

# Continuité des fonctions entre EVN, dimension finie

Lundi 22 septembre 2025

# Table des matières

## Chapitre 4

Révisions MP2I

Limite d'une  
fonction

Continuité

Continuité et  
Linéarité

Espaces  
vectoriels  
normés de  
dimension finie

① Limite d'une fonction

② Continuité

③ Continuité et Linéarité

④ Espaces vectoriels normés de dimension finie

# Table des matières

## Chapitre 4

### Limite d'une fonction

Limite d'une fonction en un point.

Caractérisation séquentielle.

Operations sur les limites.

### Continuité

### Continuité et Linéarité

### Espaces vectoriels normés de dimension finie

## 1 Limite d'une fonction

## 2 Continuité

## 3 Continuité et Linéarité

## 4 Espaces vectoriels normés de dimension finie

## Chapitre 4

### Limite d'une fonction

Limite d'une fonction en un point.

Caractérisation séquentielle.

Operations sur les limites.

### Continuité

### Continuité et Linéarité

Espaces vectoriels normés de dimension finie

# 1. Limite d'une fonction

# 1. Limite d'une fonction

## Chapitre 4

Limite d'une  
fonction

**Limite d'une  
fonction en un  
point.**

Caractérisation  
séquentielle.

Operations sur  
les limites.

Continuité

Continuité et  
Linéarité

Espaces  
vectoriels  
normés de  
dimension finie

## 1.1. Limite d'une fonction en un point.

# 1.1. Limite d'une fonction en un point.

## Chapitre 4

Limite d'une  
fonction

Limite d'une  
fonction en un  
point.

Caractérisation  
séquentielle.

Operations sur  
les limites.

Continuité

Continuité et  
Linéarité

Espaces  
vectoriels  
normés de  
dimension finie

### Definition 1

Soit  $A \subset E$ ,  $f : A \rightarrow F$  et  $a \in \overline{A}$ . On dit que la fonction  $f$  *admet la limite*  $\ell \in F$  en  $a$  (ou *tend vers*  $\ell$ ) lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in A, \|x - a\|_E \leq \eta \implies \|f(x) - \ell\|_F \leq \varepsilon.$$

### Remarque :

On a alors nécessairement  $\ell \in \overline{f(A)}$ .

# 1.1. Limite d'une fonction en un point.

## Chapitre 4

Limite d'une  
fonction

Limite d'une  
fonction en un  
point.

Caractérisation  
séquentielle.

Opérations sur  
les limites.

Continuité

Continuité et  
Linéarité

Espaces  
vectoriels  
normés de  
dimension finie

### Proposition 1

Si  $f$  admet une limite en  $a$ , cette limite est unique.

### Remarque :

Notation  $\ell = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ,  $\ell = \lim_a f$  ou  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$ .

# 1.1. Limite d'une fonction en un point.

## Chapitre 4

Limite d'une  
fonction

Limite d'une  
fonction en un  
point.

Caractérisation  
séquentielle.

Opérations sur  
les limites.

Continuité

Continuité et  
linéarité

Espaces  
vectoriels  
normés de  
dimension finie

### Remarque :

Extensions de la notion de limite pour  $f : A \rightarrow F$

- limite de  $f(x)$  lorsque  $\|x\|$  tend vers  $+\infty$
- limite de  $f(x)$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$  ou  $-\infty$  lorsque  $A \subset \mathbb{R}$
- limite infinie en  $a$  adhérent à  $A$  pour  $f$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$



# 1. Limite d'une fonction

## Chapitre 4

### Limite d'une fonction

Limite d'une fonction en un point.

### Caractérisation séquentielle.

Opérations sur les limites.

### Continuité

### Continuité et Linéarité

### Espaces vectoriels normés de dimension finie

## 1.2. Caractérisation séquentielle.

## 1.2. Caractérisation séquentielle.

### Chapitre 4

Limite d'une  
fonction

Limite d'une  
fonction en un  
point.

Caractérisation  
séquentielle.

Opérations sur  
les limites.

Continuité

Continuité et  
linéarité

Espaces  
vectoriels  
normés de  
dimension finie

### Proposition 2

Soit  $f$  une application de  $A \subset E$  dans  $F$ ,  $a \in E$  un point adhérent à  $A$  et  $\ell \in F$ . Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $f$  admet la limite  $\ell$  en  $a$ .
- (ii) Pour toute suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $A$  convergeant vers  $a$ , la suite  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\ell$ .

## 1.2. Caractérisation séquentielle.

### Chapitre 4

Limite d'une  
fonction

Limite d'une  
fonction en un  
point.

Caractérisation  
séquentielle.

Opérations sur  
les limites.

Continuité

Continuité et  
linéarité

Espaces  
vectoriels  
normés de  
dimension finie

### Exercice 1

Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $f$  admet une limite finie en  $a$ .
- (ii) Pour toute suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $A$  convergeant vers  $a$ , la suite  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente.

# 1. Limite d'une fonction

## Chapitre 4

### Limite d'une fonction

Limite d'une fonction en un point.

Caractérisation séquentielle.

