Chapitre 15

Compléments d'algèbre linéaire et de réduction

1 Décomposition en somme directe et représentation matricielle

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(E_i)_{1\leqslant i\leqslant q}$ une famille de sous-espaces. On rappelle que la somme $E_1+\cdots+E_q$ de cette famille est l'ensemble $\{x_1+\cdots+x_q, (x_1,\ldots,x_q)\in E_1\times\cdots\times E_q\}$. Il s'agit d'un sous-espace vectoriel de E, image de l'application linéaire $S : E_1\times\cdots\times E_q \to E$ défine par

$$S : (x_1,\ldots,x_q)\mapsto x_1+\cdots+x_q$$

- On a bien sûr $E = E_1+\cdots+E_q$ si, et seulement si, S est surjective.
- Cette somme est dite directe si, et seulement si, S est injective.
- Il en résulte que $E = E_1\oplus\cdots\oplus E_q$ si, et seulement si, S réalise un isomorphisme de $E_1\times\cdots\times E_q$ sur E.

Remarque : On peut montrer aussi que $\displaystyle\sum_{i=1}^{q} E_i = \mathrm{vect}\left(\bigcup_{i=1}^{q} E_i\right)$

Définition 1. Soit $(E_i)_{1\leqslant i\leqslant q}$ une famille de sous-espaces de E telle que $E = E_1\oplus\cdots\oplus E_q$. Si pour tout $i\in[\![1,q]\!]$, on note p_i le projecteur sur E_i parallèlement à $\displaystyle\bigoplus_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} E_k$, la famille $(p_i)_{1\leqslant i\leqslant q}$ s'appelle *famille des projecteurs associée à la décomposition en somme directe* $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{q} E_i$.

Remarque : Pour $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{q} x_i$, avec $x_i\in E_i$, l'écriture étant unique, on a $p_i(x) = x_i$ pour tout $i\in[\![1,q]\!]$.

Proposition 1. *En reprenant les notations précédentes :*
- *Pour tout* $i\in[\![1,q]\!]$, *on a* $p_i\circ p_i = p_i$.
- *Pour tout* $i,j\in[\![1,q]\!]$, *avec* $i\neq j$, *on a* $p_i\circ p_j = p_j\circ p_i = 0$.
- $\displaystyle\sum_{i=1}^{q} p_i = Id_E$.

Une décomposition en somme directe de E permet d'identifier de façon univoque une application linéaire de E vers un espace F à ses restrictions aux sous-espaces de cette décomposition :

Proposition 2. *Soient* E, F *deux espaces vectoriels, et* $E_1,\ldots,E_q$ *des sous-espaces de* E *réalisant une décomposition en somme directe* $E = E_1\oplus\cdots\oplus E_q$. *Étant donné pour tout* $i\in[\![1,q]\!]$ *une application linéaire* $u_i\in\mathcal{L}(E_i,F)$, *il existe un unique* $u\in\mathcal{L}(E,F)$ *tel que :*

$$\forall\, i\in[\![1,q]\!],\quad u_{|E_i} = u_i.$$

Remarque : En fait, lorsque $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_q$, de même que E est isomorphe à $E_1 \times \cdots \times E_q$, on a également un isomorphisme d'espace vectoriels entre $\mathcal{L}(E,F)$ et $\mathcal{L}(E_1,F) \times \cdots \times \mathcal{L}(E_q,F)$ via l'application :

$$u \mapsto (u_{|E_1}, \ldots, u_{|E_q})$$

Exercice 1. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer l'équivalence entre

$$i)\ u^2 = 0 \quad \text{et} \quad \exists v \in \mathcal{L}(E),\ u \circ v + v \circ u = id \qquad\qquad ii)\ \mathrm{Im}(u) = \mathrm{Ker}(u)$$

Remarque : En dimension finie, la proposition 2 s'interprète matriciellement par blocs si on considère une base $\mathcal{B}$ de E *adaptée* à la décomposition en somme directe $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_q$: en notant $\mathcal{B}_1, \ldots \mathcal{B}_q$ les bases respectives de $E_1, \ldots, E_q$, dont la concaténation est $\mathcal{B}$, et en considérant une base quelconque $\mathcal{B}'$ de F, la matrice représentative de $u \in \mathcal{L}(E,F)$ dans $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, peut s'écrire par blocs :

$$M = \underset{\mathcal{B},\mathcal{B}'}{\mathrm{Mat}}(u) = \left(\begin{array}{c|c|c} M_1 & \cdots & M_q \end{array} \right),$$

où pour tout $i \in [\![1,q]\!]$, M_i est la matrice représentative de $u_{|E_i}$ dans les base $\mathcal{B}_i$ et $\mathcal{B}'$.

