MPI** - Lycée Colbert

Concours Blanc 2025
Mathématiques 2

Jeudi 18 décembre 2025
8h00-12h00

Sujet X-ENS (maths A)

Durée : 4 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve

Le but de ce problème est d'étudier certains aspects de la diagonalisabilité des matrices symétriques à coefficients rationnels. Ces matrices sont diagonalisables dans $\mathbb{R}$, mais il se trouve que leurs valeurs propres ne peuvent pas prendre n'importe quelle valeur réelle. Le principal objectif de ce problème est de caractériser les nombres réels qui apparaissent comme valeurs propres de matrices symétriques à coefficients rationnels.

Notations

Dans tout le problème, si n et m sont des entiers naturels non nuls et K est un corps,

— on note $M_{m,n}(K)$ l'ensemble des matrices à m lignes et n colonnes à coefficients dans K ainsi que $M_n(K) = M_{n,n}(K)$ l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients dans K ;

— on identifie l'espace vectoriel K^n à l'espace vectoriel des vecteurs colonnes $M_{n,1}(K)$;

— on note $S_n(K)$ l'ensemble des matrices symétriques carrées de taille n à coefficients dans K ;

— si $A \in M_{m,n}(K)$, on note A^T la matrice transposée de A et, si $m = n$,

$$\chi_A(X) = \det(XI_n - A)$$

son polynôme caractéristique, qui est donc un polynôme unitaire ;

— si $q_1, \ldots, q_n$ sont des éléments de K, on note $\mathrm{Diag}(q_1, \ldots, q_n)$ la matrice diagonale de taille n de coefficients diagonaux $q_1, \ldots, q_n$.

Première partie

1. Exhiber une matrice $M \in S_2(\mathbb{Q})$ dont $\sqrt{2}$ est valeur propre.

2. Le but de cette question est de montrer que $\sqrt{3}$ n'est pas valeur propre d'une matrice de $S_2(\mathbb{Q})$. On suppose qu'il existe $M \in S_2(\mathbb{Q})$ telle que $\sqrt{3}$ est valeur propre de M.

2a. En utilisant l'irrationnalité de $\sqrt{3}$, montrer que le polynôme caractéristique de M est $X^2 - 3$.

2b. Montrer que si $n \in \mathbb{Z}$, alors n^2 est congru à 0 ou 1 modulo 3.

2c. Montrer qu'il n'existe pas de triplet d'entiers (x, y, z) premiers entre eux dans leur ensemble tel que $x^2 + y^2 = 3z^2$.

2d. Conclure.

3a. On se donne $q \in \mathbb{Q}$, $n \in \mathbb{N}^\star$ et une matrice $A \in S_n(\mathbb{Q})$ telle que $A^2 = qI_n$. Construire une matrice $B \in S_{2n}(\mathbb{Q})$ commutant à la matrice $\left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{smallmatrix}\right)$ et telle que $B^2 = (q+1)I_{2n}$.

3b. Montrer que pour tout $d \geqslant 1$, il existe $n \in \mathbb{N}^\star$ et des matrices $M_1, \ldots, M_d \in S_n(\mathbb{Q})$ qui commutent deux à deux et telles que $M_k^2 = kI_n$ pour tout entier $1 \leqslant k \leqslant d$.

3c. Soit $d \geqslant 1$ un entier. En déduire que si $q_1, \ldots, q_d \in \mathbb{Q}$, $q_i > 0$, alors il existe $n \in \mathbb{N}^\star$ et des matrices $M_1, \ldots, M_d \in S_n(\mathbb{Q})$ qui commutent deux à deux et telles que $M_i^2 = q_iI_n$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant d$.

4. Le but de cette question est de montrer que $\sqrt[3]{2}$ n'est pas valeur propre d'une matrice symétrique à coefficients dans $\mathbb{Q}$. On raisonne par l'absurde, supposant l'existence d'une matrice $M \in S_n(\mathbb{Q})$ (pour un certain entier n) dont $\sqrt[3]{2}$ est valeur propre.

4a. Montrer que $X^3 - 2$ divise le polynôme caractéristique de M. (On pourra commencer par prouver que $\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}$.)

4b. Conclure.

5. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, construire une matrice $M \in S_n(\mathbb{Q})$ dont $\cos(\frac{2\pi}{n})$ est valeur propre. (On pourra commencer par construire une matrice orthogonale à coefficients dans $\mathbb{Q}$ qui admet $e^{2i\pi/n}$ pour valeur propre.)

Deuxième partie

Soit $P(X)$ un polynôme unitaire de degré $d \geqslant 1$ à coefficients complexes que l'on écrit sous la forme :

$$P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_{d-1} X^{d-1} + X^d.$$

On suppose que $a_0 \neq 0$. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_d \in \mathbb{C}$ les racines de $P(X)$ (avec multiplicité). Pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit :

$$N_n = \lambda_1^n + \lambda_2^n + \cdots + \lambda_d^n.$$

6. Soit $Q(X)$ le polynôme réciproque de $P(X)$ défini par $Q(X) = X^d P(\frac{1}{X})$. Montrer que :

$$\begin{aligned} Q(X) &= 1 + a_{d-1} X + \cdots + a_1 X^{d-1} + a_0 X^d \\ &= (1 - \lambda_1 X)(1 - \lambda_2 X) \cdots (1 - \lambda_d X). \end{aligned}$$

7. On définit la fonction $f : \mathbb{R} \backslash (\mathbb{R} \cap \{\frac{1}{\lambda_1}, \ldots, \frac{1}{\lambda_d}\}) \to \mathbb{C}$ par $f(x) = \frac{Q'(x)}{Q(x)}$.
Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que f est développable en série entière sur $]-r, r[$, et que le développement en série entière de f en 0 s'écrit :

$$\forall x \in \,]-r, r[, \quad f(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} N_{n+1} x^n.$$

8a. Montrer que si $a_0, \ldots, a_{d-1}$ sont des éléments de $\mathbb{Q}$, alors $N_n \in \mathbb{Q}$ pour tout $n \geqslant 1$.

8b. Réciproquement montrer que si $N_n \in \mathbb{Q}$ pour tout $n \geqslant 1$, alors $a_0, \ldots, a_{d-1}$ sont des éléments de $\mathbb{Q}$.

8c. En déduire que si $\mu_1, \ldots, \mu_d$ sont des nombres complexes et si $P(X) = \prod_{i=1}^{d} (X - \mu_i)$, alors $P(X) \in \mathbb{Q}[X]$ si et seulement si

$$\forall n \geqslant 1, \quad \sum_{i=1}^{d} \mu_i^n \in \mathbb{Q}.$$

9. Soient $n \geqslant 1$ et $m \geqslant 1$ deux entiers et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_m$ des nombres complexes. On définit :

$$A(X) = (X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \cdots (X - \alpha_n)$$
$$B(X) = (X - \beta_1)(X - \beta_2) \cdots (X - \beta_m).$$

Montrer que si $A(X)$ et $B(X)$ sont à coefficients rationnels, alors les polynômes

$$\prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} (X - \alpha_i \beta_j) \quad \text{et} \quad \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} (X - \alpha_i - \beta_j)$$

sont aussi à coefficients rationnels.

