Chapitre 3

Espaces vectoriels normés

Dans tout ce chapitre, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, où $\mathbb{K}$ est le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, de dimension quelconque (finie ou infinie).

Selon le contexte, les éléments de E seront appelés *vecteurs* ou *points*. Cette distinction de langage est importante en analyse : les *points* sont "localisés" dans E et ne s'additionnent pas. Si une fonction f est définie sur E, $f(x)$ est l'image du *point* $x \in E$. Les *vecteurs* sont "délocalisés" et correspondent à des "déplacements". À ce titre, on peut les additionner. Mais on peut également additionner un *point* à un *vecteur*, ce qui donne un *point* : $x + \vec{u}$ est le point atteint en "partant" de x et en se "déplaçant" de $\vec{u}$. De façon équivalente, on peut soustraire deux *points*, ce qui donne un *vecteur* : $y - x$ est le *vecteur* correspondant au déplacement de x vers y.

(le cadre théorique permettant de réellement distinguer points et vecteurs, ie. *de façon mathématique, et non par une simple "interprétation", est celui des* espaces affines*)*

Révisions MP2I

Revoir les chapitres 22, 23, 26 (et le 53 qui anticipe déjà les notions de ce chapitre).

1 Norme sur un espace vectoriel.

1.1 Définition.

Une norme sur un espace vectoriel est une fonction permettant de mesurer la "longueur" des vecteurs, qui s'interprètent comme des "déplacements". La définition, axiomatique, reflète tout simplement 3 propriétés qu'on est intuitivement en droit d'attendre d'une telle notion.

Définition 1. On appelle *norme* sur l'espace vectoriel E toute application $N : E \to \mathbb{R}_+$ vérifiant les propriétés suivantes :

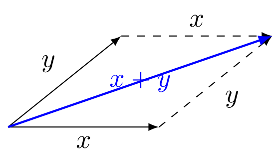
- *Séparation* : pour tout vecteur $x \in E$, $N(x) = 0 \Rightarrow x = 0$.
- *Homogenéité* : Pour tout vecteur $x \in E$, et pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$, $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$.
- *Inégalité triangulaire* : Pour tout $(x, y) \in E^2$, $N(x + y) \leqslant N(x) + N(y)$.

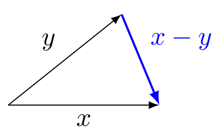
Si N est une norme sur E, on dit que (E, N) (ou plus simplement E, par abus de langage) est un *espace vectoriel normé* (e.v.n. en abrégé).

Remarques :

- Si F est un sous-espace vectoriel de E, et N une norme sur E, la restriction de N à F définit naturellement une norme sur F, qu'on note encore abusivement N.
- lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité, une norme est usuellement notée $\|\cdot\| : x \mapsto \|x\|$, et c'est ce que nous ferons à partir de la section 2. Si on utilise plusieurs normes sur le même espace, il faut bien sûr les distinguer par la notation.

La propriété d'*inégalité triangulaire* signifie qu'un déplacement "sans détour" est plus court. Géométriquement, dans un triangle, la longueur d'un côté est plus *courte* que la *somme* des longueurs des deux autres côtés. Cette inégalité sera au coeur de toutes les techniques de majorations.





Elle est équivalente à une "deuxième" *inégalité triangulaire*, très importante également en pratique, signifiant que la longueur d'un côté d'un triangle est plus *longue* que la *différence* des longueurs de deux autres côtés :

Proposition 1. *Si N est une norme E, on a pour tout $(x, y) \in E^2$:*

$$\big|N(x) - N(y)\big| \leqslant N(x - y)$$

Remarque : <u>Attention</u>, que ce soit dans l'une ou l'autre des deux inégalités triangulaires, on peut mettre aussi bien $N(x + y)$ que $N(x - y)$: les vecteurs n'ont pas de direction privilégiée ! On a ainsi pour tout x, y :

$$\big|N(x) - N(y)\big| \leqslant N(x \pm y) \leqslant N(x) + N(y).$$

Définition 2. Si (E, N) est un espace vectoriel normé, tout vecteur $x \in E$ tel que $N(x) = 1$ est appelé vecteur *unitaire*.

