

# Devoir à la maison n° 3 - MPI

*À rendre le lundi 13 octobre 2025*

Ce troisième devoir MPI est constitué de deux problèmes : une amélioration de la règle de d'Alembert et l'étude détaillée d'une série de fonctions.

## I. Règle de Raabe-Duhamel

Dans ce problème, on considère une suite  $(u_n)_n$  strictement positive. On s'intéresse à l'étude de la convergence de la série  $\sum u_n$ . La règle de d'Alembert permet de conclure lorsque :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell \neq 1.$$

On se place ici dans le cas  $\ell = 1$  et on suppose qu'il existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel qu'au voisinage de  $+\infty$  :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

1. On suppose  $\alpha > 1$ . et on fixe  $\gamma \in ]1, \alpha[$ . Soit  $(v_n)_n$  définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \frac{1}{n^\gamma}.$$

- a) Montrer qu'on a le développement asymptotique :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = 1 - \frac{\gamma}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

- b) En déduire l'existence d'un certain rang  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que :

$$\forall n \geq n_0, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

- c) À l'aide de l'inégalité précédente, montrer qu'au voisinage de  $+\infty$ , on a  $u_n = O(v_n)$ . En déduire la nature de la série  $\sum u_n$ .

2. Effectuer un raisonnement similaire dans le cas  $\alpha < 1$  et énoncer une règle permettant de connaître potentiellement la nature d'une série dans le cas douteux (" $\ell = 1$ ") de la règle de d'Alembert.

*Il s'agit de la règle de Raabe-Duhamel. On ne peut rien conclure a priori lorsque  $\alpha = 1$ , car le « $O(\frac{1}{n})$ » a alors son mot à dire. Mais en pratique, il correspond le plus souvent au terme général d'une série absolument convergente (typiquement un « $O(\frac{1}{n^2})$ »), et on a alors un meilleur contrôle.*

3. On suppose maintenant qu'il existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  et une série réelle  $\sum \alpha_n$  absolument convergente tels que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + \alpha_n.$$

- a) Pour tout  $n \geq 1$ , on pose  $a_n = \ln(n^\alpha u_n)$ . Montrer que la série de terme général  $a_{n+1} - a_n$  est convergente.  
b) En déduire l'existence d'un réel  $K > 0$  tel qu'au voisinage de  $+\infty$  :

$$u_n \sim \frac{K}{n^\alpha}.$$

- c) Expliquer en quoi ce résultat confirme et complète la règle obtenue à la question 2.

4. Application : Étudier la nature de la série  $\sum u_n$ , avec  $u_n = \sqrt{n!} \prod_{k=1}^n \sin\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ .

## II. Étude d'une série de fonctions

Soit  $\alpha$  un réel strictement positif.

Pour  $n$  entier non nul, on considère l'application  $u_n$  de  $[0, +\infty[$  vers  $\mathbb{R}$  définie par

$$u_n(x) = \frac{x}{n^\alpha(1+nx^2)}.$$

### 1. Étude des modes de convergence de la série de fonction $\sum u_n$ .

- a) Montrer que la série  $\sum u_n$  converge simplement sur  $[0, +\infty[$ .
- b) Montrer que la série  $\sum u_n$  converge normalement sur  $[0, +\infty[$  si et seulement si  $\alpha > \frac{1}{2}$ .
- c) Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $0 < a < b$ .  
Prouver que la série  $\sum u_n$  converge normalement sur  $[a, b]$ .
- d) On suppose dans cette question que  $\alpha \leq \frac{1}{2}$ . Pour  $x$  élément de  $[0, +\infty[$ , on pose

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x).$$

i. Établir l'inégalité :  $R_n(x) \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{x}{\sqrt{2n}(1+kx^2)}$ .

ii. En déduire que la série  $\sum u_n$  n'est pas uniformément convergente sur  $[0, a]$ , où  $a$  est un réel strictement positif.

On note  $S$  l'application de  $[0, +\infty[$  vers  $\mathbb{R}$  définie par  $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ .

### 2. Étude de la continuité de $S$ .

- a) Montrer que pour tout  $\alpha$ ,  $S$  est continue sur  $]0, +\infty[$ .
- b) Montrer que si  $\alpha > \frac{1}{2}$ , alors  $S$  est continue sur  $[0, +\infty[$ .
- c) On suppose que  $\alpha \leq \frac{1}{2}$ . Soit  $x$  un réel strictement positif.

