Devoir à la maison n° 2 - MPI

À rendre le lundi 29 septembre 2025

Ce second devoir MPI est constitué de deux problèmes d'analyse autour de la manipulation de normes.

Problème 1 : Des normes sur $\mathbb{R}^2$

On considère dans $\mathbb{R}^2$ les deux normes définies pour $x = (x_1, x_2)$ par :

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| \qquad \text{et} \qquad \|x\|_\infty = \sup(|x_1|, |x_2|)$$

1. Déterminer deux réels positifs α et β tels que pour tout $x \in \mathbb{R}^2$:

$$\alpha\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_1 \leqslant \beta\|x\|_\infty$$

2. On pose, pour $a, b \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^2$: $N(x) = a\|x\|_1 + b\|x\|_\infty$.
On considère les vecteurs $x = (1, 0)$, $y = (0, 1)$, $x' = (1, 1)$ et $y' = (-1, 1)$.

a) Calculer $N(x)$, $N(y)$, $N(x')$, $N(y')$.

b) En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que N soit une norme.

On supposera que cette condition est vérifiée par la suite.

3. Sur un même repère, construire les sphères unités S_1 pour $\|\cdot\|_1$, S_∞ pour $\|\cdot\|_\infty$ et S_N pour la norme N dans le cas $a = b = \dfrac{1}{2}$.

4. On suppose toujours $a = b = \dfrac{1}{2}$.
On note $B_1(R)$, $B_\infty(R)$ et $B_N(R)$ les boules de rayons R centrées en $(0, 0)$ pour les normes respectives $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_\infty$ et N. Montrer qu'il existe un nombre R tel que :

$$B_1(R) \subset B_N(1) \subset B_\infty(R)$$

Problème 2 : Continuité de la longueur d'une courbe

Pour toute fonction $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, on note

$$L(f) = \int_0^1 \sqrt{1 + (f'(t))^2}\mathrm{d}t$$

une expression intégrale de la longueur de la courbe représentative de f.

On rappelle que l'application

$$f \mapsto \|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$$

définit une norme sur l'espace $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ des applications continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$.

On note $E_1 = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continûment dérivables de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ et pour toute fonction $f \in E_1$, on note

$$\|f\| = |f(0)| + \|f'\|_\infty$$

1. Montrer que l'application $f \mapsto \|f\|$ définit une norme sur E_1.

2. Montrer que

$$\forall f \in E_1, \quad \|f\|_\infty \leqslant \|f\|$$

3. Les normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont-elles équivalentes sur E_1 ?

On désigne par $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définie sur $[0,1]$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall t \in [0,1], \quad f_n(t) = \frac{\sin(n\pi t)}{\sqrt{n}}$$

4. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $[0,1]$, c'est-à-dire :

$$\|f_n - 0\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$L(f_n) \geqslant 2\sqrt{n}$$

6. L'application $L : f \mapsto L(f)$ est-elle continue sur $(E_1, \|\cdot\|_\infty)$?

7. L'application $L : f \mapsto L(f)$ est-elle continue sur $(E_1, \|\cdot\|)$?
Indication : On pourra majorer $|L(f) - L(g)|$ pour f et g dans E_1.

Un corrigé

Problème 1 : Des normes sur $\mathbb{R}^2$

1. Soit $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Par définition de $\|x\|_\infty$, on a $|x_1| \leqslant \|x\|_\infty$ et $|x_2| \leqslant \|x\|_\infty$, et donc :

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| \leqslant 2\|x\|_\infty$$

D'autre part, on a $\|x\|_\infty = |x_1|$ ou $\|x\|_\infty = |x_2|$ (suivant que $|x_1| \geqslant |x_2|$ ou pas) et donc dans tous les cas

$$\|x\|_\infty \leqslant |x_1| + |x_2| = \|x\|_1$$

Les réels $\alpha = 1$ et $\beta = 2$ conviennent donc. Il sont même optimaux au sens où on peut avoir $\|x\|_\infty = \|x\|_1$ (par exemple avec $x = (1, 0)$) et $\|x\|_1 = 2\|x\|_\infty$ (par exemple avec $x = (1, 1)$).

