I Inégalités d'interpolation des dérivées

I.A - Cas particulier $\mathrm{K}=1$

La norme infinie des fonctions continues sur un segment (compact) existe bien selon le théorème des bornes atteintes.

Q 1. Soit $f \in \mathcal{C}^1([0,1])$. Soit $x \in [0,1]$.
Selon l'inégalité des accroissements finis appliquée à f dérivable sur l'intervalle $[0,1]$. On a

$$|f(x)-f(x_1)| \leqslant \left\|f'\right\|_\infty \cdot |x-x_1| \leqslant \left\|f'\right\|_\infty$$

Par inégalité triangulaire, on a donc $|f(x)| \leqslant \|f'\|_\infty + 1 \cdot |f(x_1)|$
Comme c'est vrai pour tout $x \in [0,1]$, on a alors

$$\|f\|_\infty \leqslant \left\|f'\right\|_\infty + 1 \cdot |f(x_1)|$$

Ceci montre $\boxed{\text{l'inégalité d'interpolation (I.2) avec } \mathrm{C}=1}$

Q 2. $\boxed{\text{Pour } \mathrm{C} \in]0,1[\text{ et la fonction } f : x \mapsto 1 \text{ l'inégalité d'interpolation (I.2) est fausse}}$ car

$$\|f\|_\infty = 1 > \mathrm{C} = 0 + \mathrm{C} \times 1 = \left\|f'\right\|_\infty + \mathrm{C} \cdot |f(x_1)|$$

I.B - Cas particulier $\mathrm{K}=2$

Q 3. Soit $x \in [0,1]$ et $f \in \mathcal{C}^2([0,1])$. L'égalité des accroissements finis appliquée à f dérivable sur $]x_1, x_2[$ et continue sur $[x_1, x_2]$, nous fournit $c \in]x_1, x_2[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$
Ainsi l'inégalité des accroissements finis appliquée à f' de de classe $\mathcal{C}^1$ nous donne :

$$\left|f'(x) - \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\right| = \left|f'(x)-f'(c)\right| \leqslant \left\|f''\right\|_\infty \cdot |x'-c|$$

Ce qui permet de conclure : $\boxed{\left|f'(x) - \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\right| \leqslant \left\|f''\right\|_\infty}$

Q 4. Avec l'inégalité triangulaire et comme $x_2 - x_1 > 0$, on en déduit que

$$\forall x \in [0,1],\ \left|f'(x)\right| \leqslant \left|\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\right| + \left\|f''\right\|_\infty \leqslant \left\|f''\right\|_\infty + \frac{|f(x_1)|+|f(x_2)|}{x_2-x_1}$$

on a bien $\boxed{\|f'\|_\infty \leqslant \|f''\|_\infty + \dfrac{|f(x_1)|+|f(x_2)|}{x_2-x_1}}$

Q 5. Soit $f \in \mathcal{C}^2([0,1])$. Avec $\mathrm{C} = 1 + \dfrac{1}{x_2-x_1}$, on a $\mathrm{C} \geqslant \dfrac{1}{x_2-x_1}$, on déduit de Q4 que

$$\left\|f'\right\|_\infty \leqslant \left\|f''\right\|_\infty + \mathrm{C}\left(|f(x_1)| + |f(x_2)|\right)$$

On a selon I.2 selon Q2 et Q4 :

$$\|f\|_\infty \leqslant \left\|f'\right\|_\infty + 1 \cdot |f(x_1)| \leqslant \left\|f''\right\|_\infty + \frac{|f(x_1)|+|f(x_2)|}{x_2-x_1} + 1 \cdot |f(x_1)|$$

Comme $\mathrm{C} \geqslant \dfrac{1}{x_2-x_1}$, on a alors $\|f\|_\infty \leqslant \|f''\|_\infty + \mathrm{C}\,|f(x_1)| + \mathrm{C}\,|f(x_2)|$

Dans le cas $\mathrm{K}=2$, on a bien montré $\boxed{\text{l'inégalité d'interpolation (I.3) avec } \mathrm{C} = 1 + \dfrac{1}{x_2-x_1}}$

I.C - Cas général par interpolation de Lagrange

Q 6. On a facilement $\forall \mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathbb{R}_{\mathrm{K}-1}[\mathrm{X}],\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \psi(\lambda \mathrm{P}+\mathrm{Q})=\lambda \Psi(\mathrm{P})+\Psi(\mathrm{Q})$ ainsi $\psi \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}_{\mathrm{K}-1}[\mathrm{X}], \mathbb{R}^{\mathrm{K}}\right)$.

Soit $\mathrm{P} \in \ker(\Psi)$. On a $\Psi(\mathrm{P})=0$.

Donc $\mathrm{P}(x_1)=\cdots=\mathrm{P}(x_{\mathrm{K}})=0$. Ainsi P admet au moins K racines distinctes.

Or $\deg(\mathrm{P}) \leqslant \mathrm{K}-1$, d'où $\mathrm{P}=0$.

L'autre inclusion étant évidente, on a $\ker(\Psi)=\{0\}$ d'où Ψ est injective.

Comme $\dim(\mathbb{R}_{\mathrm{K}-1}[\mathrm{X}])=\mathrm{K}=\dim\left(\mathbb{R}^{\mathrm{K}}\right)$, on conclut que

$$\boxed{\text{l'application } \Psi \text{ est un isomorphisme d'espaces vectoriels}}$$

Q 7. Je note $(e_1, \ldots, e_{\mathrm{K}})$ la base canonique de $\mathbb{R}^{\mathrm{K}}$.

Pour $i \in [\![1, \mathrm{K}]\!]$, je pose $\mathrm{L}_i=\Psi^{-1}(e_i)$ de sorte que

$$\mathrm{L}_i \in \mathbb{R}_{\mathrm{K}-1}[\mathrm{X}] \text{ et } \forall j \in [\![1, \mathrm{K}]\!],\ \mathrm{L}_i(x_j)=\delta_{i,j}$$

Ainsi $\boxed{\mathrm{P}=\sum_{j=1}^{\mathrm{K}} f(x_j)\, \mathrm{L}_j \in \mathbb{R}[\mathrm{X}] \text{ vérifie } \forall \ell \in [\![1, \mathrm{K}]\!],\ \mathrm{P}(x_\ell)=\sum_{j=1}^{\mathrm{K}} f(x_j)\, \delta_{j,\ell}=f(x_\ell)}$

On aurait pu poser $\mathrm{L}_i=\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{\mathrm{K}} \frac{\mathrm{X}-x_j}{x_i-x_j}$ *mais cela ne semble pas être dans l'esprit du sujet.*

Q 8. On procède par récurrence bornée.

<u>L'initialisation</u> est obtenu par Q7, qui nous donne K réels $x_1<\cdots<x_{\mathrm{K}}$ de $[0,1]$ en lesquels $f^{(0)}-\mathrm{P}^{(0)}$ s'annule.

<u>Pour l'hérédité</u> : soit $k \in [\![0, \mathrm{K}-2]\!]$ tel qu'il existe au moins $\mathrm{K}-k$ réels distincts que je note $y_1<\cdots<y_{\mathrm{K}-k}$ de $[0,1]$ en lesquels la fonction $f^{(k)}-\mathrm{P}^{(k)}$ s'annule.

Soit $j \in [\![1, \mathrm{K}-k]\!]$. On a $f^{(k)}-\mathrm{P}^{(k)}$ est dérivable sur $[y_j, y_{j+1}]$ et $f(y_j)=f(y_{j+1})$.

