E = \mathbb{R}$, et $A \subset E$ non majorée, on dit que f admet la limite $\ell \in F$ en $+\infty$ si :

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists M \geqslant 0\,,\ \forall x \in A\,,\ \ x \geqslant M \implies \left\|f(x) - \ell\right\|_F \leqslant \varepsilon$$

- En supposant $E = \mathbb{R}$, et $A \subset E$ non minorée, on dit que f admet la limite $\ell \in F$ en $-\infty$ si :

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists m \geqslant 0\,,\ \forall x \in A\,,\ \ x \leqslant m \implies \|f(x) - \ell\|_F \leqslant \varepsilon$$

- En supposant $F = \mathbb{R}$ et $a \in E$ adhérent à $A \subset E$, on dit que :
  — f admet la limite $+\infty$ en a si $\forall M \in \mathbb{R}$, $\exists \eta > 0\,,\ \forall x \in A\,,\ \ \|x - a\|_E \leqslant \eta \implies f(x) \geqslant M$.
  — f admet la limite $-\infty$ en a si $\forall m \in \mathbb{R}$, $\exists \eta > 0\,,\ \forall x \in A\,,\ \ \|x - a\|_E \leqslant \eta \implies f(x) \leqslant m$.

1.2 Caractérisation séquentielle.

L'étude de la limite d'une fonction peut se ramener à celle de la limite de suites :

Proposition 2. *Soit f une application de $A \subset E$ dans F, $a \in E$ un point adhérent à A et $\ell \in F$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) f admet la limite ℓ en a.

(ii) Pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A convergeant vers a, la suite $\big(f(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

On peut affaiblir les assertions de l'énoncé précédent.

Exercice 1. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(i) f admet une limite finie en a.

(ii) Pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A convergeant vers a, la suite $\big(f(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

1.3 Operations sur les limites.

Proposition 3. *Soit f et g deux applications définies sur $A \subset E$ et à valeurs dans F, et soit a adhérent à A.*

- *Si $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} b$ et $g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} c$, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $f(x) + \lambda g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} b + \lambda c$.*
- *Si $F = \mathbb{K}$, si $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} b$ et $g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} c$, alors $f(x)g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} bc$.*
- *Si $F = \mathbb{K}$, et si $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} b \neq 0$, alors il existe un voisinage V de a relatif à A telle que la restriction de f à V ne s'annule pas. On a alors $\dfrac{1}{f(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} \dfrac{1}{b}$.*

Remarque : Le premier point montre que l'ensemble des fonctions définies sur A et admettant une limite en $a \in \overline{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(A, F)$ et que l'application $f \mapsto \lim_a f$ est un opérateur linéaire sur ce sous-espace.

Proposition 4. *E, F et G sont trois espaces vectoriels normés, $A \subset E$ et $B \subset F$, $f : A \to F$ une application à valeurs dans B et $g : B \to G$. Soit a un point adhérent à A et b un point adhérent à B.*

Si f admet pour limite b en a et g admet pour limite c en b, alors $g \circ f$ admet la limite c en a.

2 Continuité

2.1 Definition

Pour une fonction $f : A \to \mathbb{R}$, avec $A \subset \mathbb{R}$, lorsque f admet une limite finie en $a \in A$, on dit que f est *continue* en a. Il en va de même pour une fonction entre espaces vectoriels normées :

Définition 2. Soit $A \subset E$, $f : A \to F$, et $a \in A$. On dit que f est *continue* en a lorsque $f(x) \to f(a)$ lorsque $x \to a$.

Remarques :

- En fait, dès lors que f admet une limite finie en $a \in A$, on a nécessairement $\lim_a f = f(a)$ (bien le vérifier à partir de la définition). "admettre une limite finie en a" et "être continue en a" sont donc complétement synonymes dès lors que $a \in A$.
- La caractérisation séquentielle d'une limite s'applique : f est continue en a si, et seulement si, l'image par f de toute suite convergeant vers a est une suite convergeant vers $f(a)$.

