Devoir à la maison n° 2 - MPI*

À rendre le lundi 29 septembre 2025

Ce second devoir MPI* est constitué d'un problème issu des concours, et abordant la manipulation et la comparaison de diverses normes dans des espaces fonctionnels.

- Introduction.

Recourir à la simulation numérique est indispensable pour maîtriser la complexité croissante des systèmes physiques ou chimiques. L'impact du choix des modèles d'équations aux dérivées partielles non linéaires et de leur discrétisation sur le code numérique est alors intimement lié aux choix des méthodes numériques mais également à la stabilité intrinsèque des modèles continus. Montrer qu'un système d'équations aux dérivées partielles non linéaire est stable revient alors à considérer une suite de solutions *a priori* du système qui est supposée bornée uniformément dans un espace fonctionnel adéquat (en général l'espace d'énergie du système). Il s'agit alors de montrer qu'il existe une sous-suite qui converge en un sens donné vers une entité qui est elle-même solution du système d'équations aux dérivées partielles de départ.

Pour montrer une telle stabilité, les non linéarités du système d'équations aux dérivées partielles peuvent poser quelques problèmes en présence d'oscillations ou de concentrations : oscillations d'ondes acoustiques et phénomènes de concentration de masse par exemple. Nous commencerons ce problème par un exemple d'oscillation et un exemple de concentration où nous verrons que convergence forte et convergence faible vers 0 dans L^2 ne sont pas deux notions équivalentes. On établira ensuite diverses inégalités importantes pour l'étude d'équations aux dérivées partielles non linéaires qui permettent de montrer quelques résultats de convergence forte c'est-à-dire quelques résultats de stabilité non linéaire.
N.B. On attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

- Notations et définitions.

Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour $0 < p < +\infty$, on introduit l'application

$$f \in E \mapsto \|f\|_p = \left[\int_0^1 |f(t)|^p \, dt\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Pour tout $1 \leqslant p < +\infty$, on définit l'exposant conjugué p' de p par

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Cette notation sera utilisée de façon systématique tout au long du texte. On admet que les $\|.\|_p$ sont des normes sur E.

<u>*Limite sup et limite inf*</u> : Par définition, pour toute suite réelle $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la limite inf est définie par

$$\liminf_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} \inf_{k>n} v_k.$$

Il en est de même pour la limite sup qui est définie par

$$\limsup_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} \sup_{k>n} v_k.$$

Convergence faible ou forte vers 0 *dans* L^2 : On dira qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E converge faiblement vers 0 dans L^2 si, et seulement si pour toute fonction φ de classe C^∞ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ nulle sur un voisinage de 0 et de 1 (c'est-à-dire qu'il existe δ tel que φ soit nulle sur $[0,\delta]$ et $[1-\delta,1]$) :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 u_n\varphi = 0.$$

On dira que l'on a convergence forte vers 0 dans L^2 si, et seulement si

$$\lim_{n\to+\infty}\|u_n\|_2 = 0.$$

A - Oscillations et concentrations.

Nous allons, dans cette partie, étudier quelques propriétés liées à la convergence faible et la convergence forte vers 0 dans L^2.

Q1. Soit $(u_n)_n$ une suite de fonctions de E. Montrer que si cette suite converge fortement vers 0 dans L^2 alors elle converge faiblement vers 0 dans L^2.

Q2. *Phénomène d'oscillation.* Soit la suite $(u_n)_n$ dans E définie par $u_n(x) = \sin(nx)$. Montrer que cette suite converge faiblement vers 0 dans L^2. A-t-on convergence forte dans L^2 vers 0 ? Pourquoi ?

Q3. *Phénomène de concentrations.* Soit la suite $(u_n)_n$ définie par

$$\begin{aligned} u_n(x) &= \sqrt{n} \quad &&\text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2n}, \\ u_n(x) &= 0 \quad &&\text{si} \quad \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1, \\ u_n(x) &= 2\sqrt{n}(1-nx) \quad &&\text{si} \quad \frac{1}{2n} < x < \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Montrer que les éléments de la suite sont dans E. Montrer que cette suite converge faiblement vers 0 dans L^2. A-t-on convergence forte dans L^2 vers 0 ? Pourquoi ?

B - Inégalités de Hölder et interpolation.