Rolle nous fournit alors $z_j \in\,]y_j, y_{j+1}[$ tel que $\left(f^{(k+1)}-\mathrm{P}^{(k+1)}\right)(z_j)=0$.

Comme $y_1<z_1<y_2<z_2 \cdots<y_{\mathrm{K}-k-1}<z_{\mathrm{K}-k-1}<y_{\mathrm{K}-k}$, on a obtenu $\mathrm{K}-k-1=\mathrm{K}-(k+1)$ points d'annulation de $f^{(k+1)}-\mathrm{P}^{(k+1)}$. Ce que l'on voulait.

On peut <u>conclure</u> la récurrence : pour tout $k \in [\![0, \mathrm{K}-1]\!]$,

$$\boxed{\text{il existe au moins } \mathrm{K}-k \text{ réels distincts de } [0,1] \text{ en lesquels la fonction } f^{(k)}-\mathrm{P}^{(k)} \text{ s'annule}}$$

Q 9. Soit $k \in [\![0, \mathrm{K}-1]\!]$. On a $f^{(k)}-\mathrm{P}^{(k)} \in \mathcal{C}^{\mathrm{K}-k}([0,1], \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$.

On peut appliquer Q1 pour $x_1' \in [0,1]$:

$$\left\|f^{(k)}-\mathrm{P}^{(k)}\right\|_{\infty} \leqslant\left\|\left(f^{(k)}-\mathrm{P}^{(k)}\right)'\right\|_{\infty}+\left|\left(f^{(k)}-\mathrm{P}^{(k)}\right)(x_1')\right|$$

Je choisis $x_1' \in [0,1]$ tel que $\left(f^{(k)}-\mathrm{P}^{(k)}\right)(x_1')=0$, ce qui est possible selon Q8 car $\mathrm{K}-k \geqslant 1$.

On en déduit l'inégalité $\boxed{\left\|f^{(k)}-\mathrm{P}^{(k)}\right\|_{\infty} \leqslant\left\|f^{(k+1)}-\mathrm{P}^{(k+1)}\right\|_{\infty}}$

Q 10. Par croissance de la suite $\left(\left\|f^{(k)}-\mathrm{P}^{(k)}\right\|_\infty\right)_{0\leqslant k\leqslant \mathrm{K}}$ (selon Q9), et comme $\mathrm{P}^{(\mathrm{K})}=0$ car $\deg(\mathrm{P})\leqslant \mathrm{K}-1$, alors :

$$\forall k\in [\![0,\mathrm{K}-1]\!],\ \left\|f^{(k)}-\mathrm{P}^{(k)}\right\|_\infty \leqslant \left\|f^{(\mathrm{K})}-\mathrm{P}^{(\mathrm{K})}\right\|_\infty = \left\|f^{(\mathrm{K})}\right\|_\infty$$

Par inégalité triangulaire, on a donc $\forall k\in [\![0,\mathrm{K}-1]\!],\ \left\|f^{(k)}\right\|_\infty \leqslant \left\|f^{(\mathrm{K})}\right\|_\infty + \left\|\mathrm{P}^{(k)}\right\|_\infty$. Ainsi

$$\forall k\in [\![0,\mathrm{K}-1]\!],\ \left\|f^{(k)}\right\|_\infty \leqslant \left\|f^{(\mathrm{K})}\right\|_\infty + \sum_{i=0}^{\mathrm{K}-1}\left\|\mathrm{P}^{(i)}\right\|_\infty$$

En utilisant Q7, on a

$$\forall i\in [\![0,\mathrm{K}-1]\!],\ \left\|\mathrm{P}^{(i)}\right\|_\infty = \left\|\sum_{\ell=1}^{\mathrm{K}} f(x_\ell)\mathrm{L}_\ell^{(i)}\right\|_\infty \leqslant \sum_{\ell=1}^{\mathrm{K}}|f(x_\ell)|\left\|\mathrm{L}_\ell^{(i)}\right\|_\infty \leqslant \left(\max_{1\leqslant j\leqslant \mathrm{K}}\left\|\mathrm{L}_j^{(i)}\right\|_\infty\right)\sum_{\ell=1}^{\mathrm{K}}|f(x_\ell)|$$

En posant $\mathrm{C}=\displaystyle\sum_{i=0}^{\mathrm{K}-1}\left(\max_{1\leqslant j\leqslant \mathrm{K}}\left\|\mathrm{L}_j^{(i)}\right\|_\infty\right)$ qui ne dépend que de $x_1,\ldots,x_{\mathrm{K}}$, on a :

$$\forall k\in [\![0,\mathrm{K}-1]\!],\ \left\|f^{(k)}\right\|_\infty \leqslant \left\|f^{(\mathrm{K})}\right\|_\infty + \mathrm{C}\sum_{\ell=1}^{\mathrm{K}}|f(x_\ell)|$$

On trouvé $\boxed{\text{une constante C > 0 pour laquelle l'inégalité d'interpolation (I.1) est vérifiée}}$

II Dérivation $\mathcal{C}^{\mathrm{K}}$ pour les séries de fonctions

II.A - Énoncé général

Q 11. Soit $k\in [\![0,\mathrm{K}-1]\!]$. Q10 nous donne $\mathrm{C}>0$ tel que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \left\|f_n^{(k)}\right\|_\infty \leqslant \left\|f_n^{(\mathrm{K})}\right\|_\infty + \mathrm{C}\sum_{\ell=1}^{\mathrm{K}}|f_n(x_\ell)|$$

Les séries $\sum\left\|f_n^{(\mathrm{K})}\right\|_\infty$ et $\sum|f_n(x_\ell)|$ $(1\leqslant \ell\leqslant \mathrm{K})$ sont convergentes selon (H1) et (H2)
donc la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\left(\left\|f_n^{(\mathrm{K})}\right\|_\infty + \mathrm{C}\sum_{\ell=1}^{\mathrm{K}}|f_n(x_\ell)|\right)$ converge par linéarité
Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\left\|f_n^{(k)}\right\|_\infty$ converge.
d'où $\boxed{\text{la série } \sum f_n^{(k)} \text{ converge normalement sur } [0,1]}$ par définition.

Q 12. Je définis la fonction $\sigma\ :\ \left\{\begin{array}{ccc}[0,1] & \longrightarrow & [a,b] \\ t & \longmapsto & (1-t)a+tb\end{array}\right.$.

De sorte que σ est continue strictement croissante sur l'intervalle $[0,1]$ telle que $\sigma(0)=a$ et $\sigma(1)=b$.
Ainsi σ est bijective de $[0,1]$ vers $[a,b]$.
Je pose pour $n\in\mathbb{N},\ g_n=f_n\circ\sigma$ et pour $\ell\in[\![1,\mathrm{K}]\!]$, $y_\ell=\sigma^{-1}(x_\ell)$. De sorte que $g_n^{(k)}(y_\ell)=(b-a)^k f_n^{(k)}(x_\ell)$.
Comme σ est affine, g_n est de classe $\mathcal{C}^{\mathrm{K}}$ de dérivées : $\forall k\in[\![0,\mathrm{K}]\!],\ g_n^{(k)}=(b-a)^k f_n^{(k)}\circ\sigma$.
Soit $h:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction bornée. Je note $\|h\|_{\infty,[a,b]}=\sup\limits_{t\in[a,b]}|h(t)|$.
On remarque que comme σ est bijective que : $\{|h(t)|\mid t\in[a,b]\}=\{|h(\sigma(x))|\mid x\in[0,1]\}$.
Ainsi $\|h\|_{\infty,[a,b]}=\|h\circ\sigma\|_{\infty,[0,1]}=\|h\circ\sigma\|_\infty$. D'où

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall k\in[\![0,\mathrm{K}]\!],\ \|g_n^{(k)}\|_\infty=\|(b-a)^k f_n^{(k)}\|_{\infty,[a,b]}=(b-a)^k\|f_n^{(k)}\|_{\infty,[a,b]}$$

donc $\forall n\in\mathbb{N},\ \forall k\in[\![0,\mathrm{K}]\!],\ \|f_n^{(k)}\|_{\infty,[a,b]}=\dfrac{1}{(b-a)^k}\|g_n^{(k)}\|_\infty \qquad (\star)$.

