MPI* - Lycée Colbert

Concours Blanc 2025
Mathématiques 1

Mardi 16 décembre 2025
13h30-17h30

Sujet Centrale

Durée : 4 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve

Notations

— Dans tout le sujet, n désigne un entier naturel non nul.

— Étant donnés deux entiers naturels a et b, on note $[\![a, b]\!]$ l'ensemble des entiers naturels k tels que $a \leqslant k \leqslant b$.

— Pour deux suites de nombres réels $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ et $(v_m)_{m\in\mathbb{N}}$, la notation $u_m = O(v_m)$ signifie qu'il existe une suite bornée $(M_m)_{m\in\mathbb{N}}$ telle que l'on ait

$$\exists m_0 \in \mathbb{N} \quad | \quad \forall m \geqslant m_0, \quad u_m = M_m v_m.$$

— On pourra utiliser sans démonstration la formule suivante, qui précise la formule de Stirling lorsque n tend vers $+\infty$:

$$n! = \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Toutes les variables aléatoires considérées sont discrètes.

I Résultats préliminaires

I.A – Calcul d'une intégrale classique

Rappelons que n désigne un entier naturel non nul. On note

$$I_n = \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad K_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t.$$

I.A.1)

Q 1. Montrer que

$$I_n \geqslant \frac{1}{2^n}.$$

Q 2. Justifier l'existence de K_n et donner la valeur exacte de K_1.

Q 3. Montrer que

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t = O\left(\frac{1}{n2^n}\right).$$

On pourra minorer $1+t^2$ par un polynôme de degré 1.

Q 4. En déduire que, lorsque n tend vers $+\infty$,

$$I_n \sim K_n.$$

Q 5. Établir la relation de récurrence $K_n = K_{n+1} + \frac{1}{2n}K_n$.

Q 6. En déduire un équivalent simple de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

I.A.2)

Q 7. Justifier que

$$\sqrt{n}\, I_n = \int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{(1+u^2/n)^n}\,\mathrm{d}u.$$

Q 8. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\, I_n = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u.$$

Q 9. En déduire les valeurs de

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u \qquad \text{puis de} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u.$$

Dans toute la suite, on posera pour tout x réel

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/2} \qquad \text{et} \qquad \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

I.B – ***Comportement asymptotique de*** $1-\Phi$

Soit $x > 0$.

Q 10. En écrivant que $\varphi(t) \leqslant \dfrac{t}{x}\varphi(t)$ pour tout $t \geqslant x$, montrer que

$$\int_x^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\varphi(x)}{x}.$$

Q 11. À l'aide de l'étude d'une fonction bien choisie, montrer que

$$\frac{x}{x^2+1}\varphi(x) \leqslant \int_x^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

Q 12. En déduire un équivalent simple de $1-\Phi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

I.C – ***Une inégalité maximale***

Dans cette sous-partie, n est un entier naturel non nul et $Z_1, ..., Z_n$ sont des variables aléatoires discrètes indépendantes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Pour tout $p \in [\![1,n]\!]$, on note $R_p = \sum_{i=1}^{p} Z_i$.

On va montrer la propriété

$$\forall x > 0, \qquad \mathbb{P}(\{\max_{1\leqslant p\leqslant n} |R_p| \geqslant 3x\}) \leqslant 3 \max_{1\leqslant p\leqslant n} \mathbb{P}(\{|R_p| \geqslant x\}).$$

On admet que les différentes fonctions intervenant dans cette inégalité sont bien des variables aléatoires discrètes.

Pour simplifier, notons A l'événement $\{\max\limits_{1\leqslant p\leqslant n} |R_p| \geqslant 3x\}$. Ainsi,

$$A = \{\omega \in \Omega \mid \max_{1\leqslant p\leqslant n} |R_p(\omega)| \geqslant 3x\}.$$

Dans le cas où $n \geqslant 2$, définissons de plus les événements

$$A_1 = \{|R_1| \geqslant 3x\} \qquad \text{et} \qquad A_p = \{\max_{1 \leqslant i \leqslant p-1} |R_i| < 3x\} \cap \{|R_p| \geqslant 3x\}$$

pour $p \in [\![2, n]\!]$.

Q 13. Exprimer l'événement A à l'aide des événements $A_1, A_2, ..., A_n$.

Q 14. Montrer que l'on a

$$\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(\{|R_n| \geqslant x\}) + \sum_{p=1}^{n} \mathbb{P}(A_p \cap \{|R_n| < x\}).$$

Q 15. Justifier que pour tout $p \in [\![1, n]\!]$, on a l'inclusion

$$A_p \cap \{|R_n| < x\} \ \subset \ A_p \cap \{|R_n - R_p| > 2x\}.$$

Q 16. En déduire que

$$\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(\{|R_n| \geqslant x\}) + \max_{1 \leqslant p \leqslant n} \mathbb{P}(\{|R_n - R_p| > 2x\}).$$

Q 17. Conclure.

II Étude d'une suite de fonctions

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in [\![0, n]\!]$, on pose

$$x_{n,k} = -\sqrt{n} + \frac{2k}{\sqrt{n}}.$$

De plus, on définit la fonction $B_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par les conditions

$$\begin{aligned}
&\forall x \in \left]-\infty, -\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right[, && B_n(x) = 0 \\
\forall k \in [\![0, n]\!],\ &\forall x \in \left[x_{n,k} - \frac{1}{\sqrt{n}}, x_{n,k} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right[, && B_n(x) = \frac{\sqrt{n}}{2}\binom{n}{k}\frac{1}{2^n} \\
&\forall x \in \left[\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}, +\infty\right[, && B_n(x) = 0
\end{aligned}$$

L'objectif de cette partie est de montrer que la suite de fonctions $(B_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction φ, définie dans la partie I. Autrement dit, on souhaite montrer

$$\lim_{n \to +\infty} \Delta_n = 0 \qquad \text{avec} \qquad \Delta_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} |B_n(x) - \varphi(x)|.$$

L'usage d'une figure pour appréhender la problématique de cette partie sera vivement apprécié.

II.A –

Q 18. Comparer les réels $-x_{n,k}$ et $x_{n,n-k}$.

Q 19. Justifier l'existence du réel Δ_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Q 20. Montrer que, pout tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a l'égalité

$$\Delta_n = \sup_{x \geqslant 0} |B_n(x) - \varphi(x)|.$$

Q 21. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que B_n est une application décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

On pourra distinguer selon que n est pair ou impair.

Dans la suite de cette partie, on fixe $\varepsilon > 0$. La limite $\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0$ assure de l'existence d'un nombre $\ell \in \mathbb{R}^+$ tel que $\varphi(\ell) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.

II.B – Dans cette sous-partie, on va montrer

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[0,\ell]} |B_n(x) - \varphi(x)| = 0.$$

On introduit pour cela l'ensemble

$$I_n = \{k \in [\![0,n]\!] \mid x_{n,k} \in [0, \ell+1]\}$$

dont on peut vérifier que c'est un intervalle d'entiers.

Dans la suite de cette sous-partie, on suppose que n et k varient de sorte que $k \in I_n$.

Q 22. Montrer que l'on a

$$k!(n-k)! = 2\pi \mathrm{e}^{-n} k^{k+1/2} (n-k)^{n-k+1/2} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

pour n tendant vers l'infini.

On pourra utiliser la formule de Stirling rappelée en début d'énoncé.

Q 23. En déduire que, pour n tendant vers $+\infty$, on a

$$B_n(x_{n,k}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1 + O\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{2k}{n}\right)^{k+1/2} \left(2 - \frac{2k}{n}\right)^{n-k+1/2}}.$$

Q 24. En déduire que

$$B_n(x_{n,k}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1 + O\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(1 - \frac{x_{n,k}^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}} \left(1 + \frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{x_{n,k}}{2}\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)^{-\frac{x_{n,k}}{2}\sqrt{n}}}$$

puis que

$$B_n(x_{n,k}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x_{n,k}^2}{2}\right) \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right).$$

Q 25. Montrer qu'il existe un entier naturel n_1 tel que, pour tout entier $n \geqslant n_1$,

$$\sup_{x\in[0,\ell]} |B_n(x) - \varphi(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

II.C –

Q 26. Pour tout $\ell > 0$, montrer qu'il existe un entier naturel n_2, tel que, pour tout $n \geqslant n_2$,

$$B_n(\ell) \leqslant 2\varphi(\ell).$$

Q 27. Conclure que la suite $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

III Applications

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telle que $\mathbb{P}(X = -1) = 1/2$ et $\mathbb{P}(X = 1) = 1/2$. On considère une suite $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, mutuellement indépendantes et de même loi que X. On définit alors

$$S_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

On dit que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une marche aléatoire symétrique sur $\mathbb{Z}$. On admettra que pour tout $n \geqslant 1$, S_n est une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

III.A – Théorème central limite

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de fonctions continues par morceaux sur I qui converge uniformément sur I vers une fonction f également continue par morceaux sur I.

Q 28. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ (respectivement $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$) est une suite de nombres réels appartenant à I qui converge vers $u \in I$ (respectivement $v \in I$), montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_{u_n}^{v_n} f_n(x)\,\mathrm{d}x\right) = \int_u^v f(x)\,\mathrm{d}x.$$

On pose, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $Y_i = \frac{X_i+1}{2}$ et $T_n = \sum_{i=1}^n Y_i$.

Q 29. Montrer que, pour tout $j \in [\![0,n]\!]$,

$$\mathbb{P}(\{T_n = j\}) = \int_{x_{n,j}-1/\sqrt{n}}^{x_{n,j}+1/\sqrt{n}} B_n(x)\,\mathrm{d}x,$$

où $x_{n,j}$ a été défini dans la partie II.

Considérons un couple (u,v) de réels tel que $u < v$, et notons

$$J_n = \left\{ j \in [\![0,n]\!] \mid \frac{n+u\sqrt{n}}{2} \leqslant j \leqslant \frac{n+v\sqrt{n}}{2} \right\}.$$

Q 30. Justifier que

$$\mathbb{P}\left(\left\{u \leqslant \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leqslant v\right\}\right) = \sum_{j\in J_n} \mathbb{P}(\{T_n = j\}).$$

Q 31. En déduire que l'on a

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left\{u \leqslant \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leqslant v\right\}\right) = \int_u^v \varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

puis que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left\{u \leqslant \frac{S_n}{\sqrt{n}}\right\}\right) = 1 - \Phi(u)$$

où les applications φ et Φ ont été définies dans la partie I.

III.B – Critère de tension

Dans cette dernière sous-partie, on fixe $\varepsilon \in\,]0,1[$.

Q 32. Montrer qu'il existe $x_0 \geqslant 1$ tel que l'on ait

$$\forall x \geqslant x_0, \quad \exists n_x \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant n_x, \quad x^2\mathbb{P}(\{|S_n| \geqslant x\sqrt{n}\}) \leqslant \varepsilon.$$

Q 33. Pour x_0 et x comme à la question précédente, on fixe $N \geqslant \dfrac{n_x}{\varepsilon}$ et on choisit $n \geqslant N$. Montrer qu'alors

$$x^2\mathbb{P}(\{\max_{1\leqslant p\leqslant n} |S_p| \geqslant 3x\sqrt{n}\}) \leqslant 3\varepsilon.$$

• • • FIN • • •

I Résultats préliminaires

I.A – Calcul d'une intégrale classique

I.A.1)

Q 1. Soit $t \in [0,1]$. On a $0 < 1+t^2 \leqslant 2$ donc $0 < \dfrac{1}{(1+t^2)^n} \leqslant \dfrac{1}{2^n}$. Ainsi $\boxed{\mathrm{I}_n \geqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2^n}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2^n}}$

Q 2. La fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{(1+t^2)^n}$ est continue sur $[0,+\infty[$.