**Operations sur les limites.**

Continuité

Continuité et Linéarité

Espaces vectoriels normés de dimension finie

## 1.3. Operations sur les limites.

# 1.3. Operations sur les limites.

## Chapitre 4

Limite d'une  
fonction

Limite d'une  
fonction en un  
point.

Caractérisation  
séquentielle.

Operations sur  
les limites.

Continuité

Continuité et  
linéarité

Espaces  
vectoriels  
normés de  
dimension finie

### Proposition 3

Soit  $f, g : A \rightarrow F$  et  $a \in \overline{A}$ . On suppose  $\lim_a f = b$  et  $\lim_a g = c$ .  
Alors

- Pour  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $f(x) + \lambda g(x) \rightarrow b + \lambda c$  en  $a$ .
- Cas  $F = \mathbb{K} : f(x)g(x) \rightarrow bc$  en  $a$ . Si de plus  $b \neq 0$ , alors  $f \neq 0$  au voisinage de  $a$  et  $\frac{1}{f(x)} \rightarrow \frac{1}{b}$  en  $a$ .

### Remarque :

Que dire de l'ensemble des fonctions définies sur  $A$  et admettant une limite en  $a \in \overline{A}$ ?

# 1.3. Operations sur les limites.

## Chapitre 4

Limite d'une  
fonction

Limite d'une  
fonction en un  
point.

Caractérisation  
séquentielle.

**Operations sur  
les limites.**

Continuité

Continuité et  
Linéarité

Espaces  
vectoriels  
normés de  
dimension finie

### Proposition 4

Soient  $f : A \rightarrow F$  et  $g : B \rightarrow G$  avec  $\text{Im}(f) \subset B$ , soient  $a \in \overline{A}, b \in \overline{B}$ .  
Si  $\lim_a f = b$  et  $\lim_b g = c$ , alors  $\lim_a (g \circ f) = c$ .

# Table des matières

## Chapitre 4

Limite d'une  
fonction

### Continuité

Définition

Opérations sur  
les fonctions  
continues

Continuité et  
densité

Caractérisation  
globale

Continuité  
uniforme

Applications  
lipschitziennes.

Continuité sur un  
compact

Connexité par  
arcs et théorème  
des valeurs  
intermédiaires

Continuité et  
Linéarité

Espaces  
vectoriels  
normés de  
dimension finie

1 Limite d'une fonction

2 Continuité

3 Continuité et Linéarité

4 Espaces vectoriels normés de dimension finie

## Chapitre 4

Limite d'une  
fonction

### Continuité

Définition

Opérations sur  
les fonctions  
continues

Continuité et  
densité

Caractérisation  
globale

Continuité  
uniforme

Applications  
lipschitziennes.

Continuité sur un  
compact

Connexité par  
arcs et théorème  
des valeurs  
intermédiaires

Continuité et  
Linéarité

Espaces  
vectoriels  
normés de  
dimension finie

# 2. Continuité



## 2. Continuité

### Chapitre 4

Limite d'une  
fonction

Continuité

**Définition**

Opérations sur  
les fonctions  
continues

Continuité et  
densité

Caractérisation  
globale

Continuité  
uniforme

Applications  
lipschitziennes.

Continuité sur un  
compact

Connexité par  
arcs et théorème  
des valeurs  
intermédiaires

Continuité et  
Linéarité

Espaces  
vectoriels  
normés de  
dimension finie

### 2.1. Définition

## 2.1. Definition

### Chapitre 4

Limite d'une  
fonction

Continuité

**Definition**

Opérations sur  
les fonctions  
continues

Continuité et  
densité

Caractérisation  
globale

Continuité  
uniforme

Applications  
lipschitziennes.

Continuité sur un  
compact

Connexité par  
arcs et théorème  
des valeurs  
intermédiaires

Continuité et  
Linéarité

Espaces  
vectoriels  
normés de  
dimension finie

### Definition 2

Soit  $A \subset E$ ,  $f : A \rightarrow F$ , et  $a \in A$ . On dit que  $f$  est *continue* en  $a$  lorsque  $f(x) \rightarrow f(a)$  lorsque  $x \rightarrow a$ .

### Remarques :

- En fait la limite est nécessairement  $f(a)$  !
- La caractérisation séquentielle s'applique.

## 2.1. Definition

### Chapitre 4

Limite d'une  
fonction

Continuité

Definition

Opérations sur  
les fonctions  
continues

Continuité et  
densité

Caractérisation  
globale

Continuité  
uniforme

Applications  
lipschitziennes.

Continuité sur un  
compact

Connexité par  
arcs et théorème  
des valeurs  
intermédiaires

Continuité et  
Linéarité

Espaces  
vectoriels  
normés de  
dimension finie

### Definition 3

Soit  $A$  une partie de  $E$ , et  $f : A \rightarrow F$ . On dit que  $f$  est *continue* sur  $A$  lorsque  $f$  est continue en tout point de  $A$ .

### Remarque :

$f$  continue sur  $B \subset A$  lorsque  $f|_B$  continue en tout point de  $B$ .  
(pourquoi  $f|_B$  et pas simplement  $f$  ?)

### Exemple :

L'application *norme*  $x \mapsto \|x\|_E$  est continue sur  $E$ .

