Devoir à la maison n° 6 - MPI*

À rendre le lundi 8 décembre 2025

Ce devoir maison n° 6 est composé d'un petit problème classique (démonstration deux résultats fondamentaux du cours) et d'un extrait de sujet de concours.

Problème 1. Théorème spectral

On considère dans ce problème un espace euclidien E de dimension $n \geqslant 1$. On notera $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire. Soit u un endomorphisme de E.

1. **a)** À l'aide d'un polynôme annulateur de u, montrer que si u n'admet pas de valeur propre réelle, alors il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $u^2 + au + bId$ n'est pas injectif.

b) En déduire que E admet nécessairement un sous-espace vectoriel F de dimension 1 ou 2 stable par u.

2. On suppose dans cette question que u est autoadjoint.

a) Montrer que si x et y sont deux vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes λ et μ de u, on a $x \perp y$.

b) Montrer que si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u, et que u induit sur F et $F^\perp$ des endomorphismes autoadjoints.

c) Montrer que si $n = 2$, alors u est diagonalisable dans une base orthonormée de E.

On pourra considérer le polynôme caractéristique de u, calculé à partir d'une représentation matricielle de u dans une base orthonormée quelconque de E

d) À l'aide des questions précédentes, rédiger une récurrence sur n prouvant que u est diagonalisable en base orthonormée : il existe une base $\mathcal{B}$ orthonormée de E telle que $\underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(u)$ est diagonale.

3. **(MPI* seulement) Réduction des isométries vectorielles.**

On suppose maintenant dans cette question que u est une isométrie vectorielle. En s'inspirant de la démarche de la question précédente, rédiger une récurrence sur n prouvant qu'il existe une base orthonormée de E dans laquelle u est représentée par une matrice diagonale par blocs de la forme :

$$M = \begin{pmatrix} I_p & & & & \\ & -I_q & & & \\ & & R_1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & R_s \end{pmatrix},$$

avec $p, q, s \in \mathbb{N}$, et pour tout $i \in [\![1, s]\!]$, $R_i = \begin{pmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i) \end{pmatrix}$, où $\theta_i \in \mathbb{R} \backslash \{\pi\mathbb{Z}\}$.

Problème 2. Début d'un sujet de concours ...

Prendre le temps une première fois de bien s'immerger dans l'énoncé qui suit, puis se donner deux sessions d'au moins 1h pour traiter au mieux les deux parties.

- Notations et rappels

• Dans tout le problème, p désigne un entier *strictement positif.*

• On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels. Pour tous entiers a et b dans $\mathbb{N}$ tels que $a \leqslant b$, on note $[\![a,b]\!] = \{n \in \mathbb{N} \mid a \leqslant n \leqslant b\ \}$.

On note $\mathfrak{S}_p$ le groupe des permutations de l'ensemble fini $[\![1,p]\!]$ muni de la composition.

On note $\epsilon : \mathfrak{S}_p \to \{-1,+1\}$ l'application signature, définie comme l'unique morphisme de groupes de $(\mathfrak{S}_p, \circ)$ dans $(\{-1,+1\}, \times)$ qui vaut -1 sur toutes les transpositions.

• On note $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices carrées de taille $p \times p$.
Pour tout $(x_1, \ldots, x_p) \in (\mathbb{R}^p)^p$, on appelle produit mixte de $(x_1, \ldots, x_p)$ la quantité

$$[x_1, \ldots, x_p] = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{p} x_{\sigma(i),i}$$

où pour tout $j \in [\![1,p]\!]$, on a noté $x_j = (x_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant p} \in \mathbb{R}^p$. En particulier, si on note $(x_1|\cdots|x_p)$ la matrice de taille $p \times p$ élément de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont données par les vecteurs $x_1, \ldots, x_p$, on a donc l'égalité $[x_1, \ldots, x_p] = \det((x_1|\cdots|x_p))$ où det est le déterminant usuel.

