# Fonctions vectorielles à une variable

Lundi 13 octobre 2025

# Table des matières

# Table des matières

# 1. Dérivabilité.

# 1.1. Comparaisons au voisinage d'un point

# 1.1. Comparaisons au voisinage d'un point

## Definition 1

Soient $f, g : I \to E$ et $a \in \overline{I}$. On a au voisinage de $a$ :

- $f(t) = \mathrm{O}\big(g(t)\big)$ lorsque $\|f(t)\| = \mathrm{O}\big(\|g(t)\|\big)$
- $f(t) = \mathrm{o}\big(g(t)\big)$ lorsque $\|f(t)\| = \mathrm{o}\big(\|g(t)\|\big)$
- $f(t) \sim g(t)$ lorsque $f(t) - g(t) = \mathrm{o}\big(g(t)\big)$

## Remarques :

- Type de relation binaire ?
- Pour $\mathrm{o}$ et $\mathrm{O}$, $g = I \to \mathbb{R}^*$ en pratique
- Extension à $a = \pm\infty$

# 1.2. Dérivabilité en un point.

# 1.2. Dérivabilité en un point.

## Définition 2

Soit $f : I \to E$. On dit que $f$ est *dérivable* en $a \in I$ lorsque :

$$t \mapsto \frac{1}{t-a}\big(f(t) - f(a)\big),$$

admet une limite finie $v \in E$ en $a$, appelé *dérivée* de $f$ au point $a$, et noté $f'(a)$, $Df(a)$, ou encore $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(a)$.

## Remarque :

Dérivabilité à gauche ou à droite ?

## Proposition 1

Soit $f : I \to E$, et $a \in \overset{\circ}{I}$. Alors $f$ est dérivable en $a$ **ssi** $f$ est dérivable à gauche et à droite en $a$, **et** $f'_g(a) = f'_d(a)$.

# 1.3. Développement limité d'ordre 1

# 1.3. Développement limité d'ordre 1

## Proposition 2

$f$ est dérivable en $a$ **ssi** $f$ admet un *développement limité* d'ordre 1 en $a$, c'est-à-dire lorsqu'il existe $v \in E$, tel que pour $t$ au voisinage de $a$ :

$$f(t) = f(a) + (t-a)v + \mathrm{o}(t-a).$$

Dans ces conditions, on a nécessairement $f'(a) = v$.

## Corollaire 1

Si $f$ est dérivable en $a$, $f$ est continue en $a$.

## Remarque :

réciproque fausse

## 1.4. Interprétation cinématique.

# 1.4. Interprétation cinématique.

**Remarques :**

- $f$ : *loi horaire* du *déplacement* d'un mobile ponctuel
- $\mathrm{Im}(f)$ : *trajectoire* du point mobile $f(t)$
- $f'(t_0)$ : *vecteur vitesse* à l'instant $t_0$.
- *graphe* de $f$ ?

# 1.5. Utilisation d'une base.

# 1.5. Utilisation d'une base.



**Proposition 3**

Soit $\mathcal{B}$ une base de $E$ et $(f_1, \ldots, f_n)$ les composantes de $f : I \to E$ dans $\mathcal{B}$. Alors pour $a \in I$, $f$ est dérivable en $a$ **ssi** pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $f_i$ est dérivable en $a$. Dans ces conditions, $f'(a)$ a pour coordonnées $\left(f_1'(a), \ldots, f_n'(a)\right)$.

## 1.6. Dérivabilité sur un intervalle.

# 1.6. Dérivabilité sur un intervalle.



**Definition 3**

On dit que $f : I \to E$ est *dérivable* sur $I$ lorsqu'elle est dérivable en tout point de $I$. On peut définir alors sur $I$ l'application *dérivée* :

$$f' : t \mapsto f'(t).$$

Si de plus, $f'$ est continue sur $I$, on dit que $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I$.

