Chapitre 6

Séries entières

Révisions MP2I

Revoir les chapitres 20 et 21.

1 Rayon de convergence.

1.1 Convergence d'une série entière.

Définition 1. On appelle *série entière* d'une variable complexe $z \in \mathbb{C}$ une série de la forme $\sum a_n z^n$, avec $a_n \in \mathbb{C}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarques :

- La notation est ambigüe (c'est souvent nécessaire pour gagner en souplesse) :
  - ici $\sum a_n z^n$ est une notation formelle qui doit s'interpréter comme la série de fonctions $\sum f_n$ où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est définie par $f_n : z \mapsto a_n z^n$;
  - mais pour un $z \in \mathbb{C}$ particulier, $\sum a_n z^n$ représente aussi la série *numérique* $\sum f_n(z)$. En cas de convergence, on note alors $S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ la somme de cette série.
- On peut aussi considérer des séries entière d'une variable réelle $x \in \mathbb{R}$, ce qu'on note $\sum a_n x^n$: par convention, le choix de noter z ou x la variable spécifie implicitement s'il s'agit d'une variable complexe ou réelle.

Appelons momentanément *domaine de convergence* de la série entière $\sum a_n z^n$ l'ensemble $\mathcal{D}$ des nombres complexes z pour lesquels la série converge : dans le langage des séries de fonctions, c'est la partie de $\mathbb{C}$ sur laquelle il y a *convergence simple* (ou tout simplement le domaine de définition de la fonction *somme* S).

Exemples :

- Pour la série $\sum z^n$, on a $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| < 1\}$.
- Pour la série $\sum n z^n$, on a aussi $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| < 1\}$.
- Pour la série $\sum \frac{z^n}{n^2}$, on a cette fois $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| \leqslant 1\}$.
- Pour la série $\sum \frac{z^n}{n}$, c'est un peu plus compliqué, on a $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| \leqslant 1\} \backslash \{1\}$.

On constate qu'à chaque fois le domaine de convergence est un *disque*.

1.2 Lemme d'Abel et disque de convergence.

Définition 2. Pour $R \geqslant 0$, on appelle respectivement *disque ouvert* et *disque fermé* de rayon R (et de centre 0) les ensembles :

$$\mathcal{D}(R) = \{z \in \mathbb{C} \,;\, |z| < R\} \qquad \mathcal{D}_f(R) = \{z \in \mathbb{C} \,;\, |z| \leqslant R\}.$$

On étend cette définition à $R = +\infty$ en posant par convention $\mathcal{D}(+\infty) = \mathcal{D}_f(+\infty) = \mathbb{C}$.

Théorème 1. *(***Lemme d'Abel***) Soit $\sum a_n z^n$ une série entière et soit $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la suite numérique $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée. Alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.*

Remarque : La preuve repose sur le fait que $|a_n z^n| = \mathrm{O}\left(\dfrac{|z|}{|z_0|}\right)^n$.

Définition 3. On appelle *rayon de convergence* d'une série entière $\sum a_n z^n$ la borne supérieure $R \in [0, +\infty]$ de l'ensemble des $r \in \mathbb{R}^+$ telle que la suite $(a_n r^n)_n$ est *bornée* :

$$R = \sup\left\{r \in \mathbb{R}^+ \,/\, a_n r^n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}(1)\right\}$$

Remarque : Lorsque cet ensemble n'est pas borné, on a donc $R = +\infty$.

Grâce au lemme d'Abel, on peut alors prouver :

Proposition 1. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière, $\mathcal{D}$ son domaine de convergence et R son rayon de convergence. Alors on a :*

$$\mathcal{D}(R) \subset \mathcal{D} \subset \mathcal{D}_f(R).$$

En outre :
- *Il y a convergence absolue sur $\mathcal{D}(R)$.*
- *Il y a divergence grossière sur $\left(\mathcal{D}_f(R)\right)^c$*

Le domaine de convergence est donc un «disque» appelé *disque de convergence.*
le rayon peut être nul ou infini comme pour les séries $\sum n! z^n$ et $\sum \dfrac{z^n}{n!}$
On ne peut rien dire en général concernant la convergence sur le cercle frontière, *ie.* pour z tel que $|z| = R$.

Remarques :
- Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. Le lemme d'Abel prouve que dans chacune des situations suivantes, on a $R = |z_0|$:
  (i) La suite $(a_n z_0^n)_n$ est bornée et la série $\sum a_n z_0^n$ diverge.
  (ii) La série $\sum a_n z_0^n$ diverge, mais pas grossièrement.
  (iii) La série $\sum a_n z_0^n$ converge, mais pas absolument.

