Fiche d'exercices n° 6

Séries entières

Exercice 1.

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$, avec a_n dans les différents cas suivants

a) $a_n = \dfrac{n^n}{n!}$

b) $a_n = (\ln n)^{-\ln n}$

c) $a_n = e^{\sqrt{n}}$

d) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}^{\sqrt{n}}}$

e) $a_n = e^{(n+1)^2} - e^{(n-1)^2}$

f) $a_n = \sqrt[n]{n} - \sqrt[n+1]{n+1}$

Exercice 2.

Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$ avec

$$a_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{n} k \cdot k!$$

Calculer sa somme S et donner un équivalent de S en R et $-R$.

Exercice 3.

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Déterminer les rayons de convergence des séries :

a) $\sum a_n^2 z^n$ **b)** $\sum \dfrac{a_n}{n!} z^n$ **c)** $\sum \dfrac{n!\, a_n}{n^n} z^n$

Exercice 4.

On considère les suites (a_n) et (b_n) définies par :

$$a_n = \frac{\cos(n\pi/3)}{n^{1/3}}, \qquad b_n = \sin(a_n).$$

a) Déterminer les rayons de convergence des séries $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$.

b) Déterminer la nature de $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ en fonction de x.

Exercice 5.

On suppose que les séries $\sum a_{2n} z^n$ et $\sum a_{2n+1} z^n$ ont pour rayons de convergence R et R'. Déterminer le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$.

Exercice 6.

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence infini et de somme $a(z)$. Soit également $\rho > 0$. On définit la série entière $\sum b_n z^n$, de sorte qu'en cas de convergence, la somme $b(z)$ vérifie $(z - \rho)b(z) = a(z)$.

a) Prouver l'existence et l'unicité des coefficients b_n.

b) Quel est le rayon de convergence de la série $\sum b_n z^n$?

Exercice 7.

Soit $P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n!} X^n$ et $R > 0$. Montrer que pour n assez grand, P_n n'a pas de racine dans le disque fermé de centre 0 et de rayon R.

Exercice 8.

Calculer, en précisant le rayon de convergence, les sommes de séries entières suivantes :

a) $\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 z^n$, avec $z \in \mathbb{C}$. **b)** $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!} x^{2n+1}$, avec $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 9.

Déterminer rayon et somme de la série entière $\sum \frac{1}{u_n} x^n$, où $u_n = n \binom{2n}{n}$.

Exercice 10.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ on pose $u_n(x) = \left(\frac{x(1-x)}{2}\right)^{4^n}$.

a) Déterminer le domaine de convergence de la série $\sum u_n(x)$.

b) On développe $u_n(x)$ par la formule du binôme : $u_n(x) = \sum_{4^n \leqslant k \leqslant 2.4^n} a_k x^k$. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $(\sum a_n x^n)_{n \geqslant 1}$ est égal à 1 (a_n non défini vaut 0 par convention).

Exercice 11.

Montrer que $\int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{n \geqslant 1} n^{-n}$.

En déduire une méthode de détermination d'une valeur approchée de l'intégrale à 10^{-6} près.

Exercice 12.

Montrer l'égalité suivante :

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = \sum_{n \geqslant 0} \frac{(2n)!}{4^n (4n+1)(n!)^2}.$$

Exercice 13.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum \operatorname{tr}(A^n) z^n$. On pourra trouver une expression faisant intervenir χ_A.

Exercice 14.

Soit f une fonction réelle définie par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n^2}$.

Donner l'ensemble de définition de f et un équivalent en 1.

Exercice 15.

Montrer que la fonction f définie par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-n} \cos(n^2 x)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que sa série de Taylor a un rayon de convergence nul.

Exercice 16.

Étudier la suite réelle définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sum_{p+q=n} u_p u_q$.

On exprimera u_n en fonction de n et on donnera un équivalent de u_n.

Exercice 17.

Développer en série entière les fonctions suivantes :

a) $x \mapsto \ln(1 + x + x^2)$

b) $x \mapsto (x-1)\ln(x^2 - 5x + 6)$

c) $x \mapsto \dfrac{1}{1 + x - 2x^3}$

d) $x \mapsto \dfrac{x-2}{x^3 - x^2 - x + 1}$

e) $x \mapsto \arctan(x+1)$

f) $x \mapsto \arctan(x + \sqrt{3}\,)$

Exercice 18.

Développer en série entière : $\ln(\sqrt{1 - 2x \operatorname{ch} a + x^2})$.

Exercice 19.

Développer en série entière $\dfrac{e^x}{1-x}$ puis $\dfrac{e^{x^2}}{1-x}$.

Exercice 20.

Développer en série entière $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{1 + x^2}}$.