Définition 3. Soit A une partie de E, et $f : A \to F$. On dit que f est *continue* sur A lorsque f est continue en tout point de A.

Remarque : Plus généralement, on dira que $f : A \to F$ est *continue* sur une partie $B \subset A$ lorsque $f_{|_B}$, la restriction de f à B, est continue en tout point de B.

On peut se demander pourquoi, dans la remarque précédente, ce n'est pas plus simplement f qui doit être continue en tout point de B, plutôt que sa restriction à B. C'est que cette définition serait trop restrictive : pour que f soit continue sur une partie B de A, on n'a pas à exiger que f admette une limite aux points de B en "passant par l'extérieur" de B. Ainsi la fonction *partie entière* $x \to \lfloor x \rfloor$, définie sur $\mathbb{R}$, est continue sur $[0, 1[$, bien qu'elle ne soit pas continue en 0.

Exemple : L'application *norme* $x \mapsto \|x\|_E$ est continue sur E.

2.2 Opérations sur les fonctions continues

La continuité en un point n'étant qu'un cas particulier d'existence de limite (à savoir simplement le cas où a est dans le domaine de définition A), les propriétés d'opérations et de compositions (prop. **??** et **??**) restent bien sûr valables. Donnons un énoncé général de tout cela pour des fonctions continues sur tout leur domaine de définition.

Proposition 5. *Soient $f, g : A \to F$ et $\lambda : A \to \mathbb{K}$ continues, alors l'application $x \mapsto f(x) + \lambda(x)g(x)$ est continue.*

En particulier, en prenant λ constant, on en déduit qu'une combinaison linéaire de fonctions continues est continue.

Corollaire 1. *L'ensemble $\mathcal{C}(A, F)$ des fonctions continues sur A et à valeurs dans F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(A, F)$.*

2.3 Continuité et densité

Proposition 6. *Soient $f, g : E \to F$ deux applications continues qui coïncident sur une partie A dense dans E. Alors f et g coincident sur E.*

Remarque : Plus généralement, si $f, g : B \to F$ avec $B \subset E$, coincident sur $A \subset B$, avec A dense dans B (*i.e.* $B \subset \overline{A}$), alors f et g coincident sur B.

Exercice 2. Déterminer toutes les fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant $f(x + y) = f(x) + f(y)$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$.

2.4 Caractérisation globale

Remarque : Dans cette section, on considère des fonctions définies entièrement sur E, mais les résultats suivants peuvent s'adapter sans problème au cas de fonctions définies sur $A \subset E$, ce qui sera vu ultérieurement.

La proposition qui suit permet de bien saisir que les parties ouverte jouent un rôle central dans l'étude de la continuité. Les exemples particuliers donnés en corollaire sont à connaitre.

Proposition 7. *Soit $f : E \to F$. Les trois assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) f est continue sur E.

(ii) pour toute partie ouverte U de F, $f^{-1}(U)$ est une partie ouverte de E.

(iii) pour toute partie fermée V de F, $f^{-1}(V)$ est une partie fermée de E.

Corollaire 2. *Soit f une application continue de E dans $\mathbb{R}$. Alors :*
- *L'ensemble $\left\{x \in E \,/\, f(x) > 0\right\}$ est un ouvert de E.*
- *L'ensemble $\left\{x \in E \,/\, f(x) \geqslant 0\right\}$ est un fermé de E.*
- *L'ensemble $\left\{x \in E \,/\, f(x) = 0\right\}$ est un fermé de E.*

Exercice 3. Montrer (plus simplement qu'au chapitre précédent) que dans un espace vectoriel normé :
- Les boules ouvertes sont ouvertes
- Les boules fermées et les sphères sont fermées

2.5 Continuité uniforme

Définition 4. On dit que $f : A \to F$ est *uniformément continue* sur A lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \mu > 0,\ \forall (x, y) \in A^2,\ \|x - y\|_E \leqslant \mu \Rightarrow \|f(x) - f(y)\|_F \leqslant \varepsilon$$

Remarques :
- bien noter l'échange des quantificateurs par rapport à la définition de la continuité en tout point $y \in A$.
- Un tel μ, pour un $\varepsilon > 0$ donné, s'appelle *module d'uniforme continuité* associé à ε.

