Compléments d'algèbre linéaire

Lundi 1er septembre 2025

Table des matières

Table des matières

1. Rappels fondamentaux

1.1. Noyau et image d'une application linéaire

1.1. Noyau et image d'une application linéaire

Definition 1

Soit E et F deux espaces vectoriels et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

- On appelle *noyau* de f l'ensemble

$$\mathrm{Ker}(f) = \{x \in E \mid f(x) = 0\}$$

- On appelle *image* de f l'ensemble

$$\mathrm{Im}(f) = \{f(x)\,,\, x \in E\} = \{y \in F \mid \exists x \in E, y = f(x)\}$$

Remarques :

- $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.
- $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F.
- $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f))$ est le *rang* de f.

1.1. Noyau et image d'une application linéaire

Proposition 1

Soit E et F deux espaces vectoriels et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

- f est injective si, et seulement si, $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$.
- f est surjective si, et seulement si, $\mathrm{Im}(f) = F$.

1.2. Théorème du rang

1.2. Théorème du rang

Theoreme 1

(forme géométrique du théorème du rang) Soient E et F deux espaces vectoriels et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Pour tout supplémentaire H de $\mathrm{Ker}(f)$, $f_{|_H}$ réalise un isomorphisme de H sur $\mathrm{Im}(f)$.

Theoreme 2

(du rang) Si E est de dimension finie, alors $\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rg}(f)$.

1.2. Théorème du rang

Corollaire 1

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie tels que $\dim(E) = \dim(F)$ et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On a alors

$$f \text{ est injective} \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ est surjective} \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ est bijective}$$

Corollaire 2

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = I_E$. Alors f et g sont inversibles et inverse l'une de l'autre.

1.3. Projecteurs et symétries

1.3. Projecteurs et symétries

Definition 2

Soit E un espace vectoriel et soient F et G deux sous-espaces *supplémentaires* de E. Tout vecteur $x \in E$ se décompose donc de façon unique $x = x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$.

- On appelle *projecteur* sur F et parallèlement à G l'application :

$$p : x = x_F + x_G \mapsto x_F$$

- On appelle *symétrie* par rapport à F et parallèlement à G l'application :

$$s : x = x_F + x_G \mapsto x_F - x_G$$

Proposition 2

Soient $p, s : E \to E$.

a) Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(i) p est un projecteur de E ;
(ii) $p \in \mathcal{L}(E)$ et $p^2 = p$.

Dans ces conditions, p est le projecteur sur $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f - Id)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f)$.

b) Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(i) s est une symétrie de E ;
(ii) $s \in \mathcal{L}(E)$ et $s^2 = I_E$.

Dans ces conditions, s est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(f - Id)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f + Id)$.

Table des matières

2. Somme de sous-espaces vectoriels

2.1. Définition d'une somme

2.1. Définition d'une somme

Definition 3

Soit un entier $q \geqslant 2$ et soient $(E_i)_{1 \leqslant i \leqslant q}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E. On appelle *somme* de cette famille l'ensemble :

$$\sum_{i=1}^{q} E_i = \{x_1 + \cdots + x_q \,,\, (x_1 \ldots, x_q) \in E_1 \times \cdots \times E_q\}$$
$$= \{x \in E \mid \exists (x_1 \ldots, x_q) \in E_1 \times \cdots \times E_q,\, x = x_1 + \cdots + x_q\}$$

Proposition 3

Si $E_1, \ldots, E_q$ sont des sous-espaces vectoriels de E, $\sum_{i=1}^{q} E_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

2.2. Somme directe

2.2. Somme directe

Definition 4

La somme $E_1 + \cdots + E_q$ est dite *directe* lorsque :

$$\forall (x_1, \ldots, x_q) \in E_1 \times \cdots \times E_q, \quad \sum_{i=1}^{q} x_i = 0 \Rightarrow x_1 = \cdots = x_q = 0$$

On peut noter alors la somme $E_1 \oplus \cdots \oplus E_q$ ou encore $\displaystyle\bigoplus_{i=1}^{q} E_i$.

