Espaces vectoriels normés

Lundi 15 septembre 2025

Table des matières

Table des matières

1. Norme sur un espace vectoriel.

1.1. Définition.

1.1. Définition.

Définition 1

On appelle *norme* sur E toute application $N : E \to \mathbb{R}_+$ vérifiant :

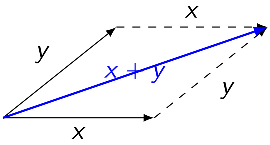
- *Séparation* :
- *Homogenéité* :
- *Inégalité triangulaire* :

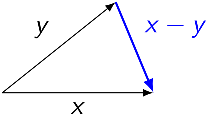
Si N est une norme sur E, on dit que (E, N) (ou plus simplement E) est un *espace vectoriel normé*.

Remarque :

Notation $\| \cdot \| : x \mapsto \|x\|$.

1.1. Définition.





Proposition 1

Si N est une norme E, on a pour tout $(x, y) \in E^2$:

$$\big|N(x) - N(y)\big| \leqslant N(x - y)$$

Remarque :

En résumé : $\big|N(x) - N(y)\big| \leqslant N(x \pm y) \leqslant N(x) + N(y)$

Définition 2

Si (E, N) est un espace vectoriel normé, tout vecteur $x \in E$ tel que $N(x) = 1$ est appelé vecteur *unitaire*.

1.2. Distance associée, boules.

1.2. Distance associée, boules.

Definition 3

Soit N une norme sur E. L'application

$$d : \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ (x, y) & \longmapsto & N(y - x) \end{array}$$

est appelée appelée *distance associée* à N.

Remarque :

Les inégalités triangulaires se réécrivent :

$$\left|\mathrm{d}(x, y) - \mathrm{d}(y, z)\right| \leqslant \mathrm{d}(x, z) \leqslant \mathrm{d}(x, y) + \mathrm{d}(y, z),$$

1.2. Distance associée, boules.

Definition 4

Soit N une norme sur E, et d la distance associée. Pour tout point $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}_+$, on appelle :

- *boule ouverte* de centre a et de rayon r l'ensemble $B(a,r) = \{x \in E \;/\; \mathrm{d}(x,a) < r\}$.
- *boule fermée* de centre a et de rayon r l'ensemble $B_f(a,r) = \{x \in E \;/\; \mathrm{d}(x,a) \leqslant r\}$.
- *sphère* de centre a et de rayon r l'ensemble $S(a,r) = \{x \in E \;/\; \mathrm{d}(x,a) = r\}$.

Remarque :

$B_f(a,r) = B(a,r) \sqcup S(a,r)$

1.2. Distance associée, boules.

Definition 5

Pour $a, b \in E$, on appelle *segment* d'extrémités a et b, l'ensemble

$$[a, b] = \{\lambda b + (1 - \lambda)a \, , \, \lambda \in [0, 1]\}$$

Remarque :

Généralisation d'un segment de $\mathbb{R}$ mais avec $[a, b] = [b, a]$.

Definition 6

On dit qu'une partie A d'un espace vectoriel E est *convexe* lorsque :

$$\forall a, b \in A, \quad [a, b] \subset A$$

Exercice 1

Soit un intervalle I de $\mathbb{R}$ et une fonction $f : I \to \mathbb{R}$. On considère $A = \{(x,y) \in I \times \mathbb{R} \mid y \geqslant f(x)\}$ (appelé *épigraphe* de f). Montrer que f est convexe **ssi** A est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$.

Proposition 2

Si (E, N) est un espace vectoriel normé, les boules (ouvertes et fermées) de E sont des parties convexes.

1.3. Objets bornés dans un e.v.n.

1.3. Objets bornés dans un e.v.n.

Definition 7

On dit qu'une partie quelconque A de E (E, N) est *bornée* lorsqu'il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $A \subset B_f(0, M)$, autrement dit lorsque :

$$\exists\, M \in \mathbb{R}_+^*\,,\ \forall\, x \in A\,,\quad N(x) \leqslant M.$$

Remarques :

- Dépend de N
- $B(0, M)$ au lieu de $B_f(0, M)$?
- Partie non bornée :

1.3. Objets bornés dans un e.v.n.

Définition 8

- Une application $f : X \to E$ est bornée lorsque :

$$\exists\, M \in \mathbb{R}_+^*\,,\ \forall\, x \in X\,,\quad N\big(f(x)\big) \leqslant M.$$

- Une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E est bornée lorsque :

$$\exists\, M \in \mathbb{R}_+^*\,,\ \forall\, n \in \mathbb{N}\,,\quad N\big(v_n\big) \leqslant M.$$

Remarque :

Notations $\mathcal{B}(X, E)$, $\mathcal{B}(\mathbb{N}, E)$.