2. a) On a $\|x\|_1 = \|x\|_\infty = \|y\|_1 = \|y\|_\infty = 1$ donc $N(x) = N(y) = a + b$. On a également $\|x'\|_\infty = \|y'\|_\infty = 1$ mais $\|x'\|_1 = \|y'\|_1 = 2$ et donc $N(x') = N(y') = 2a + b$.

b) Raisonnons par condition nécessaire et suffisante (ce qui correspond à une sorte d'analyse-synthèse).

- Supposons que N est une norme. Elle vérifie en particulier la propriété d'inégalité triangulaire que l'on peut appliquer aux vecteurs de la question précédente :
  — Puisque $x + y = x'$, l'inégalité triangulaire impose

  $$2a + b = N(x') \leqslant N(x) + N(y) = 2a + 2b,$$

  et donc $b \geqslant 0$.
  — Puisque $x' + y' = 2y$, on doit avoir également

  $$2a + 2b = N(2y) \leqslant N(x') + N(y') = 4a + 2b,$$

  et donc $a \geqslant 0$.

  Enfin, il faut que $a + b = N(x') > 0$ d'après l'axiome de séparation, et compte tenu de la positivité de a et b, cela implique $(a, b) \neq (0, 0)$.
  Une condition nécessaire pour que N soit une norme est donc finalement :

  $$\begin{cases} a \geqslant 0 \\ b \geqslant 0 \\ (a, b) \neq (0, 0) \end{cases}$$

- Réciproquement, supposons cette condition satisfaite. Alors il est facile de montrer que N est à valeurs positives et vérifie bien les axiomes de séparation, homogénéité, et inégalité triangulaire.

3.

4. D'après le dessin de la question précédente, il semblerait que $R = 1$ convient, ce que l'on peut vérifier à l'aide de l'inégalité $\|\cdot\|_\infty \leqslant \|\cdot\|_1$ de la question **1.**. En effet, on a alors pour tout $x \in \mathbb{R}^2$:

$$\|x\|_\infty = \frac{1}{2}\|x\|_\infty + \frac{1}{2}\|x\|_\infty \leqslant \underbrace{\frac{1}{2}\|x\|_1 + \frac{1}{2}\|x\|_\infty}_{N(x)} \leqslant \frac{1}{2}\|x\|_1 + \frac{1}{2}\|x\|_1 = \|x\|_1$$

On obtient donc l'encadrement $\|\cdot\|_\infty \leqslant N(\cdot) \leqslant \|\cdot\|_1$, ce qui prouve bien les inclusions :

$$B_1(1) \subset B_N(1) \subset B_\infty(1)$$

Problème 2 : Continuité de la longueur d'une courbe

1. $\|\cdot\|$ est clairement à valeur dans $\mathbb{R}_+$. Vérifions les différents axiomes.

- Soit $f \in E_1$ telle que $\|f\| = 0$. On a alors $f(0) = 0$ et $\|f'\|_\infty = 0$. Il en résulte que f' est la fonction nulle, donc que f est constante sur $[0,1]$. Mais puisque $f(0) = 0$, on a bien $f = 0$.
- Pour $f \in E_1$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $(\lambda f)' = \lambda f'$, et on obtient bien l'homogénéité :

$$\|\lambda f\| = |\lambda f(0)| + \|\lambda f'\|_\infty = |\lambda|\big(|f(0)| + \|f'\|_\infty\big) = |\lambda|\,\|f\|$$

- Pour $f, g \in E_1$, on a $(f+g)' = f' + g'$, ce qui permet bien d'obtenir l'inégalité triangulaire :

$$\|f+g\| = |f(0)+g(0)| + \|f'+g'\|_\infty \leqslant |f(0)| + |g(0)| + \|f'\|_\infty + \|g'\|_\infty = \|f\| + \|g\|$$

2. Soit $f \in E_1$. Pour $x \in [0,1]$, on a, d'après le théorème fondamentale de l'analyse :

$$|f(x)| = \left| f(0) + \int_0^x f'(t)\mathrm{d}t \right| \leqslant |f(0)| + \int_0^x |f'(t)|\mathrm{d}t$$

Comme $|f'(t)| \leqslant \|f'\|_\infty$ pour tout $t \in [0,1]$, on obtient, par intégration de cette inégalité sur $[0,x]$:

$$|f(x)| \leqslant |f(0)| + \int_0^x \|f'\|_\infty \mathrm{d}t = |f(0)| + x\|f'\|_\infty \leqslant \|f\|$$

Par passage au sup, on en déduit bien $\|f\|_\infty \leqslant \|f\|$.