Par ailleurs $\dfrac{1}{(1+t^2)^n} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{2n}}$ et $t \mapsto \dfrac{1}{t^{2n}}$ est intégrable en $+\infty$ car $2n > 1$.

Ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente donc convergente.

$\boxed{\text{Ce qui justifie l'existence de } \mathrm{K}_n}$ et $\boxed{\mathrm{K}_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = [\arctan(t)]_{t=0}^{t\to+\infty} = \frac{\pi}{2}}$

Q 3. On a $\forall t \geqslant 1,\ 1+t^2 \geqslant 1+t > 0$.
Soit $n \geqslant 2$. Par calcul dans $[0,+\infty]$, on a

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t)^n}\,\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} (1+t)^{-n}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{(1+t)^{-n+1}}{-n+1}\right]_{t=1}^{t\to+\infty} = \frac{1}{(n-1)2^{n-1}} < +\infty$$

Or quand $n \longrightarrow +\infty$, on a $\dfrac{1}{(n-1)2^{n-1}} \sim \dfrac{2}{n2^n} = \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n2^n}\right)$

On a bien $\boxed{\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n2^n}\right)}$

Q 4. À l'aide de la relation de Chasles et Q3, on a quand $n \longrightarrow +\infty$,

$$\mathrm{I}_n - \mathrm{K}_n = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n2^n}\right) = o\left(\mathrm{I}_n\right)$$

car $\dfrac{1}{n2^n} = o\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$ et $\dfrac{1}{2^n} = \mathrm{O}\left(\mathrm{I}_n\right)$ selon Q1.

On en déduit que $\boxed{\mathrm{I}_n \sim \mathrm{K}_n}$

Q 5. Sous réserve de validité, on effectue une intégration par parties : *(argument « classe $\mathcal{C}^1$ »inutile)*

$$\mathrm{K}_n = \left[t \cdot \frac{1}{(1+t^2)^n}\right]_{t=0}^{t\to+\infty} + \int_0^{+\infty} t \cdot \frac{2nt}{(1+t^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}t = 2n\int_0^{+\infty} \frac{t^2+1}{(1+t^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}t - 2n\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}t$$

L'intégration par parties est valide car le bloc tout intégré est nul.

Ainsi $\mathrm{K}_n = 2n\mathrm{K}_n - 2n\mathrm{K}_{n+1}$ ce qui permet de conclure que $\boxed{\mathrm{K}_n = \mathrm{K}_{n+1} + \dfrac{1}{2n}\mathrm{K}_n}$

Q 6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On d'après ce qui précède : $\mathrm{K}_{n+1} = \dfrac{2n-1}{2n}\mathrm{K}_n$.

Ainsi par récurrence immédiate, on a $\mathrm{K}_n = \dfrac{\prod_{i=1}^{n-1}(2i-1)}{\prod_{i=1}^{n-1}(2i)}\mathrm{K}_1 = \dfrac{\prod_{k=1}^{2n-2} k}{\left(\prod_{i=1}^{n-1}(2i)\right)^2}\dfrac{\pi}{2}$. D'où

$$\mathrm{K}_n = \frac{(2n-2)!}{\left(2^{n-1}\cdot(n-1)!\right)^2}\frac{\pi}{2} = \frac{(2n-2)!\pi}{2^{2n-1}\left((n-1)!\right)^2}$$

En utilisant Stirling, quand $n \to +\infty$, on a :

$$\frac{(2n-2)!}{((n-1)!)^2} \sim \frac{\left(\dfrac{2n-2}{\mathrm{e}}\right)^{2n-2}\sqrt{2\pi(2n-2)}}{\left(\left(\dfrac{n-1}{\mathrm{e}}\right)^{n-1}\sqrt{2\pi(n-1)}\right)^2} \sim \frac{2^{2n-2}}{\sqrt{\pi n}}$$

À l'aide de Q4, on peut conclure que $\boxed{\mathrm{I}_n \sim \mathrm{K}_n \sim \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}}$

I.A.2)

Q 7. On effectue le changement de variable : $u = \sqrt{n}t$; $\mathrm{d}u = \sqrt{n}\mathrm{d}t$, pour obtenir : $\boxed{\sqrt{n}\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{\left(1+u^2/n\right)^n}\,\mathrm{d}u}$

L'argument « classe $\mathcal{C}^1$ »est inutile.

Q 8. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n : $\left\{\begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{1}{\left(1+u^2/n\right)^n} & \text{si } u \leqslant \sqrt{n} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}\right.$.

On va utiliser le théorème de convergence dominée.

(i) (*inutile*) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$.

(ii) Soit $u > 0$. Quand $n \to +\infty$, on a $f_n(u) = \exp\left(-n\ln(1+u^2/n)\right)$ et $-n\ln(1+u^2/n)) \sim -nu^2/n \longrightarrow -u^2$.
Ainsi comme exp est continue, on a $f_n(u) \longrightarrow \mathrm{e}^{-u^2}$ (valable pour $u = 0$)
Ainsi $(f_n)_n$ converge simplement vers $u \longmapsto \mathrm{e}^{-u^2}$ sur $[0,+\infty[$.

(iii) (*inutile*) La fonction $u \longmapsto \mathrm{e}^{-u^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$.

(iv) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $u \in [0,\sqrt{n}]$, on a avec la formule du binôme :

$$\left(1+u^2/n\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{u^{2k}}{n^k} \geqslant \binom{n}{0} + \binom{n}{1}\frac{u^2}{n} = 1+u^2 > 0$$

Ce qui permet d'établir l'hypothèse de domination : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall u \in [0,+\infty[\,,\ |f_n(u)| \leqslant \dfrac{1}{1+u^2}$.
or la fonction $u \mapsto \dfrac{1}{1+u^2}$ est continue et intégrable sur $[0,+\infty[$. (Q2)

Avec (i), (ii), (iii) et (iv), le théorème s'applique $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u$ avec Q7 $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}\,\mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u}$

Q 9. D'après Q6, on a $\sqrt{n}\,\mathrm{I}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ Par unicité de la limite, on a donc $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$

Par parité, on a alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$

On effectue le changement de variable $u = \sqrt{2}t$; $\mathrm{d}u = \sqrt{2}\mathrm{d}t$ (*argument inutile* : qui est $\mathcal{C}^1$, strictement croissant et bijectif $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$).

Ainsi $\sqrt{\pi} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u$. D'où $\boxed{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u = \sqrt{2\pi}}$

I.B – Comportement asymptotique de $1-\Phi$

Q 10. On a $\varphi(t) \leqslant \dfrac{t}{x}\varphi(t)$ pour tout $t \geqslant x$ car $x > 0$ et $\varphi(t) \geqslant 0$. Ainsi

$$\int_x^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{x\sqrt{2\pi}}\int_x^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}}\left[-\mathrm{e}^{-t^2/2}\right]_{t=x}^{t\to+\infty}$$

ce qui permet de conclure que $\boxed{\displaystyle\int_x^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\varphi(x)}{x}}$

Q 11. Je considère la fonction $\psi : u \longmapsto (u^2+1)\displaystyle\int_u^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t - u\varphi(u)$.

Comme φ est de classe $\mathcal{C}^1$ et intégrable sur $\mathbb{R}$ alors ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et pour $u \in \mathbb{R}$, on a :

$$\psi'(u) = 2u\int_u^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t + (u^2+1)\left(-\varphi(u)\right) - \varphi(u) - u\left(\frac{-u}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-u^2/2}\right) = 2\left(u\int_u^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t - \varphi(u)\right)$$

Ainsi $\forall u > 0,\ \psi'(u) = 2u\left(\displaystyle\int_u^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t - \frac{\varphi(u)}{u}\right) \leqslant 0$ selon Q10.

Ainsi ψ est décroissante sur $[0, +\infty[$ car ψ y est continue. Le théorème de la limite monotone nous fournit $\ell = \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \psi(x)$

Par ailleurs on a $\forall x \geqslant 0,\ \psi(x) + x\varphi(x) \geqslant 0$ et par croissance comparée $x\varphi(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

Ainsi pour $x \geqslant 0$, on a $\psi(x) \geqslant \ell \geqslant 0$, en particulier $\dfrac{\psi(x)}{x^2+1} \geqslant 0$ d'où $\boxed{\displaystyle\frac{x}{x^2+1}\varphi(x) \leqslant \int_x^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t}$

Q 12. On a donc $\forall x > 0,\ \dfrac{x}{x^2+1}\varphi(x) \leqslant \displaystyle\int_x^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{x}\varphi(x)$.

Or quand $x \to +\infty$, on a $\dfrac{x}{x^2+1} \sim \dfrac{1}{x}$. Ainsi par encadrement d'équivalents, on a

$$\int_x^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \sim \frac{\varphi(x)}{x} = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/2}$$

Or selon Q9 et Chasles, on a

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \Phi(x) + \int_{x}^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

D'où $1 - \Phi(x) = \displaystyle\int_{x}^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$. Ainsi $\boxed{\text{quand } x \longrightarrow +\infty, \text{ on a } 1 - \Phi(x) \sim \dfrac{\varphi(x)}{x} \sim \dfrac{\mathrm{e}^{-x^2/2}}{x\sqrt{2\pi}}}$

Remarque : on aurait pu obtenir cet équivalent à l'aide d'une intégration par parties et en utilisant une intégration de relation comparaison (ici "petit o").

I.C – Une inégalité maximale

Q 13. On a $\boxed{\mathrm{A} = \bigcup_{p=1}^{n} \mathrm{A}_p \text{ (réunion disjointe)}}$ (si $n = 1$, alors $\mathrm{A} = \mathrm{A}_1$).

Q 14. On a donc

$$\mathrm{A} \subset (\{|\mathrm{R}_n| \geqslant x\} \cup (\mathrm{A} \cap \{|\mathrm{R}_n| < x\})) = \left(\{|\mathrm{R}_n| \geqslant x\} \cup \left(\bigcup_{p=1}^{n} \mathrm{A}_p \cap \{|\mathrm{R}_n| < x\}\right)\right)$$

La réunion étant disjointe, on a donc bien

$$\boxed{\mathbb{P}(\mathrm{A}) \leqslant \mathbb{P}\left(\{|\mathrm{R}_n| \geqslant x\}\right) + \sum_{p=1}^{n} \mathbb{P}\left(\mathrm{A}_p \cap \{|\mathrm{R}_n| < x\}\right)}$$

Q 15. Soit $p \in [\![1, n]\!]$. Soit $\omega \in \mathrm{A}_p \cap \{|\mathrm{R}_n| < x\}$.

