

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

АКУСТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Л. М. Бреховских

ВОЛНЫ
В СЛОЙСТЫХ СРЕДАХ

*Издание второе,
дополненное и переработанное*



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

МОСКВА

1973

Волны в слоистых средах. Бrehovskikh L. M. Izd-vo «Наука»
1973.

Монография посвящена распространению волн в атмосфере, магнитном поле Земли, в океане, твердой коре и т.д. Во второе издание монографии (первое вышло в 1957 г.) включен ряд вопросов, получивших актуальность в последние годы.

Монография дополнена теорией распространения звуковых и электромагнитных волн в волноводах, свойства которых меняются со временем распространения. Существенно расширена теория каустических и т.д., применение в теории звуковых и электромагнитных полей. Совершенствование теории включает изложение асимптотических методов в теории волн.

Книга рассчитана на физиков и геофизиков.
Илл. 174, табл. 4, библ. 270 наим.

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

В предлагаемой монографии дается систематическое изложение теории распространения упругих и электромагнитных волн в слоистых средах. Значительная часть изложенного материала принадлежит автору и была ранее опубликована в ряде журнальных статей. Результаты других авторов я также старался излагать по возможности в духе собственных представлений, благодаря чему удалось избегнуть методического «разнобоя». Кроме того, я в первую очередь стремился сделать ясной для читателя физическую картину рассматриваемых явлений. Что же касается математической строгости, то возможно, что она не всюду оказалась достигнутой в достаточной степени. Последнему способствовала также боязнь сделать изложение слишком громоздким.

Принятое в книге одновременное изложение теории распространения как упругих, так и электромагнитных волн оказалось весьма целесообразным ввиду общности применяемых в обоих случаях математических методов. Не малое значение имеет и то обстоятельство, что в результате совместного изложения одни области обогащаются методами, применяемыми в других. Так, например, метод импеданса, разработанный в акустике и радиотехнике, с успехом применяется при расчетах многослойного просветления оптических систем и интерференционных фильтров.

Библиография, приведенная в конце книги, является сравнительно полной, но далеко не исчерпывающей.

Приношу глубокую благодарность В. А. Полянской и Н. Ф. Трещетенковой, оказавшим большую помощь в проверке формул и подготовке рукописи к печати.

Л. Браговских

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Во второе издание включено изложение ряда новых вопросов. К ним относятся, в частности, теория волновода в среде, где скорость распространения волн $c = c(x, z)$ зависит от двух координат. Теория приповерхностного волновода и волны шепчущих галерей (включая случай твердого тела), эталонные уравнения и эталонные интегралы, дифракционные лучи и т. д. Изложение других вопросов, как, например, теория каустик, значительно расширено. С другой стороны, часть материала, касающаяся подводного звукового канала, не представляющая общего интереса, исключена. Значительно более полное изложение этого и смежных вопросов содержится в подготовленной в настоящее время автором с его сотрудниками специальной монографии по батисферической акустике. Остальной материал несколько сокращен за счет более современного метода изложения. Библиография существенно увеличена.

Автор приносит глубокую благодарность И. Ф. Трешетенковой за большую помощь при подготовке второго издания книги.

Л. Бре́жевский

ПЛОСКИЕ ВОЛНЫ В ДИСКРЕТНО-СЛОИСТЫХ СРЕДАХ

Плоская гармоническая волна является простейшим видом волнового процесса. В этой главе мы рассмотрим отражение и преломление таких волн на плоских границах раздела сред.

Волновые поля весьма общего вида могут быть представлены в виде суммы плоских гармонических волн. Для этого требуется лишь, чтобы функции, описывающие временное и пространственное изменение поля, допускали представления в виде соответственных интегралов Фурье. Поэтому результаты, полученные в этой главе, нами будут широко использоваться в дальнейшем и, в частности, при анализе отражения ограниченных волновых пучков и сферических волн.

§ 1. Плоские волны в однородных бесграницных средах

1.1. Основные понятия и определения. Плоская волна представляет собой простейший вид волнового движения. Наиболее общим ее аналитическим выражением является функция

$$F\left(\frac{n_x x + n_y y + n_z z}{c} - t\right), \quad (1.1)$$

где n_x, n_y, n_z — три числа, удовлетворяющие условию $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$ и являющиеся проекциями на оси координат единичного вектора нормали к фронту волны, т. е. к плоскости, на которой аргумент функции в (1.1) остается постоянным.

Функция (1.1) является решением волнового уравнения

$$\Delta F - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0, \quad \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (1.2)$$

Она описывает некоторое возмущение, распространяющееся в среде со скоростью c . Форма волны, определяемая видом F , остается в процессе распространения неизменной.

В физике и технике весьма широко распространен так называемый спектральный метод изучения волновых и колебательных явлений, которым в дальнейшем будем пользоваться и мы. Этот метод позволяет свести анализ поведения волны весьма произвольной формы в случаях, когда верен принцип суперпозиции, к анализу поведения простейших, «гармонических» волн.

В выражении (1.1) обозначим

$$\xi = (n_x x + n_y y + n_z z)/c - t$$

и представим функцию $F(\xi)$ в виде вещественной части интеграла Фурье

$$F(\xi) = \operatorname{Re} \int_0^\infty \Phi(\omega) e^{i\omega\xi} d\omega. \quad (1.3)$$

Поскольку вещественная часть любого комплексного числа может быть записана в виде $\operatorname{Re} a = (a + a^*)/2$, то

$$F(\xi) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \Phi(\omega) e^{i\omega\xi} d\omega + \frac{1}{2} \int_0^\infty \Phi^*(\omega) e^{-i\omega\xi} d\omega. \quad (1.3a)$$

Умножим это выражение на $e^{-i\omega\xi} d\xi$ и проинтегрируем по ξ от $-\infty$ до $+\infty$. Тогда для функции спектральной плотности нетрудно получить *

$$\Phi(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi) e^{-i\omega\xi} d\xi. \quad (1.4)$$

Подынтегральная функция в (1.3), соответствующая определенному значению ω

$$f(\omega, x, y, z) = \Phi(\omega) e^{i\omega\xi} = \Phi(\omega) \exp \left[i\omega \left(\frac{n_x x + n_y y + n_z z}{c} - t \right) \right], \quad (1.5)$$

представляет собой плоскую гармоническую волну.

Здесь мы пользуемся комплексным видом записи как интеграла Фурье, так и выражения для отдельной гармонической волны. Физический смысл нужно придавать лишь вещественной части соответствующих выражений. Поэтому в конечном счете гармоническая плоская волна должна быть записана в виде вещественной части выражения (1.5), т. е.

$$A(\omega) \cos [(n_x x + n_y y + n_z z)/\omega c - \omega t + \varphi(\omega)], \quad (1.6)$$

при этом комплексную в общем случае функцию $\Phi(\omega)$ при переходе от (1.5) к (1.6) мы представили в виде

$$\Phi(\omega) = A(\omega) e^{i\varphi(\omega)}.$$

Обычно обозначают

$$\omega/c = k = 2\pi/\lambda, \quad kn_x = k_x, \quad kn_y = k_y, \quad kn_z = k_z,$$

где k , k_x , k_y , k_z — соответственно модуль волнового вектора (волновое число) и его составляющие по осям координат, λ — длина волны. Тогда выражение (1.5) записывается в виде **

$$f = [\Phi(\omega)] \exp i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t) = \Phi(\omega) \exp i(kr - \omega t). \quad (1.7)$$

Поскольку дифференцирование функции такого вида по t сводится к ее умножению на $-i\omega$, волновое уравнение для f записывается в виде

$$\Delta f + k^2 f = 0. \quad (1.8)$$

К широкому распространению спектрального подхода к волновым явлениям привели следующие его особенности:

1) сравнительная простота анализа поведения каждой из гармонических волн;

2) возможность разложения любого волнового процесса на гармонические волны в случаях, когда верен принцип суперпозиции;

3) весьма высокая монохроматичность многих употребляемых на практике излучателей, вследствие чего излучаемые ими волны близки к гармоническим.

* Вывод формулы (1.4) становится элементарным, если воспользоваться функцией Дирака $2\pi\delta(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} d\xi$ и учесть ее основное свойство $\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x) \delta(x) dx = \Phi(0)$, где $\Phi(0)$ — непрерывная в нуле функция.

** Часто встречающиеся ниже выражения $\exp(i\varphi)$ мы для простоты записываем как $\exp i\varphi$.

Разложение сложного волнового процесса на гармонические волны и сведение задачи к уравнению (1.8), где частота считается уже заданной, является наиболее удобным методом анализа в случае наличия дисперсии (скорость с является функцией ω). Уравнение же (1.2) в этом случае попросту не имеет смысла ввиду неясности смысла величины c .

В дальнейшем мы будем рассматривать почти исключительно гармонические волны (1.7), составляя из них в тех случаях, когда это нужно, волновые возмущения более сложных видов.

1.2. Неоднородные плоские волны. Существует интересное обобщение выражения для плоской гармонической волны (1.7), важное для дальнейшего изложения. Выше указывалось, что k_x, k_y, k_z представляют собой компоненты волнового вектора по осям координат. При этом предполагалось, что в качестве таких величин можно взять любую тройку вещественных чисел, удовлетворяющих соотношению

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2. \quad (1.9)$$

Откажемся теперь от наглядности при трактовке этих чисел и предположим, что совокупность k_x, k_y, k_z является тройкой комплексных чисел

$$k_x = k'_x + ik''_x, \quad k_y = k'_y + ik''_y, \quad k_z = k'_z + ik''_z \quad (1.10)$$

При этом мы снова потребуем удовлетворения равенства (1.9) при вещественном значении $k = \omega/c$. Тогда выражение (1.7) по-прежнему будет удовлетворять волновому уравнению (1.8).

Посмотрим, что будет представлять собой волна, описываемая выражением (1.7) с комплексными k_x, k_y, k_z . Подставляя (1.10) в (1.7), получаем

$$f_i = \Phi(\omega) \exp [i(k'_x x' + k'_y y' + k'_z z') - i(\omega t)] - (k''_x x + k''_y y + k''_z z). \quad (1.11)$$

Это выражение описывает волну с переменной амплитудой. Плоскости постоянной амплитуды задаются уравнением

$$k''_x x + k''_y y + k''_z z = C_1, \quad (1.12)$$

а плоскости постоянных фаз уравнением

$$k'_x x + k'_y y + k'_z z = C_2, \quad (1.13)$$

где C_1 и C_2 — постоянные величины. Можно показать, что плоскости равных фаз ортогональны плоскостям равных амплитуд. Действительно, подставляя (1.10) в (1.9) и приравнивая мнимые части обеих частей равенства, получаем

$$k'_x k''_x + k'_y k''_y + k'_z k''_z = 0.$$

Это равенство выражает собой условие ортогональности семейств плоскостей (1.12) и (1.13).

Волну вида (1.11) обычно называют *неоднородной плоской волной*. Эта волна распространяется в направлении, задаваемом вектором \mathbf{k}' (k'_x, k'_y, k'_z) и имеет амплитуду, убывающую в одном из перпендикулярных направлений.

Соответствующим выбором системы координат всегда можно добиться того, чтобы $k_y = k''_y = 0$. Тогда, как и для обычных плоских волн, можно ввести некоторый угол ϑ и положить

$$k_x = k \sin \vartheta, \quad k_z = k \cos \vartheta. \quad (1.14)$$

При комплексных k_x и k_z угол ϑ также будет комплексным.

Рассмотрим, например, случай $\vartheta = \pi/2 - i\alpha$, где α — вещественно. Из (1.14) получаем $k_x = k \operatorname{ch} \alpha$, $k_z = ik \operatorname{sh} \alpha$, и выражение (1.7) для плоской волны запишется

$$f = \Phi(\omega) \exp [ik \operatorname{ch} \alpha \cdot x - k \operatorname{sh} \alpha \cdot z - i\omega t]. \quad (1.15)$$

Эта волна распространяется в направлении x и экспоненциально убывает в направлении z . Скорость распространения волны, как следует из (1.15), равна $c_x \equiv \omega/k_x = c/\operatorname{ch} \alpha$, т. е. всегда меньше скорости с распространения обычной плоской волны. Длина волны соответственно равняется $2\pi/k \operatorname{ch} \alpha = \lambda/\operatorname{ch} \alpha$, т. е. меньше длины обычной волны при той же частоте. Чем больше α , тем меньше длина волны и тем больше коэффициент затухания волны в направлении оси z .

Все сказанное относилось к случаю отсутствия в среде поглощения волны (вещественное k). Введение понятия о неоднородных волнах при наличии поглощения не представляет принципиальных трудностей. При этом плоскости равных фаз и равных амплитуд уже не будут перпендикулярны друг другу.

Заметим также, что, введение понятия о неоднородных плоских волнах для бесконечного пространства не является законным, так как нарушается требование ограниченности поля на бесконечности. В дальнейшем мы будем пользоваться этим понятием в случае полубесконечных сред.

Кстати, забегая несколько вперед, укажем, что при преломлении плоских волн на границах раздела сред неоднородные плоские волны могут превращаться в обычные плоские волны и наоборот. Это непосредственно видно из закона преломления

$$n \sin \vartheta_1 = \sin \vartheta, \quad (1.16)$$

где n — показатель преломления, ϑ — угол падения, ϑ_1 — угол преломления.

Если $n < 1$ и $\sin \vartheta > n$, то из (1.16) следует, что $\sin \vartheta_1 > 1$, т. е. ϑ_1 комплексно, и преломленная волна является неоднородной. Этот случай реализуется при полном внутреннем отражении волн.

Наоборот, если $\sin \vartheta > 1$, т. е. падающая волна неоднородна, но $\sin \vartheta < n$ (в этом случае, конечно, $n > 1$), то получаем $\sin \vartheta_1 < 1$, т. е. преломленная волна будет обычной однородной. Ниже оба эти случая нам встретятся в § 32, где рассматривается преломление сферических волн. Сферическая волна может быть разложена на совокупность плоских волн, включая и неоднородные плоские волны.

§ 2. Отражение плоской звуковой волны от границы раздела сред

2.1. Коэффициенты отражения и прозрачности. Звуковое поле будем характеризовать давлением $p = p(x, y, z, t)$. В случае гармонической волны и однородной среды колебательная скорость частиц в звуковой волне записывается [55]

$$\mathbf{v} = (\operatorname{grad} p) / i\omega\rho. \quad (2.1)$$

При этом мы предполагаем, как всюду в этой книге, что временная зависимость дается фактором $\exp(-i\omega t)$. Этот фактор для сокращения записи мы, как правило, будем опускать.

Пусть плоская звуковая волна падает на плоскую границу $z = 0$ раздела двух жидких или газообразных сред (рис. 2.1). Плоскость падения волны совместим с плоскостью xz и тогда

$$k_x = k \sin \vartheta, \quad k_y = 0, \quad k_z = k \cos \vartheta, \quad k = \omega/c, \quad (2.2)$$

где ϑ — угол падения волны, составляемый нормалью к фронту волны с осью z . Плотность верхней и нижней сред обозначаем соответственно через ρ и ρ_1 , а скорость звука в них через c и c_1 .

