Devoir à la maison n^o 5 - MPI

À rendre le mercredi 26 novembre 2025

Un tirage avec double remise

On fixe un couple d'entiers $(b, r) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. On suppose que l'on dispose d'un stock illimité de boules blanches et de boules rouges et on considère une urne contenant initialement b boules blanches et r boules rouges indiscernables au toucher. On procède à des tirages successifs dans cette urne en respectant à chaque fois le protocole suivant :

1. si la boule tirée est de couleur blanche, on la replace dans l'urne et on ajoute une boule blanche supplémentaire ;
2. si la boule tirée est de couleur rouge, on la replace dans l'urne et on ajoute une boule rouge supplémentaire.

Le premier objectif de cet exercice est de calculer la probabilité de tirer une boule blanche lors du n-ième tirage. Le second objectif est de déterminer la loi du nombre de boules blanches se trouvant dans l'urne à l'issue du n-ième tirage dans un cas particulier. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par X_n la variable aléatoire égale à 1 si la boule tirée au n-ième tirage est blanche, 0 si la boule tirée au n-ième tirage est rouge. On considère également la suite de variables aléatoires réelles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$S_0 = b \quad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = b + \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

I. Préliminaires

1. Déterminer la loi de X_1.

2. Déterminer la loi conditionnelle de X_2 sachant l'événement $(X_1 = 1)$. En déduire la loi de X_2.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Que représente la variable aléatoire S_n ? Quel est l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire S_n ?

II. La loi de X_n

Dans cette partie, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

4. Pour tout $k \in [\![b, n+b]\!]$, calculer $P(X_{n+1} = 1 | S_n = k)$.

5. A l'aide de la formule des probabilités totales, justifier que :

$$P(X_{n+1} = 1) = \frac{E(S_n)}{b + r + n}.$$

6. Montrer par récurrence que X_n suit la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{b}{b+r}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

III. La loi de S_n dans un cas particulier

On suppose désormais que $b = r = 1$ et on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

7. Exprimer l'événement $(S_n = 1)$ avec les événements $(X_k = 0)$ pour $k \in [\![1, n]\!]$.

8. Montrer que $P(S_n = 1) = \dfrac{1}{n+1}$.

On admet dans la suite que l'on a de même $P(S_n = n+1) = \dfrac{1}{n+1}$.

9. Soit $(k, \ell) \in [\![1, n+2]\!] \times [\![1, n+1]\!]$. Calculer la probabilité $P(S_{n+1} = k | S_n = \ell)$ dans chacun des trois cas suivants :

$$(i)\ \ell \notin \{k-1, k\}, \qquad (ii)\ \ell = k-1, \qquad (iii)\ \ell = k.$$

10. Montrer que pour tout $k \in [\![2, n+1]\!]$, on a la relation :

$$P(S_{n+1} = k) = \frac{k-1}{n+2} P(S_n = k-1) + \frac{n+2-k}{n+2} P(S_n = k).$$

11. Montrer par récurrence que S_n suit la loi uniforme sur $[\![1, n+1]\!]$.

Un corrigé

Un tirage avec double remise

. Préliminaires

1. Notons R_i (resp. B_i) l'événement "tirer une boule rouge (resp. blanche) au i-ème tirage."
On a $X_1(\Omega) = \{0, 1\}$ et

$$P(X_1 = 1) = P(B_1) = \frac{b}{b+r} \textbf{ ET } P(X_1 = 0) = P(R_1) = \frac{r}{b+r}$$

car toutes les $b + r$ boules présentes dans l'urne sont équiprobables.