Troisième partie

On dit qu'un nombre complexe z est *totalement réel* (resp. *totalement positif*) s'il existe un polynôme $P(X)$ non nul à coefficients rationnels tel que :

(i) z est une racine de P, et

(ii) toutes les racines de P sont dans $\mathbb{R}$ (resp. dans $\mathbb{R}_+$).

10. Soit M une matrice symétrique à coefficients dans $\mathbb{Q}$. Montrer que les valeurs propres de M sont totalement réelles.

11a. Montrer que l'ensemble des nombres totalement réels est un sous-corps de $\mathbb{R}$. (On pourra utiliser le résultat de la question **9**.)

11b. Montrer que l'ensemble des nombres totalement positifs est inclus dans $\mathbb{R}_+$, est stable par addition, multiplication et que l'inverse d'un nombre totalement positif non nul est totalement positif.

12. Soit x un nombre complexe. Montrer que x est totalement réel si et seulement si x^2 est totalement positif.

Quatrième partie

Le but de cette partie est de montrer que, réciproquement, tout nombre totalement réel est valeur propre d'une matrice symétrique à coefficients dans $\mathbb{Q}$.
On note $\mathscr{R}$ l'ensemble des nombres totalement réels et on **admet** qu'il existe une fonction $t : \mathscr{R} \to \mathbb{Q}$ vérifiant les deux propriétés suivantes :

(i) pour $x, y \in \mathscr{R}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{Q}$, on a $t(\lambda x + \mu y) = \lambda t(x) + \mu t(y)$

(ii) pour x totalement positif, on a $t(x) \geqslant 0$ et l'égalité est stricte si $x \neq 0$.

On considère un nombre z totalement réel non nul. Par définition, il existe un polynôme unitaire $Z(X) \in \mathbb{Q}[X]$ qui annule z. On écrit $Z(X)$ sous la forme :

$$Z(X) = X^d - \big(a_{d-1} X^{d-1} + \cdots + a_1 X + a_0\big)$$

avec $d \in \mathbb{N}^\star$ et $a_i \in \mathbb{Q}$ pour tout $i \in \{0, \ldots, d-1\}$. On suppose en outre que $Z(X)$ est choisi de façon à ce que d soit minimal parmi les degrés des polynômes unitaires $P(X) \in \mathbb{Q}[X]$ tels que $P(z) = 0$.

On considère la matrice S de taille $d \times d$ dont le coefficient (i,j), $1 \leqslant i,j \leqslant d$, vaut $t(z^{i+j})$. Pour $X, Y \in \mathbb{R}^d$, on pose $B(X,Y) = X^T S Y$.

13a. Montrer que $B(X,X) > 0$ pour $X \in \mathbb{Q}^d$, $X \neq 0$.

13b. En déduire que la matrice S est inversible.

14. Montrer que B est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^d$.

15a. Montrer qu'il existe une base $(e_1, \ldots, e_d)$ de $\mathbb{R}^d$ avec $e_i \in \mathbb{Q}^d$ pour tout i et $B(e_i, e_j) = 0$ pour $i \neq j$.

15b. En déduire qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{Q})$ et $q_1, \ldots, q_d \in \mathbb{Q}$, $q_i > 0$, tels que :

$$S = P^T \cdot \mathrm{Diag}(q_1, \ldots, q_d) \cdot P.$$

On pose :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \ddots & 0 & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{d-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{d-1} \end{pmatrix}.$$

16. Calculer le polynôme caractéristique de M.

17a. Vérifier que la matrice SM est symétrique.

17b. En déduire que la matrice RMR^{-1} est symétrique où $R = \mathrm{Diag}(\sqrt{q_1}, \ldots, \sqrt{q_d}) \cdot P$.

18. Construire une matrice symétrique à coefficients rationnels dont z est valeur propre.

X-ENS 2020 – Épreuve A

Serge Francinou & Hervé Gianella

1. La matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ est symétrique à coefficients rationnels et a pour polynôme caractéristique le polynôme $X^2 - (\operatorname{Tr} M)X + \det M = X^2 - 2$. Donc $\sqrt{2}$ est valeur propre de M.

2. **(a)** On a $\chi_M(\sqrt{3}) = 0$ ce qui donne $3 - (\operatorname{Tr} M)\sqrt{3} + \det M = 0$. Or $\sqrt{3}$ est irrationnel et $\operatorname{Tr} M, \det M$ sont des rationnels. On a donc nécessairement $\operatorname{Tr} M = 0$ et $\det M = -3$ soit $\chi_M = X^2 - 3$.

(b) Si $n \equiv 0\ [3]$ alors $n^2 \equiv 0\ [3]$ et si $n \equiv 1$ ou $2\ [3]$ alors $n^2 \equiv 1\ [3]$ (car $2^2 \equiv 1\ [3]$).

(c) Supposons qu'il existe un triplet (x, y, z) d'entiers premiers entre eux tel que $x^2 + y^2 = 3z^2$. En passant modulo 3 on a $x^2 + y^2 \equiv 0\ [3]$. D'après la question précédente cela impose que x et y sont tous les deux divisibles par 3. Mais dans ce cas 9 divise $3z^2$ et z est aussi divisible par 3. C'est contradictoire.

(d) La matrice M s'écrit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ et on a $\det M = -a^2 - b^2 = -3$ soit $a^2 + b^2 = 3$. On peut écrire $a = \dfrac{x}{z}$ et $b = \dfrac{y}{z}$ avec x, y, z entiers tels que $\operatorname{pgcd}(x, y, z) = 1$. Mais on a alors une contradiction avec la question précédente.

3. **(a)** La matrice $B = \begin{pmatrix} A & I_n \\ I_n & -A \end{pmatrix}$ convient. On peut la trouver en étudiant d'abord le cas $n = 1$.

(b) On procède par récurrence sur d. Pour $d = 1$ on peut prendre $n = 1$ et $M_1 = (1)$. Supposons le résultat vrai au rang d avec des matrices $M_1, \ldots, M_d$. On considère alors les matrices de taille $2n$ suivantes :

$$M'_1 = \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_1 \end{pmatrix}, \ldots, M'_d = \begin{pmatrix} M_d & 0 \\ 0 & M_d \end{pmatrix}, M'_{d+1} = \begin{pmatrix} M_d & I_n \\ I_n & -M_d \end{pmatrix}$$

Elles sont symétriques, à coefficients dans $\mathbb{Q}$, commutent deux à deux et satisfont la propriété au rang $d+1$ par des calculs par blocs et d'après la question précédente.