• Si F et G sont deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels, on dit que $f : F^p \to G$ est p-linéaire alternée si pour tout $u = (u_1, \ldots, u_p) \in F^p$ et tout $i \in [\![1,p]\!]$, l'application

$$y \mapsto f(u_1, \ldots, u_{i-1}, y, u_{i+1}, \ldots, u_p)$$

de F dans G est linéaire et pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_p$ on a

$$f(u \cdot \sigma) = \epsilon(\sigma) f(u)$$

où $u \cdot \sigma = (u_{\sigma(i)})_{1 \leqslant i \leqslant p}$.

On notera $\mathscr{A}_p(F,G)$ l'ensemble des applications p-linéaires alternées de F^p dans G.

• Dans tout le problème, on considère un espace euclidien E de dimension $d \geqslant 1$ muni de son produit scalaire $(x,y) \mapsto \langle x,y \rangle$. On note pour $x \in E$, $\|x\| = \langle x,x \rangle^{1/2}$ la norme associée.

• Pour tout entier q non nul, et toute famille $(u_1, \ldots, u_q)$ d'éléments de E, $\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_q)$ désigne le sous-espace vectoriel de E engendré par $u_1, \ldots, u_q$.

• Pour tous $u = (u_1, \ldots, u_p)$ et $v = (v_1, \ldots, v_p)$ dans E^p, on note $\mathrm{Gram}(u, v)$, la matrice carrée de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ définie pour tous $i, j \in [\![1, p]\!]$ par

$$\mathrm{Gram}(u, v)_{i,j} = \langle u_i, v_j \rangle .$$

- Partie I

Soient V et V' deux sous-espaces de E de dimension p (on rappelle que $p \geqslant 1$).

(1) (a) Montrer qu'il existe $u_1 \in V$ et $u'_1 \in V'$ de norme 1 tels que

$$\langle u_1, u'_1 \rangle = \sup\{ \langle a, a' \rangle \mid (a, a') \in V \times V', \ \|a\| = \|a'\| = 1 \}.$$

(b) Étendre ce résultat en montrant qu'il existe une famille $u = (u_1, \dots, u_p)$ de vecteurs de V et une famille $u' = (u'_1, \dots, u'_p)$ de vecteurs de V' telles que u et u' soient orthonormées et vérifient les deux conditions suivantes :

(i) Pour $k = 1$, on a

$$\langle u_1, u'_1 \rangle = \sup\{ \langle a, a' \rangle \mid (a, a') \in V \times V', \ \|a\| = \|a'\| = 1 \}.$$

(ii) Pour $k \in [\![2, p]\!]$, on a

$$\langle u_k, u'_k \rangle = \sup\{ \langle a, a' \rangle \mid (a, a') \in V \times V', \ \|a\| = \|a'\| = 1, \\ \langle a, u_l \rangle = \langle a', u'_l \rangle = 0 \text{ pour tout } l \in [\![1, k-1]\!] \}.$$

(Indication : On pourra construire les vecteurs u_k et u'_k par récurrence sur l'entier k .)

On fixe deux telles familles u et u' dans le reste de la partie I.

(2) Montrer que si $\dim(V \cap V') \geqslant 1$, on a $u_k = u'_k$ pour tout $1 \leqslant k \leqslant \dim(V \cap V')$.

(3) (a) Montrer que u est une base orthonormée de V.

(b) Montrer que pour $k \in [\![1, p-1]\!]$, on a $u'_k \in \mathrm{Vect}(u_{k+1}, \dots, u_p)^\perp$.
(Indication : On pourra considérer l'application $t \mapsto u_k(t) = \frac{u_k + t u_l}{\|u_k + t u_l\|}$ pour tous $t \in \mathbb{R}$ et $l \in [\![k+1, p]\!]$ ainsi que sa dérivée.)

(c) Montrer que $u_{k+1} \in (\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_k) + \mathrm{Vect}(u'_1, \dots, u'_k))^\perp$ pour tout k élément de $[\![1, p-1]\!]$.

(d) En déduire que les sous-espaces $W_k = \mathrm{Vect}(u_k, u'_k)$ pour $k \in [\![1, p]\!]$ sont orthogonaux deux à deux.