1.4. Norme associée à un produit scalaire

1.4. Norme associée à un produit scalaire

Definition 9

Soit E un espace préhilbertien réel. On appelle *norme euclidienne* associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ l'application :

$$N : x \mapsto \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

Proposition 3

(inégalité de Cauchy-Schwarz) Pour tout $x, y \in E$:

$$\langle x, y \rangle \leqslant N(x)N(y)$$

avec égalité **ssi** x et y sont colinéaires.

Proposition 4

Une norme euclidienne est une norme.

1.5. Normes usuelles sur $\mathbb{K}^n$.

1.5. Normes usuelles sur $\mathbb{K}^n$.

Proposition 5

Chacune des trois applications suivantes définit une norme sur $\mathbb{K}^n$:

- $\|\cdot\|_1 : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{k=1}^{n} |x_k|$.
- $\|\cdot\|_2 : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.
- $\|\cdot\|_\infty : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \max \left\{ |x_1|, \dots, |x_n| \right\}$.

On les appelle respectivement *norme 1*, *norme 2*, et *norme infini*.

Remarques :

- $|\cdot|$ sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
- $\|\cdot\|_2$ norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 2

Pour chacune de ces trois normes, dessiner la boule unité (boule de centre 0 et de rayon 1) de $\mathbb{R}^2$.

1.6. Normes classiques sur les espaces de fonctions

1.6. Normes classiques sur les espaces de fonctions

Proposition 6

Soit X un ensemble quelconque non vide. L'ensemble $\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ des fonctions bornées de X vers $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et l'application :

$$N_\infty^X : f \mapsto \sup_{x \in X} \left| f(x) \right|.$$

est une norme sur cet espace, appelée *norme de la convergence uniforme*

Remarques :

- Notation $\| \cdot \|_\infty$
- Généralisation à $\mathcal{B}(X, E)$

1.6. Normes classiques sur les espaces de fonctions

Proposition 7

Sur $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$, les applications suivantes sont des normes :

- $N_1^{[a,b]} : f \mapsto \displaystyle\int_a^b |f(t)| \mathrm{d}t$
- $N_2^{[a,b]} : f \mapsto \sqrt{\displaystyle\int_a^b |f(t)|^2 \mathrm{d}t}$

Remarques :

- $N_1^{[a,b]}$ ou $\| \cdot \|_1$: norme de la convergence en moyenne
- $N_2^{[a,b]}$ ou $\| \cdot \|_2$: norme de la convergence en moyenne quadratique (c'est une norme euclidienne).

Table des matières

2. Suites dans un espace vectoriel normé

2.1. Convergence et divergence d'une suite

2.1. Convergence et divergence d'une suite

Definition 10

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E, et soit $\ell \in E$. On dit que la suite $(x_n)_n$ *converge* vers ℓ lorsque la suite réelle positive $\big(\mathrm{d}(x_n,\ell)\big)_n$ converge vers 0. ℓ est alors appelée *limite* de la suite, et notée $\lim x_n$.

Remarque :

$$\forall\,\varepsilon > 0\,,\quad \exists\; n_0 \in \mathbb{N}\,,\quad \forall\, n \in \mathbb{N}\,,\quad n \geqslant n_0 \implies \|x_n - \ell\| \leqslant \varepsilon.$$

2.1. Convergence et divergence d'une suite

Definition 11

On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E est *convergente* lorsqu'il existe $\ell \in E$ tel que la suite converge vers ℓ. Une suite qui ne converge pas est dite *divergente*.

Proposition 8

Si une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E est *convergente*, alors sa limite est unique.

2.2. Opérations sur les suites convergentes

2.2. Opérations sur les suites convergentes

Proposition 9

Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de E, convergeant respectivement vers x et y, et soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{K}$ convergeant vers λ. Alors la suite $(x_n + \lambda_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $x + \lambda y$.

Corollaire 1

L'ensemble des suites convergentes de E est un sous-espace vectoriel de l'espace $E^{\mathbb{N}}$ des suites de E.