On vérifie maintenant les hypothèses pour utiliser Q11 :

— $y_1<\cdots<y_{\mathrm{K}}$ sont des réels distincts de l'intervalle $[0,1]$ car σ^{-1} est également strictement croissante.
— (g_n) est une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^{\mathrm{K}}$ sur $[0,1]$ vérifiant les deux hypothèses :

(H1) la série de fonctions $\sum g_n^{(\mathrm{K})}$ converge normalement sur $[a,b]$;
car $\sum\|g_n^{(\mathrm{K})}\|$ converge selon $(\star)$ et car $\sum\|f_n^{(\mathrm{K})}\|_{\infty,[a,b]}$ converge.
(H2) pour tout $\ell\in[\![1,\mathrm{K}]\!]$ la série numérique $\sum g_n(y_\ell)=\sum f_n(x_\ell)$ est absolument convergente.

Ainsi la série $\sum g_n^{(k)}$ converge normalement sur $[0,1]$, pour tout $k\in[\![0,\mathrm{K}-1]\!]$.
D'où pour $\sum\|f_n^{(k)}\|_{\infty,[a,b]}$ converge pour tout $k\in[\![0,\mathrm{K}-1]\!]$ en utilisant $(\star)$
d'où $\boxed{\text{la série } \sum f_n^{(k)} \text{ converge normalement sur } [a,b], \text{ pour tout } k\in[\![0,\mathrm{K}-1]\!]}$

Q 13. **(i)** Pour tout $n\in\mathbb{N}$, la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^{\mathrm{K}}$ sur $[a,b]$.
(ii) Soit $k\in[\![0,\mathrm{K}-1]\!]$.
La série de fonction $\sum f_n^{(k)}$ converge normalement donc simplement sur $[a,b]$ selon Q12 de somme F_k.
(ii) La série de fonction $\sum f_n^{(\mathrm{K})}$ converge normalement donc uniformément sur $[a,b]$ de somme F_{K}.
Avec (i), (ii) et (iii), par théorème de cours :

$$\boxed{\mathrm{F}_0 \text{ est de classe } \mathcal{C}^{\mathrm{K}} \text{ sur } [a,b] \text{ et } \mathrm{F}_0^{(k)}=\mathrm{F}_k \text{ pour tout } k\in[\![1,\mathrm{K}]\!]}$$

II.B - Application sur un exemple

Q 14. Soit $n\in\mathbb{N}^\star$.

Existence : La fonction $x\longmapsto(-1)^n2^{-nx^2}$ est continue par théorème généraux sur l'intervalle $]0,+\infty[$.
Le théorème fondamental nous fournit alors une primitive sur $]0,+\infty[$ qui y est donc continue.
Cette primitive admet donc une primitive g_n vérifiant donc $\forall x>0,\ g_n''(x)=(-1)^n2^{-nx^2}$
Je considère alors la fonction affine h_n telle que $h_n(1)=g_n(1)$ et $h_n(2)=g_n(2)$ et je pose $f_n=g_n-h_n$
Alors f_n est de classe $f_n\in\mathcal{C}^2(]0,+\infty[)$ vérifiant $f_n(1)=0,\ f_n(2)=0$ et $\forall x>0,\ f_n''(x)=(-1)^n2^{-nx^2}$

Unicité : On note f_n et g_n vérifiant la condition voulue et je note $d_n = f_n - g_n$.
On a alors $d_n \in \mathcal{C}^2(]0,+\infty[)$ vérifiant $d_n(1) = 0$, $d_n(2) = 0$ et $\forall x > 0,\ d_n''(x) = 0$.
Donc d_n est polynomiale de degré $\leqslant 1$ avec au moins deux racines, d'où $d_n = 0$
Ainsi $f_n = g_n$ ce qui prouve l'unicité.

$$\boxed{\text{Il existe une unique fonction } f_n \in \mathcal{C}^2(]0,+\infty[) \text{ vérifiant } f_n(1)=0,\ f_n(2)=0 \text{ et } \forall x>0,\ f_n''(x) = (-1)^n 2^{-nx^2}}$$

Q 15. Soit $[\alpha, \beta]$ un segment de $]0,+\infty[$.
Je pose $a = \min(\alpha, 1)$ et $b = \max(\beta, 1)$.
On veut appliquer II.A sur le segment $[a,b]$ avec $\mathrm{K} = 2$:

- $1 < 2$ sont des réels distincts de $[a,b]$;
- $(f_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$ vérifiant les deux hypothèses :

  (H1) La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n^{(2)}$ converge normalement sur $[a,b]$ car

$$\forall x \in [a,b],\ \left|f_n^{(2)}(x)\right| \leqslant 2^{-na^2}$$

  et car la série géométrique $\sum\limits_{n\geqslant 1} 2^{-na^2}$ converge car $2^{-a^2} \in [0,1[$.

  (H2) pour tout $\ell \in \{1,2\}$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n(x_\ell)$ converge absolument car $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_n(x_\ell) = 0$

Ainsi pour tout $i \in [\![0,2]\!]$, $\sum f_n^{(i)}$ converge normalement sur $[a,b]$ de somme F qui est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$ vérifiant $\forall x \in [a,b]$, $\mathrm{F}^{(i)}(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n^{(i)}(x)$.
Comme c'est valable sur $[a,b]$, c'est valable sur $[\alpha,\beta]$ et donc

$$\boxed{\text{la série de fonctions } \sum f_n \text{ converge normalement sur tout segment inclus dans }]0,+\infty[\text{ et F est de classe } \mathcal{C}^2}$$

car F est de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage de tout point de $]0,+\infty[$.