Proposition 8. *Si $f : A \to F$ est uniformément continue sur A, alors f est continue sur A.*

Remarque : La réciproque est fausse : retrouver un contre-exemple pour une fonction de la variable réelle.

Cette notion a été plus largement étudiée en MP2I pour les fonctions de la variables réelle : revoir son cours !

2.6 Applications lipschitziennes.

Intuitivement, une fonction lipschitzienne est une fonction dont les variations de l'image sont "contrôlées" par les variations de la variable. Plus précisément l'image ne peut pas varier "plus" que la variable, à une constante mutliplicative près.

Définition 5. On dit qu'une fonction $f : A \to F$, avec $A \subset E$, est *lipschitzienne* lorsqu'il existe $k \geqslant 0$, tel que :

$$\forall\, (x, y) \in A^2\,,\quad \big\|f(x) - f(y)\big\|_F \leqslant k\|x - y\|_E.$$

On peut préciser alors que f est k-lipschitzienne.

Remarque : k est appelé *module de Lipschitz* pour f.

Il est clair que si k est un module de Lipschitz pour f, tout k' vérifiant $k' \geqslant k$ en est un autre. Il peut être utile d'avoir le "plus petit" module de Lipschitz possible, si toutefois il existe. C'est bien le cas d'après la proposition suivante :

Proposition 9. *f est lipschitzienne si, et seulement si, l'ensemble suivant est majoré :*

$$\left\{ \frac{\|f(x) - f(y)\|_F}{\|x - y\|_E},\ x, y \in E, x \neq y \right\}$$

La borne supérieure k_0 de cet ensemble est alors le plus petit module de Lipschitz pour f, et l'ensemble de tous les modules est $[k_0, +\infty[$.

En conséquence immédiate de la définition, on a le résultat suivant :

Proposition 10. *Toute fonction $f : A \to F$ lipschitzienne est uniformément continue, et donc continue.*

En MP2I, vous avez déjà étudié cette notion pour les fonctions de la variable réelle et à valeurs dans $\mathbb{R}$, et notamment les exemples qui suivent.

Exemple :
- Les fonctions affines réelles $x \mapsto ax + b$ sont lipschitziennes.
- La fonction $x \mapsto x^2$ n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}$, mais l'est sur $[0, 1]$ (en fait sur tout intervalle borné).
- La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas lipschitzienne sur $[0, +\infty[$, mais l'est sur tout intervalle de la forme $[a, +\infty[$, avec $a > 0$.

Dans un contexte plus général de fonctions définies un espace vectoriel normé, la proposition suivante donne deux exemples classiques à connaitre :

Proposition 11.

a) *L'application "norme" $x \mapsto \|x\|$ est 1-lipschitzienne.*

b) *Pour une partie A non vide, l'application "distance à A" $x \mapsto \mathrm{d}(x, A)$ est 1-lipschitzienne.*

Exercice 4. Soient A et B sont deux fermés disjoints de $(E, \|\cdot\|)$.

a) A l'aide des fonctions $d_A : x \mapsto d(x, A)$ et $d_B : x \mapsto d(x, B)$, construire une application continue $f : E \to \mathbb{R}$ telle que $f_{|_A} = 0$ et $f_{|_B} = 1$.

b) En déduire qu'il existe deux ouverts U et V disjoints tels que $A \subset U$ et $B \subset V$.