Q4. Soient x_1, x_2 des réels positifs. Soient $1 \leqslant p < +\infty$, montrer par concavité de la fonction logarithme que

$$x_1x_2 \leqslant \frac{x_1^p}{p} + \frac{x_2^{p'}}{p'}.$$

Q5. En appliquant l'inégalité précédente à $x_1 = \lambda|f(x)|$ et $x_2 = |g(x)|$, pour λ bien choisi, montrer que

$$\int_0^1 |fg|\,dx \leqslant \|f\|_p\|g\|_{p'}.$$

Cette inégalité s'appelle l'inégalité de Hölder.

Q6. Soient $p_1,\dots,p_n$ des réels strictement positifs. Soit $r \in [1,+\infty[$, tel que

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_n}.$$

Montrer par récurrence que, pour toute famille de fonctions $f_1,\dots,f_n$ d'éléments de E, alors

$$\|f_1\cdots f_n\|_r \leqslant \|f_1\|_{p_1}\dots\|f_n\|_{p_n}.$$

Q7. Considérons u appartenant à E. Soit p, q, r et θ avec $1 \leqslant p,\ q < +\infty$, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$ et

$$\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}$$

montrer que

$$\|u\|_r \leqslant \|u\|_p^{\theta} \|u\|_q^{1-\theta}.$$

Q8. Soient $p_1, p_2 \in [1, +\infty[$ avec $p_1 < p_2$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de E qui converge fortement vers $u \in E$ pour la norme $\|.\|_{p_1}$ c'est-à-dire

$$\|u_n - u\|_{p_1} \to 0 \text{ quand } n \to +\infty.$$

On suppose également que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée pour la norme $\|.\|_{p_2}$.
Montrer que pour tout p strictement compris entre p_1 et p_2, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortement vers u pour la norme $\|.\|_p$.

C - Les inégalités de Clarkson. (*facultatif*)

Dans cette partie, nous allons établir des inégalités dites de Clarkson. Elles permettront de donner un résultat de convergence forte.

Q9. Soient f et g deux éléments dans E. On désire montrer que, pour $p \geqslant 2$, on a

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^p + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^p \leqslant \frac{1}{2}\|f\|_p^p + \frac{1}{2}\|g\|_p^p. \tag{1}$$

Nous allons scinder la démonstration en trois étapes :

Q9.a) Montrer que, pour tout x positif ou nul,

$$1 + x^p \leqslant (1+x^2)^{\frac{p}{2}}. \tag{2}$$

Q9.b) En utilisant (2), montrer en posant $x = \dfrac{u}{v}$ pour u et v bien choisis, que , pour tout a, b réels quelconques

$$\left|\frac{a+b}{2}\right|^p + \left|\frac{a-b}{2}\right|^p \leqslant \left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^{\frac{p}{2}}.$$

Q9.c) Utiliser la convexité de la fonction qui à u dans $\mathbb{R}^+$ associe $u^{\frac{p}{2}}$ pour en déduire l'inégalité de Clarkson (1).

Q10. Soient $f, g \in E$, on désire montrer que, pour $1 < p < 2$, on a

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^{p'} + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^{p'} \leqslant \left(\frac{1}{2}\|f\|_p^p + \frac{1}{2}\|g\|_p^p\right)^{\frac{1}{(p-1)}}. \tag{3}$$

Nous scinderons la démonstration en trois étapes :

Q10.a) Cette question a pour but de montrer que, pour tout x dans $]0,1[$, on a

$$h(x) = \frac{1}{2}\left((1+x)^p + (1-x)^p\right) - (1+x^{p'})^{p-1} \geqslant 0. \tag{4}$$

i. En développant en séries les différents termes formant $h(x)$, expliquer comment ramener l'étude du signe de h à l'étude du signe, pour tout k, de

$$\frac{1 - x^{(2k-1)p'-2k}}{(2k-1)p' - 2k} - \frac{1 - x^{2kp'-2k}}{2kp' - 2k}.$$

ii. Montrer que la fonction G qui à u associe $(1 - x^u)/u$, (à x fixé) est décroissante.

iii. Déduire l'inégalité (4) des deux questions précédentes.