1.2 Distance associée, boules.

Définition 3. Soit N une norme sur E. L'application

$$d : \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ (x, y) & \longmapsto & N(y - x) \end{array}$$

est appelée appelée *distance associée* à N.

Remarque : dans cette définition, x et y s'interprétent géométriquement comme des *points* de E, et $x - y$ comme le vecteur "déplacement" de x à y. Les inégalités triangulaires se réécrivent dans ce contexte :

$$\big|\mathrm{d}(x, y) - \mathrm{d}(y, z)\big| \leqslant \mathrm{d}(x, z) \leqslant \mathrm{d}(x, y) + \mathrm{d}(y, z),$$

pour tous *points* $x, y, z \in E$.

Définition 4. Soit N une norme sur E, et d la distance associée. Pour tout point $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}_+$, on appelle :
- *boule ouverte* de centre a et de rayon r l'ensemble $B(a, r) = \big\{x \in E \;\big/\; \mathrm{d}(x, a) < r\big\}$.
- *boule fermée* de centre a et de rayon r l'ensemble $B_f(a, r) = \big\{x \in E \;\big/\; \mathrm{d}(x, a) \leqslant r\big\}$.
- *sphère* de centre a et de rayon r l'ensemble $S(a, r) = \big\{x \in E \;\big/\; \mathrm{d}(x, a) = r\big\}$.

Remarque : On a bien sûr $B_f(a, r) = B(a, r) \cup S(a, r)$, avec union disjointe.

Définition 5. Pour $a, b \in E$, on appelle *segment* d'extrémités a et b, l'ensemble

$$[a, b] = \big\{\lambda b + (1 - \lambda)a \,,\ \lambda \in [0, 1]\big\}$$

Remarque : Cela généralise la notion de segment de $\mathbb{R}$, mais sans tenir compte d'un ordre particulier entre les deux extrémités : on a ainsi $[a, b] = [b, a]$, pour $a, b \in E$ (il suffit de remplacer λ par $1 - \lambda$ dans la définition).

Définition 6. On dit qu'une partie A d'un espace vectoriel E est *convexe* lorsque :

$$\forall a, b \in A, \quad [a, b] \subset A$$

Exercice 1. Soit un intervalle I de $\mathbb{R}$ et une fonction $f : I \to \mathbb{R}$. On considère $A = \big\{(x, y) \in I \times \mathbb{R} \,|\, y \geqslant f(x)\big\}$ (appelé *épigraphe* de f). Montrer que f est convexe si, et seulement si, A est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$.

Proposition 2. *Si (E, N) est un espace vectoriel normé, les boules (ouvertes et fermées) de E sont des parties convexes.*

1.3 Objets bornés dans un e.v.n.

Dans ce paragraphe, on considère une norme N sur E. Elle permet de donner un sens précis à l'idée qu'une partie a une "étendue" finie ou infinie :

Définition 7. On dit qu'une partie quelconque A de E (E, N) est *bornée* lorsqu'il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $A \subset B_f(0, M)$, autrement dit lorsque :

$$\exists\, M \in \mathbb{R}_+^*\,,\ \forall\, x \in A\,,\ \ N(x) \leqslant M.$$

Remarques :
- Bien noter que cette propriété dépend en général de la norme N considérée.
- on obtient une définition équivalente en remplaçant $B_f(0, M)$ par $B(0, M)$. Cela revient à remplacer $N(x) \leqslant M$ par $N(x) < M$. On préfere cependant l'utilisation de l'inégalité large $\leqslant$ dans les majorations, car elle est "stable" par passage à la limite.
- En adoptant la *négation* de cette définition, on voit qu'une partie est *non bornée* lorsqu'elle contient des éléments arbitrairement "grands" :

$$\forall\, M \in \mathbb{R}_+^*\,,\ \exists\, x \in A,\ \ N(x) > M.$$

Dès lors qu'on sait ce qu'est une partie *bornée* dans E, on a une définition toute naturelle pour les *fonctions bornées* à valeurs dans E, et en particulier pour les *suites bornées* de E (une suite de E n'est rien d'autre qu'une fonction de $\mathbb{N}$ vers E) :

Définition 8. Relativement à la norme N sur E, on dit que :
- une application $f : X \to E$, où X est un ensemble quelconque, est *bornée* lorsque son image $f(E)$ est une partie bornée de E, ce qui se traduit par :

$$\exists\, M \in \mathbb{R}_+^*\,,\ \forall\, x \in X\,,\ \ N\big(f(x)\big) \leqslant M.$$

  On note $\mathcal{B}(X, E)$ l'ensemble des applications bornées de X vers E.
- une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de E est *bornée* lorsque l'ensemble $\{v_n, n \in \mathbb{N}\}$ est une partie bornée de E, ce qui se traduit par :

$$\exists\, M \in \mathbb{R}_+^*\,,\ \forall\, n \in \mathbb{N}\,,\ \ N\big(v_n\big) \leqslant M.$$

  On note $\mathcal{B}(\mathbb{N}, E)$ l'ensemble des suites bornées de E.

1.4 Norme associée à un produit scalaire

Revoir le chapitre de MP2I : "Espaces préhilbertiens réels". On rappelle ici les résultats les plus utiles par rapport à ce chapitre.

Définition 9. Soit E un espace préhilbertien réel. On appelle *norme euclidienne* associée au produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ l'application :

$$N : x \mapsto \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

Proposition 3. ***(inégalité de Cauchy-Schwarz)*** *Si $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur E et N la norme euclidienne associée, on a pour tout $x, y \in E$:*

$$\langle x, y\rangle \leqslant N(x)N(y)$$

avec égalité si, et seulement si, x et y sont colinéaires.

Proposition 4. *Une norme euclidienne est une norme.*

Tout espace préhilbertien réel est donc en particulier un espace vectoriel normé, en utilisant la norme associée au produit scalaire. Une telle norme euclidienne est souvent notée à l'aide de l'indice 2, comme N_2 ou $\|\cdot\|_2$.

1.5 Normes usuelles sur $\mathbb{K}^n$.

On suppose ici $E = \mathbb{K}^n$, avec $n \in \mathbb{N}^*$. Les normes présentées ici sont en fait valables sur n'importe quel espace vectoriel de dimension finie n, dès lors qu'on y a fixé une base $\mathcal{B}$: il suffit d'appliquer les formules suivantes aux coordonnées $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ de x dans cette base. On précise alors que la norme est *relative* à cette base.

Proposition 5. *Chacune des trois applications suivantes définit une norme sur $\mathbb{K}^n$:*

- $\|\cdot\|_1 : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{k=1}^{n} |x_k|$.
- $\|\cdot\|_2 : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}$.
- $\|\cdot\|_\infty : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \max\big\{|x_1|, \dots, |x_n|\big\}$.

On les appelle respectivement norme 1*,* norme 2*, et* norme infini.

Remarques :

- On notera que lorsque $n = 1$, chacun de ces trois exemples de norme n'est autre que $|\cdot|$ (valeur absolue sur $\mathbb{R}$, module sur $\mathbb{C}$).
- Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on reconnait en $\|\cdot\|_2$ la *norme euclidienne* associée au produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 2. Pour chacune de ces trois normes, dessiner la boule unité (boule de centre 0 et de rayon 1) de $\mathbb{R}^2$.

1.6 Normes classiques sur les espaces de fonctions

Proposition 6. *Soit X un ensemble quelconque non vide. L'ensemble $\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ des fonctions bornées de X vers $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et l'application :*

$$N_\infty^X : f \mapsto \sup_{x \in X} \big|f(x)\big|.$$

est une norme sur cet espace, appelée norme de la convergence uniforme

Remarques :

- On comprendra ce nom dans un chapitre ultérieur.
- On note le plus souvent $\|\cdot\|_\infty$ cette norme lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité sur l'ensemble X considéré.
- On peut généraliser cette proposition / définition à l'espace $\mathcal{B}(X, E)$ des fonctions bornées de X vers un espace vectoriel normé E quelconque.