On a donc $|\mathrm{R}_p(\omega)| \geqslant 3x$ et $|\mathrm{R}_n(\omega)| < x$. Ainsi selon la deuxième inégalité triangulaire :

$$|\mathrm{R}_n(\omega) - \mathrm{R}_p(\omega)| \geqslant |\mathrm{R}_p(\omega)| - |\mathrm{R}_n(\omega)| > 3x - x = 2x$$

or $\omega \in \mathrm{A}_p$ d'où $\omega \in \mathrm{A}_p \cap \{|\mathrm{R}_n - \mathrm{R}_p| > 2x\}$.

On a bien l'inclusion $\boxed{\mathrm{A}_p \cap \{|\mathrm{R}_n| < x\} \subset \mathrm{A}_p \cap \{|\mathrm{R}_n - \mathrm{R}_p| > 2x\}}$

Q 16. D'après Q14 et Q15, on a :

$$\mathbb{P}(\mathrm{A}) \leqslant \mathbb{P}\left(\{|\mathrm{R}_n| \geqslant x\}\right) + \sum_{p=1}^{n} \mathbb{P}\left(\mathrm{A}_p \cap \{|\mathrm{R}_n - \mathrm{R}_p| > 2x\}\right)$$

Soit $p \in [\![1, n]\!]$. On a

$$\{|\mathrm{R}_n - \mathrm{R}_p| > 2x\} = \left\{\left|\sum_{j=p+1}^{n} \mathrm{Z}_j\right| > 2x\right\}$$

Ainsi cet événement ne peut s'écrire qu'en fonction de $\mathrm{Z}_{p+1}, \ldots, \mathrm{Z}_n$ alors que A_p s'exprime à l'aide de $\mathrm{Z}_1, \ldots, \mathrm{Z}_p$. Donc le lemme des coalitions s'applique, on l'indépendance des événements A_p et $\{|\mathrm{R}_n - \mathrm{R}_p| > 2x\}$

Remarque : en temps limité, je déconseille de formaliser davantage et même de chercher à écrire

$$\mathrm{A}_p = \bigcap_{i=1}^{p-1} \left\{\left|\sum_{j=1}^{i} \mathrm{Z}_j\right| < 3x\right\} \cup \left\{\left|\sum_{j=1}^{p} \mathrm{Z}_j\right| \geqslant 3x\right\}$$

Ainsi
$$\mathbb{P}(\mathrm{A}) \leqslant \mathbb{P}\left(\{|\mathrm{R}_n| \geqslant x\}\right) + \sum_{p=1}^{n} \mathbb{P}\left(\mathrm{A}_p\right) \cdot \mathbb{P}\left(\{|\mathrm{R}_n - \mathrm{R}_p| > 2x\}\right)$$

or en utilisant l'union disjointe de Q13, on a
$$\sum_{p=1}^{n} \mathbb{P}\left(\mathrm{A}_p\right) \cdot \mathbb{P}\left(\{|\mathrm{R}_n - \mathrm{R}_p| > 2x\}\right) \leqslant \sum_{p=1}^{n} \mathbb{P}\left(\mathrm{A}_p\right) \cdot \max_{1 \leqslant p \leqslant n} \mathbb{P}\left(\{|\mathrm{R}_n - \mathrm{R}_p| > 2x\}\right) \leqslant \mathbb{P}\left(\mathrm{A}\right) \cdot \max_{1 \leqslant p \leqslant n} \mathbb{P}\left(\{|\mathrm{R}_n - \mathrm{R}_p| > 2x\}\right)$$

On en déduit que $\boxed{\mathbb{P}(\mathrm{A}) \leqslant \mathbb{P}\left(\{|\mathrm{R}_n| \geqslant x\}\right) + \max_{1 \leqslant p \leqslant n} \mathbb{P}\left(\{|\mathrm{R}_n - \mathrm{R}_p| > 2x\}\right)}$

Q 17. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. On a $\forall a, b \in [-x, x]$, $|a - b| \leqslant 2x$. Ainsi
$$\{|\mathrm{R}_n - \mathrm{R}_k| > 2x\} \subset \left(\{|\mathrm{R}_n| > x\} \cup \{|\mathrm{R}_k| > x\}\right) \subset \left(\{|\mathrm{R}_n| \geqslant x\} \cup \{|\mathrm{R}_k| \geqslant x\}\right)$$

Ainsi $\mathbb{P}\left(\{|\mathrm{R}_n - \mathrm{R}_k| > 2x\}\right) \leqslant \mathbb{P}\left(\{|\mathrm{R}_n| \geqslant x\}\right) + \mathbb{P}\left(\{|\mathrm{R}_k| \geqslant x\}\right) \leqslant 2 \max_{1 \leqslant p \leqslant n} \mathbb{P}\left(\{|\mathrm{R}_p| \geqslant x\}\right)$.

Ce qui avec Q16, permet d'obtenir le résultat attendu :
$$\boxed{\mathbb{P}\left(\left\{\max_{1 \leqslant p \leqslant n} |\mathrm{R}_p| \geqslant 3x\right\}\right) = \mathbb{P}(\mathrm{A}) \leqslant \mathbb{P}\left(\{|\mathrm{R}_n| \geqslant x\}\right) + 2 \max_{1 \leqslant p \leqslant n} \mathbb{P}\left(\{|\mathrm{R}_p| \geqslant x\}\right) \leqslant 3 \max_{1 \leqslant p \leqslant n} \mathbb{P}\left(\{|\mathrm{R}_p| \geqslant x\}\right)}$$

II Étude d'une suite de fonctions

La suite $(x_{n,k})_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est arithmétique de raison $\dfrac{2}{\sqrt{n}}$. Ainsi
$$-\infty < -\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n}} = x_{n,0} - \frac{1}{\sqrt{n}} < x_{n,0} + \frac{1}{\sqrt{n}} = x_{n,1} - \frac{1}{\sqrt{n}} < \cdots < x_{n,n-1} + \frac{1}{\sqrt{n}} = x_{n,n} + \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}} < +\infty$$

Les intervalles sur lesquels est définie la fonction B_n constituent donc une partition de $\mathbb{R}$ constituée de $n+3$ ensembles. La fonction B_n est donc bien définie.

II.A –

Q 18. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0, n]\!]$. On a $n - k \in [\![0, n]\!]$. Ainsi $x_{n,n-k}$ est bien défini et
$$x_{n,k} + x_{n,n-k} = -\sqrt{n} + \frac{2k}{\sqrt{n}} + -\sqrt{n} + \frac{2(n-k)}{\sqrt{n}} = -2\sqrt{n} + \frac{2n}{\sqrt{n}} = 0$$

On conclut $\boxed{-x_{n,k} = x_{n,n-k}}$

Q 19. Par composition, la fonction φ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$. Ainsi
$$\forall x \geqslant 0,\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = \varphi(0) \geqslant \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-x^2} \geqslant 0$$

De plus la fonction φ est paire et donc $\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant \varphi(x) \leqslant \varphi(0)$. Ainsi φ est bornée sur $\mathbb{R}$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par définition, la fonction B_n prend un nombre fini de valeurs (au plus $n+3$).
Ainsi la fonction B_n est bornée sur $\mathbb{R}$.
Par somme la fonction $\varphi - \mathrm{B}_n$ est bornée sur $\mathbb{R}$ et y admet donc une norme infinie Δ_n.
On a bien $\boxed{\text{l'existence du réel } \Delta_n}$

Q 20. On a l'inclusion $\{|\mathrm{B}_n(x)-\varphi(x)| \mid x \geqslant 0\} \subset \{|\mathrm{B}_n(x)-\varphi(x)| \mid x \in \mathbb{R}\}$

Ainsi la partie de $\mathbb{R}$ non vide $\{|\mathrm{B}_n(x)-\varphi(x)| \mid x \geqslant 0\}$ est majorée par $\Delta_n = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |\mathrm{B}_n(x)-\varphi(x)|$.

Cette partie admet donc une borne supérieure dans $\mathbb{R}$ et on a

$$\Delta_n \geqslant \sup_{x\geqslant 0} |\mathrm{B}_n(x)-\varphi(x)|$$

Soit $y \in \mathbb{R}$. Nous allons procéder par disjonction exhaustive de cas.

Premier cas Si $y \geqslant 0$, on a $|\mathrm{B}_n(y)-\varphi(y)| \leqslant \sup\limits_{x\geqslant 0} |\mathrm{B}_n(x)-\varphi(x)|$.

Deuxième cas : Si $y < -\sqrt{n} - \dfrac{1}{\sqrt{n}} = x_{n,0} - \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

Alors $-y > \sqrt{n} + \dfrac{1}{\sqrt{n}} = x_{n,n} + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ et ainsi $\mathrm{B}_n(y) = 0 = \mathrm{B}_n(-y)$ et on a aussi $\varphi(y) = \varphi(-y)$.

D'où comme $-y > 0$, on a

$$|\mathrm{B}_n(y)-\varphi(y)| = |\mathrm{B}_n(-y)-\varphi(-y)| \leqslant \sup_{x\geqslant 0} |\mathrm{B}_n(x)-\varphi(x)|$$

Troisième cas : $y < 0$ et il existe $k \in [\![0,n]\!]$ tel que $y \in \left]x_{n,k} - \dfrac{1}{\sqrt{n}}, x_{n,k} + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right[$.

Alors, avec Q18, $-y \in \left]x_{n,n-k} - \dfrac{1}{\sqrt{n}}, x_{n,n-k} + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right[$. Donc

$$\mathrm{B}_n(-y) = \frac{\sqrt{n}}{2}\binom{n}{n-k}\frac{1}{2^n} = \frac{\sqrt{n}}{2}\binom{n}{k}\frac{1}{2^n} = \mathrm{B}_n(y)$$

Comme $-y \geqslant 0$, on a

$$|\mathrm{B}_n(y)-\varphi(y)| = |\mathrm{B}_n(-y)-\varphi(-y)| \leqslant \sup_{x\geqslant 0} |\mathrm{B}_n(x)-\varphi(x)|$$

Quatrième et dernier cas : $y < 0$ et il existe $k \in [\![0,n]\!]$ tel que $y = x_{n,k} - \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

À l'aide du troisième cas, on a

$$\forall t \in \left]x_{n,k} - \frac{1}{\sqrt{n}}, x_{n,k} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right[,\ |\mathrm{B}_n(t)-\varphi(t)| \leqslant \sup_{x\geqslant 0} |\mathrm{B}_n(x)-\varphi(x)|$$

Or la restriction de la fonction B_n à $\left[x_{n,k} - \dfrac{1}{\sqrt{n}}, x_{n,k} + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right[$ est continue car constante et φ également.

En faisant tendre t vers $y = x_{n,k} - \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, on obtient :

$$|\mathrm{B}_n(y)-\varphi(y)| \leqslant \sup_{x\geqslant 0} |\mathrm{B}_n(x)-\varphi(x)|$$

On vient de montrer $\forall y \in \mathbb{R}$, $|\mathrm{B}_n(y)-\varphi(y)| \leqslant \sup\limits_{x\geqslant 0} |\mathrm{B}_n(x)-\varphi(x)|$

Ce qui permet de conclure $\boxed{\Delta_n = \sup\limits_{x\geqslant 0} |\mathrm{B}_n(x)-\varphi(x)|}$

Q 21. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Suite $\left(\binom{n}{k}\right)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ **:** La suite $\left(\binom{n}{k}\right)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est à valeurs dans $]0, +\infty[$.

Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. On a

$$\frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}} = \frac{n!}{(k+1)! \cdot (n-k-1)!} \times \frac{k! \cdot (n-k)!}{n!} = \frac{n-k}{k+1}$$

Comme $k+1 > 0$, on a

$$\frac{n-k}{k+1} \leqslant 1 \iff n-k \leqslant k+1 \iff \frac{n+1}{2} \leqslant k \iff \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor \leqslant k$$

On note alors $q = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$. De sorte que

$$\forall k \in [\![q, n]\!], \ \binom{n}{k+1} \leqslant \binom{n}{k}$$

Ainsi la suite $\left(\binom{n}{k}\right)_{q \leqslant k \leqslant n}$ est décroissante.

Notations et premier cas : Soit $z \leqslant y$ dans $\mathbb{R}^+$.

Si $y \geqslant \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}$, on a alors $\mathrm{B}_n(z) \geqslant 0 = \mathrm{B}_n(y)$.

Sinon, comme $y < -\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}$, d'après la remarque en début de partie II, il existe un unique $k_y \in [\![0, n]\!]$ tel que $y \in \left[x_{n,k_y} - \frac{1}{\sqrt{n}}, x_{n,k_y} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right[$.

On note de même $k_z \in [\![0, n]\!]$ et on remarque que $0 \leqslant k_z \leqslant k_y \leqslant n$.

On a $x_{n,k_z} + \frac{1}{\sqrt{n}} > 0$ car $z \geqslant 0$.

On a ainsi $-\sqrt{n} + \frac{2k_z}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} > 0$ donc $k_z > \frac{n-1}{2}$.

Si n est impair : on a $q = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor = \frac{n+1}{2} = \frac{n-1}{2} + 1$.

Donc $q \leqslant k_z \leqslant k_y \leqslant n$ et selon l'étude ci dessus on a $\binom{n}{k_z} \geqslant \binom{n}{k_y}$. D'où

$$\mathrm{B}_n(z) = \frac{\sqrt{n}}{2}\binom{n}{k_z}\frac{1}{2^n} \geqslant \frac{\sqrt{n}}{2}\binom{n}{k_y}\frac{1}{2^n} = \mathrm{B}_n(y)$$

On donc montré $\mathrm{B}_n(z) \geqslant \mathrm{B}_n(y)$ dans tous les cas at ainsi B_n est décroissante sur $\mathbb{R}^+$ si n est impair.

Si n est pair : on a $q = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor = \frac{n}{2}$.

Comme $k_z > \frac{n}{2} - \frac{1}{2}$ et que k_z et $\frac{n}{2}$ sont entiers, on a alors

$$k_z \geqslant \frac{n}{2} = q$$

Ainsi de façon analogue au cas précédent on a $\mathrm{B}_n(z) \geqslant \mathrm{B}_n(y)$.

Ce qui donne la décroissance pour n est pair.

Dans tous les cas, $\boxed{\mathrm{B}_n \text{ est une application décroissante sur } \mathbb{R}^+}$

II.B –

Interprétons le :

« `Dans la suite de cette sous-partie, on suppose que` n `et` k `varient de sorte que` $k \in \mathrm{I}_n$`.` »

Ici le « k » utilisé par l'énoncé (qui dépend de n) doit être considéré comme le terme général d'une suite $(k_n)_n$ choisie de façon que $k_n \in \mathrm{I}_n$ dès que $\mathrm{I}_n \neq \emptyset$.

Avant d'obtenir des résultats asymptotiques, il s'agit dans un premier temps d'établir que la suite (k_n) est définie à partir d'un certain rang.

Par ailleurs dans l'optique du passage de la question 24 à la question 25, il s'agit de prouver que les divers O des questions 22 à 24, sont indépendants du choix de la suite (k_n).

Je trouve que le fait de devoir gérer tout cela en temps limité est un peu rude même sur ce concours.

Q 22. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. On a :

$$k \in \mathrm{I}_n \Longleftrightarrow 0 \leqslant -\sqrt{n} + \frac{2k}{\sqrt{n}} \leqslant \ell + 1 \Longleftrightarrow \frac{n}{2} \leqslant k \leqslant \frac{n + \sqrt{n}\,(\ell+1)}{2}$$

On a $\dfrac{n}{2} \geqslant 0$ et quand $n \to +\infty$, on a

$$\frac{n + \sqrt{n}\,(\ell+1)}{2} \sim \frac{n}{2} \quad \text{et} \quad \frac{n + \sqrt{n}\,(\ell+1)}{2} - \frac{n}{2} \sim \frac{\sqrt{n}\,(\ell+1)}{2} \to +\infty > 1$$

Comme $\mathrm{I}_n = [\![0, n]\!] \cap \left[\dfrac{n}{2}, \dfrac{n + \sqrt{n}\,(\ell+1)}{2}\right]$, alors à partir d'un certain rang I_n est non vide et la suite (k_n) est bien définie à partir d'un certain rang.

Ainsi par encadrement d'équivalents, on a :

$$k_n \sim \frac{n}{2} \quad \text{et aussi} \quad n - k_n \sim \frac{n}{2}$$

car on a $n - k_n = n - \left(\dfrac{n}{2} + o(n)\right) = \dfrac{n}{2} + o(n)$

Ainsi $k_n \longrightarrow +\infty$ et $n - k_n \longrightarrow +\infty$, on peut utiliser deux fois Stirling AOC grand cru :

$$k_n!(n-k_n)! = \left[\left(\frac{k_n}{\mathrm{e}}\right)^{k_n} \sqrt{2\pi k_n}\left(1 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{k_n}\right)\right)\right] \cdot \left[\left(\frac{n-k_n}{\mathrm{e}}\right)^{n-k_n} \sqrt{2\pi(n-k_n)}\left(1 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n-k_n}\right)\right)\right]$$

À l'aide des équivalents on a

$$\left(1 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{k_n}\right)\right)\left(1 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n-k_n}\right)\right) = \left(1 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2 = 1 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)$$

Par ailleurs comme $(n - k_n)$ et $k_n \in \left[\dfrac{n - \sqrt{n}\,(\ell+1)}{2}, \dfrac{n + \sqrt{n}\,(\ell+1)}{2}\right]$ les $\mathrm{O}(1/n)$ sont indépendants du choix de la suite (k_n). De plus, on a :

$$\left[\left(\frac{k_n}{\mathrm{e}}\right)^{k_n} \sqrt{2\pi k_n}\right] \cdot \left[\left(\frac{n-k_n}{\mathrm{e}}\right)^{n-k_n} \sqrt{2\pi n - k_n}\right] = 2\pi k_n^{k_n+1/2}\,(n-k_n)^{n-k_n+1/2}\,\mathrm{e}^{-n}$$

On peut conclure avec les termes de l'énoncé (que l'on gardera pour la suite) et avec un O indépendant du choix de (k_n) :

$$\boxed{k!(n-k)! = 2\pi\mathrm{e}^{-n}k^{k+1/2}(n-k)^{n-k+1/2}\left(1 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right)}$$

Q 23. Quand n tendant vers $+\infty$, on a à l'aide de la question précédente et de Stirling grand cru :

$$\frac{\sqrt{n}}{2^n}\binom{n}{k} = \frac{\sqrt{n}}{2^n}\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{\sqrt{n}}{2^n}\frac{\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\sqrt{2\pi n}\left(1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{2\pi \mathrm{e}^{-n}k^{k+1/2}(n-k)^{n-k+1/2}\left(1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{2k}{n}\right)^{k+1/2}\left(2-\frac{2k}{n}\right)^{n-k+1/2}}$$

On a utilisé $1/\left(1+\mathrm{O}(1/n)\right) = 1-\mathrm{O}(1/n) = 1+\mathrm{O}(1/n)$, on peut alors conclure que

$$\boxed{\mathrm{B}_n\left(x_{n,k}\right) = \frac{\sqrt{n}}{2}\binom{n}{k}\frac{1}{2^n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{2k}{n}\right)^{k+1/2}\left(2-\frac{2k}{n}\right)^{n-k+1/2}}}$$

avec un O indépendant du choix de k_n.

Q 24. Quand $n \longrightarrow +\infty$, on a par définition de $x_{n,k}$:

$$1-\frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}} = 2-\frac{2k}{n} \text{ et } 1+\frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}} = \frac{2k}{n} \text{ et } \left(1+\frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)\left(1-\frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right) = 1-\frac{x_{n,k}^2}{n}$$

Ainsi

$$\left(\frac{2k}{n}\right)^{k+1/2}\left(2-\frac{2k}{n}\right)^{n-k+1/2} = \left(1-\frac{x_{n,k}^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}\left(\frac{2k}{n}\right)^{k-n/2}\left(2-\frac{2k}{n}\right)^{n/2-k}$$

Comme $\frac{x_{n,k}}{2}\sqrt{n} = -\frac{n}{2}+k$, on a $\left(\frac{2k}{n}\right)^{k-n/2}\left(2-\frac{2k}{n}\right)^{n/2-k} = \left(1+\frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{x_{n,k}}{2}\sqrt{n}}\left(1-\frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)^{-\frac{x_{n,k}}{2}\sqrt{n}}$.

Avec 23, on peut en déduire que $\boxed{\mathrm{B}_n\left(x_{n,k}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(1-\frac{x_{n,k}^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}\left(1+\frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{x_{n,k}}{2}\sqrt{n}}\left(1-\frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)^{-\frac{x_{n,k}}{2}\sqrt{n}}}}$

En notant D le dénominateur, on a

$$2\ln(\mathrm{D}) = (n+1)\ln\left(1-\frac{x_{n,k}^2}{n}\right) + x_{n,k}\sqrt{n}\ln\left(1+\frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right) - x_{n,k}\sqrt{n}\ln\left(1-\frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)$$

À l'aide des encadrements de 22, on a $x_{n,k} = \mathrm{O}(1)$ car $k \in \mathrm{I}_n$ donc $\frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}} \longrightarrow 0$ et $x_{n,k}\sqrt{n} = \mathrm{O}(n)$. Ainsi

$$\ln\left(1+\frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right) = \frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right) \;;\; \ln\left(1-\frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right) = -\frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right) \text{ et } \ln\left(1-\frac{x_{n,k}^2}{n}\right) = -\frac{x_{n,k}^2}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

donc $2\ln(\mathrm{D}) = x_{n,k}^2 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ puis

$$\mathrm{B}_n\left(x_{n,k}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)}{\exp\left(\frac{x_{n,k}^2}{2}\right)}\exp\left[-\mathrm{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x_{n,k}^2}{2}\right)\left(1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$$

On conclut : $\boxed{\mathrm{B}_n\left(x_{n,k}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x_{n,k}^2}{2}\right)\left(1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)}$ où O est toujours indépendant du choix de (k_n).

Q 25. Comme quand $n \to +\infty$, $0 \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{x_{n,k}^2}{2}\right) \leqslant 1$, alors selon Q24 :

$$\mathrm{B}_n\left(x_{n,k}\right) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x_{n,k}^2}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x_{n,k}^2}{2}\right) \mathrm{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

avec un O uniforme pour tout choix de (k_n). On note alors δ_n ce $\mathrm{O}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Ainsi on dispose de $n_0 \in \mathbb{N}$ assez grand tel que

$$\forall n \geqslant n_0,\ \forall k \in \mathrm{I}_n,\ \left|\mathrm{B}_n\left(x_{n,k}\right) - \varphi\left(x_{n,k}\right)\right| \leqslant \delta_n \quad \text{et} \quad \delta_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

ce qui nous fournit $n_3 \geqslant n_0$ tel que $\forall n \geqslant n_3,\ \forall k \in \mathrm{I}_n,\ \left|\mathrm{B}_n\left(x_{n,k}\right) - \varphi\left(x_{n,k}\right)\right| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{4}$.