Q10.b) En utilisant (4) avec $x = (v - u)/(v + u)$, montrer que pour tout u, v dans $\mathbb{R}$

$$\left|\frac{u+v}{2}\right|^{p'} + \left|\frac{u-v}{2}\right|^{p'} \leqslant \left(\frac{1}{2}|u|^p + \frac{1}{2}|v|^p\right)^{\frac{1}{(p-1)}}. \tag{5}$$

Q10.c) Montrer maintenant l'inégalité de Clarkson (3) en utilisant (5) et l'inégalité de Minkowski suivante (que l'on admettra) : pour tout a, $b \in E$ et $0 < p - 1 < 1$ alors

$$\|a\|_{p-1} + \|b\|_{p-1} \leqslant \||a| + |b|\|_{p-1}.$$

Q11. Soient $1 < p < +\infty$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de E et u appartenant à E telles que

$$\|u_n\|_p \to \|u\|_p \text{ quand } n \to +\infty.$$

et

$$\|u\|_p \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \left\|\frac{u_n + u}{2}\right\|_p.$$

Montrer en utilisant les inégalités de Clarkson que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortement vers u pour la norme $\|.\|_p$.

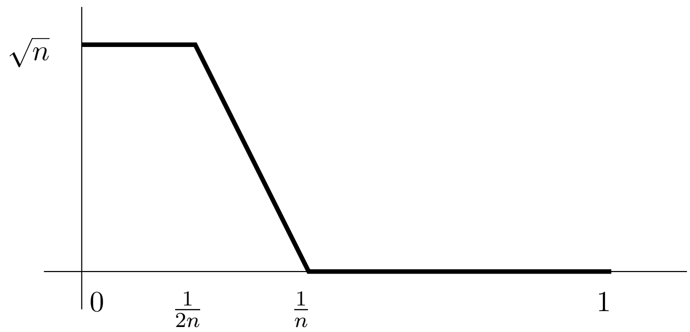
Un corrigé

A - Oscillations et concentrations.

Q1. Soit $(u_n)_n$ une suite de E qui converge fortement vers 0 dans L^2.
L'inégalité de Cauchy-Schwarz
$$\left|\int_0^1 u_n\varphi\right| \leqslant \|u_n\|_2\|\varphi\|_2$$
entraîne la convergence faible de $(u_n)_n$ vers 0 dans L^2.

Q2. Soit la suite $(u_n)_n$ dans E définie par $u_n(x) = \sin(nx)$. Pour $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ et nulle au voisinage de 0 et de 1, l'intégration par parties
$$\int_0^1 u_n(x)\varphi(x)\,dx = \left[-\frac{\cos(nx)}{n}\varphi(x)\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{\cos(nx)}{n}\varphi'(x)\,dx$$
donne
$$\left|\int_0^1 u_n(x)\varphi(x)\,dx\right| \leqslant \frac{1}{n}\int_0^1 |\varphi'(x)|\,dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
Ainsi la suite $(u_n)_n$ converge faiblement vers 0 dans L^2.
La relation $\sin^2(nx) = \dfrac{1-\cos(2nx)}{2}$ donne $\|u_n\|_2^2 = \displaystyle\int_0^1 \sin^2(nx)\,dx = \frac{1}{2} - \frac{\sin(2n)}{4n}$ qui tend vers $\dfrac{1}{2}$ lorsque $n \to +\infty$.
La suite $(u_n)_n$ ne converge donc pas fortement dans L^2 vers 0.

Q3. La fonctions u_n suivante



définie par $u_n(x) = \begin{cases} \sqrt{n} & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2n}, \\ 0 & \text{si} \quad \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1, \\ 2\sqrt{n}(1-nx) & \text{si} \quad \frac{1}{2n} < x < \frac{1}{n}. \end{cases}$ est clairement dans E. Pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction u_n est affine par morceaux sur $[0,1]$ et on vérifie facilement que les raccords en $\dfrac{1}{2n}$ et $\dfrac{1}{n}$ sont continus. $(u_n)_n$ est donc bien une suite de E.
Soit φ de classe C^∞ sur $[0,1]$ et nulle sur un voisinage de 0 et de 1, donc nulle sur $[0,\delta]$ et $[1-\delta,1]$, pour un certain $\delta > 0$. Il existe n_0 tel que $\dfrac{1}{n_0} \leqslant \delta$. Ainsi pour tout $n \geqslant n_0$, on obtient
$$\int_0^1 u_n(x)\varphi(x)\,dx = \int_\delta^{1-\delta} u_n(x)\varphi(x)\,dx = 0 \quad \text{car } u_n \text{ s'annule sur } \left[\frac{1}{n},1\right].$$
La suite converge donc faiblement vers 0 dans L^2.

La minoration $\|u_n\|_2^2 \geqslant \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2n}} u_n^2(x)\,dx = \frac{1}{2}$ atteste cependant qu'il n'y a pas convergence forte dans L^2 vers 0.

B - Inégalités de Hölder et interpolation.