Soit  $f$  l'application définie sur  $[1, +\infty[$  par  $t \mapsto f(t) = \frac{x}{t^\alpha(1+tx^2)}$ .

i. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\int_1^{n+1} f(t) dt \leq \sum_{k=1}^n u_k(x).$$

ii. En déduire l'inégalité :

$$S(x) \geq \int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{t}(1+tx^2)} dt.$$

iii. À l'aide du changement de variable  $u = x\sqrt{t}$ , calculer l'intégrale de la question précédente, et en déduire que  $S$  n'est pas continue en 0.

# Un corrigé

## I. Règle de Raabe-Duhamel

1. a) Pour  $n$  au voisinage de  $+\infty$ , le développement limité de  $(1+x)^{-\beta}$  en 0 nous donne :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{n^\beta}{(n+1)^\beta} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-\beta} = 1 - \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

b) On considère le développement asymptotique de la différence :

$$\delta_n = \frac{v_{n+1}}{v_n} - \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\alpha - \beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Autrement dit la suite  $(n\delta_n)_n$  converge vers  $\alpha - \beta > 0$ . Il existe donc un rang  $n_0$  tel que pour tout  $n \geq n_0$ , on a  $\delta_n \geq 0$ , i.e. :

$$\forall n \geq n_0, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

c) L'inégalité précédente est équivalente à  $\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leq \frac{u_n}{v_n}$ , ce qui prouve que la suite  $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$  est décroissante à partir du rang  $n_0$ . On a donc  $\frac{u_n}{v_n} \leq M$  pour tout  $n \geq n_0$  en posant  $M = \frac{u_{n_0}}{v_{n_0}}$ . Cela se traduit précisément par la domination  $u_n = O(v_n)$  au voisinage de  $+\infty$ .

La série  $\sum v_n$  de terme général  $v_n = \frac{1}{n^\beta}$  est une série de Riemann convergente car  $\beta > 1$ . Dès lors, la série positive  $\sum u_n$  est également convergente par comparaison.

2. Supposons maintenant  $\alpha < 1$ . On choisit cette fois  $\beta \in ]\alpha, 1[$ , et on définit la suite  $(v_n)_n$  comme précédemment. Le développement asymptotique

$$\delta_n = \frac{v_{n+1}}{v_n} - \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\alpha - \beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

reste valable, mais on a ici  $\alpha - \beta < 0$ , et on en déduit l'existence d'un rang  $n_0$  tel que :

$$\forall n \geq n_0, \quad \frac{v_{n+1}}{v_n} \leq \frac{u_{n+1}}{u_n}.$$

Par le même procédé que précédemment, on en déduit  $v_n = O(u_n)$  au voisinage de  $+\infty$ . La série de Riemann  $\sum v_n$  étant cette fois-ci divergente (puisque  $\beta < 1$ ), il en va de même de la série  $\sum u_n$  par comparaison.

On peut ainsi écrire la règle de Raabe-Duhamel :

Supposons qu'il existe  $\alpha$  tel qu'au voisinage de  $+\infty$  :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Alors :

- si  $\alpha > 1$ , la série  $\sum u_n$  est convergente
- Si  $\alpha < 1$ , la série  $\sum u_n$  est divergente
- Si  $\alpha = 1$ , on ne peut rien conclure.

*Remarque : en fait, on n'a pas prouvé qu'on ne pouvait pas conclure dans le cas  $\alpha = 1$ . Il faudrait pour le faire exhiber deux exemples de séries, l'une divergente, l'autre convergente, pour lesquelles on a le développement asymptotique précédent avec  $\alpha = 1$ . Nous le ferons, mais après la deuxième partie de cette étude, qui précise un peu les choses lorsque le « $o\left(\frac{1}{n}\right)$ » est assez «petit» pour être le terme général d'une série convergente.*

3. a) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \ln((n+1)^\alpha u_{n+1}) - \ln(n^\alpha u_n) \\ &= \ln\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha \frac{u_{n+1}}{u_n}\right] \\ &= \ln\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha \left(1 - \frac{\alpha}{n} + \alpha_n\right)\right] \\ &= \ln\left[\left(1 + \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \left(1 - \frac{\alpha}{n} + \alpha_n\right)\right] \\ &= \ln\left[1 - \frac{\alpha}{n} + \alpha_n + \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha}{n}\alpha_n + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] \\ &= \ln\left[1 + O(\alpha_n) + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] \\ &= O(\alpha_n) + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

La série de Riemann  $\sum \frac{1}{n^2}$  est convergente, la série  $\sum \alpha_n$  l'est aussi par hypothèse. Par comparaison, La série  $\sum(a_{n+1} - a_n)$  est donc également convergente.