Q 16. Par somme géométrique : $\boxed{\mathrm{F}''(x) = \dfrac{(-1)^1 2^{-x^2}}{1+2^{-x^2}} = \dfrac{-1}{1+2^{x^2}}}$

Q 16. On définit $\mathrm{G} : t \longmapsto \mathrm{F}(t+1)$ sur $[0,1]$ qui est de classe $\mathcal{C}^2$ car F l'est sur $[1,2]$.
D'après Q10 (ou Q5), comme $0 < 1$ dans $[0,1]$, alors il existe $\mathrm{C} > 0$ indépendant de G tel que

$$\|\mathrm{G}\|_\infty \leqslant \|\mathrm{G}''\|_\infty + \mathrm{C}\left(|\mathrm{G}(0)| + |\mathrm{G}(1)|\right)$$

or on a $\mathrm{G}(0) = \mathrm{F}(1) = \sum\limits_{n=1} f_n(1) = 0$ et de même $\mathrm{G}(1) = 0$
d'où $\|\mathrm{G}\|_\infty \leqslant \|\mathrm{G}''\|_\infty$. Par ailleurs, on a

$$\forall t \in [0,1],\ \mathrm{G}''(t) = \mathrm{F}''(t+1) = \frac{-1}{1+2^{(t+1)^2}}$$

d'où $\forall t \in [0,1],\ |\mathrm{G}''(t)| = \dfrac{1}{1+2^{(t+1)^2}} \leqslant \dfrac{1}{1+2^{(0+1)^2}} = \dfrac{1}{3}$. Ainsi

$$\forall t \in [0,1],\ |\mathrm{G}(t)| \leqslant \|\mathrm{G}\|_\infty \leqslant \|\mathrm{G}''\|_\infty \leqslant \frac{1}{3}$$

D'où $\boxed{\forall x \in [1,2],\ |\mathrm{F}(x)| = |\mathrm{G}(x-1)| \leqslant \dfrac{1}{3}}$

III Convergence d'une série aléatoire de Rademacher

III.A - Construction de la suite $(\phi(j))_{j\in\mathbb{N}}$ *et majoration de* $\mathbb{P}(\mathrm{A}_j)$

Q 18. Comme la série $\sum a_n^2$ converge, la suite des restes converges vers 0 : $\sum\limits_{n=p}^{+\infty} a_n^2 \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$.

Soit $j \in \mathbb{N}$. Cela nous fournit $\psi(j) \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall k \in \mathbb{N},\ k \geqslant \psi(j) \Longrightarrow \sum_{n=p}^{+\infty} a_n^2 \leqslant \frac{1}{8^j}$$

On construit alors ϕ par :

$\varphi(0) = \psi(0)$ et la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \phi(n) = 1 + \max\{\psi(n), \phi(0), \dots, \phi(n-1)\}$

Ainsi $\boxed{\text{la suite } \phi \text{ est bien strictement croissante et } \forall j \in \mathbb{N},\quad \sum\limits_{n>\phi(j)}^{+\infty} a_n^2 \leqslant \frac{1}{8^j}}$

Q 19. Chaque X_n admet un moment d'ordre 2 car bornée

d'où par linéarité, les S_n admettent un moment d'ordre 2.

On a $\mathrm{S}_{\phi(j+1)} - \mathrm{S}_{\phi(j)} = \sum\limits_{n=\phi(j)+1}^{\phi(j+1)} a_n \mathrm{X}_n$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathbb{E}(\mathrm{X}_n) = 0$ et $\mathbb{V}(\mathrm{X}_n) = \mathbb{E}(\mathrm{X}_n^2) - \mathbb{E}(\mathrm{X}_n)^2 = \mathbb{E}(1) - 0^2 = 1$

Par linéarité, on a :

$$\mathbb{E}\left(\mathrm{S}_{\phi(j+1)} - \mathrm{S}_{\phi(j)}\right) = \sum_{n=\phi(j)+1}^{\phi(j+1)} a_n \mathbb{E}(\mathrm{X}_n) = 0$$

Comme les X_n sont deux à deux indépendants, il en est de même des $a_n\mathrm{X}_n$ par le lemme des coalitions.

On a donc

$$\mathbb{V}\left(\mathrm{S}_{\phi(j+1)} - \mathrm{S}_{\phi(j)}\right) = \sum_{n=\phi(j)+1}^{\phi(j+1)} \mathbb{V}(a_n\mathrm{X}_n) = \sum_{n=\phi(j)+1}^{\phi(j+1)} a_n^2 \mathbb{V}(\mathrm{X}_n)$$

Ainsi $\boxed{\mathbb{E}\left(\mathrm{S}_{\phi(j+1)} - \mathrm{S}_{\phi(j)}\right) = 0 \text{ et } \mathbb{V}\left(\mathrm{S}_{\phi(j+1)} - \mathrm{S}_{\phi(j)}\right) = \sum\limits_{n=\phi(j)+1}^{\phi(j+1)} a_n^2}$

Q 20. On utilise l'inégalité de Pafnouty et de Jules-Irénée, avec $2^{-j} > 0$:

$$\mathbb{P}\left(\left|\mathrm{S}_{\phi(j+1)} - \mathrm{S}_{\phi(j)} - \mathbb{E}\left(\mathrm{S}_{\phi(j+1)} - \mathrm{S}_{\phi(j)}\right)\right| \geqslant 2^{-j}\right) \leqslant \frac{\mathbb{V}\left(\mathrm{S}_{\phi(j+1)} - \mathrm{S}_{\phi(j)}\right)}{\left(2^{-j}\right)^2}$$

donc selon Q19 :

$$\mathbb{P}\left(\left|\mathrm{S}_{\phi(j+1)} - \mathrm{S}_{\phi(j)}\right| \geqslant 2^{-j}\right) \leqslant 2^{2j} \sum_{n>\phi(j)} a_n^2$$

Ainsi par définition de A_j et avec Q18, on a $\boxed{\text{la majoration } \mathbb{P}(\mathrm{A}_j) \leqslant 2^{-j}}$

III.B - Inégalité maximale de Lévy $\mathbb{P}(\mathrm{B}_j) \leqslant 2\mathbb{P}(\mathrm{A}_j)$

Q 21. Soit $j \in \mathbb{N}$.

$\supseteq$ **:** Soit $m \in [\![\phi(j)+1, \phi(j+1)]\!]$. On remarque que

$$\mathrm{B}_j = \bigcup_{n=\phi(j)+1}^{\phi(j+1)} \left\{\left|\mathrm{S}_n - \mathrm{S}_{\phi(j)}\right| > 2^{-j}\right\} \quad \text{et} \quad \mathrm{B}_{j,m} = \left\{\left|\mathrm{S}_m - \mathrm{S}_{\phi(j)}\right| > 2^{-j}\right\} \bigcap \left(\bigcap_{n=\phi(j)}^{m-1} \left\{\left|\mathrm{S}_n - \mathrm{S}_{\phi(j)}\right| \leqslant 2^{-j}\right\}\right)$$

d'où $\mathrm{B}_{j,m} \subset \mathrm{B}_j$. D'où

$$\bigcup_{\phi(j)<m\leqslant\phi(j+1)} \mathrm{B}_{j,m} \subset \mathrm{B}_j$$

$\subseteq$ **:** Soit $\omega \in \mathrm{B}_j$.
Alors l'ensemble $\left\{n \in [\![\phi(j)+1, \phi(j+1)]\!] \;\middle|\; \left|\mathrm{S}_n(\omega) - \mathrm{S}_{\phi(j)}(\omega)\right| > 2^{-j}\right\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$ ~~majorée par $\phi(j+1)$~~. Cet ensemble admet donc un minimum que je note m de sorte que

$$m \in [\![\phi(j)+1, \phi(j+1)]\!] \quad \text{et} \quad \forall n \in [\![\phi(j), m-1]\!], \quad \left|\mathrm{S}_n(\omega) - \mathrm{S}_{\phi(j)}(\omega)\right| \leqslant 2^{-j}$$

