Probabilités et variables aléatoires (2)

Fiche récapitulative n° 9 bis

Définitions

- Rappels de MP2I : Probabilité conditionnelle, événéments indépendants.
- Couple de variables aléatoires. Loi conjointe, lois marginales, notation $P(X = x, Y = y)$.
- Extension de la notion de loi conjointe aux n-uplets de variables aléatoires
- Couple de variables aléatoires indépendantes, notation $X \perp\!\!\!\perp Y$.
- Famille finie et quelconque de variables aléatoires indépendantes.
- Suites i.i.d. Modélisation du jeu de pile ou face infini : suite i.i.d. de variables de Bernoulli.
- Espérance d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, notation $\mathrm{E}(X)$.
- Variable aléatoire complexe d'espérance finie, notation $X \in L^1$. Variable centrée.
- Variable aléatoire réelle de carré d'espérance finie, notation $X \in L^2$.
- Pour $X \in L^2$, variance et écart type de X, notations $\mathrm{V}(X)$ et $\sigma(X)$, variable réduite.
- Caractérisation des variables aléatoires de variance nulle.
- Covariance de deux variables aléatoires de L^2.
- Fonction génératrice d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Résultats et propriétés

- Formule des probabilités composées, formule des probabilités totales, formule de Bayes.
- L'indépendance deux à deux n'implique pas l'indépendance.
- Si A et B sont indépendants, A et $\overline{B}$ le sont aussi.
- Détermination des lois marginales à partir de la loi conjointe.
- Caractérisation de $X \perp\!\!\!\perp Y$ par $\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y)$ pour tout x, y.
- si $X \perp\!\!\!\perp Y$, alors $f(X) \perp\!\!\!\perp g(Y)$. Extension au cas de plus de deux variables.
- Lemme des coalitions, extension au cas de plus de deux coalitions.
- Pour X à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, $\mathrm{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geqslant n)$.
- Formule (ou théorème) de transfert.
- Linéarité, positivité, croissance, inégalité triangulaire.
- Caractérisation des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ d'espérance nulle.
- Si $|X| \leqslant Y$ et si $Y \in L^1$, alors $X \in L^1$.
- Si $X, Y \in L^1$ indépendantes, alors $XY \in L^1$ et $\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)$; extension à n variables.
- Si $\mathrm{E}\left(X^2\right) < +\infty$, X est d'espérance finie.
- Inégalité de Cauchy-Schwarz pour deux variables aléatoires dans L^2.
- Relation $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}\left(X^2\right) - \mathrm{E}(X)^2$.
- Relation $\mathrm{V}(aX + b) = a^2\,\mathrm{V}(X)$.
- Si $\sigma(X) > 0$, la variable aléatoire $\big(X - \mathrm{E}(X)\big)/\sigma(X)$ est centrée réduite.
- Relation $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)$. Cas de variables indépendantes.
- Variance d'une somme de n variables aléatoires, cas de variables décorrélées.
- Inégalité de Markov et de Bienaymé-Tchebychev.
- Loi faible des grands nombres.
- Convergence normale sur $D_f(0, 1)$ de la série génératrice. Rayon $\geqslant 1$; continuité de G_X.
- Détermination de la loi de X par G_X.
- $X \in L^2$ ssi G_X est dérivable en 1 ; dans ce cas $\mathrm{E}(X) = {G_X}'(1)$.
- $X \in L^2$ ssi G_X est deux fois dérivable en 1 (démo NE). Calcul de $V(X)$.
- Espérance, variance, et fonctions génératrices pour les lois usuelles.
- Fonction génératrice d'une somme finie de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.