Q4. Soient $x_1,\ x_2 \in \mathbb{R}^+$ et $1 \leqslant p < +\infty$. On suppose que $x_1 > 0$ et $x_2 > 0$ et on pose $y_1 = x_1^p$ et $y_2 = x_2^{p'}$. La concavité de la fonction logarithme donne

$$\ln\left(\frac{y_1}{p} + \frac{y_2}{p'}\right) \geqslant \frac{\ln(y_1)}{p} + \frac{\ln(y_2)}{p'} = \ln(x_1) + \ln(x_2) = \ln(x_1x_2).$$

Comme la fonction logarithme est croissante, on en déduit que

$$x_1x_2 \leqslant \frac{x_1^p}{p} + \frac{x_2^{p'}}{p'}.$$

La relation est trivialement vérifiée dès que $x_1 = 0$ ou $x_2 = 0$

Q5. En appliquant l'inégalité précédente à $x_1 = \lambda|f(x)|$ et $x_2 = |g(x)|$ avec $\lambda > 0$, on obtient

$$\lambda\int_0^1 |fg|\,dx \leqslant \frac{\lambda^p}{p}\|f\|_p^p + \frac{1}{p'}\|g\|_{p'}^{p'}.$$

On cherche λ de la forme $\lambda = \|f\|_p^{\alpha}\|g\|_{p'}^{\beta}$ avec $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. En reportant, on obtient

$$\int_0^1 |fg|\,dx \leqslant \frac{\|f\|_p^{p+(p-1)\alpha}\|g\|_{p'}^{(p-1)\beta}}{p} + \frac{\|f\|_p^{-\alpha}\|g\|_{p'}^{p'-\beta}}{p'}.$$

Avec $\alpha = -1$ et $\beta = p' - 1$, on obtient $p + (p-1)\alpha = -\alpha = 1$ et $(p-1)\beta = p' - \beta = 1$.
Il en résulte que :

$$\int_0^1 |fg|\,dx \leqslant \|f\|_p\|g\|_{p'}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'}\right)$$

d'où l'inégalité de Hölder puisque $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Q6. Soient $f_1, \ldots, f_n$ n éléments de E, $p_1, \ldots, p_n$ n réels strictement positifs et $r \in [1, +\infty[$ liés par la relation $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{p_1} + \ldots + \dfrac{1}{p_n}$.
Dans cas $n = 2$, on a $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$ avec $p = \dfrac{p_1}{r}$ et $p' = \dfrac{p_2}{r}$. L'inégalité de Hölder avec $f = f_1^r$ et $g = f_2^r$ donne

$$\int_0^1 |f_1(x)f_2(x)|^r\,dx \leqslant \left(\int_0^1 |f_1(x)|^{p_1}\,dx\right)^{\frac{r}{p_1}}\left(\int_0^1 |f_2(x)|^{p_2}\,dx\right)^{\frac{r}{p_2}}.$$

Une puissance $\dfrac{1}{r}$ donne $\|f_1f_2\|_r \leqslant \|f_1\|_{p_1}\|f_2\|_{p_2}$, ainsi la propriété est vraie à l'ordre 2.
Supposons la propriété vraie pour $n \geqslant 2$.
Soient $n+1$ réels $p_i > 0$ et r liés par la relation ci-dessus et $n+1$ éléments f_i de E. Posons $g = f_nf_{n+1}$ et q tel que $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p_n} + \dfrac{1}{p_{n+1}}$.
L'hypothèse de récurrence à l'ordre n donne $\|f_1, \ldots, f_{n-1}g\|_r \leqslant \|f_1\|_{p_1}\ldots\|f_{n-1}\|_{p_{n-1}}\|g\|_q$.
La relation à l'ordre 2 donne $\|g\|_q \leqslant \|f_n\|_{p_n}\|f_{n+1}\|_{p_{n+1}}$ ainsi la propriété est vraie à l'ordre $n+1$.

Par récurrence, on a établi que

$$\forall n \geqslant 2 \quad \|f_1, \ldots, f_n\|_r \leqslant \|f_1\|_{p_1} \ldots \|f_n\|_{p_n}$$

pour toute famille $f_1, \ldots, f_n$ d'éléments de E, $p_1, \ldots, p_n$ n réels strictement positifs et $r \in [1, +\infty[$ liés par la relation $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{p_1} + \ldots + \dfrac{1}{p_n}$.

Notons que la propriété est trivialement vérifiée pour $n = 1$.