Exercice 21.

Développer $f(x) = \dfrac{x}{1 - x - x^2}$ en série entière en utilisant la relation : $(1 - x - x^2)f(x) = x$.

Exercice 22.

Pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on pose $f(x) = \tan(x)$.

a) Montrer qu'il existe une suite de polynômes $(P_n)_n$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)} = P_n \circ f$ et que les P_n sont à coefficients dans $\mathbb{N}$.

b) En utilisant la formule de Taylor avec reste intégral, montrer que la série de Taylor de f a un rayon de convergence R supérieur ou égal à $\frac{\pi}{2}$.

c) On note $(a_n)_n$ la suite des coefficients de cette série de Taylor. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(n+1)a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$. En déduire que pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $f(x) = g(x)$ et que $R = \frac{\pi}{2}$.

d) Calculer $a_0, a_1, \ldots, a_7$.

Exercice 23.

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ dans les cas suivant :

a) La suite (a_n) est périodique, et non identiquement nulle.

b) a_n est le nombre de diviseur de n

c) a_n est la n-ième décimale de π.

Exercice 24.

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. On pose

$$b_n = \frac{a_n}{1+|a_n|}$$

Déterminer le rayon de la série entière $\sum b_n z^n$

Exercice 25. ⋆⋆ *théorème de Tauber 1*

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence 1. On suppose que sa somme S admet une limite ℓ en 1.

a) La série $\sum a_n$ est-elle nécessairement convergente ?

b) On suppose désormais que $a_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\sum a_n$ converge et que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \ell$.

Exercice 26. ⋆⋆ *théorème de Tauber 2*

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence 1. On suppose que sa somme S admet une limite ℓ en 1. On suppose également que $a_n = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$. Pour $N \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1[$, on note :

$$A(x) = S(x) - \ell, \quad B_N(x) = \sum_{n=0}^{N} (1-x^n) a_n, \quad C_N(x) = \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n x^n.$$

a) Montrer que $\sum_{n=0}^{N} a_n - \ell = A(x) + B_N(x) - C_N(x)$.

b) Soit $\varepsilon > 0$. Démontrer qu'il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $N \geqslant N_0$:

$$|C_N(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{N(1-x)}$$

c) Démontrer que la série $\sum_n a_n$ converge et que sa somme vaut ℓ.

Exercice 27.

Développer en série entière la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^2+x-3}{(x-2)^2(2x-1)}$ et préciser le rayon de convergence de la série obtenue.

Exercice 28.

Pour $n \geqslant 1$, on pose $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et on s'intéresse à la série entière $\sum H_n x^n$. On note R son rayon de convergence.

a) Démontrer que $R = 1$.

b) On pose, pour $x \in]-1,1[$, $F(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^n$. Démontrer que pour tout $x \in]-1,1[$, on a

$$(1-x)F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

c) En déduire la valeur de $F(x)$ sur $]-1,1[$.

Quelques solutions

Solution 1

a) Critère de d'Alembert, on trouve $R = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ car $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \to \mathrm{e}$.

b) D'Alembert est possible mais très (trop) lourd. On préfera la méthode suivante. Soit $r > 0$. On a

$$a_n r^n = \mathrm{e}^{-\ln(n)\ln\big(\ln(n)\big) + n\ln(r)}$$

Or $\ln\big(\ln(n)\big) = \mathrm{o}(\ln(n))$ et donc $\ln(n)\ln\big(\ln(n)\big) = \mathrm{o}\big(\ln^2(n)\big) = \mathrm{o}(n)$. On en déduit que :

— Si $r < 1$, $-\ln(n)\ln\big(\ln(n)\big) + n\ln(r) \sim n\ln(r) \to -\infty$, et donc $a_n r^n \to 0$

— Si $r > 1$, $-\ln(n)\ln\big(\ln(n)\big) + n\ln(r) \sim n\ln(r) \to +\infty$, et donc $a_n r^n \to +\infty$

Il en résulte que $R = 1$ (c'est le "sup" des $r > 0$ tel que $a_n r^n$ est borné).

c) La méthode précédente marche bien, mais d'Alembert n'est pas trop compliqué ici non plus :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \mathrm{e}^{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}} \to 1$$

Le rayon est donc $R = 1$.

d) D'Alembert est encore très lourd mais possible (et formateur !) On fait sinon comme à la **b)** :

$$a_n r^n = \mathrm{e}^{\frac{\sqrt{n}}{2}\ln(n) + n\ln(r)}$$

Une croissance comparée nous donne encore une fois $a_n r^n \to 0$ si $r < 1$ et $a_n r^n \to +\infty$ si $r > 1$. D'où $R = 1$.

e) On montre facilement que $a_n \sim \mathrm{e}^{(n+1)^2}$ et que $a_n r^n \to +\infty$ quelque soit $r > 0$. On a donc $R = 0$.

f) D'Alembert est assez horrible ici, on va déjà avoir fort à faire pour trouver un équivalent asymptotique de a_n. Il est en effet assez clair que $a_n \to 0$ et donc que $R \geqslant 1$ (pourquoi ?) mais il faut montrer que $(a_n)_n$ ne tend pas "trop vite" vers 0. On écrit déjà

$$a_n = \mathrm{e}^{\frac{\ln(n)}{n}} - \mathrm{e}^{\frac{\ln(n+1)}{n+1}}$$

On peut utiliser un développement limité de $x \mapsto \mathrm{e}^x$ en 0 car $\dfrac{\ln(n)}{n} \to 0$ par croissances comparées :

$$\mathrm{e}^{\frac{\ln(n)}{n}} = 1 + \frac{\ln(n)}{n} + \frac{\ln^2(n)}{2n^2} + \mathrm{O}\left(\frac{\ln^3(n)}{n^3}\right)$$

On peut tenter de s'arrêter à l'ordre 1, mais on se rendra compte alors qu'une simplification du terme d'ordre 1 avec celui du développement de $\mathrm{e}^{\frac{\ln(n+1)}{n+1}}$ donnera un terme en $\dfrac{\ln(n)}{n^2}$ qui est négligeable devant un terme en $\dfrac{\ln^2(n)}{n^2}$! Pour cette même raison, terminer le développement par un o() de l'ordre 2 ne permettra pas de garder le terme $\dfrac{\ln(n)}{n^2}$ qui sera absorbé ! Terminer par un O() de l'ordre 3 est plus précis et évite ce problème car $\dfrac{\ln^3(n)}{n^3} = \mathrm{o}\left(\dfrac{\ln(n)}{n^2}\right)$ par croissance comparée. Mais poursuivons ... On a :

$$\mathrm{e}^{\frac{\ln(n+1)}{n+1}} = 1 + \frac{\ln(n+1)}{n+1} + \frac{\ln^2(n+1)}{2(n+1)^2} + \mathrm{O}\left(\frac{\ln^3(n)}{n^3}\right)$$

On a pu mettre n plutôt que $n+1$ dans le O() car $\dfrac{\ln(n+1)}{n+1} \sim \dfrac{\ln(n)}{n}$.

Au-delà des "1" qui se simplient dans la différence $\mathrm{e}^{\frac{\ln(n)}{n}} - \mathrm{e}^{\frac{\ln(n+1)}{n+1}}$, il nous faut transformer l'écriture de $\dfrac{\ln(n+1)}{n+1}$ pour aller plus loin :

$$\begin{aligned}\frac{\ln(n+1)}{n+1} &= \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1}\left(\ln(n)+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)\\ &= \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\left(\ln(n)+\frac{1}{n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\ &= \frac{\ln(n)}{n}-\frac{\ln(n)}{n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right)\end{aligned}$$

On peut alors aussi en déduire :

$$\frac{\ln^2(n+1)}{(n+1)^2} = \frac{\ln^2(n)}{n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right)$$

On a donc finalement, en utilisant le fait que $\dfrac{\ln^3(n)}{n^3} = \mathrm{o}\left(\dfrac{\ln(n)}{n^2}\right)$:

$$\mathrm{e}^{\frac{\ln(n+1)}{n+1}} = 1+\frac{\ln(n)}{n}+\frac{\ln^2(n)}{2n^2}-\frac{\ln(n)}{n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right)$$

Avant de terminer, rappelons qu'on a aussi par ailleurs

$$\mathrm{e}^{\frac{\ln(n)}{n}} = 1+\frac{\ln(n)}{n}+\frac{\ln^2(n)}{2n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right)$$

C'est la différence de ces deux quantités qui nous intéressait, et on a ainsi montré :

$$a_n = \sqrt[n]{n} - \sqrt[n+1]{n+1} \sim \frac{\ln(n)}{n^2}$$

Il est maintenant clair (d'Alembert ou équivalent de $a_n r^n$ pour $r > 0$) que $R = 1$.

Solution 3

Dans cet exercice, on peut être tenté d'écrire que $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \to \dfrac{1}{R}$. On en déduit alors facilement (faites-le !) que les rayons de ces trois nouvelles séries entières sont respectivement R^2, $+\infty$ et $\mathrm{e}\,R$. Sauf que bien sûr, il est tout à fait possible que $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ n'admette pas de limite, ne serait-ce que parce qu'on pourrait avoir $a_n = 0$ pour certaines valeurs de n .... Néanmoins il doit certainement s'agir des bons rayons en général ! Voyons comment le prouver sans d'Alembert.

a) Notons R' le rayon de $\sum a_n^2 z^n$ et fixons $r > 0$.

— Si $r < R'$, alors $a_n^2 r^n \to 0$ et donc $|a_n|(\sqrt{r})^n = \sqrt{|a_n^2 r^n|} \to 0$. Il en résulte $\sqrt{r} \leqslant R$ (la série $\sum a_n z^n$ évaluée en $z = \sqrt{r}$ ne diverge pas grossièrement) et donc $r \leqslant R^2$.

— Si au contraire $r > R'$, alors la suite $(a_n^2 r^n)_n$ n'est pas bornée, et donc la suite $(a_n(\sqrt{r})^n)_n$ non plus, de sorte que $\sqrt{r} \geqslant R$ et donc $r \geqslant R^2$.

On ainsi montré que $\forall r < R', r \leqslant R^2$, d'où $R' \leqslant R^2$, et que $\forall r > R', r \geqslant R^2$, d'où $R' \geqslant R^2$. *cqfd*

b) Comme $\sum a_n z^n$ a un rayon $R > 0$, la série $\sum a_n r^n$ converge pour $r = \dfrac{R}{2}$. Soit maintenant $z \in \mathbb{C}$ quelconque. Pour $n \in \mathbb{N}$ on a (super mega astuce) :

$$\frac{a_n}{n!}z^n = a_n r^n \frac{1}{n!}\left(\frac{z}{r}\right)^n$$

Or $\dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{z}{r}\right)^n \to 0$ par croissance comparée, et on a donc :

$$\left|\frac{a_n}{n!}z^n\right| = \mathrm{o}\left(|a_n|r^n\right)$$

Par comparaison des séries positives, la série $\sum \dfrac{a_n}{n!}z^n$ est donc absolument convergente, pour un $z \in \mathbb{C}$ quelconque, de sorte que le rayon de convergence cherché est bien $+\infty$.

c) Il est très utile ici de disposer de l'équivalent asymptotique (formule de Stirling) $n! \sim K\left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\sqrt{n}$ (où $K = \sqrt{2\pi}$, ce que l'on n'a pas besoin de savoir ici). Notons R'' le rayon de convergence de la série $\sum \dfrac{n!\,a_n}{n^n}z^n$. Compte-tenu de l'équivalent qu'on vient de mentionner, R'' est aussi le rayon de convergence de la série $\sum \dfrac{a_n\sqrt{n}}{\mathrm{e}^n}z^n$. D'après le cours $\sum na_nz^n$ a le même rayon R que $\sum a_nz^n$, de sorte que $\sum \sqrt{n}a_nz^n$ aussi (puisque $1 \leqslant \sqrt{n} \leqslant n$).
(preuve rapide pour celles et ceux qui ne veulent pas aller revoir le cours : Si $r > R$, $(a_nz^n)_n$ n'est pas borné, donc $(a_n\sqrt{n}z^n)$ encore moins. Mais si $r < R$, on peut poser $\rho = \dfrac{r+R}{2}$ de façon à ce que $r < \rho < R$, et donc que (SMA) $a_n\sqrt{n}r^n = a_n\rho^n\sqrt{n}\left(\dfrac{r}{\rho}\right)^n \to 0$ par croissance comparée)
On peut maintenant conclure rapidement : pour $z \in \mathbb{C}$, on a $|z| < R''$ implique $a_n\sqrt{n}\left(\dfrac{z}{\mathrm{e}}\right)^n = \dfrac{a_n\sqrt{n}}{\mathrm{e}^n}z^n \to 0$ et implique donc $|z| \leqslant \mathrm{e}\,R$. Au contraire $|z| > R''$ implique $a_n\sqrt{n}\left(\dfrac{z}{\mathrm{e}}\right)^n$ non borné et donc $|z| \geqslant \mathrm{e}\,R$. On en déduit $R'' \leqslant \mathrm{e}\,R$ et $R'' \geqslant \mathrm{e}\,R$, d'où $R'' = \mathrm{e}\,R$ comme annoncé.

Solution 24

On montre que $R' \geqslant \max(1, R)$ grâce à $|b_n| \leqslant 1$ et $|b_n| \leqslant |a_n|$. Pour l'autre inégalité on suppose $R' > 1$, on a alors $|b_n| \to 0$ et en exprimant $|a_n|$ en fonction de $|b_n|$ on trouve $|a_n| \sim |b_n|$, d'où $R' = R$.

Solution 25

À venir ...

Solution 26

À venir ...

Solution 27

À venir ...

Solution 28

À venir ...