Chapitre 6

Révisions MP2

Rayon de convergence

Opérations sur les séries entières, comparaison des rayons.

Régularité d la fonction

Développement en série entière

Séries entières

Lundi 6 octobre 2025

Table des matières

Chapitre 6

Révisions MP

Rayon de convergence

Opérations s les séries entières, comparaison des rayons.

Régularité de la fonction somme

Développement en série

- Rayon de convergence.
- 2 Opérations sur les séries entières, comparaison des rayons.
- 3 Régularité de la fonction somme.
- 4 Développement en série entière.

Table des matières

Chapitre 6

Rayon de convergence.

d'une série entière. Lemme d'Abe disque de convergence. Utilisation du critère de

Opérations su les séries entières, comparaison

Régularité de la fonction

Développement en série

- Rayon de convergence.
- 2 Opérations sur les séries entières, comparaison des rayons
 - 3 Régularité de la fonction somme.
 - 4 Développement en série entière.

Chapitre 6

Rayon de convergence.

Convergence d'une série entière.

Lemme d'Abel e disque de convergence. Utilisation du critère de

Opérations su les séries entières, comparaison

Régularité de la fonction

Développement en série 1. Rayon de convergence.

1. Rayon de convergence.

Chapitre 6

Convergence

Convergence d'une série entière.

Lemme d'Abe disque de convergence. Utilisation du critère de d'Alembert

Opérations su les séries entières, comparaison

Régularité de la fonction

Développement en série 1.1. Convergence d'une série entière.

1.1. Convergence d'une série entière.

Chapitre 6

Rayon de convergence Convergence

d'une série entière.

Lemme d'Abel disque de convergence.
Utilisation du critère de d'Alembert.

Opérations sur les séries entières, comparaison des rayons.

Régularité de la fonction

Développement en série

Definition 1

On appelle série entière d'une variable complexe $z \in \mathbb{C}$ une série de la forme $\sum a_n z^n$, avec $a_n \in \mathbb{C}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarques:

- Notation ambigüe : série numérique ou série de fonctions ?
- Et pour une variable réelle?

1.1. Convergence d'une série entière.

Chapitre 6

Convergence d'une série

entière.

Remarque:

Domaine de convergence \mathcal{D} :

Exemples:

- \bullet $\sum z^n$:
- $\sum nz^n$:
- $\sum \frac{z^n}{n^2}$:
- $\sum \frac{z^n}{z}$:

1. Rayon de convergence.

Chapitre 6

Rayon de convergence

Convergence d'une série entière.

Lemme d'Abel et disque de convergence. Utilisation du

Utilisation du critère de d'Alembert.

Opérations se les séries entières, comparaison des rayons.

Régularité d la fonction

Développement en série 1.2. Lemme d'Abel et disque de convergence.

Chapitre 6

Lemme d'Abel et disque de convergence.

Opérations sur

Définition 2

Pour $R \ge 0$, disque ouvert et disque fermé de rayon R:

$$\mathcal{D}(R) = \{ z \in \mathbb{C} ; |z| < R \}$$

$$\mathcal{D}_f(R) = \{z \in \mathbb{C} ; |z| \leqslant R\}.$$

Remarque:

Cas
$$R = +\infty$$
?

Chapitre 6

tayon de onvergence

Convergence d'une série entière.

Lemme d'Abel et disque de convergence. Utilisation du critère de d'Alembert.

Opérations sur les séries entières, comparaison des rayons.

Régularité de la fonction

Développement en série

Theoreme 1

(**Lemme d'Abel**) Soit $\sum a_n z^n$ une série entière et soit $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la suite numérique $(a_n z_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit bornée. Alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

Chapitre 6

Rayon de convergence Convergence

Lemme d'Abel et disque de convergence. Utilisation du critère de d'Alembert.

Opérations su les séries entières, comparaison des rayons.

Régularité de la fonction somme.

Développement en série

Définition 3

On appelle rayon de convergence d'une série entière $\sum a_n z^n$:

$$R = \sup \left\{ r \in \mathbb{R}^+ / a_n r^n = \underset{n \to +\infty}{=} \mathrm{O}(1) \right\}$$

Remarque:

 $R = +\infty$ si l'ensemble n'est pas borné.

