Interrogation de cours n$^{\text{o}}$ 11

Lundi 8 décembre 2025

Version de l'année dernière, des questions sont susceptibles de changer !

Définitions & formules

1. Si f est une fonction numérique définie et continue par morceaux sur $[a, b[$, quand dit-on que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est convergente ?

2. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$ est-elle intégrable sur $]0, 1]$? Et sur $[1, +\infty[$?

3. Qu'est-ce que l'ensemble $L^2(I, \mathbb{K})$?

4. Énoncer le théorème de convergence dominée pour une suite $(f_n)_n$ de fonctions définies sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

5. Énoncer le théorème d'intégration terme à terme pour une série de fonctions $\sum f_n$ définies sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Résultats et propriétés

a) Démontrer la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$ et donner sa valeur.

b) Pour un intervalle I de $\mathbb{R}$, montrer que $L^2(I, \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.

c) Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$ est convergente.