Ainsi $\omega \in \bigcup_{\phi(j)<m\leqslant\phi(j+1)} \mathrm{B}_{j,m}$. On a prouvé :

$$\mathrm{B}_j \subset \bigcup_{\phi(j)<m\leqslant\phi(j+1)} \mathrm{B}_{j,m}$$

disjoints deux à deux : Soit $m, m' \in \mathbb{N}$ tels que $\phi(j) < m < m' \leqslant \phi(j+1)$.
On a alors

$$\mathrm{B}_{j,m} \subset \left\{\left|\mathrm{S}_m - \mathrm{S}_{\phi(j)}\right| > 2^{-j}\right\} \quad \text{et} \quad \mathrm{B}_{j,m'} \subset \left\{\left|\mathrm{S}_m - \mathrm{S}_{\phi(j)}\right| \leqslant 2^{-j}\right\}$$

D'où

$$\mathrm{B}_{j,m} \bigcap \mathrm{B}_{j,m'} = \emptyset$$

Ainsi $\boxed{\text{les évènements } \mathrm{B}_{j,m}, \text{ pour } m \text{ parcourant } [\![\phi(j)+1, \phi(j+1)]\!], \text{ sont disjoints deux à deux}}$

et on a l'égalité d'évènements $\boxed{\mathrm{B}_j = \bigcup_{\phi(j)<m\leqslant\phi(j+1)} \mathrm{B}_{j,m}}$

Q 22. À l'aide de l'expression de B_j (Q21), on a :

$$\mathrm{A}_j = \left\{\left|\mathrm{S}_{\phi(j+1)} - \mathrm{S}_{\phi(j)}\right| > 2^{-j}\right\} \subset \mathrm{B}_j$$

donc à l'aide du résultat précédent

$$\mathrm{A}_j = \mathrm{A}_j \cap \mathrm{B}_j = \bigcup_{\phi(j)<m\leqslant\phi(j+1)} (\mathrm{A}_j \cap \mathrm{B}_{j,m})$$

Comme la réunion est disjointe (Q21), on a bien la formule $\boxed{\mathbb{P}(\mathrm{A}_j) = \sum_{m=\phi(j)+1}^{\phi(j+1)} \mathbb{P}(\mathrm{A}_j \cap \mathrm{B}_{j,m})}$

Q 23. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a $\left\{\left|\alpha \mathrm{S}_{\phi(j+1)} - \alpha \mathrm{S}_m + \mathrm{S}_m - \mathrm{S}_{\phi(j)}\right| > 2^{-j}\right\} = \left\{\left|\alpha \sum\limits_{n=m+1}^{\phi(j+1)} \mathrm{X}_n a_n + \sum\limits_{n=\phi(j)+1}^{m} \mathrm{X}_n a_n\right| > 2^{-j}\right\}$

et $\mathrm{B}_{j,m} = \left\{\left|\sum\limits_{n=\phi(j)+1}^{m} \mathrm{X}_n a_n\right| > 2^{-j}\right\} \bigcap \left(\bigcap\limits_{k=\phi(j)+1}^{m-1} \left\{\left|\sum\limits_{n=\phi(j)+1}^{k} \mathrm{X}_n a_n\right| \leqslant 2^{-j}\right\}\right)$ car $\left\{\left|\sum\limits_{n=\phi(j)+1}^{\phi(j)} \mathrm{X}_n a_n\right| \leqslant 2^{-j}\right\} = \Omega$

On peut alors trouver une partie E_α de $\{-1,1\}^{\phi(j+1)-\phi(j)}$ tel que

$$\left\{\left|\alpha \mathrm{S}_{\phi(j+1)} - \alpha \mathrm{S}_m + \mathrm{S}_m - \mathrm{S}_{\phi(j)}\right| > 2^{-j}\right\} \cap \mathrm{B}_{j,m} = \left\{\left(\mathrm{X}_{\phi(j)+1}, \ldots, \mathrm{X}_{\phi(j+1)}\right) \in \mathrm{E}\right\}$$

Soit $e = \left(e_{\phi(j)+1}, \ldots, e_{\phi(j+1)}\right) \in \{-1,1\}^{\phi(j+1)-\phi(j)}$.

Par ailleurs, par indépendance mutuelle des X_i, on a

$$\mathbb{P}\left(\left\{\left(\mathrm{X}_{\phi(j)+1}, \ldots, \mathrm{X}_{\phi(j+1)}\right) = e\right\}\right) = \prod_{i=\phi(j)+1}^{\phi(j+1)} \mathbb{P}\left(\{\mathrm{X}_i = e_i\}\right) = \frac{1}{2^{\phi(j+1)-\phi(j)}} = \frac{1}{\left|\{-1,1\}^{\phi(j+1)-\phi(j)}\right|}$$

Ainsi le vecteur $\left(\mathrm{X}_{\phi(j)+1}, \ldots, \mathrm{X}_{\phi(j+1)}\right)$ suit la loi uniforme sur $\{-1,1\}^{\phi(j+1)-\phi(j)}$. D'où

$$\mathbb{P}\left(\left\{\left(\mathrm{X}_{\phi(j)+1}, \ldots, \mathrm{X}_{\phi(j+1)}\right) \in \mathrm{E}_\alpha\right\}\right) = \frac{|\mathrm{E}_\alpha|}{\left|\{-1,1\}^{\phi(j+1)-\phi(j)}\right|}$$

d'où $2^{\phi(j+1)-\phi(j)} \mathbb{P}\left(\left\{\left|\alpha \mathrm{S}_{\phi(j+1)} - \alpha \mathrm{S}_m + \mathrm{S}_m - \mathrm{S}_{\phi(j)}\right| > 2^{-j}\right\} \cap \mathrm{B}_{j,m}\right) = |\mathrm{E}_\alpha|$

Ainsi $\boxed{\text{la fonction } \alpha \mapsto 2^{\phi(j+1)-\phi(j)} \mathbb{P}\left(\left\{\left|\alpha \mathrm{S}_{\phi(j+1)} - \alpha \mathrm{S}_m + \mathrm{S}_m - \mathrm{S}_{\phi(j)}\right| > 2^{-j}\right\} \cap \mathrm{B}_{j,m}\right) \text{ est à valeurs dans } \mathbb{N}}$

Par ailleurs, on remarque que

$$\left(e_{\phi(j)+1}, \ldots, e_m, e_{m+1}, \ldots, e_{\phi(j+1)}\right) \in \mathrm{E}_\alpha \Longleftrightarrow \left(e_{\phi(j)+1}, \ldots, e_m, -e_{m+1}, \ldots, -e_{\phi(j+1)}\right) \in \mathrm{E}_{-\alpha}$$

Ainsi l'application $\left(e_{\phi(j)+1}, \ldots, e_m, e_{m+1}, \ldots, e_{\phi(j+1)}\right) \in \mathrm{E}_\alpha \mapsto \left(e_{\phi(j)+1}, \ldots, e_m, -e_{m+1}, \ldots, -e_{\phi(j+1)}\right) \in \mathrm{E}_{-\alpha}$ est bijective.

D'où $|\mathrm{E}_\alpha| = |\mathrm{E}_{-\alpha}|$ d'où $\boxed{\text{la fonction à valeurs entières est paire}}$

Q 24. Soit $m \in [\![\phi(j)+1, \phi(j+1)]\!]$. Soit $\omega \in \mathrm{B}_{j,m}$. On a alors $\left|\mathrm{S}_m(\omega) - \mathrm{S}_{\phi(j)}(\omega)\right| > 2^{-j}$.