2.3. Suites bornées

2.3. Suites bornées

Proposition 10

L'ensemble $\mathcal{B}(\mathbb{N}, E)$ des suites bornées de E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et l'application :

$$N_\infty : (x_n)_n \mapsto \sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\|$$

est une norme sur cet espace.

Remarque :

Notation $\ell^\infty(E)$.

2.3. Suites bornées

Proposition 11

Si une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E est *convergente*, alors elle est bornée. De plus, la suite $(\|x_n\|)_n$ est alors convergente et $\lim \|x_n\| = \|\lim x_n\|$.

Remarque :

l'espace des suites convergentes de $(E, \|\cdot\|)$ est un sous-espace vectoriel de $\ell^\infty(E)$.

2.4. Suites extraites et valeurs d'adhérence

2.4. Suites extraites et valeurs d'adhérence

Definition 12

Soit $(x_n)_n$ une suite de E. On appelle *suite extraite* ou *sous-suite* de $(x_n)_n$ toute suite à valeurs dans E de la forme $(x_{\varphi(n)})_n$ où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante.

Remarque :

Cas $\varphi : n \mapsto 2n$ et $\varphi : n \mapsto 2n+1$.

Definition 13

Soit $(x_n)_n$ une suite de E. On dit que $x \in E$ est une *valeur d'adhérence* de $(x_n)_n$ lorsqu'il existe une suite extraite $(x_{\varphi(n)})_n$ de E qui converge vers x.

2.4. Suites extraites et valeurs d'adhérence

Proposition 12

Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de E convergente, de limite ℓ, alors toute suite extraite converge vers ℓ.

Corollaire 2

Toute suite convergente possède une et une seule valeur d'adhérence : sa limite.

Remarque :

Réciproque fausse. Exemple ?

Corollaire 3

Toute suite ayant au moins deux valeurs d'adhérence est divergente.

Proposition 13

Si les suites extraites paires $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et impaires $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite $\ell \in E$, alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

2.5. Comparaison de normes

2.5. Comparaison de normes

Definition 14

On dit qu'une norme N est équivalente à une norme N' sur E lorsqu'il existe deux réels $\alpha, \beta > 0$ tels que :

$$\forall x \in E, \quad \alpha N(x) \leqslant N'(x) \leqslant \beta N(x)$$

Proposition 14

La relation binaire précédente est une relation d'équivalence sur l'ensemble des normes de E.

2.5. Comparaison de normes

Proposition 15

Si N et N' sont deux normes équivalentes sur E, alors une partie A de E est bornée dans (E, N) **ssi** elle est bornée dans (E, N').

Corollaire 4

Pour deux normes équivalentes N et N' sur E :

- une fonction $f : X \to E$ est bornée pour N **ssi** elle est bornée pour N'
- Une suite $(x_n)_n$ de E est bornée pour N **ssi** elle est bornée pour N'.

2.5. Comparaison de normes

Proposition 16

Si N et N' sont deux normes équivalentes sur E, alors toute suite $(x_n)_n$ de E convergente dans (E, N) est convergente dans (E, N') avec la même limite.

Remarque :

Critère pratique pour montrer que deux normes ne sont pas équivalentes : $x_n \to 0_E$ pour N mais pas pour N'.

2.5. Comparaison de normes

Exemple :

$E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de E définie par
$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in [0,1], \quad f_n(t) = t^n$

- $\|f_n\|_1 =$
- $\|f_n\|_2 =$
- $\|f_n\|_\infty =$

Conclusion ?

Exercice 3

$\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont-elles équivalentes sur $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$?

2.5. Comparaison de normes

Proposition 17

Les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$ sont équivalentes deux à deux.

Remarques :

- On a la suite d'inégalités :
- En fait, toutes les normes sont équiventes en dimension finie !

Table des matières

3. Topologie d'un espace vectoriel normé

3.1. Voisinage d'un point

Definition 15

Soit $a \in E$ et $V \subset E$. On dit que V est un *voisinage* de a lorsqu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(a, \varepsilon) \subset V$.

