# Chapitre 16

# Compléments sur les séries entières et les équations différentielles

## 1 Compléments sur les équations différentielles

Voir la section **5** du chapitre **12** !

## 2 Compléments sur les séries entières

### 2.1 structure de l'ensemble des séries entières.

Muni de l'addition et de la multiplication par un scalaire, l'ensemble des séries entières forme un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, Avec le produit de Cauchy, il s'agit même d'une *algèbre commutative*, qui généralise en quelque sorte l'algèbre $\mathbb{C}[X]$ des polynômes sur $\mathbb{C}$.

La bonne généralisation rigoureuse est en fait l'ensemble $\mathbb{C}[[X]]$ des séries entières *formelles* s'écrivant $\sum a_n X^n$. Il s'agit en fait tout bêtement de l'espace vectoriel $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ des suites complexes sur lequel on définit en plus une multiplication de la même façon que pour les polynômes (et qui correspond précisément au produit de Cauchy). On obtient bien ainsi une algèbre, dont $\mathbb{C}[X]$ correspond à la sous-algèbre $\mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$ des suites nulles à partir d'un certain rang.

**Exercice 1.** Notons $E$ l'espace vectoriel des séries entières. Montrer que l'application $\mathcal{D}$, qui à toute série entière $\sum a_n z^n$ associe sa série dérivée $\sum_{n\geqslant 1} n a_n z^{n-1}$, est un endomorphisme de $E$. Déterminer ses valeurs propres et ses sous-espaces propres associés.

### 2.2 Continuité à la frontière du disque de convergence

Rappelons que pour une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$, la fonction somme $S : z \mapsto \sum a_n z^n$ est toujours continue sur le disque ouvert $D(R)$. Cela provient du fait qu'il y a convergence normale de cette serie entière sur tout disque fermé $D_F(r)$ pour $0 \leqslant r < R$ (plus généralement sur tout compact de $D(R)$). Dans certains cas, bien sûr, cet argument permet également de conclure à la continuité de la somme sur le disque fermé $D_F(R)$ : c'est le cas par exemple de la série $\sum \frac{1}{n^2} z^n$. Mais cela ne fonctionne pas en général : par exemple la série entière $\sum \frac{1}{n} z^n$ ne converge pas normalement sur $D(1)$.

Il existe cependant un théorème permettant de conclure quant à la continuité de la somme en un point de la frontière, mais en limitant "l'angle d'approche". Au programme de MPI figure une version simplifiée de ce théorème, concernant uniquement la continuité d'une série entière de la variable réelle $\sum a_n x^n$.

**Théorème 1** (d'Abel *radial*)**.** *Si $\sum a_n x^n$ a pour rayon de convergence $R \in \mathbb{R}_+^*$ et si la série $\sum a_n R^n$ converge, alors*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \underset{x\to R^-}{\longrightarrow} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$$

**Remarque :** Ce théorème montre ainsi que la fonction somme $f$ est continue sur $]-R, R]$, dès lors que $f(R)$ est bien défini ! Quitte à considérer la série $\sum (-1)^n a_n x^n$, on obtient également la continuité en $-R$ si $f(-R)$ est défini.

Le corollaire suivant résume cette remarque :

**Corollaire 1.** $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *est continue sur tout l'intervalle* $I$ *de convergence.*

**Exemple :** Appliqué à la série entière $\sum \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$, de somme $\ln(1+x)$ sur $]-1,1[$, le théorème d'Abel radial permet de montrer que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \lim_{x \to 1^-} \ln(1+x) = \ln(2).$$

La question d'une réciproque au théorème d'Abel radial peut se poser : Si $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty}$, définie sur $]-R,R[$ ($R$ étant le rayon de convergence), admet une limite à gauche en $R$, la série $\sum a_n R^n$ est-elle convergente ? La réponse est négative, comme le montre l'exemple de la série $\sum (-1)^n x^n$, de somme $\dfrac{1}{1+x}$ sur $]-1,1[$ : cette somme admet la limite $\dfrac{1}{2}$ en 1, mais la série $\sum (-1)^n$ est divergente.

Le théorème suivant, du à Tauber et hors-programme, donne une condition suffisante pour que cela fonctionne.

**Théorème 2** (de Tauber (hors-programme))**.** *Soit* $\sum a_n x^n$ *une série entière de rayon de convergence* 1 *et telle que la somme* $f$ *admet une limite finie* $\ell$ *en* $1^-$*. Si de plus* $a_n = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$*, alors la série* $\sum a_n$ *est convergente de somme* $\ell$

Littlewood a montré qu'il suffisait en fait d'avoir $a_n = \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n}\right)$, mais la preuve est bien plus difficile. Mais un autre cas permet aussi de conclure facilement : lorsque les $a_n$ sont positifs.

**Exercice 2.** Soit $\sum a_n$ une série positive telle que la série entière $\sum a_n x^n$ est de rayon 1 et telle que sa somme $f$ admet une limite finie $\ell$ en $1^-$. Montrer que $\sum a_n$ est convergente de somme $\ell$.