## 2. Continuité

### Chapitre 4

Limite d'une  
fonction

Continuité

Définition

**Opérations sur  
les fonctions  
continues**

Continuité et  
densité

Caractérisation  
globale

Continuité  
uniforme

Applications  
lipschitziennes.

Continuité sur un  
compact

Connexité par  
arcs et théorème  
des valeurs  
intermédiaires

Continuité et  
Linéarité

Espaces  
vectoriels  
normés de  
dimension finie

## 2.2. Opérations sur les fonctions continues

## 2.2. Opérations sur les fonctions continues

### Chapitre 4

Limite d'une  
fonction

Continuité

Définition

Opérations sur  
les fonctions  
continues

Continuité et  
densité

Caractérisation  
globale

Continuité  
uniforme

Applications  
lipschitziennes.

Continuité sur un  
compact

Connexité par  
arcs et théorème  
des valeurs  
intermédiaires

Continuité et  
linéarité

Espaces  
vectoriels  
normés de  
dimension finie

### Proposition 5

Soient  $f, g : A \rightarrow F$  et  $\lambda : A \rightarrow \mathbb{K}$  continues, alors l'application  $x \mapsto f(x) + \lambda(x)g(x)$  est continue.

### Corollaire 1

L'ensemble  $\mathcal{C}(A, F)$  des fonctions continues sur  $A$  et à valeurs dans  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{F}(A, F)$ .

## 2. Continuité

### Chapitre 4

Limite d'une  
fonction

Continuité

Définition

Opérations sur  
les fonctions  
continues

Continuité et  
densité

Caractérisation  
globale

Continuité  
uniforme

Applications  
lipschitziennes.

Continuité sur un  
compact

Connexité par  
arcs et théorème  
des valeurs  
intermédiaires

Continuité et  
Linéarité

Espaces  
vectoriels  
normés de  
dimension finie

### 2.3. Continuité et densité

## 2.3. Continuité et densité

### Chapitre 4

Limite d'une  
fonction

Continuité

Définition

Opérations sur  
les fonctions  
continues

Continuité et  
densité

Caractérisation  
globale

Continuité  
uniforme

Applications  
lipschitziennes.

Continuité sur un  
compact

Connexité par  
arcs et théorème  
des valeurs  
intermédiaires

Continuité et  
Linéarité

Espaces  
vectoriels  
normés de  
dimension finie

### Proposition 6

Soient  $f, g : E \rightarrow F$  deux applications continues qui coïncident sur une partie  $A$  dense dans  $E$ . Alors  $f$  et  $g$  coïncident sur  $E$ .

### Remarque :

Cas  $f, g : B \rightarrow F$  avec  $B \subset E$ ?

### Exercice 2

Déterminer toutes les fonctions continues  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant  $f(x + y) = f(x) + f(y)$  pour tout  $x, y \in \mathbb{R}$ .

## 2. Continuité

### Chapitre 4

Limite d'une  
fonction

Continuité

Définition

Opérations sur  
les fonctions  
continues

Continuité et  
densité

**Caractérisation  
globale**

Continuité  
uniforme

Applications  
lipschitziennes.

Continuité sur un  
compact

Connexité par  
arcs et théorème  
des valeurs  
intermédiaires

Continuité et  
Linéarité

Espaces  
vectoriels  
normés de  
dimension finie

### 2.4. Caractérisation globale



## 2.4. Caractérisation globale

### Chapitre 4

Limite d'une  
fonction

Continuité

Définition

Opérations sur  
les fonctions  
continues

Continuité et  
densité

**Caractérisation  
globale**

Continuité  
uniforme

Applications  
lipschitziennes.

Continuité sur un  
compact

Connexité par  
arcs et théorème  
des valeurs  
intermédiaires

Continuité et  
linéarité

Espaces  
vectoriels  
normés de  
dimension finie

Remarque :

Ici  $f : E \rightarrow F$ , mais on adaptera à  $f : A \rightarrow F$  avec  $A \subset E$ .

Proposition 7

Soit  $f : E \rightarrow F$ . Les trois assertions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $f$  est continue sur  $E$ .
- (ii) Pour tout ouvert  $U$  de  $F$ ,  $f^{-1}(U)$  est un ouvert.
- (iii) pour tout fermé  $V$  de  $F$ ,  $f^{-1}(V)$  est un fermé.

## 2.4. Caractérisation globale

### Chapitre 4

Limite d'une  
fonction

Continuité

Définition

Opérations sur  
les fonctions  
continues

Continuité et  
densité

Caractérisation  
globale

Continuité  
uniforme

Applications  
lipschitziennes.

Continuité sur un  
compact

Connexité par  
arcs et théorème  
des valeurs  
intermédiaires

Continuité et  
Linéarité

Espaces  
vectoriels  
normés de  
dimension finie

### Corollaire 2

Soit  $f$  une application continue de  $E$  dans  $\mathbb{R}$ . Alors :

- L'ensemble  $\{x \in E / f(x) > 0\}$  est un ouvert de  $E$ .
- L'ensemble  $\{x \in E / f(x) \geq 0\}$  est un fermé de  $E$ .
- L'ensemble  $\{x \in E / f(x) = 0\}$  est un fermé de  $E$ .