Примем амплитуду падающей волны условно за единицу и обозначим коэффициент отражения волны через V . Тогда выражения для падающей и

отраженной волне записывается *

$$p_{\text{пад}} = e^{ik(x \sin \theta - z \cos \theta)}, \quad p_{\text{отр}} = V e^{ik(x \sin \theta + z \cos \theta)}. \quad (2.3)$$

Полное поле в верхней среде будет

$$p = p_{\text{пад}} + p_{\text{отр}} = (e^{-ikz \cos \theta} + V e^{ikz \cos \theta}) e^{ikx \sin \theta}. \quad (2.4)$$

Преломленная волна в нижней среде записывается в виде **

$$p_1 = W e^{ik_1(x \sin \theta_1 - z \cos \theta_1)}, \quad k_1 = \frac{\omega}{c_1}, \quad (2.5)$$

где θ_1 — угол преломления, а коэффициент W мы назовем коэффициентом прозрачности. Величины θ_1 , V и W определяются из условий на границе. Они заключаются [55] в непрерывности p и v_z — нормальной к границе компоненты скорости частиц среды. В дальнейшем мы часто будем использовать понятие импеданса ***

$$Z = -(p/v_z). \quad (2.6)$$

Поскольку p и v_z непрерывны при переходе через границу, то непрерывным будет и Z . Поэтому мы будем пользоваться граничными условиями, записанными в виде

$$z = 0, \quad [p] = 0, \quad [Z] = 0, \quad (2.7)$$

где квадратная скобка означает разность значений соответственной величины по обе стороны границы ****.

Подставляя выражения (2.4) и (2.5) в первое из этих условий, получаем

$$1 + V = W e^{i(k_1 \sin \theta_1 - k \sin \theta) x} \quad (2.8)$$

Поскольку здесь левая часть не зависит от x , не должна зависеть от x и правая часть, откуда следует закон преломления Снеллиуса

$$k \sin \theta = k_1 \sin \theta_1. \quad (2.9)$$

Это соотношение выражает равенство фазовых скоростей распространения волн вдоль границы в нижней и верхней средах. Его можно записать также в виде

$$\sin \theta / \sin \theta_1 = n, \quad (2.10)$$

где $n \equiv k_1/k = c/c_1$ — показатель преломления.

Теперь (2.8) принимает вид

$$1 + V = W. \quad (2.11)$$

* В выражениях (2.3) — (2.4) уже учтено, что для выполнения условий непрерывности на границе след волны $p_{\text{пад}}$ и $p_{\text{отр}}$ должен бежать вдоль границы с одинаковой скоростью.

** При вещественном $\cos \theta_1$ волна (2.5) дает поток энергии в нижней среде в направлении от границы, как и должно быть по физическому смыслу. При этом мы неявно предполагаем, что в случае диспергирующих сред ($c_1 = c_1(\omega)$) направление распространения фазы волны и потока энергии одинаково. В принципе возможен случай, когда эти две скорости имеют разные знаки (один возможный пример этого впервые, по-видимому, был указан Л. И. Мандельштамом). Тогда в нижней среде поле надо было бы брать в виде $p_1 = W \exp[i k_1 (x \sin \theta_1 + z \cos \theta_1)]$, т. е. в виде волны, распространяющейся из бесконечности к границе. Только в этом случае поток энергии был бы направлен по-прежнему от границы.

*** Не надо придавать особого значения знаку минус в определении Z . Он сменился бы на плюс, если бы мы взяли обратное направление для оси z .

**** В случае абсолютно отражающих границ, например, при $Z_1 = 0$ или $Z_1 = \infty$ вместо двух граничных условий (2.7) будем иметь одно, соответственно $(p_1)_{z=0} = 0$ или $(v_z)_{z=0} = 0$.

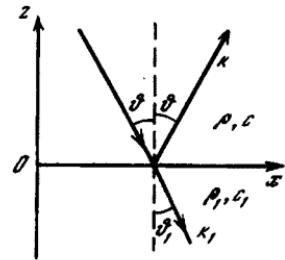


Рис. 2.1. Отражение и преломление звуковой волны

Обратимся теперь к условию непрерывности импедансов. С помощью (2.1) и (2.5) находим для импеданса в нижней среде при произвольном z :

$$Z_1 = -i\omega\rho_1 p_1 (\partial p_1 / \partial z)^{-1} = \rho_1 c_1 / \cos \theta_1 \quad (2.12)$$

— величину, не зависящую от z .

В верхней среде, используя выражение (2.4) для импеданса, получаем

$$Z = \frac{\rho c}{\cos \theta} (e^{-ikz \cos \theta} + V e^{ikz \cos \theta}) / (e^{-ikz \cos \theta} - V e^{ikz \cos \theta}) \quad (2.13)$$

— величину, зависящую от z . При $z = 0$ она должна совпадать с (2.12), что дает

$$(1 + V)/(1 - V) = \frac{\cos \theta}{\rho c} Z_1. \quad (2.14)$$

Отсюда находим

$$V = \frac{Z_1 \cos \theta - \rho c}{Z_1 \cos \theta + \rho c}. \quad (2.15)$$

Как мы увидим в дальнейшем, эта формула справедлива для коэффициента отражения от произвольного слоистого полупространства, если только найден его «входной» импеданс Z_1 . В рассматриваемом простейшем случае однородного полупространства, используя формулу (2.12) для Z_1 , находим

$$V = \frac{m \cos \theta - n \cos \theta_1}{m \cos \theta + n \cos \theta_1}, \quad m \equiv \frac{\rho_1}{\rho} \quad (2.16)$$

или при учете (2.10)

$$V = \frac{m \cos \theta - \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}}{m \cos \theta + \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}}. \quad (2.17)$$

Отметим также, что если обозначить через $Z = \rho c / \cos \theta$ импеданс падающей волны, то формула (2.15) запишется в виде

$$V = \frac{Z_1 - Z}{Z_1 + Z} \quad (2.18)$$

— формула, хорошо известная в теории длинных линий.

Рассмотрим некоторые частные случаи. При нормальном падении волны на границу ($\theta = \theta_1 = 0$) имеем $V = (m - n)(m + n) = (\rho_1 c_1 - \rho c) / (\rho_1 c_1 + \rho c)$. При скользящем падении в пределе при $\theta \rightarrow \pi/2$ получаем $V \rightarrow -1$. При угле θ , удовлетворяющем условию $m \cos \theta - \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta} = 0$ коэффициент отражения обращается в нуль. Это случай полной прозрачности границы. Из последнего равенства находим для угла полной прозрачности

$$\sin \theta = \sqrt{\frac{m^2 - n^2}{m^2 - 1}}. \quad (2.19)$$

Далеко не при любом соотношении параметров сред, θ в (2.19) будет вещественным углом. Для этого, как видно из (2.19), необходимо выполнение условия $0 \leq (m^2 - n^2) / (m^2 - 1) \leq 1$. Отсюда следует, что при $m > 1$ должно быть $1 < n \leq m$, а при $m < 1$ должно быть $1 > n \geq m$.

В случае равенства скоростей $c_1 = c_2$ ($n = 1$) коэффициент отражения оказывается независящим от угла

$$V = (\rho_1 - \rho) / (\rho_1 + \rho). \quad (2.20)$$

2.2. Полное внутреннее отражение. В случае $n < 1$ ($c_1 > c$) и углах падения, превышающих критический угол $\theta_0 = \arcsin n$, имеет место полное

внутреннее отражение. Действительно, в этом случае (2.17) можно записать *

$$V = \frac{m \cos \theta - i \sqrt{\sin^2 \theta - n^2}}{m \cos \theta + i \sqrt{\sin^2 \theta - n^2}}. \quad (2.21)$$

Мы видим, что в этом случае $|V| = 1$, т. е. отражение полное. Если же положить $V = \exp(i\phi)$, где ϕ — изменение фазы волны при отражении, то из (2.21) находим

$$\phi = -2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\sin^2 \theta - n^2}}{m \cos \theta}. \quad (2.22)$$

Зависимость фазы коэффициента отражения от угла падения, как мы увидим ниже (§§ 14, 15), обуславливает весьма интересные явления при отражении ограниченных пучков лучей, а также ограниченных во времени импульсов.

При полном внутреннем отражении поле в нижней среде согласно (2.5), (2.9) и (2.11) запишется

$$z < 0, \quad p_1 = (1+V)e^{i\delta z} e^{ikx \sin \theta}, \quad \delta = k \sqrt{\sin^2 \theta - n^2}, \quad (2.23)$$

т. е. представляет собой неоднородную волну с амплитудой, экспоненциально затухающей при удалении от границы. Импеданс Z_1 согласно (2.12) при этом будет

$$Z_1 = -i\omega p_1/\delta. \quad (2.24)$$

Так как импеданс оказывается мнимым, то можно сказать, что при полном внутреннем отражении граница представляет для падающей волны чисто реактивное (индуктивное) сопротивление. В обычном случае ($\cos \theta_1$ — веществен) сопротивление границы чисто активное.

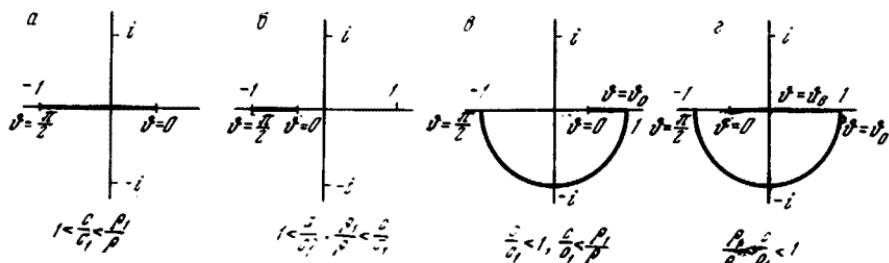


Рис. 2.2. Коэффициент отражения на комплексной плоскости для различных соотношений параметров сред

Коэффициент отражения V можно изобразить на комплексной плоскости. Откладывая по осям абсцисс и ординат соответственно его вещественную и мнимую части, мы получаем для различных соотношений параметров сред (случаи а), б), в) и г), изображенные на рис. 2.2. В случаях а) и б) ($n > 1$) коэффициент отражения веществен. Поэтому его значения, соответствующие различным значениям θ , укладываются на отрезок прямой, лежащей на вещественной оси. При этом в случае а) при некотором значении угла падения θ коэффициент отражения обращается в нуль, в то время как в случае б) он при всех значениях $0 \leq \theta \leq \pi/2$ отрицателен и в нуль не обращается.

Случаи в) и г), ($n < 1$) соответствуют наличию полного внутреннего отражения. Здесь при $\theta > \theta_0 = \arcsin n$ точки, соответствующие комплексным

*Знак корня в (2.17) надо выбирать из условия $\operatorname{Im} \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta} > 0$. Действительно, этот корень появился в (2.17) при замене в (2.16) $n \cos \theta_1 = \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}$. С другой стороны, из условия ограниченности p_1 в (2.5) при $z \rightarrow -\infty$ следует, что $\operatorname{Im} k_1 \cos \theta = -k l m(n \cos \theta_1) > 0$. Это правило выбора знака учтено в (2.21), где (как и всюду ниже) корень $\sqrt{\sin^2 \theta - n^2}$ при вещественных n предполагается положительным.

значениям коэффициента отражения, лежат на полуокружности с радиусом 1. Это наглядно показывает, что коэффициент отражения равен единице по модулю; при изменении же θ меняется лишь его фаза.

Отражение не может быть *полным*, если в нижней среде имеется поглощение звуковой энергии, как это часто и бывает в действительности. Формально наличие поглощения можно учесть, предполагая n (или k_1) комплексным. Мы положим $n = n_0(1 + i\alpha)$, $\alpha > 0$. Обозначим, кроме того, $\sin^2 \theta - n_0^2(1 - \alpha^2) \equiv A$, $2n_0^2\alpha \equiv B$. Тогда $\sqrt{\sin^2 \theta - n^2} = \sqrt{A - iB} = M_1 - iM_2$, где $M_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{A^2 + B^2} \pm A}$.

Значения квадратных корней всюду берутся положительными. Для коэффициента отражения из (2.17) будем иметь $V = \frac{m \cos \theta - M_2 - iM_1}{m \cos \theta + M_2 + iM_1}$. Откуда для модуля и фазы получаем соответственно

$$|V| = \left[\frac{(m \cos \theta - M_2)^2 + M_1^2}{(m \cos \theta + M_2)^2 + M_1^2} \right]^{1/2}, \quad (2.25)$$

$$\Phi = \operatorname{arctg} \frac{2M_1 \cos \theta}{m^2 \cos^2 \theta - M_1^2 - M_2^2}. \quad (2.26)$$

На рис. 2.3 изображена зависимость $|V|$ от угла θ при $n_0 = 0,83$; $m = 2,7$; $\alpha = 0; 0,01; 0,1$. Этот случай приблизительно соответствует отражению волны на границе вода — уплотненный морской песок при разных предположениях относительно поглощения в песке. Мы видим, что при $\alpha = 0,1$

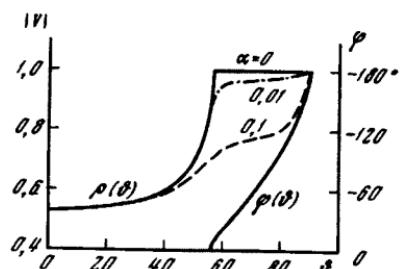


Рис. 2.3. Модуль и фаза коэффициента отражения при $m = \rho_1/\rho = 2,7$; $n = c/c_1 = 0,83$ и разных значениях α

$|V|$ существенно отличается от единицы при всех углах падения, кроме $\theta = \pi/2$. На этом же рисунке изображена и фаза $\phi(\theta)$ для случая $\alpha = 0$. Заметим, что формулы (2.25) и (2.26) справедливы также и при $n_0 > 1$.

2.3. Энергетические соотношения. Как видно из формулы (2.11), давление в прошедшей волне будет в $1 + V$ раз больше, чем в падающей. Возьмем для примера отражение звуковой волны на границе воздух — вода при нормальном падении ее из воздуха. Здесь $\rho = 1,3 \cdot 10^{-3} \text{ г/см}^3$, $\rho_1 = 1 \text{ г/см}^3$, $c = 333 \text{ м/сек}$, $c_1 = 1500 \text{ м/сек}$. По формуле (2.18) получаем $V \approx 1$. Таким образом, амплитуда давления в воде будет в два раза превышать амплитуду давления в падающей волне.

Наоборот, если волна падает из воды на границу ее с воздухом, то, меняя местами c и c_1 , ρ и ρ_1 в (2.18), находим, учитывая малость отношения $\rho c / \rho_1 c_1$,

$$V = \frac{\rho c - \rho_1 c_1}{\rho c + \rho_1 c_1} \approx -1 + 2 \frac{\rho c}{\rho_1 c_1} \approx -1,$$

$$W = |1 + V| \approx 2\rho c / \rho_1 c_1 \approx 5,8 \cdot 10^{-4},$$

т. е. коэффициент отражения близок к -1 , а амплитуда давления в прошедшей волне близка к нулю. Таким образом, при переходе звуковой волны из одной среды в другую и обратно отсутствует симметрия по отношению к значениям звукового давления. Однако мы сейчас покажем, что такая симметрия

существует по отношению к нормальным к границе компонентам плотности потока энергии.