Q7. Considérons u appartenant à E. Soient p, q, r et θ avec $1 \leqslant p, q < +\infty$, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$ et

$$\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}$$

On suppose $0 < \theta < 1$ alors $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{p_1} + \dfrac{1}{p_2}$ avec $p_1 = \dfrac{p}{\theta}$ et $p_2 = \dfrac{q}{1-\theta}$.

En notant $f_1 = |u|^\theta$ et $f_2 = |u|^{1-\theta}$, la propriété établie en **Q6**, pour $n = 2$, donne $\|f_1 f_2\|_r \leqslant \|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2}$ qui est la relation désirée

$$\|u\|_r \leqslant \|u\|_p^\theta \|u\|_q^{1-\theta}.$$

Pour $\theta = 0$ ou $\theta = 1$, la relation est trivialement vérifiée.

Q8. Soient $p_1, p_2 \in [1, +\infty[$ avec $p_1 < p_2$ et $(u_n)_n$ une suite de fonctions de E, bornée pour la norme $\|.\|_{p_2}$ et convergeant fortement vers $u \in E$ pour la norme $\|.\|_{p_1}$.

Pour $p \in]p_1, p_2[$, on a $\dfrac{1}{p} \in \left]\dfrac{1}{p_2}, \dfrac{1}{p_1}\right[$, d'où une relation barycentrique $\dfrac{1}{p} = \dfrac{\theta}{p_2} + \dfrac{1-\theta}{p_1}$ avec $0 < \theta < 1$.

D'après **Q7**, on obtient $\|u_n - u\|_p \leqslant \|u_n - u\|_{p_2}^\theta \|u_n - u\|_{p_1}^{1-\theta}$.

La convergence forte vers $u \in E$ pour la norme $\|.\|_{p_1}$ implique que $\lim\limits_{n \to +\infty} \|u_n - u\|_{p_1}^{1-\theta} = 0$.

Par ailleurs, $\|u\|_{p_2}$ existe (car $u \in E$) et par inégalité triangulaire, on obtient $\|u_n - u\|_{p_2} \leqslant \|u_n\|_{p_2} + \|u\|_{p_2} \leqslant \|u\|_{p_2} + \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} \|u_n\|_{p_2}$ pour tout n. La suite $\|u_n - u\|_{p_2}^\theta$ est donc bornée.

Il en résulte que la suite $(u_n)_n$ converge fortement vers u pour la norme $\|.\|_p$.

B - Les inégalités de Clarkson.

Q9. Soit $p \geqslant 2$.

Q9.a) Etablissons, pour tout $t \geqslant 0$ et $q \geqslant 1$, l'inégalité $1 + t^q \leqslant (1+t)^q$.

La fonction différence $d : t \mapsto (1+t)^q - (1+t^q)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ avec $d'(t) = q((1+t)^{q-1} - t^{q-1})$. On a $d'(t) \geqslant 0$ et $d(0) = 0$, ainsi $d(t) \geqslant 0$ pour tout $t \geqslant 0$, d'où l'inégalité demandée.

En posant $p = 2q$ et $t = x^2$, on en déduit, pour $p \geqslant 2$ et tout x positif ou nul, la relation (2)

$$1 + x^p \leqslant (1 + x^2)^{\frac{p}{2}}.$$

Q9.b) En posant $x = \dfrac{u}{v}$ avec $u \geqslant 0$ et $v > 0$, la relation (2) donne $u^p + v^p \leqslant (u^2 + v^2)^{\frac{p}{2}}$.

Soient a, b réels quelconques. On suppose que $a \neq -b$.

On pose $u = \left|\dfrac{a-b}{2}\right|$ et $v = \left|\dfrac{a+b}{2}\right|$. La relation précédente donne, sachant que $u^2 + v^2 = \left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 = \dfrac{a^2+b^2}{2}$,

$$\left|\frac{a+b}{2}\right|^p + \left|\frac{a-b}{2}\right|^p \leqslant \left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^{\frac{p}{2}}.$$

Si $a = -b$, cette relation est trivialement vérifiée.