(c) Si $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{Q})$ vérifie $M^2 = kI_n$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ alors M est inversible et la matrice M^{-1} est encore symétrique à coefficients dans $\mathbb{Q}$ et vérifie $(M^{-1})^2 = \dfrac{1}{k} I_n$. De plus, si M, N sont deux matrices de $\mathcal{S}_n(\mathbb{Q})$ qui commutent avec $M^2 = kI_n$ et $N^2 = k'I_n$ on a $MM' \in \mathcal{S}_n(\mathbb{Q})$ et $(MM')^2 = kk'I_n$.

Soit alors $d \geqslant 1$ et $q_1, \ldots, q_d$ des rationnels strictement positifs. On pose $q_i = \dfrac{a_i}{b_i}$ pour tout i avec a_i, b_i dans $\mathbb{N}^*$. D'après la question (b), appliquée avec un entier plus grand que tous les a_i et tous les b_i, on peut trouver $n \in \mathbb{N}^*$ et des matrices $A_1, \ldots A_d, B_1, \ldots, B_d$ de $\mathcal{S}_n(\mathbb{Q})$ qui commutent toutes et dont les carrés sont respectivement les matrices scalaires a_iI_n et b_iI_n. Compte tenu des remarques qui précèdent les matrices $M_i = A_iB_i^{-1}$ sont dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{Q})$, commutent deux à deux et vérifient $M_i^2 = q_iI_n$.

4. **(a)** Il est clair que $\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}$ car si $\sqrt[3]{2} = \dfrac{a}{b}$ avec deux entiers a et b premiers entre eux, alors $a^3 = 2b^3$ et a est pair. En posant $a = 2a'$ on constate que b est aussi pair ce qui est absurde. L'ensemble I des polynômes $P \in \mathbb{Q}[X]$ tels que $P(\sqrt[3]{2}) = 0$ est un idéal de $\mathbb{Q}[X]$, non nul car il contient $X^3 - 2$, et est donc engendré par un unique polynôme unitaire μ (le polynôme minimal de $\sqrt[3]{2}$). Celui-ci divise $X^3 - 2$ et n'est pas de degré 1 car $\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}$. Il ne peut pas non plus être de degré 2 car le quotient $\dfrac{X^3 - 2}{\mu}$ serait de degré 1 et aurait une racine rationnelle. Mais c'est impossible car les racines de $X^3 - 2$ sont $\sqrt[3]{2}, j\sqrt[3]{2}$ et $j^2\sqrt[3]{2}$. On a donc $\mu = X^3 - 2$.

Comme $\sqrt[3]{2}$ est valeur propre de M, le polynôme caractéristique de M s'annule en $\sqrt[3]{2}$ et est donc dans I puisqu'il est à coefficients dans $\mathbb{Q}$. On en déduit que $X^3 - 2$ divise χ_M.

(b) On obtient notre contradiction car les valeurs propres de M sont toutes réelles et ce n'est pas le cas de $j\sqrt[3]{2}$.

5. Considérons la matrice de permutation P correspondant au n-cycle $(1, 2, \dots, n)$. C'est une matrice orthogonale, à coefficients dans $\mathbb{Q}$ et son polynôme caractéristique est $X^n - 1$. En particulier $e^{2i\pi/n}$ est valeur propre de P. On note que ${}^t P = P^{n-1} = P^{-1}$. Donc la partie symétrique de P est égale à $\dfrac{1}{2}(P + P^{-1})$ et, en diagonalisant P dans $\mathbb{C}$, on voit que ses valeurs propres sont les $\cos \dfrac{2k\pi}{n}$ pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$. Elle répond à la question.

6. On a $Q(X) = X^d \left(\left(\dfrac{1}{X}\right)^d + a_{d-1}\left(\dfrac{1}{X}\right)^{d-1} + \cdots + a_1\left(\dfrac{1}{X}\right) + a_0 \right) = 1 + a_{d-1}X + \cdots + a_1 X^{d-1} + a_0 X^d$. Par ailleurs, $Q(X) = X^d(1/X - \lambda_1)\cdots(1/X - \lambda_d) = (1-\lambda_1 X)\cdots(1-\lambda_d X)$ en distribuant un facteur X sur chacun des facteurs $(1/X - \lambda_i)$.

7. Pour x dans le domaine de définition de f, on a

$$f(x) = \frac{\sum_{i=1}^{d}(-\lambda_i)\prod_{k\neq i}(1-\lambda_k x)}{Q(x)} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_i x}.$$

Si pour tout i, $|\lambda_i x| < 1$, on a

$$f(x) = -\sum_{i=1}^{d} \lambda_i \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda_i x)^n = -\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{i=1}^{d} \lambda_i^{n+1} x^n = -\sum_{n=0}^{+\infty} N_{n+1} x^n,$$

l'interversion étant possible puisque la somme sur l'indice i est finie. Si on note r la valeur minimale des $1/|\lambda_i|$, $r > 0$ et pour $x \in]-r, r[$, on a $f(x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} N_{n+1} x^n$ et f est bien développable en série entière.

8. **(a) (b)** On a pour $|x| < r$, $f(x)Q(x) = Q'(x)$. Comme f et Q sont de rayons strictement positifs, la règle du produit de Cauchy s'applique : le produit $f(x)Q(x)$ est développable en série entière et ses coefficients s'obtiennent par les formules de convolution : le coefficient de x^k dans f est $-N_{k+1}$, celui de x^l dans Q est a_{d-l} si $l \leqslant d$ (avec $a_d = 1$) et 0 sinon. Le coefficient de x^n dans le produit $f(x)Q(x)$ est donc

$$-\sum_{\substack{k+l=n \\ l\leqslant d}} N_{k+1} a_{d-l}.$$

Comme le produit $f(x)Q(x)$ est égal à $Q'(x)$ avec $Q'(x) = \sum_{n=1}^{d} n a_{d-n} X^{n-1}$, par unicité des coefficients d'une série entière de rayon strictement positif, on obtient

- pour $n < d$, $-(n+1)a_{d-n-1} = N_{n+1}a_d + N_n a_{d-1} + \cdots + a_{d-n}N_1 = N_{n+1} + N_n a_{d-1} + \cdots + a_{d-n}N_1$;
- pour $n \geqslant d$, $N_{n+1}a_d + N_n a_{d-1} + \cdots + N_{n+2-d}a_1 + N_{n+1-d}a_0 = N_{n+1} + N_n a_{d-1} + \cdots + N_{n+2-d}a_1 + N_{n+1-d}a_0 = 0$.