В падающей волне плотность потока энергии равна (см. § 14.6) $p^2/2\rho c$, а ее проекция на ось z будет $I = (p^2/2\rho c) \cos \theta$. Аналогичная величина в прошедшей волне: $I_1 = (p_1^2/2\rho_1 c_1) \cos \theta_1$. Их отношение будет $\frac{I_1}{I} = \frac{\rho c}{\rho_1 c_1} \frac{\cos \theta_1}{\cos \theta} \frac{p_1^2}{p^2}$, но $p_1/p = 1 + V$, а пользуясь выражением (2.16) для V , мы получаем

$$\frac{I_1}{I} = 4 \frac{\cos \theta}{\rho c} \frac{\cos \theta_1}{\rho_1 c_1} \left[\frac{\cos \theta}{\rho c} + \frac{\cos \theta_1}{\rho_1 c_1} \right]^{-2}. \quad (2.27)$$

Последнее выражение симметрично по отношению к величинам, относящимся к верхней и нижней средам, и поэтому не меняется при изменении хода волны на обратное.

2.4. Локально реагирующие поверхности. Упрощение граничных условий. Могут быть случаи, когда импеданс границы Z_1 не зависит от угла падения. В частности, допустим, что скорость звука в нижней среде много меньше, чем в верхней ($n = c/c_1 \gg 1$). Тогда, используя закон преломления (2.10), получаем $\cos \theta_1 = \sqrt{1 - n^2 \sin^2 \theta} \approx 1$, а для импеданса (2.12) находим $Z_1 \approx \rho_1 c_1$ — постоянная величина.

В таких случаях можно сразу упростить задачу об отражении, не рассматривая поля в нижней среде, а вместо двух граничных условий (2.7) брать только одно, вытекающее из равенства импедансов на границе

$$-(p/v_z)_{z=0} = Z_1, \quad (2.28)$$

или, воспользовавшись (2.1),

$$z = 0, \quad (\partial p / \partial z) + \gamma p = 0, \quad \gamma \equiv i\omega\rho/Z_1. \quad (2.29)$$

Условие (2.29) иногда называют граничным условием третьего рода* или импедансным граничным условием. Для задачи об отражении плоской волны переход от двух граничных условий к одному не имеет особой важности, так как формула (2.15), полученная довольно простым способом, справедлива и без ограничения постоянства Z_1 . В более сложных дифракционных задачах, когда граница или фронт волны не плоские, переход к импедансному условию иногда может сильно упростить задачу.

Существует один интересный случай, когда импеданс Z_1 является постоянным не приближенно, а точно. Пусть звуковая волна падает на границу $z = 0$, ниже которой расположена совокупность узких канавок глубины h , заканчивающихся неподатливой границей $z = -h$ (гребенчатая структура, рис. 2.4).

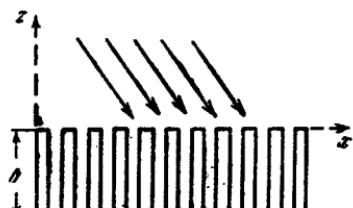


Рис. 2.4. К определению импеданса гребенчатой структуры

Ширину канавок будем считать малой как по сравнению с длиной волны, так и с глубиной h . Найдем импеданс Z_1 этой гребенчатой структуры в плоскости $z = 0$, который по формуле (2.15) будет определять коэффициент отражения плоской волны. Падающая звуковая волна будет возбуждать в канавках плоские волны (как в узких трубах), бегущие в них в обоих на-

*Границные (краевые) условия первого и второго родов соответствуют $p = 0$ или $\partial p / \partial z = 0$ на границе.

правлениях. Мы будем пренебрегать потерями энергии из-за трения на стенах. Тогда звуковое давление в каждой трубке можно записать

$$p_1 = A e^{ikz} + B e^{-ikz}. \quad (2.30)$$

Нормальная скорость на дне канавки должна быть равна нулю, т. е.

$$v_z = -h, \quad \partial p_1 / \partial z = 0. \quad (2.31)$$

Подстановка сюда p_1 из (2.30) дает

$$A = B e^{2ikh} \quad (2.32)$$

Учитывая это равенство, для импеданса на границе $z = 0$ получаем согласно (2.6) и (2.1)

$$Z_1 = -i\omega\rho \left(p_1 \left| \frac{\partial p_1}{\partial z} \right. \right)_{z=0} = \rho c (1 + e^{2ikh}) / (1 - e^{2ikh}) = i\rho c \operatorname{ctg} kh \quad (2.33)$$

— величину, не зависящую от θ .

Импедансные граничные условия широко используются в архитектурной акустике. Звукопоглощающий материал с открытыми вертикальными порами имеет не зависящий от угла падения импеданс по той же причине, что и гребенчатая структура. Вообще, пользование таким импедансом законно во всех случаях, когда звуковое возмущение в среде не передается вдоль ее границы. Поэтому нормальная скорость в каждой точке поверхности будет вполне определяться значением давления в этой точке. Поверхности раздела сред, удовлетворяющие этому условию, называются локально реагирующими поверхностями.

В гребенчатой структуре передача возмущения вдоль границы невозможна из-за наличия стенок трубок. В случае преломления волны на границе двух однородных полупространств, когда $c_1 \gg c$, возмущение не передается по нижнему полупространству вдоль границы потому, что преломленная волна уходит от границы почти нормально.

2.5. Поверхностные волны. Поверхностной волной в полупространстве $z > 0$, распространяющейся вдоль его границы $z = 0$, называют волну

$$p = e^{-az} e^{i(\xi x - \omega t)}, \quad \xi^2 - x^2 = k^2. \quad (2.34)$$

Как мы видим, она относится к классу неоднородных волн, рассмотренных в § 1.

Звуковое давление в поверхностной волне экспоненциально убывает при удалении от границы. Фазовая скорость волны вдоль границы равна

$$c_x = \frac{\omega}{\xi} = \frac{\omega}{\sqrt{k^2 + \alpha^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 + (\alpha/k)^2}}, \quad (2.35)$$

т. е. меньше, чем скорость звука c в свободном пространстве. По этой причине поверхностные волны часто называют также замедленными волнами.

Поверхностная волна (2.34) может существовать далеко не во всех случаях. Она, например, не может существовать, если граница $z = 0$ является неподатливой стенкой. Действительно, на стенке должно выполняться условие $v_z = 0$ или $(\frac{\partial p}{\partial z})_{z=0} = 0$, которому не удовлетворяет выражение (2.34).

По другому можно сказать, что импедансы волны и границы в этом случае не согласованы. Действительно, импеданс волны (2.34) при $z = 0$ равен

$$Z = -(p/v_z)_{z=0} = -i\omega\rho \left(p \left| \frac{\partial p}{\partial z} \right. \right)_{z=0} = \frac{i\omega\rho}{\alpha}. \quad (2.36)$$

Импеданс же неподатливой стенки, поскольку на ней $v_z = 0$, равняется бесконечности.

Обозначим импеданс границы, как и раньше, через Z_1 . Условие согласования импедансов волны и границы будет

$$Z_1 = i\omega\rho/\alpha. \quad (2.37)$$

Следовательно, импеданс границы должен быть реактивным с преобладанием упругости *. Физически граница с таким импедансом может быть осуществлена различными путями. В частности, рассмотренная выше ребристая структура, как видно из (2.38), обладает таким импедансом. При этом необходимо лишь, чтобы $\operatorname{tg} kh > 0$, т. е. kh должно быть заключено в одном из следующих интервалов $(0, \pi/2)$, $(\pi, 3\pi/2)$ и т. д. Подставляя (2.33) в (2.37), мы находим основную характеристику поверхностной волны в случае ребристой структуры:

$$\alpha = k \operatorname{tg} kh. \quad (2.38)$$

Условие существования поверхностных волн можно найти и другим более формальным путем, обращаясь к изложенному в 2.1 решению задачи об отражении плоской волны. В выражении (2.15) для коэффициента отражения мы можем при определенных условиях иметь

$$Z_1 \cos \vartheta + i pc = 0. \quad (2.39)$$

При этом V обращается в бесконечность, что означает, что при стремлении амплитуды падающей волны к нулю амплитуда отраженной волны будет конечна.

При положительно мнимом Z_1 из (2.39) получаем $\cos \vartheta = i pc / |Z_1|$. Как видно из (2.3), отраженная волна $p_{\text{отр}}$ будет при этом иметь характер поверхностной волны.

§ 3. Отражение от плоского слоя и системы слоев

3.1. Входной импеданс слоя. Коэффициенты отражения и прозрачности. Представим себе, что на плоский слой толщины d (рис. 3.1) падает под произвольным углом плоская звуковая волна. Среде, из которой падает волна, слою и среде, в которую проходит волна, мы присвоим соответственно номера 3, 2, 1. Углы, образуемые направлением распространения волны в каждой из сред с нормалью к границам слоя, обозначим соответственно через ϑ_3 , ϑ_2 , ϑ_1 . Плоскость падения волны снова будем считать совмещенной с плоскостью xy .

Чтобы найти коэффициент отражения от слоя, достаточно найти «входной импеданс» слоя $Z_{\text{вх}}$, т. е. импеданс на границе 23. Тогда V будет даваться согласно (2.15) формулой

$$V = \frac{Z_{\text{вх}} \cos \vartheta_3 - p_{3c3}}{Z_{\text{вх}} \cos \vartheta_3 + p_{3c3}} = \frac{Z_{\text{вх}} - Z_3}{Z_{\text{вх}} + Z_3}, \quad (3.1)$$

где

$$Z_3 = \rho_3 c_3 / \cos \vartheta_3 \quad (3.2)$$

— импеданс для плоской волны в среде 3. Найдем $Z_{\text{вх}}$, учитывая, что импеданс Z_1 в плоскости $z = 0$ нам известен (формула (2.12)).

В результате многократных отражений на границах слоя внутри последнего образуются две результирующие волны с разными направлениями распространения, симметричными по отношению к плоскости $z = \text{const}$ (рис. 3.1). Поэтому выражение для звукового давления в слое можно записать в виде

$$p_3 = (A e^{-ik_2 z} + B e^{ik_2 z}) e^{ik_3 x}, \quad k_{2x}^2 + k_{2z}^2 = k_2^2, \quad k_3 = \omega / c_3, \quad (3.3)$$

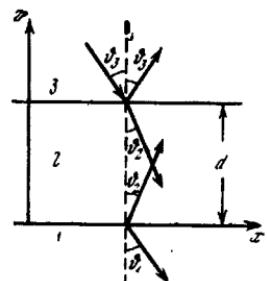


Рис. 3.1. К вопросу об отражении плоской волны от слоя

*Невозможность распространения поверхностной волны вдоль твердой стенки вытекает также из того, что, как можно показать, в поверхностной волне не сбалансировано среднее за период количества потенциальной и кинетической энергий. В ней имеется излишек кинетической энергии. Отсюда и ясно, почему импеданс границы должен иметь характер упругости.

где A и B — пока неопределенные постоянные. Для z — компоненты скорости v_2 в слое получаем, подставляя p_2 в (2.1),

$$v_{2z} = \frac{1}{i\omega p_2} \frac{\partial p_2}{\partial z} = \frac{k_{2z}}{\omega p_2} (Be^{ik_{2z}z} - Ae^{-ik_{2z}z}) e^{ik_{2x}x}. \quad (3.4)$$

Из непрерывности импеданса на границе $z = 0$ имеем

$$-(p_2/v_{2z})_{z=0} = Z_1, \quad (3.5)$$

где Z_1 дается формулой (2.12). Подставляя сюда выражения для p_2 и v_{2z} , получаем

$$\frac{B}{A} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}, \quad (3.6)$$

где через

$$Z_2 \equiv \omega p_2/k_{2z} = \rho_2 c_2 / \cos \vartheta_2 \quad (3.7)$$

обозначен импеданс плоской волны в среде 2. Входной импеданс на верхней границе слоя $z = d$ будет по определению

$$Z_{bx} = -(p_2/v_{2z})_{z=d}. \quad (3.8)$$

Подставляя сюда (3.3) и (3.4) и учитывая (3.6), находим

$$Z_{bx} = \frac{Z_1 - iZ_2 \operatorname{tg} k_{2z}d}{Z_2 - iZ_1 \operatorname{tg} k_{2z}d} Z_2. \quad (3.9)$$

Мы получили важную формулу, позволяющую пересчитывать импеданс с одной границы слоя на другую.

Подставляя теперь (3.9) в (3.1), мы получаем для коэффициента отражения от слоя

$$V = \frac{(Z_1 + Z_2)(Z_2 - Z_3)e^{-ik_{2z}d} + (Z_1 - Z_3)(Z_2 + Z_3)e^{ik_{2z}d}}{(Z_1 + Z_2)(Z_2 + Z_3)e^{-ik_{2z}d} + (Z_1 - Z_3)(Z_2 - Z_3)e^{ik_{2z}d}}. \quad (3.10)$$

В выражения для Z_1 , Z_2 входят углы ϑ_1 , ϑ_2 , которые связаны с углом падения ϑ_3 законом преломления, аналогичным (2.9):

$$k_1 \sin \vartheta_1 = k_2 \sin \vartheta_2 = k_3 \sin \vartheta_3. \quad (3.11)$$

В частном случае, когда импедансы крайних сред одинаковы ($Z_3 = Z_1$), формула (3.10) может быть записана в виде

$$V = \frac{Z_2^2 - Z_1^2}{Z_1^2 + Z_2^2 + 2iZ_1 Z_2 \operatorname{ctg} k_{2z}d}. \quad (3.12)$$

С другой стороны, если толщина слоя $d \rightarrow 0$, то из (3.10) получаем

$$V = \frac{Z_1 - Z_3}{Z_1 + Z_3}$$

— коэффициент отражения на границе однородных полупространств 1 и 3 (ср. с формулой (2.18)).

Обратимся теперь к прошедшей волне в среде 1. Ее выражение будет снова даваться формулой (2.5), где необходимо найти коэффициент W .