**Remarque :**

dérivable n'implique pas $\mathcal{C}^1$ : exemple $x \mapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

# Table des matières

# 2. Opérations sur les fonctions dérivables.

# 2.1. Dérivabilité et combinaison linéaire.

# 2.1. Dérivabilité et combinaison linéaire.

## Proposition 4

Soit $f, g : I \to E$ deux applications dérivables sur $I$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors $f + \lambda g$ est dérivable sur $I$ et

$$(f + \lambda g)' = f' + \lambda g'.$$

## 2.2. Dérivabilité et composition.

# 2.2. Dérivabilité et composition.



## Proposition 5

Soit $f : I \to E$ et $\varphi : J \to \mathbb{R}$ telle que $\mathrm{Im}(\varphi) \subset I$. Si $f$ et $\varphi$ sont dérivables, $f \circ \varphi$ aussi et :

$$(f \circ \varphi)' = \varphi' \times f' \circ \varphi.$$

# 2.3. Dérivabilité et application linéaire.

# 2.3. Dérivabilité et application linéaire.

**Proposition 6**

Soit $f : I \to E$ une application dérivable sur $I$ et $L \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors $L \circ f : I \to F$ est dérivable sur $I$ et

$$(L \circ f)' = L \circ f'.$$

**Remarque :**

Si de plus, $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$, $L \circ f$ aussi.

# 2.4. Dérivabilité et application bilinéaire.

# 2.4. Dérivabilité et application bilinéaire.

## Proposition 7

Soit $B : E \times F \to G$ bilinéaire, $f : I \to E$ et $g : I \to F$ dérivables sur $I$. Alors l'application

$$B(f,g) : t \mapsto B\big(f(t), g(t)\big)$$

est dérivable sur $I$, avec :

$$B(f,g)' = B(f',g) + B(f,g').$$

# 2.4. Dérivabilité et application bilinéaire.



## Exemples :

- $E = F = G = \mathbb{K}$ et $B : (x, y) \mapsto xy$ :régle du produit : $(fg)' = f'g + fg'$.
- Si $(\cdot|\cdot)$ produit scalaire sur $E$, $f, g : I \to E$ dérivables :

$$(f|g)' : x \mapsto \big(f'(x)|g(x)\big) + \big(f(x)|g'(x)\big) \qquad (\|f\|^2)' = 2(f, f').$$

- Si $f, g : I \to \mathbb{R}^2$ dérivables :

$$\big(\det(f, g)\big)' = \det(f', g) + \det(f, g').$$

## Exercice 1

Soit $E$ est un espace préhilbertien réel et soit une application $f : I \to E$. Montrer que $f$ est de norme constante si, et seulement si, $f(x)$ et $f'(x)$ sont orthogonaux pour tout $x \in I$.

# 2.5. Dérivabilité et application multilinéaire

# 2.5. Dérivabilité et application multilinéaire



## Proposition 8

Soit $M : E_1 \times \cdots \times E_p \to F$ multilinéaire, et pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, $f_j : I \to E_j$ dérivable. Alors $M(f_1, \ldots, f_p) : t \mapsto M\big(f_1(t), \ldots, f_p(t)\big)$ est dérivable sur $I$ et :

$$\big(M(f_1, \ldots, f_p)\big)'(t) = \sum_{j=1}^{p} M\big(f_1(t), \ldots, f_j'(t), \ldots, f_p(t)\big)$$

## Exercice 2

Soit $A : I \mapsto \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Expliquer comment dériver l'application $f : t \mapsto \det\big(A(t)\big)$.

# 2.6. Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$.

# 2.6. Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$.

## Definition 4

Sur l'ensemble $\mathcal{F}(I, E)$, on définit récursivement la classe $\mathcal{C}^k$ par :

- $f$ est de classe $\mathcal{C}^0$ lorsque $f$ est continue, et on pose $f^{(0)} = f$.
- $f$ est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ si $f$ est de classe $\mathcal{C}^k$ et si $f^{(k)}$ est dérivable et de dérivée continue. On définit alors $f^{(k+1)} = (f^{(k)})'$.