2. • Sachant $X_1 = 1$, on a tiré une boule blanche au premier tirage, donc, avant le second tirage, l'urne contient $b + 1$ boules blanches et r boules rouges équiprobables, donc

$$P_{X_1=1}(X_2 = 1) = P_{X_1=1}(B_2) = \frac{b+1}{r+b+1} \textbf{ ET } P_{X_1=1}(X_2 = 0) = P_{X_1=1}(R_2) = \frac{r}{r+b+1}.$$

De même, sachant $X_1 = 0$, on a b boules blanches et $r + 1$ boules rouges équiprobables pour le deuxième tirage, donc

$$P_{X_1=0}(X_2 = 1) = P_{X_1=0}(B_2) = \frac{b}{r+b+1} \textbf{ ET } P_{X_1=0}(X_2 = 0) = P_{X_1=0}(R_2) = \frac{r+1}{r+b+1}.$$

• On a $X_2(\Omega) = \{0, 1\}$ et, d'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(X_1 = 0, X_1 = 1)$, on a

$$\begin{aligned} P(X_2 = 0) &= P(X_1 = 0 \cap X_2 = 0) + P(X_1 = 1 \cap X_2 = 0) \\ &= P(X_1 = 0)P_{X_1=0}(X_2 = 0) + P(X_1 = 1)P_{X_1=1}(X_2 = 0) \\ &= \frac{r}{b+r}\frac{r+1}{b+r+1} + \frac{b}{b+r}\frac{r}{b+r+1} \\ &= \frac{r(b+r+1)}{(b+r)(b+r+1)} = \frac{r}{b+r} \end{aligned}$$

et $P(X_2 = 1) = 1 - P(X_2 = 0) = \dfrac{b}{b+r}$.

3. • $S_n = b + \sum_{k=1}^{n} X_k$ est égale au nombre de boules présentes dans l'urne au départ auquel on ajoute le nombre de boules blanches tirées au cours des n premiers tirages. Sachant que chaque fois que l'on tire une boule blanche, on en ajoute globalement une dans l'urne, S_n est égale au nombre de boules blanches présentes initialement auquel on ajoute le nombre de boules blanches ajoutées au cours des n premiers tirages. S_n représente donc le nombre de boules blanches présentes dans l'urne avant le $(n + 1)$-ième tirage.
• Comme, à chaque tirage, il y a au moins 1 boule blanche et une boule rouge dans l'urne, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $X_k(\Omega) = \{0, 1\}$.
D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)(\Omega) = [\![0, n]\!]$, donc $S_n(\Omega) = [\![b, b + n]\!]$. Cette formule est encore valable pour $n = 0$ (car $S_0 = b$), donc est valable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

. La loi de X_n

4. Soit $k \in [\![b, n + b]\!]$.
Sachant $S_n = k$, l'urne contient au début du $(n + 1)$-ème tirage k boules blanches.

Comme, à chaque tirage, on ajoute exactement une boule (que la boule tirée soit blanche ou rouge), l'urne contient en tout, avant le $(n+1)$-ème tirage, $r+b+n$ boules, donc $r+b+n-k$ boules rouges.
D'où, comme toutes les boules présentes dans l'urne sont équiprobables,

$$P(X_{n+1}=1|S_n=k)=P_{S_n=k}(B_{n+1})=\frac{k}{r+b+n}.$$

5. Comme S_n est finie, elle admet bien une espérance. De plus, d'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(S_n=k)_{k\in S_n(\Omega)}=(S_n=k)_{k\in[\![b,b+n]\!]}$, on a :

$$\begin{aligned}P(X_{n+1}=1)&=\sum_{k=b}^{b+n}P(X_{n+1}=1\cap S_n=k)=\sum_{k=b}^{b+n}P(S_n=k)P_{S_n=k}(X_{n+1}=1)\\&=\sum_{k=b}^{b+n}P(S_n=k)\frac{k}{r+b+n}=\frac{1}{r+b+n}\sum_{k=b}^{b+n}kP(S_n=k)=\frac{E(S_n)}{r+b+n}.\end{aligned}$$