Si les coefficients a_i sont dans $\mathbb{Q}$, il apparaît que si $N_1, \dots, N_n \in \mathbb{Q}$, alors N_{n+1} est aussi rationnel. Pour $n = 0$, on a $N_1 = -a_{d-1} \in \mathbb{Q}$ et par récurrence sur n, tous les sommes de Newton N_n sont rationnelles : on a (a).

Supposons réciproquement que tous les N_n sont rationnels. On a $-a_{d-1} = N_1$ et $a_{d-1} \in \mathbb{Q}$. Si on suppose $a_{d-1}, \dots, a_{d-n}$ rationnels, on a par la formule pour $n < d$, $a_{d-n-1} \in \mathbb{Q}$. On obtient donc par récurrence que tous les coefficients a_i sont rationnels.

(c) Les deux sous-questions précédentes donnent le résultat lorsque les μ_i sont non nuls. Quitte à renuméroter les racines, on peut supposer les $\mu_i \neq 0$ si $i \leqslant d'$ et $\mu_i = 0$ pour $d' < i \leqslant d$. On a donc $P = X^{d-d'} \prod_{i=1}^{d'} (X - \mu_i) = X^{d-d'}Q(X)$. On a

$$P \in \mathbb{Q}[X] \iff Q \in \mathbb{Q}[X] \iff \forall n \geqslant 1,\ \sum_{i=1}^{d'} \mu_i^n \in \mathbb{Q} \iff \forall n \geqslant 1,\ \sum_{i=1}^{d} \mu_i^n \in \mathbb{Q}$$

9. Notons $\mathrm{N}_k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^k$, $\mathrm{N}'_k = \sum_{i=1}^{m} \beta_i^k$, $\mathrm{N}''_k = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant m}} (\alpha_i\beta_j)^k$ et enfin, $\mathrm{N}'''_k = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant m}} (\alpha_i + \beta_j)^k$ pour $k \geqslant 1$. Comme $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathrm{Q}[\mathrm{X}]$, les sommes N_k et N'_k sont rationnelles. Pour montrer que les polynômes demandés sont aussi à coefficients rationnels, il suffit de démontrer que les sommes de Newton associées N''_k et N'''_k sont toutes rationnelles. On a bien

$$\mathrm{N}''_k = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant m}} \alpha_i^k\beta_j^k = \mathrm{N}_k\mathrm{N}'_k \in \mathbb{Q},$$

$$\mathrm{N}'''_k = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant m}} \sum_{l=0}^{n} k\binom{k}{l}\alpha_i^l\beta_j^{k-l} = \sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l} \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant m}} \alpha_i^l\beta_j^{k-l} = \sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}\mathrm{N}_l\mathrm{N}'_{k-l} \in \mathbb{Q}.$$

10. Une valeur propre de $\mathrm{M} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{Q})$ est une racine de $\chi_\mathrm{M} \in \mathbb{Q}[\mathrm{X}]$. Or M est aussi une matrice symétrique réelle donc diagonalisable (en base orthonomée) d'après le théorème spectral. En particulier, χ_M est scindé sur $\mathbb{R}$ et la valeur propre est donc totalement réelle.

11. **(a)** 1 est totalement réel puisque $\mathrm{X} - 1 \in \mathbb{Q}[\mathrm{X}]$. Soit α_1 et β_1 des nombres totalement réels. Il s'agit de montrer que $-\alpha_1$, $\alpha_1 + \beta_1$, $\alpha_1\beta_1$ et $1/\alpha_1$ (quand α_1 non nul) sont tous des nombres totalement réels. Il existe $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathbb{Q}[\mathrm{X}]$ scindés sur $\mathbb{R}$ s'écrivant

$$\mathrm{A}(\mathrm{X}) = (\mathrm{X} - \alpha_1)(\mathrm{X} - \alpha_2)\cdots(\mathrm{X} - \alpha_n), \quad \mathrm{B}(\mathrm{X}) = (\mathrm{X} - \beta_1)(\mathrm{X} - \beta_2)\cdots(\mathrm{X} - \beta_m).$$

Avec la question 9, on a directement que $\alpha_1\beta_1$ et $\alpha_1 + \beta_1$ sont des racines de polynômes de $\mathbb{Q}[\mathrm{X}]$ scindés sur $\mathbb{R}$: ils sont totalement réels. Par ailleurs, $-\alpha_1$ est racine de $\mathrm{A}(-\mathrm{X}) \in \mathbb{Q}[\mathrm{X}]$ qui est encore scindé sur $\mathbb{R}$ donc $-\alpha_1$ est totalement réel. Si α_1 est non nul, le polynôme réciproque de A, $\mathrm{C}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^n\mathrm{A}\left(\frac{1}{\mathrm{X}}\right)$ est à coefficients rationnels et admet comme racines les inverses des racines non nulles de A. Les racines de C sont donc réelles et $1/\alpha_1$ est totalement réel.

(b) Il suffit de reprendre ce qui précède mais avec l'hypothèse que α_1 et β_1 sont totalement positifs et on peut alors supposer les α_i et les β_j dans $\mathbb{R}_+$. En considérant chacun des polynômes trouvés à la question précédente pour la somme, le produit et l'inverse, on constate que les racines de tous ces polynômes sont positives.

12. On suppose x^2 totalement positif. Il existe $\mathrm{A}(\mathrm{X}) = (\mathrm{X}-\alpha_1)(\mathrm{X}-\alpha_2)\cdots(\mathrm{X}-\alpha_n) \in \mathbb{Q}[\mathrm{X}]$ avec $\alpha_1 = x^2$ et les α_i tous positifs. On pose $\mathrm{B}(\mathrm{X}) = \mathrm{A}(\mathrm{X}^2) \in \mathbb{Q}[\mathrm{X}]$, on a $\mathrm{B}(x) = 0$ et B est scindé sur $\mathbb{R}$ car $\mathrm{B}(\mathrm{X}) = \prod_{i=1}^{n}(\mathrm{X}-\sqrt{\alpha_i})(\mathrm{X}+\sqrt{\alpha_i})$: x est donc totalement réel.

On suppose réciproquement $x = \alpha_1$ totalement réel et on considère $\mathrm{A}(\mathrm{X}) = (\mathrm{X}-\alpha_1)(\mathrm{X}-\alpha_2)\cdots(\mathrm{X}-\alpha_n) \in \mathbb{Q}[\mathrm{X}]$ avec les α_i réels. On pose $\mathrm{C}(\mathrm{X}) = (\mathrm{X} - \alpha_1^2)(\mathrm{X} - \alpha_2^2)\cdots(\mathrm{X} - \alpha_n^2)$. Les racines de C sont positives et x^2 est l'une d'elle. Reste à voir si $\mathrm{C} \in \mathbb{Q}[\mathrm{X}]$. Comme les sommes de Newton de C sont des sommes de Newton de $\mathrm{A} \in \mathbb{Q}[\mathrm{X}]$ (puisque $\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i^2)^k = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{2k}$) et comme ces dernières sont rationnelles puisque $\mathrm{A} \in \mathbb{Q}[\mathrm{X}]$ (question 8), on en déduit que $\mathrm{C} \in \mathbb{Q}[\mathrm{X}]$ (toujours question 8).