## Exemple :

Pour $f : I \to E$ de classe $\mathcal{C}^2$, $E$ euclidien, $\|f'\|$ est constante **ssi** $f'(t) \perp f''(t)$ pour tout $t \in I$.

## Definition 5

On dit que $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ si $f$ est de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

**Exercice 3**

Soit $f : I \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^2$, et $a \in I$. On suppose que la famille $\big(f'(t), f''(t)\big)$ est libre pour tout $t \in I$, et on considère la famille orthonormale $(d(t), n(t))$ obtenue par orthonormalisation. On a en particulier $d : I \to S^{n-1}$ (la sphère unité de $\mathbb{R}^n$) définie par $d(t) = \dfrac{1}{v(t)} f'(t)$ (application *direction*), avec $v : I \to \mathbb{R}^+$ définie par $v(t) = \|f'(t)\|$ (application *vélocité*).
Montrer que les composantes tangentielles et normales de $f''$ sont respectivement :

$$(f''|d) = v' \qquad ; \qquad (f''|n) = v\|d'\|.$$

# 2.7. Linéarité et multilinéarité pour les classes $\mathcal{C}^k$

### Proposition 9

Pour $k \in \mathbb{N}$, $f, g \in \mathcal{C}^k(I, E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $f + \lambda g \in \mathcal{C}^k(I, E)$ et $(f + \lambda g)^{(k)} = f^{(k)} + \lambda g^{(k)}$.

### Corollaire 2

Pour tout $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $\mathcal{C}^k(I, E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, E)$, avec les inclusions :

$$\mathcal{C}^\infty(I, E) \subset \cdots \subset \mathcal{C}^{k+1}(I, E) \subset \mathcal{C}^k(I, E) \subset \cdots \subset \mathcal{C}^0(I, E) \subset \mathcal{F}(I, E).$$

De plus $D : f \mapsto f'$ est un endomorphisme de $\mathcal{C}^\infty(I, E)$, et $D^k : f \mapsto f^{(k)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

### Remarque :

$D$ défini sur $\mathcal{C}^k(I, E)$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, mais à valeurs dans $\mathcal{C}^{k-1}(I, E)$.

# 2.7. Linéarité et multilinéarité pour les classes $\mathcal{C}^k$



## Proposition 10

Soit $f \in \mathcal{C}^k(I, E)$, pour $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et $L \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors $L \circ f \in \mathcal{C}^k(I, F)$ et :

$$(L \circ f)^{(k)} = L \circ f^{(k)}.$$

## Proposition 11

**(formule de Leibniz)** Soit $B : E \times F \to G$ bilinéaire, $f \in \mathcal{C}^k(I, E)$ et $g \in \mathcal{C}^k(I, F)$. Alors $B(f, g) \in \mathcal{C}^k(I, G)$ et :

$$B(f, g)^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} B\left(f^{(i)}, g^{(k-i)}\right).$$

## Remarque :

Plus généralement si $M : E_1 \times \cdots \times E_p \to G$ multilinéaire, avec les $f_j : I \to E_j$ de classe $\mathcal{C}^k$, alors $t \mapsto M\big(f_1(t), \ldots, f_p(t)\big)$ de classe $\mathcal{C}^k$.

# Table des matières

# 3. Intégration sur un segment

# 3.1. Définition

# 3.1. Définition

## Definition 6

On dit que $f : [a, b] \to E$ est *continue par morceaux* lorsqu'il existe une subdivision $(s_i)_{0 \leqslant i \leqslant r}$ de $[a, b]$ telle que pour tout $i \in [\![0, r-1]\!]$ :

- $f$ est continue sur $]s_i, s_{i+1}[$
- $f$ admet des limites finies en $s_i$ à droite et en $s_{i+1}$ à gauche.