6. Montrons par récurrence forte que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, "X_n suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{b}{b+r}$" (HR_n).
Initialisation : Pour $n=1$, d'après la question **1.**, on a $X_1\hookrightarrow\mathcal{B}\left(\frac{b}{r+b}\right)$, donc on a bien HR_1.
Hérédité : Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et supposons HR_k vérifiée pour tout $k\in[\![1,n]\!]$.
Alors on a $E(X_k)=\frac{b}{b+r}$ pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, donc, par linéarité de l'espérance,

$$E(S_n)=b+\sum_{k=1}^{n}E(X_k)=b+n\frac{b}{b+r}=\frac{b(b+r+n)}{b+r}.$$

D'où, d'après la question précédente,

$$P(X_{n+1}=1)=\frac{E(S_n)}{r+b+n}=\frac{b(b+r+n)}{b+r}\frac{1}{r+b+n}=\frac{b}{b+r},$$

et, comme $X_{n+1}(\Omega)=\{0,1\}$, on a $X_{n+1}\hookrightarrow\mathcal{B}\left(\frac{b}{b+r}\right)$. On a bien HR_{n+1}.
Conclusion : D'où, par récurrence, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $X_n\hookrightarrow\mathcal{B}\left(\frac{b}{b+r}\right)$.

. La loi de S_n dans un cas particulier

7. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a ici $S_n=1+\sum_{k=1}^{n}X_k$, donc

$$(S_n=1)\Leftrightarrow 1+\sum_{k=1}^{n}X_k=1\Leftrightarrow\sum_{k=1}^{n}X_k=0\Leftrightarrow\forall k\in[\![1,n]\!],\ X_k=0$$

car toutes les variables X_k sont positives, et une somme de positifs est nulle si et seulement si chacun des termes de la somme est nul.

8. On a donc

$$\begin{aligned}P(S_n=1)&=P\left(\bigcap_{k=1}^{n}(X_k=0)\right)\\&=P(X_1=0)P_{X_1=0}(X_2=0)\times\cdots\times P_{X_1=0\cap\ldots\cap X_{n-1}=0}(X_n=0)\quad\text{(probabilités composées)}\\&=P(X_1=0)\times\prod_{k=1}^{n-1}P_{X_1=0\cap\ldots\cap X_k=0}(X_{k+1}=0)\\&=\frac{1}{2}\times\prod_{k=1}^{n-1}\frac{1+k}{2+k}=\frac{1}{n+1}\quad\text{(télescopage)}\end{aligned}$$

car, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, sachant $X_1 = 0 \cap \ldots \cap X_k = 0$, on a tiré k boules rouges, donc ajouté k boules rouges, et l'urne contient donc $k+1$ rouges et 1 blanche équiprobables au début du $k+1$-ème tirage.
$(S_n = n+1)$ *signifie que l'on a tiré que des boules blanches. Dans cette partie, les blanches et les rouges ont des rôles complètement symétriques (même nombre au départ et même comportement à chaque tirage), donc, par symétrie (ou en inversant le rôle des blanches et des rouges), on a bien* $P(S_{n+1} = n) = \frac{1}{n+1}$.

9. Soit $(k, \ell) \in [\![1, n+2]\!] \times [\![1, n+1]\!]$.

(i) Si $\ell \notin \{k-1, k\}$, alors, comme $(S_{n+1} - S_n)(\Omega) = X_{n+1}(\Omega) = \{0, 1\}$, l'événement $(S_{n+1} = k \cap S_n = \ell)$ est impossible (car il implique $S_{n+1} - S_n = k - \ell \notin \{0, 1\}$), donc

$$P(S_{n+1} = k | S_n = \ell) = \frac{P(S_{n+1} = k \cap S_n = \ell)}{P(S_n = \ell)} = \frac{0}{P(S_n = \ell)} = 0.$$

(ii) Si $\ell = k-1$ (et donc $k \geqslant 2$), alors

$$\begin{aligned} P(S_{n+1} = k | S_n = \ell) &= \frac{P(S_{n+1} = k \cap S_n = k-1)}{P(S_n = k-1)} = \frac{P(S_{n+1} - S_n = 1 \cap S_n = k-1)}{P(S_n = k-1)} \\ &= \frac{P(X_{n+1} = 1 \cap S_n = k-1)}{P(S_n = k-1)} \\ &= \frac{P(S_n = k-1) P_{S_n = k-1}(X_{n+1} = 1)}{P(S_n = k-1)} \quad \text{(probabilités composées)} \\ &= P_{S_n = k-1}(X_{n+1} = 1) = \frac{k-1}{1+1+n} = \frac{k-1}{2+n} \quad (\text{Q}\mathbf{4}. \text{ avec } k-1 \in \mathbb{N}^* \text{ et } r = b = 1) \end{aligned}$$