  On peut résumer cela en disant que les comportements "*atypiques*" d'une série (semi-convergence, divergence non grossière) n'ont lieu que sur la *frontière* du disque de convergence.
- Dans le cas d'une série entière de la variable réelle $\sum a_n x^n$, le domaine de convergence est un intervalle I de $\mathbb{R}$ appelé plutôt *intervalle de convergence.* Si on note $\mathcal{D}$ le disque de convergence de la série $\sum a_n z^n$ correspondante, on a bien sûr $I = \mathcal{D} \cap \mathbb{R}$ et I prend donc nécessairement l'une des 4 formes $]-R, R[$, $]-R, R]$, $[-R, R[$ ou $[-R, R]$. La convergence est absolue sur $]-R, R[$ et la divergence grossière pour $x < -R$ ou $x > R$. On ne peut rien dire en général pour $x = \pm R$.

1.3 Utilisation du critère de d'Alembert.

Le critère de d'Alembert, d'utilité limitée pour étudier l'absolue convergence d'une série donnée, s'avère en revanche très efficace pour déterminer le rayon de convergence d'une série entière : il n'y a pas de cas "douteux" dès lors qu'on ne s'intéresse qu'au rayon, et pas à la convergence sur le cercle frontière.

Proposition 2. *Soit $(\sum a_n z^n)$ une série entière et R son rayon de convergence.*
s'il existe $\ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, tel que $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, alors $R = \dfrac{1}{\ell}$.

Exemple : Pour la série entière $\sum a_n z^n$ avec pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$, on a :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!n^n}{(n+1)^{n+1}n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\mathrm{e}},$$

d'où la valeur du rayon de convergence $R = \mathrm{e}$.

Proposition 3. *Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la série entière $\sum n^\alpha z^n$ a pour rayon de convergence $R = 1$.*

2 Opérations sur les séries entières, comparaison des rayons.

2.1 Comparaison de deux séries entières.

Proposition 4. *Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b.*
a) Si $a_n = \mathrm{O}(b_n)$, et en particulier si $a_n = \mathrm{o}(b_n)$, alors $R_a \geqslant R_b$.
b) Si $a_n \sim b_n$, alors $R_a = R_b$.

Remarque : Du fait que le rayon de $\sum n^k z^n$ est toujours 1 (quelque soit $k \in \mathbb{Z}$), on déduit de la proposition précédente que si a_n est une fraction rationnelle en n (*ie.* il existe $P, Q \in \mathbb{K}_n[X]$, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{P(n)}{Q(n)}$), le rayon de la série entière $\sum a_n z^n$ vaut toujours 1.

Un rayon de convergence autre que 1 pour une série entière $\sum a_n z^n$ signifie en fait toujours que $(a_n)_n$ a un comportement asymptotique négligeable devant (cas $R > 1$) ou négligé par (cas $R < 1$) toute puissance de n.

2.2 Somme de deux séries entières.

Proposition 5. *Si $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ sont deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b, alors le rayon R de la série entière $\sum (a_n + b_n) z^n$ vérifie $R \geqslant \min(R_a, R_b)$ (avec égalité lorsque $R_a \neq R_b$) et pour $|z| < \min(R_a, R_b)$, on a :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n.$$

Remarque : Dans le cas où, $R_a = R_b$, on peut avoir $R > \min(R_a, R_b)$ par "compensation" des termes de chaque série. Un exemple immédiat et évident : $\sum z^n$ et $\sum (-1) z^n$.

2.3 Produit de deux séries entières.

Généralisant le cas des polynômes, le produit de deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ est une série entière $\sum c_n z^n$, avec

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{p+q=n} a_p b_q.$$

Il s'agit en fait précisément du *produit de Cauchy* de deux séries de fonctions.

Proposition 6. *Si $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ sont deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b, alors le rayon de convergence R de la série entière $\sum c_n z^n$, avec $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, vérifie $R \geqslant \min(R_a, R_b)$ et pour $|z| < \min(R_a, R_b)$, on a :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \right).$$

Remarque : même quand $R_a = R_b$, on peut très bien avoir cette fois $R > \min(R_a, R_b)$. Un exemple immédiat et évident : la série $\sum a_n z^n$ et la série *nulle*.