## Remarques :

- équivalent à $f_{|]s_i, s_{i+1}[}$ continue et prolongeable par continuité sur $[s_i, s_{i+1}]$, pour tout $i$.
- $f$ continue par morceaux **ssi** ses composantes $(f_1, \dots, f_n)$ le sont

# 3.1. Définition

## Proposition 12

Pour $f : [a, b] \to E$ continue par morceaux de composantes $(f_1, \ldots, f_n)$ dans une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ la quantité :

$$\int_a^b f = \sum_{i=1}^n \left( \int_a^b f_i(t) \mathrm{d}t \right) e_i$$

ne dépend pas de la base $\mathcal{B}$ considérée.

## Definition 7

La quantité précédente définit l'*intégrale* de la fonction vectorielle $f$ sur le segment $[a, b]$. On peut aussi la noter $\displaystyle\int_{[a,b]} f$ ou $\displaystyle\int_a^b f(t) \mathrm{d}t$.

# 3.1. Définition

## Proposition 13

**(relation de Chasles)** Pour $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \leqslant b \leqslant c$, $f : [a, c] \to E$ est continue par morceaux **ssi** $f$ est continue par morceaux sur $[a, b]$ et sur $[b, c]$ et on a alors :

$$\int_a^c f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\mathrm{d}t$$

## Remarque :

Se généralise à $a, b, c \in I$ dans un ordre quelconque avec la convention

$$\int_a^b f = -\int_b^a f \qquad \text{si} \quad a > b$$

# 3.2. Linéarité de l'intégrale

# 3.2. Linéarité de l'intégrale

## Proposition 14

Si $f, g : [a, b] \to E$ sont continues par morceaux, et $\lambda \in \mathbb{K}$, l'application $f + \lambda g$ est continue par morceaux sur $[a, b]$ et :

$$\int_a^b (f + \lambda g) = \int_a^b f + \lambda \int_a^b g$$

## Proposition 15

Si $f : [a, b] \to E$ est continue par morceaux et $L \in \mathcal{L}(E, F)$, l'application $L \circ f : t \mapsto L\big(f(t)\big)$ est continue par morceaux et

$$\int_a^b L \circ f = L\left(\int_a^b f\right)$$

## 3.3. Intégration et norme

# 3.3. Intégration et norme



## Proposition 16

**(Inégalité triangulaire)** Si $f : [a, b] \to E$ est continue par morceaux, l'application $\|f\| : t \mapsto \left\|f(t)\right\|$ est continue par morceaux et

$$\left\| \int_a^b f \right\| \leqslant \int_a^b \|f\|$$

## Remarques :

- Il faut bien $a \leqslant b$ ici
- Inégalité de la moyenne ?

# 3.3. Intégration et norme



## Proposition 17

On suppose $I = [a, b]$. L'application $f \mapsto \int_a^b \|f\|$ définit une norme sur l'espace $\mathcal{C}(I, E)$ des applications continues. En particulier, si $f$ est continue :

$$\int_a^b \|f\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f = 0$$

## Remarque :

séparation non vérifiée sur l'espace des fonctions continues par morceaux : $\int_a^b \|f - g\| = 0$ **ssi** $f$ et $g$ coincident sauf sur un ensemble fini de points.

# 3.4. Sommes de Riemann

# 3.4. Sommes de Riemann

## Definition 8

Soit $f : [a, b] \to E$ continue par morceaux, $\sigma = (s_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ une *subdivision* de $[a, b]$ (*i.e.* $a = s_0 < \cdots < s_n = b$) et $\tau = (t_k)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ un *marquage* de $\sigma$ ($t_k \in [s_k, s_{k+1}]$ pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$).
On appelle *somme de Riemann* de $f$ associée à $(\sigma, \tau)$ le vecteur :

$$S(f, \sigma, \tau) = \sum_{k=0}^{n-1} (s_{k+1} - s_k) f(t_k)$$

## Remarques :

- *pas* d'une subdivision : $\max_{0 \leqslant k \leqslant n-1} (s_{k+1} - s_k)$.
- Cas d'une subdivision *régulière* :
- marquage *à gauche*, *à droite*,*centré*.