Remarque :

Injectivité de $S : (x_1, \ldots, x_q) \mapsto x_1 + \cdots + x_q$

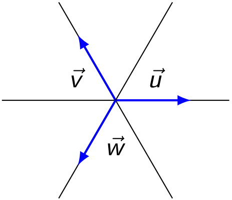
2.2. Somme directe

Exercice 1

On suppose $E_i \neq \{0\}$ pour tout $i \in [\![1, q]\!]$. Montrer que la somme $E_1 + \cdots + E_q$ est directe **ssi** pour tout $e_1 \in E_1, \ldots, e_q \in E_q$ tous non nuls, la famille $(e_1, \ldots, e_q)$ est libre.

Remarque :

$F + G$ est directe **ssi** $F \cap G = \{0\}$. Peut-on généraliser ?



$$\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$$

2.2. Somme directe

Proposition 4

La somme $E_1 + \cdots + E_q$ est directe si, et seulement si :

$$\forall\, i \in [\![1, q-1]\!], \quad \left(E_1 + \cdots + E_i\right) \bigcap E_{i+1} = \{0\}.$$

2.3. Décomposition en somme directe.

2.3. Décomposition en somme directe.

Definition 5

Soient $E_1, \dots, E_q$ des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. On dit qu'ils réalisent une *décomposition en somme directe* de E lorsque la somme $E_1 + \dots + E_q$ est directe et $E = E_1 + \dots + E_q$.

Remarques :

- Notation $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_q$. Cas $q = 2$?
- Pour tout $x \in E$, existence et unicité d'une décomposition
- E et $E_1 \times \dots \times E_q$ isomorphes.

2.4. Somme et dimension finie.

Proposition 5

Soient $E_1, \ldots, E_q$ des sous-espaces vectoriels de dimension finie d'un espace vectoriel E. La somme $E_1 + \cdots + E_q$ est de dimension finie et :

$$\dim\left(\sum_{i=1}^{q} E_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{q} \dim(E_i),$$

avec égalité si, et seulement si, la somme est directe.

Corollaire 3

Supposons E de dimension finie et $\sum_{i=1}^{q} \dim E_i = \dim(E)$. On a alors :

$$\sum_{i=1}^{q} E_i \text{ est directe} \quad \Leftrightarrow \quad E = \sum_{i=1}^{q} E_i \quad \Leftrightarrow \quad E = \bigoplus_{i=1}^{q} E_i$$

2.5. Bases adaptées.

2.5. Bases adaptées.

Definition 6

Soit E un espace vectoriel de dimension finie non nulle, et soit $F \neq \{0\}$ un sous-espace vectoriel de E. On dit qu'une base de E est *adaptée* à F si ses premiers éléments forment une base de F.

Remarque :

Plus explicitement avec $n = \dim(E)$ et $p = \dim(F)$?

2.5. Bases adaptées.

Definition 7

Soit $E_1, \ldots, E_q$ des sous-espaces vectoriels, non réduits à $\{0\}$, réalisant une décomposition en somme directe d'un espace E de dimension finie. On dit qu'une base de E est *adaptée* à cette décomposition lorsque ses éléments consécutifs forment successivement des bases des E_i, pour $1 \leqslant i \leqslant q$.

Remarque :

Plus explicitement avec $n_i = \dim(E_i)$?

2.5. Bases adaptées.

Exemple :

$\mathbb{K}^6 = E_1 \oplus E_2 \oplus E_3$ de base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6)$.
$E_1 = \mathrm{vect}(e_1, e_2),\ E_2 = \mathrm{vect}(e_3),\ E_3 = \mathrm{vect}(e_4, e_5, e_6)$.

$$\mathcal{B} = (\overbrace{e_1, e_2}^{\mathcal{B}_1}, \overbrace{\quad e_3 \quad}^{\mathcal{B}_2}, \overbrace{e_4, e_5, e_6}^{\mathcal{B}_3}).$$

Table des matières

3. Matrices définies par blocs

3.1. Définition et exemples

3.1. Définition et exemples

Definition 8

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. Une matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est définie (ou présentée) *par blocs*, lorsqu'elle est écrite sous la forme :

$$M = \begin{pmatrix} M_{1,1} & \cdots & M_{1,s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{r,1} & \cdots & M_{r,s} \end{pmatrix},$$

où les $M_{i,j}$ sont des matrices de dimensions inférieures, appelées *blocs*.