Из условия непрерывности звукового давления при переходе через границу $z = 0$ имеем $(p_2 - p_1)_{z=0} = 0$ или, подставляя сюда (2.5) и (3.3), получаем

$$A + B = W. \quad (3.13)$$

Экспоненты $\exp ik_{2x}x$ и $\exp ik_{1x}x$ сокращаются, так как согласно закону преломления (3.11) $k_{1x} = k_{2x}$. Аналогично, условие непрерывности звукового

давления на границе $z = d$ записывается:

$$1 + V = (p_2)_{z=d} = Ae^{-ik_{2z}d} + Be^{ik_{2z}d}, \quad (3.14)$$

где слева стоит сумма звуковых давлений в падающей и отраженной волнах. Поделив (3.13) на (3.14) и воспользовавшись формулой (3.6), находим

$$W = \frac{1 + V}{\cos k_{2z}d - i(Z_2/Z_1) \sin k_{2z}d}. \quad (3.15)$$

При $d \rightarrow 0$ мы получаем формулу (2.11). При подстановке выражения (3.10) для V в (3.15) находим

$$W = \frac{4Z_1Z_2}{(Z_1 - Z_2)(Z_2 - Z_0)e^{ik_{2z}d} + (Z_1 + Z_2)(Z_2 + Z_0)e^{-ik_{2z}d}}. \quad (3.16)$$

3.2. Другой вывод выражения для коэффициента отражения. Результирующую отраженную от слоя (рис. 3.1) плоскую волну можно рассматривать как суперпозицию следующих волн: а) волны, отраженной от верхней границы слоя (граница 23); б) волны, проникшей через верхнюю границу, прошедшей через слой, отразившейся затем от нижней границы (граница 12), прошедшей снова через слой и, наконец, вышедшей из слоя через его верхнюю границу; в) волны, проникшей в слой, имеющей два отражения от нижней границы, одно — от верхней, прошедшей два раза туда и обратно по слою и снова вышедшей из слоя и т. д. Комплексные амплитуды с учетом набега фазы в слое всех этих волн будут (снова предполагается, что амплитуда падающей волны равна единице)

- a) V_{32} ,
- б) $W_{32} V_{21} W_{23} \exp(2ik_{2z}d)$,
- в) $W_{32} V_{21} V_{23} V_{12} W_{23} \exp(4ik_{2z}d)$,

где W_{ij} и V_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) означают соответственно коэффициент прозрачности и коэффициент отражения при падении волны на границу (ij) из среды i . Используя результаты § 2 (см. формулы (2.18) и (2.11)), мы имеем

$$W_{32} = \frac{Z_j - Z_i}{Z_j + Z_i}, \quad V_{j|i} = -V_{i|j}, \quad W_{i;j} = 1 + V_{ij}, \quad W_{j;i} = 1 - V_{ij}. \quad (3.18)$$

Смысл отдельных множителей в (3.17), например, в случае в), следующий. Множитель W_{32} дает уменьшение амплитуды волны при прохождении границы (32), V_{12} — ее уменьшение при отражении от нижней границы слоя и т. д. Наконец, множитель W_{23} учитывает ослабление волны при ее обратном выходе из слоя в верхнюю среду. Множитель $\exp(4ik_{2z}d)$ учитывает набег фазы волны (и имевшее при этом место ослабление, если k_{2z} имеет минимую часть) при двукратном пробеге волны по слою туда и обратно.

Суммируя все волны, из которых формируется общая отраженная волна, мы получаем для амплитуды этой волны $V_{32} + W_{32}V_{21}W_{23} \exp(2ik_{2z}d) + W_{32}V_{23}V_{21}W_{23} \exp(4ik_{2z}d) + W_{32}V_{23}^2V_{21}W_{23} \exp(6ik_{2z}d) + \dots$

Поскольку амплитуда падающей волны принята за единицу, последнее выражение представляет собой одновременно и коэффициент отражения от слоя. Как нетрудно заметить, оно может быть записано в виде $V = V_{32} + W_{32}W_{23}V_{21} \exp(2ik_{2z}d) \sum_{n=0}^{\infty} [V_{23}V_{21} \exp(2ik_{2z}d)]^n$ или, пользуясь формулой бесконечной геометрической прогрессии,

$$V = V_{32} + \frac{W_{32}W_{23}V_{21} \exp(2ik_{2z}d)}{1 - V_{23}V_{21} \exp(2ik_{2z}d)}. \quad (3.19)$$

Запись здесь в согласии с (3.18)

$$V_{23} = -V_{32}, \quad W_{32} = 1 + V_{32}, \quad W_{23} = 1 - V_{32},$$

получаем после несложных преобразований

$$V = \frac{V_{21} + V_{31}e^{\frac{2ik_{2z}}{d}}}{1 + V_{21}V_{31}e^{\frac{2ik_{2z}}{d}}}. \quad (3.20)$$

Точно таким же образом, суммируя все прошедшие волны, мы получаем для коэффициента прозрачности слоя

$$W = \frac{4Z_1Z_2}{(Z_1 + Z_2)(Z_2 + Z_3)} \frac{1}{e^{-ik_{2z}d} + V_{21}V_{31}e^{ik_{2z}d}}. \quad (3.21)$$

Читатель может убедиться самостоятельно, что при подстановке в последнюю формулу выражений для V_{31} и V_{21} , следующих из (3.18), мы получаем выражения для V и W , тождественно совпадающие с (3.10) и (3.16).

3.3. Некоторые частные случаи. Полуволновой слой. Пусть набег фазы волны на толщине слоя будет равен целому числу полупериодов, т. е.

$$k_{2z}d = m\pi, \quad m = 1, 2, \dots \quad (3.22)$$

При нормальном падении это означает, что

$$d = m\lambda_z/2. \quad (3.22')$$

Подставляя (3.21) в (3.9), мы получаем для входного импеданса слоя $Z_{bx} = Z_1$, а следовательно, для коэффициента отражения, согласно (3.1): $V = (Z_1 - Z_3)/(Z_1 + Z_3) = V_{31}$.

Таким образом, полувлновой слой не оказывает никакого действия на падающую волну. Коэффициент отражения при этом такой же, как и просто при отражении на границе сред (31), как если бы эти среды непосредственно соприкасались друг с другом. В частности, если эти среды имеют одинаковые импедансы ($Z_1 = Z_3$), то коэффициент отражения равен нулю.

Это свойство полувлнового слоя позволяет использовать его как фильтр частот или направлений. В первом случае, при падении на слой немонохроматической плоской волны, после прохождения слоя по амплитуде будет подчеркнута волна с k_2 , удовлетворяющим условию (3.21). Во втором случае, при падении на слой волн различных направлений (но одинаковой частоты), за слоем будет сильнее всего выражена волна, для которой θ_2 удовлетворяет условию (3.21). Впрочем, о применении слоистых систем как фильтров см. подробнее главу III.

Четвертьвлновой просветляющий слой. Пусть теперь $k_{2z}d = \pi/2$. При нормальном падении это $d = \lambda_z/4$. Формула (3.9) дает при этом для входного импеданса $Z_{bx} = Z_2^2/Z_1$. Следовательно, коэффициент отражения, согласно (3.1), будет

$$V = (Z_2^2 - Z_1Z_3)/(Z_2^2 + Z_1Z_3). \quad (3.23)$$

Полное прохождение ($V = 0$) будет иметь место при

$$Z_2 = \sqrt{Z_1Z_3}. \quad (3.24)$$

Таким образом, отражение монохроматической волны на границе двух любых сред можно целиком ликвидировать, поместив между ними четвертьвлновой слой с импедансом, равным среднему геометрическому импедансов этих сред. Аналогичное явление будет наблюдаться при $k_{2z}d = 3\pi/2, 5\pi/2$ и т. д.

3.4. Учет поглощения в средах. При наличии поглощения в средах выражения для коэффициента отражения V и коэффициента прозрачности W по-прежнему будут даваться формулами (3.20) и (3.21), причем наличие поглощения учитывается чисто формально тем, что волновые числа k_1 , k_2 и k_3 в каждой из сред будут комплексными.

В силу соотношения (3.11) углы преломления θ_2 и θ_1 будут комплексными даже при вещественном θ_3 . Комплексными будут также импедансы сред Z_1 , Z_2 , Z_3 , а также, естественно, и коэффициенты отражения V_{32} и V_{21} на обеих границах слоя.

Обозначим

$$2k_z d = 2k_z d \cos \theta_3 = \alpha + i\beta, \quad (3.25)$$

$$Z_j = \gamma_j + i\delta_j, \quad j = 1, 2, 3, \quad V_{32} = \rho_{32} \exp i\varphi_{32}, \quad V_{21} = \rho_{21} \exp i\varphi_{21}. \quad (3.26)$$

Из (3.18) можно получить

$$\rho_{32}^2 = \frac{(\gamma_3 - \gamma_2)^2 + (\delta_3 - \delta_2)^2}{(\gamma_3 + \gamma_2)^2 + (\delta_3 + \delta_2)^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi_{32} = \frac{2(\delta_2 \gamma_3 - \delta_3 \gamma_2)}{\gamma_2^2 - \gamma_3^2 + \delta_2^2 - \delta_3^2} \quad (3.27)$$

и аналогично для ρ_{21}^2 и $\operatorname{tg} \varphi_{21}$ с соответственной заменой индексов. Теперь из (3.20) получаем для модуля и фазы коэффициента отражения $V = \rho \exp i\varphi$ путем элементарных операций

$$\rho^2 = \frac{\rho_{32}^2 + 2\rho_{32}\rho_{21}e^{-\beta} \cos(\varphi_{21} - \varphi_{32} + \alpha) + \rho_{21}^2 e^{-2\beta}}{1 + \rho_{32}^2 \rho_{21}^2 e^{-2\beta} + 2\rho_{32}\rho_{21}e^{-\beta} \cos(\varphi_{21} + \varphi_{32} + \alpha)}, \quad \varphi = A - B + \varphi_{32}, \quad (3.28)$$

где

$$A = \operatorname{arctg} \frac{\rho_{32}e^{-\beta} \sin(\varphi_{21} - \varphi_{32} + \alpha)}{\rho_{32} + \rho_{32}e^{-\beta} \cos(\varphi_{21} - \varphi_{32} + \alpha)}, \quad B = \operatorname{arctg} \frac{\rho_{32}\rho_{21}e^{-\beta} \sin(\varphi_{21} + \varphi_{32} + \alpha)}{1 + \rho_{32}\rho_{21}e^{-\beta} \cos(\varphi_{21} + \varphi_{32} + \alpha)}. \quad (3.29)$$

Таким же образом для модуля и фазы коэффициента прозрачности $W = \eta \exp i\psi$ получаем

$$\eta^2 = 16(\gamma_2^2 + \delta_2^2)(\gamma_1^2 + \delta_1^2) D \exp(-\beta/2),$$

$$1/D = [(\gamma_1 + \gamma_2)^2 + (\delta_1 + \delta_2)^2] [(\gamma_2 + \gamma_3)^2 + (\delta_2 + \delta_3)^2] \times \quad (3.30) \\ \times [1 + 2\rho_{32}\rho_{21} \exp(-\beta) \cos(\varphi_{21} + \varphi_{32} + \alpha) + \rho_{32}^2 \rho_{21}^2 \exp(-2\beta)],$$

$$\psi = \frac{\alpha}{2} + \operatorname{arc tg} \frac{\gamma_1 \delta_2 + \delta_1 \gamma_2}{\gamma_1 \gamma_2 - \delta_1 \delta_2} - \operatorname{arc tg} \frac{(\gamma_2 + \gamma_3)(\delta_1 + \delta_2) + (\gamma_1 + \gamma_3)(\delta_2 + \delta_3)}{(\gamma_1 + \gamma_2)(\gamma_2 + \gamma_3) - (\delta_1 + \delta_2)(\delta_2 + \delta_3)} - B. \quad (3.31)$$

Коэффициент отражения от поглощающего слоя в зависимости от толщины слоя снова представляет собой осциллирующую функцию, однако размах осцилляции с увеличением d непрерывно уменьшается и при достаточно большом d величина ρ становится постоянной величиной, равной модулю коэффициента отражения от передней стороны слоя.

Действительно, при достаточно большом β всеми членами, кроме первых, в числителе и знаменателе (3.28) можно пренебречь, и мы получаем $\rho = \rho_{32}$. Физически это означает, что при большой толщине слоя волны в слое затухают, не доходя до нижней границы слоя.

Период осцилляции величины ρ при изменении d составляет, как и в случае непоглощающего слоя, примерно половину длины волн, если только затухание в слое не настолько велико, чтобы оно могло скаться уже на расстояниях порядка λ_s .

3.5. Пресачивание волн через слой. Пусть в слое, который мы будем предполагать непоглощающим, скорость распространения волн будет больше, чем в среде, из которой падает волна. Если бы слой был бесконечно толстым, то при углах падения, превышающих критический, в нем происходило бы полное внутреннее отражение. Однако в случае слоя конечной толщины полного отражения происходит не будет, а будет иметь место частичное проникновение через слой. Это явление совершенно аналогично рассматриваемому в квантовой механике явлению просачивания частицы через потенциальный барьер.

Из (3.11) мы имеем

$$\sin \theta_2 = \frac{k_3}{k_2} \sin \theta_3 = \frac{c_3}{c_2} \sin \theta_3.$$

При $\theta_3 > \arcsin(c_3/c_2)$ (угол падения превышает критический угол полного внутреннего отражения) мы получаем $\sin \theta_2 > 1$, откуда следует, что θ_2 — комплексный угол. При этом

$$\cos \theta_2 = \pm i \sqrt{(c_2/c_3)^2 \sin^2 \theta_3 - 1}.$$

Таким образом, величина $k_{2z} = k_2 \cos \theta_2$ в формулах (3.10) и (3.20) для коэффициента отражения будет мнимой. Из двух знаков перед корнем нужно взять плюс, что следует хотя бы из того, что при $d \rightarrow \infty$ выражение (3.20) должно давать $V \rightarrow V_{3z}$.

Подставляя значение $\cos \theta_2$ в (3.7), получим

$$Z_2 = i\delta_2, \text{ где } \delta_2 = \rho_2 c_2 [(c_2/c_3)^2 \sin^2 \theta_3 - 1]^{-1/2}. \quad (3.32)$$

Импеданс Z_2 оказывается чисто мнимым. Обозначим, кроме того,

$$\beta = |k_{2z}d| = k_2 d \sqrt{(c_2/c_3)^2 \sin^2 \theta_3 - 1} \quad (3.33)$$

Рис. 3.2. К определению коэффициентов отражения и прозрачности системы слоев

и рассмотрим подробнее случай, когда по обе стороны слоя расположены одинаковые среды. Тогда $Z_3 = Z_1$ — вещественные величины и из формулы (3.12) получаем

$$V = (Z_1^2 + \delta_2^2)(\delta_2^2 - Z_1^2 - 2iZ_1\delta_2 \operatorname{ctg} \beta)^{-1}.$$

Отсюда для модуля и фазы коэффициента отражения легко находим выражения

$$\rho = (Z_1^2 + \delta_2^2)[(Z_1^2 - \delta_2^2)^2 + 4Z_1^2\delta_2^2 \operatorname{ctg}^2 \beta]^{-1/2}, \quad (3.34)$$

$$\varphi = \operatorname{arc tg} [(2Z_1\delta_2 \operatorname{ctg} \beta)/(\delta_2^2 - Z_1^2)]. \quad (3.35)$$

Из (3.34) видим, что модуль коэффициента отражения всегда меньше единицы, т. е. всегда имеется просачивание волны через слой. При этом коэффициент отражения увеличивается с увеличением толщины слоя. При $d \rightarrow \infty$ ($\beta \rightarrow \infty$) он становится равным единице, т. е. отражение становится полным.

3.6. Коэффициенты отражения и прозрачности для произвольного числа слоев. Представим себе, что между двумя полубесконечными средами, которым мы припишем номера 1 и $n+1$, находится $n-1$ слоев с номерами 2, 3, ... (рис. 3.2). Пусть на границу последнего слоя под произвольным углом θ_{n+1} падает плоская волна. Требуется найти амплитуду отраженной волны и волны, прошедшей в среду 1.

