# Devoir à la maison n° 6 - MPI

*À rendre le lundi 8 décembre 2025*

Ce devoir maison n° 6 est composé de deux petits problèmes très classiques, le premier correspondant tout simplement à la démonstration d'un résultat fondamental du cours.

## Problème 1. Théorème spectral

On considère dans ce problème un espace euclidien $E$ de dimension $n \geqslant 1$. On notera $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire. Soit $u$ un endomorphisme de $E$.

**1.** **a)** À l'aide d'un polynôme annulateur de $u$, montrer que si $u$ n'admet pas de valeur propre réelle, alors il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $u^2 + au + bId$ n'est pas injectif.

**b)** En déduire que $E$ admet nécessairement un sous-espace vectoriel $F$ de dimension 1 ou 2 stable par $u$.

**2.** On suppose dans cette question que $u$ est autoadjoint.

**a)** Montrer que si $x$ et $y$ sont deux vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes $\lambda$ et $\mu$ de $u$, on a $x \perp y$.

**b)** Montrer que si $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$ stable par $u$, alors $F^\perp$ est stable par $u$, et que $u$ induit sur $F$ et $F^\perp$ des endomorphismes autoadjoints.

**c)** Montrer que si $n = 2$, alors $u$ est diagonalisable dans une base orthonormée de $E$.

*On pourra considérer le polynôme caractéristique de u, calculé à partir d'une représentation matricielle de u dans une base orthonormée quelconque de E*

**d)** À l'aide des questions précédentes, rédiger une récurrence sur $n$ prouvant que $u$ est diagonalisable en base orthonormée : il existe une base $\mathcal{B}$ orthonormée de $E$ telle que $\underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(u)$ est diagonale.

**3.** **(MPI* seulement) Réduction des isométries vectorielles.**

On suppose maintenant dans cette question que $u$ est une isométrie vectorielle. En s'inspirant de la démarche de la question précédente, rédiger une récurrence sur $n$ prouvant qu'il existe une base orthonormée de $E$ dans laquelle $u$ est représentée par une matrice diagonale par blocs de la forme :

$$M = \begin{pmatrix} I_p & & & & \\ & -I_q & & & \\ & & R_1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & R_s \end{pmatrix},$$

avec $p, q, s \in \mathbb{N}$, et pour tout $i \in [\![1, s]\!]$, $R_i = \begin{pmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i) \end{pmatrix}$, où $\theta_i \in \mathbb{R} \backslash \{\pi\mathbb{Z}\}$.

## Problème 2. Matrices symétriques positives

Dans ce problème, on note $E$ l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique. Tout vecteur $x$ de $E$ est immédiatement identifié à une matrice colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

On note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On rappelle qu'une matrice symétrique $M$ de $\mathcal{S}_n$ est dite *positive* lorsque pour tout $x \in E$ :

$$X^T M X \geqslant 0.$$

Elle est dite *définie positive* lorsque pour tout $x \in E$ <u>non nul</u> :

$$X^T M X > 0.$$

On note $\mathcal{S}_n^+$ l'ensemble des matrices symétriques positives et $\mathcal{S}_n^{++}$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives.

Dans toute la suite, on considère une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

**1.** Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
   (i) $A \in \mathcal{S}_n^+$ ;
   (ii) $A \in S_n$ et $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}^+$ ;
   (iii) $\exists\, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\,,\quad A = M^T M$

**2.** Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
   (i) $A \in \mathcal{S}_n^{++}$ ;
   (ii) $A \in S_n$ et $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$ ;
   (iii) $\exists\, M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\,,\quad A = M^T M$

**3.** **a)** Si $A \in \mathcal{S}_n^+$, montrer que $A$ est limite d'une suite de matrices de $\mathcal{S}_n^{++}$ ;
   **b)** Montrer que $\mathcal{S}_n^+$ est une partie fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

**4.** On suppose $A \in \mathcal{S}_n^+$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
   **a)** Montrer qu'il existe une unique matrice $A' \in \mathcal{S}_n^+$ telle que $A = A'^k$.
   *(on pourra noter alors $A' = \sqrt[k]{A}$.)*
   **b)** Montrer qu'il existe un polynôme $P_A \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\sqrt[k]{A} = P_A(A)$.
   *(On pourra utiliser les polynômes interpolateurs de Lagrange.)*

# Un corrigé

## Problème 1. Théorème spectral

**1.** **a)** Supposons que $u$ n'admet pas de valeur propre réelle. Cela revient à dire que le polynôme minimal $\mu$ (on peut aussi considérer le polynôme caractéristique $\chi$) n'admet pas de racine réelle, et donc ne possède que des racines complexes non réelles. Le polynôme $\mu$ est donc produit de polynômes de la forme $X^2 + aX + b$, avec $a, b \in \mathbb{R}$. On peut donc écrire $\mu(u)$ comme une composition d'endomorphismes de la forme $u^2 + au + bId$. L'un de ces facteurs au moins ne peut être injectif, car si tous l'étaient, leur "produit" (composition) $\mu(u)$ le serait aussi, absurde.

**b)** Supposons que $E$ n'admet aucun sous-espace stable par $u$ de dimension 1. Cela revient précisément à dire que $u$ n'admet pas de valeur propre réelle. D'après la question précédente, il existe alors $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $u^2 + au + bId$ n'est pas injectif. Fixons alors $x$ non nul dans $\mathrm{Ker}(u^2 + au + bId)$, et considérons $F = \mathrm{vect}\big(x, u(x)\big)$. La famille $(x, u(x))$ est forcément libre car sinon $x$ serait un vecteur propre pour $u$, et $F$ est donc de dimension 2. D'autre part, $u\big(u(x)\big) = u^2(x) = -bx - au(x) \in F$ ; les images de $x$ et de $u(x)$ par $u$ sont donc encore dans $F$, ce qui prouve, par linéarité, que $F$ est bien stable par $u$.