- b) La convergence de la série  $\sum(a_{n+1} - a_n)$  est équivalente à la convergence de la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Il existe donc  $C \in \mathbb{R}$  tel que  $\ln(n^\alpha u_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} C$ . Par composition avec l'exponentielle, il vient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha u_n = e^C.$$

En notant  $K = e^C > 0$ , on a bien au voisinage de  $+\infty$  :

$$u_n \sim \frac{K}{n^\alpha}.$$

- c) La série de Riemann  $\sum \frac{1}{n^\alpha}$  est convergente si, et seulement si,  $\alpha > 1$ . Par comparaison, il en va de même de la série  $\sum u_n$ . On retrouve les résultats de la règle de *Raabe-Duhamel*, et ceux-ci sont même affinés puisque le cas  $\alpha = 1$  n'est plus douteux : le terme général est alors équivalent à celui de la série harmonique et la série est donc divergente.

*Remarque : savoir que  $\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 \sim -\frac{\alpha}{n}$  permet de connaître la nature de la série  $\sum u_n$  lorsque  $\alpha \neq 1$ . Le cas  $\alpha = 1$  est critique : a priori il induit un comportement de série harmonique, donc divergent, mais il faut que le « $o\left(\frac{1}{n}\right)$ » soit assez «petit». L'étude de la série  $\sum u_n$  avec  $u_n = \frac{1}{n \ln^2(n)}$  fournira un contre-exemple pour lequel on a bien le développement asymptotique :*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

alors que la série converge (série de Bertrand). Une analyse fine prouvera que le « $\text{o}\left(\frac{1}{n}\right)$ » n'est effectivement pas assez «petit» : il est en  $\frac{1}{n \ln(n)}$ , terme général d'une série divergente (série de Bertrand également).

4. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\sqrt{(n+1)!}}{\sqrt{n!}} \sin \frac{1}{\sqrt{n+1}} \\ &= \sqrt{n+1} \left( \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{6} \left( \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right)^3 + \mathcal{O} \left( \left( \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right)^5 \right) \right) \\ &= 1 - \frac{1}{6(n+1)} + \mathcal{O} \left( \frac{1}{(n+1)^2} \right) = 1 - \frac{1}{6n} + \mathcal{O} \left( \frac{1}{n^2} \right). \end{aligned}$$

On a la forme voulue avec  $\alpha = \frac{1}{6}$ . La série est divergente.

## II. Étude d'une série de fonctions

1. Étude des modes de convergence de la série de fonction  $\sum u_n$ .

- a) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a  $u_n(0) = 0$ . La série  $\sum u_n(0)$  est donc bien évidemment convergente, de somme 0.

Soit  $x \in ]0, +\infty[$ . On a pour  $n$  au voisinage de  $+\infty$  :

$$u_n(x) \sim \frac{1}{x n^{\alpha+1}}.$$

Par comparaison avec une série de Riemann, la série  $\sum u_n(x)$  converge donc si, et seulement si,  $\alpha > 0$ , ce qui est justement supposé dans l'exercice.

La série de fonction  $\sum u_n$  converge donc simplement sur  $[0, +\infty[$ .

- b) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Étudions la fonction  $u_n$  sur  $[0, +\infty[$ .  $u_n$  est dérivable sur cet intervalle, avec

$$u'_n(x) = \frac{n^\alpha(1+nx^2) - 2n^{\alpha+1}x^2}{n^{2\alpha}(1+nx^2)^2} = \frac{1-nx^2}{n^\alpha(1+nx^2)^2}.$$

Le signe de  $u'_n$  montrer que  $u_n$  est strictement croissante sur  $[0, a_n]$  et strictement décroissante sur  $[a_n, +\infty[$ , avec  $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ .  $u_n$  étant par ailleurs positive sur  $[0, +\infty[$  (avec comme limites aux bornes  $u_n(0) = 0$  et  $u_n(x) \rightarrow 0$  quand  $x \rightarrow +\infty$ ), elle admet en  $a_n$  le maximum :

$$u_n(a_n) = \frac{1}{2\sqrt{n}n^\alpha}.$$

Par comparaison avec une série de Riemann, la série  $\sum u_n(a_n)$  converge donc si, et seulement si,  $\alpha + \frac{1}{2} > 1$ , ie.  $\alpha > \frac{1}{2}$ . Or la convergence de cette série numérique signifie précisément la convergence normale de la série de fonction  $u_n$  sur  $[0, +\infty[$ .

- c) On a  $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$ .  $a$  étant choisi  $> 0$ , il existe un certain rang  $n_0$  au delà duquel on a pour tout  $n$ ,  $a_n \leq a$ . Pour  $n \geq n_0$ , la fonction  $u_n$  est donc décroissante sur  $[a, b]$ , et admet ainsi un maximum en  $a$ . Or on sait depuis la question 1.a) que la série numérique  $\sum u_n(a)$  est convergente : il y a bien convergence normale sur  $[a, b]$ .