Из изложенного в разделе 1 ясно, что для определения коэффициента отражения достаточно найти входной импеданс всей системы слоев $Z_{\text{вх}}^{(n)}$. Это может быть сделано путем $n-1$ кратного применения формулы (3.9). В самом деле, положив в ней $Z_{\text{вх}}^{(1)} = Z_1$, $d = d_2$, мы получим входной импеданс $Z_{\text{вх}}^{(2)}$ на верхней границе самого нижнего слоя

$$Z_{\text{вх}}^{(2)} = \frac{Z_{\text{вх}}^{(1)} - iZ_2 \operatorname{tg} k_{2z} d_2}{Z_2 - iZ_{\text{вх}}^{(1)} \operatorname{tg} k_{2z} d_2} Z_2. \quad (3.36)$$

Далее, производя в правой части последней формулы замену $Z_{\text{вх}}^{(1)} \rightarrow Z_{\text{вх}}^{(2)}$, $Z_2 \rightarrow Z_3$, $k_2 \rightarrow k_3$, $d_2 \rightarrow d_3$, мы получим выражение для $Z_{\text{вх}}^{(3)}$ — входной импе-

данс второго снизу слоя и т. д. После того, как будет найдено $Z_{\text{bx}}^{(n-1)}$, требуемый входной импеданс системы определится формулой *:

$$Z_{\text{bx}}^{(n)} = \frac{Z_{\text{bx}}^{(n-1)} - i Z_n \operatorname{tg} k_{nz} d_n}{Z_n - i Z_{\text{bx}}^{(n-1)} \operatorname{tg} k_{nz} d_n} Z_n, \quad (3.37)$$

а коэффициент отражения формулой

$$V = (Z_{\text{bx}}^{(n)} - Z_{n+1}) / (Z_{\text{bx}}^{(n)} + Z_{n+1}). \quad (3.38)$$

Как и выше, мы имеем

$$Z_j = \rho_j c_j \cos \vartheta_j, \quad k_j \sin \vartheta_j = k_{n+1} \sin \vartheta_{n+1}, \quad j = 1, 2, \dots, n+1. \quad (3.39)$$

Нетрудно видеть, что если в каком-либо из (непоглощающих) слоев j набег фазы равен целому числу полуволн, то такой слой никак не влияет на отражение, независимо от значения импеданса Z_j . Выпишем теперь в явном виде входной импеданс для системы двух слоев ($n = 3$):

$$Z_{\text{bx}}^{(3)} = \frac{Z_1 Z_2 - Z_1 Z_3 p_2 p_3 - i (Z_2^2 p_3 + Z_2 Z_3 p_3)}{Z_2 Z_3 - Z_2^2 p_2 p_3 - i (Z_1 Z_3 p_2 + Z_2 Z_1 p_2)} Z_3, \quad (3.40)$$

где $p_j = \operatorname{tg} k_j z_j$, $j = 2, 3$, и для системы трех слоев ($n = 4$):

$$Z_{\text{bx}}^{(4)} = \frac{M}{N} Z_4, \quad (3.41)$$

где

$$M \equiv Z_1 Z_2 Z_3 - Z_1 Z_3^2 p_2 p_3 - Z_1 Z_3 Z_4 p_2 p_4 - Z_1 Z_2 Z_4 p_3 p_4 - i [Z_2^2 Z_3 p_2 + Z_2 Z_3^2 p_3 + Z_2 Z_3 Z_4 p_4 - Z_2^2 Z_4 p_2 p_3],$$

$$N \equiv Z_2 Z_3 Z_4 - Z_2^2 Z_4 p_2 p_3 - Z_2^2 Z_3 p_2 p_4 - Z_2 Z_3^2 p_3 p_4 - i [Z_1 Z_3 Z_4 p_2 + Z_1 Z_3 Z_4 p_3 + Z_1 Z_3 Z_4 p_4 - Z_1 Z_3^2 p_2 p_3 p_4].$$

Найдем теперь коэффициент прозрачности произвольной системы слоев. Обозначим через z координату верхней границы слоя $j = 1, 2, \dots, n$. Тогда звуковое давление в верхнем полупространстве, в слоях и затем в нижнем полупространстве может быть записано (опускается всюду фактор $\exp i(k_{n+1,x} x - \omega t)$),

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= A_{n+1} e^{-ik_{n+1,z}(z-z_n)} + B_{n+1} e^{ik_{n+1,z}(z-z_n)}, \\ &\dots \\ p_{j+1} &= A_{j+1} e^{-ik_{j+1,z}(z-z_j)} + B_{j+1} e^{ik_{j+1,z}(z-z_j)}, \\ p_j &= A_j e^{-ik_{j,z}(z-z_{j-1})} + B_j e^{ik_{j,z}(z-z_{j-1})}, \\ &\dots \\ p_1 &= A_1 e^{-ik_{1,z}z}. \end{aligned} \quad (3.42)$$

На границе $z = z_j$ должно быть непрерывно давление, а также импеданс. Это дает

$$\begin{aligned} z &= z_j, \quad p_j = p_{j+1}, \\ -i\omega\rho_j p_j (\partial p_j / \partial z)^{-1} &= -i\omega\rho_{j+1} p_{j+1} (\partial p_{j+1} / \partial z)^{-1} = Z_{\text{bx}}^{(j)}. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Подстановка сюда p_j и p_{j+1} из (3.42) дает три уравнения (учтено, что $z_{j+1} - z_j = d_j$ и обозначено $k_j z_j = \varphi_j$ — набег фазы в слое j):

$$\begin{aligned} A_j e^{-i\varphi_j} + B_j e^{i\varphi_j} &= A_{j+1} + B_{j+1}, \\ Z_j (A_j e^{-i\varphi_j} + B_j e^{i\varphi_j}) / (A_j e^{-i\varphi_j} - B_j e^{i\varphi_j}) &= Z_{\text{bx}}^{(j)}, \\ Z_{j+1} (A_{j+1} + B_{j+1}) / (A_{j+1} - B_{j+1}) &= Z_{\text{bx}}^{(j)}, \end{aligned} \quad (3.44)$$

* Для пересчета входного импеданса от одного слоя к другому может оказаться полезной номограмма [127].

где Z_j дается формулой (3.39). Из двух последних уравнений находим:

$$(B_j/A_j) e^{2i\varphi_j} = (Z_{bx}^{(j)} - Z_j)/(Z_{bx}^{(j)} + Z_j), \quad B_{j+1}/A_{j+1} = (Z_{bx}^{(j)} - Z_{j+1})/(Z_{bx}^{(j)} + Z_{j+1}). \quad (3.45)$$

Первое же уравнение (3.44) может быть записано

$$A_j e^{i\varphi_j} [1 + (B_j/A_j) e^{2i\varphi_j}] = A_{j+1} (1 + B_{j+1}/A_{j+1}).$$

Подставляя сюда (3.45), находим

$$A_j/A_{j+1} = (Z_{bx}^{(j)} + Z_j)/(Z_{bx}^{(j)} + Z_{j+1}) e^{i\varphi_j}. \quad (3.46)$$

Придавая j последовательные значения $j = 1, 2, \dots, n$ и перемножая получающиеся из (3.46) уравнения, получаем в конечном счете для коэффициента

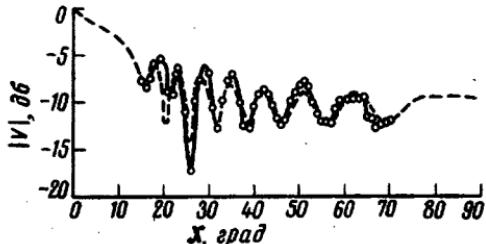


Рис. 3.3. Теоретическая (пунктирная) и экспериментальная (сплошная) кривые зависимости модуля коэффициента отражения от угла скольжения χ . Звуковая волна падает из воды на слой морского осадка, под которым находится морской песок

прозрачности, равного по определению отношению амплитуд звукового давления в прошедшей и падающей волнах,

$$A_1/A_{n+1} = \prod_{j=1}^n (Z_{bx}^{(j)} + Z_j)/(Z_{bx}^{(j)} + Z_{j+1}) e^{i\varphi_j}. \quad (3.47)$$

Поглощение в слоях учитывается так же, как и в § 3.4.

Изложенная выше теория имеет широкое применение, чему посвящена специально гл. II. Экспериментально полученные формулы проверялись много-кратно. Здесь мы приведем лишь один пример такой проверки [110]. На рис. 3.3 изображена зависимость модуля коэффициента отражения (в децибелах) от угла скольжения $\chi = 90^\circ - \theta$ звуковой волны частоты 100 кгц, падающей из воды на слой морского осадка, толщиной $d_2 = 7$ см, с характеристиками $\rho_2 = 1,78 \text{ г/см}^3$, $c_2 = 1531,03 \text{ м/сек}$, поглощение 26,25 дБ/м, лежащий на слое морского песка. Характеристики последнего: $\rho_1 = 1,92 \text{ г/см}^3$, $c_1 = 1656,6 \text{ м/сек}$, поглощение 61,68 дБ/м.

§ 4. Отражение и преломление электромагнитных волн

4.1. Общие соотношения. При исследовании отражения и преломления электромагнитных волн будем исходить из уравнений Максвелла для однородной изотропной среды, записанных в гауссовой системе единиц,

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{4\pi\sigma}{c} \mathbf{E} + \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, & \operatorname{div} \mathbf{E} &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, & \operatorname{div} \mathbf{H} &= 0. \end{aligned} \quad (4.1)$$

В случае гармонической зависимости от времени векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} дифференцирование по времени сводится к умножению на $-i\omega$. Поэтому уравнения, содержащие операцию rot , могут быть записаны в виде

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = -\frac{i\omega}{c} \epsilon' \mathbf{E}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = \frac{i\omega}{c} \mu \mathbf{H}, \quad (4.2)$$

где через

$$\epsilon' = \epsilon + (4\pi\sigma/\omega)i \quad (4.3)$$

обозначена комплексная диэлектрическая проницаемость среды. Применив операцию rot ко второму из уравнений (4.2) и исключив из полученного таким образом уравнения из первого уравнения $\text{rot } H$, получим, при учете соотношения $\text{rot rot } E = -\Delta E$ (где учтено, что $\text{div } E = 0$) уравнение

$$\Delta E + k^2 E = 0, \quad (4.4)$$

где

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon' \mu}. \quad (4.5)$$

Простейшим решением этого уравнения будет плоская гармоническая волна

$$E = E_0 e^{i(kr - \omega t)}, \quad (4.6)$$

где E_0 — постоянный вектор.

Соответствующее выражение для H найдется из второго уравнения (4.2)

$$H = - (ic/\mu\omega) \text{rot } E \quad (4.7)$$

или, подставляя (4.6),

$$H = (c/\mu\omega) [k \cdot E]. \quad (4.8)$$

4.2. Отражение и преломление на границе раздела двух сред. Выберем прямоугольную систему координат так, чтобы плоскость xy совпадала с границей раздела сред, а плоскость xz с плоскостью падения волны (при этом $k_y = 0$). Как известно, любая плоская электромагнитная волна может быть представлена в виде суперпозиции двух волн, у одной из которых вектор E перпендикулярен плоскости падения, а у другой лежит в этой плоскости.

Рассмотрим сначала отражение и преломление волны первого вида. Обозначим комплексные диэлектрическую и магнитную проницаемости в верхней и нижней средах соответственно через ϵ , μ и ϵ_1 и μ_1 (опускаем для краткости штрихи у ϵ и μ). Угол падения волны обозначим через θ , угол преломления через θ_1 .

Электрическое поле в верхней среде можно записать в виде

$$E \equiv E_y = E_0 e^{i(k_x x - k_z z)} + V_{\perp} E_0 e^{i(k_x x + k_z z)}, \quad (4.9)$$

где первый член представляет собой падающую, а второй — отраженную волну. Амплитуда падающей волны обозначена через E_0 , а коэффициент отражения через V_{\perp} . Через k_x и k_z обозначены компоненты волнового вектора k , связанные с углом падения θ соотношениями (1.14).

В нижней среде электрическое поле

$$E_1 \equiv E_{1y} = W_{\perp} E_0 e^{i(k_{1x} x - k_{1z} z)}, \quad (4.10)$$

где W_{\perp} — коэффициент прозрачности границы, а

$$k_{1x} = k_1 \sin \theta_1, \quad k_{1z} = k_1 \cos \theta_1, \quad k_1 = k (\epsilon_1 \mu_1 / \epsilon \mu)^{1/2}. \quad (4.11)$$

Постоянные V_{\perp} , W_{\perp} , а также угол θ определяются из граничных условий, которые, как известно, требуют равенства тангенциальных составляющих E и H по ту и другую сторону границы. Однако, как и в акустическом случае, целесообразно ввести понятие импеданса. Для верхней и нижней сред импеданс будет соответственно

$$Z = E/H_x, \quad Z_1 = E_1/H_{1x}. \quad (4.12)$$

Учитывая (4.7) и (4.10), находим

$$H_{1x} = (ck_{1z}/\mu_1 \omega) E_1, \quad Z_1 = \mu_1 \omega / ck_{1z} = Z_1^0 / \cos \theta_1, \quad Z_1^0 \equiv (\mu_1 / \epsilon_1)^{1/2}. \quad (4.13)$$

Величину Z_1^0 называют волновым сопротивлением среды. Мы видим, что Z_1 не зависит от z .

Поскольку $E = E_x$ и H_x не терпят скачка на границе, то и импеданс должен быть непрерывным на границе. Это позволяет нам в качестве граничных условий взять

$$(E/H_x)_{z=0} = Z_1, \quad (E - E_1)_{z=0} = 0. \quad (4.14)$$

Первое из них при подстановке H_x из (4.7) дает

$$(\mu\omega/k_z c) [(1 + V_\perp)/(1 - V_\perp)] = Z_1, \quad V_\perp = (Z_1 - \mu\omega/k_z c)(Z_1 + \mu\omega/k_z c)^{-1}. \quad (4.15)$$

Последняя формула позволяет определять коэффициент отражения от произвольного слоистого полупространства, если известен «входной» импеданс этого полупространства Z_1 . В рассматриваемом здесь простейшем случае, когда Z_1 дается формулой (4.13), выражение для V_\perp можно записать также в виде

$$V_\perp = (Z_1^0/\cos \vartheta_1 - Z^0/\cos \vartheta)(Z_1^0/\cos \vartheta_1 + Z^0/\cos \vartheta)^{-1}, \quad (4.16)$$

где $Z^0 = (\mu/e)^{1/2}$ — волновое сопротивление верхней среды.

Второе из граничных условий (4.14) дает, с учетом (4.9) и (4.10):

$$1 + V_\perp = W_\perp e^{i(k_1 x - k_x z)}. \quad (4.17)$$

Поскольку здесь левая часть не зависит от x , то не должна зависеть от x и правая. Это дает «закон преломления»

$$k_x = k_{1x}, \quad k \sin \vartheta = k_1 \sin \vartheta_1. \quad (4.18)$$

После этого из (4.17) находим для коэффициента прозрачности

$$W_\perp = 1 + V_\perp = 2Z_1^0(Z_1^0 + Z^0 \cos \vartheta_1 / \cos \vartheta)^{-1}. \quad (4.19)$$

В случае, когда E в падающей волне параллельно плоскости падения, формулами, аналогичными (4.9) и (4.10), будут выражаться H_y и H_{1y} . Продвигая аналогичным образом рассуждения, вводя импеданс $Z = -E_x/H_y$ и потребовав непрерывность на границе Z и H_y , мы получаем для коэффициента отражения для этого случая

$$V_\parallel = (Z_1 - Z^0 \cos \vartheta)/(Z_1 + Z^0 \cos \vartheta), \quad Z_1 = Z_1^0 \cos \vartheta_1. \quad (4.20)$$

Эта формула будет годна для отражения от произвольной слоистой среды, если вместо Z_1 взять соответственный «входной» импеданс.