Exercice 2. Plus généralement, interpréter géométriquement le bloc $M_{i,j}$, pour $(i,j) \in [\![1,r]\!] \times [\![1,q]\!]$, d'un découpage d'une matrice M en $r \times q$ blocs. *(pour le découpage "vertical", considérer la famille de projecteurs associés à une décomposition en somme directe)*

Dans la proposition 2, on identifiait le comportement d'une application linéaire $u \in \mathcal{L}(E,F)$ à celui de ses restrictions $u_{|E_1}, \ldots, u_{|E_q}$ aux sous-espaces d'une décomposition en somme directe $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_q$. Si $E = F$, u est un endomorphisme, et pour peu que les sous-espaces $E_1, \ldots, E_q$ soient *stables* par u, ce résultat se reformule en terme d'*endomorphismes* induits. En dimension finie, on a alors une représentation matricielle *diagonale par blocs* :

Proposition 3. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, décomposé en une somme directe $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_q$, soit $\mathcal{B}$ une base adaptée à cette décomposition et soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors tous les E_i sont stables par u si, et seulement si, la représentation matricielle de u dans $\mathcal{B}$ est de la forme :*

$$\underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(u) = \begin{pmatrix} \boxed{M_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \boxed{M_q} \end{pmatrix}, \quad \textit{avec} \quad M_i \in \mathcal{M}_{n_i}(\mathbb{K}),\ \textit{où } n_i = \dim(E_i)$$

Pour tout $i \in [\![1,q]\!]$, M_i représente l'endomorphisme induit par u sur E_i.

Exemple : Dans $\mathbb{K}^3$, muni de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1,e_2,e_3)$, si on définit les sous-espaces vectoriels $F = \mathrm{vect}(e_1,e_2) = \{(x,y,0)\,,\,(x,y) \in \mathbb{K}^2\}$ et $G = \mathrm{vect}(e_3) = \{(0,0,z)\,,\,z \in \mathbb{K}\}$, on a $\mathbb{K}^3 = F \oplus G$. $\mathcal{B}$ est adaptée à cette décomposition, et F et G sont stables par l'endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ défini par :

$$\left\{ \begin{array}{l} u(e_1) = e_1 - e_2 \\ u(e_2) = e_1 + e_2 \\ u(e_3) = 2e_3 \end{array} \right. , \qquad \text{dont la matrice dans } \mathcal{B} \text{ est } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2 Trigonalisation et sous-espaces caractéristiques

2.1 Trigonalisation effective, cas euclidien

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle et $u \in \mathcal{L}(E)$. Rappelons le résultat fondamental suivant.

Théorème 1. *u est trigonalisable si, et seulement si, χ_u est scindé.*

Remarque : On a bien entendu l'analogue matriciel : $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable si, et seulement si, χ_M est scindé.

La démonstration précédente fournit une méthode récursive effective pour trigonaliser un endomorphisme ou une matrice en dimension n : On cherche un premier vecteur propre, et on se ramène à la dimension $n-1$.

Exercice 3. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ est trigonalisable dans $\mathbb{R}$ mais pas diagonalisable, et déterminer $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ soit triangulaire supérieure.

Dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et en présence d'un produit scalaire, la démonstration du théorème précédent s'adapte facilement pour montrer le résultat (hors-programme) suivant :

Théorème 2. *Soit E un espace euclidien non réduit à $\{0\}$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_u est scindé. Alors u est trigonalisable en base orthonormée.*

Corollaire 1. *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que χ_M est scindé. Alors il existe $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure telle que*

$$M = PTP^{-1} = PTP^\top$$

Corollaire 2. *Théorème spectral !*

2.2 Endomorphismes nilpotents, matrices nilpotentes

Définition 2. On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ (*resp.* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) est nilpotent(e) lorsqu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $u^k = 0$ (*resp.* $A^k = 0$).

On appelle alors *indice de nilpotence* le plus petit entier k en question.

Exercice 4. On suppose que u et v commutent et sont nilpotents. Montrer que $u \circ v$ et $u + v$ sont nilpotents.

Proposition 4. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ (*resp. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*). Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

*(i) u (*resp. A*) est nilpotent(e).*

*(ii) u (*resp. A*) est trigonalisable avec pour seule valeur propre 0.*

L'indice de nilpotence est alors toujours majoré par n.

Dans la preuve $(ii) \Rightarrow (i)$, on peut aussi raisonner directement avec une matrice T strictement supérieure. On montre par récurrence sur k que pour tout i, j, $[T^m]_{i,j} = 0$ lorsque $i > j - m$. Si on suppose que c'est vrai au rang m, on écrit :

$$[T^{m+1}]_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} [T^m]_{i,k}[T]_{k,j} = \sum_{k=i+m}^{j-1} [T^m]_{i,k}[T]_{k,j}$$

Cette somme est nulle dès lors que $j - 1 < i + m$, c'est-à-dire que $i > j - (m+1)$, et la propriété est donc vraie au rang m. En particulier, on a $[T^n]_{i,j} = 0$ pour tout i, j.

Remarques :

- u (*resp.* A) est donc nilpotent(e) si, et seulement si, son polynôme caractéristique est X^n.
- Il est possible de pousser un peu plus loin la trigonalisation en obtenant une matrice triangulaire supérieure dont tous les coefficients sont nuls, sauf certains qui valent 1 sur la "deuxième" diagonale : c'est la réduction de Jordan (hors-programme)

Exercice 5. Obtenir une telle trigonalisation en dimension $n \geqslant 2$ dans les deux cas suivant :

a) u est nilpotent d'indice 2.

b) u est nilpotent d'indice n.