Si $\mathrm{S}_{\phi(j+1)}(\omega) - \mathrm{S}_m(\omega)$ est du même signe de que $\mathrm{S}_m(\omega) - \mathrm{S}_{\phi(j)}(\omega)$ alors :

$$\left|1 \cdot \mathrm{S}_{\phi(j+1)}(\omega) - 1 \cdot \mathrm{S}_m(\omega) + \mathrm{S}_m(\omega) - \mathrm{S}_{\phi(j)}(\omega)\right| > 2^{-j}$$

Sinon on a : $\left|(-1) \cdot \mathrm{S}_{\phi(j+1)}(\omega) - (-1) \cdot \mathrm{S}_m(\omega) + \mathrm{S}_m(\omega) - \mathrm{S}_{\phi(j)}(\omega)\right| > 2^{-j}$.

On a ainsi prouvé que :

$$\mathrm{B}_{j,m} \subset \bigcup_{\alpha \in \{-1,1\}} \left\{\left|\alpha \mathrm{S}_{\phi(j+1)} - \alpha \mathrm{S}_m + \mathrm{S}_m - \mathrm{S}_{\phi(j)}\right| > 2^{-j}\right\}$$

Ainsi $\mathrm{B}_{j,m} \subset \bigcup\limits_{\alpha \in \{-1,1\}} \left(\left\{\left|\alpha \mathrm{S}_{\phi(j+1)} - \alpha \mathrm{S}_m + \mathrm{S}_m - \mathrm{S}_{\phi(j)}\right| > 2^{-j}\right\} \bigcap \mathrm{B}_{j,m}\right)$

Avec Q21, on obtient

$$\mathrm{B}_j \subset \bigcup_{\substack{\alpha \in \{-1,1\} \\ \phi(j)+1 \leqslant m \leqslant \phi(j+1)}} \left(\left\{\left|\alpha \mathrm{S}_{\phi(j+1)} - \alpha \mathrm{S}_m + \mathrm{S}_m - \mathrm{S}_{\phi(j)}\right| > 2^{-j}\right\} \bigcap \mathrm{B}_{j,m}\right)$$

Selon les termes étranges de l'énoncé, on montré que :

si l'évènement B_j se réalise, alors il existe $m \in [\![\phi(j)+1, \phi(j+1)]\!]$ et $\alpha \in \{-1,+1\}$ tels que

$$\boxed{\text{l'évènement } \left\{\left|\alpha \mathrm{S}_{\phi(j+1)} - \alpha \mathrm{S}_m + \mathrm{S}_m - \mathrm{S}_{\phi(j)}\right| > 2^{-j}\right\} \cap \mathrm{B}_{j,m} \text{ se réalise également}}$$

Q 25. En utilisant l'inclusion de la question précédente, la formule de Boole donne :

$$\mathbb{P}\left(\mathrm{B}_j\right) \leqslant \sum_{\substack{\alpha \in\{-1,1\} \\ \phi(j)+1 \leqslant m \leqslant \phi(j+1)}} \mathbb{P}\left(\left\{\left|\alpha \mathrm{S}_{\phi(j+1)}-\alpha \mathrm{S}_m+\mathrm{S}_m-\mathrm{S}_{\phi(j)}\right|>2^{-j}\right\} \bigcap \mathrm{B}_{j, m}\right)$$

En utilisant la parité de la fonction de Q23, on a (en gardant $\alpha=1$) :

$$\mathbb{P}\left(\mathrm{B}_j\right) \leqslant 2 \sum_{m=\phi(j)+1}^{\phi(j+1)} \mathbb{P}\left(\left\{\left|\mathrm{S}_{\phi(j+1)}-\mathrm{S}_{\phi(j)}\right|>2^{-j}\right\} \bigcap \mathrm{B}_{j, m}\right)=2 \sum_{m=\phi(j)+1}^{\phi(j+1)} \mathbb{P}\left(\mathrm{A}_j \bigcap \mathrm{B}_{j, m}\right)$$

À l'aide de Q22, on conclut que $\boxed{\mathbb{P}\left(\mathrm{B}_j\right) \leqslant 2 \mathbb{P}\left(\mathrm{A}_j\right)}$

III.C - Convergence de la série aléatoire $\sum \mathrm{X}_n a_n$

Q 26. Soit $\mathrm{J} \in \mathbb{N}$. On utilise à nouveau la formule de Boole puis Q25 et enfin Q20, par calcul dans $[0,+\infty]$, on a :

$$0 \leqslant \mathbb{P}\left(\bigcup_{j \geqslant \mathrm{J}} \mathrm{B}_j\right) \leqslant \sum_{j=\mathrm{J}}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\mathrm{B}_j\right) \leqslant 2 \sum_{j=\mathrm{J}}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\mathrm{A}_j\right) \leqslant 2 \sum_{j=\mathrm{J}}^{+\infty} 2^{-j}=2^{-\mathrm{J}+2}$$

Par théorème des gendarmes, on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{j \geqslant \mathrm{J}} \mathrm{B}_j\right) \xrightarrow[\mathrm{J} \rightarrow+\infty]{} 0$$

La suite d'événements $\left(\bigcup_{j \geqslant \mathrm{J}} \mathrm{B}_j\right)_{\mathrm{J} \in \mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion.
Ainsi par continuité décroissante, on a

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{j \geqslant \mathrm{J}} \mathrm{B}_j\right) \xrightarrow[\mathrm{J} \rightarrow+\infty]{} \mathbb{P}\left(\bigcap_{\mathrm{J} \in \mathbb{N}} \bigcup_{j \geqslant \mathrm{J}} \mathrm{B}_j\right)=\mathbb{P}(\mathrm{B})$$

L'unicité de la limite nous donne l'égalité $\boxed{\mathbb{P}(\mathrm{B})=0}$

Q 27. On a l'égalité entre les événements :

$$\left\{\omega \in \Omega \mid \exists \mathrm{J} \in \mathbb{N},\ \forall j \geqslant \mathrm{J},\ \forall n \in \llbracket \phi(j)+1, \phi(j+1) \rrbracket,\ \left|\mathrm{S}_n(\omega)-\mathrm{S}_{\phi(j)}(\omega)\right| \leqslant 2^{-j}\right\}$$

et

$$\bigcup_{\mathrm{J} \in \mathbb{N}} \bigcap_{j \geqslant \mathrm{J}} \bigcup_{n=\phi(j)+1}^{\phi(j+1)}\left\{\left|\mathrm{S}_n-\mathrm{S}_{\phi(j)}\right| \leqslant 2^{-j}\right\}=\bigcup_{\mathrm{J} \in \mathbb{N}} \bigcap_{j \geqslant \mathrm{J}} \overline{\mathrm{B}_j}=\overline{\mathrm{B}}$$

Comme $\mathbb{P}(\overline{\mathrm{B}})=1-\mathbb{P}(\mathrm{B})$, on peut conclure avec Q26 et les termes du poète (zeugma) :

$$\boxed{\text{l'évènement } \left\{\exists \mathrm{J} \in \mathbb{N}, \quad \forall j \geqslant \mathrm{J}, \quad \forall n \in \llbracket \phi(j)+1, \phi(j+1) \rrbracket, \quad\left|\mathrm{S}_n-\mathrm{S}_{\phi(j)}\right| \leqslant 2^{-j}\right\} \text{ se réalise avec probabilité 1}}$$

Q 28. Soit $\omega \in \overline{\mathrm{B}}$. Cela nous fournit $\mathrm{J} \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall j \geqslant \mathrm{J},\ \forall n \in [\![\phi(j)+1, \phi(j+1)]\!],\ \left|\mathrm{S}_n(\omega) - \mathrm{S}_{\phi(j)}(\omega)\right| \leqslant 2^{-j}$$