Для коэффициента прозрачности получаем

$$W_\parallel = 1 + V_\parallel = 2Z_1(Z_1 + Z^0 \cos \vartheta)^{-1}. \quad (4.21)$$

Из формул (4.16) и (4.20) мы видим, что при $\vartheta \rightarrow \pi/2$ имеем $V_\perp \rightarrow -1$, $V_\parallel \rightarrow 1$.

На рис. 4.1 изображен модуль коэффициентов отражения $\rho_\perp = |V_\perp|$, $\rho_\parallel = |V_\parallel|$, как функция угла скольжения $\chi = \pi/2 - \vartheta$ на границе воз-

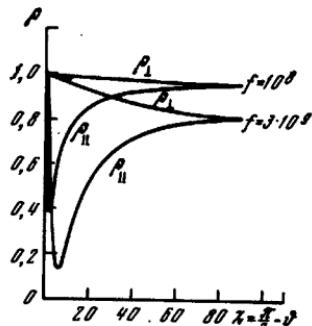


Рис. 4.1. Модуль коэффициента отражения электромагнитной волны на границе воздух — морская вода ($\epsilon = 81$, $\sigma = 3 \cdot 10^{10}$ CGSE) для двух частот и разных состояний поляризации

дук — морская вода для двух частот $f = 10^8$ гц и $f = 3 \cdot 10^8$ гц. Величины ρ_{\perp} и ρ_{\parallel} совпадают при $\chi = 0$ и $\chi = \pi/2$. В промежутке между этими значениями ρ_{\perp} меняется монотонно, в то время как ρ_{\parallel} имеет минимум. При $\sigma_1 = 0$ этот минимум вырождается в точку возврата, в которой $\rho_{\parallel} = 0$. Соответствующий угол θ называется углом Брюстера.

4.3. Приближенное (импедансное) граничное условие (условие Леонто维奇а). Как и в акустическом случае (§ 2.4), два условия на границе раздела сред можно заменить одним, если импеданс Z_1 можно приближенно считать не зависящим от угла преломления θ_1 . В самом деле, тогда, скажем, для случая E, лежащего в плоскости падения, имеем из первого условия (4.14), учитывая (4.7),

$$z = 0, \quad \partial E / \partial z + \gamma E = 0, \quad \gamma \equiv -i \mu_1 \omega / c Z_1. \quad (4.22)$$

Мы получили «граниченное условие третьего рода», при помощи которого задача о поле в верхней среде решается полностью, без обращения к полю в нижней среде.

По причинам, подробно выясненным в § 2.4, границы раздела, на которых выполняется условие (4.22), называются локально реагирующими. Таковой является, например, граница полупространства с достаточно большой диэлектрической постоянной $\epsilon_1 \gg \epsilon$. При этом мы имеем для угла преломления, согласно (4.18)

$$\cos \theta_1 = \sqrt{1 - (k/k_1)^2 \sin^2 \theta} = \sqrt{1 - (\epsilon \mu / \epsilon_1 \mu_1)^2 \sin^2 \theta} \approx 1.$$

Это дает согласно (4.13) $Z_1 = Z_1^0$ — постоянную величину. При этом получаем в (4.22)

$$\gamma = -ik(\epsilon_1/\mu_1)^{1/2}. \quad (4.23)$$

ϵ_1 может быть большой (по модулю) согласно (4.3), например, когда велика проводимость нижней среды σ .

Приближенное граничное условие (4.22), впервые предложенное Леонтовичем М. А., позволило по-новому поставить и решить ряд важных задач по распространению радиоволн над земной поверхностью [58, 59].

4.4. Отражение от слоя и системы слоев. Решение этой задачи, проведенное в § 3 для акустического случая в импедансной формулировке, может быть без всяких изменений перенесено и на электромагнитный случай. Вышеупоминалось, что формулами (4.15) и (4.20) будут даваться коэффициенты отражения от произвольного числа слоев, но только вместо Z_1 необходимо подставить $Z_{\text{вх}}$ — входной импеданс этой системы слоев. Для расчета последнего будут справедливы формулы § 3, если полагать там

$$Z_j = Z_j^0 / \cos \theta_j \quad \text{или} \quad Z_j = Z_j^0 \cos \theta_j, \quad (4.24)$$

соответственно для перпендикулярных и параллельных поляризаций. При этом $Z_j^0 = (\mu_j / \epsilon_j)^{1/2}$ — волновое сопротивление j -той среды. В частности, $Z_{\text{вх}} = V$ для одного слоя будут даваться соответственно формулами (3.9) и (3.10). Входной импеданс системы $n - 1$ слоев дается формулой (3.37).

Изложение теории электромагнитных волн в слоистых средах читатель может найти также в [258]. Применение теории для анализа слоистых поглотителей электромагнитных волн см., например, [260].

§ 5. Волны в упругих средах. Общие соотношения

Перейдем теперь к анализу волн в упругих средах, где, кроме продольных волн, могут существовать также поперечные (сдвиговые) волны. Теория волн в упругих средах имеет широкое применение в сейсмологии, в акустике твердых тел и в подводной акустике.

5.1. Волна с горизонтальной поляризацией. Как и в предыдущих параграфах, мы будем предполагать, что границы раздела сред нормальны оси z , а нормали к фронтам волн лежат в плоскости xz . Плоская упругая волна вполне определена вектором смещения частиц $u(x, z, t)$, все компоненты которого должны быть непрерывны при переходе границы раздела сред. Кроме того, на границе должны быть непрерывны следующие компоненты тензора напряжений *:

$$\begin{aligned} Z_z &= \lambda (\partial u_x / \partial x + \partial u_z / \partial z) + 2\mu (\partial u_z / \partial z), \\ Z_x &= \mu (\partial u_x / \partial z + \partial u_z / \partial x), \quad Z_y = \mu (\partial u_y / \partial z), \end{aligned} \quad (5.1)$$

где λ, μ — параметры Ляме. Мы будем рассматривать гармонические волны с зависимостью всех величин от времени t и координаты x в виде $\exp i(\xi x - \omega t)$, где ξ — горизонтальная компонента волнового числа, определяющаяся углом падения волны и сохраняющаяся при переходе через границы раздела сред. Поэтому всюду в дальнейшем

$$\partial/\partial x = i\xi, \quad \partial/\partial t = -i\omega. \quad (5.2)$$

Волни с произвольным направлением вектора u можно представить как суперпозицию сдвиговой волны горизонтальной поляризации (SH -волна по сейсмической терминологии), в которой $u_x = u_z = 0, u_y = u$ и волны вертикальной поляризации, в которой $u_y = 0, u_x \neq 0, u_z \neq 0$. Эти две волны удобно рассматривать раздельно, поскольку на границах раздела они не взаимодействуют друг с другом.

Для волны горизонтальной поляризации имеем волновое уравнение

$$\partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial z^2 + \kappa^2 u = 0, \quad \kappa = \omega/b, \quad b = (\mu/\rho)^{1/2} \quad (5.3)$$

с условиями на границах раздела

$$[u] = 0, \quad [\mu \partial u / \partial z] = 0, \quad (5.4)$$

выражающими непрерывность смещения u и компоненты Z_z тензора напряжений. Напоминаем, что квадратные скобки означают здесь разность соответственной величины по обеим сторонам границы.

Мы видим, что задача оказалась полностью эквивалентной акустической задаче, рассмотренной в §§ 2,3. Там мы имели волновое уравнение для давления p , аналогичное (5.3), где вместо κ было $k = \omega/c$. Границные условия заключались в непрерывности p и $v_z = (1/i\omega\rho) \partial p / \partial z$, т. е. $[p] = 0, [p^{-1} \partial p / \partial z] = 0$.

Таким образом, все формулы §§ 2, 3 для коэффициентов отражения и прозрачности можно использовать здесь, заменив величину $1/\rho$ на μ , скорость c на b , и, следовательно, величину pc на $b/\mu \equiv 1/\rho b$.

Так, для коэффициента отражения от границы двух сред имеем в соответствии с (2.12) и (2.15)

$$V = (\rho b \cos \theta - \rho_1 b_1 \cos \theta_1) / (\rho b \cos \theta + \rho_1 b_1 \cos \theta_1)^{-1}, \quad (5.5)$$

где θ и θ_1 связаны законом преломления (2.10), причем $n = b/b_1$. Величины без индекса соответствуют среде, из которой падает волна. Коэффициент прозрачности (отношение u_1 в прошедшей волне к u в падающей) будет даваться формулой (2.11).

Во всех формулах § 3, описывающих отражение от системы слоев, надо полагать теперь

$$Z_j = 1/\rho_j b_j \cos \theta_j, \quad (5.6)$$

где j — произвольный номер среды, а вместо k_{jz} подставлять $\kappa_{jz} = \kappa \cos \theta_j$.

*Основные уравнения теории упругости читатель может найти в [60, 56, 86].

В частности, коэффициент отражения от одного слоя будет даваться формулами (3.1), (3.9), (3.10). Возьмем для примера однородный упругий слой, лежащий на однородном упругом полупространстве. SH -волны в такой системе будут описываться теми же уравнениями, что и звуковые волны в жидким слое, лежащем на жидким полупространстве. Известно (см. ниже § 37), что если скорость звука в полупространстве больше, чем в слое, то в такой системе может распространяться конечное число незатухающих волн (если пренебречь поглощением в средах). Аналогично, если скорость сдвиговых волн в упругом полупространстве будет больше, чем в слое, то в такой системе будет распространяться без затухания конечное число волн, называемых волнами Лява.

5.2. Волны с вертикальной поляризацией. В общем случае смещение и может быть выражено через скалярный φ и векторный ψ потенциалы формулой

$$\mathbf{u} = \operatorname{grad} \varphi + \operatorname{rot} \psi. \quad (5.7)$$

В случае волн вертикальной поляризации, потенциал ψ можно выбрать так, чтобы единственной отличной от нуля была компонента $\psi_y \equiv \psi$. Тогда согласно (5.7)

$$u_x = \partial\varphi/\partial x - \partial\psi/\partial z, \quad u_y = 0, \quad u_z = \partial\varphi/\partial z + \partial\psi/\partial x; \quad (5.8)$$

φ и ψ можно называть также потенциалами продольных и поперечных волн. Можно показать, что они будут удовлетворять волновым уравнениям:

$$\begin{aligned} \Delta\varphi + k^2\varphi &= 0, & k &\equiv \omega/c, & c &= \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}, \\ \Delta\psi + \kappa^2\psi &= 0, & \kappa &= \omega/b. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Здесь c — скорость продольных волн. На границах раздела сред должны выполняться условия непрерывности:

$$[Z_z] = 0, \quad [Z_x] = 0, \quad [u_x] = 0, \quad [u_z] = 0. \quad (5.10)$$

Эти условия можно выразить через потенциалы, для чего мы воспользуемся выражениями (5.1), (5.8), а также волновыми уравнениями (5.9). В результате получаем для граничных условий в том же порядке, как и в (5.10):

$$[\rho\xi^{-2}(\partial\psi/\partial z - i\rho\varphi)] = 0, \quad [\rho\xi^{-2}(\partial\varphi/\partial z + i\rho\psi)] = 0, \quad (5.11)$$

$$[\partial\psi/\partial z - i\xi\varphi] = 0, \quad [\partial\varphi/\partial z + i\xi\psi] = 0, \quad (5.12)$$

где обозначено

$$p = (\xi^2 - \kappa^2/2) \xi^{-1}. \quad (5.13)$$

После получения общих формул, перейдем к анализу различных случаев в порядке возрастающей сложности.

§ 6. Волны в упругом полупространстве со свободной границей

6.1. Коэффициенты отражения и трансформации. В этом параграфе мы рассматриваем лишь волны вертикальной поляризации. На границу полупространства, граничащего с пустотой, может падать из него продольная (потенциал φ) или поперечная (потенциал ψ) волны. В каждом из этих случаев в отраженном поле будут как продольная, так и поперечная волны. Мы рассмотрим оба случая одновременно, положив в полупространстве $z > 0$:

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi' e^{iaz} + \varphi'' e^{-iaz}, & \alpha &= \sqrt{k^2 - \xi^2}, \\ \psi &= \psi' e^{izx} + \psi'' e^{-izx}, & \beta &= \sqrt{\kappa^2 - \xi^2}. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Присутствующий во всех выражениях фактор $\exp(i(\xi x - \omega t))$ для сокращения отбрасываем. φ' и ψ' — амплитуды падающих на границу $z = 0$

продольной и поперечной волн, а ϕ' и ψ' — амплитуды отраженных волн. На свободной границе тела на скорость v не накладывается ограничений, поэтому условия (5.12) можно не рассматривать. Напряжения на границе должны быть равны нулю, а следовательно, поскольку ρ/x^2 отлично от нуля, имеем граничные условия:

$$z = 0, \quad \partial\psi/\partial z - ip\phi = 0, \quad \partial\phi/\partial z + ip\psi = 0. \quad (6.2)$$

Подставляя в них (6.1), получаем

$$\beta(\psi' - \psi) - p(\phi' + \phi'') = 0, \quad \alpha(\phi' - \phi'') + p(\psi' + \psi'') = 0. \quad (6.3)$$

Теперь рассмотрим случай а): на границу падает продольная волна ($\phi'' \neq 0$, $\psi'' = 0$). Обозначим $V_{ll} = \psi'/\phi''$ — коэффициент отражения продольной волны. $V_{ll} = \phi'/\phi''$ — коэффициент трансформации продольной волны в поперечную. Положив в (6.3) $\psi'' = 0$ и поделив оба уравнения на ϕ'' , получаем для этих коэффициентов уравнения:

$$\beta V_{ll} = p(1 + V_{ll}), \quad pV_{ll} = \alpha(1 - V_{ll}), \quad (6.4)$$

откуда находим

$$V_{ll} = (\alpha\beta - p^2)/(x\beta + p^2), \quad V_{ll} = 2\alpha p/(\alpha\beta + p^2). \quad (6.5)$$

В случае б), когда на границу падает поперечная волна ($\phi'' = 0$, $\psi'' \neq 0$), обозначаем: $V_{ll} = \psi'/\phi''$ — коэффициент отражения поперечной волны, $V_{ll} = \phi'/\phi''$ — коэффициент трансформации поперечной волны в продольную. Полагая в (6.3) $\phi'' = 0$ и поделив оба уравнения на ϕ'' , получаем для V_{ll} и V_{ll} два уравнения, из которых находим:

$$V_{ll} = V_{ll}, \quad V_{ll} = -2\beta p/(x\beta + p^2). \quad (6.6)$$

Легко видеть, что имеет место соотношение

$$V_{ll}^2 = 1 + V_{ll}V_{ll}. \quad (6.7)$$

Рассмотрим некоторые свойства коэффициентов отражения и трансформации. При нормальном падении ($\xi = 0$, $p = \infty$), а также при скользящем падении ($\alpha = \beta = 0$), имеем $V_{ll} = V_{ll} = -1$, $V_{ll} = V_{ll} = 0$, т. е. происходит полное отражение как поперечной, так и продольной волн (со скачком фазы на π) без трансформации их одной в другую.

При

$$\alpha\beta = p^2 \quad (6.8)$$

имеем

$$V_{ll} = V_{ll} = 0, \quad V_{ll} = \sqrt{\alpha/\beta}, \quad V_{ll} = -\sqrt{\beta/\alpha}, \quad (6.9)$$

т. е. отражение отсутствует. Продольная волна на границе полностью переходит в поперечную и наоборот. Для $\xi = \xi_0$, соответствующему этому обмену поляризацией, получаем из (6.8) уравнение

$$\xi_0^2 \sqrt{k^2 - \xi_0^2} \sqrt{\alpha^2 - \xi_0^2} = (\xi_0^2 - \alpha^2/2)^2. \quad (6.10)$$

Ниже мы увидим, что это уравнение имеет или два вещественных корня, или не имеет ни одного.

Пусть при $k < \xi < \alpha$ на границу падает поперечная волна; мы имеем из (6.1) $\alpha = i\sqrt{\xi^2 - k^2}$ — мнимую величину *. При этом потенциал продольной волны будет неоднородной волной, экспоненциально убывающей при удалении от границы

$$\Phi = \Phi' \exp(-\sqrt{\xi^2 - k^2} z). \quad (6.11)$$

*Знак корня должен выбираться из условия $\operatorname{Im} \alpha > 0$ для того, чтобы при $z \rightarrow \infty$ продольная волна $\Phi' \exp(i\alpha z)$ экспоненциально убывала, а не возрастала.

Коэффициент отражения для этого случая с использованием формул (6.5) и (6.6) можно представить в виде

$$V_{ll} = -\exp(-i\varphi), \quad V_{tl} = 2\beta p [p^4 + \beta^2 (\xi^2 - k^2)]^{-1/2} \exp(-i\varphi/2), \\ \operatorname{tg} \frac{\Phi}{2} = \beta p^{-2} (\xi - k^2)^{1/2}, \quad (6.12)$$

так как $|V_{ll}| = 1$, то отражение полное. Этот случай аналогичен случаю полного отражения звуковых волн, рассмотренному в § 2, с той разницей, что здесь падающей является поперечная волна, а продольная волна соответствует преломленной звуковой волне.

Здесь мы снова, как и в случае звуковых или электромагнитных волн, встречаемся с общей закономерностью, заключающейся в том, что если на границе задана периодичность процесса в виде $\exp i\xi x$, то при $\xi > k$ (пространственный период $2\pi/\xi$ меньше длины волны λ) в полупространстве к этой периодичности будут «припасовываться» экспоненциально затухающие (неоднородные) волны.

Пусть нормаль к фронтам продольной и поперечной волн составляет с осью z соответственно углы ϑ и γ . При этом

$$\xi = k \sin \vartheta = \kappa \sin \gamma, \quad \alpha = k \cos \vartheta, \quad \beta = \kappa \cos \gamma, \quad p = -\kappa \cos 2\gamma / 2 \sin \gamma. \quad (6.13)$$

При подстановке выражений (6.13) в (6.5), получаем выражение для коэффициентов отражения через углы ϑ и γ

$$V_{ll} = V_{tl} = (k \cos \vartheta \operatorname{tg}^2 2\gamma - \kappa \cos \gamma) / (k \cos \vartheta \operatorname{tg}^2 2\gamma + \kappa \cos \gamma). \quad (6.14)$$

Для углов же обмена поляризаций ϑ_0 и γ_0 , (когда $V_{ll} = V_{tl} = 0$) получаем уравнение

$$k \cos \vartheta_0 \operatorname{tg}^2 2\gamma_0 - \kappa \cos \gamma_0 = 0. \quad (6.15)$$

При этом ϑ_0 и γ_0 предполагаются связанными первым из соотношений (6.13).

На рис. 6.1 коэффициент V_{ll} изображен (по Д. Аренбергу [105], откуда заимствованы также и последующие два рисунка), как функция угла падения продольной волны ϑ для разных значений коэффициента Пуассона σ . Последний, как известно, связан с постоянными Ляме λ и μ , а также с отношением скоростей волн c/b формулой

$$(b/c)^2 = \mu / (\lambda + 2\mu) = (1 - 2\sigma) / (1 + \sigma). \quad (6.16)$$

При $\sigma \rightarrow 1/2$ мы переходим к случаю жидкости, коэффициент отражения от свободной границы которой при всех углах падения ϑ равен -1 (формула (2.16) при $m = 0$), что мы и видим на рис. 6.1.

При $\sigma < 0,26$ каждая кривая дважды пересекает линию $V_{ll} = 0$. Значения угла ϑ_0 для точек пересечения могут быть получены из уравнения (6.15).

На рис. 6.2 коэффициент отражения поперечных волн V_{tl} (равный согласно (6.6) V_{ll}) изображен как функция угла падения поперечной волны γ . В сущности это тот же график 6.1, в котором по оси абсцисс отложено γ , связанное с ϑ первым соотношением (6.13).

При $\sin \gamma > b/c = k/\kappa$ мы имеем согласно (6.13) $\xi > k$, т. е. случай полного отражения. Так как согласно (6.16) при всех возможных σ ($0 < \sigma < 1/2$) имеем $b/c > 1/\sqrt{2}$, то при $\gamma > 45^\circ$ будет полное отражение при любых σ .

На рис. 6.3 изображены характерные углы для рассматриваемого здесь случая при различных значениях σ : граничный угол полного отражения поперечных волн γ_{gr} , угол обмена поляризациями ϑ_0 при падении продольной волны и аналогичный угол γ_0 при падении поперечной волны.

В заключение отметим, что выше были получены коэффициенты отражения и трансформации для потенциалов φ и ψ . Однако в эксперименте измеряются не потенциалы, а смещения u или скорости $v = -i\omega u$. Возьмем плоскую продольную волну $\varphi = \varphi' \exp(i(\alpha z + \xi x - \omega t))$. Формула (5.7) дает для

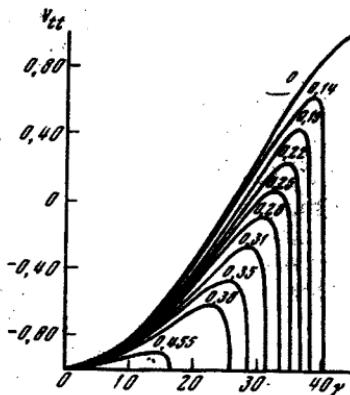
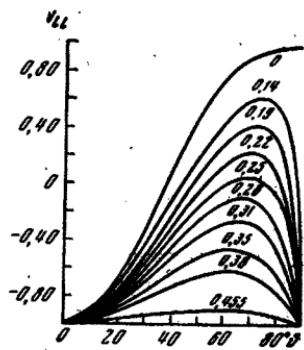


Рис. 6.1. Зависимость коэффициента отражения продольных волн на свободной границе твердого тела от угла падения и для различных значений коэффициента Пуассона (см. числа около соответствующих кривых)

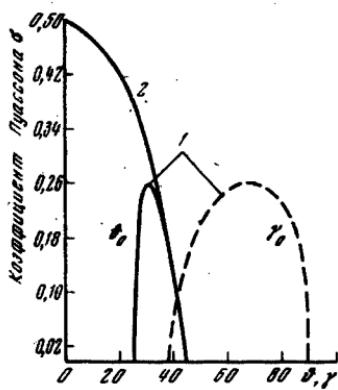


Рис. 6.2. Зависимость коэффициента отражения сдвиговых волн на свободной границе твердого тела от угла падения при различных значениях коэффициента Пуассона

Рис. 6.3. Характерные углы при отражении сдвиговых волн от свободной поверхности упругого полупространства

1 — углы обмена поляризации;
2 — граничный угол полного отражения сдвиговых волн θ_{gr}

амплитуды смещения $u = k\varphi'$. Таким же образом для поперечной волнамплитуды смещения $u = k\varphi'$. Следовательно, V_{tt}, V_{rr} в то же время являются и коэффициентами отражения для скоростей и смещений частиц. С другой стороны, отношение u_t/u_r — амплитуда смещений (или скоростей) в поперечной и продольной волнах при падающей продольной волне будет $u_t/u_r = (\kappa/k)(\varphi'/\varphi) = (\kappa/k) V_{tt}$. Аналогично, при падающей поперечной волне $u_t/u_r = (k/\kappa) V_{rr}$.

6.2. Поверхностная волна Рэлея. Условия на свободной границе полупространства $z = 0$ могут быть удовлетворены также одночленными выражениями для φ и ψ , получающимися из (6.1) при $\varphi'' = \psi'' = 0$. Система (6.3) при этом вырождается в соотношения:

$$\beta\psi' = p\varphi' \quad p\psi' = -\alpha\varphi'. \quad (6.17)$$

Поделив одно равенство на другое, мы получаем характеристическое уравнение для горизонтального волнового числа волны, называемой волной Рэлея [225]

$$\alpha\beta = -p^2. \quad (6.18)$$

Предполагая k и κ вещественными (пренебрегается поглощением волн), мы будем рассматривать вещественные решения этого уравнения ξ_R , т. е. незатухающие волны Рэлея. В этом случае p^2 согласно (5.13) вещественно и положительно, а уравнение (6.18) будет удовлетворяться при минимах α и β . Положив согласно (6.1)

$$\alpha = i\sqrt{\xi_R^2 - k^2}, \quad \beta = i\sqrt{\xi_R^2 - \kappa^2}, \quad (6.19)$$

где значения корней предполагаются положительными, и обозначив

$$q = (b/c)^2, \quad s = (\kappa/\xi_R)^2 = (v_R/b)^2, \quad (6.20)$$

где v_R — скорость волны Рэлея, мы перепишем уравнение (6.18) в виде

$$4\sqrt{1-s}\sqrt{1-sq} = (s-2)^2, \quad (6.21)$$

которое можно рассматривать как уравнение для v_R . После возведения в квадрат, его можно привести к виду (предполагая $s \neq 0$)

$$s^3 - 8s^2 + (24 - 16q)s - 16(1-q) = 0. \quad (6.22)$$

Заметим, что уравнение (6.10), если там обозначить $s = (\chi/\xi_0)^2$, после возведения в квадрат также сводится к (6.20).

Левая часть (6.22) отрицательна при $s = 0$ (поскольку $q < 1$) и равна $+1$ при $s = 1$. Следовательно, это уравнение обязательно имеет вещественный корень в интервале $0 < s < 1$.

Рассмотрим частный случай $\lambda = \mu$, $q = 1/3$ (см. (6.16)). Кубическое уравнение (6.22) при этом имеет корни $s = 4; 3,155; 0,846$. Из них два первых дают $\xi < \chi$, что соответствует не поверхности волне, а случаю обмена поляризации, т. е. решению ξ_0 уравнения (6.10). Третий корень дает для скорости волны Рэлея $v_R = 0,9194 b$.

Таким же образом из (6.22) получаем предельные значения v_R :

$$\begin{aligned} s = 0, \quad q = 0,5, \quad v_R = 0,8741b, \\ s = 0,5, \quad q = 0, \quad v_R = 0,9554b. \end{aligned} \quad (6.23)$$

На рис. 6.4 изображено (по Кнопову [145]) отношение v_R/b в функции коэффициента Пуассона σ .

Полагая в (6.1) $\phi'' = \psi'' = 0$, а также учитывая (6.17), (6.19) и (6.20), получаем для потенциалов волны Рэлея

$$\Phi = \Phi' \exp(-\sqrt{1-qs}\xi_R z), \quad \Psi = \frac{i}{2}(s-2)(1-s)^{-1/2}\Phi' \exp(-\sqrt{1-s}\xi_R z), \quad (6.24)$$

где Φ' — произвольная постоянная, характеризующая амплитуду волны.

По формулам (5.8), учитывая также (5.2) и выделяя вещественную часть, получаем для компонент смещения:

$$\begin{aligned} u_x &= A\xi_R \left[\exp(-\sqrt{1-qs}\xi_R z) - \frac{1}{2}(2-s)\exp(-\sqrt{1-s}\xi_R z) \right] \sin(\xi_R x - \omega t), \\ u_z &= A\xi_R \sqrt{1-qs} [\exp(-\sqrt{1-qs}\xi_R z) - 2(2-s)^{-1}\exp(-\sqrt{1-s}\xi_R z)] \times \\ &\quad \times \cos(\xi_R x - \omega t), \end{aligned} \quad (6.25)$$

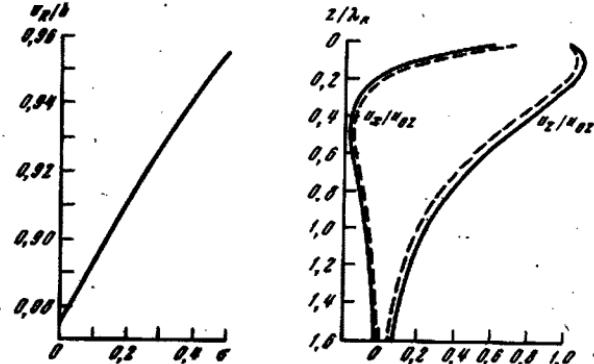
где $A = -\Phi'$ — постоянная величина.

u_x и u_z разнятся по фазе на четверть периода. Следовательно, траектории частиц представляют собой эллипсы с главными осями, параллельными x и z .

На рис. 6.5 по оси абсцисс отложены (по И. А. Викторову [22]) u_x и u_z , отнесенные к $u_{0z} \equiv u_z(z=0)$ — вертикальному смещению на границе. По

Рис. 6.4. Отношение скорости волны Рэлея v_R к скорости сдвиговых волн в функции коэффициента Пуассона σ (по Кнопову).

Рис. 6.5. Зависимость горизонтальной u_x и вертикальной u_z компонент смещения от вертикальной координаты z . Смещения отнесены к u_{0z} — вертикальному смещению на границе, а координата z к λ_R — длине волны Рэлея.



оси ординат отложено z/λ_R , где $\lambda_R = 2\pi/\xi_R$ — длина волны Рэлея. Сплошная кривая относится к случаю $\sigma = 0,34$, пунктирная — к случаю $\sigma = 0,25$. Мы видим, что вертикальное смещение при отходе от границы $z = 0$ вначале увеличивается, достигает максимума и затем плавно спадает до нуля. Горизонтальная компонента смещения при отходе от границы уменьшается, затем обращается в нуль, достигает минимума, а затем асимптотически приближается к нулю.

Стоит отметить, что к вопросу о рэлеевской волне можно подойти с совсем другой стороны, а именно, рассматривая, как в § 6.1, отражение волн от свободной границы упругого полупространства. Из формул (6.5) и (6.6) мы видим, что коэффициенты отражения V_{11} и \bar{V}_{11} обращаются в бесконечность при таком угле падения (комплексном), когда выполняется равенство (6.18). Это означает, что мы можем устремить амплитуды падающих волн ϕ' и ψ' к нулю и при этом амплитуды отраженных волн ϕ' и ψ' могут быть конечными. В результате мы получим волновой процесс вблизи границы без участия падающей волны, т. е. волну Рэлея.