3.1. Définition et exemples

Exemple :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1) & (2) \\ (3) & (4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{1,1} & M_{1,2} \\ M_{2,1} & M_{2,2} \end{pmatrix}$$

$$M_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ M_{1,2} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix},\ M_{2,1} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix},\ M_{2,2} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

D'autres découpages sont possibles.

3.2. Opérations sur les matrices par blocs

3.2. Opérations sur les matrices par blocs

Proposition 6

Soient M et M' définies par blocs :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \qquad \textbf{et} \qquad M' = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}.$$

Alors, sous réserve que les dimensions soit adéquates :

- $M + \lambda M' = \begin{pmatrix} A + \lambda A' & B + \lambda B' \\ C + \lambda C' & D + \lambda D' \end{pmatrix}$
- $MM' = \begin{pmatrix} AA' + BC' & AB' + BD' \\ CA' + DC' & CB' + DD' \end{pmatrix}.$
- $M^\top = \begin{pmatrix} A^\top & C^\top \\ B^\top & D^\top \end{pmatrix}$

3.3. Déterminant d'une matrice par blocs

3.3. Déterminant d'une matrice par blocs

Proposition 7

Soit un entier $n \geqslant 2$ et soit $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice *triangulaire par blocs* de la forme :

$$T = \begin{pmatrix} A & (*) \\ (0) & B \end{pmatrix},$$

avec deux blocs diagonaux carrés $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$, $1 \leqslant p \leqslant n-1$. On a alors :

$$\det(T) = \det(A)\det(B).$$

Remarque :

Généralisation à un nombre quelconque de blocs diagonaux.

3.4. Transvection par blocs

Exercice 2

Rappeler les trois types d'opérations élémentaires sur les lignes ou sur les colonnes d'une matrice, et le lien avec la multiplication à gauche ou à droite par une certaine matrice inversible.

3.4. Transvection par blocs

Definition 9

On appelle *transvection par blocs* sur une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une opération de la forme :

- $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$, avec L_i et L_j deux blocs disjoints de lignes consécutives de A et de même taille, et $\lambda \in \mathbb{K}$.
- $C_j \leftarrow C_j + \lambda C_i$, avec C_i et C_j deux blocs disjoints de colonnes consécutives de A et de même taille, et $\lambda \in \mathbb{K}$.

Proposition 8

Le rang et le déterminant d'une matrice est invariant lors de l'application d'une transvection par blocs.

Table des matières

4. Éléments propres d'un endomorphisme ou d'une matrice

4.1. Sous-espace stable et endomorphisme induit

Definition 10

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit qu'un sous-espace vectoriel F de E est stable par u lorsque $u(F) \subset F$, c'est-à-dire lorsque :

$$\forall x \in E\,,\quad x \in F \Rightarrow u(x) \in F.$$

Exercice 3

Montrer qu'une droite vectorielle D de E est stable par $u \in \mathcal{L}(E)$ **ssi** $u_{|_D}$ est une homothétie, c'est-à-dire :

$$\exists \lambda \in \mathbb{K}\,,\quad \forall x \in D\,,\quad u(x) = \lambda x.$$

4.1. Sous-espace stable et endomorphisme induit

Proposition 9

Soit E un espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors pour tout $v \in \mathcal{L}(E)$ qui commute avec u, $\mathrm{Ker}(v)$ et $\mathrm{Im}(v)$ sont stables par u.

Definition 11

Soit E un espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E)$, et F un sous-espace vectoriel stable par u. On appelle *endomorphisme induit par u sur F*, l'application :

$$u_F \;:\; \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & u(x) \end{array}.$$

Remarque :

$u_F \in \mathcal{L}(F)$, ne pas confondre avec $u_{|_F} \in \mathcal{L}(F, E)$.

4.1. Sous-espace stable et endomorphisme induit

Proposition 10

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, $u \in \mathcal{L}(E)$, et $\mathcal{B}$ une base de E adaptée à un sous-espace F de dimension $p \geqslant 1$. Alors F est stable par u **ssi** la matrice de u dans $\mathcal{B}$ est de la forme :

$$\operatorname*{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A & B \\ (0) & C \end{pmatrix}, \quad \text{avec } A \in M_p(\mathbb{K})$$

La matrice A représente l'endomorphisme induit par u sur F.