Chapitre 6

Lemme d'Abel et

Opérations sur

disque de convergence

les séries

la fonction

Proposition 1

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière, \mathcal{D} son domaine de convergence et R son rayon de convergence. Alors on a :

$$\mathcal{D}(R) \subset \mathcal{D}_f \subset \mathcal{D}_F(R).$$

En outre:

- If y a convergence absolue sur $\mathcal{D}(R)$.
- If y a divergence grossière sur $(\mathcal{D}_f(R))^c$

Remarques:

- Comportement "atypiques" de $\sum a_n z_0^n : R = |z_0|$
- Cas d'une variable réelle : intervalle de convergence.

1. Rayon de convergence.

Chapitre 6

Rayon de convergence

Convergence d'une série

Lemme d'Abel disque de

Utilisation du critère de d'Alembert.

Opérations s les séries entières,

Régularité de la fonction

Développement en série 1.3. Utilisation du critère de d'Alembert.

1.3. Utilisation du critère de d'Alembert.

Chapitre 6

Rayon de convergence

d'une série entière. Lemme d'Abel et disque de convergence.

Utilisation du critère de d'Alembert.

Opérations sur les séries entières, comparaison des rayons.

Régularité d la fonction somme

Développement en série

Proposition 2

Soit $(\sum a_n z^n)$ une série entière et R son rayon de convergence.

s'il existe
$$\ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$$
, tel que $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$, alors $R = \frac{1}{\ell}$.

Exemple:

$$\sum \frac{n!}{n^n} z^n$$

Proposition 3

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la série entière $\sum n^{\alpha}z^{n}$ a pour rayon de convergence R=1.

Table des matières

Chapitre 6

Rayon de convergence

Opérations sur les séries entières, comparaison des rayons.

Comparaison deux séries

Somme de deux séries entières. Produit de deux séries entières.

Régularité de la fonction somme

Développement en série

- Rayon de convergence.
- 2 Opérations sur les séries entières, comparaison des rayons.
 - 3 Régularité de la fonction somme.
- 4 Développement en série entière.

Chapitre 6

Rayon de convergence

Opérations sur les séries entières, comparaison des rayons.

Comparaison de deux séries

Somme de deux séries entières. Produit de deux

Régularité de la fonction

Développement en série 2. Opérations sur les séries entières, comparaison des rayons.

2. Opérations sur les séries entières, comparaison des rayons.

Chapitre 6

Rayon de convergence

Opérations s les séries entières, comparaison

Comparaison de deux séries entières.

Somme de deux séries entières. Produit de deux séries entières.

Régularité d la fonction somme

Développemen en série 2.1. Comparaison de deux séries entières.

2.1. Comparaison de deux séries entières.

Chapitre 6

Rayon de convergence

Opérations sur les séries entières, comparaison des rayons.

Comparaison de deux séries entières.

sómme de deux séries entières. Produit de deux séries entières.

Régularité de la fonction somme.

Développement en série entière

Proposition 4

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b .

- a) Si $a_n = O(b_n)$, et en particulier si $a_n = o(b_n)$, alors $R_a \geqslant R_b$.
- b) Si $a_n \sim b_n$, alors $R_a = R_b$.

Remarque:

 $R \neq 1$: comportement asymptotique "violent" de $(a_n)_n \dots$

2. Opérations sur les séries entières, comparaison des rayons.

Chapitre 6

Rayon de

Opérations s les séries entières, comparaison

Comparaison d

entières.

Somme de deux séries entières.

Produit de deu séries entières.

Régularité de la fonction

Développemen en série 2.2. Somme de deux séries entières.

Chapitre 6

Rayon de convergence

Opérations sur les séries entières, comparaison

Comparaison de deux séries entières.

Somme de deux séries entières.

Produit de deux séries entières.

la fonction somme.

Développemen en série entière.

Proposition 5

Si $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ sont deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b , alors le rayon R de la série entière $\sum (a_n + b_n) z^n$ vérifie $R \geqslant \min(R_a, R_b)$ (avec égalité lorsque $R_a \ne R_b$) et pour $|z| < \min(R_a, R_b)$, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n.$$

Remarque:

Cas
$$R_a = R_b$$
?

