Chapitre 1

Compléments d'algèbre linéaire

Tous les espaces vectoriels considérés dans ce chapitre ont pour corps de base un sous-corps $\mathbb{K}$ de $\mathbb{C}$.

Révisions MP2I

Revoir les chapitres 36 à 42.

1 Rappels fondamentaux

1.1 Noyau et image d'une application linéaire

Définition 1. Soit E et F deux espaces vectoriels et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
- On appelle *noyau* de f l'ensemble

$$\mathrm{Ker}(f) = \{x \in E \mid f(x) = 0\}$$

- On appelle *image* de f l'ensemble

$$\mathrm{Im}(f) = \{f(x)\,,\, x \in E\} = \{y \in F \mid \exists x \in E, y = f(x)\}$$

Remarques :
- $\mathrm{Ker}(f)$ est l'ensemble de tous les vecteurs de E qui sont envoyés sur l'élément neutre 0 de F lorsqu'on applique f. C'est un sous-espace vectoriel de E.
- $\mathrm{Im}(f)$ est l'ensemble de tous les vecteurs de F que l'on peut atteindre à partir de E en appliquant f. C'est un sous-espace vectoriel de F.
- Lorsque $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension finie, rappelons que sa dimension est appelé *rang* de f, et notée $\mathrm{rg}(f)$.

Proposition 1. *Soit E et F deux espaces vectoriels et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.*
- *f est injective si, et seulement si, $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$.*
- *f est surjective si, et seulement si, $\mathrm{Im}(f) = F$.*

1.2 Théorème du rang

Théorème 1. ***(forme géométrique du théorème du rang)*** *Soient E et F deux espaces vectoriels et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Pour tout supplémentaire H de $\mathrm{Ker}(f)$, $f_{|H}$ réalise un isomorphisme de H sur $\mathrm{Im}(f)$.*

Ce qu'on appelle théorème du rang est en fait un corollaire du résultat précédent :

Théorème 2. ***(du rang)*** *Si E est de dimension finie, alors $\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rg}(f)$.*

De ce résultat, on obtient qu'injectivité et surjectivité d'une application linéaire sont équivalentes lorsque E et F sont de même dimension finie :

Corollaire 1. *Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie tels que $\dim(E) = \dim(F)$ et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On a alors*

$$f \text{ est injective} \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ est surjective} \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ est bijective}$$

Corollaire 2. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = I_E$. Alors f et g sont inversibles et inverse l'une de l'autre.*

1.3 Projecteurs et symétries

Définition 2. Soit E un espace vectoriel et soient F et G deux sous-espaces *supplémentaires* de E. Tout vecteur $x \in E$ se décompose donc de façon unique $x = x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$.

- On appelle *projecteur* sur F et parallèlement à G l'application :

$$p : x = x_F + x_G \mapsto x_F$$

- On appelle *symétrie* par rapport à F et parallèlement à G l'application :

$$s : x = x_F + x_G \mapsto x_F - x_G$$

Proposition 2. *Soient $p, s : E \to E$.*

a) *Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) p est un projecteur de E ;

(ii) $p \in \mathcal{L}(E)$ et $p^2 = p$.

Dans ces conditions, p est le projecteur sur $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f - Id)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f)$.

b) *Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) s est une symétrie de E ;

(ii) $s \in \mathcal{L}(E)$ et $s^2 = I_E$.

Dans ces conditions, s est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(f - Id)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f + Id)$.