4.2. Vecteur propre et valeur propre, spectre

Definition 12

Soit E un espace vectoriel, et $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que $x \in E$ est un *vecteur propre* lorsque x est non nul et colinéaire à $u(x)$, *ie.* il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$. Ce scalaire λ est appelé *valeur propre* associée à x.

Remarques :

- Un vecteur propre n'est **jamais nul**.
- Un vecteur propre $\rightarrow$ une seule valeur propre
- Une valeur propre $\rightarrow$ une infinité de vecteurs propres
- Équation aux éléments propres : $u(x) = \lambda x$.

4.2. Vecteur propre et valeur propre, spectre

Definition 13

Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, avec E de dimension finie, on appelle *spectre* de u l'ensemble de ses valeurs propres. Il est noté $\mathrm{Sp}(u)$.

Exemples :

Homothéties, projecteurs, symétries.

Exercice 4

Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de l'endomorphisme $D : f \mapsto f'$ de l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

4.3. Sous-espaces propres

4.3. Sous-espaces propres

Proposition 11

Soit E un espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a :

$$\lambda \text{ valeur propre de } u \quad \Leftrightarrow \quad \ker(u - \lambda I_E) \neq \{0\}$$

Definition 14

Soit E un espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$. Pour $\lambda \in \mathbb{K}$ valeur propre de u, on appelle *sous-espace propre* de u *associé* à λ l'ensemble :

$$E_\lambda = \ker(u - \lambda I_E).$$

Remarque :

E_λ est un sev de E. C'est l'ensemble des vecteurs propres pour λ ? ?

4.4. Propriétés des éléments propres

4.4. Propriétés des éléments propres

Proposition 12

soient E un espace vectoriel et $u, v \in \mathcal{L}(E)$. Si u et v commutent, tout sous-espace propre de u est stable par v.

Proposition 13

Soient un entier $q \geqslant 2$ et soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ des valeurs propres distinctes deux à deux d'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors leur sous-espaces propres associés $E_1, \ldots, E_q$ sont en somme directe.

4.4. Propriétés des éléments propres

Corollaire 4

Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.

Corollaire 5

Si E est un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, et si $u \in \mathcal{L}(E)$, le cardinal de $\mathrm{Sp}(u)$ est fini et inférieur ou égal à n.

4.5. Éléments propres d'une matrice

4.5. Éléments propres d'une matrice

Definition 15

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- On dit que $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est un *vecteur propre* de M, s'il est non nul et s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ (la valeur propre) telle que $MX = \lambda X$.
- On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est *valeur propre* de M, s'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ non nul (un vecteur propre) tel que $MX = \lambda X$;
- On appelle *spectre* de M, et on note $\mathrm{Sp}(M)$ l'ensemble des valeurs propres de M.

Remarque :

Équation aux éléments propres $MX = \lambda X$.

Proposition 14

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n > 0$, muni d'une base $\mathcal{B}$, et soit $u \in \mathcal{L}(E)$ représenté par la matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{B}$. Alors :

- $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de u si, et seulement si, λ est valeur propre de M.
- $x \in E$ est vecteur propre de u si, et seulement si, sa représentation matricielle $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{B}$ est vecteur propre de M.

Corollaire 6

Deux matrices semblables ont même spectre.

Remarque :

Indentification de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ à $\mathbb{K}^n$.

Definition 16

Pour $\lambda \in \mathbb{K}$ valeur propre de $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle *sous-espace propre* de M *associé* à λ l'ensemble :

$$E_\lambda = \ker(M - \lambda I_n).$$

C'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$, réunion de $\{0\}$ et de l'ensemble des vecteurs propres de M associés à λ.

4.5. Éléments propres d'une matrice

Remarque :

On peut préciser le corps dans lequel on recherche les valeurs propres (typiquement les valeurs propres complexes d'une matrice réelle).

Proposition 15

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si $\mathbb{K}$ est un sous-corps d'un corps $\mathbb{K}'$, le spectre $\mathrm{Sp}_{|_\mathbb{K}}(M)$ de M dans $\mathbb{K}$ est contenu dans le spectre $\mathrm{Sp}_{|_{\mathbb{K}'}}(M)$ de M dans $\mathbb{K}'$.