3. Considérons par exemple, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g_n : t \mapsto t^n$ sur $[0,1]$. On a $\|g_n\|_\infty = 1$ et $\|g_n\| = 0 + \|g_n'\|_\infty = n$. Il n'existe donc pas de réel $\alpha \geqslant 0$ tel que $\|g_n\| \leqslant \alpha\|g_n\|_\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Les normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont donc pas équivalentes.

On peut aussi constater que la suite $\left(\dfrac{1}{n} g_n\right)_n$ *converge vers* 0 *pour* $\|\cdot\|_\infty$*, mais par pour* $\|\cdot\|_1$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\forall\, t \in [0,1], \quad \left| \frac{\sin(n\pi t)}{\sqrt{n}} \right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}},$$

et donc $\|f_n\|_\infty \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}} \to 0$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $t \in [0,1]$,

$$f_n'(t) = \sqrt{n}\pi\cos(n\pi t)$$

On peut donc obtenir la minoration :

$$\forall\, t \in [0,1], \quad \sqrt{1 + (f_n'(t))^2} \geqslant |f_n'(t)| = \sqrt{n}\pi|\cos(n\pi t)|$$

On a donc, par intégration :

$$L(f_n) \geqslant \sqrt{n}\pi \int_0^1 |\cos(n\pi t)|\mathrm{d}t$$

On peut effectuer dans l'intégrale le changement de variable $u = n\pi t$, qui donne :

$$\int_0^1 |\cos(n\pi t)|\mathrm{d}t = \frac{1}{n\pi}\int_0^{n\pi} |\cos(u)|\mathrm{d}u$$

Par π-périodicité de la fonction $|\cos|$, on trouve finalement :

$$\int_0^1 |\cos(n\pi t)|\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} |\cos(u)|\mathrm{d}u = \frac{2}{\pi},$$

et on a donc bien $L(f_n) \geqslant 2\sqrt{n}$.

6. D'après la question **4.**, la suite $(f_n)_n$ converge vers la fonction nulle 0 dans $(E_1, \|\cdot\|_\infty)$. Si L était continue, on devrait avoir, par caractérisation séquentielle, $L(f_n) \to L(0) = 1$, ce qui est absurde puisque $L(f_n) \to +\infty$ d'après la question précédente. L'application L n'est donc pas continue sur $(E_1, \|\cdot\|_\infty)$.

7. Soient $f, g \in E_1$. On a, pour tout tout $t \in [0,1]$:

$$\left|\sqrt{1+(f'(t))^2} - \sqrt{1+(g'(t))^2}\right| = \frac{\left|(f'(t))^2 - (g'(t))^2\right|}{\sqrt{1+(f'(t))^2} + \sqrt{1+(g'(t))^2}} \leqslant \left|(f'(t))^2 - (g'(t))^2\right|$$

On a donc :

$$\left|L(f) - L(g)\right| = \left|\int_0^1 \left(\sqrt{1+(f'(t))^2} - \sqrt{1+(g'(t))^2}\right) \mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^1 \left|(f'(t) - g'(t)\right| \cdot \left|f'(t) + g'(t)\right| \mathrm{d}t$$

On peut en déduire enfin la majoration :

$$\left|L(f) - L(g)\right| \leqslant \|f' - g'\|_\infty \|f' + g'\|_\infty \leqslant \|f - g\| \|f + g\| \leqslant \|f - g\| \big(\|f\| + \|g\|\big)$$

Fixons maintenant $f \in E_1$ et soit $(f_n)_n$ une suite de E_1 qui converge vers f au sens de $\|\cdot\|$. On a en particulier $\|f_n\| \to \|f\|$ par continuité de la norme, et donc $\|f_n\| \leqslant 2\|f\|$ à partir d'un certain rang. Compte-tenu de la majoration précédente, il en résulte qu'à partir d'un certain rang, on a :

$$\left|L(f_n) - L(f)\right| \leqslant \|f_n - f\| \big(\|f_n\| + \|f\|\big) \leqslant 3\|f\| \|f_n - f\| \to 0$$

On a donc $L(f_n) \to L(f)$. Par caractérisation séquentielle, on en déduit que L est continue sur $(E_1, \|\cdot\|)$.