### Exercice 3

Montrer (plus simplement qu'au chapitre précédent) que dans un espace vectoriel normé :

- Les boules ouvertes sont ouvertes
- Les boules fermées et les sphères sont fermées

## 2. Continuité

### Chapitre 4

Limite d'une  
fonction

Continuité

Définition

Opérations sur  
les fonctions  
continues

Continuité et  
densité

Caractérisation  
globale

**Continuité  
uniforme**

Applications  
lipschitziennes.

Continuité sur un  
compact

Connexité par  
arcs et théorème  
des valeurs  
intermédiaires

Continuité et  
Linéarité

Espaces  
vectoriels  
normés de  
dimension finie

## 2.5. Continuité uniforme

## 2.5. Continuité uniforme

### Chapitre 4

Limite d'une  
fonction

Continuité

Définition

Opérations sur  
les fonctions  
continues

Continuité et  
densité

Caractérisation  
globale

Continuité  
uniforme

Applications  
lipschitziennes.

Continuité sur un  
compact

Connexité par  
arcs et théorème  
des valeurs  
intermédiaires

Continuité et  
linéarité

Espaces  
vectoriels  
normés de  
dimension finie

### Définition 4

On dit que  $f : A \rightarrow F$  est *uniformément continue* sur  $A$  lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \mu > 0, \forall (x, y) \in A^2, \|x - y\|_E \leq \mu \Rightarrow \|f(x) - f(y)\|_F \leq \varepsilon$$

### Remarques :

- Différence avec la continuité en tout point ?
- Module d'uniforme continuité associé à  $\varepsilon$ .

## 2.5. Continuité uniforme

### Chapitre 4

Limite d'une  
fonction

Continuité

Définition

Opérations sur  
les fonctions  
continues

Continuité et  
densité

Caractérisation  
globale

Continuité  
uniforme

Applications  
lipschitziennes.

Continuité sur un  
compact

Connexité par  
arcs et théorème  
des valeurs  
intermédiaires

Continuité et  
Linéarité

Espaces  
vectoriels  
normés de  
dimension finie

### Proposition 8

Si  $f : A \rightarrow F$  est uniformément continue sur  $A$ , alors  $f$  est continue sur  $A$ .

Remarque :

Réciproque fausse. Contre-exemple ?

## 2. Continuité

### Chapitre 4

Limite d'une  
fonction

Continuité

Définition

Opérations sur  
les fonctions  
continues

Continuité et  
densité

Caractérisation  
globale

Continuité  
uniforme

**Applications  
lipschitziennes.**

Continuité sur un  
compact

Connexité par  
arcs et théorème  
des valeurs  
intermédiaires

Continuité et  
Linéarité

Espaces  
vectoriels  
normés de  
dimension finie

## 2.6. Applications lipschitziennes.

## 2.6. Applications lipschitziennes.

### Chapitre 4

Limite d'une  
fonction

Continuité

Définition

Opérations sur  
les fonctions  
continues

Continuité et  
densité

Caractérisation  
globale

Continuité  
uniforme

**Applications  
lipschitziennes.**

Continuité sur un  
compact

Connexité par  
arcs et théorème  
des valeurs  
intermédiaires

Continuité et  
linéarité

Espaces  
vectoriels  
normés de  
dimension finie

### Définition 5

On dit qu'une fonction  $f : A \rightarrow F$ , avec  $A \subset E$ , est *lipschitzienne* lorsqu'il existe  $k \geq 0$ , tel que :

$$\forall (x, y) \in A^2, \quad \|f(x) - f(y)\|_F \leq k \|x - y\|_E.$$

On peut préciser alors que  $f$  est  $k$ -lipschitzienne.

### Remarque :

$k$  est appelé *module de Lipschitz* pour  $f$ .

## 2.6. Applications lipschitziennes.

### Chapitre 4

Limite d'une  
fonction

Continuité

Définition

Opérations sur  
les fonctions  
continues

Continuité et  
densité

Caractérisation  
globale

Continuité  
uniforme

**Applications  
lipschitziennes.**

Continuité sur un  
compact

Connexité par  
arcs et théorème  
des valeurs  
intermédiaires

Continuité et  
Linéarité

Espaces  
vectoriels  
normés de  
dimension finie

### Proposition 9

$f$  est lipschitzienne **ssi** l'ensemble suivant est majoré :

$$\left\{ \frac{\|f(x) - f(y)\|_F}{\|x - y\|_E}, x, y \in E, x \neq y \right\}$$

La borne supérieure  $k_0$  de cet ensemble est alors le plus petit module de Lipschitz pour  $f$ , et l'ensemble de tous les modules est  $[k_0, +\infty[$ .



## 2.6. Applications lipschitziennes.

### Chapitre 4

Limite d'une  
fonction

Continuité

Définition

Opérations sur  
les fonctions  
continues

Continuité et  
densité

Caractérisation  
globale

Continuité  
uniforme

**Applications  
lipschitziennes.**

Continuité sur un  
compact

Connexité par  
arcs et théorème  
des valeurs  
intermédiaires

Continuité et  
linéarité

Espaces  
vectoriels  
normés de  
dimension finie

### Proposition 10

Toute fonction  $f : A \rightarrow F$  lipschitzienne est uniformément continue, et donc continue.