**2.** **a)** Soient $x$ et $y$ deux vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes $\lambda$ et $\mu$ de $u$. L'endomorphisme $u$ est symétrique, puisque représenté par une matrice symétrique en base orthonormée, et on a donc :

$$\big(u(x)|y\big) = /big(x|u(y)\big)$$

Comme d'autre part, $u(x) = \lambda x$ et $u(y) = \mu y$, on en déduit, par bilinéarité du produit scalaire :

$$\lambda(x|y) = \mu(x|y)$$

ce qui prouve immédiatement $(x|y) = 0$.

**b)** Soit $y \in F^\perp$. Pour tout $x \in F$, on a $u(x) \in F$, et donc $(x|u(y)) = (u(x)|y) = 0$. On vient ainsi de montrer que $u(y)$ est orthogonal à tout vecteur de $F$, donc que $u(y) \in F^\perp$.

La relation $(u(x)|y) = (x|u(y))$ restant évidememnt vraie pour les endomorphismes induit par $u$ sur $F$ et $F^\perp$, ces derniers sont bien des endomorphismes autoadjoint.

**c)** Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée quelconque. La matrice $M$ représentant $u$ dans $\mathcal{B}$ est de la forme $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$. Son polynôme caractéristique est alors $\chi = X^2 - 2(a + c)X + ac - b^2$, dont le discriminant vaut

$$\Delta = (a + c)^2 - 4(ac - b^2) = (a - c)^2 + 4b^2$$

Si $\Delta = 0$, c'est que $a = c$ et $b = 0$ et $M$ est déjà une matrice diagonale : $u$ est donc diagonalisable dans la base canonique, qui est bien orthonormale. Sinon, $\Delta > 0$ et $u$ possède donc deux valeurs propres réelles distinctes. Il s'ensuit que $u$ est diagonalisable, et il suffit de choisir des vecteurs propres unitaires pour avoir une base orthonormée dans laquelle $u$ est représentée par une matrice diagonale (on sait en effet déjà que des vecteurs propres associés à des valeurs propres distincts sont orthogonaux).

**d)** Le cas $n = 1$ est trivial et le cas $n = 2$ correspond à la question précédente. Soit $n \geqslant 3$. On suppose (hypothèse de récurrence) que tout endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien de dimension $n - 1$ ou $n - 2$ est diagonalisable en base orthonormé. Fixons alors $u \in \mathcal{S}(E)$. D'après les question précédente, $E$ admet nécessairement un sous-espace $F$ stable par $u$, de dimension 1 ou 2, et le sous-espace $F^\perp$, est également stable par $u$. De plus les endomorphismes $\hat{u}$ et $\tilde{u}$ induits par $u$ sur $F$ et $F^\perp$ sont autoadjoints. Comme $F$ est de dimension 1 ou 2, l'initialisation de cette récurrence prouve que $\hat{u}$ est diagonalisable en une base $\hat{\mathcal{B}}$ orthonormée de $F$. D'autre part, comme $F^\perp$ est de dimension $n-1$ ou $n-2$, l'hypothèse de réccurence prouve que $\tilde{u}$ est diagonalisable en une base $\tilde{\mathcal{B}}$ orthonormée de $F^\perp$. En rassemblant $\hat{\mathcal{B}}$ et $\tilde{\mathcal{B}}$, on obtient une base $\mathcal{B}$ orhonormale qui diagonalise bien $u$.

## Problème 2. Matrices symétriques positives

**1.** Voir le cours pour $(i) \Leftrightarrow (ii)$. Pour $(ii) \Rightarrow (iii)$. On diagonalise $A$, avec $A = P^T DP$ avec $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, on a alors $D = \Delta^2$ avec $\Delta = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$, et $M = \Delta P$ convient. $(iii) \Rightarrow (i)$ est facile.

**2.** Analogue à la question précédente, en remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes, et en notant qu'une matrice symétrique est inversible ssi aucune de ses valeurs propres n'est nulle.

**3.** **a)** Il suffit de considérer la suite $(A_k)_k$, avec $A_k = A + \dfrac{1}{k} I_n$.

**b)** Si une suite $(A_k)_k$ de $\mathcal{S}_n^+$ converge dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, sa limite $A$ sera également dans $\mathcal{S}_n^+$ par passage à la limite dans les égalités $A_k^T = A_k$ et $X^T A_k X$ pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

**4.** **a)** On diagonalise $A$, avec $A = P^T DP$ avec $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et on considère $P^T \Delta P$ avec $\Delta = \mathrm{diag}(\sqrt[k]{\lambda_1}, \dots, \sqrt[k]{\lambda_n})$

**b)** En ne gardant que les valeurs propres 2 à 2 distinctes $\mu_1, \dots, \mu_q$, on considère le polynôme $P_A = \sum_{k=1}^{q} \sqrt[k]{\mu_k} L_k$, avec $L_1, \dots, L_q$ les polynômes interpotalateurs de Lagrange associés à $\lambda_1, \dots, \lambda_q$, de sorte que

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad P_A(\lambda_i) = \sqrt[k]{\lambda_i}$$

On a alors $P_A(D) = \Delta$ et donc $P_A(A) = \sqrt[k]{A}$.