2 Somme de sous-espaces vectoriels

2.1 Définition d'une somme

Définition 3. Soit un entier $q \geqslant 2$ et soient $(E_i)_{1 \leqslant i \leqslant q}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E. On appelle *somme* de cette famille l'ensemble :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{q} E_i &= \left\{x_1 + \cdots + x_q \,,\, (x_1 \ldots, x_q) \in E_1 \times \cdots \times E_q\right\} \\ &= \left\{x \in E \mid \exists (x_1 \ldots, x_q) \in E_1 \times \cdots \times E_q,\, x = x_1 + \cdots + x_q\right\}\end{aligned}$$

Proposition 3. *Si $E_1, \ldots, E_q$ sont des sous-espaces vectoriels de E, $\sum_{i=1}^{q} E_i$ est un sous-espace vectoriel de E.*

Remarque : Il s'agit de l'image de l'application linéaire $S : E_1 \times \cdots \times E_q \to E$ définie par :

$$S : (x_1, \ldots, x_q) \mapsto x_1 + \cdots + x_q$$

2.2 Somme directe

Définition 4. La somme $E_1 + \cdots + E_q$ est dite *directe* lorsque :

$$\forall (x_1, \ldots, x_q) \in E_1 \times \cdots \times E_q, \quad \sum_{i=1}^{q} x_i = 0 \Rightarrow x_1 = \cdots = x_q = 0$$

On peut noter alors la somme $E_1 \oplus \cdots \oplus E_q$ ou encore $\bigoplus_{i=1}^{q} E_i$.

Remarques :
- En considérant l'application $S : E_1 \times \cdots \times E_q \to E$ définie par :

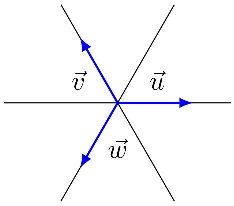
$$S : (x_1, \ldots, x_q) \mapsto x_1 + \cdots + x_q$$

  La définition précédente dit simplement que la somme $E_1 + \cdots + E_q$ est directe si, et seulement si, l'application S est **injective** et donc si, et seulement si, $E_1 \times \cdots \times E_q$ et $E_1 + \cdots + E_q$ sont isomorphes.
- $x \in E_1 + \cdots + E_q$ s'écrit alors de façon **unique** $x = x_1 + \cdots + x_q$, avec $(x_1, \ldots, x_q) \in E_1 \times \cdots \times E_q$: **on ne peut pas** trouver deux q-uplets distincts $(x_1, \ldots, x_q)$ et $(x'_1, \ldots, x'_q)$ de $E_1 \times \cdots \times E_q$ tels que

$$x_1 + \cdots + x_q = x'_1 + \cdots + x'_q$$

Exercice 1. On suppose $E_i \neq \{0\}$ pour tout $i \in [\![1, q]\!]$. Montrer que la somme $E_1 + \cdots + E_q$ est directe si, et seulement si, pour tout $e_1 \in E_1, \ldots, e_q \in E_q$ <u>tous non nuls</u>, la famille $(e_1, \ldots, e_q)$ est libre.

Remarque : Dans le cas de deux sous-espace F et G on a vu que $F + G$ est directe si, et seulement si, $F \cap G = \{0\}$. Cela peut se généraliser à un nombre quelconque de sous-espaces, mais pas n'importe comment ! Pour $q > 2$, on peut avoir $\bigcap_{i=1}^{q} E_i = \{0\}$, et même $\bigcap_{i \in J} E_i = \{0\}$ pour tout $J \subset [\![1, q]\!]$ de cardinal $\geqslant 2$, sans que la somme soit directe : considérer par exemple trois droites vectorielles distinctes de $\mathbb{R}^2$.



$$\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$$

Proposition 4. *La somme $E_1 + \cdots + E_q$ est directe si, et seulement si :*

$$\forall i \in [\![1, q-1]\!], \quad \big(E_1 + \cdots + E_i\big) \bigcap E_{i+1} = \{0\}.$$

2.3 Décomposition en somme directe.

Définition 5. Soient $E_1, \ldots, E_q$ des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. On dit qu'ils réalisent une *décomposition en somme directe* de E lorsque la somme $E_1 + \cdots + E_q$ est directe <u>et</u> $E = E_1 + \cdots + E_q$.

