Interrogation de cours n° 11

Lundi 8 décembre 2025

Définitions et énoncés (5 pts)

1. Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R}$ et f une fonction numérique définie et continue par morceaux sur $]a, b]$. Donner la définition de la convergence de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\alpha \in \mathbb{R}$, pour que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$ soit intégrable sur $]0, 1]$.

3. Énoncer le théorème de convergence dominée pour une suite $(f_n)_n$ de fonctions définies sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

4. Énoncer le théorème d'intégration terme à terme pour une série $\sum f_n$ de fonctions définies sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Démonstrations (6 pts)

a) Démontrer la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{t}}\mathrm{d}t$ et donner sa valeur.

b) Pour un intervalle I de $\mathbb{R}$, montrer que $L^2(I, \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.

c) Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$ est convergente.