Chapitre 4

Révisions MP2

Limite d'une fonction

Continuité

Continuité e

Espaces vectoriels normés de dimension finie

Continuité des fonctions entre EVN, dimension finie

Lundi 22 septembre 2025

Table des matières

Chapitre 4

Révisions MP2

Limite d'une fonction

Continuité

Continuité et Linéarité

Espaces vectoriels normés de

- 1 Limite d'une fonction
- 2 Continuité
- 3 Continuité et Linéarité
- 4 Espaces vectoriels normés de dimension finie

Table des matières

Chapitre 4

Limite d'une fonction

- Limite d'une fonction en un point.
- point.

 Caractérisationséquentielle.
- Operations sur
- Continuité
- Continuité e Linéarité
- Espaces vectoriels normés de dimension finie

- Limite d'une fonction
- Continuité
- 3 Continuité et Linéarité
- 4 Espaces vectoriels normés de dimension finio

Chapitre 4

Limite d'une fonction

Limite d'une fonction en un point.

Caractérisatio

Operations

Continuité

Continuité e Linéarité

Espaces vectoriels normés de dimension fini

1. Limite d'une fonction

1. Limite d'une fonction

Chapitre 4

Limite d'une

Limite d'une fonction en un

point.
Caractérisati

séquentielle.

Operations s

les limites.

Continuité

Continuité et Linéarité

Espaces vectoriels normés de dimension finie 1.1. Limite d'une fonction en un point.

1.1. Limite d'une fonction en un point.

Chapitre 4

fonction Limite d'une fonction en un

point.

Caractérisatio

Operations s les limites.

Continuité

Continuité et Linéarité

Espaces vectoriels normés de dimension fini

Definition 1

Soit $A \subset E$, $f: A \to F$ et $a \in \overline{A}$. On dit que la fonction f admet la limite $\ell \in F$ en a (ou tend vers ℓ) lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \eta > 0, \ \forall x \in A, \ \|x - a\|_{E} \leqslant \eta \Longrightarrow \|f(x) - \ell\|_{F} \leqslant \varepsilon.$$

Remarque:

On a alors nécessairement $\ell \in \overline{f(A)}$.

1.1. Limite d'une fonction en un point.

Chapitre 4

Limite d'une fonction Limite d'une

fonction en un point.

Operations sur

les limites.

Continuité

Espaces vectoriels normés de

Proposition 1

Si f admet une limite en a, cette limite est unique.

Remarque:

Notation
$$\ell = \lim_{x \to a} f(x)$$
, $\ell = \lim_{a} f$ ou $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$.

1.1. Limite d'une fonction en un point.

Chapitre 4

Limite d'un fonction

Limite d'une fonction en un point.

Caractérisatio séquentielle.

Operations sur les limites.

Continuité e

Espaces vectoriels normés de dimension finie

Remarque :

Extensions de la notion de limite pour $f: A \rightarrow F$

- limite de f(x) lorsque ||x|| tend vers $+\infty$
- limite de f(x) quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ lorsque $A \subset \mathbb{R}$
- limite infinie en a adhérent à A pour f à valeurs dans $\mathbb R$

1. Limite d'une fonction

Chapitre 4

Limite d'une fonction

Limite d'une fonction en

point.

Caractérisation

séquentielle.

les limites.

ics illinecs.

Continuité

Continuité et Linéarité

Espaces vectoriels normés de dimension finie 1.2. Caractérisation séquentielle.

1.2. Caractérisation séquentielle.

Chapitre 4

Limite d'un fonction

point.
Caractérisation

séquentielle.
Operations s

les limites

a .. .

Continuité e Linéarité

Espaces vectoriels normés de dimension finie

Proposition 2

Soit f une application de $A \subset E$ dans F, $a \in E$ un point adhérent à A et $\ell \in F$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) f admet la limite ℓ en a.
- (ii) Pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A convergeant vers a, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ .

1.2. Caractérisation séquentielle.

Chapitre 4

Limite d'une fonction

Limite d'une fonction en un point.

Caractérisation

les limites.