13. **(a)** Soit $\mathrm{X} \in \mathbb{Q}^d$ non nul de coordonnées $x_1, \ldots, x_d$. On a, par $\mathbb{Q}$-linéarité de t,

$$\mathrm{B}(\mathrm{X}, \mathrm{X}) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant d} t(z^{i+j})x_ix_j = t\left(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant d} x_ix_jz^{i+z}\right) = t\left(\left(\sum_{k=1}^{d} x_kz^k\right)^2\right)$$

Le corps des nombres totalement réels contient $\mathbb{Q}$ donc $\sum_{k=1}^{d} x_kz^k$ est totalement réel. Son carré est donc totalement positif d'après la question 12. Il n'est pas nul, car z étant non nul, on aurait $\sum_{i=1}^{d} x_iz^{i-1} = 0$ et cela nous donnerait un polynôme non nul de $\mathbb{Q}[X]$ de degré $< d$ qui s'annule en z ce qui contredirait la minimalité de d (il est facile de rendre le polynôme unitaire). La propriété (ii) de la fonction t permet de conclure que $B(X,X) > 0$.

(b) Si la matrice B n'était pas inversible on pourrait trouver un vecteur non nul X de $\mathbb{Q}^d$ dans son noyau et un tel vecteur contredirait le résultat précédent.

14. Par densité de $\mathbb{Q}^d$ dans $\mathbb{R}^d$ on a $B(X,X) \geqslant 0$ pour tout vecteur $X \in \mathbb{R}^d$ donc la forme bilinéaire symétrique B est positive (notons que la symétrie de B découle de la symétrie de la matrice S). Les valeurs propres de S sont toutes positives : en effet, si X est un vecteur propre de S associée à λ, $X^T SX = \lambda X^T X$ et $\lambda \geqslant 0$ car $X^T X > 0$. Comme S est inversible, ces valeurs propres sont mêmes strictement positives. Par application du théorème spectral, on prend ensuite une base orthonormée de $\mathbb{R}^d$, $(\varepsilon_i)_{1\leqslant i\leqslant d}$, ε_i associée à la valeur propre λ_i de S et si $X = \sum_{i=1}^{d} x_i \varepsilon_i \neq 0$, $X^T SX = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i x_i^2 > 0$. La forme bilinéaire symétrique canoniquement associée à S est donc définie positive : c'est un produit scalaire.

15. **(a)** On cherche une base orthogonale de $\mathbb{R}^d$ pour le produit scalaire B qui soit formée de vecteurs à coefficients rationnels. On part de la base canonique $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_d)$ et on lui applique le processus de Gram-Schmidt mais sans normaliser les vecteurs. On pose donc $e_1 = \varepsilon_1$ puis $e_2 = \varepsilon_2 - \dfrac{B(\varepsilon_2, e_1)}{B(e_1, e_1)} e_1$ et de manière générale,

$$e_{p+1} = \varepsilon_{p+1} - \sum_{i=1}^{p} \frac{B(\varepsilon_{p+1}, e_i)}{B(e_i, e_i)} e_i$$

Les produits scalaires sont tous dans $\mathbb{Q}$ et la famille $(e_1, \ldots, e_d)$ est une base B-orthogonale de $\mathbb{R}^d$ qui convient (on a aisément $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k) = \mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k)$ pour tout k).

(b) Notons $P \in GL_d(\mathbb{Q})$ la matrice de passage de la base canonique à la base $(e_1, \ldots, e_d)$ que l'on vient de construire. Soit X, Y dans $\mathbb{R}^d$ et X', Y' les coordonnées de ces deux vecteurs dans la base $(e_1, \ldots, e_d)$. On a $X = PX'$, $Y = PY'$ et

$$\sum_{k=1}^{d} q_k x'_k y'_k = B(X,Y) = X^T SY = X'^T P^T SPY'$$

où l'on a posé $q_k = B(e_k, e_k) > 0$ pour tout k (la première égalité provient de ce que la base des e_i est orthogonale). Comme $\sum_{k=1}^{d} q_k x'_k y'_k = X'^T DY'$ avec $D = \mathrm{Diag}(q_1, \ldots, q_d)$ pour tous X' et Y', en prenant les vecteurs de la base canonique, on en déduit que $P^T SP = D = \mathrm{Diag}(q_1, \ldots, q_d)$. La matrice P^{-1} répond à la question posée.

16. La matrice M est la matrice compagnon du polynôme Z et il est classique de montrer que $\chi_M = Z$ (on peut par exemple dans le déterminant du polynôme caractéristique ajouter à la ligne L_i la ligne XL_{i+1} de $i = n-1$ à $i = 1$, ou bien établir le résultat par récurrence sur d).

17. **(a)** La matrice SM a dans ses $d-1$ premières colonnes les colonnes 2 à d de S. Elle s'écrit donc

$$\begin{pmatrix} t(z^3) & t(z^4) & \ldots & t(z^{d+1}) & s_1 \\ t(z^4) & t(z^5) & & t(z^{d+2}) & s_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ t(z^{d+2}) & t(z^{d+3}) & & t(z^{2d}) & s_d \end{pmatrix}$$

avec, pour tout i,

$$s_i = \sum_{j=1}^{d} a_{j-1} t(z^{i+j}) = t\left(z^{i+1} \sum_{j=1}^{d} a_{j-1} z^{j-1}\right) = t(z^{i+d+1})$$

ce qui prouve la symétrie de la matrice SM.

(b) Posons $D = \mathrm{Diag}(q_1, \dots, q_d)$ et $\Delta = \mathrm{Diag}(\sqrt{q_1}, \dots, \sqrt{q_d})$. On a bien entendu $\Delta^2 = D$. La matrice SM étant symétrique on a donc

$$P^T DPM = SM = (SM)^T = M^T S^T = M^T P^T DP$$

Or $P^T DP = P^T \Delta^2 P = (\Delta P)^T (\Delta P) = R^T R$. Il vient donc $R^T RM = M^T R^T R$ ou encore en multipliant par les inverses, $RMR^{-1} = (R^T)^{-1} M^T R^T = (RMR^{-1})^T$ si bien que RMR^{-1} est symétrique.