### Exemples :

Pour des fonctions réelles (vu en MP2I) :

- fonctions affines réelles  $x \mapsto ax + b$
- fonction  $x \mapsto x^2$
- La fonction  $x \mapsto \sqrt{x}$

## 2.6. Applications lipschitziennes.

### Chapitre 4

Limite d'une  
fonction

Continuité

Définition

Opérations sur  
les fonctions  
continues

Continuité et  
densité

Caractérisation  
globale

Continuité  
uniforme

**Applications  
lipschitziennes.**

Continuité sur un  
compact

Connexité par  
arcs et théorème  
des valeurs  
intermédiaires

Continuité et  
Linéarité

Espaces  
vectoriels  
normés de  
dimension finie

Remarque :

Deux exemples à connaître :

Proposition 11

- a) L'application "norme"  $x \mapsto \|x\|$  est 1-lipschitzienne.
- b) Pour une partie  $A$  non vide, l'application "distance à  $A$ "  $x \mapsto d(x, A)$  est 1-lipschitzienne.

## 2.6. Applications lipschitziennes.

### Chapitre 4

Limite d'une  
fonction

Continuité

Définition

Opérations sur  
les fonctions  
continues

Continuité et  
densité

Caractérisation  
globale

Continuité  
uniforme

Applications  
lipschitziennes.

Continuité sur un  
compact

Connexité par  
arcs et théorème  
des valeurs  
intermédiaires

Continuité et  
Linéarité

Espaces  
vectoriels  
normés de  
dimension finie

### Exercice 4

Soient  $A$  et  $B$  sont deux fermés disjoints de  $(E, \|\cdot\|)$ .

- a) A l'aide des fonctions  $d_A : x \mapsto d(x, A)$  et  $d_B : x \mapsto d(x, B)$ , construire une application continue  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $f|_A = 0$  et  $f|_B = 1$ .
- b) En déduire qu'il existe deux ouverts  $U$  et  $V$  disjoints tels que  $A \subset U$  et  $B \subset V$ .

## 2. Continuité

### Chapitre 4

Limite d'une  
fonction

Continuité

Définition

Opérations sur  
les fonctions  
continues

Continuité et  
densité

Caractérisation  
globale

Continuité  
uniforme

Applications  
lipschitziennes.

**Continuité sur un  
compact**

Connexité par  
arcs et théorème  
des valeurs  
intermédiaires

Continuité et  
Linéarité

Espaces  
vectoriels  
normés de  
dimension finie

## 2.7. Continuité sur un compact

## 2.7. Continuité sur un compact

### Chapitre 4

Limite d'une  
fonction

Continuité

Définition

Opérations sur  
les fonctions  
continues

Continuité et  
densité

Caractérisation  
globale

Continuité  
uniforme

Applications  
lipschitziennes.

**Continuité sur un  
compact**

Connexité par  
arcs et théorème  
des valeurs  
intermédiaires

Continuité et  
Linéarité

Espaces  
vectoriels  
normés de  
dimension finie

### Theoreme 1

L'image d'un compact de  $E$  par une application continue  $f : A \rightarrow F$  est un compact de  $F$ .

### Theoreme 2

**(des bornes atteintes)** Si  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  est continue et si  $K$  est un compact de  $E$ , alors  $f$  est bornée sur  $K$  et atteint ses bornes.

## 2.7. Continuité sur un compact

### Chapitre 4

Limite d'une  
fonction

Continuité

Définition

Opérations sur  
les fonctions  
continues

Continuité et  
densité

Caractérisation  
globale

Continuité  
uniforme

Applications  
lipschitziennes.

**Continuité sur un  
compact**

Connexité par  
arcs et théorème  
des valeurs  
intermédiaires

Continuité et  
Linéarité

Espaces  
vectoriels  
normés de  
dimension finie

### Exercice 5

On suppose  $E$  de dimension finie et soit  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  une application continue telle que  $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ . Montrer que  $f$  admet un minimum sur  $E$ .

*(On utilisera le fait que les boules fermées sont compactes en dimension finie, voir section suivante)*

## 2.7. Continuité sur un compact

### Chapitre 4

Limite d'une  
fonction

Continuité

Définition

Opérations sur  
les fonctions  
continues

Continuité et  
densité

Caractérisation  
globale

Continuité  
uniforme

Applications  
lipschitziennes.

**Continuité sur un  
compact**

Connexité par  
arcs et théorème  
des valeurs  
intermédiaires

Continuité et  
Linéarité

Espaces  
vectoriels  
normés de  
dimension finie

### Theoreme 3

**(de Heine)** Si  $f : A \rightarrow F$  est continue et si  $K$  est un compact de  $E$ , alors  $f$  est uniformément continue sur  $K$ .

## 2. Continuité

### Chapitre 4

Limite d'une  
fonction

Continuité

Définition

Opérations sur  
les fonctions  
continues

Continuité et  
densité

Caractérisation  
globale

Continuité  
uniforme

Applications  
lipschitziennes.