La fonction φ est continue sur le segment $[0, \ell]$ donc elle y est uniformément continue selon le théorème de Heine. Cela nous fournit $\alpha > 0$ tel que

$$\forall y, z \in [0, \ell],\ |y - z| \leqslant \alpha \Longrightarrow |\varphi(y) - \varphi(z)| \leqslant \frac{\varepsilon}{4}$$

Comme $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on dispose alors de $n_2 \geqslant n_3$ tel que $(k_n)_{n \geqslant n_2}$ est définie vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n \geqslant n_2 \Longrightarrow 0 \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant \alpha$$

De plus $x_{n,n} = \sqrt{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, on dispose alors de $n_1 \geqslant n_2$, tel que

$$\forall n \geqslant n_1,\ x_{n,n} = \sqrt{n} \geqslant \ell + 3$$

Soit $n \geqslant n_1$. Soit $y \in [0, \ell]$.

Comme $(x_{n,p})_{0 \leqslant p \leqslant n}$ est subdivision régulière d'un segment contenant $[0, \ell + 1]$ et de pas $2/\sqrt{n}$, on dispose d'un unique $k \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $x_{n,k} - \dfrac{1}{\sqrt{n}} \leqslant y < x_{n,k} + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. De plus, on a $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \leqslant \alpha$, alors

$$|y - x_{n,k}| \leqslant \alpha \text{ et } x_{n,k} - \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant y < x_{n,k} + \frac{1}{\sqrt{n}} < x_{n,k+1} \leqslant \ell + 1$$

car $x_{n,k+1} - y \leqslant x_{n,k+1} - x_{n,k} + \dfrac{1}{\sqrt{n}} = \dfrac{3}{\sqrt{n}} \leqslant 1$ car $\sqrt{n} \geqslant \ell + 3 \geqslant 3$.

Si $x_{n,k} \geqslant 0$, alors $k \in \mathrm{I}_n$ et comme $\mathrm{B}_n\left(x_{n,k}\right) = \mathrm{B}_n(y)$, on a

$$|\mathrm{B}_n(y) - \varphi(y)| \leqslant \left|\mathrm{B}_n(y) - \mathrm{B}_n\left(x_{n,k}\right)\right| + \left|\mathrm{B}_n\left(x_{n,k}\right) - \varphi\left(x_{n,k}\right)\right| + \left|\varphi\left(x_{n,k}\right) - \varphi(y)\right| \leqslant 0 + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4}$$

Dans le cas où $x_{n,k} < 0$ alors comme $x_{n,k+1} > 0$, on est donc dans le cas où n est impair $(2k + 1 = n)$ et $k + 1 \in \mathrm{I}_n$. Comme $\dbinom{n}{k} = \dbinom{n}{k+1}$, alors

$$\mathrm{B}_n\left(x_{n,k+1}\right) = \mathrm{B}_n\left(x_{n,k}\right) = \mathrm{B}_n(y) \text{ et } x_{n,k} = -x_{n,k+1} \text{ et } \varphi\left(x_{n,k+1}\right) = \varphi\left(x_{n,k}\right) \text{ puis}$$

$$|\mathrm{B}_n(y) - \varphi(y)| \leqslant \left|\mathrm{B}_n\left(x_{n,k+1}\right) - \varphi\left(x_{n,k+1}\right)\right| + \left|\varphi\left(x_{n,k}\right) - \varphi(y)\right| \leqslant 2\frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}$$

Ainsi pour tout entier $n \geqslant n_1$, on a $\boxed{\sup_{x \in [0,\ell]} |\mathrm{B}_n(x) - \varphi(x)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}}$

II.C –

Q 26. Soit $\ell > 0$.

*L'auteur nous force donc à écraser le ℓ introduit par lui-même en début de la sous-partie **II-B**. La métaphore du « serpents se mordant la queue » s'applique donc.*

On peut appliquer la sous-partie II-B au segment $[0, \ell]$ et à $\varepsilon = 2\varphi(\ell) > 0$. En effet, on ne s'est pas servi de la relation entre ℓ et ε : $2\varphi(\ell) \leqslant \varepsilon$.

La partie II-B nous fournit $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant n_2,\ \sup_{x\in[0,\ell]} |\mathrm{B}_n(x) - \varphi(x)| \leqslant \frac{2\varphi(\ell)}{2} = \varphi(\ell)$$

Ainsi $\boxed{\text{pour tout } n \geqslant n_2,\ \mathrm{B}_n(\ell) \leqslant 2\varphi(\ell)}$

Q 27. Soit $\delta > 0$.

Comme $\varphi(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, on dispose de $\mathrm{A} > 0$ tel que $\varphi(\mathrm{A}) \leqslant \dfrac{\delta}{3}$.

En appliquant la partie II-B à $\varepsilon = \dfrac{2\delta}{3}$ et $\ell = \mathrm{A}$ ($\ell > 0$ et $\varphi(\ell) \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$ *(vérification complètement inutile !)*),

on dispose de $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_1,\ \displaystyle\sup_{x\in[0,\ell]} |\mathrm{B}_n(x) - \varphi(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\delta}{3} \leqslant \delta$.

De plus la question 26 nous fournit $n_2 \in \mathbb{N}^*$, tel que $\forall n \geqslant n_2$, $\mathrm{B}_n(\mathrm{A}) = \mathrm{B}_n(\ell) \leqslant 2\varphi(\ell) = 2\varphi(\mathrm{A})$.

On pose $\mathrm{N} = \max(n_1, n_2)$. Soit $n \geqslant \mathrm{N}$. Soit $y \in \mathbb{R}^+$.

Si $y \in [0, \mathrm{A}]$, on a donc

$$|\mathrm{B}_n(y) - \varphi(y)| \leqslant \sup_{x\in[0,\mathrm{A}]} |\mathrm{B}_n(x) - \varphi(x)| \leqslant \delta$$

Si $y > \mathrm{A}$, avec les positivités et les décroissances sur $\mathbb{R}^+$ de φ et de B_n (Q21), on a

$$|\mathrm{B}_n(y) - \varphi(y)| \leqslant \mathrm{B}_n(y) + \varphi(y) \leqslant \mathrm{B}_n(\mathrm{A}) + \varphi(\mathrm{A}) \leqslant 3\varphi(\mathrm{A}) \leqslant \delta$$

Ainsi $\Delta_n = \displaystyle\sup_{x\in\mathbb{R}^+} |\mathrm{B}_n(x) - \varphi(x)| \leqslant \delta$. Comme $\Delta_n \geqslant 0$, on a donc montré :

$$\forall \delta > 0,\ \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant \mathrm{N} \Longrightarrow |\Delta_n| \leqslant \delta$$

Ce qui signifie que $\boxed{\text{la suite } (\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge vers } 0}$

III Applications

III.A – Théorème central limite

Q 28. Pour g fonction bornée sur I, je note $\|g\|_\infty = \displaystyle\sup_{x\in\mathrm{I}} |g(x)|$.

Comme (f_n) converge uniformément sur I vers f, on dispose de $\mathrm{N}_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant \mathrm{N}_0$, $f - f_n$ est bornée sur I.

Soit $w \in \mathrm{I}$. Soit $n \geqslant \mathrm{N}_0$. On a

$$\left|\int_w^v f(x)\,\mathrm{d}x - \int_w^{v_n} f_n(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \left|\int_w^v f - \int_w^{v_n} f + \int_w^{v_n} f - \int_w^{v_n} f_n\right| \leqslant \left|\int_v^{v_n} f\right| + \left|\int_w^{v_n} (f - f_n)\right|$$

Je note la fonction $\mathrm{F} : x \longmapsto \displaystyle\int_v^x f$ qui est continue sur I car localement lipschitzienne (f étant bornée sur tout segment) .

Ainsi

$$\left|\int_w^v f(x)\,\mathrm{d}x - \int_w^{v_n} f_n(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant |\mathrm{F}(v)-\mathrm{F}(v_n)| + \left|\int_w^{v_n} \|f-f_n\|_\infty\,\mathrm{d}x\right| \leqslant |\mathrm{F}(v)-\mathrm{F}(v_n)| + |w-v_n|\cdot\|f-f_n\|_\infty$$

Or le membre de droite est de limite nulle, ainsi $\left|\int_w^v f(x)\,\mathrm{d}x - \int_w^{v_n} f_n(x)\,\mathrm{d}x\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ d'où

$$\int_w^{v_n} f_n(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_w^v f(x)\,\mathrm{d}x$$

De manière analogue, on a $\int_{u_n}^w f_n(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_u^w f(x)\,\mathrm{d}x$

Par somme, on obtient : $\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(\int_{u_n}^{v_n} f_n(x)\,\mathrm{d}x\right) = \int_u^v f(x)\,\mathrm{d}x}$

Q 29. Par indépendance mutuelle des X_i $(1\leqslant i\leqslant n)$, les Y_i le sont également selon le lemme des coalitions. De plus on remarque que $\forall i\in[\![1,n]\!],\ \mathrm{Y}_i\sim\mathcal{B}(1/2)$ (loi de Bernoulli).

Ainsi $\mathrm{T}_n=\sum_{i=1}^n \mathrm{Y}_i\sim\mathcal{B}(n,1/2)$ (loi de binomiale). Soit $j\in[\![0,n]\!]$. On a alors

$$\mathbb{P}\left(\{\mathrm{T}_n=j\}\right) = \binom{n}{j}\left(\frac{1}{2}\right)^j\left(\frac{1}{2}\right)^{n-j} = \frac{\binom{n}{j}}{2^n}$$

D'un autre côté, B_n est constante sur $[x_{n,j}-1/\sqrt{n}, x_{n,j}+1/\sqrt{n}[$ égale à $\frac{\sqrt{n}}{2}\binom{n}{j}\frac{1}{2^n}$. Ainsi

$$\int_{x_{n,j}-1/\sqrt{n}}^{x_{n,j}+1/\sqrt{n}} \mathrm{B}_n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{n}}\times\frac{\sqrt{n}}{2}\binom{n}{j}\frac{1}{2^n}$$

On peut alors conclure que $\boxed{\mathbb{P}\left(\{\mathrm{T}_n=j\}\right) = \int_{x_{n,j}-1/\sqrt{n}}^{x_{n,j}+1/\sqrt{n}} \mathrm{B}_n(x)\,\mathrm{d}x}$

Q 30. On remarque que $\mathrm{T}_n=\frac{\mathrm{S}_n+n}{2}$. Ainsi $\mathrm{S}_n=2\mathrm{T}_n-n$ donc comme T_n est à valeurs dans $[\![0,n]\!]$.

$$\left\{u\leqslant\frac{\mathrm{S}_n}{\sqrt{n}}\leqslant v\right\} = \left\{\mathrm{T}_n\in\left[\frac{u\sqrt{n}+n}{2},\frac{v\sqrt{n}+n}{2}\right]\right\} = \bigcup_{j\in\mathrm{J}_n}\{\mathrm{T}_n=j\}$$

Comme l'union est disjointe, on a bien $\boxed{\mathbb{P}\left(\left\{u\leqslant\frac{\mathrm{S}_n}{\sqrt{n}}\leqslant v\right\}\right) = \sum_{j\in\mathrm{J}_n}\mathbb{P}\left(\{\mathrm{T}_n=j\}\right)}$

Q 31. Le premier résultat : On a $\dfrac{n+u\sqrt{n}}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et $n-1-\dfrac{n+v\sqrt{n}}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

Ce qui nous fournit $\mathrm{N}_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant \mathrm{N}_0,\ \mathrm{J}_n \cap [\![0, n-1]\!] \neq \emptyset$.