Par conséquent, on a :

$$\forall j \geqslant \mathrm{J},\ \left|\mathrm{S}_{\phi(j+1)}(\omega) - \mathrm{S}_{\phi(j)}(\omega)\right| \leqslant 2^{-j}$$

Par comparaison à la série géométrique $\sum 2^{-j}$ à termes positifs convergente,

la série $\sum \left|\mathrm{S}_{\phi(j+1)}(\omega) - \mathrm{S}_{\phi(j)}(\omega)\right|$ converge

D'où la série $\sum \left(\mathrm{S}_{\phi(j+1)}(\omega) - \mathrm{S}_{\phi(j)}(\omega)\right)$ converge absolument donc converge

Ainsi la suite $\left(\mathrm{S}_{\phi(j)}(\omega)\right)_{j\in\mathbb{N}}$ converge (série télescopique)

D'où $\omega \in \left\{ \text{ la suite } \left(\mathrm{S}_{\phi(j)}\right)_{j\in\mathbb{N}} \text{ est convergente } \right\}$

On a montré que $\overline{\mathrm{B}} \subset \left\{ \text{ la suite } \left(\mathrm{S}_{\phi(j)}\right)_{j\in\mathbb{N}} \text{ est convergente } \right\}$.

Avec Q27 : « l'évènement » $\boxed{\left\{ \text{ la suite } \left(\mathrm{S}_{\phi(j)}\right)_{j\in\mathbb{N}} \text{ est convergente } \right\} \text{ a également une probabilité 1}}$

On n'a pas montré que cet ensemble était un événement et ce point n'est pas un attendu de ce sujet. Faisable mais pas facilement sans indication.

Q 29. Soit $\omega \in \overline{\mathrm{B}}$. Il s'agit d'établir que la suite de sommes partielles $(\mathrm{S}_n(\omega))_{n\geqslant 0}$ converge.

On sait que la suite $\left(\mathrm{S}_{\phi(j)}(\omega)\right)_{j\in\mathbb{N}}$ est convergente d'après la question précédente.

L'égalité de $\overline{\mathrm{B}}$ et de l'évènement de Q27, nous fournit $\mathrm{J} \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall j \geqslant \mathrm{J},\ \forall n \in [\![\phi(j)+1, \phi(j+1)]\!],\ \left|\mathrm{S}_n(\omega) - \mathrm{S}_{\phi(j)}(\omega)\right| \leqslant 2^{-j}$$

Soit $n \geqslant \phi(0)+1$. Comme ϕ est une suite strictement croissante d'entiers naturels selon Q18,

On peut alors poser $j_n = \max\{j \in \mathbb{N} \mid \phi(j)+1 \leqslant n\}$ (partie majorée non vide de $\mathbb{N}$)

On a ainsi $\varphi(j_n)+1 \leqslant n < \varphi(j_n+1)+1$ donc $n \in [\![\varphi(j_n)+1, \varphi(j_n+1)]\!]$.

On montre facilement que (j_n) est croissante non majorée ainsi

$$j_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

On n'est pas obligé de détailler autant pour j_n.

Cela nous fournit $\mathrm{N} \geqslant \phi(0)+1$ tel que $j_{\mathrm{N}} \geqslant \mathrm{J}$. Soit alors $n \geqslant \mathrm{N}$. On a

$$\mathrm{S}_n(\omega) = \mathrm{S}_{\phi(j_n)}(\omega) + \mathrm{S}_n(\omega) - \mathrm{S}_{\phi(j_n)}(\omega)$$

Comme $2^{-j_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, alors $\mathrm{S}_n(\omega) - \mathrm{S}_{\phi(j_n)}(\omega) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Par somme de suites convergentes, la suite de sommes partielles $(\mathrm{S}_n(\omega))_{n\geqslant 0}$ converge

On peut conclure que $\boxed{\text{« \textit{l'évènement} » } \{ \text{ la série } \sum \mathrm{X}_n a_n \text{ est convergente } \} \text{ a une probabilité 1}}$

IV Dérivation $\mathcal{C}^{\mathrm{K}}$ pour des séries aléatoires de fonctions

Q 30. On considère une série de réels $\sum a_n$ absolument convergente.

On a alors $|a_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, d'où $a_n^2 = |a_n|^2 \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(|a_n|\right)$.

Ainsi par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum a_n^2$ converge

Cela permet d'établir que $\boxed{\text{l'hypothèse (H2) implique (H2')}}$

Q 31. Soit $\ell \in [\![1, \mathrm{K}]\!]$. La suite réelle $(f_n(x_\ell))_{n\in\mathbb{N}}$ est telle que la série $\sum f_n(x_\ell)^2$ converge.
En appliquant la partie III (Q29), l'événement $\{$ la série $\sum \mathrm{X}_n f_n(x_\ell)$ est convergente $\}$ est de probabilité 1.
Une intersection finie ou dénombrable d'événements presque sûr étant un événement presque sûr, on conclut que :

$$\boxed{\text{l'évènement } \bigcap_{\ell=1}^{\mathrm{K}} \left\{ \text{ la série } \sum \mathrm{X}_n f_n(x_\ell) \text{ est convergente } \right\} \text{ a une probabilité 1}}$$

Q 32. Soit $\omega \in \Omega$.
Pour $n \in \mathbb{N}$. Je note $g_n = \mathrm{X}_n(\omega)(f_n - \mathrm{P}_n)$.
On a $\mathrm{P}_n \in \mathcal{C}^{\mathrm{K}}([0,1])$ et $\mathrm{P}_n^{(\mathrm{K})} = 0$ car $\mathrm{P}_n \in \mathbb{R}_{\mathrm{K}-1}[\mathrm{X}]$.
Ainsi $g_n \in \mathcal{C}^{\mathrm{K}}([0,1])$ et $\forall k \in [\![1, \mathrm{K}]\!]$, $g_n^{(k)} = \mathrm{X}_n(\omega)(f_n - \mathrm{P}_n)^{(k)}$ et $g_n^{(\mathrm{K})} = \mathrm{X}_n(\omega) f_n^{(\mathrm{K})}$.
Ainsi comme $\mathrm{X}_n(\omega) \in \{-1, 1\}$, on a $\left\| g_n^{(\mathrm{K})} \right\|_\infty = \left\| f_n^{(\mathrm{K})} \right\|_\infty$ (fonctions continues sur un segment).
Comme la série de fonctions $\sum f_n^{(\mathrm{K})}$ converge normalement sur $[0,1]$,
alors la série $\sum \left\| f_n^{(\mathrm{K})} \right\|_\infty = \sum \left\| g_n^{(\mathrm{K})} \right\|_\infty$ converge
d'où la série de fonctions $\sum g_n^{(\mathrm{K})}$ converge normalement sur $[0,1]$.
Ainsi la suite (g_n) vérifie l'hypothèse (H1) de la sous-partie IIA.

Pour tout $\ell \in [\![1, \mathrm{K}]\!]$, on a convergence absolue de $\sum g_n(x_\ell)$ car $\forall n \in \mathbb{N}, g_n(x_\ell) = f_n(x_\ell) - \mathrm{P}_n(x_\ell) = 0$.
Ainsi la suite (g_n) vérifie l'hypothèse (H2) de la sous-partie IIA.
On en déduit avec Q11 et Q13 que

— pour tout $k \in [\![0, \mathrm{K}]\!]$, la série de fonctions $\sum g_n^{(k)}$ converge normalement donc uniformément sur $[0,1]$;

— la fonction somme $\mathrm{G} : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x)$ est de classe $\mathcal{C}^{\mathrm{K}}$ sur $[0,1]$;

— pour tout $k \in [\![0, \mathrm{K}]\!]$, $\mathrm{G}^{(k)} : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} g_n^{(k)}(x)$.