2.7 Continuité sur un compact

Contrairement au cas des images réciproques, l'image directe d'un ouvert par une application continue n'est pas forcément un ouvert et l'image d'un fermé n'est pas nécessairement un fermé. Mais parmi les fermés, on trouve les compacts, qui eux ont la bonne idée d'avoir une image toujours compacte. Cette propriété fondamentale a de multiples conséquences et applications, notamment dans des problèmes d'optimisation.

Théorème 1. *L'image d'un compact de E par une application continue $f : A \to F$ est un compact de F.*

En appliquant le théorème précédent dans le cas particulier où $F = \mathbb{R}$, on obtient une généralisation d'un théorème important vue en MP2I

Théorème 2. ***(des bornes atteintes)*** *Si $f : A \to \mathbb{R}$ est continue et si K est un compact de E, alors f est bornée sur K et atteint ses bornes.*

Ce résultat s'avère notamment utile dans des situations où l'on prouve l'existence d'un extremum à l'aide d'une restriction à un compact non vide.

Exercice 5. On suppose E de dimension finie et soit $f : E \to \mathbb{R}$ une application continue telle que $\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty$. Montrer que f admet un minimum sur E.

(On utilisera le fait que les boules fermées sont compactes en dimension finie, voir section suivante)

Voyons enfin une généralisation d'un théorème de MP2I :

Théorème 3. ***(de Heine)*** *Si $f : A \to F$ est continue et si K est un compact de E, alors f est uniformément continue sur K.*

2.8 Connexité par arcs et théorème des valeurs intermédiaires

Définition 6. Soient $a, b \in E$. On appelle *chemin* (ou *arc*) de (ou joignant) a à b toute application $\gamma : [0,1] \to E$ continue telle que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$. L'ensemble $\gamma([0,1])$ est appelé le *support* de l'arc.

Définition 7. On dit qu'une partie A non vide de E est *connexe par arcs* lorsque pour tout $(a, b) \in A$, il existe un chemin γ de a à b à support contenu dans A : $\gamma([0,1]) \subset A$.

Proposition 12. *Soit A une partie de E. La relation binaire $\mathcal{R}$ définie par :*

$$a \,\mathcal{R}\, b \quad \Leftrightarrow \quad \textit{il existe un chemin de } a \textit{ à } b \textit{ à support contenu dans } A$$

est une relation d'équivalence sur A.

Définition 8. Les classes d'équivalences pour la relation d'équivalence précédente s'appelle les *composantes connexes par arcs* de A.

Remarques :

- a et b sont dans une même composante connexe par arcs de A si, et seulement si, il existe un chemin de a à b à support contenu dans A.
- A est connexe par arcs si, et seulement si, A est l'unique composante connexe par arcs.

Les exemples de la proposition suivante sont considérés comme des résultats de cours : vous pouvez les utiliser sans démonstration dans un devoir mais devez être tout de même capables de les démontrer au besoin.

Proposition 13.

a) *Toute partie étoilée est connexe par arcs.*

b) *Toute partie convexe est connexe par arcs.*

c) *une partie de $\mathbb{R}$ est connexe par arcs si, et seulement si, c'est un intervalle.*

Remarque : Une partie A est dite *étoilée* lorsqu'il existe $a \in A$ tel que $[a, b] \subset A$ pour tout $b \in A$. Les parties convexes sont étoilées, mais une partie étoilée n'est pas forcément convexe !

Venons-en enfin au résultat essentiel permettant de généraliser le théorème des valeurs intermédiaires :

Théorème 4. *Soit $A \subset E$ non vide et $f : A \to F$ continue. Si A est connexe par arcs, alors $f(A)$ est connexe par arcs.*

Théorème 5. ***(des valeurs intermédiaires)*** *Soit $A \subset E$ non vide et connexe par arcs et $f : A \to \mathbb{R}$ continue. Si f prend les valeurs u et v, avec $u \leqslant v$, alors*

$$\forall s \in [u, v], \quad \exists t \in A, \quad f(t) = s$$

3 Continuité et Linéarité

3.1 Critère fondamental

On a vu que toute application lispchitzienne est continue. Pour les applications linéaires la réciproque est vraie, ce qui fournit un critère pour caractériser les applications continues, parmi les applications linéaires.