On a en fait le résultat plus général suivant, qui se démontre facilement en se ramenant au cas nilpotent, par "translation".

Corollaire 3. *u est trigonalisable avec pour seule valeur propre λ si, et seulement si, $u - \lambda I_E$ est nilpotent si, et seulement si, $\chi_u = (X - \lambda)^n$.*

Exercice 6. Retrouver rapidement une réduction de Jordan de $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Rappelons enfin rapidement un résultat analogue à celui revu à la partie précédente, et utilisé précédemment :

Théorème 3. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors u est trigonalisable si, et seulement si, il admet un polynôme annulateur scindé si, et seulement si, le polynôme minimal est scindé.*

2.3 Sous-espaces caractéristiques

Définition 3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ de polynôme caractéristique scindé $\chi_u = \prod_{i=1}^{q} (X - \lambda_i)^{m_i}$. On appelle *sous-espace caractéristique* associé à la valeur propre λ_i, le sous-espace :

$$F_i = \operatorname{Ker}\big(u - \lambda_i I_E\big)^{m_i},$$

Remarque : On peut aussi prendre comme définition :

$$F_i = \operatorname{Ker}\big(u - \lambda_i I_E\big)^{r_i},$$

où r_i est la multiplicité de λ_i dans le polynôme minimal. En effet, on a $r_i \leqslant m_i$ d'après le théorème de Cayley-Hamilton, et on peut montrer alors que la suite croissante $\big(\operatorname{Ker}(u - \lambda_i I_E)^k\big)_{k \in \mathbb{N}}$ est stationnaire à partir du rang r_i grâce au lemme des noyaux.

Proposition 5. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ de polynôme caractéristique scindé $\chi_u = \prod_{i=1}^{q} (X - \lambda_i)^{m_i}$ et $(F_i)_{1 \leqslant i \leqslant q}$ les sous-espaces caractéristiques. Alors, on a :*

$$E = \bigoplus_{i=1}^{q} F_i$$

De plus, pour tout $i \in [\![1, q]\!]$:
- *F_i est stable par u et par $u - \lambda_i I_E$;*
- *$u - \lambda_i I_E$ induit sur F_i un endomorphisme nilpotent ;*
- *$\dim(F_i) = m_i$.*

En conséquence du résultat précédent, on est en mesure de préciser un peu la forme que peut prendre une matrice trigonalisante :

Théorème 4. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_u est scindé. Alors il existe une base de E dans laquelle u est représentée par une matrice diagonale par blocs, chaque bloc diagonal étant triangulaire et à termes diagonaux égaux.*

Remarque : Plus précisément, avec $\chi_u = \prod_{i=1}^{q} (X - \lambda_i)^{m_i}$, une telle matrice est de la forme

$$T = \begin{pmatrix} T_1 & & \\ & \ddots & \\ & & T_q \end{pmatrix}, \qquad \text{avec} \quad T_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & & (*) \\ & \ddots & \\ & & \lambda_i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m_i}(\mathbb{K})$$

Bien entendu, tout cela s'adapte au cas d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: si son polynôme caractéristique est scindé, elle est semblable à une matrice triangulaire de la forme ci-dessus.

Le théorème précédent permet de montrer un résultat classique (hors-programme) s'appelant "décomposition de Dunford".

Théorème 5. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_u est scindé. Alors il existe un unique couple (d, n) d'endomorphismes vérifiant $u = d + n$ et tels que :*
- *d est diagonalisable*
- *n est nilpotent*
- *d et n commutent*

Remarque : on peut aussi définir d et n de façon purement géométrique en considérant la famille $(p_i)_{1 \leqslant i \leqslant q}$ des projecteurs associés à la décomposition de E en somme directes des F_i et en posant :

$$d = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i p_i$$

Exercice 7. Si $u \in \mathcal{L}(E)$ est de polynôme caractéristique scindé.

a) Montrer que les projecteurs p_i associés à la décomposition de E en somme directe des sous-espaces caractéristiques sont des polynômes en u.

b) En déduire que dans la décomposition de Dunford $u = n + d$, d et n sont des polynômes en u.

Remarque : On a bien sûr un analogue matriciel de la décomposition de Dunford pour une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont le polynôme caractéristique est scindé : il existe un unique couple de matrices (D, N) avec D diagonalisable et N nilpotent tels que $M = D + N$. D et N commutent et sont des polynômes en M.

Exercice 8. Quelle est la décomposition de Dunford de la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$?

La trigonalisation obtenue à l'aide des sous-espaces caractéristique peut être poussée plus loin : on peut faire en sorte que tous les coefficients extra-diagonaux soient nuls, sauf certains de la "première diagonale supérieure" égaux à 1 : c'est la réduction de Jordan.

Exercice 9. Si E est euclidien et χ_u scindé, montrer que les sous-espaces caractéristiques sont orthogonaux deux à deux, et retrouver alors le résultat du théorème 2.