18. Considérons $A = \Delta RMR^{-1}\Delta = \Delta^2 PMP^{-1}$ qui est symétrique à coefficients rationnels. Considérons l'entier n et les matrices M_i de la question 3c. On considère $\widetilde{D}$ la diagonale par blocs de taille nd avec des blocs $D = \Delta^2 = \mathrm{Diag}(q_1, \dots, q_d)$ et M' la diagonale par blocs de blocs PMP^{-1}. On a $\chi_{M'} = \chi_M^n = Z^n \in \mathbb{Q}[X]$ et z en est encore racine. En faisant une permutation des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{Q}^{nd}$, on trouve que $\widetilde{D}$ est semblable à la matrice diagonale par blocs de blocs $q_i I_n$. Plus précisément, il existe une matrice de permutation Q de taille nd telle que $Q^{-1}\widetilde{D}Q = \mathrm{Diag}(q_1 I_n, \dots, q_d I_d) = Q^T \widetilde{D} Q$ puisque Q est orthogonale. On note $D' = \mathrm{Diag}(q_1 I_n, \dots, q_d I_d)$ et on considère $B = \widetilde{D}M'$ qui est diagonale par blocs avec des blocs symétriques A. On a $Q^T BQ = Q^T \widetilde{D} Q Q^T M' Q = \mathrm{Diag}(q_1 I_n, \dots, q_d I_d) Q^T M' Q$ qui est encore une matrice symétrique et $\mathrm{Diag}(q_1 I_n, \dots, q_d I_d) = \mathrm{Diag}(M_1^2, \dots, M_d^2) = \mathrm{Diag}(M_1, \dots, M_d)^2$. Notons $N = \mathrm{Diag}(M_1, \dots, M_d)$ qui est une matrice symétrique inversible : $N^{-1} Q^T BQN^{-1}$ est donc symétrique, elle est à coefficients rationnels car N, Q et B le sont. Mais par ailleurs, $N^{-1} Q^T BQN^{-1} = NQ^T M' QN^{-1}$ et cette matrice est semblable à M' qui possède z comme valeur propre, puisque z est racine de son polynôme caractéristique. Il s'ensuit que $N^{-1} Q^T BQN^{-1}$ est une matrice symétrique à coefficients rationnels admettant z comme valeur propre. Cqfd.

ECOLE POLYTECHNIQUE CONCOURS D'ADMISSION 2020
ENS : LYON, PARIS-SACLAY, RENNES

ÉPREUVE ÉCRITE DE MATHÉMATIQUES A, FILIÈRE MP (XLCR)

1. Présentation du sujet

Le sujet de cette année abordait la question suivante : quels sont les nombres qui peuvent être réalisés comme les valeurs propres d'une matrice symétrique à coefficients rationnels ? Le sujet était très bien équilibré et permettait d'aborder l'arithmétique des nombres et des polynômes, le calcul matriciel, l'algèbre linéaire et bilinéaire. Comme l'année précédente, peu de questions admettaient des réponses purement calculatoires et la capacité à développer une argumentation claire et une rédaction précise était nécessaire pour pouvoir traiter une grande partie du sujet.

Dans une première partie, on étudie quelques exemples en montrant que :

— $\sqrt{2}$ est bien une valeur propre d'une matrice symétrique de taille 2 à coefficients rationnels mais ce n'est pas le cas de $\sqrt{3}$;

— $\sqrt[3]{2}$ n'est jamais valeur propre d'une matrice symétrique à coefficients rationnels (quelle que soit la taille de la matrice) mais c'est vrai pour $\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

On construit également des matrices symétriques carrées, commutant entre elles, dont le carré est de la forme $q\mathrm{Id}$ pour tout $q \in \mathbb{Q}$ (l'utilité de ces matrices n'apparaissant qu'à la dernière question du sujet).

La seconde partie traite d'arithmétique classique des polynômes. Il s'agit essentiellement de montrer qu'un polynôme unitaire de degré $d \geq 1$ et de racines $(\lambda_i)_{i\leq d}$ est à coefficients rationnels si et seulement si les sommes $\sum_{i=1}^{d} \lambda_i^p$ sont rationnelles pour tout $p \in \mathbb{N}^*$. On en déduit que l'ensemble des nombres algébriques est stable par somme et produit.

La troisième partie commence par la conséquence immédiate du théorème spectral : les nombres qui peuvent être réalisés comme les valeurs propres d'une matrice symétrique à coefficients rationnels sont nécessairement les racines de polynômes à coefficients rationnels dont toutes les racines sont réelles. On appelle alors $\mathcal{R}$ l'ensemble de ces nombres et on montre que $\mathcal{R}$ est un corps. On s'intéresse également à $\mathcal{R}^+$, ensemble des nombres qui sont des racines de polynômes à coefficients rationnels dont toutes les racines sont réelles positives. On montre que $\mathcal{R}^+$ est stable par somme, produit et inverse et que $x \in \mathcal{R}$ si et seulement si $x^2 \in \mathcal{R}^+$. Cette partie s'appuie largement sur la partie précédente.

Le but de la dernière partie est de montrer la réciproque : tout $x \in \mathcal{R}$ est valeur propre d'une matrice symétrique à coefficients rationnels. On y admet pour cela l'existence d'une (mystérieuse) fonction $t : \mathcal{R} \to \mathbb{Q}$ qui permet de construire une forme quadratique associée à $z \in \mathcal{R}$. On considère par ailleurs la matrice compagnon associée au polynôme minimal de z et on vérifie que le polynôme caractéristique de cette matrice est le polynôme minimal de z puis, à l'aide de la forme quadratique précédente, on construit une matrice symétrique qui a encore le même polynôme caractéristique. Cette matrice n'est pas a priori à coefficients rationnels et il faut utiliser les résultats de la première partie, en travaillant par blocs, pour trouver une matrice symétrique à coefficients rationnels dont z est valeur propre.

2. Commentaires généraux

Les questions du sujet étaient bien posées et précises et les réponses attendues, sans être évidentes, ne nécessitaient pas en général des rédactions complexes de plusieurs pages ni des vérifications fastidieuses. La qualité d'une rédaction se mesure aussi à sa concision et les candidats qui se sont perdus dans des justifications compliquées (par exemple pour les questions 2, 3 a), 6 ou 7) ont souvent perdu trop de temps et d'énergie pour aller loin dans le sujet. Comme l'année passée, trop souvent, les hypothèses des raisonnements par récurrence n'ont pas été écrites explicitement, rendant la démonstration confuse et engendrant des pertes de points facilement évitables.

Rappelons qu'un polynôme peut se décrire à l'aide de ses coefficients ou par ses racines et son coefficient dominant. Selon les questions, l'une de ces deux représentations est plus adaptée. Un candidat au concours de l'École Polytechnique ou des ENS doit être capable de passer de l'une à l'autre sans difficulté. Cela n'a pas été le cas pour certains qui ont perdu du temps, de l'énergie et des points en adoptant le mauvais point de vue (sur les questions 2 a), 6), 7), 11 a) et 12 par exemple).