2. Opérations sur les séries entières, comparaison des rayons.

Chapitre 6

Rayon de convergence

Opérations les séries entières, comparaisor

Comparaison d

Somme de deu

séries entières.

séries entières.

Régularité de la fonction

Développemen en série 2.3. Produit de deux séries entières.

Chapitre 6

Rayon de convergence

Opérations su les séries entières, comparaison

Comparaison de deux séries entières.

Somme de deux séries entières. Produit de deux séries entières.

Régularité de la fonction somme.

Développement en série entière.

Proposition 6

Si $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ sont deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b , alors le rayon de convergence R de la série entière $\sum c_n z^n$, avec $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, vérifie $R \geqslant \min(R_a, R_b)$ et pour $|z| < \min(R_a, R_b)$, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \right).$$

Remarques:

- Cas $R_a = R_b$?
- Cas d'une série entière donnant un polynôme ? (Exemple $z^2 2z + 3$).

Table des matières

Chapitre 6

Régularité de la fonction somme

- Régularité de la fonction somme.

Chapitre 6

Rayon de convergence

Opérations su les séries entières, comparaison des rayons.

Régularité de la fonction somme.

Convergence

somme.

Dérivation de la

Développement en série 3. Régularité de la fonction somme.

3. Régularité de la fonction somme.

Chapitre 6

Rayon de convergence

Opérations su les séries entières, comparaison des rayons.

res rayons. Régularité de a fonction

Convergence normale et continuité de la

somme. Intégration de la

Dérivation de la

Développemen en série 3.1. Convergence normale et continuité de la somme.

3.1. Convergence normale et continuité de la somme.

Chapitre 6

Rayon de convergence

Opérations sur les séries entières, comparaison des rayons

Régularité de a fonction

Convergence normale et continuité de la somme

Intégration de la somme. Dérivation de la

Développement en série

Proposition 7

Pour tout r < R, la série entière $\sum a_n z^n$ converge normalement sur le disque fermé $\mathcal{D}_f(r)$. Elle converge donc normalement sur tout compact de $\mathcal{D}(R)$.

Corollaire 1

La fonction somme $S: z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ est continue sur $\mathcal{D}_O(R)$.

Remarque:

Cas $|z_0| = R$? On ne peut (presque) rien dire en général ...

3. Régularité de la fonction somme.

Chapitre 6

Rayon de convergence

Opérations su les séries entières, comparaison des rayons.

Régularité de la fonction

Convergence normale et continuité de

somme.

Dérivation de la

Développemei en série 3.2. Intégration de la somme.

3.2. Intégration de la somme.

Chapitre 6

Rayon de convergence

Opérations s les séries entières, comparaison des rayons.

Régularité de la fonction

Convergence normale et continuité de la

Intégration de la

Dérivation de l

Développemen en série entière

Définition 4

On appelle série primitive de la série $\sum a_n z^n$ la série entière $\sum \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$, ou encore $\sum_{n\geqslant 1} \frac{a_{n-1}}{n} z^n$.

3.2. Intégration de la somme.

Chapitre 6

Rayon de convergence

Opérations s les séries entières, comparaison des rayons.

Régularité de la fonction

Convergence normale et continuité de la

Intégration de la somme.

Dérivation de la

Développement en série entière.

Lemme

 $\sum a_n z^n$ et $\sum na_n z^n$ ont même rayon de convergence.

Remarque:

Plus généralement $\sum a_n z^n$ et $\sum n^{\alpha} z^n$?

Intégration de la

Proposition 8

La série entière $\sum a_n x^n$ et sa série primitive $\sum_{n \ge 1} \frac{a_{n-1}}{n} x^n$ ont le même rayon de convergence R, et la somme F sur]-R,R[de la série primitive, est une primitive de la somme f de $\sum a_n x^n$, plus précisément celle qui s'annule en 0.