Exercice 4

Soit $a \in E$. On note $\mathcal{V}(a)$ l'ensemble des voisinages de a. Traduire en français et montrer :

a) $E \in \mathcal{V}(a)$

b) $\forall V \in \mathcal{V}(a),\ a \in V$

c) $\forall A \in \mathcal{P}(E), \quad (\exists V \in \mathcal{V}(a), V \subset A) \Rightarrow A \in \mathcal{V}(a)$.

d) $V \in \mathcal{V}(a) \ \Leftrightarrow\ \exists \varepsilon > 0,\ B_f(a, \varepsilon) \subset V$

3.2. Ouverts d'un espace vectoriel normé

3.2. Ouverts d'un espace vectoriel normé

Definition 16

Une partie A de E est un *ouvert* (ou une *partie ouverte*) de E lorsqu'elle est voisinage de chacun de ses points :

$$\forall x \in A, \quad \exists \varepsilon > 0, \quad B(x, \varepsilon) \subset A$$

L'ensemble de tous les ouverts de E est appelée la *topologie* de E.

Exemples :

E, $\varnothing$, les intervalles ouverts dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

Exercice 5

Montrer que toute boule ouverte de E est un ouvert.

Proposition 18

Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de E. Alors :

- $\bigcup_{i\in I} A_i$ est un ouvert.
- **si I est fini**, $\bigcap_{i\in I} A_i$ est ouvert.

Remarque :

$\bigcap_{i\in I} A_i$ dans le cas I infini ?

3.3. Fermés d'un espace vectoriel normé

3.3. Fermés d'un espace vectoriel normé

Definition 17

Une partie F de E est un *fermé* (ou une *partie fermée*) de E lorsque son complémentaire F^c est un ouvert de E.

Exemples :

E, $\varnothing$, les intervalles fermés dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

Remarques :

- Partie ni ouverte ni fermée ?
- Partie à la fois ouverte et fermée ?
- **Ne pas confondre fermé et borné.**

3.3. Fermés d'un espace vectoriel normé

Exercice 6

Montrer que toute boule fermée de E est un fermé. Montrer que toute sphère de E est un fermé.

Proposition 19

Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de fermés de E. Alors :

- $\bigcap_{i\in I} F_i$ est un fermé.
- **si I est fini, $\bigcup_{i\in I} F_i$ est fermé.**

Remarque :

$\bigcup_{i\in I} F_i$ dans le cas I infini ?

3.4. Intérieur d'une partie

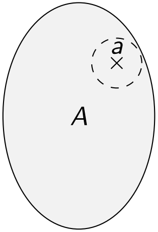
3.4. Intérieur d'une partie

Definition 18

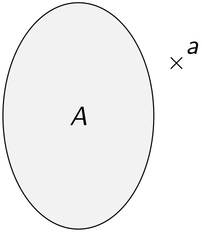
Soit A une partie de E, et $a \in E$. On dit que a est un point *intérieur* à A lorsqu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(a, \varepsilon) \subset A$.

Remarque :

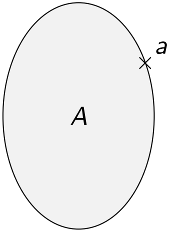
a est intérieur à $A \quad \Leftrightarrow \quad A$ est un voisinage de a.



a intérieur



a pas intérieur



a pas intérieur

3.4. Intérieur d'une partie

Definition 19

Soit A une partie de E. On appelle *intérieur* de A et on note $\mathring{A}$, l'ensemble de tous les points intérieurs à A.

Proposition 20

Pour $A \subset E$, $\mathring{A}$ est la réunion de tous les ouverts contenus dans A.

Remarque :

$\mathring{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans A.

3.4. Intérieur d'une partie

Proposition 21

Soit $A, B \subset E$.

a) $A \subset B \Rightarrow \mathring{A} \subset \mathring{B}$.

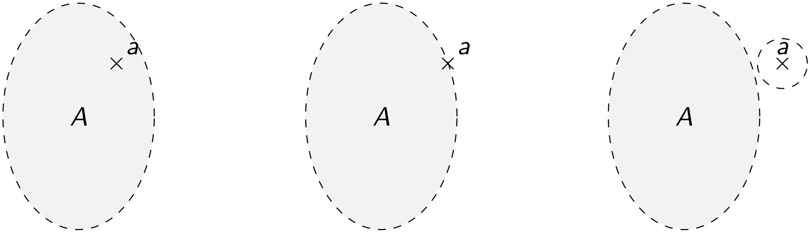
b) $\mathring{A} \subset A$ avec égalité **ssi** A est ouvert

c) $\mathring{\mathring{A}} = \mathring{A}$

3.5. Adhérence d'une partie

Definition 20

Soit A une partie de E et $a \in E$. On dit que a est un point *adhérent* à A lorsque pour tout $r > 0$, $B(a, r) \cap A \neq \varnothing$.



a adhérent $\quad$ a adhérent $\quad$ a pas adhérent

3.5. Adhérence d'une partie

Definition 21

Pour une partie non vide A de E et $a \in E$, on appelle *distance* de a à A le réel positif :

$$\mathrm{d}(a, A) = \inf_{x \in A} \mathrm{d}(a, x) = \inf_{x \in A} \|x - a\|$$

Proposition 22

Pour $A \subset E$ non vide, un point $a \in E$ est adhérent à A **ssi** $\mathrm{d}(a, A) = 0$.