(4) (a) Montrer qu'il existe $0 \leqslant \theta_1 \leqslant \cdots \leqslant \theta_p \leqslant \pi/2$ tel que $\cos(\theta_k) = \langle u_k, u'_k \rangle$ pour tout $k \in [\![1, p]\!]$.

(b) Calculer la valeur de $\det(\mathrm{Gram}(u, u'))$ en fonction des $\cos(\theta_k)$.

(c) En déduire que $\det(\mathrm{Gram}(u, u')) \leqslant 1$. Que dire sur V et V' dans le cas d'égalité ?

- Partie II

Pour tout $e \in E^p$, on considère $\Omega_p(e) : E^p \to \mathbb{R}$ définie pour tout $u \in E^p$ par

$$\Omega_p(e)(u) = \det(\mathrm{Gram}(e, u)) .$$

(5) (a) Vérifier que l'application $(x_1, \dots, x_p) \mapsto [x_1, \dots, x_p]$ appartient à $\mathscr{A}_p(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$.

(b) Vérifier que si F est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et si $f : F \to \mathbb{R}^p$ est linéaire, alors $g : F^p \to \mathbb{R}$ définie pour $u = (u_1, \dots, u_p) \in F^p$ par $g(u) = [f(u_1), \dots, f(u_p)]$ est un élément de $\mathscr{A}_p(F, \mathbb{R})$.

(6) (a) Montrer que pour tout $e \in E^p$, on a $\Omega_p(e) \in \mathscr{A}_p(E, \mathbb{R})$.

(b) Vérifier que pour tout $(e, u) \in E^p \times E^p$, on a $\Omega_p(e)(u) = \Omega_p(u)(e)$.

(c) Montrer que $\Omega_p \in \mathscr{A}_p(E, \mathscr{A}_p(E, \mathbb{R}))$.

(7) (a) Soient $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, $e = (e_1, \dots, e_p)$ et $e' = (e'_1, \dots, e'_p)$ dans E^p vérifiant $e'_i = \sum_{j=1}^{p} M_{ij} e_j$ pour tout $i \in [\![1, p]\!]$. Montrer que $\Omega_p(e') = \det(M)\Omega_p(e)$.

(b) Soit $e \in E^p$. Montrer que $\Omega_p(e) \neq 0$ si et seulement si e est une famille libre.

(c) Vérifier que $\Omega_p(e)(e) \geqslant 0$ pour toute famille $e \in E^p$.

Dans la suite pour tout $e \in E^p$, on appelle p-volume de e la quantité

$$\mathrm{vol}_p(e) = \sqrt{\Omega_p(e)(e)} = (\det(\mathrm{Gram}(e, e))^{1/2} .$$

(8) (a) Calculer $\mathrm{vol}_p(b)$ lorsque $b = (b_1, \dots, b_p)$ est une famille orthonormée de vecteurs de E.

(b) On suppose ici que $p \geqslant 2$. Soit $e = (e_1, \dots, e_p) \in E^p$. On note pr la projection orthogonale sur l'orthogonal de l'espace engendré par la famille $e_2^p = (e_2, \dots, e_p)$. Montrer que $\mathrm{vol}_p(e) = \|\mathrm{pr}(e_1)\| \mathrm{vol}_{p-1}(e_2^p)$.

(c) Pour toute famille libre $e = (e_1, \dots, e_p) \in E^p$, montrer que $\mathrm{vol}_p(e) \leqslant \prod_{i=1}^{p} \|e_i\|$ avec égalité si et seulement si e est une famille de vecteurs orthogonaux 2 à 2.

(9) (a) Montrer que si $e \in E^p$ est une famille libre et si $b \in E^p$ est une base orthonormée de $\mathrm{Vect}(e)$, alors $\mathrm{vol}_p(e) = |\det(P_b^e)|$ où P_b^e est la matrice de passage de b à e i.e. $e_j = \sum_{i=1}^{p} (P_b^e)_{ij} b_i$ pour tout $j \in [\![1, p]\!]$.

(b) Montrer que pour tous $e, e' \in E^p$, on a $|\Omega_p(e)(e')| \leqslant \mathrm{vol}_p(e)\mathrm{vol}_p(e')$.