Exemple:

- En primitivant $x \mapsto \frac{1}{1+x}$, $\ln(1+x) =$ En primitivant $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$, $\arctan(x) =$

3. Régularité de la fonction somme.

Chapitre 6

Rayon de convergence

Opérations su les séries entières, comparaison des rayons.

Régularité d la fonction

Convergence normale et continuité de l

somme. Intégration de

Dérivation de la somme.

Développemer en série 3.3. Dérivation de la somme.

3.3. Dérivation de la somme.

Chapitre 6

Rayon de convergence

Opérations su es séries entières, comparaison les rayons.

Régularité d la fonction

Convergence normale et continuité de la

Intégration de

Dérivation de la

Développement en série entière.

Définition 5

On appelle *série dérivée* de la série $\sum a_n z^n$ la série entière $\sum_{n\geqslant 1} na_n z^{n-1}$, on encore $\sum (n+1)a_{n+1}z^n$.

Proposition 9

La série entière $\sum a_n x^n$ et sa série dérivée $\sum (n+1)a_{n+1}z^n$ ont le même rayon de convergence R, la somme f de la série $\sum a_n x^n$ est dérivable sur]-R,R[et a pour dérivée la somme de sa série dérivée.

Remarque:

Dérivation terme à terme . . .

Opérations su les séries entières, comparaison des rayons.

Régularité de la fonction

Convergence normale et continuité de la somme.

somme.
Intégration de somme.

Dérivation de la

Développement en série entière

Proposition 10

La somme f de la série entière $\sum a_n x^n$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur]-R,R[, et ses dérivées s'obtiennent par dérivation terme à terme. Pour tout $k\in\mathbb{N}$:

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+k)!}{n!} a_{n+k} x^n.$$

Table des matières

Chapitre 6

Développement en série entière.

- Développement en série entière.

Chapitre 6

Rayon de convergence.

Opérations sur les séries entières, comparaison des rayons.

Régularité de la fonction

Développement en série entière.

Définition

Et en un poir quelconque? (hors-

programme)

développeme

en série entiè

Développements classiques

Utilisation d'un équation

4. Développement en série entière.

4. Développement en série entière.

Chapitre 6

Rayon de convergence

Opérations s les séries entières, comparaison des rayons.

Régularité de la fonction

Développeme en série

Définition.

Et en un poin quelconque? (horsprogramme)

développemen en série entièr

Développemen

Utilisation d'un équation

4.1. Définition.

Opérations sur les séries entières, comparaison des rayons.

la fonction somme.

Développemer en série entière.

Définition.

Et en un point quelconque? (horsprogramme) Unicité d'un

Unicité d'un développement en série entière Série de Taylor

Développements classiques. Utilisation d'une équation

Definition 6

Une fonction f de la variable complexe et à valeurs dans \mathbb{C} , définie au voisinage de 0, est dite *développable en série entière* (en 0) lorsqu'il existe une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence R>0, telle que pour z au voisinage de 0 :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

Remarques:

- "au voisinage de 0"?
- Et pour la variable réelle?

4.1. Définition.

Chapitre 6

Rayon de convergence

Opérations si les séries entières, comparaison des rayons.

Régularité de la fonction

Développement en série entière

Définition.

Et en un poir quelconque? (horsprogramme)

Unicité d'un développemen

en série entière Série de Taylor

Développement classiques.

Utilisation d'un équation différentielle

Exemples:

$$z \mapsto \frac{1}{1-z}$$

• $z \mapsto \exp z$

•
$$x \mapsto \ln(1+x)$$

Chapitre 6

Rayon de convergence

Opérations si les séries entières, comparaison des rayons.

Régularité de la fonction

Développemen en série entière

Définition.

Et en un point quelconque? (horsprogramme)

Unicité d'un développement en série entière

en série entière Série de Taylo

Développement classiques.

Utilisation d'un équation différentielle 4.2. Et en un point quelconque? (hors-programme)

4.2. Et en un point quelconque? (hors-programme)

Chapitre 6

Rayon de convergence

Opérations sur les séries entières, comparaison des rayons

Régularité d la fonction somme.