On en déduit que l'événement qui suit $\boxed{\text{est certain donc de probabilité 1}}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{pour tout } k \in [\![0, \mathrm{K}]\!], \text{ la série de fonctions } \sum \mathrm{X}_n (f_n - \mathrm{P}_n)^{(k)} \text{ est uniformément convergente sur } [0,1], \\ \text{la fonction } \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathrm{X}_n (f_n - \mathrm{P}_n) \text{ est de classe } \mathcal{C}^{\mathrm{K}}, \\ \text{pour tout } k \in [\![0, \mathrm{K}]\!], \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathrm{X}_n (f_n - \mathrm{P}_n) \right)^{(k)} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathrm{X}_n (f_n - \mathrm{P}_n)^{(k)} \end{array} \right\}$$

Q 33. Il nous suffit de montrer que l'intersection des événements des 31 et 32 est inclus dans celui proposé dans cette question. On se donne donc $\omega \in \Omega$ tel que

$$\text{pour tout } \ell \in [\![1, \mathrm{K}]\!], \quad \text{la série réelle } \sum \mathrm{X}_n(\omega) f_n(x_\ell) \text{ converge}$$

et tel que ω est dans l'événement de la question 32 (ce qui, en réalité, est toujours vérifié).

On pose $g_n = \mathrm{X}_n(\omega) f_n$ et, en adoptant les mêmes notations que dans la question précédente, on remarque que

$$g_n = \mathrm{X}_n(\omega)\mathrm{P}_n + \mathrm{X}_n(\omega)(f - \mathrm{P}_n)$$

- Par choix de ω, $\mathrm{X}_n(\omega)(f-\mathrm{P}_n)$ est le terme général d'une série qui converge uniformément sur $[0,1]$ ainsi que toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre K. De plus, la somme de la série est de classe $\mathcal{C}^{\mathrm{K}}$ et on obtient ses dérivées en dérivant terme à terme.
- On veut maintenant obtenir la même propriété pour la série de fonctions de terme général $\mathrm{Q}_n = \mathrm{X}_n(\omega)\mathrm{P}_n$. Montrons que l'on peut appliquer le théorème de régularité des sommes de séries de fonctions.
  (i) En utilisant les notations de la question 7, on a $\mathrm{Q}_n = \sum\limits_{j=1}^{\mathrm{K}} \mathrm{X}_n(\omega) f_n(x_j)\mathrm{L}_j$ qui définit une fonction (polynomiale de degré $\leqslant \mathrm{K}-1$) de classe $\mathcal{C}^{\mathrm{K}}$ et
  $$\forall k \in [\![0,\mathrm{K}]\!],\ \mathrm{Q}_n^{(k)} = \sum_{j=1}^{\mathrm{K}} \mathrm{X}_n(\omega) f_n(x_j)\mathrm{L}_j^{(k)}$$
  (ii) Comme les séries $\sum \mathrm{X}_n(\omega) f_n(x_\ell)$ convergent, alors pour tout $k \in [\![0,\mathrm{K}]\!]$, la série de fonctions $\sum \mathrm{Q}_n^{(k)}$ converge simplement sur $[0,1]$.
  (iii) $\mathrm{Q}_n^{(\mathrm{K})} = 0$ est le terme général d'une série qui converge uniformément sur $[0,1]$.
  Avec (i), (ii) et (iii), le théorème du cours s'applique, on obtient que $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{\infty} \mathrm{Q}_n(x)$ est de classe $\mathcal{C}^{\mathrm{K}}$ sur $[0,1]$, que ses dérivées s'obtiennent en dérivant terme à terme ET que toutes les séries dérivées intermédiaires convergent uniformément sur $[0,1]$. (*cerise sur le gâteau du théorème*)

On en déduit alors que la même propriété est vraie pour g_n et on a montré que

$$\boxed{\text{l'évènement proposé est presque sûr}}$$

Q 34. Soit $\mathrm{K} \in \mathbb{N}^*$. (à déterminer)

On considère des réels distincts $x_1 < \cdots < x_{\mathrm{K}}$ de $[0,1]$.
Soit $\ell \in [\![1,\mathrm{K}]\!]$ tel que $x_\ell \neq 0$. Quand $n \longrightarrow +\infty$, on a $\frac{x_\ell}{n} \longrightarrow 0$ donc $\sin\left(\frac{x_\ell}{n}\right) \sim \frac{x_\ell}{n}$
Ainsi $f_n(x_\ell) = \ln\left(1+\sin\left(\frac{x_\ell}{n}\right)\right) \sim \sin\left(\frac{x_\ell}{n}\right) \sim \frac{x_\ell}{n}$
D'où $f_n(x_\ell)^2 \sim \frac{x_\ell^2}{n^2}$
Par comparaison de séries à termes positifs la série $\sum f_n(x_\ell)^2$ converge et ceci est valable si $x_\ell = 0$
Les fonctions f_n sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ par théorèmes généraux.
donc la série de fonctions $\sum f_n$ de classe $\mathcal{C}^{\mathrm{K}}$ sur $[0,1]$ vérifie l'hypothèse (H2).
Pour vérifier l'hypothèse (H1), il suffit de trouver l'exemple d'un $\mathrm{K} \in \mathbb{N}^*$ tel que la série de fonctions $\sum f_n^{(\mathrm{K})}$ converge normalement sur $[0,1]$.

Soit $x \in [0,1]$. On a $f_n'(x) = \dfrac{\cos\left(\frac{x}{n}\right)}{n\left(1+\sin\left(\frac{x}{n}\right)\right)} = \dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{\cos\left(\frac{x}{n}\right)}{1+\sin\left(\frac{x}{n}\right)}$

donc $f_n''(x) = \dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{\frac{-1}{n}\sin\left(\frac{x}{n}\right)\left(1+\sin\left(\frac{x}{n}\right)\right) - \frac{1}{n}\cos^2\left(\frac{x}{n}\right)}{\left(1+\sin\left(\frac{x}{n}\right)\right)^2} = \dfrac{-1}{n^2}\dfrac{\sin\left(\frac{x}{n}\right)+\sin^2\left(\frac{x}{n}\right)+\cos^2\left(\frac{x}{n}\right)}{\left(1+\sin\left(\frac{x}{n}\right)\right)^2}$ d'où

$$\forall x \in [0,1],\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left|f_n''(x)\right| = \frac{1}{n^2}\frac{\sin\left(\frac{x}{n}\right)+1}{\left(1+\sin\left(\frac{x}{n}\right)\right)^2} \leqslant \frac{2}{n^2}$$

or la série $\sum \frac{2}{n^2}$ converge donc la série de fonctions $\sum f_n''$ converge normalement sur $[0,1]$.
Ainsi $\boxed{\text{pour K} = 2\text{, l'évènement précédent se réalise}}$ avec les fonctions f_n définies par :

$$\begin{cases} f_0 = 0 \\ f_n(x) = \ln\left(1+\sin\left(\frac{x}{n}\right)\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}^\star, \forall x \in [0,1] \end{cases}$$

On peut remarquer que la série numérique $\sum f_n(x)$ diverge pour tout $x \in]0,1]$.