Lemme 1. *Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors u est continue sur E si, et seulement si, u est continue en 0.*

Proposition 14. *Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors u est continue si, et seulement si, il existe $C \in \mathbb{R}_+$ tel que :*

$$\forall x \in E, \quad \|u(x)\|_F \leqslant C\|x\|_E$$

Notation : On note $\mathcal{L}_c(E, F)$ le sous-espace des applications linéaires continues de E dans F.

Remarque : La propriété de continuité pour une application linéaire (et plus généralement pour une application quelconque) peut dépendre des normes utilisées.

Exercice 6. Soit $E = \mathcal{C}\big([0, 1], \mathbb{R}\big)$ muni de la norme $N_1 : f \mapsto \displaystyle\int_0^1 \big|f(t)\big|\mathrm{d}t$.

a) En considérant la suite $(f_n)_n$ de E définie par $f_n : x \mapsto x^n$, montrer que la forme linéaire $u : f \mapsto f(1)$ n'est pas continue.

b) Proposer une norme sur E pour laquelle u devient continue.

3.2 Norme subordonnée

Proposition 15. *Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors u est continue si, et seulement si, l'image de la boule unité $B_F(0, 1)$ de E par u est bornée.*

Définition 9. Pour $u \in \mathcal{L}_c(E, F)$, on appelle *norme* de u *subordonnée* à $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$ le nombre :

$$|||u||| = \sup_{x \in B_F(0,1)} \|u(x)\|_F = \sup_{\|x\|_E \leqslant 1} \|u(x)\|_F$$

$|||u|||$ s'appelle aussi *norme d'opérateur* de u (notation $|||u|||_{op}$).

Exercice 7. Montrer qu'on a également :

$$|||u||| = \sup_{\|x\|_E < 1} \|u(x)\|_F = \sup_{\|x\|_E = 1} \|u(x)\|_F$$

Proposition 16. *L'application $|||\cdot|||$ définit une norme sur $\mathcal{L}_c(E, F)$. On a de plus :*

$$\forall u \in \mathcal{L}_c(E, F), \quad \forall x \in E, \quad \|u(x)\|_F \leqslant |||u|||\ \|x\|_E$$

Remarque : Cela prouve en particulier, par linéarité, qu'une application $u \in \mathcal{L}_c(E, F)$ est lispchitzienne. $|||u|||$ est d'ailleurs le plus petit module de Lipschitz et on a :

$$|||u||| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E}$$

La norme d'opérateur $|||\cdot|||$ est parfaitement adaptée à la composition, comme le montre le résultat important suivant qui affirme que $|||\cdot|||$ est sous-multiplicative. Dans le cas particulier de l'espace $\mathcal{L}_c(E)$ des endomorphismes continus, cela constitue précisément une version "multiplicative" de l'inégalité triangulaire.

Proposition 17. *Soient trois espaces vectoriels normés E, F, et G, et soient $|||\cdot|||$, $|||\cdot|||'$ et $|||\cdot|||''$ les normes d'opérateurs associées sur $\mathcal{L}_c(E,F)$, $\mathcal{L}_c(F,G)$ et $\mathcal{L}_c(E,G)$ respectivement. Alors pour tout $u \in \mathcal{L}_c(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}_c(F,G)$, on a :*

$$|||v \circ u|||'' \leqslant |||v|||' \cdot |||u|||$$

Remarque : Si $E = \mathbb{K}^n$ est muni d'une norme $\|\cdot\|$ (par exemple l'une des trois normes usuelles), on peut alors munir naturellement $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de la norme $|||\cdot|||$ subordonnée à $\|\cdot\|$ en identifiant $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ à son endomorphisme canoniquement associé $u_A \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$. On a ainsi :