On a vu en début de partie II que $\forall j \in [\![0, n-1]\!],\ x_{n,j} + \dfrac{2}{\sqrt{n}} = x_{n,j+1}$.

Soit $n \geqslant \mathrm{N}_0$. Je note $j_m = \min(\mathrm{J}_n)$ et $j_{\mathrm{M}} = \max(\mathrm{J}_n)$.

On a à l'aide des deux questions précédentes et la relation de Chasles :

$$\mathbb{P}\left(\left\{u \leqslant \frac{\mathrm{S}_n}{\sqrt{n}} \leqslant v\right\}\right) = \sum_{j\in \mathrm{J}_n} \int_{x_{n,j}-1/\sqrt{n}}^{x_{n,j}+1/\sqrt{n}} \mathrm{B}_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x_{n,j_m}-1/\sqrt{n}}^{x_{n,j_{\mathrm{M}}}+1/\sqrt{n}} \mathrm{B}_n(x)\,\mathrm{d}x$$

Par définition de J_n, on a $j_m - 1 < \dfrac{n+u\sqrt{n}}{2} \leqslant j_m$

donc $\dfrac{n+u\sqrt{n}}{2} \leqslant j_m < \dfrac{n+u\sqrt{n}}{2} + 1$. Ainsi

$$\frac{n+u\sqrt{n}}{\sqrt{n}} - \sqrt{n} \leqslant x_{n,j_m} < \frac{n+u\sqrt{n}}{\sqrt{n}} - \sqrt{n} + \frac{2}{\sqrt{n}}$$

À l'aide du théorème des gendarmes, on a $x_{n,j_m} \xrightarrow[n\to+\infty]{} u$ puis $x_{n,j_m} - 1/\sqrt{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} u$

De même $x_{n,j_{\mathrm{M}}} + 1/\sqrt{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} v$

Par ailleurs les fonctions φ et B_n $(n \in \mathbb{N}^*)$ sont continues par morceaux sur $\mathbb{R}$ et la suite $(\mathrm{B}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers φ sur $\mathbb{R}$ selon la partie II.

Ainsi Q28 s'applique et on a

$$\int_{x_{n,j_m}-1/\sqrt{n}}^{x_{n,j_{\mathrm{M}}}+1/\sqrt{n}} \mathrm{B}_n(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_u^v \varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

Ce qui permet de conclure que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left\{u \leqslant \frac{\mathrm{S}_n}{\sqrt{n}} \leqslant v\right\}\right) = \int_u^v \varphi(x)\,\mathrm{d}x}$

Pour le deuxième résultat je propose deux méthodes que je désigne par (a) et (b).

Étape 1(a) : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $\mathbb{R}$ est archimédien, on a :

$$\left\{u \leqslant \frac{\mathrm{S}_n}{\sqrt{n}}\right\} = \bigcup_{p\in\mathbb{N}^*} \left\{u \leqslant \frac{\mathrm{S}_n}{\sqrt{n}} \leqslant u+p\right\}$$

Ainsi par continuité croissante : $\mathbb{P}\left(\left\{u \leqslant \frac{\mathrm{S}_n}{\sqrt{n}}\right\}\right) = \lim\limits_{p\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left\{u \leqslant \frac{\mathrm{S}_n}{\sqrt{n}} \leqslant u+p\right\}\right)$

Il s'agit donc d'établir l'existence des membres et l'égalité :

$$\lim_{n\to+\infty}\lim_{p\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left\{u \leqslant \frac{\mathrm{S}_n}{\sqrt{n}} \leqslant u+p\right\}\right) = \lim_{p\to+\infty}\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left\{u \leqslant \frac{\mathrm{S}_n}{\sqrt{n}} \leqslant u+p\right\}\right)$$

Pour pouvoir obtenir à l'aide du résultat précédent

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left\{u \leqslant \frac{\mathrm{S}_n}{\sqrt{n}}\right\}\right) = \lim_{p\to+\infty} \int_u^{u+p} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_u^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

Étape 2(a) : on va établir le résultat de double limite (échange de limites).

Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on note $f_p \ : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & \mathbb{P}\left(\left\{u \leqslant \dfrac{\mathrm{S}_n}{\sqrt{n}} \leqslant u+p\right\}\right) \end{array}\right.$ et $f \ : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & \mathbb{P}\left(\left\{u \leqslant \dfrac{\mathrm{S}_n}{\sqrt{n}}\right\}\right) \end{array}\right.$.

(i) Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a vu, selon le premier résultat que :

$$\lim_{n\to+\infty} f_p(n) = \int_u^{u+p} \varphi(x)\,\mathrm{d}x \quad \textbf{(i)}$$

(ii) Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Comme on a l'union disjointe

$$\left\{u \leqslant \frac{\mathrm{S}_n}{\sqrt{n}} \leqslant u+p\right\} \cup \left\{u+p < \frac{\mathrm{S}_n}{\sqrt{n}}\right\} = \left\{u \leqslant \frac{\mathrm{S}_n}{\sqrt{n}}\right\}$$

Ainsi on a

$$0 \leqslant f(n) - f_p(n) = \mathbb{P}\left(\left\{u+p < \frac{\mathrm{S}_n}{\sqrt{n}}\right\}\right)$$

On a $\mathrm{S}_n = \sum\limits_{i=1} \mathrm{X}_i$ où les X_i sont indépendantes et admettent un moment d'ordre 2 car bornées.

On a $\mathbb{E}(\mathrm{S}_n) = \sum\limits_{i=1}^n \mathbb{E}(\mathrm{X}_i) = 0$ et $\mathbb{V}(\mathrm{S}_n) = \sum\limits_{i=1}^n \mathbb{V}(\mathrm{X}_i) = \sum\limits_{i=1}^n \left(\mathbb{E}(\mathrm{X}_i^2) - \mathbb{E}(\mathrm{X}_i)^2\right) = \sum\limits_{i=1}^n (1-0) = n$

Ainsi $\mathbb{E}\left(\dfrac{\mathrm{S}_n}{\sqrt{n}}\right) = 0$ et $\mathbb{V}\left(\dfrac{\mathrm{S}_n}{\sqrt{n}}\right) = \dfrac{\mathbb{V}(\mathrm{S}_n)}{\sqrt{n}^2} = 1$.

On choisit $p_0 = 1 + |\lfloor -u \rfloor|$ et on suppose que $p \geqslant p_0$ de sorte que $u+p > 0$.

Comme $\left\{u+p < \dfrac{\mathrm{S}_n}{\sqrt{n}}\right\} \subset \left\{u+p \leqslant \left|\dfrac{\mathrm{S}_n}{\sqrt{n}} - \mathbb{E}\left(\dfrac{\mathrm{S}_n}{\sqrt{n}}\right)\right|\right\}$, en appliquant Bienaymé-Tchebychev, on a

$$\mathbb{P}\left(\left\{u+p < \frac{\mathrm{S}_n}{\sqrt{n}}\right\}\right) \leqslant \frac{1}{(u+p)^2}$$

On a donc montré

$$\forall p \geqslant p_0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ |f(n) - f_p(n)| \leqslant \frac{1}{(u+p)^2}$$

Or on a $\dfrac{1}{(u+p)^2} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$ (majorant indépendant de n).

Ainsi la suite $(f_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{N}^*$.

Avec **(i)** et **(ii)**, le théorème de la double limite s'applique ce qui nous donne l'existence des membres et l'égalité :

$$\lim_{n\to+\infty} f(n) = \lim_{n\to+\infty}\lim_{p\to+\infty} f_p(n) = \lim_{p\to+\infty}\lim_{n\to+\infty} f_p(n)$$

Étape 3(a) : on peut conclure

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left\{u \leqslant \frac{\mathrm{S}_n}{\sqrt{n}}\right\}\right) = \lim_{p\to+\infty} \int_u^{u+p} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_u^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{u} \varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

C'est à dire : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left\{u \leqslant \dfrac{\mathrm{S}_n}{\sqrt{n}}\right\}\right) = 1 - \Phi(u)}$ en utilisant Q9.

Étape 1(b) : On montre $\mathbb{P}\left(\left\{\frac{S_n}{\sqrt{n}} = u\right\}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Soit $\varepsilon > 0$. L'application $X \longmapsto \int_u^X \varphi$ étant continue sur $\mathbb{R}$ nous fournit $w > u$ tel que $0 \leqslant \int_u^w \varphi \leqslant \varepsilon/2$.

D'après ce qui précède on a $\mathbb{P}\left(\left\{u \leqslant \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leqslant w\right\}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_u^w \varphi$ ce qui nous fournit N_0 tel que

$$\forall n \geqslant N_0,\ 0 \leqslant \mathbb{P}\left(\left\{\frac{S_n}{\sqrt{n}} = u\right\}\right) \leqslant \mathbb{P}\left(\left\{u \leqslant \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leqslant w\right\}\right) \leqslant \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

ce qui prouve le résultat annoncé.

Étape 2(b) : On montre que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n \sim -S_n$ (loi symétrique).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On remarque que $\forall i \in [\![1, n]\!],\ X_i \sim -X_i$.

Or les X_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ sont mutuellement indépendantes, il en est donc de même pour les $-X_i$ selon le lemme des coalitions.

Ainsi la distribution de probabilités du vecteurs $(X_1, \ldots, X_n)$ est le produit de celles des X_i et il en est de même pour les $-X_i$. Par conséquent, on a

$$(X_1, \ldots, X_n) \sim (-X_1, \ldots, -X_n)$$

En utilisant la fonction $(x_1, \ldots, x_n) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} x_i$, on obtient :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \sum_{i=1}^{n} (-X_i) = -S_n$$

Étape 3(b) : On montre l'existence des membres et l'égalité :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left\{0 \leqslant \frac{S_n}{\sqrt{n}}\right\}\right) = \int_0^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} = \int_{-\infty}^{0} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left\{\frac{S_n}{\sqrt{n}} \leqslant 0\right\}\right)$$

Selon Q9, on a $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Ainsi par parité de φ, on a : $\int_0^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} = \int_{-\infty}^{0} \varphi(x)\,\mathrm{d}x$

Selon l'étape 2b : on a $\mathbb{P}\left(\left\{0 \leqslant \frac{S_n}{\sqrt{n}}\right\}\right) = \mathbb{P}\left(\left\{\frac{S_n}{\sqrt{n}} \leqslant 0\right\}\right)$

or on a $\mathbb{P}\left(\left\{0 \leqslant \frac{S_n}{\sqrt{n}}\right\}\right) + \mathbb{P}\left(\left\{\frac{S_n}{\sqrt{n}} \leqslant 0\right\}\right) = \mathbb{P}(\Omega) + \mathbb{P}\left(\left\{\frac{S_n}{\sqrt{n}} = 0\right\}\right)$ donc

$$2\mathbb{P}\left(\left\{0 \leqslant \frac{S_n}{\sqrt{n}}\right\}\right) = 2\mathbb{P}\left(\left\{\frac{S_n}{\sqrt{n}} \leqslant 0\right\}\right) = 1 + \mathbb{P}\left(\left\{\frac{S_n}{\sqrt{n}} = 0\right\}\right)$$

Selon l'étape 1b, on a le résultat voulu, par passage à la limite.