3.5. Adhérence d'une partie

Definition 22

Soit A une partie de E. On appelle *adhérence* de A et on note $\overline{A}$, l'ensemble de tous les points adhérents à A.

Proposition 23

Pour $A \subset E$, $\overline{A}$ est l'intersection de tous les fermés contenant A.

Remarque :

$\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A.

3.5. Adhérence d'une partie

Proposition 24

Soit $A, B \subset E$.

a) $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$.

b) $A \subset \overline{A}$ avec égalité **ssi** A est fermé

c) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$

3.6. Intérieur vs adhérence, frontière

Proposition 25

Pour toute partie A de E on a :

- $(\overline{A})^c = (A^c)^\circ$
- $(\mathring{A})^c = \overline{A^c}$

Remarque :

En passant aux complémentaires :

- a intérieur à A **ssi** a pas adhérent à A^c.
- a est adhérent à A **ssi** a n'est pas intérieur à A^c.

3.6. Intérieur vs adhérence, frontière

Definition 23

Soit A une partie de E et $a \in E$. On dit que a est un *point frontière* lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \quad B(a, \varepsilon) \cap A \neq \varnothing \text{ **et** } B(a, \varepsilon) \cap A^c \neq \varnothing$$

On appelle *frontière* de A et on note $\mathrm{Fr}(A)$ l'ensemble des points frontière de A.

Remarque :

$\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \cap \overline{A^c} = \overline{A} \backslash \mathring{A}$. C'est une partie fermée.

Exemples :

Frontière d'une boule ? Frontière de $[0, 1[$ dans $\mathbb{R}$?

3.7. Caractérisation séquentielle de l'adhérence et des fermés

3.7. Caractérisation séquentielle de l'adhérence et des fermés

Proposition 26

Soit A une partie de E.

a) $a \in E$ est adhérent à A **ssi** il existe une suite de A qui converge vers a.

b) A est fermée **ssi** toute suite de A qui converge dans E a sa limite dans A.

Remarque :

Une partie fermée empêche les suites de "s'échapper".

3.7. Caractérisation séquentielle de l'adhérence et des fermés

Proposition 27

Si $\|\cdot\|'$ est une norme équivalente à $\|\cdot\|$, $(E, \|\cdot\|)$ et $(E, \|\cdot\|')$ ont la même topologie.

Remarques :

- Mêmes ouverts, fermés, intérieur, adhérence, ensemble de voisinages.
- Boules différentes !

3.8. Densité

3.8. Densité

Definition 24

On dit qu'une partie A de E est *dense* dans E lorsque $\overline{A} = E$.

Proposition 28

Soit A une partie de E. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) A est dense dans E

(ii) Pour toute partie ouverte non vide Ω, on a $A \cap \Omega \neq \varnothing$.

(iii) Pour tout $a \in E$, il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers a.

Exemple :

$\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}^c$ dans $\mathbb{R}$.

3.9. Parties compactes

3.9. Parties compactes

Definition 25

Soit $K \subset E$. On dit que K est un *compact* de E, ou une partie *compacte* de E, lorsque toute suite de K admet une sous-suite convergente vers un élément de K.

Remarques :

- Toute suite de K admet au moins une valeur d'adhérence dans K.
- Propriété de Bolzano-Weierstrass.

3.9. Parties compactes

Exercice 7

Montrer que toute partie finie de E est une partie compacte.

Proposition 29

Si K est une partie compacte de E et F un fermé, alors $F \cap K$ est compact.

Proposition 30

Soit K un compact de E et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de K. Alors la suite $(u_n)_n$ converge **ssi** elle admet une unique valeur d'adhérence.

3.9. Parties compactes

Proposition 31

Si K est une partie compacte de E, alors K est fermée et bornée.

Remarque :

Réciproque fausse en général, mais vraie en dimension finie !