Continuité sur un  
compact

**Connexité par  
arcs et théorème  
des valeurs  
intermédiaires**

Continuité et  
Linéarité

Espaces  
vectoriels  
normés de  
dimension finie

## 2.8. Connexité par arcs et théorème des valeurs intermédiaires



## 2.8. Connexité par arcs et théorème des valeurs intermédiaires

### Chapitre 4

Limite d'une  
fonction

Continuité

Définition

Opérations sur  
les fonctions  
continues

Continuité et  
densité

Caractérisation  
globale

Continuité  
uniforme

Applications  
lipschitziennes.

Continuité sur un  
compact

**Connexité par  
arcs et théorème  
des valeurs  
intermédiaires**

Continuité et  
linéarité

Espaces  
vectoriels  
normés de  
dimension finie

### Définition 6

Soient  $a, b \in E$ . On appelle *chemin* (ou *arc*) de (ou joignant)  $a$  à  $b$  toute application  $\gamma : [0, 1] \rightarrow E$  continue telle que  $\gamma(0) = a$  et  $\gamma(1) = b$ . L'ensemble  $\gamma([0, 1])$  est appelé le *support* de l'arc.

### Définition 7

On dit qu'une partie  $A$  non vide de  $E$  est *connexe par arcs* lorsque pour tout  $(a, b) \in A$ , il existe un chemin  $\gamma$  de  $a$  à  $b$  à support contenu dans  $A$  :  $\gamma([0, 1]) \subset A$ .

## 2.8. Connexité par arcs et théorème des valeurs intermédiaires

### Chapitre 4

Limite d'une  
fonction

Continuité

Définition

Opérations sur  
les fonctions  
continues

Continuité et  
densité

Caractérisation  
globale

Continuité  
uniforme

Applications  
lipschitziennes.

Continuité sur un  
compact

**Connexité par  
arcs et théorème  
des valeurs  
intermédiaires**

Continuité et  
linéarité

Espaces  
vectoriels  
normés de  
dimension finie

### Proposition 12

Soit  $A$  une partie de  $E$ . La relation binaire  $\mathcal{R}$  définie par :

$a \mathcal{R} b \iff$  il existe un chemin de  $a$  à  $b$  à support contenu dans  $A$   
est une relation d'équivalence sur  $A$ .

### Définition 8

Les classes d'équivalences pour la relation d'équivalence précédente s'appelle les *composantes connexes par arcs* de  $A$ .

## 2.8. Connexité par arcs et théorème des valeurs intermédiaires

### Chapitre 4

Limite d'une  
fonction

Continuité

Définition

Opérations sur  
les fonctions  
continues

Continuité et  
densité

Caractérisation  
globale

Continuité  
uniforme

Applications  
lipschitziennes.

Continuité sur un  
compact

**Connexité par  
arcs et théorème  
des valeurs  
intermédiaires**

Continuité et  
Linéarité

Espaces  
vectoriels  
normés de  
dimension finie

### Proposition 13

- a) Toute partie étoilée est connexe par arcs.
- b) Toute partie convexe est connexe par arcs.
- c) une partie de  $\mathbb{R}$  est connexe par arcs **ssi** c'est un intervalle.

### Remarque :

A étoilée signifie  $\exists a \in A, \forall b \in A, [a, b] \subset A$

## 2.8. Connexité par arcs et théorème des valeurs intermédiaires

### Chapitre 4

Limite d'une  
fonction

Continuité

Définition

Opérations sur  
les fonctions  
continues

Continuité et  
densité

Caractérisation  
globale

Continuité  
uniforme

Applications  
lipschitziennes.

Continuité sur un  
compact

**Connexité par  
arcs et théorème  
des valeurs  
intermédiaires**

Continuité et  
linéarité

Espaces  
vectoriels  
normés de  
dimension finie

### Theoreme 4

Soit  $A \subset E$  non vide et  $f : A \rightarrow F$  continue. Si  $A$  est connexe par arcs, alors  $f(A)$  est connexe par arcs.

### Theoreme 5

**(des valeurs intermédiaires)** Soit  $A \subset E$  non vide et connexe par arcs et  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  continue. Si  $f$  prend les valeurs  $u$  et  $v$ , avec  $u \leq v$ , alors

$$\forall s \in [u, v], \quad \exists t \in A, \quad f(t) = s$$

# Table des matières

## Chapitre 4

Limite d'une  
fonction

Continuité

**Continuité et  
Linéarité**

Critère  
fondamental

Norme  
subordonnée

Espaces  
vectoriels  
normés de  
dimension finie

1 Limite d'une fonction

2 Continuité

3 Continuité et Linéarité

4 Espaces vectoriels normés de dimension finie

## Chapitre 4

Limite d'une  
fonction

Continuité

**Continuité et  
Linéarité**

Critère  
fondamental

Norme  
subordonnée

Espaces  
vectoriels  
normés de  
dimension finie

# 3. Continuité et Linéarité

# 3. Continuité et Linéarité

## Chapitre 4

Limite d'une  
fonction

Continuité

Continuité et  
Linéarité

**Critère  
fondamental**

Norme  
subordonnée

Espaces  
vectoriels  
normés de  
dimension finie

## 3.1. Critère fondamental

## 3.1. Critère fondamental

### Chapitre 4

Limite d'une  
fonction

Continuité

Continuité et  
Linéarité

Critère  
fondamental

Norme  
subordonnée

Espaces  
vectoriels  
normés de  
dimension finie

### Proposition 14

Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ . Alors  $u$  est continue **ssi** il existe  $C \in \mathbb{R}_+$  tel que :

$$\forall x \in E, \quad \|u(x)\|_F \leq C \|x\|_E$$

### Corollaire 3

Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ . Alors  $u$  est continue sur  $E$  **ssi**  $u$  est continue en 0.