# 3.4. Sommes de Riemann



**Theoreme 1**

Soit $f : [a, b] \to E$ continue par morceaux. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ telle que pour toute subdivision marquée $(\sigma, \tau)$ de pas $\leqslant \delta$ :

$$\left\| \int_{[a,b]} f - S(f, \sigma, \tau) \right\| \leqslant \varepsilon$$

**Remarque :**

Équivalent à $S(f, \sigma_n, \tau_n) \longrightarrow \int_a^b f$ pour une suite $(\sigma_n, \tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de subdivisions marquées dont le pas tend vers 0

### Corollaire 3

Pour $f : [a, b] \to E$ continue par morceaux :

$$\lim \left( \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \right) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

### Remarque :

Également avec $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$

# Table des matières

# 4. Formules de Taylor

# 4.1. Primitive et intégrale

**Theoreme 2**

Soit $f : I \to E$ continue et $a \in I$. L'application $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I$ et $F' = f$.

**Remarques :**

- Toute fonction continue $f$ admet donc une primitive $F$
- Pour tout $v \in E$, $F + v$ est encore une primitive.

## 4.2. Inégalité des accroissements finis

# 4.2. Inégalité des accroissements finis

## Proposition 18

**(Inégalité des accroissements finis)** Soit $f : [a, b] \to E$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $M \geqslant 0$ tel que $\|f'\| \leqslant M$ sur $[a, b]$. Alors

$$\|f(b) - f(a)\| \leqslant M(b - a)$$

## Remarque :

Interprétation cinématique ?

# 4.2. Inégalité des accroissements finis



## Corollaire 4

- pour $f : [a, b] \to E$ de classe $\mathcal{C}^1$, $f$ est constante sur $[a, b]$ **ssi** $f' = 0$.
- pour $f : I \to E$ continue, la différence entre deux primitives de $f$ est constante. En particulier, si $a \in I$, l'ensemble de toutes les primitives est

$$\left\{ x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t + v, \ v \in E \right\}$$

# 4.3. Formule de Taylor avec reste intégral

# 4.3. Formule de Taylor avec reste intégral

## Theoreme 3

Soit $f : I \to E$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, avec $n \in \mathbb{N}$, et $a \in I$. Pour tout $x \in I$, on a :

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}_{\text{partie régulière}} + \underbrace{\int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n \mathrm{d}t}_{\text{reste intégral}}$$

## Remarque :

Autre écriture :

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + \int_0^h \frac{f^{(n+1)}(a+u)}{n!}(h-u)^n \mathrm{d}u$$

## 4.4. Inégalité de Taylor-Lagrange

# 4.4. Inégalité de Taylor-Lagrange

**Theoreme 4**

Soit $f : I \to E$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, $a \in I$. Pour tout $x \in I$ :

$$\left\| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right\| \leqslant \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t \in [a,x]} \left\| f^{(n+1)}(t) \right\|$$

**Remarques :**

- $n = 1$ : Inégalité des accroissements finis
- Autre formulation avec $h = x - a$

## 4.5. Formule de Taylor-Young

# 4.5. Formule de Taylor-Young

## Theoreme 5

Soit $f : I \to E$ de classe $\mathcal{C}^n$, $a \in I$. Pour $x$ au voisinage de $a$ :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right)$$

## Remarque :

Développement limité de $f$ en $a$ à l'ordre $n$.

## Exercice 4

Pour $n, p \in \mathbb{N}$, étudier la régularité et l'existence d'un développement limité en 0 de la fonction $f : x \mapsto x^n \sin\left(\dfrac{1}{x^p}\right)$.