Fiche d'exercices n$^{\text{o}}$ 11

Intégration

Intégrales généralisées

Exercice 1.

Montrer que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$ est convergente et calculer sa valeur

Exercice 2.

Donner la nature des intégrales suivantes :

$$\textbf{a)}\ \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx \qquad \textbf{b)}\ \int_1^{\infty} x^{-x}dx \qquad \textbf{c)}\ \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}\sin(\frac{1}{x})}{\ln(1+x)}dx.$$

Exercice 3.

Montrer la convergence et calculer les intégrales suivantes :

$$\textbf{a)}\ \int_1^{2} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx \qquad \textbf{b)}\ \int_0^{\infty} e^{-\sqrt{x}}dx \qquad \textbf{c)}\ \int_1^{\infty} \frac{dx}{\operatorname{sh}(x)}.$$

Exercice 4.

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}^+$ une fonction continue telle que l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^+} f$ converge.

a) Montrer que si f est décroissante, alors :

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

b) Montrer que le résultat précédent est faux sans l'hypothèse de décroissance.

Exercice 5.

Montrer que si la fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ est intégrable, alors la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x tf(t)dt$ est négligeable devant la fonction $x \mapsto x$ au voisinage de $+\infty$.

Exercice 6.

Montrer que la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ n'est pas intégrable sur $[0,+\infty[$, mais que l'intégrale $\displaystyle\int_{[0,+\infty[} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$ est convergente.

Exercice 7.

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue et de carré intégrable. Pour $x > 0$, on pose

$$g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

a) Montrer que g^2 est intégrable sur $]0,+\infty[$ et que

$$\int_0^{+\infty} g^2(t)\,\mathrm{d}t \leqslant 4\int_0^{+\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t.$$

b) Montrer que fg est intégrable et que

$$\int_0^{+\infty} g^2(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 8.

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose que f et f'' sont intégrables.

a) Montrer que $f'(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$.

b) Montrer que $f\,f'$ est intégrable.

Exercice 9.

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$, nulle en 0, telle que f et f'' sont de carrés intégrables.

a) Montrer que f' est de carré intégrable.

b) Montrer :

$$\left(\int_{\mathbb{R}} f'^2\right)^2 \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}} f^2\right)\left(\int_{\mathbb{R}} f''^2\right)$$

Exercice 10.

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x) = x^2\cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \text{ si } x \in]0,1], \text{ ET } f(0) = 0.$$

Montrer que f est dérivable sur $[0,1]$ mais que sa dérivée f' n'est pas intégrable sur $]0,1]$.

Exercice 11.

Soit $f : [1,+\infty] \to \mathbb{R}$ continue et intégrable. Montrer que les fonctions u et v suivantes sont intégrables sur $[1,+\infty[$ et que leurs intégrales y sont égales :

$$u(x) = \frac{1}{x^2}\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad v(x) = \frac{f(x)}{x}.$$

Exercice 12.

Prouver l'existence et calculer l'intégrale suivante, à l'aide du changement de variable $u = \frac{1}{t}$:

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}.$$

Suites et séries d'Intégrales

Exercice 13.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer :

a) $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ **b)** $J_n = \displaystyle\int_0^1 (x\ln x)^n\,\mathrm{d}t.$

Exercice 14.

Étudier la limite éventuelle, quand n tend vers $+\infty$, de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{n+2}}\mathrm{d}x$$

Exercice 15.

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(nt)}{nt+t^2}\mathrm{d}t$$

est bien définie et étudier sa convergence.

Exercice 16.

Montrer que la fonction f_n définie par :

$$f_n : x \mapsto \frac{\ln(1+\frac{x}{n})}{x(1+x^2)}$$

est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Montrer que la suite de terme générale $u_n = n\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x$ converge vers une limite à préciser.

Exercice 17.

Prouver l'égalité suivante :

$$\int_0^1 \frac{(\ln x)^2}{1+x^2}\mathrm{d}x = 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$$

Exercice 18.

a) Montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t}\mathrm{d}t = -\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t}\mathrm{d}t$$

b) En déduire

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$$

c) Calculer la somme précédente, sachant que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Intégrales à paramètres

Exercice 19.

a) Montrer que la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2t^2)}{1+t^2}\mathrm{d}t$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que la fonction $G : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(x^2t^2)\,\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$ est bien définie et continue sur $]0, +\infty[$.

Exercice 20.

a) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

b) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{D}\backslash\{0\}$.

Exercice 21.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

a) Justifier que F est bien définie sur $\mathbb{R}$.

b) Justifier que F est de classe $\mathcal{C}^1$ et donner une expression de $F'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

c) Calculer $F'(x)$ et en déduire une expression simplifiée de $F(x)$.

Exercice 22.

Soient $a, b > 0$. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{bt}}{t} \cos(xt)\mathrm{d}t$$

a) Justifier l'existence de $F(x)$.

b) Prouver que F est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer $F'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

c) Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$F(x) = -\frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \varphi'(x)\sin(xt)\mathrm{d}t \qquad \text{avec} \quad \varphi(x) = \frac{\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{bt}}{t}$$

d) En déduire une expression générale de $F(x)$.

Exercice 23.

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}_+^*$ une application continue. Pour tout $x \geqslant 0$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^1 f^x(t)\mathrm{d}t$.

a) Justifier que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et calculer $F'(0)$.

b) En déduire la valeur de

$$\lim_{x \to 0} \left(\int_0^1 f^x(t)\mathrm{d}t\right)^{1/x}$$

Exercice 24.

Soit I un intervalle d'intérieur non vide de $\mathbb{R}$, $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et $u, v : I \to \mathbb{R}$ continues. Montrer que l'application

$$F : x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(x,t)\mathrm{d}t$$

est bien définie et continue sur I.