Remarques :
- On peut résumer ces <u>deux</u> conditions en notant $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_q$.
- Tout vecteur x <u>peut</u> alors se décomposer de façon <u>unique</u> $x = x_1 + \cdots + x_q$, avec $(x_1, \ldots, x_q) \in E_1 \times \cdots \times E_q$.
- lorsque $q = 2$, on retrouve la notion de sous-espaces *supplémentaires*.
- En considérant de nouveau l'application $S : E_1 \times \cdots \times E_q \to E$ définie par :

$$S : (x_1, \ldots, x_q) \mapsto x_1 + \cdots + x_q,$$

  il apparait finalement simplement que :
  — S est injective si, et seulement si, la somme $E_1 + \cdots + E_q$ est directe ;
  — S est surjective si, et seulement si, $E = E_1 + \cdots + E_q$.
  et donc que $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_q$ si, et seulement si, S est bijective : E et $E_1 \times \cdots \times E_q$ sont alors isomorphes.

2.4 Somme et dimension finie.

Proposition 5. *Soient $E_1, \ldots, E_q$ des sous-espaces vectoriels de dimension finie d'un espace vectoriel E. La somme $E_1 + \cdots + E_q$ est de dimension finie et :*

$$\dim\left(\sum_{i=1}^{q} E_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{q} \dim(E_i),$$

avec égalité si, et seulement si, la somme est directe.

Corollaire 3. *Supposons E de dimension finie et* $\sum_{i=1}^{q} \dim E_i = \dim(E)$. *On a alors :*

$$\sum_{i=1}^{q} E_i \text{ est directe} \quad \Leftrightarrow \quad E = \sum_{i=1}^{q} E_i \quad \Leftrightarrow \quad E = \bigoplus_{i=1}^{q} E_i$$

Méthode : Il y a deux propriétés distinctes à vérifier lorsqu'on veut montrer que $E_1, \ldots, E_q$ réalisent une décomposition en somme directe de E :

- La somme $E_1 + \cdots + E_q$ est directe,
- Le sous-espace $E_1 + \cdots + E_q$ est égal à l'espace E tout entier,

Cependant, si E est de dimension finie et si $\sum_{i=1}^{q} \dim(E_i) = \dim(E)$, ces deux propriétés sont équivalentes, en vertu du corollaire de la proposition 5, et il suffit de n'en vérifier qu'une seule (généralement la somme directe).

2.5 Bases adaptées.

Définition 6. Soit E un espace vectoriel de dimension finie non nulle, et soit $F \neq \{0\}$ un sous-espace vectoriel de E. On dit qu'une base de E est *adaptée* à F si ses premiers éléments forment une base de F.

Remarque : De façon explicite, si les dimensions de E et F sont n et p respectivement, avec $1 \leqslant p \leqslant n$, la base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E est adaptée à F lorsque $(e_1, \ldots, e_p)$ forme une base de F.

Définition 7. Soit $E_1, \ldots, E_q$ des sous-espaces vectoriels, non réduits à $\{0\}$, réalisant une décomposition en somme directe d'un espace E de dimension finie. On dit qu'une base de E est *adaptée* à cette décomposition lorsque ses éléments consécutifs forment successivement des bases des E_i, pour $1 \leqslant i \leqslant q$.

Remarque : dans le prolongement de la remarque précédente, le fait qu'une base $(e_1, \ldots, e_n)$ soit adaptée à la décomposition $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_q$ peut être rendu explicite : en notant $n_i = \dim(E_i)$ pour tout $i \in [\![1, q]\!]$, on doit avoir $\mathcal{B}_1 = (e_1, \ldots, e_{n_1})$ base de E_1, $\mathcal{B}_2 = (e_{n_1+1}, \ldots, e_{n_1+n_2})$ base de E_2, ..., $\mathcal{B}_q = (e_{n_1+\cdots+n_{q-1}+1}, \ldots, e_n)$ base de E_q (rappelons qu'on a bien $n_1 + \cdots + n_q = n$, par la proposition 5).