Développemen en série entière

Définition

Et en un point quelconque? (horsprogramme)

Unicité d'un développement en série entière

Développe

classiques. Utilisation d'ur

Utilisation d'un équation différentielle

Chapitre 6

Rayon de convergence

Opérations s les séries entières, comparaison des rayons

Régularité de la fonction

Développeme en série

quelconque?

Unicité d'un développement en série entière

Développement classiques.

Utilisation d'un équation différentielle 4.3. Unicité d'un développement en série entière

4.3. Unicité d'un développement en série entière

Chapitre 6

Rayon de convergence

Opérations sur les séries entières, comparaison des rayons.

Régularité de la fonction somme.

Développemen en série

Définition.

Et en un point quelconque? (horsprogramme)

Unicité d'un développement en série entière

Développements classiques. Utilisation d'une équation différentielle

Proposition 11

Soit une fonction f de la variable réelle développable en série entière en 0. Alors f est de classe \mathcal{C}^{∞} sur un voisinage de 0 et la suite $(a_n)_n$ du développement vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Remarque:

Cas d'une variable complexe?

4.3. Unicité d'un développement en série entière

Chapitre 6

Rayon de convergence

Opérations sur les séries entières, comparaison des rayons.

Régularité de la fonction somme.

Développement en série entière.

Définition.

quelconque? (horsprogramme)

Unicité d'un développement en série entière

Développement classiques. Utilisation d'un équation différentielle

Corollaire 2

- Deux séries entières de rayons de convergence non nuls ont la même somme sur un voisinage de 0 ssi ce sont les mêmes séries.
- Une série entière de rayon de convergence non nul a une somme nulle au voisinage de 0 **ssi** tous les coefficients sont nuls.

Remarque:

DSE en $0 \Rightarrow \mathcal{C}^{\infty}$ au voisinage de $0 \Rightarrow DL$ à tout ordre en 0. Réciproques fausses.

4.3. Unicité d'un développement en série entière

Chapitre 6

Rayon de convergence

Opérations s les séries entières, comparaison des rayons.

Régularité d la fonction somme.

Développemen en série entière.

Définition

Et en un point quelconque? (horsprogramme)

Unicité d'un développement en série entière

Développements classiques. Utilisation d'une équation différentielle

Remarque:

On peut en fait alléger les hypothèses pour avoir l'unicité :

Proposition 12

Si deux fonctions $f: x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $g: x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$, définie au voisinage de 0, coïncident sur un intervalle $]0, \alpha]$, avec $\alpha > 0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = b_n$.

Remarque:

Encore vrai en supposant seulement $f(x_k) = g(x_k)$ pour une certaine suite $(x_k)_k$ de \mathbb{R}^* qui converge vers 0.

Chapitre 6

Série de Taylor

4.4. Série de Taylor

4.4. Série de Taylor

Chapitre 6

Rayon de convergence.

Opérations sur les séries entières, comparaison des rayons.

Régularité d la fonction somme.

Développemer en série entière.

Définition

Et en un point quelconque? (horsprogramme) Unicité d'un

développemen en série entièr

Série de Taylor

Développements
classiques.

Utilisation d'une
équation

Definition 7

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe C^{∞} au voisinage de 0.

On appelle série de Taylor de f en 0 la série entière $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

Remarques :

- Le DSE d'une fonction est uniquement déterminé par sa série de Taylor.
- Attention : La série de Taylor peut exister, avec un rayon non nul, sans que f soit DSE.

Exemple:

 $f: x \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$ prolongée par continuité.

4.4. Série de Taylor

Chapitre 6

Rayon de convergenc

Opérations s les séries entières, comparaison des rayons.

Régularité d la fonction somme.

Développemen en série entière.

Et en un point quelconque? (horsprogramme) Unicité d'un

développement en série entière Série de Taylor

Développements classiques.

Exercice 1

Soit $f:[-r,r]\to\mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^∞ . On suppose qu'il existe A,K>0 vérifiant pour tout $n\in\mathbb{N}$, sup $f^{(n)}\leqslant Kn!A^n$. Montrer que f est développable en série entière en 0.

Exercice 2

On suppose f de classe C^{∞} au voisinage de 0, avec $f^{(n)} \ge 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que f est développable en série entière en 0. (on pourra penser à utiliser la formule de Taylor avec reste intégral).

