MPI - Lycée Colbert

Concours Blanc 2025

Jeudi 18 décembre 2025
8h00-12h00

Sujet CCINP

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème tous indépendants.

EXERCICE 1

Pour n entier, $n \geq 2$, on définit le déterminant de Vandermonde de n nombres complexes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ par :

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \ldots & x_n^2 \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

L'objet de cet exercice est de démontrer par récurrence que l'on a : $V(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$.

Q1. Calculer $V(x_1, x_2)$. Expliquer pourquoi il suffit de faire la démonstration pour n nombres complexes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ deux à deux distincts.

Dans la suite, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont n nombres complexes deux à deux distincts.

Q2. On considère la fonction $t \mapsto P(t) = V(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, t)$.

Démontrer que P est une fonction polynomiale de degré au plus $n-1$ et justifier que le coefficient de t^{n-1} est un déterminant de Vandermonde.

Démontrer par récurrence que $V(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$.

Q3. Première application

Calculer le déterminant de la matrice $A = (i^j)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ en faisant apparaître le déterminant de Vandermonde $V(1, 2, \ldots, n)$.

Q4. Deuxième application

Donner un exemple de n nombres complexes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ deux à deux distincts et tous non nuls, tels que $\sum_{k=1}^{n} a_k^2 = 0$.

Soit n nombre complexes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ deux à deux distincts et tous non nuls, démontrer que l'une au moins des sommes $\sum_{k=1}^{n} x_k, \sum_{k=1}^{n} x_k^2, \sum_{k=1}^{n} x_k^3, \ldots, \sum_{k=1}^{n} x_k^n$ est non nulle.

On pourra utiliser un déterminant de Vandermonde non nul.

EXERCICE 2

Dans cet exercice, $\| \ \|$ désigne une norme d'algèbre sur $M_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire une norme vérifiant, pour tout couple (A,B) de matrices de $M_n(\mathbb{R})$, $\|A.B\| \leq \|A\|.\|B\|$.

Q5. Démontrer que pour toute matrice A de $M_n(\mathbb{R})$, la série $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} A^k$ converge. On notera e^A sa somme.

Q6. Démontrer que l'application $A \mapsto e^A$ est continue sur $M_n(\mathbb{R})$.

Q7. Si $H \in M_n(\mathbb{R})$ est une matrice non nulle de la boule de centre 0 et de rayon $r > 0$, déterminer la limite de $\frac{1}{\|H\|} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} H^k$ lorsque H tend vers 0.

En déduire que l'application $A \mapsto e^A$ est différentiable en la matrice 0.
On précisera sa différentielle en 0.

PROBLÈME

Pour toute matrice A de $M_n(\mathbb{R})$, on note $e^A = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k$.

Dans ce problème, on note S_n l'espace vectoriel des matrices de $M_n(\mathbb{R})$ symétriques.
On dit que la matrice $A \in S_n$ est symétrique positive lorsque toutes ses valeurs propres sont positives ou nulles.
On note $S_n^{\,+}$ l'ensemble des matrices symétriques positives.

Partie I - Exponentielle d'une matrice symétrique

Pour a et b deux réels, on note :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \text{ et } J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Q8. Démontrer, en détaillant les calculs, que $A \in S_3^{\,+}$, si et seulement si, $(a + 2b \geq 0 \text{ et } a \geq b)$.

Q9. Calculer J^k pour tout entier k non nul. Cette relation est-elle valable pour $k = 0$?
En utilisant la relation $A = (a-b)I_3 + bJ$, calculer et expliciter e^A.
On pourra utiliser sans démonstration que, si deux matrices A et B de $M_n(\mathbb{R})$ commutent, alors $e^{A+B} = e^A e^B$.
Vérifier que $e^A \in S_3^{\,+}$.

Q10. Soit P une matrice inversible de $M_n(\mathbb{R})$.
Justifier que l'application $M \mapsto PMP^{-1}$ est continue sur $M_n(\mathbb{R})$.
Si $A \in S_n^{\,+}$ est semblable à une matrice diagonale D, déterminer une matrice diagonale semblable à la matrice e^A.
En déduire que $e^A \in S_n^{\,+}$.

Partie II - Produit de Hadamard de deux matrices

Dans cette partie, pour une matrice $A = (a_{i,j})$ de $M_n(\mathbb{R})$, on note $E(A)$ la matrice de $M_n(\mathbb{R})$, de terme général $e^{a_{i,j}}$: $E(A) = \left(e^{a_{i,j}}\right)$.

Nous allons démontrer que si $A \in S_n^{\,+}$, alors $E(A) \in S_n^{\,+}$.

On définit le produit de Hadamard de deux matrices $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ de $M_n(\mathbb{R})$ noté $*$ par :

$$A * B = (a_{i,j} b_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R}).$$

On note le produit usuel de deux matrices A et B par AB.

On confond une matrice de $M_{1,1}(\mathbb{R})$ avec son terme réel.

Q11. Vérifier que, lorsque la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \in S_3^{\ +}$, la matrice $E(A) \in S_3^{\ +}$.

Q12. Si D est une matrice diagonale dont tous les termes sont positifs ou nuls et si Y est matrice de $M_{n,1}(\mathbb{R})$, quel est le signe de ${}^tYDY$?

En déduire qu'une matrice A de S_n appartient à $S_n^{\ +}$ si, et seulement si, pour toute matrice $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ on a ${}^tXAX \geq 0$.

Q13. Si A et B sont deux matrices de $S_n^{\ +}$ et α, β deux réels positifs, démontrer, en utilisant la question **Q12**, que $\alpha A + \beta B$ est une matrice de $S_n^{\ +}$.

Si A et B sont deux matrices de $S_n^{\ +}$ a-t-on nécessairement $AB \in S_n^{\ +}$?

Q14. Si $A \in S_n^{\ +}$, démontrer qu'il existe une matrice $R \in S_n^{\ +}$ telle que $A = R^2$.

Q15. Si A et B sont deux matrices de $S_n^{\ +}$, si on pose $A = U^2$ et $B = V^2$ avec $U = \left(u_{i,j}\right) \in S_n^{\ +}$, $V = \left(v_{i,j}\right) \in S_n^{\ +}$ et si $A * B = (c_{i,j})$, vérifier que, pour tout couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$,

$$c_{i,j} = \left(\sum_{k=1}^{n} u_{k,i}u_{k,j}\right)\left(\sum_{l=1}^{n} v_{l,i}v_{l,j}\right).$$

En déduire que, si A et B sont deux matrices de $S_n^{\ +}$, on a $A * B \in S_n^{\ +}$.

Q16. Pour toute matrice A de $M_n(\mathbb{R})$ et pour tout entier naturel $p \geq 2$, on note A^{*p} la matrice $A * A * \ldots * A$ (p fois).

On note $A^{*0} = (1)$ la matrice dont tous les termes sont égaux à 1 et $A^{*1} = A$.

Soit une matrice A de $M_n(\mathbb{R})$, déterminer la limite de la suite de matrices (T_N) définie pour tout entier naturel N non nul par $T_N = \displaystyle\sum_{p=0}^{N} \frac{1}{p!} A^{*p}$.

Q17. Pour $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, justifier que l'application $M \mapsto {}^tXMX$ est continue sur $M_n(\mathbb{R})$, puis démontrer que $S_n^{\ +}$ est une partie fermée de S_n.

En déduire que si $A \in S_n^{\ +}$ alors $E(A) \in S_n^{\ +}$.

FIN