Exemple : Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6)$ une base de $\mathbb{K}^6$. On pose $E_1 = \mathrm{vect}(e_1, e_2)$, $E_2 = \mathrm{vect}(e_3)$, $E_3 = \mathrm{vect}(e_4, e_5, e_6)$. On a alors $E = E_1 \oplus E_2 \oplus E_3$ et $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{K}^6$ *adaptée* à cette décomposition :

$$\mathcal{B} = (\overbrace{e_1, e_2}^{\mathcal{B}_1}, \overbrace{e_3}^{\mathcal{B}_2}, \overbrace{e_4, e_5, e_6}^{\mathcal{B}_3}).$$

3 Matrices définies par blocs

3.1 Définition et exemples

Définition 8. Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. Une matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est définie (ou présentée) *par blocs*, lorsqu'elle est écrite sous la forme :

$$M = \begin{pmatrix} M_{1,1} & \cdots & M_{1,s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{r,1} & \cdots & M_{r,s} \end{pmatrix},$$

où les $M_{i,j}$ sont des matrices de dimensions inférieures, appelées *blocs*.

Remarques :

- Chaque bloc $M_{i,j}$ correspond à l'intersection d'un groupe de n_i lignes adjacentes et de n_j colonnes adjacentes de M, où l'on a considéré deux compositions $n = n_1 + \cdots + n_r$ et $p = p_1 + \cdots + p_s$. On a ainsi $M_{i,j} \in \mathcal{M}_{n_i,p_j}(\mathbb{K})$ pour $i \in [\![1, r]\!]$ et $j \in [\![1, s]\!]$.

- On peut également expliciter visuellement qu'on a affaire à un découpage par blocs en écrivant :

$$M = \left(\begin{array}{c|c|c} M_{1,1} & \cdots & M_{1,s} \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline M_{r,1} & \cdots & M_{r,s} \end{array}\right)$$

Exemple : La matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ peut être partionnée en quatre blocs 2×2 :

$M_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $M_{1,2} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $M_{2,1} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$, et $M_{2,2} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$.

On peut alors écrire :

$$M = \begin{pmatrix} M_{1,1} & M_{1,2} \\ M_{2,1} & M_{2,2} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ \hline 3 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \end{array}\right).$$

Mais d'autres découpages sont possibles, par exemple :

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 1 & 2 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \end{array}\right) \quad , \quad \left(\begin{array}{c|cc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \\ \hline 3 & 3 & 4 & 4 \end{array}\right) \quad , \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 2 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 2 \\ \hline 3 & 3 & 4 & 4 \\ \hline 3 & 3 & 4 & 4 \end{array}\right) \quad , \quad \textit{etc} \ldots$$

3.2 Opérations sur les matrices par blocs

Pour plus de clarté, on se place dans le cas de deux matrices à quatre blocs :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \qquad \textbf{ET} \quad M' = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix},$$

La proposition qui suit signifie simplement que les opérations usuelles sur les matrices définies par blocs (combinaison linéaire, multiplication, transposition) se fait de la même façon "bloc par bloc" que "coefficient par coefficient". Elle se généralise à un nombre quelconque de blocs, tant que le nombre et la dimension des blocs sont cohérents pour l'opération à effectuer.

Proposition 6. *Soient M et M' définies par blocs comme ci-dessus, avec $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, et $A \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{K})$, où $1 \leqslant r \leqslant n$ et $1 \leqslant s \leqslant p$.*

linéarité : Si $M' \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, et $A' \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{K})$, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$M + \lambda M' = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + \lambda A' & B + \lambda B' \\ C + \lambda C' & D + \lambda D' \end{pmatrix}.$$

multiplication : Si $M' \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $A' \in \mathcal{M}_{s,t}(\mathbb{K})$, avec $1 \leqslant t \leqslant q$, alors :

$$MM' = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA' + BC' & AB' + BD' \\ CA' + DC' & CB' + DD' \end{pmatrix}.$$

transposition :

$$M^\top = \begin{pmatrix} A^\top & C^\top \\ B^\top & D^\top \end{pmatrix}$$

3.3 Déterminant d'une matrice par blocs

Proposition 7. *Soit un entier $n \geqslant 2$ et soit $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice* triangulaire par blocs *de la forme :*

$$T = \begin{pmatrix} A & (*) \\ (0) & B \end{pmatrix},$$

avec deux blocs diagonaux carrés $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$, $1 \leqslant p \leqslant n-1$. On a alors :

$$\det(T) = \det(A)\det(B).$$

Remarque : Ce résultat se généralise bien sûr immédiatement par réccurence à un nombre quelconque de blocs diagonaux :

$$\det\begin{pmatrix} M_1 & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & M_q \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{q} \det(M_i).$$

Attention de ne pas extrapoler n'importe quelle règle de calcul de déterminant pour un calcul par blocs. Par exemple, on n'a pas en général $\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A)\det(B) - \det(C)\det(D)$

3.4 Transvection par blocs

Exercice 2. Rappeler les trois types d'opérations élémentaires sur les lignes ou sur les colonnes d'une matrice, et le lien avec la multiplication à gauche ou à droite par une certaine matrice inversible.

Définition 9. On appelle *transvection par blocs* sur une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une opération de la forme :
- $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$, avec L_i et L_j deux blocs disjoints de lignes consécutives de A et de même taille, et $\lambda \in \mathbb{K}$.
- $C_j \leftarrow C_i + \lambda C_i$, avec C_i et C_j deux blocs disjoints de colonnes consécutives de A et de même taille, et $\lambda \in \mathbb{K}$.

Proposition 8. *Le rang et le déterminant d'une matrice est invariant lors de l'application d'une transvection par blocs.*

4 Éléments propres d'un endomorphisme ou d'une matrice

4.1 Sous-espace stable et endomorphisme induit

Définition 10. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit qu'un sous-espace vectoriel F de E est stable par u lorsque $u(F) \subset F$, c'est-à-dire lorsque :

$$\forall\, x \in E\,,\ \ x \in F \Rightarrow u(x) \in F.$$

Exercice 3. Montrer qu'une droite vectorielle D de E est stable par $u \in \mathcal{L}(E)$ si, et seulement si, $u_{|_D}$ est une homothétie, c'est-à-dire :

$$\exists \lambda \in \mathbb{K}\,,\ \ \forall\, x \in D\,,\ \ u(x) = \lambda x.$$

Le noyau et l'image d'un endomorphisme u sont tout naturellement stables par u, on a même mieux :

Proposition 9. *Soit E un espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors pour tout $v \in \mathcal{L}(E)$ qui commute avec u,* $\operatorname{Ker}(v)$ *et* $\operatorname{Im}(v)$ *sont stables par u.*

Définition 11. Soit E un espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E)$, et F un sous-espace vectoriel stable par u. On appelle *endomorphisme induit par u sur F*, l'application :

$$u_F \ :\ \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & u(x) \end{array}.$$

Remarque : Comme son nom l'indique, u_F est bien un élément de $\mathcal{L}(F)$, qu'il ne faut pas confondre avec la *restriction* de u à F, notée $u_{|_F}$, élément de $\mathcal{L}(F, E)$. Il y a toujours existence de cette dernière, tandis que celle de l'endomorphisme induit par u sur F est subordonnée à la stabilité de F par u.

En dimension finie, un sous-espace stable et l'endomorphisme induit sont facilement explicités par une base adaptée (*i.e* qui contienut une base du sous-espace) :

Proposition 10. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, $u \in \mathcal{L}(E)$, et $\mathcal{B}$ une base de E adaptée à un sous-espace F de dimension $p \geqslant 1$. Alors F est stable par u si, et seulement si, la matrice de u dans $\mathcal{B}$ est de la forme :*

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A & B \\ (0) & C \end{pmatrix}, \quad \textit{avec } A \in M_p(\mathbb{K})$$

La matrice A représente l'endomorphisme induit par u sur F.

4.2 Vecteur propre et valeur propre, spectre

Définition 12. Soit E un espace vectoriel, et $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que $x \in E$ est un *vecteur propre* lorsque x est non nul et colinéaire à $u(x)$, *ie.* il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$. Ce scalaire λ est appelé *valeur propre* associée à x.

Remarques :
- On notera bien qu'un vecteur propre n'est jamais le vecteur nul.
- Pour un vecteur propre x de E, il n'existe qu'une seule valeur propre λ associée.
- Réciproquement, il y a une infinité de vecteurs propres pour une valeur propre $\lambda \in \mathbb{K}$ donnée : si e est un tel vecteur propre, la droite $D = \text{vect}(e)$ est stable par u et tout vecteur x non nul de D est vecteur propre pour λ (voir exercice 3)
- On peut rechercher à la fois les valeurs propres et vecteurs propres en considérant l'équation $u(x) = \lambda x$ d'inconnues $x \in E \backslash \{0\}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, appelée *équation aux éléments propres.*

Définition 13. Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, avec E de dimension finie, on appelle *spectre* de u l'ensemble de ses valeurs propres. Il est noté $\text{Sp}(u)$.

Remarque : Éviter de parler de spectre en dimension infinie, car il y a une petite subtilité hors-programme !

Exemple :
- Si $h \in \mathcal{L}(E)$ est une homothétie, son rapport λ est l'unique valeur propre et tout vecteur non nul est vecteur propre.
- Si $p \in \mathcal{L}(E)$ est un projecteur, 0 et 1 sont les seules valeurs propres possibles. Tout vecteur non nul de $\text{Ker}(p)$ est vecteur propre associé à 0 et tout vecteur non nul de $\text{Im}(p) = \text{Ker}(p - Id)$ est vecteur propre associé à 1.
- Si $s \in \mathcal{L}(E)$ est une symétrie, 1 et -1 sont les seules valeurs propres possibles. Tout vecteur non nul de $\text{Ker}(s - Id)$ est vecteur propre associé à 1 et tout vecteur non nul de $\text{Ker}(p + Id)$ est vecteur propre associé à -1.

Exercice 4. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de l'endomorphisme $D : f \mapsto f'$ de l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

4.3 Sous-espaces propres

Reformulons la définition d'une valeur propre : $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre d'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ si, et seulement si, il existe x non nul tel que $(u - \lambda I_E)(x) = 0$, où I_E est l'endormorphisme *identité* de E. D'où la proposition :

Proposition 11. *Soit E un espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a :*

$$\lambda \text{ valeur propre de } u \quad \Leftrightarrow \quad \ker(u - \lambda I_E) \neq \{0\} \quad \Leftrightarrow \quad u - \lambda I_E \text{ n'est pas injective}$$

Cette proposition motive la définition suivante.

Définition 14. Soit E un espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$. Pour $\lambda \in \mathbb{K}$ valeur propre de u, on appelle *sous-espace propre* de u *associé* à λ l'ensemble :

$$E_\lambda = \ker(u - \lambda I_E).$$

Remarque : Lorsque λ est valeur propre, E_λ est un sous-espace vectoriel de E non réduit à $\{0\}$: il est donc de dimension au moins 1 et consiste en la réunion de $\{0\}$ et de l'ensemble de tous les vecteurs propres associés à λ.

4.4 Propriétés des éléments propres

La proposition qui suit est à comparer à la proposition 9 :

Proposition 12. *soient E un espace vectoriel et $u, v \in \mathcal{L}(E)$. Si u et v commutent, tout sous-espace propre de u est stable par v.*

Enfin, la proposition suivante est tout à fait essentielle pour le chapitre principal d'algèbre linéaire à venir sur la réduction des endomorphismes.