Q9.c) La convexité de la fonction $h : u \mapsto u^{\frac{p}{2}}$ sur $\mathbb{R}^+$, donne

$$\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^{\frac{p}{2}} = h\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right) \leqslant \frac{h(a^2)}{2} + \frac{h(b^2)}{2} = \frac{|a|^p}{2} + \frac{|b|^p}{2}.$$

Avec **QC.1.2**, il vient

$$\left|\frac{a+b}{2}\right|^p + \left|\frac{a-b}{2}\right|^p \leqslant \frac{|a|^p}{2} + \frac{|b|^p}{2}.$$

Soient f et g deux éléments dans E. En posant $a = f(x)$ et $b = g(x)$, on obtient

$$\left|\frac{(f+g)(x)}{2}\right|^p + \left|\frac{(f-g)(x)}{2}\right|^p \leqslant \frac{|f(x)|^p}{2} + \frac{|g(x)|^p}{2}.$$

L'intégration sur $[0,1]$ donne l'inégalité de Clarkson (1) :

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^p + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^p \leqslant \frac{1}{2}\|f\|_p^p + \frac{1}{2}\|g\|_p^p.$$

Q10. Soient $f,g \in E$ et $1 < p < 2$.

Q10.a) On note $h(x) = \frac{1}{2}\left((1+x)^p + (1-x)^p\right) - (1+x^{p'})^{p-1}$ pour $x \in]0,1[$.

i. La fonction $t \mapsto (1+t)^\alpha$ est développable en série entière au voisinage de 0 avec

$$\forall t \in]-1,1[, \quad (1+t)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)t^n}{n!}.$$

On en déduit l'expression suivante de $h(x)$, en tenant compte de la parité de $(1+x)^p + (1-x)^p$,

$$\forall x \in]0,1[, \quad h(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{p(p-1)\dots(p-2k+1)x^{2k}}{(2k)!} - \frac{(p-1)(p-2)\dots(p-k)x^{p'k}}{k!}.$$

En distinguant les termes pairs et impairs dans $(1+x^{p'})^{p-1}$, on obtient

$$\begin{aligned} h(x) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{p(p-1)\dots(p-2k+1)x^{2k}}{(2k)!} - \frac{(p-1)(p-2)\dots(p-2k)x^{2p'k}}{(2k)!} \\ &\quad - \frac{(p-1)(p-2)\dots(p-2k+1)x^{p'(2k-1)}}{(2k-1)!} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(p-2)\dots(p-2k)}{(2k-1)!} x^{2k}\left(\frac{p(p-1)}{2k(p-2k)} - \frac{p-1}{2k}x^{2p'k-2k} - \frac{p-1}{p-2k}x^{p'(2k-1)-2k}\right). \end{aligned}$$

Notons $A_k = \dfrac{1-x^{(2k-1)p'-2k}}{(2k-1)p'-2k} - \dfrac{1-x^{2kp'-2k}}{2kp'-2k}$ pour tout $k \geqslant 1$.

En développant, on obtient $A_k = \dfrac{p(p-1)}{2k(2k-p)} + \dfrac{p-1}{2k}x^{2p'k-2k} - \dfrac{p-1}{2k-p}x^{p'(2k-1)-2k}$.

Ainsi

$$\forall x \in]0,1[, \quad h(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{-(p-2)\dots(p-2k)}{(2k-1)!} x^{2k} A_k$$

L'expression $(p-2)\dots(p-2k)$ est composé d'un nombre impair de nombres négatifs donc $\frac{-(p-2)\dots(p-2k)}{(2k-1)!}x^{2k}$ est strictement positif pour tout $k \geqslant 1$.

L'étude du signe des A_k permet donc d'étudier le signe de $h(x)$.

ii. Soit $G : u \mapsto \dfrac{(1-x^u)}{u}$ avec $x \in]0,1[$ fixé.

La fonction G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ avec $G'(u) = \dfrac{x^u(1-u\ln(x))-1}{u^2} = \dfrac{N(x)}{D(x)}$.

La fonction N est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ avec $N'(u) = -u\ln(x)^2 x^u$ négatif. N est donc décroissante sur $\mathbb{R}^+$ avec $N(0) = 0$. Ainsi N est négative sur $\mathbb{R}^+$.

Il en résulte que G est décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

iii. p' est l'associé de $p \in]1,2[$ donc $p' > 1$. Pour tout $k \geqslant 1$, A_k peut donc s'écrire sous la forme $A_k = G((2k-1)p' - 2k) - G(2kp' - 2k)$. La décroissante de G entraîne $A_k > 0$.

L'étude effectuée en **QC.2.1.1** permet alors d'établir l'inégalité (4)

$$\forall x \in]0,1[, \quad h(x) \geqslant 0.$$

Q10.b) On exclut les cas $u = \pm v$, $u = 0$ et $v = 0$ où l'inégalité (5) est trivialement vérifiée. On note $x = \dfrac{v-u}{v+u}$, qui est un réel non nul et différent de ± 1.