(iii) Enfin, si $\ell = k$, on a de même

$$\begin{aligned} P(S_{n+1} = k | S_n = \ell) &= \frac{P(S_{n+1} = k \cap S_n = k)}{P(S_n = k)} = \frac{P(S_{n+1} - S_n = 0 \cap S_n = k)}{P(S_n = k)} \\ &= \frac{P(X_{n+1} = 0 \cap S_n = k)}{P(S_n = k)} \\ &= \frac{P(S_n = k) P_{S_n = k}(X_{n+1} = 0)}{P(S_n = k)} \quad \text{(probabilités composées)} \\ &= P_{S_n = k}(X_{n+1} = 0) = 1 - P_{S_n = k}(X_{n+1} = 1) \\ &= 1 - \frac{k}{1+1+n} = \frac{2+n-k}{2+n} \quad (\text{Q}\mathbf{4}. \text{ avec } k \in \mathbb{N}^* \text{ et } r = b = 1) \end{aligned}$$

10. Soit $k \in [\![2, n+1]\!]$. D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(S_n = \ell)_{\ell \in S_n(\Omega)} = (S_n = \ell)_{\ell \in [\![1, n+1]\!]}$, on a :

$$\begin{aligned} P(S_{n+1} = k) &= \sum_{\ell=1}^{n+1} P(S_{n+1} = k \cap S_n = \ell) = \sum_{\ell=1}^{n+1} P(S_n = \ell) P_{S_n = \ell}(S_{n+1} = k) \\ &= P(S_n = k-1) P_{S_n = k-1}(S_{n+1} = k) + P(S_n = k) P_{S_n = k}(S_{n+1} = k) \\ &\quad + \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \notin \{k-1, k\}}}^{n+1} P(S_n = \ell) \underbrace{P_{S_n = \ell}(S_{n+1} = k)}_{=0} \\ &\quad \text{(car, comme } k \in [\![2, n+1]\!], \ k-1 \text{ et } k \in [\![1, n+1]\!]) \\ &= \frac{k-1}{n+2} P(S_n = k-1) + \frac{n+2-k}{n+2} P(S_n = k). \end{aligned}$$

11. Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, "S_n suit la loi uniforme sur $[\![1, n+1]\!]$" (HR_n).
Initialisation : Pour $n = 0$, $S_0 = 1 \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, 1]\!])$, donc on a bien HR_0.
Pour $n = 1$, on a $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(1/2) = \mathcal{U}([\![0, 1]\!])$ d'après la question **1.** avec $r = b = 1$. On a donc $S_1 = 1 + X_1 \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, 2]\!])$. On a bien HR_1.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons HR_n vérifiée.
Alors on a $S_{n+1}(\Omega) = [\![1, n+2]\!]$ (d'après la question **3.**), $P(S_{n+1} = 1) = \frac{1}{n+2}$ (d'après la question **8.**), $P(S_{n+1} = n+2) = \frac{1}{n+2}$ (admis dans l'énoncé) et, pour tout $k \in [\![2, n+1]\!]$, d'après la question précédente,

$$\begin{aligned} P(S_{n+1} = k) &= \frac{k-1}{n+2} P(S_n = k-1) + \frac{n+2-k}{n+2} P(S_n = k) \\ &= \frac{k-1}{n+2}\frac{1}{n+1} + \frac{n+2-k}{n+2}\frac{1}{n+1} \quad \text{(d'après } HR_n \text{ avec } k-1 \text{ et } k \in S_n(\Omega) = [\![1, n+1]\!]) \\ &= \frac{n+1}{(n+2)(n+1)} = \frac{1}{n+2}. \end{aligned}$$

On a donc bien $S_{n+1} \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n+2]\!])$, i.e. HR_{n+1}.
Conclusion : D'où, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n+1]\!])$.