Lorsque l'une des suites, disons $(b_n)_n$, est nulle à partir d'un certain rang, la série entière correspondante est en fait un *polynôme* en z. Le résultat précédent s'applique, mais il est plus simple alors de considérer le produit des deux sommes comme une *combinaison linéaire* des séries entières obtenues à partir de $\sum a_n z^n$ en multipliant par des puissances successives de z. On pourra par exemple s'autoriser à écrire directement, pour tout $z \in D_0(R)$ (R étant le rayon de la série $\sum a_n z^n$) :

$$\begin{aligned}
(z^2 - 2z + 3) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^{n+2} - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^{n+1} + 3 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} z^n - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} z^n + 3 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \\
&= 3a_0 + (3a_1 - 2a_0) z + \sum_{n=2}^{+\infty} (3a_n - 2a_{n-1} + a_{n-2}) z^n.
\end{aligned}$$

3 Régularité de la fonction somme.

Dans cette section, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite complexe. On désigne par $\sum a_n z^n$ ou $\sum a_n x^n$ sa série entière associée (variable complexe ou réelle), et par R son rayon de convergence, supposé strictement positif, $\mathcal{D}$ son disque de convergence et $I = \mathcal{D} \cap \mathbb{R}$ l'intervalle de convergence correspondant pour la série $\sum a_n x^n$.

3.1 Convergence normale et continuité de la somme.

Proposition 7. *Pour tout $r < R$, la série entière $\sum a_n z^n$ converge normalement sur le disque fermé $\mathcal{D}_f(r)$. Elle converge donc normalement sur tout compact de $\mathcal{D}(R)$.*

Corollaire 1. *La fonction somme $S : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ est continue sur $\mathcal{D}_O(R)$.*

Remarque : On ne peut rien dire en général à propos de la continuité en un point $z_0 \in \mathcal{D}$ de la frontière (soit pour $|z_0| = R$), mais il existe tout de même un théorème qui précise la situation pour le cas d'une variable réelle, aux bornes de l'intervalle de convergence. On le verra plus tard.

3.2 Intégration de la somme.

En intégrant *formellement* le terme général d'une série entière, on définit une nouvelle série entière :

Définition 4. On appelle *série primitive* de la série $\sum a_n z^n$ la série entière $\sum \dfrac{a_n}{n+1} z^{n+1}$, qu'on peut aussi noter, plus canoniquement, $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{a_{n-1}}{n} z^n$ (le terme de rang 0 est nul).

Lemme 1. *$\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.*

Remarque : Plus généralement $\sum a_n z^n$ et $\sum n^\alpha z^n$ ont même rayon de convergence, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

Proposition 8. *La série entière $\sum a_n x^n$ et sa série primitive $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{a_{n-1}}{n} x^n$ ont le même rayon de convergence R, et la somme F sur $]-R, R[$ de la série primitive, est une primitive de la somme f de $\sum a_n x^n$, plus précisément celle qui s'annule en 0.*

Remarque : F s'obtient par l'intégration terme à terme de f, autorisée par la convergence uniforme :

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n\right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^x a_n t^n dt\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

Exemple : À l'aide de ce résultat précédent, on peut obtenir *des développements en série entière* (*cf.* **4.1**) :

- $f : x \mapsto \ln(1+x)$ étant une primitive de $x \to \dfrac{1}{1+x}$, on trouve pour tout $x \in]-1, 1[$:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}.$$

- $g : x \mapsto \arctan(x)$ étant une primitive de $x \to \dfrac{1}{1+x^2}$, on trouve pour tout $x \in]-1, 1[$:

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}.$$

3.3 Dérivation de la somme.

De façon analogue au paragraphe précédent, on peut également dériver *formellement* le terme général d'une série entière, et définir ainsi une nouvelle série entière :

Définition 5. On appelle *série dérivée* de la série $\sum a_n z^n$ la série entière $\sum_{n\geqslant 1} n a_n z^{n-1}$, qu'on peut aussi noter, plus canoniquement, $\sum(n+1)a_{n+1}z^n$.

Proposition 9. *La série entière $\sum a_n x^n$ et sa série dérivée $\sum(n+1)a_{n+1}z^n$ ont le même rayon de convergence R, la somme f de la série $\sum a_n x^n$ est dérivable sur $]-R,R[$ et a pour dérivée la somme de sa série dérivée.*

Remarque : On obtient donc f' en dérivant terme à terme. Pour tout $x \in]-R,R[$:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n\, x^{n-1}.$$

On peut réitérer cette dérivation autant de fois que l'on souhaite. On prouve ainsi par récurrence :

Proposition 10. *La somme f de la série entière $\sum a_n x^n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R,R[$, et ses dérivées s'obtiennent par dérivation terme à terme. Pour tout $k \in \mathbb{N}$:*

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+k)!}{n!} a_{n+k} x^n.$$

4 Développement en série entière.

4.1 Définition.

Définition 6. Une fonction f de la variable complexe et à valeurs dans $\mathbb{C}$, définie au voisinage de 0, est dite *développable en série entière* (en 0) lorsqu'il existe une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$, telle que pour z au voisinage de 0 :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

Remarques :

- "au voisinage de 0" signifie qu'on peut trouver une partie A de $\mathbb{C}$ avec 0 intérieur à A, sur lequel f coincide avec la somme de cette série entière : on dit alors que f est développable en série entière (en 0) sur A. On cherche génaralement la plus grande partie A possible qui en pratique n'est autre que le disque de convergence de la série entière.
- On a une définition analalogue pour une fonction f de la variable réelle : elle est développable en série entière (en 0) lorsque f est la somme d'une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon $R > 0$ sur un voisinage de 0.