On suppose que $x \in]0,1[$. En remplaçant dans $h(x)$, on obtient

$\dfrac{1}{2}\left((\dfrac{2v}{u+v})^p + (\dfrac{2u}{u+v})^p\right) \geqslant (1+(\dfrac{v-u}{v+u})^{p'})^{p-1}$ et $(1+(\dfrac{v-u}{v+u})^{p'})^{p-1} = \left(\dfrac{\left|\frac{u+v}{2}\right|^{p'} + \left|\frac{u-v}{2}\right|^{p'}}{\left|\frac{u+v}{2}\right|^{p'}}\right)^{p-1}$.

On a $p'(p-1) = p$, ainsi, en multipliant par $\left|\frac{u+v}{2}\right|^p$, il vient $\frac{1}{2}|u|^p + \frac{1}{2}|v|^p \geqslant \left(\left|\frac{u+v}{2}\right|^{p'} + \left|\frac{u-v}{2}\right|^{p'}\right)^{p-1}$

Une puissance $\frac{1}{p-1}$ donne alors l'inégalité (5)

$$\left|\frac{u+v}{2}\right|^{p'} + \left|\frac{u-v}{2}\right|^{p'} \leqslant \left(\frac{1}{2}|u|^p + \frac{1}{2}|v|^p\right)^{\frac{1}{(p-1)}}.$$

Si $x > 1$, on considère $0 < \dfrac{v+u}{v-u} < 1$ et on obtient (5) car cette expression est invariante par le changement $u \longleftrightarrow -u$.

Si $x < 0$, on échange u et v pour se ramener au cas positif et on obtient (5) car cette expression est invariante par le changement $u \longleftrightarrow v$.

Finalement, l'inégalité (5) est vérifiée pour tout $u, v \in \mathbb{R}$.

Q10.c) On note $a = \left|\frac{f+g}{2}\right|^{p'}$ et $b = \left|\frac{f-g}{2}\right|^{p'}$. On obtient $\|a\|_{p-1} = \left(\displaystyle\int_0^1 \left|\frac{f+g}{2}\right|^{p'(p-1)} dx\right)^{\frac{1}{p-1}}$

Comme $p'(p-1) = p$, il vient $\|a\|_{p-1} = \left(\displaystyle\int_0^1 \left|\frac{f+g}{2}\right|^p dx\right)^{\frac{p'}{p}} = \left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^{p'}$.

De même $\|b\|_{p-1} = \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^{p'}$.

On a $0 < p-1 < 1$, ainsi l'inégalité de Minkowski s'applique et donne

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^{p'} + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^{p'} \leqslant \left(\int_0^1 \left(\left|\frac{f+g}{2}\right|^{p'} + \left|\frac{f-g}{2}\right|^{p'}\right)^{p-1} dx\right)^{\frac{1}{p-1}}.$$

Avec l'inégalité (5) $\left|\frac{f+g}{2}\right|^{p'} + \left|\frac{f-g}{2}\right|^{p'} \leqslant \left(\frac{1}{2}|f|^p + \frac{1}{2}|g|^p\right)^{\frac{1}{p-1}}$, on obtient

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^1 \left(\left|\frac{f+g}{2}\right|^{p'} + \left|\frac{f-g}{2}\right|^{p'}\right)^{p-1} dx\right)^{\frac{1}{p-1}} &\leqslant \left(\int_0^1 \left(\left(\frac{1}{2}|f|^p + \frac{1}{2}|g|^p\right)^{\frac{1}{p-1}}\right)^{p-1} dx\right)^{\frac{1}{p-1}} \\
&= \left(\int_0^1 \frac{1}{2}|f|^p + \frac{1}{2}|g|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p-1}} \\
&= \left(\frac{1}{2}\|f\|_p^p + \frac{1}{2}\|g\|_p^p\right)^{\frac{1}{p-1}}.
\end{aligned}$$

En regroupant, on obtient l'inégalité de Clarkson (3)

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^{p'} + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^{p'} \leqslant \left(\frac{1}{2}\|f\|_p^p + \frac{1}{2}\|g\|_p^p\right)^{\frac{1}{(p-1)}}.$$

Q11. Soient $(u_n)_n$ une suite de E et $u \in E$ vérifiant

$$\lim_{n\to+\infty} \|u_n\|_p = \|u\|_p \quad \text{et} \quad \|u\|_p \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \left\|\frac{u_n+u}{2}\right\|_p.$$