Proposition 7. *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, et soit $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues de $[a, b]$ vers $\mathbb{K}$. Les deux applications suivantes sont des normes sur E, appelée respectivement* norme de la convergence en moyenne *et* norme de la convergence en moyenne quadratique *:*

- $N_1^{[a,b]} : f \mapsto \int_a^b |f(t)| \mathrm{d}t$
- $N_2^{[a,b]} : f \mapsto \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 \mathrm{d}t}$

Remarques :

- Là encore, on note plutôt ces normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ respectivement, lorsque le contexte indique clairement l'espace $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ en question
- Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la norme $\|\cdot\|_2$ de la convergence en moyenne quadratique est euclidienne, associée au produit scalaire :
$$(f, g) \mapsto \int_a^b f(t)g(t) \mathrm{d}t$$
- Puisque toute fonction continue sur un segment est bornée, l'espace $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ est un sous-espace de $\mathcal{B}([a, b], \mathbb{K})$ et la norme $N_\infty^{[a,b]}$ est donc utilisable.

2 Suites dans un espace vectoriel normé

Dans toute cette section, $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé, qu'on notera souvent simplement E.

2.1 Convergence et divergence d'une suite

Définition 10. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E, et soit $\ell \in E$. On dit que la suite $(x_n)_n$ *converge* vers ℓ lorsque la suite réelle positive $\big(\mathrm{d}(x_n, \ell)\big)_n$ converge vers 0. ℓ est alors appelée *limite* de la suite, et notée $\lim x_n$.

Remarque : Avec des quantificateurs, la convergence de $(x_n)_n$ vers ℓ s'écrit :

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\,,\ \forall\, n \in \mathbb{N}\,,\ n \geqslant n_0 \implies \|x_n - \ell\| \leqslant \varepsilon.$$

Définition 11. On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E est *convergente* lorsqu'il existe $\ell \in E$ tel que la suite converge vers ℓ. Une suite qui ne converge pas est dite *divergente*.

Proposition 8. *Si une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E est* convergente*, alors sa limite est unique.*

2.2 Opérations sur les suites convergentes

Les propriétés concernant les opérations (addition, multiplication) sur les suites vues en MP2I restent valables pour les suites à valeurs dans un espace vectoriels normé, tant que les opérations ont un sens. Tout peut être résumé par la proposition suivante :

Proposition 9. *Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de E, convergeant respectivement vers x et y, et soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{K}$ convergeant vers λ. Alors la suite $(x_n + \lambda_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $x + \lambda y$.*

Corollaire 1. *L'ensemble des suites convergentes de E est un sous-espace vectoriel de l'espace $E^{\mathbb{N}}$ des suites de E.*

2.3 Suites bornées

Proposition 10. *L'ensemble $\mathcal{B}(\mathbb{N}, E)$ des suites bornées de E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et l'application :*

$$N_\infty : (x_n)_n \mapsto \sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|$$

est une norme sur cet espace.

Notation : L'espace vectoriel normé $\big(\mathcal{B}(\mathbb{N}, E), N_\infty\big)$ est noté plus communément $\ell^\infty(E)$.

Proposition 11. *Si une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E est* convergente*, alors elle est bornée. De plus, la suite $(\|x_n\|)_n$ est alors convergente et $\lim \|x_n\| = \|\lim x_n\|$.*

Remarque : Autrement dit, l'espace des suites convergentes de $(E, \|\cdot\|)$ est un sous-espace vectoriel de $\ell^\infty(E)$.

2.4 Suites extraites et valeurs d'adhérence

N'hésitez pas à revoir ici le cours de MP2I à propos des suites extraites, pour les suites réelles ou complexes. On ne fait que généraliser cette notion ici.

Définition 12. Soit $(x_n)_n$ une suite de E. On appelle *suite extraite* ou *sous-suite* de $(x_n)_n$ toute suite à valeurs dans E de la forme $(x_{\varphi(n)})_n$ où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante.

Remarque : Pour $\varphi : n \mapsto 2n$ et $\varphi : n \mapsto 2n + 1$ on obtient les suites $(x_{2n})_n$ et (x_{2n+1}) appelées respectivement suites extraites (des termes de rang) pairs et impairs.

Définition 13. Soit $(x_n)_n$ une suite de E. On dit que $x \in E$ est une *valeur d'adhérence* de $(x_n)_n$ lorsqu'il existe une suite extraite $(x_{\varphi(n)})_n$ de E qui converge vers x.

Proposition 12. *Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de E convergente, de limite ℓ, alors toute suite extraite converge vers ℓ.*

Corollaire 2. *Toute suite convergente possède une et une seule valeur d'adhérence : sa limite.*

Remarque : La réciproque est fausse : une suite peut très bien avoir une et une seule valeur d'adhérence et diverger (trouver un exemple).

Corollaire 3. *Toute suite ayant au moins deux valeurs d'adhérence est divergente.*

Proposition 13. *Si les suites extraites paires $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et impaires $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite $\ell \in E$, alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.*

2.5 Comparaison de normes

La définition de la convergence d'une suite de E fait explicitement appelle à une norme $\|\cdot\|$. Or, comme on l'a vu à la proposition 5, différentes normes sont envisageables sur un espace vectoriel donné (une infinité en fait). La définition qui suit donne une condition portant sur deux normes permettant d'utiliser indifféremment l'une ou l'autre.

Définition 14. On dit qu'une norme N est équivalente à une norme N' sur E lorsqu'il existe deux réels $\alpha, \beta > 0$ tels que :

$$\forall x \in E, \quad \alpha N(x) \leqslant N'(x) \leqslant \beta N(x)$$

Proposition 14. *La relation binaire précédente est une relation d'équivalence sur l'ensemble des normes de E.*

Les deux résultats qui suivent signifient que le caractère borné (d'une partie ou d'une fonction) et la convergence d'une suite ne dépend pas du choix d'une norme ou d'une autre lorsqu'elle sont équivalentes.

Proposition 15. *Si N et N' sont deux normes équivalentes sur E, alors une partie A de E est bornée dans (E, N) si, et seulement si, elle est bornée dans (E, N').*

Corollaire 4. *Pour deux normes équivalentes N et N' sur E :*
- *une fonction $f : X \to E$ est bornée pour N si, et seulement si, elle est bornée pour N'*
- *Une suite $(x_n)_n$ de E est bornée pour N si, et seulement si, elle est bornée pour N'.*

Proposition 16. *Si N et N' sont deux normes équivalentes sur E, alors toute suite $(x_n)_n$ de E convergente dans (E, N) est convergente dans (E, N') avec la même limite.*

Remarque : Cette proposition donne un critère pratique pour montrer que deux normes N et N' ne sont pas équivalentes : il suffit de trouver une suite qui converge vers 0_E pour N mais par pour N'.

Exemple : Dans $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ on considère la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in [0,1], \quad f_n(t) = t^n$$

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:
- $\|f_n\|_1 = \dfrac{1}{n+1}$
- $\|f_n\|_2 = \sqrt{\dfrac{1}{2n+1}}$
- $\|f_n\|_\infty = 1$

On en déduit que (f_n) converge vers la fonction nulle pour $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$, mais pas pour $\|\cdot\|_\infty$: Les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ ne sont donc pas équivalentes à $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 3. $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont-elles équivalentes sur $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$?

Proposition 17. *Les normes* $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ *et* $\|\cdot\|_\infty$ *sur* $\mathbb{K}^n$ *sont équivalentes deux à deux.*

Remarques :
- Pour tout $x \in \mathbb{K}^n$, on pourra retenir (ou retrouver) la suite d'inégalités :

$$\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_1 \leqslant \sqrt{n}\|x\|_2 \leqslant n\|x\|_\infty$$

- Plus généralement, toutes les normes sont équivalentes en dimension finie ! Ce résultat sera abordé au chapitre suivant, mais on peut d'ores et déjà le retenir et l'utiliser.

3 Topologie d'un espace vectoriel normé

La *topologie* est une branche des mathématiques concernant l'étude de la notion de *continuité* dans un cadre très général. Les objets essentiels d'un espace dit *topologique* sont les parties de cet espace appelées *ouvertes* et *fermées*. Une norme sur un espace vectoriel permet de définir de façon naturelle de telles parties, qui généralisent les notions déjà connues sur $\mathbb{R}$ d'intervalles *ouverts* ou *fermés*.

Dans toute cette section, $(E, \|\cdot\|)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

3.1 Voisinage d'un point

Intuitivement une partie V de E est un voisinage d'un point $a \in E$ lorsqu'elle contient tous les points "autour" de a et "assez proche" de a.

Définition 15. Soit $a \in E$ et $V \subset E$. On dit que V est un *voisinage* de a lorsqu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(a, \varepsilon) \subset V$.

Exercice 4. Soit $a \in E$. On note $\mathcal{V}(a)$ l'ensemble des voisinages de a. Traduire en français et montrer :

a) $E \in \mathcal{V}(a)$

b) $\forall V \in \mathcal{V}(a),\ a \in V$

c) $\forall A \in \mathcal{P}(E), \quad (\exists V \in \mathcal{V}(a), V \subset A) \Rightarrow A \in \mathcal{V}(a)$.

d) $V \in \mathcal{V}(a) \ \Leftrightarrow\ \exists \varepsilon > 0,\ B_f(a, \varepsilon) \subset V$

3.2 Ouverts d'un espace vectoriel normé

Définition 16. Une partie A de E est un *ouvert* (ou une *partie ouverte*) de E lorsqu'elle est voisinage de chacun de ses points :

$$\forall x \in A, \quad \exists \varepsilon > 0, \quad B(x, \varepsilon) \subset A$$

L'ensemble de tous les ouverts de E est appelée la *topologie* de E.

Un ouvert s'interprète donc comme une partie dont chaque point a la propriété de "rester" dans cette partie si on le "déplace un peu".

Exemple :
- E est une partie ouverte ;
- $\varnothing$ est une partie ouverte (il n'y a aucun point donc rien à vérifier !)
- les intervalles ouverts sont des parties ouvertes de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$

Exercice 5. Montrer que toute boule ouverte de E est un ouvert.

Proposition 18. *Soit* $(A_i)_{i\in I}$ *une famille d'ouverts de* E*. Alors :*
- $\bigcup_{i\in I} A_i$ *est un ouvert.*
- ***si*** I ***est fini,*** $\bigcap_{i\in I} A_i$ *est ouvert.*

Remarque : Une intersection quelconque d'ouverts n'est pas forcément ouvert. Contre-exemple :
- $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}]0, 1 + \frac{1}{n}[=]0, 1]$ n'est pas ouvert dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ (ce n'est pas un voisinage de 1).
- $\bigcap_{r>0} B(a, r) = \{a\}$ pour tout $a \in E$, qui n'est clairement pas un voisinage de a.

3.3 Fermés d'un espace vectoriel normé

Définition 17. Une partie F de E est un *fermé* (ou une *partie fermée*) de E lorsque son complémentaire F^c est un ouvert de E.

Exemple :
- E et $\varnothing$ sont des partie fermées ;
- les intervalles fermés sont des parties fermées de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$

Remarques :
- Attention, une partie peut très bien être ni ouverte, ni fermée ! En fait, en un certain sens, c'est le cas pour la "plupart" des parties de E.
- A contrario, une partie peut très bien être à la fois ouverte et fermée, mais on peut montrer cependant que seuls E et $\varnothing$ vérifient cette propriété.
- Ne pas confondre fermé et borné : ce sont deux notions bien distinctes et tout à fait "indépendantes". Par exemple $[0; +\infty[$ est un fermé non borné tandis que $[0, 1[$ est borné mais non fermé.

Exercice 6. Montrer que toute boule fermée de E est un fermé. Montrer que toute sphère de E est un fermé.

Proposition 19. *Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille de fermés de E. Alors :*
- *$\bigcap_{i \in I} F_i$ est un fermé.*
- ***si I est fini, $\bigcup_{i \in I} F_i$ est fermé.***

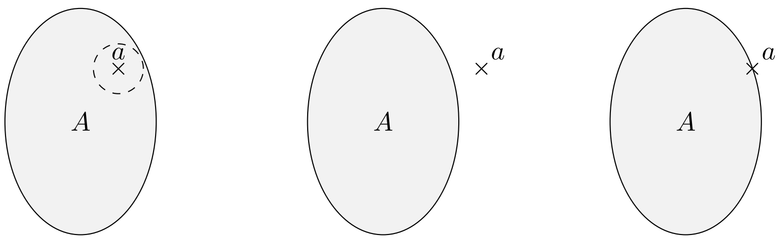
Remarque : Une réunion quelconque de fermés n'est pas forcément un fermé. Contre-exemple :
- $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} [0, 1 - \frac{1}{n}] = [0, 1[$ n'est pas fermé dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ (1 n'est pas voisinage de son complémentaire).
- $\bigcup_{0 \leqslant r < 1} B_f(a, r) = B(a, 1)$ pour tout $a \in E$. *(vérifier que la boule ouverte $B(a, 1)$ n'est pas un fermé !)*

3.4 Intérieur d'une partie

Intuitivement, un point est *intérieur* à une partie, lorsque son *voisinage* immédiat est encore dans cette partie. Cela revient à dire que cette partie est un voisinage du point.

Définition 18. Soit A une partie de E, et $a \in E$. On dit que a est un point *intérieur* à A lorsqu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(a, \varepsilon) \subset A$.

Remarque : On retrouve la même condition que dans la définition d'un voisinage : a est intérieur à A si, et seulement si, A est un voisinage de a.



a intérieur a pas intérieur a pas intérieur

En particulier, un point intérieur à A est forcément dans A, mais la réciproque est fausse, sauf si A un ouvert, comme on va le voir ci-dessous.

Définition 19. Soit A une partie de E. On appelle *intérieur* de A et on note $\mathring{A}$, l'ensemble de tous les points intérieurs à A.

Proposition 20. *Pour $A \subset E$, $\mathring{A}$ est la réunion de tous les ouverts contenus dans A.*

Remarque : Autrement dit, $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert (au sens de l'inclusion) contenu dans A.

Proposition 21. *Soit $A, B \subset E$.*

a) $A \subset B \Rightarrow \mathring{A} \subset \mathring{B}$.

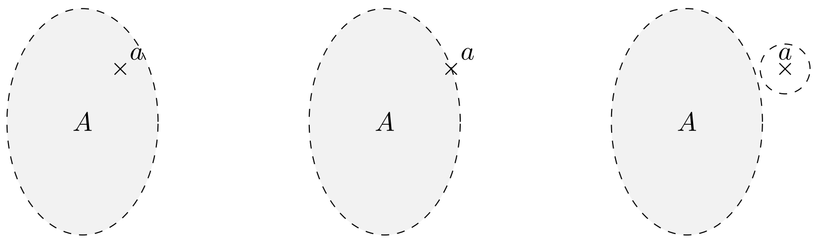
b) $\mathring{A} \subset A$ *avec égalité si, et seulement si, A est ouvert*

c) $\mathring{\mathring{A}} = \mathring{A}$

3.5 Adhérence d'une partie

Intuitivement, un point est *adhérent* à une partie lorsqu'il lui est est "collé", *ie.* lorsque son *voisinage* immédiat "rencontre" forcément cette partie :

Définition 20. Soit A une partie de E et $a \in E$. On dit que a est un point *adhérent* à A lorsque pour tout $r > 0$, $B(a, r) \cap A \neq \varnothing$.



a adhérent a adhérent a pas adhérent

Une bonne façon d'interpréter le fait qu'un point a est adhérent à A est de considérer sa "distance" à A : elle doit être nulle. On peut donner un sens précis à cette idée.

Définition 21. Pour une partie non vide A de E et $a \in E$, on appelle *distance* de a à A le réel positif :

$$\mathrm{d}(a, A) = \inf_{x \in A} \mathrm{d}(a, x) = \inf_{x \in A} \|x - a\|$$

Proposition 22. *Pour $A \subset E$ non vide, un point $a \in E$ est adhérent à A si, et seulement si,* $\mathrm{d}(a, A) = 0$.

Un point de A est forcément adhérent à A, mais la réciproque est fausse, sauf si A est fermé :

Définition 22. Soit A une partie de E. On appelle *adhérence* de A et on note $\overline{A}$, l'ensemble de tous les points adhérents à A.

Proposition 23. *Pour $A \subset E$, $\overline{A}$ est l'intersection de tous les fermés contenant A.*

Remarque : Autrement dit, $\overline{A}$ est le plus petit fermé (au sens de l'inclusion) contenant A.

Proposition 24. *Soit $A, B \subset E$.*

a) $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$.

b) $A \subset \overline{A}$ *avec égalité si, et seulement si, A est fermé*

c) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$

3.6 Intérieur vs adhérence, frontière

Proposition 25. *Pour toute partie A de E on a :*
- $(\overline{A})^c = (A^c)^\circ$
- $(\mathring{A})^c = \overline{A^c}$

Remarque : On peut en déduire que pour $A \subset E$ et $a \in E$:
- a est intérieur à A si, et seulement si, a n'est pas adhérent à A^c.
- a est adhérent à A si, et seulement si, a n'est pas intérieur à A^c.

Définition 23. Soit A une partie de E et $a \in E$. On dit que a est un *point frontière* lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \quad B(a, \varepsilon) \cap A \neq \varnothing \ \textbf{ET} \ B(a, \varepsilon) \cap A^c \neq \varnothing$$

On appelle *frontière* de A et on note $\mathrm{Fr}(A)$ l'ensemble des points frontière de A.

Remarque : Pour une partie A de E, on a donc $\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \cap \overline{A^c} = \overline{A} \backslash \mathring{A}$.
En particulier, $\mathrm{Fr}(A)$ est une partie fermée.

Exemple :
- Pour $a \in E$ et $r > 0$, les deux boules $B(a,r)$ et $B_f(a,r)$ ont comme frontière la sphère $S(a,r)$.
- Dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, $\mathrm{Fr}([0,1[) = \{0,1\}$

3.7 Caractérisation séquentielle de l'adhérence et des fermés

Proposition 26. *Soit A une partie de E.*

a) *$a \in E$ est adhérent à A si, et seulement si, il existe une suite de A qui converge vers a.*

b) *A est fermée si, et seulement si, toute suite de A qui converge dans E a sa limite dans A.*

Remarque : Les parties fermées de E sont donc précisément les parties stables par une opération de passage à la limite pour les suites : elles ne peuvent pas "s'échapper".

Le fait d'avoir une caractérisation de l'adhérence, et donc des fermés, par des suites convergente permet d'affirmer simplement le résultat suivant :

Proposition 27. *Si $\|\cdot\|'$ est une norme équivalente à $\|\cdot\|$, $(E, \|\cdot\|)$ et $(E, \|\cdot\|')$ ont la même topologie.*

Remarques :
- Pour deux normes équivalentes, on a donc les mêmes ouverts, mêmes fermés, mêmes intérieur et adhérence pour une partie, même ensemble de voisinages pour un point.
- Attention, les boules (ouvertes et fermées) ne sont cependant pas les mêmes !

3.8 Densité

Définition 24. On dit qu'une partie A de E est *dense* dans E lorsque $\overline{A} = E$.

Proposition 28. *Soit A une partie de E. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) A est dense dans E

(ii) Pour toute partie ouverte non vide Ω, on a $A \cap \Omega \neq \varnothing$.

(iii) Pour tout $a \in E$, il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers a.

Exemple : $\mathbb{Q}$ et son complémentaire $\mathbb{Q}^c$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

3.9 Parties compactes

Définition 25. Soit $K \subset E$. On dit que K est un *compact* de E, ou une partie *compacte* de E, lorsque toute suite de K admet une sous-suite convergente vers un élément de K.

Remarques :
- Cela revient donc à dire que toute suite de K admet au moins une valeur d'adhérence dans K.
- Cette définition correspond à ce qu'on appelle la propriété de Bolzano-Weierstrass : il y a un rapport avec le théorème du même nom (voir plus loin).

Exercice 7. Montrer que toute partie finie de E est une partie compacte.

Proposition 29. *Soit K un compact de E et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de K. Alors la suite $(u_n)_n$ converge si, et seulement si, elle admet une unique valeur d'adhérence.*

Remarque : Rappelons qu'une suite peut très bien en général avoir une unique valeur d'adhérence et diverger.

Proposition 30. *Si K est une partie compacte de E, alors K est fermée et bornée.*

Remarque : Attention, la réciproque n'est pas vraie en général. On verra qu'elle l'est en dimension finie.

Proposition 31. *Si K est une partie compacte de E et F un fermé, alors $F \cap K$ est compact.*