### Remarques :

- Notation :  $\mathcal{L}_c(E, F)$  sous-espace des applications linéaires **continues** de  $E$  dans  $F$ .
- Dépend en général des normes considérées !



## 3.1. Critère fondamental

### Chapitre 4

Limite d'une  
fonction

Continuité

Continuité et  
Linéarité

Critère  
fondamental

Norme  
subordonnée

Espaces  
vectoriels  
normés de  
dimension finie

### Exercice 6

Soit  $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  muni de la norme  $N_1 : f \mapsto \int_0^1 |f(t)| dt$ .

- a) En considérant la suite  $(f_n)_n$  de  $E$  définie par  $f_n : x \mapsto x^n$ , montrer que la forme linéaire  $u : f \mapsto f(1)$  n'est pas continue.
- b) Proposer une norme sur  $E$  pour laquelle  $u$  devient continue.

# 3. Continuité et Linéarité

## Chapitre 4

Limite d'une  
fonction

Continuité

Continuité et  
Linéarité

Critère  
fondamental

**Norme  
subordonnée**

Espaces  
vectoriels  
normés de  
dimension finie

## 3.2. Norme subordonnée

## 3.2. Norme subordonnée

### Chapitre 4

Limite d'une  
fonction

Continuité

Continuité et  
Linéarité

Critère  
fondamental

Norme  
subordonnée

Espaces  
vectoriels  
normés de  
dimension finie

### Proposition 15

Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ . Alors  $u$  est continue ssi l'image de la boule unité  $B_F(0, 1)$  de  $F$  par  $u$  est bornée.

### Définition 9

Pour  $u \in \mathcal{L}_c(E, F)$ , on appelle *norme* de  $u$  *subordonnée* à  $\|\cdot\|_E$  et  $\|\cdot\|_F$  le nombre :

$$\|u\| = \sup_{x \in B(0,1)} \|u(x)\|_F = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|u(x)\|_F$$

$\|u\|$  s'appelle aussi *norme d'opérateur* de  $u$  (notation  $\|u\|_{op}$ ).

## 3.2. Norme subordonnée

### Chapitre 4

Limite d'une  
fonction

Continuité

Continuité et  
Linéarité

Critère  
fondamental

**Norme  
subordonnée**

Espaces  
vectoriels  
normés de  
dimension finie

### Exercice 7

Montrer qu'on a également :

$$\|u\| = \sup_{\|x\|_E < 1} \|u(x)\|_F = \sup_{\|x\|_E = 1} \|u(x)\|_F$$

## 3.2. Norme subordonnée

### Chapitre 4

Limite d'une  
fonction

Continuité

Continuité et  
Linéarité

Critère  
fondamental

Norme  
subordonnée

Espaces  
vectoriels  
normés de  
dimension finie

### Proposition 16

L'application  $\| \cdot \|$  définit une norme sur  $\mathcal{L}_c(E, F)$ . On a de plus :

$$\forall u \in \mathcal{L}_c(E, F), \quad \forall x \in E, \quad \|u(x)\|_F \leq \|u\| \|x\|_E$$

### Remarque :

$\|u\|$  est le plus petit module de Lipschitz de  $u$  et :

$$\|u\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E}$$

## 3.2. Norme subordonnée

### Chapitre 4

Limite d'une  
fonction

Continuité

Continuité et  
linéarité

Critère  
fondamental

Norme  
subordonnée

Espaces  
vectoriels  
normés de  
dimension finie

### Proposition 17

Si  $E, F, G$  sont des e.v.n., et  $\|\cdot\|$ ,  $\|\cdot\|'$  et  $\|\cdot\|''$  les normes d'opérateurs sur  $\mathcal{L}_c(E, F)$ ,  $\mathcal{L}_c(F, G)$  et  $\mathcal{L}_c(E, G)$ ,

$$\forall u \in \mathcal{L}_c(E, F), \quad \forall v \in \mathcal{L}_c(F, G), \quad \|v \circ u\|'' \leq \|v\|' \cdot \|u\|$$