Exemples :

- la fonction $z \mapsto \dfrac{1}{1-z}$ est développable en série entière sur le disque $\mathcal{D}_O(1)$, par la série $\sum z^n$.
- la fonction $z \mapsto \exp z$ est développable en série entière sur $\mathbb{C}$, par la série $\sum \dfrac{z^n}{n!}$.
- la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est développable en série entière en 0 sur $]-1,1]$, par la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$.

4.2 Et en un point quelconque ? *(hors-programme)*

Une fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie au voisinage de z_0 est dite développable en série entière *en z_0 s'il existe une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$ telle que pour tout z au voisinage de z_0 :*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n.$$

Une fonction d'un domaine $\mathcal{D}$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ est dite analytique *si elle est développable en série entière en tout point de $\mathcal{D}$: cela veut dire qu'elle s'exprime toujours* localement *comme une série entière.*

Un résultat fondamental d'analyse des fonctions à variable complexe est que toute fonction dérivable sur $\mathbb{C}$ (on dit holomorphe*) est analytique, et en particulier de classe $\mathcal{C}^\infty$!*

4.3 Unicité d'un développement en série entière

Proposition 11. *Soit une fonction f de la variable réelle développable en série entière en 0. Alors f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un voisinage de 0 et la suite $(a_n)_n$ du développement vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}$:*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Remarque : Pour une fonction f de la variable complexe, ce résultat d'unicité d'un développement en série entière reste bien entendu valable, puisqu'on peut toujours restreindre f à $\mathbb{R}$ pour utiliser la proposition précédente.

Corollaire 2.
- *Deux séries entières de rayons de convergence non nuls ont la même somme sur un voisinage de 0 si, et seulement si, ce sont les mêmes séries.*
- *Une série entière de rayon de convergence non nul a une somme nulle au voisinage de 0 si, et seulement si, tous les coefficients sont nuls.*

Remarque : En écrivant le développement en série entière de f (cas de la variable réelle) au voisinage de 0, on retrouve un développement limité à tout ordre $n \in \mathbb{N}$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \underbrace{x^n \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^{k-n}}_{=o(x^n)}$$

On a, sans les réciproques en général, les implications suivantes :

$$\begin{aligned} f \text{ développable en série entière en } 0 \quad &\Rightarrow \quad f \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ au voisinage de } 0 \\ &\Rightarrow \quad f \text{ admet un développement limité à tout ordre en } 0 \end{aligned}$$

L'unicité d'un développement en série entière peut même être invoquée sur un intervalle I qui ne contient pas 0, tant que $0 \in \overline{I}$. On retiendra plus précisément le résultat suivant :

Proposition 12. *Si deux fonctions $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $g : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$, définie au voisinage de 0, coïncident sur un intervalle $]0, \alpha]$, avec $\alpha > 0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = b_n$.*

Remarque : On obtient même $a_n = b_n$ pour tout n en supposant seulement qu'il existe une suite $(x_k)_k$ convergeant vers 0 telle que $f(x_k) = g(x_k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$

4.4 Série de Taylor

Définition 7. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0.

On appelle *série de Taylor* de f en 0 la série entière $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

Remarques :
- La proposition 11 affirme donc que le développement en série entière d'une fonction en 0, lorsqu'il existe, est uniquement déterminé par sa série de Taylor.
- Si le rayon de la série de Taylor d'une fonction est nul, la fonction n'est bien sûr pas développable en série entière. Mais attention, la réciproque est fausse : la série de Taylor d'une fonction peut très bien avoir un rayon de convergence non nul sans pour autant que f soit développable en série entière.

Exemple : On montre que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ défie par $f(0) = 0$ et $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$ pour $x \neq 0$, est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}(0) = 0$. La série de taylor de f est donc la série nulle, ce qui rend absurde l'hypothèse que f soit développable en série entière, f ne s'annulant qu'en 0.

Exercice 1. Soit $f : [-r, r] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$. On suppose qu'il existe $A, K > 0$ vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sup f^{(n)} \leqslant K n! A^n$. Montrer que f est développable en série entière en 0.