Continuité

Continuité et

Espaces vectoriels normés de dimension finie

Exercice 1

Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) f admet une limite finie en a.
- (ii) Pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A convergeant vers a, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

1. Limite d'une fonction

Chapitre 4

Limite d'une fonction

Limite d'une fonction en un point.

Caractérisatio

Operations sur les limites.

les limites.

G ... I.

Linéarité

Espaces vectoriels normés de dimension finie 1.3. Operations sur les limites.

1.3. Operations sur les limites.

Chapitre 4

Limite d'un fonction

Limite d'une fonction en un point. Caractérisation séquentielle.

Operations sur les limites.

les limites.

Continuité e

Espaces vectoriels normés de dimension fini

Proposition 3

Soit $f, g: A \to F$ et $a \in \overline{A}$. On suppose $\lim_a f = b$ et $\lim_a g = c$. Alors

- Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, $f(x) + \lambda g(x) \rightarrow b + \lambda c$ en a.
- Cas $F = \mathbb{K}$: $f(x)g(x) \to bc$ en a. Si de plus $b \neq 0$, alors $f \neq 0$ au voisinage de a et $\frac{1}{f(x)} \to \frac{1}{b}$ en a.

Remarque:

Que dire de l'ensemble des fonctions définies sur A et admettant une limite en $a \in \overline{A}$?

1.3. Operations sur les limites.

Chapitre 4

Operations sur

les limites.

Proposition 4

Soient $f: A \to F$ et $g: B \to G$ avec $\operatorname{Im}(f) \subset B$, soient $a \in \overline{A}, b \in \overline{B}$. Si $\lim_a f = b$ et $\lim_b f = c$, alors $\lim_a (g \circ f) = c$.

Table des matières

Chapitre 4

Continuité

vectoriels normés de

- 2 Continuité

Chapitre 4

Continuité

vectoriels

2. Continuité

2. Continuité

Chapitre 4

Definition

vectoriels

2.1. Definition

2.1. Definition

Chapitre 4

Definition

Espaces vectoriels

Definition 2

Soit $A \subset E$, $f: A \to F$, et $a \in A$. On dit que f est continue en alorsque $f(x) \rightarrow f(a)$ lorsque $x \rightarrow a$.

Remarques:

- En fait la limite est nécessairement f(a)!
- La caractérisation séquentielle s'applique.

2.1. Definition

Chapitre 4

Definition 3

Soit A une partie de E, et $f: A \to F$. On dit que f est continue sur A lorsque f est continue en tout point de A.

Remarque:

f continue sur $B \subset A$ lorsque $f_{|_B}$ continue en tout point de B. (pourquoi $f_{|_B}$ et pas simplement f?)

Exemple:

L'application norme $x \mapsto ||x||_E$ est continue sur E.

continues Continuité e densité

Definition

Caractérisa globale Continuité

Applications lipschitziennes

Continuité sur un compact Connexité par arcs et théorème des valeurs intermédiaires

Continuité e Linéarité

Espaces vectoriels normés de dimension finic

2. Continuité

Chapitre 4

Limite d'une fonction

Continuit

Definition

Opérations sur les fonctions continues

Continuité

densité

globale

globale

Applications

lipschitzienne

Connexité par arcs et théorèn

Continuité e

Espaces vectoriels normés de 2.2. Opérations sur les fonctions continues

2.2. Opérations sur les fonctions continues

Chapitre 4

fonction

Definition
Opérations sur

les fonctions continues

Continuité densité

Caractérisation globale Continuité

Applications lipschitziennes

compact Connexité par arcs et théorèm

Continuité e

Espaces vectoriels normés de dimension fini

Proposition 5

Soient $f,g:A\to F$ et $\lambda:A\to \mathbb{K}$ continues, alors l'application $x\mapsto f(x)+\lambda(x)g(x)$ est continue.

Corollaire 1

L'ensemble C(A, F) des fonctions continues sur A et à valeurs dans F est un sous-espace vectoriel de F(A, F).

2. Continuité

Chapitre 4

Limite d'une fonction

_

Definition

Opérations si les fonctions

Continuité et densité

Caractérisatio

globale

uniforme

Applications

Continuité sur ui compact

Connexité par arcs et théorèm des valeurs

Continuité e

Espaces vectoriels normés de

2.3. Continuité et densité

2.3. Continuité et densité

Chapitre 4

Limite d'un fonction

fonction Continuité

Opérations s les fonctions continues

Continuité et densité

Caractérisa globale Continuité

Continuité uniforme Application

lipschitziennes.

Continuité sur a compact

Connexité par arcs et théorème des valeurs intermédiaires

Continuité et Linéarité

Espaces vectoriels normés de dimension finic

Proposition 6

Soient $f,g:E\to F$ deux applications continues qui coı̈ncident sur une partie A dense dans E. Alors f et g coincident sur E.

Remarque:

Cas $f, g : B \to F$ avec $B \subset E$?

Exercice 2

Déterminer toutes les fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant f(x+y) = f(x) + f(y) pour tout $x, y \in \mathbb{R}$.

2. Continuité

Chapitre 4

Limite d'une fonction

_

Definition

Opérations se les fonctions

Continuité

densité

Caractérisation globale

Continuit

Applications

lipschitzienne

Continuité sur u

Connexité par arcs et théorème des valeurs

Continuité

Espaces vectoriels normés de

-inéarité

2.4. Caractérisation globale

2.4. Caractérisation globale

Chapitre 4

fonction

Continui

Definition

Opérations s les fonctions

Continuité e densité

Caractérisation

globale

uniforme

Applications lipschitziennes.

compact

Connexité par
arcs et théorème

Continuité e Linéarité

Espaces vectoriels normés de dimension fini

Remarque:

Ici $f: E \to F$, mais on adaptera à $f: A \to F$ avec $A \subset E$.

Proposition 7

Soit $f: E \to F$. Les trois assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) f est continue sur E.
- (ii) Pour tout ouvert U de F, $f^{-1}(U)$ est un ouvert.
- (iii) pour touf fermé V de F, $f^{-1}(V)$ est un fermé.

2.4. Caractérisation globale

Chapitre 4

Corollaire 2

Soit f une application continue de E dans \mathbb{R} . Alors :

- L'ensemble $\{x \in E / f(x) > 0\}$ est un ouvert de E.
- L'ensemble $\{x \in E / f(x) \ge 0\}$ est un fermé de E.
- L'ensemble $\{x \in E \mid f(x) = 0\}$ est un fermé de E.

Caractérisation globale

Continuité

lipschitziennes.

compact
Connexité par
arcs et théorème
des valeurs

Continuité e Linéarité

Espaces vectoriels normés de dimension finic

Exercice 3

Montrer (plus simplement qu'au chapitre précédent) que dans un espace vectoriel normé :

- Les boules ouvertes sont ouvertes
- Les boules fermées et les sphères sont fermées

2. Continuité

Chapitre 4

Limite d'une fonction

Continuité

Definition

Opérations se les fonctions

Continuité

densité

Caractéris

globale

Continuité uniforme

Applications lipschitziennes

Continuité sur

Connexité par arcs et théorèm des valeurs

Continuité e

Espaces vectoriels normés de

2.5. Continuité uniforme

2.5. Continuité uniforme

Chapitre 4

Continuité uniforme

Espaces

Definition 4

On dit que $f: A \rightarrow F$ est uniformément continue sur A lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \mu > 0, \ \forall (x, y) \in A^2, \ \|x - y\|_E \leqslant \mu \Rightarrow \|f(x) - f(y)\|_F \leqslant \varepsilon$$

Remarques:

- Différence avec la continuité en tout point?
- Module d'uniforme continuité associé à ε .

2.5. Continuité uniforme

Chapitre 4

Continuité

uniforme

Espaces vectoriels normés de

Proposition 8

Si $f: A \to F$ est uniformément continue sur A, alors f est continue sur A.

Remarque:

Réciproque fausse. Contre-exemple?

2. Continuité

Chapitre 4

Limite d'une fonction

Definition

Opérations su les fonctions

Continues

Continuité

densite

globale

Continuité

Applications lipschitziennes

Continuité sur l

Connexité par arcs et théorème des valeurs

Continuité «

Espaces vectoriels normés de 2.6. Applications lipschitziennes.

Chapitre 4

Definition 5

On dit qu'une fonction $f:A\to F$, avec $A\subset E$, est *lipschitzienne* lorsqu'il existe $k\geqslant 0$, tel que :

$$\forall (x,y) \in A^2, \|f(x) - f(y)\|_F \le k \|x - y\|_E.$$

On peut préciser alors que f est k-lipschitzienne.

Remarque :

k est appelé module de Lipschitz pour f.

Applications lipschitziennes. Continuité sur compact Connexité par

Continuité e Linéarité

Espaces vectoriels normés de dimension fini

Chapitre 4

Applications lipschitziennes.

Espaces

Proposition 9

f est lipschitzienne ssi l'ensemble suivant est majoré :

$$\left\{\frac{\|f(x)-f(y)\|_F}{\|x-y\|_E},\;x,y\in E,x\neq y\right\}$$

La borne supérieure k_0 de cet ensemble est alors le plus petit module de Lipschitz pour f, et l'ensemble de tous les modules est $[k_0, +\infty[$.

Chapitre 4

Applications lipschitziennes

Espaces

Proposition 10

Toute fonction $f: A \to F$ lipschitzienne est uniformément continue, et donc continue.

Exemples:

Pour des fonctions réelles (vu en MP2I) :

- fonctions affines réelles $x \mapsto ax + b$
- function $x \mapsto x^2$
- La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$

Chapitre 4

ronction

Continuité

Definition

Opérations les fonction

Continuité e

densité Caractérisati

globale

Applications

lipschitziennes Continuité sur

compact
Connexité par
arcs et théorèm
des valeurs
intermédiaires

Continuité e Linéarité

Espaces vectoriels normés de dimension finic

Remarque:

Deux exemples à connaître :

Proposition 11

- a) L'application "norme" $x \mapsto ||x||$ est 1-lipschitzienne.
- b) Pour une partie A non vide, l'application "distance à A" x → d(x, A) est 1-lipschitzienne.

Chapitre 4

Limite d'un fonction

Continuité

Definition
Opérations

continues Continuité e

Continuité e densité

globale Continuité

Applications lipschitziennes

Continuité sur un compact Connexité par arcs et théorème des valeurs intermédiaires

Continuité e Linéarité

Espaces vectoriels normés de dimension fin

Exercice 4

Soient A et B sont deux fermés disjoints de $(E, \|\cdot\|)$.

- a) A l'aide des fonctions $d_A: x \mapsto d(x,A)$ et $d_B: x \mapsto d(x,B)$, construire une application continue $f: E \to \mathbb{R}$ telle que $f_{|_A} = 0$ et $f_{|_B} = 1$.
- **b)** En déduire qu'il existe deux ouverts U et V disjoints tels que $A \subset U$ et $B \subset V$.

2. Continuité

Chapitre 4

Limite d'un fonction

TOTICETOTI

...

0 / .:

les fonctions

Continuité

densite

globale

Continuité

Applications

lipschitziennes.

Continuité sur un

compact

Connexité par arcs et théorème des valeurs intermédiaires

Continuité

Espaces vectoriels normés de

vectoriels normés de dimension finie

2.7. Continuité sur un compact

2.7. Continuité sur un compact

Chapitre 4

Continuité sur un compact

Espaces

Theoreme 1

L'image d'un compact de E par une application continue $f: A \to F$ est un compact de F.

Theoreme 2

(des bornes atteintes) Si $f: A \to \mathbb{R}$ est continue et si K est un compact de E, alors f est bornée sur K et atteint ses bornes.

2.7. Continuité sur un compact

Chapitre 4

fonction

Continuité

Opérations s

Continuité

densité

Caractérisatio globale

globale Continuité

Applications

Continuité sur un

compact

Connexité par arcs et théorème des valeurs

Continuité e Linéarité

Espaces vectoriels normés de dimension fini

Exercice 5

On suppose E de dimension finie et soit $f:E\to\mathbb{R}$ une application continue telle que $\lim_{\|x\|\to+\infty}f(x)=+\infty$. Montrer que f admet un

minimum sur E.

(On utilisera le fait que les boules fermées sont compactes en dimension finie, voir section suivante)

2.7. Continuité sur un compact

Chapitre 4

fonction

Continuit

Definition

_ . .

Opération

continues

densité

densité

globale

Continuit

unitorme

Applications lipschitziennes

Continuité sur un compact

Connexité par arcs et théorèm des valeurs

Continuité

Espaces vectoriels normés de dimension fini

Theoreme 3

(de Heine) Si $f: A \to F$ est continue et si K est un compact de E, alors f est uniformément continue sur K.

2. Continuité

Chapitre 4

Limite d'une

TOTICETOTI

Continuit

Definition

les fonctions

Continuité

densité

Caractérisatio

Continuité

unitorme

Applications lipschitzienne

Continuité sur u

Connexité par arcs et théorème des valeurs intermédiaires

Continuité

Espaces vectoriels normés de dimension finie 2.8. Connexité par arcs et théorème des valeurs intermédiaires

Chapitre 4

Definition 6

Soient $a,b \in E$. On appelle *chemin* (ou arc) de (ou joignant) a à b toute application $\gamma:[0,1] \to E$ continue telle que $\gamma(0)=a$ et $\gamma(1)=b$. L'ensemble $\gamma([0,1])$ est appelé le *support* de l'arc.

Definition 7

On dit qu'une partie A non vide de E est *connexe par arcs* lorsque pour tout $(a,b) \in A$, il existe un chemin γ de a à b à support contenu dans $A : \gamma([0,1]) \subset A$.

Continuit

Definition
Opérations
les fonction

Continuité et densité

Caractérisation globale Continuité uniforme

Applications lipschitziennes. Continuité sur

Connexité par arcs et théorème des valeurs intermédiaires

Continuité e Linéarité

Espaces vectoriels normés de dimension fir

Chapitre 4

Proposition 12

Soit A une partie de E. La relation binaire $\mathcal R$ définie par :

 $a \mathcal{R} b \Leftrightarrow \text{il existe un chemin de } a \text{ à } b \text{ à support contenu dans } A$

est une relation d'équivalence sur A.

Definition 8

Les classes d'équivalences pour la relation d'équivalence précédente s'appelle les *composantes connexes par arcs* de *A*.

Continuit

Definition

Opérations su les fonctions continues

Continuité densité

Caractérisa

Continuité uniforme

Applications lipschitziennes

Connexité par arcs et théorème des valeurs intermédiaires

Continuité et Linéarité

Espaces vectoriels normés de dimension fini

Chapitre 4

fonction

Continuit

Definition

Opérations les fonctions continues

Continuité et

Caractérisatio

globale Continuité

uniforme

lipschitziennes

Connexité par arcs et théorème des valeurs intermédiaires

Continuité Linéarité

Espaces vectoriels normés de dimension fir

Proposition 13

- a) Toute partie étoilée est connexe par arcs.
- **b)** Toute partie convexe est connexe par arcs.
- c) une partie de \mathbb{R} est connexe par arcs **ssi** c'est un intervalle.

Remarque:

A étoilée signifie $\exists a \in A, \ \forall b \in A, \ [a, b] \subset A$

Chapitre 4

Limite d fonction

Continui

Definition

Opérations s les fonctions continues

Continuité e

densité

Caractérisation globale

Continuité uniforme

Applications lipschitziennes

Continuité sur la compact

Connexité par arcs et théorème des valeurs intermédiaires

Continuité e Linéarité

Espaces vectoriels normés de dimension fir

Theoreme 4

Soit $A \subset E$ non vide et $f : A \to F$ continue. Si A est connexe par arcs, alors f(A) est connexe par arcs.

Theoreme 5

(des valeurs intermédiaires) Soit $A \subset E$ non vide et connexe par arcs et $f: A \to \mathbb{R}$ continue. Si f prend les valeurs u et v, avec $u \leqslant v$, alors

$$\forall s \in [u, v], \quad \exists t \in A, \quad f(t) = s$$

Table des matières

Chapitre 4

fonction

Continuit

Continuité et Linéarité

Critère

fondamenta

Norme

Espaces vectoriels normés de Limite d'une fonction

- 2 Continuité
- 3 Continuité et Linéarité
- 4 Espaces vectoriels normés de dimension finie

Chapitre 4

Continuité et Linéarité

3. Continuité et Linéarité

3. Continuité et Linéarité

Chapitre 4

Critère

fondamental

3.1. Critère fondamental

3.1. Critère fondamental

Chapitre 4

Limite d'un fonction

Continuit

Camadania

Linéarité

Critère fondamental

Norme subordoni

Espaces vectoriels normés de

Lemme

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors u est continue sur E **ssi** u est continue en 0.

Proposition 14

Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors u est continue **ssi** il existe $C \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall x \in E, \quad \|u(x)\|_F \leqslant C\|x\|_E$$

Remarques:

- Notation : $\mathcal{L}_c(E, F)$ sous-espace des applications linéaires **continues** de E dans F.
- Dépend en général des normes considérées!

3.1. Critère fondamental

Chapitre 4

Critère fondamental

Exercice 6

Soit $E = \mathcal{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ muni de la norme $N_1: f \mapsto \int_0^1 \big|f(t)\big| \mathrm{d}t$.

- a) En considérant la suite $(f_n)_n$ de E définie par $f_n: x \mapsto x^n$, montrer que la forme linéaire $u: f \mapsto f(1)$ n'est pas continue.
- b) Proposer une norme sur E pour laquelle u devient continue.

3. Continuité et Linéarité

Chapitre 4

Norme subordonnée

3.2. Norme subordonnée

Chapitre 4

Proposition 15

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors u est continue **ssi** l'image de la boule unité $\mathcal{B}_F(0,1)$ de E par u est bornée.

Definition 9

Pour $u \in \mathcal{L}_c(E, F)$, on appelle *norme* de u subordonnée à $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$ le nombre :

$$|||u||| = \sup_{x \in B(0,1)} ||u(x)||_F = \sup_{||x||_E \le 1} ||u(x)||_F$$

|||u||| s'appelle aussi *norme d'opérateur* de u (notation $|||u||_{op}$).

Norme subordonnée

Chapitre 4

fonction

Continuité

Continuité e Linéarité

Critère fondamen

Norme

subordonnée

Espaces vectoriels normés de dimension finie

Exercice 7

Montrer qu'on a également :

$$|||u||| = \sup_{||x||_{E} < 1} ||u(x)||_{F} = \sup_{||x||_{E} = 1} ||u(x)||_{F}$$

Chapitre 4

Proposition 16

L'application $\|\cdot\|$ définit une norme sur $\mathcal{L}_c(E,F)$. On a de plus :

$$\forall u \in \mathcal{L}_c(E, F), \quad \forall x \in E, \quad \|u(x)\|_F \leqslant \|\|u\| \|x\|_E$$

Remarque:

||u|| est le plus petit module de Lipschitz de u et :

$$|||u||| = \sup_{x \neq 0} \frac{||u(x)||_F}{||x||_E}$$

Continuité

Linéarité

fondame

subordonnée

Espaces vectoriels normés de dimension fini

Chapitre 4

Norme subordonnée

Proposition 17

Si E, F, G sont des e.v.n., et $\| \cdot \|$, $\| \cdot \|'$ et $\| \cdot \|''$ les normes d'opérateurs sur $\mathcal{L}_c(E, F)$, $\mathcal{L}_c(F, G)$ et $\mathcal{L}_c(E, G)$,

$$\forall u \in \mathcal{L}_c(E, F), \quad \forall v \in \mathcal{L}_c(F, G), \quad |||v \circ u|||'' \leqslant |||v|||' \cdot |||u|||$$

Remarque:

Avec $E = \mathbb{K}^n$ muni d'une norme $\|\cdot\|$, on peut définir $\|\cdot\|$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$. Alors, pour $x \in \mathbb{K}^n$, et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$||Ax|| \le |||A|| |||x||$$
 et $|||AB||| \le |||A|| |||B|||$

Table des matières

Chapitre 4

fonction

Continuit

Continuité e Linéarité

Espaces vectoriels normés de

dimension finie

Equivalence des normes

Compacité des fermés bornés, cas des sous-espaces

Continuité des applications linéaires Limite d'une fonction

2 Continuité

Continuité et Linéarité

4 Espaces vectoriels normés de dimension finie

Chapitre 4

Espaces vectoriels normés de

dimension finie

4. Espaces vectoriels normés de dimension finie

4. Espaces vectoriels normés de dimension finie

Chapitre 4

Limite d'ur fonction

Continuité

Continuité e

Espaces vectoriels normés de

Équivalence des normes

Compacité des fermés bornés, cas des

Continuité des applications

4.1. Équivalence des normes

4.1. Équivalence des normes

Chapitre 4

Theoreme 6

Si E est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sur E sont équivalentes.

Remarque:

Notion de convergence intrinsèque.

Proposition 18

En dimension finie:

- a) une suite converge ssi toutes les suites coordonnées dans une base convergent.
- **b)** une fonction admet une limite en un point **ssi** toutes les fonctions coordonnées dans une base admettent une limite en ce point.

Continuité e

fonction

Continuité e Linéarité

Espaces vectoriels normés de

dimension finie Équivalence des

Compacité des fermés bornés, cas des sous-espaces

Continuité de applications linéaires

4. Espaces vectoriels normés de dimension finie

Chapitre 4

Limite d ur fonction

Continuité

Continuité e

Espaces vectoriels normés de

Équivalence des

Compacité des fermés bornés, cas des sous-espaces

Continuité de applications

4.2. Compacité des fermés bornés, cas des sous-espaces

4.2. Compacité des fermés bornés, cas des sous-espaces

Chapitre 4

Continuité

Continuité e

Linéarité Espaces

vectoriels normés de dimension fini

Équivalence des

Compacité des fermés bornés, cas des sous-espaces

Continuité de applications

Theoreme 7

De Bolzano-Weierestrass

Si E est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, toute suite bornée de E admet une valeur d'adhérence.

Remarque:

Lié à la propriété de la borne supérieure sur \mathbb{R} .

4.2. Compacité des fermés bornés, cas des sous-espaces

Chapitre 4

Proposition 19

Lorsque E est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, une partie A de E est compacte **ssi** elle est fermée et bornée.

Corollaire 3

une suite bornée de E converge \mathbf{ssi} elle admet une unique valeur d'adhérence.

Proposition 20

Si F est un sous-espace de dimension finie de E, alors F est fermé.

C----!---!+4

Continuité e

Espaces_.

normés de dimension finie

Compacité des fermés bornés, cas des sous-espaces

Continuité de applications linéaires

4. Espaces vectoriels normés de dimension finie

Chapitre 4

Limite d'un fonction

Continuité

Continuité e

Espaces vectoriels normés de

dimension finie Équivalence des

Compacité des fermés bornés cas des

Continuité des applications linéaires 4.3. Continuité des applications linéaires

4.3. Continuité des applications linéaires

Chapitre 4

fonction

Continuite

Continuité e Linéarité

Espaces vectoriels normés de

dimension finie

normes Compacité des fermés bornés, cas des

Continuité des applications linéaires

Proposition 21

Si E est de dimension finie, alors toutes les applications linéaires de E vers F sont continues : $\mathcal{L}_c(E,F) = \mathcal{L}(E,F)$.

Remarque:

Généralisation à la multilinéarité.

4.3. Continuité des applications linéaires

Chapitre 4

fonction

Continuit

Continuité e Linéarité

Espaces vectoriels normés de dimension fin

dimension tınie Équivalence des

Compacité des fermés bornés, cas des

Continuité des applications linéaires

Proposition 22

- Si E est euclidien, le produit scalaire \langle , \rangle est continu sur E^2
- l'application det est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
- L'application "produit matriciel" $(A, B) \mapsto AB$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$
- Toute fonction polynomiale en plusieurs variables est continue.

Exercice 8

Montrer que $GL_n(\mathbb{K})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.