$$|||A||| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|u_a(x)\|$$

Pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a alors également

$$|||AB||| \leqslant |||A|||\,|||B|||$$

4 Espaces vectoriels normés de dimension finie

4.1 Équivalence des normes

On en a déjà parlé à plusieurs reprises et on a déjà vu que les normes usuelles $\|\cdot\|_p$ (pour $p = 1, 2, \infty$) étaient équivalentes dans $\mathbb{K}^n$ (et plus généralement dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, en considérant ces normes relativement à une base). L'équivalence générale de toutes les normes est plus compliquée à établir. On commencera en fait par généraliser le théorème de Bolzano-Weierstrass.

Théorème 6. ***De Bolzano-Weierestrass.***
Toute suite bornée de $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ admet une valeur d'adhérence.

Remarque : Rappelons qu'on a $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ dans ce chapitre. Le théorème précédent est lié à la propriété fondamentale de la borne supérieure pour $\mathbb{R}$ (et ne fonctionnerait pas par exemple sur un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel).

Corollaire 3. *Toute partie fermée et bornée de $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ est compacte.*

Théorème 7. ***Équivalence des normes.***
Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sur E sont équivalentes.

En conséquence de cet important théorème, le caractère borné d'une partie de E, les convergences de suites, ainsi que toutes les notions topologiques (ouverts, fermés, intérieur, adhérence, compacité) définie sur un espace vectoriel normé E, ne dépendent pas de la norme utilisée sur E lorsque E est de dimension finie : nul besoin de faire référence à une norme particulière pour les aborder. On dit que E est muni d'une *topologie naturelle*. Si E et F sont de dimension finie, la continuité d'une application $f : E \to F$ est également une propriété *intrinsèque*, indépendante des normes utilisées sur E et F.

Proposition 18. *Soient deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E et F.*

a) *Si E est de dimension finie > 0, une suite $(x_n)_n$ de E converge si, et seulement si, toutes les suites coordonnées $(x_{i,n})_n$ dans une base convergent.*

b) *Si $A \subset E$ et F de dimension finie > 0, une fonction $f : A \to F$ admet une limite en $a \in \overline{A}$ si, et seulement si, toutes les fonctions coordonnées f_i dans une base admettent une limite en a.*

4.2 Compacité des fermés bornés, cas des sous-espaces

l'existence de bases finies et l'indépendance de toutes les normes en dimension finie a de nombreuses conséquence en dimension finie. Nous voyons ici celles concernant la compacité et la fermeture des sous-espaces.

Proposition 19. *Lorsque E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, une partie A de E est compacte si, et seulement si, elle est fermée et bornée.*

Corollaire 4. *une suite bornée de E converge si, et seulement si, elle admet une unique valeur d'adhérence.*

Proposition 20. *Si F est un sous-espace de dimension finie de E, alors F est fermé.*

4.3 Continuité des applications linéaires

Proposition 21. *Si E est de dimension finie, alors toutes les applications linéaires de E vers F sont continues :* $\mathcal{L}_c(E,F) = \mathcal{L}(E,F)$.

Intuitivement, il faut comprendre que chaque dimension apporte un "facteur de linéarité". Cela se majore facilement quand le nombre de "facteurs" est fini, mais ce n'est plus possible en dimension infinie.

Remarque : On généralisera cette situation ultérieurement au cas des applications multilinéaires. On retiendra pour l'instant simplement le résultat suivant, fournissant différents exemples à connaître.

Proposition 22.

- *Si E est euclidien, le produit scalaire $\langle , \rangle$ est continu sur E^2*
- *l'application* det *est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*
- *L'application "produit matriciel" $(A,B) \mapsto AB$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$*
- *Toute fonction polynomiale en plusieurs variables est continue.*

Exercice 8. Montrer que $GL_n(\mathbb{K})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.