Étape 4(b) : On montre $\mathbb{P}\left(\left\{u \leqslant \frac{S_n}{\sqrt{n}}\right\}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_u^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x$.

Premier cas : on suppose $u \geqslant 0$. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}\left(\left\{u \leqslant \frac{S_n}{\sqrt{n}}\right\}\right) = \mathbb{P}\left(\left\{0 \leqslant \frac{S_n}{\sqrt{n}}\right\}\right) - \mathbb{P}\left(\left\{0 \leqslant \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leqslant u\right\}\right) + \mathbb{P}\left(\left\{\frac{S_n}{\sqrt{n}} = u\right\}\right)$$

Par passage à la limite et à l'aide de ce qui précède on a

$$\mathbb{P}\left(\left\{u \leqslant \frac{S_n}{\sqrt{n}}\right\}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^{u} \varphi(x)\,\mathrm{d}x + 0$$

On conclut à l'aide de Chasles, pour ce cas.

Deuxième cas : on suppose $u < 0$. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}\left(\left\{u \leqslant \frac{S_n}{\sqrt{n}}\right\}\right) = \mathbb{P}\left(\left\{u \leqslant \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leqslant 0\right\}\right) + \mathbb{P}\left(\left\{0 \leqslant \frac{S_n}{\sqrt{n}}\right\}\right) - \mathbb{P}\left(\left\{\frac{S_n}{\sqrt{n}} = 0\right\}\right)$$

Par passage à la limite et en utilisant Chasles, on établit le résultat pour cet autre cas.

Étape 5(b) : La conclusion. À l'aide de Q9, on sait que

$$\int_u^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{u} \varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

Selon l'étape 4b, on a donc bien $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left\{u \leqslant \frac{S_n}{\sqrt{n}}\right\}\right) = 1 - \Phi(u)$

III.B – Critère de tension

Q 32. Soit $x > 0$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $\{|S_n| \geqslant x\sqrt{n}\} = \left\{x \leqslant \frac{S_n}{\sqrt{n}}\right\} \cup \left\{-x \geqslant \frac{S_n}{\sqrt{n}}\right\}$ (union disjointe).

Comme en Q31, on peut montrer que $\forall u \in \mathbb{R},\ \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left\{u \geqslant \frac{S_n}{\sqrt{n}}\right\}\right) = 1 - \Phi(u)$. Ainsi

$$\mathbb{P}\left(\{|S_n| \geqslant x\sqrt{n}\}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2(1 - \Phi(x))$$

En utilisant Q12, on obtient $2x^2(1 - \Phi(x)) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

Ce qui nous fournit $x_0 \geqslant 1$ tel que $\forall x \geqslant x_0,\ \left|2x^2(1 - \Phi(x))\right| \leqslant \varepsilon/2$.

Soit $x \geqslant x_0$. On a

$$x^2\mathbb{P}\left(\{|S_n| \geqslant x\sqrt{n}\}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2x^2(1 - \Phi(x))$$

ce qui nous fournit $n_x \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant n_x,\ \left|x^2\mathbb{P}\left(\{|S_n| \geqslant x\sqrt{n}\}\right) - 2x^2(1 - \Phi(x))\right| \leqslant \varepsilon/2$$

On a bien l'existence de $\boxed{n_x \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geqslant n_x,\ x^2\mathbb{P}\left(\{|S_n| \geqslant x\sqrt{n}\}\right) \leqslant \varepsilon}$

Q 33. On a donc $\forall m \geqslant n_x, \quad x^2\mathbb{P}\left(\{|S_m| \geqslant x\sqrt{m}\}\right) \leqslant \varepsilon$.

On a $x\sqrt{n} > 0$ et par mutuelle indépendance des X_i, la sous-partie IC s'applique et on a :

$$\mathbb{P}\left(\left\{\max_{1\leqslant p\leqslant n} |S_p| \geqslant 3x\sqrt{n}\right\}\right) \leqslant 3 \max_{1\leqslant p\leqslant n} \mathbb{P}\left(\left\{|S_p| \geqslant x\sqrt{n}\right\}\right)$$

Soit $p \in [\![1, n]\!]$. Il s'agit d'établir que $x^2\mathbb{P}\left(\{|S_p| \geqslant x\sqrt{n}\}\right) \leqslant \varepsilon$.

Premier cas : si $p \geqslant n_x$ alors la question 32 s'applique et on a

$$x^2\mathbb{P}\left(\{|S_p| \geqslant x\sqrt{p}\}\right) \leqslant \varepsilon$$

Comme $\{|S_p| \geqslant x\sqrt{n}\} \subset \left\{|S_p| \geqslant x\sqrt{p}\right\}$, on a bien le résultat voulu.

Deuxième cas : si $p < n_x$, on applique l'inégalité de Jules-Irénée et Pafnouti à S_p.

Comme les X_i sont dans L^2, alors il en est de même pour S_p. On a $\mathbb{E}(S_p) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \mathbb{E}(X_i) = 0$ et par indépendance des X_i, on a $\mathbb{V}(S_p) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \mathbb{V}(X_i) = \sum_{i=1}^{p} \left(\mathbb{E}(X_i^2) - \mathbb{E}(X_i)^2\right) = p$.

Comme $x\sqrt{n} > 0$, on a

$$\mathbb{P}\left(\left\{|S_p| \geqslant x\sqrt{n}\right\}\right) = \mathbb{P}\left(\left\{|S_p - \mathbb{E}(S_p)| \geqslant x\sqrt{n}\right\}\right) \leqslant \frac{\mathbb{V}(S_p)}{\left(x\sqrt{n}\right)^2} = \frac{p}{x^2 n}$$

On a $1 \leqslant p < n_x \leqslant n\varepsilon$ donc

$$\mathbb{P}\left(\left\{|S_p| \geqslant x\sqrt{n}\right\}\right) \leqslant \frac{n\varepsilon}{x^2 n}$$

Conclusion : On a bien établi le résultat voulu pour tout $p \in [\![1, n]\!]$. Ce qui permet de conclure que

$$\boxed{x^2\mathbb{P}\left(\left\{\max_{1\leqslant p\leqslant n} |S_p| \geqslant 3x\sqrt{n}\right\}\right) \leqslant 3\varepsilon}$$

• • • FIN • • •

Mathématiques 2

Présentation du sujet

Le sujet propose l'étude d'une suite particulière de fonctions qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction gaussienne $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-t^2/2}$. On en déduit deux applications : une démonstration de la première version du théorème central limite (avec des variables aléatoires de Bernoulli) et une démonstration d'une inégalité de concentration. Les questions sont réparties en trois parties décrites ci-après.

La partie I a pour but de donner une démonstration de l'égalité classique $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}$ (*via* une utilisation adéquate du théorème de la convergence dominée) ainsi que celle de l'équivalent

$$\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2/2}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{2\pi}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{-x^2/2}}{x\sqrt{2\pi}}.$$

On y montre également une inégalité probabiliste qualifiée d'inégalité maximale qui énonce dans les grandes lignes que borner toutes les sommes partielles $\sum_{i=1}^{p} Z_i$ d'une somme de n variables aléatoires indépendantes Z_i est essentiellement équivalent à borner la somme totale $\sum_{i=1}^{n} Z_i$.

La partie II définit une suite de fonctions $B_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui sont constantes par morceaux et étudie la convergence uniforme de (B_n) sur $\mathbb{R}$ vers la fonction gaussienne $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-t^2/2}$.

Enfin la partie III s'attelle à prouver les applications énoncées ci-dessus : théorème central limite et inégalité de concentration (appelée dans le sujet « critère de tension »).

Analyse globale des résultats

Le sujet couvre un spectre assez large des connaissances du programme : analyse, probabilités, intégration, comportement asymptotique. Concernant la prestation des candidats, le bilan est globalement mitigé.

Les questions plutôt élémentaires (voire reposant sur une connaissance basique du cours) ont été bien traitées bien que, comparativement aux années précédentes, les questions de nature asymptotique et probabilistes sont moins bien maîtrisées. Le jury espère que cela reste exceptionnel et que cela n'est pas un signe de baisse de niveau sur ces points du programme.

Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux futurs candidats

La partie I a naturellement été abordée dans la totalité des copies tout comme la partie II.

La partie I est globalement bien réussie (hormis la partie probabiliste I.C). On note cependant beaucoup de lacunes sur les arguments qui concernent des comportements asymptotiques (et donc qui nécessitent une maitrise des symboles O et $\sim$ qui dépassent la simple connaissance de leur définition). En pratique, montrer un équivalent $I_n \sim K_n$ revient presque systématiquement à prouver la limite $\frac{I_n}{K_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et cela semble inconnu de beaucoup trop de candidats.

La partie II a été moyennement réussie. De nouveau, ce sont souvent les questions d'étude asymptotique qui ont posé problème. La question **Q22** n'a quasiment jamais été réussie (ce qui est compréhensible vu sa difficulté). En revanche, le jury est un peu déçu concernant la question **Q23** qui nécessite de connaitre le développement limité $\frac{1}{1+z} = 1 + O(z)$ au voisinage de $z = 0$.

La partie III, ayant trait aux applications, n'a été abordée que dans 33 % des copies environ. Bien que cette partie ne contienne que six questions, ce pourcentage est assez faible par comparaison aux années précédentes concernant une dernière partie. La raison est sans doute la difficulté des questions (trois questions, voire quatre, sont relativement délicates).

On ne commente ci-après que la plupart des questions majoritairement traitées (celles de la partie III ont été très peu abordées).

Q1 et **Q2**. Ces questions ont globalement été bien faites. On note que de nombreuses copies oublient que c'est la continuité (ou continuité par morceaux) de l'intégrande qui assure que la borne $+\infty$ est le seul problème d'intégration. Signalons que le calcul de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ a parfois posé quelques soucis (ou bien fausse primitive ou bien mauvaise valeur de $\lim_{t\to+\infty} \arctan t$).

Q3. On peut soit minorer $1+t^2 \geqslant 2t$ soit $1+t^2 \geqslant 1+t$. Signalons que l'inégalité $1+t^2 \geqslant 2t$, trivialement équivalente à $(t-1)^2 \geqslant 0$, a parfois été démontrée géométriquement en invoquant la position de la tangente au point $(1,2)$ du graphe de la fonction convexe $t \mapsto 1+t^2$.

Cette question a souvent fait l'objet d'une confusion assez grave : on souhaite comparer, pour $n \to +\infty$, une intégrale (dépendante de n) avec $\frac{1}{n2^n}$, or certaines copies ont comparé l'intégrande avec $t \to +\infty$ puis ont intégré. Cela fait perdre toutes les informations de l'intégrale et ne peut pas aboutir.