### Remarque :

Avec  $E = \mathbb{K}^n$  muni d'une norme  $\|\cdot\|$ , on peut définir  $\|\cdot\|$  sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ . Alors, pour  $x \in \mathbb{K}^n$ , et  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  :

$$\|Ax\| \leq \|A\| \|x\| \quad \text{et} \quad \|AB\| \leq \|A\| \|B\|$$

# Table des matières

## Chapitre 4

Limite d'une  
fonction

Continuité

Continuité et  
Linéarité

**Espaces  
vectoriels  
normés de  
dimension finie**

Équivalence des  
normes

Compacité des  
fermés bornés,  
cas des  
sous-espaces

Continuité des  
applications  
linéaires

1 Limite d'une fonction

2 Continuité

3 Continuité et Linéarité

4 Espaces vectoriels normés de dimension finie

## Chapitre 4

Limite d'une  
fonction

Continuité

Continuité et  
Linéarité

**Espaces  
vectoriels  
normés de  
dimension finie**

Équivalence des  
normes

Compacité des  
fermés bornés,  
cas des  
sous-espaces

Continuité des  
applications  
linéaires

# 4. Espaces vectoriels normés de dimension finie



# 4. Espaces vectoriels normés de dimension finie

## Chapitre 4

Limite d'une  
fonction

Continuité

Continuité et  
Linéarité

Espaces  
vectoriels  
normés de  
dimension finie

Équivalence des  
normes

Compacité des  
fermés bornés,  
cas des  
sous-espaces

Continuité des  
applications  
linéaires

## 4.1. Équivalence des normes

## 4.1. Équivalence des normes

### Chapitre 4

Limite d'une  
fonction

Continuité

Continuité et  
Linéarité

Espaces  
vectoriels  
normés de  
dimension finie

Équivalence des  
normes

Compacité des  
fermés bornés,  
cas des  
sous-espaces

Continuité des  
applications  
linéaires

### Theoreme 6

Si  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sur  $E$  sont équivalentes.

### Remarque :

Notion de convergence *intrinsèque*.

### Proposition 18

En dimension finie :

- a) une suite converge **ssi** toutes les suites coordonnées dans une base convergent.
- b) une fonction admet une limite en un point **ssi** toutes les fonctions coordonnées dans une base admettent une limite en ce point.

# 4. Espaces vectoriels normés de dimension finie

## Chapitre 4

Limite d'une  
fonction

Continuité

Continuité et  
Linéarité

Espaces  
vectoriels  
normés de  
dimension finie

Équivalence des  
normes

**Compacité des  
fermés bornés,  
cas des  
sous-espaces**

Continuité des  
applications  
linéaires

## 4.2. Compacité des fermés bornés, cas des sous-espaces

## 4.2. Compacité des fermés bornés, cas des sous-espaces

### Chapitre 4

Limite d'une  
fonction

Continuité

Continuité et  
linéarité

Espaces  
vectoriels  
normés de  
dimension finie

Équivalence des  
normes

Compacité des  
fermés bornés,  
cas des  
sous-espaces

Continuité des  
applications  
linéaires

### Theoreme 7

#### De Bolzano-Weierestrass

Si  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, toute suite bornée de  $E$  admet une valeur d'adhérence.

### Remarque :

Lié à la propriété de la borne supérieure sur  $\mathbb{R}$ .

## 4.2. Compacité des fermés bornés, cas des sous-espaces

### Chapitre 4

Limite d'une  
fonction

Continuité

Continuité et  
Linéarité

Espaces  
vectoriels  
normés de  
dimension finie

Équivalence des  
normes

Compacité des  
fermés bornés,  
cas des  
sous-espaces

Continuité des  
applications  
linéaires

### Proposition 19

Lorsque  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, une partie  $A$  de  $E$  est compacte **ssi** elle est fermée et bornée.

### Corollaire 4

une suite bornée de  $E$  converge **ssi** elle admet une unique valeur d'adhérence.

### Proposition 20

Si  $F$  est un sous-espace de dimension finie de  $E$ , alors  $F$  est fermé.

# 4. Espaces vectoriels normés de dimension finie

## Chapitre 4

Limite d'une  
fonction

Continuité

Continuité et  
Linéarité

Espaces  
vectoriels  
normés de  
dimension finie

Équivalence des  
normes

Compacité des  
fermés bornés,  
cas des  
sous-espaces

Continuité des  
applications  
linéaires

## 4.3. Continuité des applications linéaires

## 4.3. Continuité des applications linéaires

### Chapitre 4

Limite d'une  
fonction

Continuité

Continuité et  
Linéarité

Espaces  
vectoriels  
normés de  
dimension finie

Équivalence des  
normes

Compacité des  
fermés bornés,  
cas des  
sous-espaces

Continuité des  
applications  
linéaires

### Proposition 21

Si  $E$  est de dimension finie, alors toutes les applications linéaires de  $E$  vers  $F$  sont continues :  $\mathcal{L}_c(E, F) = \mathcal{L}(E, F)$ .

### Remarque :

Généralisation à la multilinéarité.

## 4.3. Continuité des applications linéaires

### Chapitre 4

Limite d'une  
fonction

Continuité

Continuité et  
Linéarité

Espaces  
vectoriels  
normés de  
dimension finie

Équivalence des  
normes

Compacité des  
fermés bornés,  
cas des  
sous-espaces

Continuité des  
applications  
linéaires

### Proposition 22

- Si  $E$  est euclidien, le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est continu sur  $E^2$
- l'application  $\det$  est continue sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
- L'application "produit matriciel"  $(A, B) \mapsto AB$  est continue sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$
- Toute fonction polynomiale en plusieurs variables est continue.

### Exercice 8

Montrer que  $GL_n(\mathbb{K})$  est un ouvert de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .