

Interrogation de cours n° 8

Lundi 10 novembre 2025

\mathbb{K} est ici un sous-corps de \mathbb{R} .

Définitions et énoncés (5 pts)

1. Quand dit-on qu'une partie H d'un groupe $(G, *)$ est un sous-groupe de G ?
2. Expliquer ce que la congruence modulo n et donner la définition de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
3. Qu'est-ce qu'un groupe monogène, cyclique ? Donner des exemples.
4. Donner la définition d'un idéal I d'un anneau commutatif A .
5. Donner la définition d'une algèbre commutative le plus précisément possible.

Démonstrations (6 pts)

- a) Montrer que si H est un sous-groupe du groupe $(\mathbb{Z}, +)$, alors il est forcément de la forme $n\mathbb{Z}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$.
- b) Montrer que le noyau d'un morphisme d'anneaux $f : A \rightarrow B$ est un idéal de A .
- c) (MPI) Montrer que l'image d'un morphisme d'anneaux $f : A \rightarrow B$ est un sous-anneau de B .
- c) (MPI*) Montrer que si G est un groupe commutatif fini de cardinal n et $a \in G$, alors a est d'ordre fini et son ordre d est un diviseur de n .