Signalons au passage que, *stricto sensu*, la question nécessite de majorer $|\int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t|$ et qu'une mention de la positivité de l'intégrale est bienvenue. Le jury n'a cependant pas pénalisé ce défaut d'inattention mineur.

Q4. Dans de nombreuses copies, l'équivalence $I_n \sim K_n$ est reformulée en $\lim_{n\to+\infty} I_n - K_n = 0$ ou $I_n - K_n = O(I_n)$, ce qui est faux.

Q5. Cette question a été très bien réussie alors qu'elle ne comporte aucune indication. En effet, la formule $K_n = K_{n+1} + \frac{1}{2n}K_n$ s'obtient grâce à une intégration par parties. Signalons cependant que cette intégration par parties doit être effectuée sur un intervalle non borné et le calcul nécessite quelques explications : par passage à des bornes finies ou bien, comme autorisé dans le programme, par légitimité des limites dans le crochet (le programme assure en effet que *l'existence des limites du produit fg aux bornes de l'intervalle assure que les intégrales de fg' et de $f'g$ sont de même nature*).

Q6. Question de synthèse moyennement réussie. Dans la plupart des copies, les questions précédentes permettent une bonne compréhension de la question : il suffit d'obtenir un équivalent de (K_n), puis la relation de récurrence précédente amène facilement à la formule

$$K_n = \frac{\prod_{s=1}^{n-1} 2s-1}{\prod_{s=1}^{n-1} 2s} \underbrace{K_1}_{=\pi/2}.$$

Mentionnons que le jury n'a pas jugé utile d'exiger la formalisation d'une récurrence aussi immédiate (avec mise en évidence d'une hypothèse de récurrence, d'une preuve d'initialisation et d'une preuve d'hérédité). En revanche, la suite a parfois posé des problèmes. L'idée est alors de faire intervenir des factorielles puis la formule de Stirling :

$$K_n = \frac{(2n-2)!}{\left((n-1)!2^{n-1}\right)^2}\frac{\pi}{2} \sim \frac{(2n-2)^{2n-2}\mathrm{e}^{-2n+2}\sqrt{2\pi(2n-2)}}{\left((n-1)^{n-1}\mathrm{e}^{-n+1}\sqrt{2\pi(n-1)}2^{n-1}\right)^2}\frac{\pi}{2} \sim \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{n}}\frac{\pi}{2}$$

et donc $K_n \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}$. Signalons que les calculs sont légèrement plus simples en cherchant un équivalent de K_{n+1}. Certaines copies ont d'ailleurs confondu l'expression de K_{n+1} avec celle de K_n mais trouvent le bon équivalent par pure chance (sans remarquer que l'on a bien $K_{n+1} \sim K_n$ à priori grâce à la formule de récurrence ou à posteriori grâce à l'expression finale de l'équivalent).

Q7. Question très bien réussie. L'explicitation du changement de variable linéaire (ou affine) suffit largement pour convaincre le jury.

Q8. Le théorème de la convergence dominée est à priori attendu.

- Concernant l'hypothèse de limite simple, une preuve rigoureuse de la limite $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(1+u^2/n)^n} = \mathrm{e}^{-u^2}$ est attendue. Ajoutons que l'intégrale $\int_0^{\sqrt{n}}\frac{1}{(1+u^2/n)^n}\,\mathrm{d}u$ doit préalablement être reformulée $\int_0^{+\infty} f_n(u)\,\mathrm{d}u$ avec des bornes fixes avant d'espérer appliquer le théorème de la convergence dominée.
- Le jury a accordé des points pour les copies ayant tenté de prouver la majoration (en réalité fausse) $\frac{1}{(1+u^2/n)^n}\leqslant \mathrm{e}^{-u^2}$ car cela constitue un angle d'attaque totalement naturel pour valider l'hypothèse de domination. Seules les meilleures copies ont pu résoudre cette question par exemple *via* la majoration (obtenue grâce au binôme de Newton)

$$\frac{1}{(1+u^2/n)^n} = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{u^{2k}}{n^k}} = \frac{1}{1+\frac{nu^2}{n}+\text{termes positifs}} \leqslant \frac{1}{1+u^2}.$$

  Mentionnons également une erreur souvent vue dans de très bonnes copies. En vu de démontrer une formule de la forme $\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty}\lim_{n\to+\infty} f_n(u)\,\mathrm{d}u$ avec le théorème de la convergence dominée, l'hypothèse de domination s'écrit $|f_n(u)|\leqslant g(u)$ avec $g : [0,+\infty[\to\mathbb{R}$ intégrable. Or certaines copies ont vérifié une hypothèse plus faible :

$$\forall u\in[0,+\infty[\qquad \exists n_u\in\mathbb{N} \qquad \forall n\geqslant n_u \qquad |f_n(u)|\leqslant g(u).$$

  Il est plausible qu'une mauvaise maitrise des quantificateurs soit à l'origine de cette confusion.

Q11. Question très difficile et globalement ouverte quant au choix de la fonction auxiliaire à proposer. Un exemple de choix adéquat de fonction auxiliaire est

$$\Psi : x\mapsto \int_x^{+\infty}\varphi(t)\,\mathrm{d}t - \frac{x}{x^2+1}\varphi(x).$$

Q13. Question moyennement réussie. Dans la quasi-totalité des copies ayant abordé cette question, la bonne réponse $A=\bigcup_{p=1}^{n} A_p$ est trouvée. En revanche, la preuve est souvent absente voire très sommaire. Une réponse satisfaisante consiste par exemple à considérer, pour tout $\omega\in A$, le plus petit $p\in\{1,\dots,n\}$ vérifiant $|R_p(\omega)|\geqslant 3x$.

Q17. Le point clé est de montrer l'inégalité

$$\max_{1\leqslant p\leqslant n}\mathbb{P}\big(\{|R_n-R_p|>2x\}\big)\leqslant 2\max_{1\leqslant p\leqslant n}\mathbb{P}\big(\{|R_p|\geqslant x\}\big).$$

Dans de nombreuses copies, cette inégalité est considérée comme une évidence. Le jury attendait une argumentation. Par exemple, on peut exploiter les inclusions

$$\{|R_n-R_p|>2x\}\subset\{|R_n|>x\}\cup\{|R_p|>x\}\subset\{|R_n|\geqslant x\}\cup\{|R_p|\geqslant x\}.$$

Q18. Question très facile et réussie dans la quasi-totalité des copies. On trouve $-x_{n,k}=x_{n,n-k}$. De rares copies ont mal interprété la question et ont tenté d'obtenir des inégalités reliant $-x_{n,k}$ et $x_{n,n-k}$ sans doute à cause du verbe *comparer* présent dans l'énoncé.

Q19. Les réponses ont été systématiquement justes une fois comprise la définition de B_n (qui est à valeurs dans un ensemble fini donc est bornée). D'excellentes copies ont proposé la réponse expéditive :

$$\Delta_n \leqslant \max_{0\leqslant k\leqslant n} \frac{\sqrt{n}}{2^{n+1}}\binom{n}{k} + \sup_{x\in\mathbb{R}}|\varphi(x)| \leqslant \max_{0\leqslant k\leqslant n} \frac{\sqrt{n}}{2^{n+1}}\binom{n}{k} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

De rares copies ont mal interprété la question : au lieu de montrer la finitude du nombre Δ_n, ces copies ont seulement justifié qu'une borne supérieure existait (éventuellement valant $+\infty$). Cette approche n'apporte malheureusement aucune information pertinente et n'a pas été valorisée.

Q20. La question semble à priori très facile mais est sans doute l'une des plus difficiles du sujet non par sa difficulté intrinsèque mais plutôt parce qu'elle nécessite une sérieuse attention. En effet, vu l'énoncé, l'angle naturel est évidemment de justifier que B_n est une fonction paire pour en déduire immédiatement

$$\Delta_n = \sup_{x\in\mathbb{R}}|B_n(x)-\varphi(x)| = \sup_{x\geqslant 0}|B_n(x)-\varphi(x)|.$$

Or la fonction B_n n'est pas paire ! Par exemple, on a

$$B_n(-\sqrt{n}-\frac{1}{\sqrt{n}}) = \frac{\sqrt{n}}{2}\frac{1}{2^n} \qquad \text{et} \qquad B_n(n+\frac{1}{\sqrt{n}}) = 0.$$

Le jury a tout de même valorisé les copies ayant tenté cette approche (qui aurait sans doute pu fonctionner si B_n avait été définie de façon légèrement différente). Le jury est néanmoins satisfait de constater que de nombreuses copies ont décelé cette absence de parité (ce qui a été naturellement valorisé) et ont essayé de contourner cet obstacle.

Q21. Certaines excellentes copies ont traité directement les cas n pair et impair : il s'agit de démontrer la décroissance de la suite $k \mapsto \frac{\sqrt{n}}{2}\binom{n}{k}\frac{1}{2^n}$ pour les indices k tels que $0 \leqslant x_{n,k} + \frac{1}{\sqrt{n}}$, c'est-à-dire $n \leqslant 2k+1$. Cette décroissance s'obtient directement en examinant le quotient :

$$\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k+1}} = \frac{(k+1)!(n-k-1)!}{k!(n-k)!} = \frac{k+1}{n-k} \geqslant 1.$$

Le jury attendait une rédaction soignée pour un seul des deux cas (n pair ou n impair) et une mention que le second cas est similaire.

Q22. Cette question nécessite deux types d'arguments :

- une argumentation formelle (grâce à la formule de Stirling) pour retrouver le terme principal ;
- une argumentation asymptotique qui nécessite de gérer des termes du type $O(\frac{1}{k})$ et $O(\frac{1}{n-k})$. Il faut alors comprendre que l'hypothèse $x_{n,k} \in [0, \ell+1]$ implique que les deux précédents termes sont en fait de la forme $O(\frac{1}{n})$.

L'argumentation formelle est obtenue dans la quasi-totalité des copies tandis que l'argumentation asymptotique (plus difficile) est rarement écrite de façon satisfaisante.

Q23. Des calculs algébriques faciles amènent à des facteurs de la forme $\frac{1}{1+O(1/n)}$. La justification suivante a rarement été mentionnée :

$$\frac{1}{1+O\left(\frac{1}{n}\right)} = 1 + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

De façon précise, vu l'énoncé de la question, la plupart des copies font apparaitre directement $1+O(1/n)$ au numérateur.

Conclusion

Le jury se permet de réitérer un passage du rapport de la session 2022 : il est attendu qu'une copie normale soit lisible, claire et propre. Beaucoup de copies corrigées n'ont pas respecté ces critères et ont été pénalisées par l'application d'un malus. Le jury conseille notamment de mettre en avant les hypothèses d'un résultat du cours nécessaire pour répondre à une question. Il arrive en effet fréquemment que des réponses soient partiellement valorisées sur la simple connaissance d'un théorème même si ce dernier est *in fine* mal appliqué.

Concernant le sujet, les candidats ont assez bien assimilé les questions d'analyse (calcul algébrique et inégalités simples) mais les questions probabilistes (peut-être moins faciles que celles des sujets des années précédentes) ont causé beaucoup de difficultés de même que les questions d'analyse ayant trait à un comportement asymptotique.