Exercice 2. On suppose f de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0, avec $f^{(n)} \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que f est développable en série entière en 0. *(on pourra penser à utiliser la formule de Taylor avec reste intégral).*

4.5 Développements classiques.

Commençons par un résultat s'appuyant sur l'unicité d'un développement en série entière, qui permettra d'associer la partie paire d'une fonction aux termes de degré pair de son développement en série entière.

Proposition 13. *Soit f une fonction développable en série entière en 0 et $\sum a_n z^n$ sa série de Taylor. Alors :*
- *f est paire si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{2n+1} = 0$ (seuls les coefficients pairs sont non nuls).*
- *f est impaire si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{2n} = 0$ (seuls les coefficients impairs sont non nuls).*

Le résultat précédent peut être appliqué aux développements des fonctions $x \mapsto \mathrm{e}^x$ et $x \mapsto \mathrm{e}^{ix}$, elles-mêmes restrictions de la fonction *exponentielle complexe* $z \mapsto \mathrm{e}^z$, pour obtenir les développements des fonctions hyperboliques circulaires et trigonométriques. C'est ce que nous voyons maintenant :

Définition 8. La série entière $\sum \frac{1}{n!} z^n$ a un rayon de convergence infini. On appelle *exponentielle complexe* sa somme sur $\mathbb{C}$, qu'on note e^z.

Remarque : On montre que pour tout $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $\mathrm{e}^{z_1+z_2} = \mathrm{e}^{z_1}\,\mathrm{e}^{z_2}$.

Proposition 14.

(i) Les fonctions $\cos$ *et* $\sin$ *sont développables en séries entières en 0. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:*

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \qquad \sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

(ii) Les fonctions ch *et* sh *sont développables en séries entières en 0. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:*

$$\mathrm{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n} \qquad \mathrm{sh}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

Mis à part le développement en série entière de $z \mapsto \mathrm{e}^z$ et des fonctions associées, il faut absolument connaitre celui des fonctions de la forme $x \mapsto (1+x)^\alpha$, car elles permettent d'obtenir de surcroit le développement en série entière d'un très grand nombre de fonctions usuelles, notamment par intégration ($x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto \arctan(x)$, $x \mapsto \arcsin(x)$).

Proposition 15. *Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$ est développable en série entière en 0. Pour tout $x \in]-1,1[$:*

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n.$$

Remarque : On peut introduire le *coefficient binomial généralisé* $\binom{\alpha}{k} = \frac{1}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}(\alpha - i)$, où $\binom{\alpha}{0} = 1$ (convention du produit vide) et écrire

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$$

Démo : Notons $f : x \mapsto (1+x)^\alpha$ et notons $a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$ ($a_0 = 1$). Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\alpha - n}{n+1} \to -1$$

et d'Alembert prouve que $\sum a_n x^n$ a pour rayon 1. La fonction $g : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est donc définie et de classe $\mathcal{C}^{+\infty}$ sur $]-1,1[$. On vérifie facilement que $n! a_n = f^{(n)}(0)$ mais cela ne suffit pas ! Deux méthodes possibles :
- On vérifie facilement que f et g sont toutes deux solution sur $]-1,1[$ de l'équation différentielle $y' = \dfrac{\alpha}{1+x} y$. De plus $f(0) = g(0)$ et donc par théorème de Cauchy-Lipschitz f et g coincident sur $]-1,1[$.

- Pour $x \in]-1,1[$, on écrit la formule de Taylor avec reste intégral sur $[0,x]$ (ou $[x,0]$) à l'ordre n :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!} \int_0^x (x-t)^n (1+t)^{\alpha-n-1} \mathrm{d}t$$

  On a donc, en se plaçant dans le cas $0 \leqslant x$ (le cas $x \leqslant 0$ se traite de façon analogue)

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \right| \leqslant (1+x)^{\alpha-n} \to 0$$

Remarque : Bien sûr, certaines valeurs de α (typiquement $\alpha = -1$) ne justifient pas l'invocation de ce résultat général.

Exercice 3. Retrouver le plus rapidement possible les développements en série entière des fonctions :
- $x \mapsto \ln(1+x)$
- $x \mapsto \arctan(x)$

Ils doivent au final être connus quasiment par coeur.

4.6 Utilisation d'une équation différentielle linéaire

Lorsqu'une fonction f de la variable réelle est solution d'une équation différentielle linéaire, son développement en série entière éventuel peut être obenu via les contraintes que l'équation différentielle impose aux coefficients, en invoquant l'unicité du développement. On étudiera simplement ici quelques exemples.