- d) i. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et soit  $x \in [0, +\infty[$ . La série  $\sum u_n(x)$  étant positive, on a dans un premier temps :

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \geq \sum_{k=n+1}^{2n} u_k(x).$$

Pour tout  $k \in \llbracket n+1, 2n \rrbracket$ , on a  $k^\alpha \leq (2n)^\alpha \leq \sqrt{2n}$  (on a fixé  $\alpha \leq \frac{1}{2}$ ), d'où l'on déduit

$$u_k(x) = \frac{x}{k^\alpha(1+kx^2)} \geq \frac{x}{\sqrt{2n}(1+kx^2)}.$$

En sommant cette inégalité, pour  $k \in \llbracket n+1, 2n \rrbracket$ , on trouve bien :

$$R_n(x) \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{x}{\sqrt{2n}(1+kx^2)}.$$

- ii. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in [0, +\infty[$ , on peut poursuivre la minoration précédente de façon à obtenir quelque chose de moins fin, mais de plus maniable : sachant que  $kx^2 \leq 2nx^2$  pour tout  $k \in \llbracket n+1, 2n \rrbracket$ , on a

$$R_n(x) \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{x}{\sqrt{2n}(1+2nx^2)} = \frac{x\sqrt{n}}{\sqrt{2}(1+2nx^2)}.$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , assez grand pour que  $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \leq a$ , on évalue cette inégalité en  $x = a_n$  :

$$R_n(a_n) \geq \frac{1}{3\sqrt{2}}.$$

Cette minoration indique clairement que la borne supérieure de  $R_n$  sur  $[0, a]$  ne tend par vers 0 lorsque  $n \rightarrow +\infty$ . Il n'y a donc pas convergence uniforme sur  $[0, a]$ .

## 2. Étude de la continuité de $S$ .

- a) Les fonctions  $u_n$  sont composées de fonctions usuelles continues et sont donc bien sûr continues sur  $]0, +\infty[$ . De plus, quelle que soit la valeur de  $\alpha > 0$ , la série  $\sum u_n$  converge normalement, donc uniformément, sur tout segment de  $]0, +\infty[$ . Sa somme  $S$  est donc continue sur tout segment de  $]0, +\infty[$ , donc sur  $]0, +\infty[$ .
- b) Supposons  $\alpha > \frac{1}{2}$ . On a vu alors que la série  $\sum a_n$  converge normalement, donc uniformément sur  $[0, +\infty[$ .  $S$  est donc continue sur cet intervalle.
- c) On suppose que  $\alpha \leq \frac{1}{2}$ . Soit  $x$  un réel strictement positif.

Soit  $f$  l'application définie sur  $[1, +\infty[$  par  $t \mapsto f(t) = \frac{x}{t^\alpha(1+tx^2)}$ .

- i. Il est facile de vérifier que la fonction  $f$  est décroissante sur  $[1, n+1]$ . Pour  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on a donc :

$$\forall t \in [k, k+1], \quad f(t) \leq f(k).$$

Par intégration de cette inégalité sur  $[k, k+1]$ , on a :

$$\int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k) = u_k(x).$$

Il ne reste qu'à sommer cette inégalité sur tout les  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , pour obtenir, grâce à la relation de Chasles :

$$\int_1^{n+1} f(t) dt \leq \sum_{k=1}^n u_k(x).$$

ii. Puisque le membre de droite de l'inégalité précédente converge vers  $S(x)$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , l'intégrale généralisée positive  $\int_{[0,+\infty[} f$  est bornée donc convergente. Par passage à la limite dans l'inégalité précédente, on obtient :

$$\int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{t}(1+tx^2)} dt \leq \int_1^{+\infty} \frac{x}{t^\alpha(1+tx^2)} dt \leq S(x).$$

iii. Après avoir effectué le changement de variable  $u = x\sqrt{t}$  (et donc  $dt = \frac{2u}{x^2}du$ ), l'intégrale précédente devient :

$$\int_x^{+\infty} \frac{x^2}{u(1+u^2)} \frac{2u}{x^2} du = \int_x^{+\infty} \frac{2du}{u^2+1} = [2 \arctan(u)]_x^{+\infty} = \pi - 2 \arctan(x).$$

Si  $S$  était continue en 0, on aurait  $S(x) \rightarrow S(0) = 0$ , lorsque  $x \rightarrow 0$ . Par passage à la limite dans l'encadrement obtenu  $0 \leq \pi - 2 \arctan(x) \leq S(x)$ , on en déduirait  $\pi = 0$ , ce qui est absurde car le périmètre d'un cercle n'est pas nul en général.