Les trois premières questions ont, dans l'ensemble, été bien traitées, mais, dès la question 2 c), certains candidats ont commencé à grappiller des points en passant directement à la deuxième partie. Cette stratégie s'est rarement révélée payante. Il est largement préférable d'essayer d'avancer linéairement dans un sujet : un candidat qui aurait parfaitement traité les trois premières parties aurait eu 17 et les premières questions d'un problème, assez simples, permettent en général de mettre le candidat en confiance en rapportant un nombre de points non négligeable.

Quelques copies, une vingtaine, étaient excellentes, certaines ayant traité l'intégralité du sujet.

Rappelons, comme l'année passée, quelques recommandations importantes. Nous insistons sur l'importance d'une rédaction rigoureuse et soignée, ainsi que sur une mise en valeur claire de la structure de la copie (numérotation des questions et présentation adéquate des résultats). Rappelons enfin que, si la pondération des questions est généralement proportionnelle à leur difficulté, il est absolument nécessaire de prendre le temps de fournir une rédaction correcte des réponses données, y compris pour les résultats élémentaires.

3. Examen détaillé des questions

Partie 1.

1. Question abordée dans la majorité des copies. On ne pouvait pas se contenter de donner la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ sans dire au moins que son polynôme caractéristique est $X^2 - 2$ qui admet $\sqrt{2}$ comme racine. Certaines copies proposent des matrices non symétriques, ou à coefficients irrationnels, comme

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Il est regrettable de perdre des points sur cette question.

2a. Question abordée dans la majorité des copies. Il suffisait d'écrire que $\sqrt{3}$ était racine du polynôme caractéristique, mais la grande majorité des candidats a introduit l'autre valeur propre, et raisonné de manière plus ou moins adroite, et plus ou moins correcte, pour aboutir à la conclusion que c'était $-\sqrt{3}$. Ce temps perdu a sans doute empêché les candidats d'aller loin dans la suite du sujet.

Une erreur très fréquente a été d'affirmer que $\sqrt{3}+x$ ne peut être rationnel que si $x=-\sqrt{3}$. Une autre erreur fréquemment faite, de manière plus ou moins explicite, a consisté à affirmer que $\mathbb{Q}\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})=\{0\}$.

2b. Question abordée par quasiment toutes les copies. Il suffisait de considérer les cas possibles modulo 3.

Un certain nombre de candidats ont utilisé le petit théorème de Fermat pour résoudre cette question, ce que le jury a accepté. Par contre, le raisonnement par récurrence que certains ont fait était un choix maladroit. Finalement, certains ont raisonné sur la parité de n, ce qui est un manque certain de compréhension mathématique pour un problème modulo 3 ...

2c. Beaucoup de candidats ont confondu "premiers entre eux dans leur ensemble" et "premiers entre eux deux à deux". Ainsi, après avoir constaté que l'équation imposait que x et y soient divisibles par 3, ils concluaient à l'inexistence du triplet cherché.

2d. Quelques candidats ont oublié que les coefficients des matrices étaient rationnels, et non entiers. Parmi les autres, beaucoup, ayant vu qu'une matrice de $S_2(\mathbb{Q})$ admettant $\sqrt{3}$ comme valeur propre fournissait une solution entière de l'équation diophantienne du 2c, ont cherché à montrer (voire prétendu y arriver) que cette solution était formée de trois entiers premiers entre eux dans leur ensemble, alors qu'il suffisait de les diviser par leur pgcd.

3a. Cette question a été souvent traitée. Elle a parfois permis à des candidats qui l'avaient laissée de côté de traiter la question 1. Que les candidats expérimentent sur leur brouillon pour trouver B est naturel, mais certains ont mis sur leur copie des pages de calculs, concluants ou non, et qui nuisaient à la clarté de la copie.

3b. L'hypothèse de récurrence méritait d'être explicitement posée (notamment en quantifiant le n). La vérification de la commutativité de la famille construite a parfois été faite de manière un peu superficielle. Une erreur assez fréquente a consisté à dire que si une matrice M_{d+1} commute à une matrice M_d qui elle-même commute à $M_1,\dots,M_{d-1}$, alors M_{d+1} commute à $M_1,\dots,M_{d-1}$.

Il n'y avait pas unicité de la solution, mais parmi les solutions qui ont été proposées, celle qui consistait à poser

$$M_{k+1}=\begin{pmatrix} M_k & I_n \\ I_n & -M_k \end{pmatrix}$$

n'en était pas une, car les matrices ainsi construites ne commutent pas. Cela a rendu le jury d'autant plus suspicieux quand la commutativité a été invoquée comme évidente.

3c. Cette question a souvent été bien traitée. Certains candidats ont subitement perdu de vue que l'on cherchait des matrices à coefficients rationnels et ont réintroduit des racines carrées d'entiers.

4a. L'irrationnalité de $\sqrt[3]{2}$ a été en général bien traitée. La suite de la question était plus difficile, car il fallait montrer, d'une manière ou d'une autre, que $X^3 - 2$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$. Peu de candidats ont réussi à le faire de manière complètement satisfaisante, le point délicat étant de montrer que $\sqrt[3]{2}$ n'est pas racine d'un polynôme de degré 2 à coefficients rationnels.

4b. Seuls les candidats qui avaient compris la question précédente ont traité cette question. Il s'agissait d'une application directe du théorème spectral. Il est donc dommage que les copies qui ont su faire la question 10 n'aient pas traité la 4b.

5. Cette question, qui était un peu isolée dans le sujet, a été traitée complètement et assez rapidement par une petite proportion des candidats, et pas abordée par le reste. Certains donnent la bonne matrice de permutation mais se contentent de dire qu'elle admet $e^{\frac{2\pi i}{n}}$ comme valeur propre car $X^n - 1$ est un polynôme annulateur de la matrice (c'est aussi le cas de l'identité ...)

Partie 2.

6. Cette question a été l'une des plus généralement traitées, et bien. Certains candidats ont toutefois purement et simplement oublié de montrer la première égalité.

7. Certains candidats ont cherché à montrer le résultat en utilisant la formule de Taylor avec reste intégral, ce qui pour développer des séries géométriques était un peu maladroit (notons par ailleurs que le terme "série géométrique" n'est apparu que dans de très rares copies). D'autres ont oublié que les racines de P pouvaient être complexes. Le jury a aussi fait face à des invocations de Fubini ou de théorèmes de regroupement des termes d'une série pour une simple linéarité de la limite. Cette question a néanmoins été globalement bien traitée.