Chapitre 6

Rayon de convergence

Opérations su les séries entières, comparaison des rayons.

Régularité de la fonction

Développemei en série

D.(C.)

Et en un poin quelconque? (horsprogramme)

programme) Unicité d'un

développemen en série entiè

Développements

classiques. Utilisation d'une

Utilisation d'un équation différentielle linéaire 4.5. Développements classiques.

Chapitre 6

Rayon de convergenc

Opérations s les séries entières, comparaison des rayons.

Régularité de la fonction somme.

Développemen en série entière.

Définition

Et en un point quelconque? (horsprogramme)

développeme en série entie

Développements classiques.

Utilisation d'un équation différentielle

Proposition 13

Soit f DSE en 0 et $\sum a_n z^n$ sa série de Taylor. Alors :

- f est paire **ssi** pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{2n+1} = 0$.
- f est impaire **ssi** pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{2n} = 0$.

Chapitre 6

Rayon de convergence

les séries entières, comparaison

Régularité de la fonction somme.

Développement en série

Définition

Et en un point quelconque? (horsprogramme) Unicité d'un

Unicité d'un développemen en série entièr

Développements classiques.

Utilisation d'un équation différentielle

Definition 8

La série entière $\sum \frac{1}{n!} z^n$ a un rayon de convergence infini. On appelle exponentielle complexe sa somme sur \mathbb{C} , qu'on note e^z .

Remarque:

On montre que pour tout $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$.

Chapitre 6

Rayon de convergence

Opérations su les séries entières, comparaison des rayons.

Régularité de a fonction

Développement en série entière.

Definition

(horsprogramme) Unicité d'un développement en série entière

Développements classiques.

Utilisation d'une équation différentielle linéaire

Proposition 14

(i) Les fonctions cos et sin sont développables en séries entières en 0. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \qquad \sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

(ii) Les fonctions ch et sh sont développables en séries entières en 0. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\mathsf{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} \, x^{2n} \qquad \mathsf{sh}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \, x^{2n+1}.$$

Chapitre 6

Rayon de convergence

Opérations su les séries entières, comparaison des rayons.

la fonction somme.

en série entière

Définition

Et en un point quelconque? (horsprogramme) Unicité d'un développement

Développements classiques.

classiques. Utilisation d'une équation différentielle linéaire

Proposition 15

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto (1+x)^{\alpha}$ est développable en série entière en 0. Pour tout $x \in]-1,1[$:

$$(1+x)^{\alpha}=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^{n}.$$

Remarque:

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{+\infty} {\alpha \choose k} x^{k}$$

Remarques :

- $\alpha \in \mathbb{N}^*$: polynôme binôme de Newton
- $\alpha = -1$: série géométrique
- α entier négatif :

Chapitre 6

Rayon de convergence

Opérations s les séries entières, comparaison

Régularité de la fonction somme.

Développemen en série entière.

Définition

Et en un poin quelconque? (horsprogramme) Unicité d'un développement

développemen en série entièr Série de Taylo

Développements classiques. Utilisation d'une

Utilisation d'un équation différentielle linéaire

Exercice 3

Retrouver le plus rapidement possible les développements en série entière des fonctions :

- $x \mapsto \ln(1+x)$
- $x \mapsto \arctan(x)$

Ils doivent au final être connus quasiment par coeur.

Chapitre 6

Rayon de convergence

Opérations sur les séries entières, comparaison des rayons.

Régularité de la fonction

Développemen en série

Définition

et en un poin quelconque? (hors-

Unicité d'un développemen

développemen en série entièr

Développe

Utilisation d'une

équation différentielle linéaire

4.6. Utilisation d'une équation différentielle linéaire

4.6. Utilisation d'une équation différentielle linéaire

Chapitre 6

Rayon de convergence

Opérations su les séries entières, comparaison des rayons.

Régularité d la fonction somme

Développemei en série

Définition

et en un poi quelconque? (horsprogramme)

Unicité d'un développement en série entière

Dévelop

classiques. Utilisation d'une

Otilisation d'ur équation différentielle linéaire