Proposition 13. *Soient un entier $q \geqslant 2$ et soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ des valeurs propres distinctes deux à deux d'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors leur sous-espaces propres associés $E_1, \ldots, E_q$ sont en somme directe.*

Corollaire 4. *Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.*

Corollaire 5. *Si E est un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, et si $u \in \mathcal{L}(E)$, le cardinal de $\mathrm{Sp}(u)$ est fini et inférieur ou égal à n.*

Autrement dit, u n'a pas plus de n valeurs propres distinctes si E est de dimension n.

4.5 Éléments propres d'une matrice

La traduction matricielle en dimension finie d'une relation du type $u(x) = \lambda x$ justifie les définitions suivantes :

Définition 15. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- On dit que $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est un *vecteur propre* de M, s'il est non nul et s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ (la valeur propre) telle que $MX = \lambda X$.
- On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est *valeur propre* de M, s'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ non nul (un vecteur propre) tel que $MX = \lambda X$;
- On appelle *spectre* de M, et on note $\mathrm{Sp}(M)$ l'ensemble des valeurs propres de M.

Remarque : Comme pour le cas des endomorphismes, on peut chercher valeurs propres et vecteurs propres de M comme solutions de l'*équation aux éléments propres* $MX = \lambda X$, avec $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ non nul et $\lambda \in \mathbb{K}$

Tout cela est bien cohérent avec les définitions analogues pour les endomorphismes :

Proposition 14. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n > 0$, muni d'une base $\mathcal{B}$, et soit $u \in \mathcal{L}(E)$ représenté par la matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{B}$. Alors :*
- *$\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de u si, et seulement si, λ est valeur propre de M.*
- *$x \in E$ est vecteur propre de u si, et seulement si, sa représentation matricielle $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{B}$ est vecteur propre de M.*

Corollaire 6. *Deux matrices semblables ont même spectre.*

Remarque : Le cas fondamental est celui de $E = \mathbb{K}^n$ et $\mathcal{B}$ la base canonique : u est alors canoniquement associé à M, et la représentation matricielle X d'un vecteur $x \in \mathbb{K}^n$ a exactement les même composantes que le vecteur x lui-même. On rappelle que cela justifie l'identification (dite canonique) de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ à $\mathbb{K}^n$. On peut reformuler la définition d'un vecteur propre X comme élément de $\mathbb{K}^n$.

Rappelons que dans le cadre de l'identification de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ à $\mathbb{K}^n$ qu'on vient d'évoquer, on définit le *noyau* d'une matrice comme celui de l'endomorphisme canoniquement associé. Cela conduit naturellement à la définition suivante.

Définition 16. Pour $\lambda \in \mathbb{K}$ valeur propre de $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle *sous-espace propre* de M *associé* à λ l'ensemble :
$$E_\lambda = \ker(M - \lambda I_n).$$
C'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$, réunion de $\{0\}$ et de l'ensemble des vecteurs propres de M associés à λ.

De même qu'un polynôme à coefficients réels peut avoir des racines complexes non réelles, une matrice réelle $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ peut être considérée comme un cas particulier de matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et de ce fait avoir éventuellement des valeurs propres complexes non réelles. On peut différencier ainsi le spectre $\mathrm{Sp}_{|\mathbb{R}}(A)$ des valeurs propres réelles de celui des valeurs propres complexes $\mathrm{Sp}_{|\mathbb{C}}(A)$.

Proposition 15. *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si $\mathbb{K}$ est un sous-corps d'un corps $\mathbb{K}'$, le spectre $\mathrm{Sp}_{|\mathbb{K}}(M)$ de M dans $\mathbb{K}$ est contenu dans le spectre $\mathrm{Sp}_{|\mathbb{K}'}(M)$ de M dans $\mathbb{K}'$.*