8a. Cette question était une des questions assez difficiles du problème. Certains ont étudié les dérivées successives en 0 de f, avec succès. D'autres ont utilisé la matrice compagnon du polynôme P, dont les traces des puissances sont les N_n.

8b. Cette question, plus compliquée que la précédente, était de plus difficile à rédiger, et peu y sont parvenu correctement (il fallait effectuer une récurrence descendante). Beaucoup de candidats ont invoqué de manière un peu vague des "relations racines-coefficients", aboutissant parfois à la conclusion que toutes les racines de P étaient rationnelles.

8c. Dans cette question, beaucoup ont oublié de traiter le cas où 0 était racine, éventuellement multiple, de P.

9. Traitée par une moitié des copies, généralement très bien.

Partie 3.

10. Cette question est l'une de celles où des candidats qui n'avaient traité que peu de questions dans les parties précédentes ont repris le fil du sujet. Elle a été généralement bien traitée, parfois tout de même avec des justifications qui sans être

fausses étaient inutilement longues. Par exemple, un certain nombre de candidats ont invoqué le théorème de Cayley–Hamilton pour prouver que les racines du polynôme caractéristique M sont des valeurs propres de M. Certaines copies ont cru nécessaire de reprouver que les valeurs propres d'une matrice réelle symétrique sont réelles, ce n'était évidemment pas nécessaire (d'autant que le théorème spectral était rappelé en préliminaire).

11a. Plus de la majorité des candidats a traité cette question, en comprenant en général qu'il fallait utiliser la question 9. Toutefois, beaucoup d'imprécisions ont fait perdre des points à des candidats : oubli de montrer que l'ensemble des nombres totalements réels n'est ni vide ni réduit à $\{0\}$ (si l'on montre seulement que $1 \in \mathcal{R}$ mais pas l'opposé, alors on ne peut pas conclure que $0 \in \mathcal{R}$), oubli de montrer que l'opposé d'un nombre totalement réel est totalement réel (plusieurs copies ont affirmé que si α est racine du polynôme P, alors $-\alpha$ est racine de $-P$). Notons que certains ont voulu montrer directement que $x - y \in \mathcal{R}$ ou encore $\frac{x}{y} \in \mathcal{R}$, c'est un petit manque de jugement : ou bien le fait qu'un ensemble est un groupe provient de théorèmes généraux et alors cela ne nécessite pas beaucoup d'arguments, ou bien c'est plus délicat et alors il vaut mieux distinguer la stabilité de la loi interne de l'existence d'un inverse.

11b. Tous les candidats qui ont traité la question précédente ont aussi traité cette question, qui ne posait pas de difficulté supplémentaire particulière. Certaines copies toutefois sont allées trop vite en confondant totalement positif avec totalement réel et positif (par exemple $\sqrt{2}$ n'est pas totalement positif)

12. Cette question a été plutôt mal traitée dans la majorité des copies, les deux implications ayant leur difficultés propres. Par exemple, pour montrer que x est totalement réel, on peut considérer le polynome $P(X^2)$ où P annule x^2, il est alors clair que ce polynôme est à coefficients rationnels … à condition de le voir à l'aide de ses coefficients et pas de ses racines. Dans l'autre sens, il valait mieux passer par une représentation à l'aide de racines.

Partie 4.

Dans toute cette dernière partie, une partie des candidats est passée à côté du problème, qui était l'interaction entre réels et rationnels.

13a. Cette question nécessitait d'avoir bien saisi les définitions assez nombreuses qui figuraient dans le chapeau de la partie, et de les mettre en œuvre correctement. La réussite de cette question a été très corrélée (positivement) à la réussite de la question précédente. Le jury a été satisfait de constater que d'assez nombreux candidats ont su relier la stricte positivité de $B(X, X)$ à la minimalité du polynôme Z.

13b. Question très intéressante et très simple à condition de comprendre que l'inversibilité d'une matrice à coefficients rationnels est un problème rationnel (autrement dit, le noyau est un $\mathbb{Q}$-sous-espace vectoriel par le pivot de Gauss par exemple). De nombreuses réponses à cette question commençaient en considérant une valeur propre de S, ce qui menait à une impasse puisque les vecteurs propres associés n'ont plus de raison d'être rationnels. L'argument, simple, a été trouvé par moins d'une copie sur trois.

14. Beaucoup de tentatives de grappillage à cette question qui illustrent souvent un manque de compréhension des candidats. La difficulté de la question provient surtout du caractère défini de la forme et un peu de son caractère positif. Au lieu de

quoi, de nombreux candidats ont écrit des pages pour justifier le caractère bilinéaire symétrique qui méritait juste une phrase du type “La forme B est symétrique car S est symétrique et bilinéaire par linéarité du produit matriciel”. Cette partie-là ne donnait que très peu de points. Ces mêmes candidats ont alors évacué en une ligne le caractère défini et positif en invoquant 13a et 13b sans comprendre que la positivité est prouvée sur les vecteurs rationnels et nécessite un argument de continuité pour passer aux vecteurs réels et que le caractère défini nécessite d'appliquer le théorème spectral (il serait utile que les candidats aient en tête la forme $x^2 - y^2$ sur $\mathbb{R}^2$).

Très peu de copies sont allées plus loin dans le sujet.

15a. La mention de l'orthogonalisation de Gram–Schmidt a été peu fréquente, peu de copies ont compris et expliqué qu'il fallait renoncer à la normalisation pour rester dans le monde rationnel.

15b. Les candidats qui avaient répondu à la question précédente ont souvent su répondre à celle-ci.

16. Cette question, classique, est l'une de celle qui a été abordée dans presque toutes les copies. Très souvent, les manipulations sur les lignes proposées ne marchent pas (beaucoup de copies proposent $L_1 \leftarrow L_1 + \sum_{i=2}^{d} L_i X^i$ par exemple). Il s'agit d'une question qui est quasiment du cours où le jury ne peut pas se contenter d'approximations.

17a. Quelques candidats ont fait le calcul demandé et su utiliser les propriétés du polynôme Z pour démontrer la symétrie de SM.

17b. Quelques candidats ont su répondre correctement à cette question qui est finalement assez simple.

18. De très rares candidats ont abordé sérieusement cette question. Il est tout de même à noter qu'une solution essentiellement complète a été donnée dans quelques copies.

4. Répartition des notes des candidats français

Notes	Nombre de copies	Pourcentage
$0 \leq N < 4$	171	$10,72\%$
$4 \leq N < 8$	613	$38,43\%$
$8 \leq N < 12$	534	$33,48\%$
$12 \leq N < 16$	220	$13,79\%$
$16 \leq N < 20$	57	$3,57\%$
Total	1595	100%
	Note moyenne	$8,46$
	Écart-type	3,74