- Dans le cas $p \geqslant 2$, on dispose de l'inégalité de Clarkson (1)

$$\left\|\frac{u_n+u}{2}\right\|_p^p + \left\|\frac{u_n-u}{2}\right\|_p^p \leqslant \frac{1}{2}\|u_n\|_p^p + \frac{1}{2}\|u\|_p^p.$$

Notons $L = \liminf_{n\to+\infty} \left\|\frac{u_n+u}{2}\right\|_p$. La définition de $\liminf_{n\to+\infty}$ donne

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0,\ \forall n \geqslant n_0 \quad L - \varepsilon \leqslant \inf_{k>n} \left\|\frac{u_k+u}{2}\right\|_p \leqslant L.$$

Ayant $\inf_{k>n} \left\|\frac{u_k+u}{2}\right\|_p \leqslant \left\|\frac{u_{n+1}+u}{2}\right\|_p$ on peut donc écrire

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0,\ \forall n > n_0 \quad \|u\|_p - \varepsilon \leqslant L - \varepsilon \leqslant \left\|\frac{u_n+u}{2}\right\|_p.$$

L'hypothèse $\lim_{n\to+\infty} \|u_n\|_p = \|u\|_p$ donne

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_1,\ \forall n > n_1 \quad \|u_n\|_p \leqslant \|u\|_p + \varepsilon.$$

Si $\|u\|_p = 0$, une majoration par inégalité triangulaire et l'hypothèse $\lim_{n\to+\infty} \|u_n\|_p = \|u\|_p$ donnent $\lim_{n\to+\infty} \|u_n - u\|_p = 0$. Ainsi $(u_n)_n$ converge fortement vers u pour la norme $\|.\|_p$.
On suppose désormais que $\|u\|_p > 0$ et on choisit $0 < \varepsilon < \|u\|_p$.
Pour $n \geqslant \max(n_0, n_1)$, l'inégalité de Clarkson (1) donne

$$(\|u\|_p - \varepsilon)^p + \left\|\frac{u_n-u}{2}\right\|_p^p \leqslant \frac{1}{2}(\|u\|_p + \varepsilon)^p + \frac{1}{2}\|u\|_p^p.$$

ainsi

$$\left\|\frac{u_n-u}{2}\right\|_p^p \leqslant \frac{1}{2}(\|u\|_p + \varepsilon)^p + \frac{1}{2}\|u\|_p^p - (\|u\|_p - \varepsilon)^p. \leqslant (\|u\|_p + \varepsilon)^p - (\|u\|_p - \varepsilon)^p.$$

Pour $0 < A < B$, une inégalité des accroissement finis donne $A^p - B^p \leqslant p(A-B)A^{p-1}$, ainsi

$$\left\| \frac{u_n - u}{2} \right\|_p^p \leqslant 2p\varepsilon(\|u\|_p + \varepsilon)^{p-1} \leqslant 2p\varepsilon(2\|u\|_p)^{p-1}.$$

La suite $(u_n)_n$ converge donc fortement vers u pour la norme $\|.\|_p$.

• Dans le cas $1 < p < 2$, le conjugué p' vérifie $p' > 2$ et on dispose de l'inégalité de Clarkson (3)

$$\left\| \frac{u_n + u}{2} \right\|_p^{p'} + \left\| \frac{u_n - u}{2} \right\|_p^{p'} \leqslant \left(\frac{1}{2}\|u_n\|_p^p + \frac{1}{2}\|u\|_p^p \right)^{\frac{1}{(p-1)}}.$$

Comme précédemment, pour $0 < \varepsilon < \|u\|_p$ et $n \geqslant \max(n_0, n_1)$, on obtient

$$\begin{aligned} \left\| \frac{u_n - u}{2} \right\|_p^{p'} &\leqslant \left(\frac{1}{2}(\|u\|_p + \varepsilon)^p + \frac{1}{2}\|u\|_p^p \right)^{\frac{1}{(p-1)}} - (\|u\|_p - \varepsilon)^{p'} \\ &\leqslant (\|u\|_p + \varepsilon)^{p'} - (\|u\|_p - \varepsilon)^{p'} \\ &\leqslant 2p'\varepsilon(\|u\|_p + \varepsilon)^{p'-1} \leqslant 2p'\varepsilon(2\|u\|_p)^{p'-1} \end{aligned}$$

La suite $(u_n)_n$ converge donc fortement vers u pour la norme $\|.\|_p$.