

Fiche d'exercices n° 7

Fonctions vectorielles à une variable

Exercice 1.

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et $f : \mathbb{R} \rightarrow E$ dérivable en 0. On suppose

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = 2f(x)$$

Montrer que f est linéaire

Exercice 2.

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{C}^1([a, b[, E)$.

Montrer que f admet un prolongement de classe \mathcal{C}^1 à $[a, b]$ si, et seulement si, f' a une limite en b .

Exercice 3.

Soit $f : [0, 1] \rightarrow E$ dérivable à droite en 0 et vérifiant $f(0) = 0$.

Déterminer la limite quand $n \rightarrow +\infty$ de

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(k/n^2)$$

Exercice 4.

Soit f de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} telle que f et f'' soient bornées.

Montrer, à l'aide d'une formule de Taylor, que

$$\|f'\|_\infty^2 \leq 4\|f\|_\infty\|f''\|_\infty$$

Exercice 5.

Soit $f : [0, 1] \rightarrow E$ de classe \mathcal{C}^2 telle que

$$f(0) = f'(0) = f'(1) = 0 \text{ et } \|f(1)\| = 1$$

Montrer en écrivant deux formules de Taylor que $\|f''\|_\infty \geq 4$.

Exercice 6.

Soit $k \in]0, 1[$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow E$, avec E un espace vectoriel normé de dimension finie, continue en 0 et vérifiant :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x) - f(kx)}{x} \right) = L \in E$$

a) On fixe $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad 0 < |x| \leq \eta \Rightarrow \left\| \frac{f(k^i x) - f(k^{i+1} x)}{x} - k^i L \right\| \leq \varepsilon k^i$$

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in]-\eta, \eta[$,

$$\left\| \frac{f(x) - f(k^n x)}{x} - \frac{1 - k^n}{1 - k} L \right\| \leq \varepsilon \frac{1 - k^n}{1 - k}$$

c) Montrer que f est dérivable en 0 et exprimer $f'(0)$ en fonction de L et k .

Exercice 7.

Soit A une \mathbb{K} -algèbre de dimension finie et $U(A)$ son groupe des éléments inversibles. Soit $f : I \rightarrow A$ dérivable en $a \in I$. On suppose que $f(a) \in U(A)$.

Montrer qu'il existe un voisinage V de a tel que pour tout $t \in I \cap V$, $f(t) \in U(A)$. Montrer que la fonction $f^{-1} : t \mapsto (f(t))^{-1}$ est dérivable en a et qu'on a :

$$(f^{-1})'(a) = -[f(a)]^{-1} f'(a) [f(a)]^{-1}$$

Exercice 8.

Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$ fixé et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}_n[X]$ définie par $f(t) = P(tX)$. À l'aide des applications composantes de f suivant la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$, montrer que f est dérivable sur \mathbb{R} et calculer sa fonction dérivée.

Exercice 9.

Soit $f :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}, 2t \right)$ et soit $s : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $s(x, y) = x + y$. Calculer $s \left(\int_0^{\frac{1}{2}} f(t) dt \right)$.

Exercice 10.

Soit $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{C}^*)$. Montrer que $\left| \int_{[a,b]} f \right| = \int_{[a,b]} |f|$ si, et seulement si $f(x)$ est d'argument constant sur $[a, b]$.

Exercice 11.

Soit f une application continue par morceaux et croissante d'un segment $[a, b]$ vers \mathbb{R} . Pour tout entier $n > 0$, on pose

$$R_n = \int_{[a,b]} f - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f \left(a + k \frac{b-a}{n} \right).$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq R_n \leq \frac{b-a}{n} (f(b) - f(a))$.

Exercice 12.

Montrer que la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \int_0^{\sin^2 x} \arcsin(\sqrt{t}) dt + \int_0^{\cos^2 x} \arccos(\sqrt{t}) dt$$

est constante.

Exercice 13.

Trouver le minimum de $\int_0^1 (f'')^2$ quand f décrit l'ensemble des fonctions de classe \mathcal{C}^2 de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} vérifiant $f(0) = f(1) = 0$ et $f'(0) = \alpha$, où α est un réel donné.