§ 7. Граница упругого и жидкого полупространств

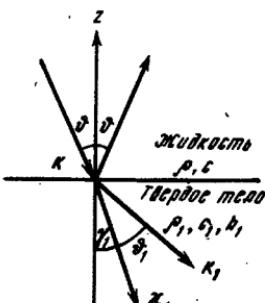
7.1. Границные условия и общие соотношения. Совместим плоскость $z = 0$ с границей раздела, а ось z направим в сторону жидкости (рис. 7.1). Жидкость будет характеризоваться величинами без индекса, величины с индексом 1 будут относиться к упругому полупространству. В частности, $k \equiv \omega/c$ — волновое число в жидкости, $k_1 = \omega/c_1$ и $\kappa_1 = \omega/b_1$ — волновые числа соответственно для продольных и поперечных волн в упругом полупространстве. В верхней (жидкой) среде надо положить $b = 0$. Вопрос о волнах горизонтальной поляризации был рассмотрен в § 5.1. Ниже мы рассматриваем лишь вертикальную поляризацию. В граничных условиях (5.11) и (5.12) мы должны положить для жидкости $\mu = 0$, $\psi = 0$. Кроме того, первое из условий (5.12) в рассматриваемом случае будет отсутствовать, так как здесь не требуется непрерывности u_x (рассматривается случай идеальной жидкости, которая свободно скользит вдоль поверхности твердого тела). Остальные три граничных условия, записанные в том же порядке, что и в (5.11), (5.12), будут:

$z = 0, \quad \rho\Phi = -2\xi\rho_1\kappa_1^{-2}(p_1\Phi_1 + i\partial\Phi_1/\partial z),$
 $\partial\Phi_1/\partial z + ip_1\psi_1 = 0$
 $\partial\Phi/\partial z = \partial p_1/\partial z + i\xi\psi_1,$

где

$$p_1 = (\xi^2 - \kappa_1^2/2)\xi^{-1}. \quad (7.2)$$

Рис. 7.1. К теории отражения звуковой волны от упругого полупространства



Полная система волн в обоих полупространствах будет:

$$z > 0, \quad \phi = \phi' e^{iz} + \phi'' e^{-iz}, \quad \alpha = \sqrt{k^2 - \xi^2}, \quad (7.3)$$

$$\begin{aligned} z < 0, \quad \Phi_1 &= \Phi_1' e^{i\alpha_1 z} + \Phi_1'' e^{-i\alpha_1 z}, & \alpha_1 &= \sqrt{k_1^2 - \xi^2}, \\ \psi_1 &= \psi_1' e^{i\beta_1 z} + \psi_1'' e^{-i\beta_1 z}, & \beta_1 &= \sqrt{\kappa_1^2 - \xi^2}. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Подставим теперь (7.3) и (7.4) в (7.1). При этом последнее уравнение (7.1) целесообразно преобразовать, подставив в него значение $\partial\Phi_1/\partial z$ из второго уравнения. Тогда получаем три соотношения:

$$\begin{aligned} (\kappa_1^2/2m\xi)(\phi' + \phi'') + p_1(\Phi_1' + \Phi_1'') - \beta_1(\psi_1' - \psi_1'') &= 0, & m &\equiv \rho_1/\rho, \\ \alpha_1(\Phi_1' - \Phi_1'') + p_1(\psi_1' + \psi_1'') &= 0, \\ \alpha(\phi' - \phi'') - (\kappa_1^2/2\xi)(\psi_1' + \psi_1'') &= 0. \end{aligned} \quad (7.5)$$

7.2. Отражение звуковой волны, падающей из жидкости на упругое полупространство. Мы получаем этот случай, положив в (7.4) и (7.5) $\phi_1 = 0$, $\psi_1' = 0$, поскольку в упругом полупространстве имеются лишь уходящие от границы волны. Тогда для коэффициента отражения звуковой волны $V = \phi_1'/\phi_1''$ и коэффициентов возбуждения продольных $W_l = \phi_1'/\phi_1''$ и поперечных $W_t = \psi_1'/\phi_1''$ волн в упругом полупространстве получаем уравнения:

$$(x_1^2/2m\xi)(1+V) + p_1 W_l + \beta_1 W_t = 0, \\ -x_1 W_l + p_1 W_t = 0, \quad \alpha(V-1) = (x_1^2/2\xi) W_t. \quad (7.6)$$

Решая их, находим

$$V = [4mx_1\xi^2(x_1\beta_1 + p_1^2) - \alpha_1 x_1^4] / [4mx_1\xi^2(x_1\beta_1 + p_1^2) + \alpha_1 x_1^4]^{-1}, \quad (7.7)$$

$$W_l = -4x_1 p_1 \xi x_1^2 / [4mx_1\xi^2(x_1\beta_1 + p_1^2) + \alpha_1 x_1^4]^{-1}, \quad W_t = (\alpha_1/p_1) W_l. \quad (7.8)$$

V , W_l и W_t можно выразить через углы ϑ , ϑ_1 и γ_1 , где ϑ — угол, составляемый нормалью к фронту звуковой волны (направление \mathbf{k}) с осью z , а ϑ_1 и γ_1 — то же самое для продольной и поперечной волн (см. рис. 7.1). При этом аналогично (6.13) имеем

$$\xi = k \sin \vartheta = k_1 \sin \vartheta_1 = x_1 \sin \gamma_1, \quad (7.9)$$

$$\alpha = k \cos \vartheta, \quad \alpha_1 = k_1 \cos \vartheta_1, \quad \beta_1 = x_1 \cos \gamma_1, \quad p_1 = -x_1 \cos 2\gamma_1 / 2 \sin \gamma_1. \quad (7.10)$$

Из (7.9) следует «закон преломления»:

$$\sin \vartheta/c = \sin \vartheta_1/c_1 = \sin \gamma_1/b_1. \quad (7.11)$$

Целесообразно также ввести обозначения для импедансов

$$Z = \rho c / \cos \vartheta, \quad Z_l = \rho_1 c_1 / \cos \vartheta_1, \quad Z_t = \rho_1 b_1 / \cos \gamma_1. \quad (7.12)$$

Тогда выражения (7.7) и (7.8) запишутся

$$V = (Z_l \cos^2 2\gamma_1 + Z_t \sin^2 2\gamma_1 - Z) (Z_l \cos^2 2\gamma_1 + Z_t \sin^2 2\gamma_1 + Z)^{-1}, \quad (7.13)$$

$$W_l = (2\rho/\rho_1) Z_l \cos 2\gamma_1 (Z_l \cos^2 2\gamma_1 + Z_t \sin^2 2\gamma_1 + Z)^{-1}, \quad (7.14)$$

$$W_t = -(2\rho/\rho_1) Z_t \sin 2\gamma_1 (Z_l \cos^2 2\gamma_1 + Z_t \sin^2 2\gamma_1 + Z)^{-1}. \quad (7.15)$$

Проанализируем полученные формулы. При нормальном падении ($\vartheta = \vartheta_1 = \gamma_1 = 0$) имеем

$$V = (Z_l - Z) / (Z_l + Z), \quad W_l = 2\rho Z_l / \rho_1 (Z_l + Z), \quad W_t = 0. \quad (7.16)$$

Как и следовало ожидать, в этом случае сдвиговые волны не возбуждаются.

Наоборот, при $\vartheta = \arcsin c / \sqrt{2} b_1$, когда согласно (7.11) $\gamma_1 = 45^\circ$, имеем

$$V = (Z_l - Z) / (Z_l + Z), \quad W_l = 0, \quad W_t = -2\rho Z_t / \rho_1 (Z_t + Z), \quad (7.17)$$

т. е. возбуждаются только поперечные волны.

В большинстве случаев скорость звука c в жидкости меньше, чем скорость продольных волн c_1 в твердом теле. Она может быть также меньше и скорости поперечных волн b_1 . Рассмотрим сначала случай $b_1 < c < c_1$. Из (7.11) имеем

$$\sin \vartheta_1 = (c_1/c) \sin \vartheta, \quad \sin \gamma_1 = (b_1/c) \sin \vartheta. \quad (7.18)$$

Отсюда видно, что при $\sin \vartheta > c/c_1$ угол ϑ_1 будет комплексным. Угол же γ_1 будет вещественным при всех ϑ . Таким образом, продольная волна в твердом теле будет неоднородной волной, «скользящей» вдоль границы, поперечная же волна будет обычной плоской волной. Так как при этом $\sin \vartheta_1 > 1$, то $\cos \vartheta_1$ и $Z_l = \rho_1 c_1 / \cos \vartheta_1$ чисто мнимые величины. Из требования ограниченности $\exp(-i\alpha z)$ в (7.4) при $z \rightarrow -\infty$ следует, что $\cos \vartheta_1$ должен являться положительномнимой, а, следовательно, Z_l — отрицательно мнимой величинами.

Коэффициент отражения (7.13) в этом случае запишется

$$V = (Z_t \sin^2 2\gamma_1 - Z - i|Z_l| \cos^2 2\gamma_1) (Z_t \sin^2 2\gamma_1 + Z - i|Z_l| \cos^2 2\gamma_1)^{-1} \quad (7.19)$$

и будет являться, как мы видим, комплексной величиной. Квадрат его модуля будет

$$|V|^2 = [(Z_t \sin^2 2\gamma_1 - Z)^2 + |Z_1|^2 \cos^4 2\gamma_1] [(Z_t \sin^2 2\gamma_1 + Z^2) + |Z_1|^2 \cos^4 2\gamma_1]^{-1}. \quad (7.20)$$

При $\vartheta_1 \neq \pi/2$ модуль коэффициента отражения меньше единицы, чего можно было ожидать и заранее, поскольку часть энергии уносится от границы поперечной волной. Угол $\vartheta = \arcsin(c/c_1)$ (когда $\vartheta_1 = \pi/2$) является «критическим». При этом $Z_1 = \infty$, $V = 1$.

Если воспользоваться терминологией, принятой в теории длинных линий, то можно сказать, что в рассматриваемом случае граница будет представлять собой для падающей волны комплексное сопротивление, причем реактивная его часть обусловливается продольной волной, а активная — поперечной.

Рассмотрим теперь случай $c < b_1 < c_1$. При $0 < \sin \vartheta < c/c_1$, как видно из (7.18), ϑ_1 и γ_1 будут вещественными углами, т. е. мы будем иметь обычный случай отражения на границе, с коэффициентом отражения V , вещественным и меньшим единицы. Сопротивление границы будет чисто активным. При «критическом» угле для продольных волн $\vartheta = \arcsin(c/c_1)$ имеем $\vartheta = \pi/2$ и согласно (7.13) $V = 1$.

При $c/c_1 < \sin \vartheta < c/b_1$ угол γ_1 будет вещественным, а ϑ_1 — комплексным, т. е. получаем случай, рассмотренный выше.

Угол $\vartheta = \arcsin(c/b_1)$ является «критическим» для поперечных волн. При этом $\gamma_1 = \pi/2$, $Z_1 = \infty$, $V = 1$. При $\vartheta > \arcsin(c/b_1)$ комплексными будут оба угла ϑ_1 и γ_1 , что означает, что продольная и поперечная волны в твердом теле являются неоднородными волнами, распространяющимися вдоль границы. При этом Z_1 и Z_t будут чисто мнимыми, т. е. граница будет представлять для падающей волны чисто реактивное сопротивление. Коэффициент отражения запишется

$$V = (|Z_1| \cos^2 2\gamma_1 + |Z_t| \sin^2 2\gamma_1 - iZ) (|Z_1| \cos^2 2\gamma_1 + |Z_t| \sin^2 2\gamma_1 + iZ)^{-1}. \quad (7.21)$$

Модуль коэффициента отражения равен 1, т. е. имеет место полное отражение.

Отметим еще одно, небезынтересное обстоятельство [91]. Выражение (7.13) для коэффициента отражения можно записать в виде

$$V = (Z_{\text{полн}} - Z) / (Z_{\text{полн}} + Z), \quad (7.22)$$

где

$$Z_{\text{полн}} \equiv Z_1 \cos^2 2\gamma_1 + Z_t \sin^2 2\gamma_1 \quad (7.23)$$

представляет собой полное сопротивление границы, обусловленное наличием продольных и поперечных волн. Найдем отношение

$$Z_{\text{полн}}/Z_1 = \cos^2 2\gamma_1 + (Z_t/Z_1) \sin^2 2\gamma_1,$$

которое легко преобразуется в

$$Z_{\text{полн}}/Z_1 = 1 - (1 - \operatorname{tg} \gamma_1 / \operatorname{tg} \vartheta_1) \sin^2 2\gamma_1. \quad (7.24)$$

Так как всегда $\gamma_1 < \vartheta_1$, то $Z_{\text{полн}}/Z_1 < 1$.

Таким образом, полное сопротивление твердой границы меньше, чем сопротивление эквивалентной жидкости с теми же ρ_1 и c_1 , т. е. учет возбуждения поперечных волн при отражении соответствует некоторому как бы размягчению границы.

В [91] показано также, что при изменении угла падения ϑ $Z_{\text{полн}}$ изменяется меньше, чем сопротивление эквивалентной жидкости $Z_1 = \rho_1 c_1 / \cos \vartheta_1$, так что в некоторых случаях отражение от твердого тела приближенно можно рассматривать как отражение от среды, характеризуемой не зависящим от угла сопротивлением.

В заключение вышепомянутого выражения для амплитуд смешений в продольной u_t и поперечной u_t волнах через коэффициенты W_t и W_t и амплитуду звуко-

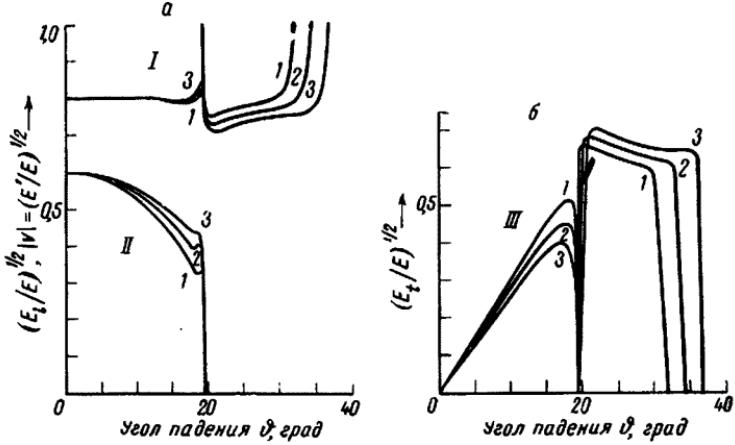


Рис. 7.2. Коэффициенты отражения и прозрачности при падении плоской волны из жидкости на упругое полупространство

вого давления $p_0 = \rho \omega \varphi'$ в падающей волне. Исходя из общей формулы (5.7), имеем $u_t = k_1 \varphi_1$ или, поскольку $\varphi_1 = W_1 \varphi'$, получаем

$$u_t = (p_0 / \rho c_1) W_1, \quad (7.25)$$

и аналогично

$$u_t = (p_0 / \rho b_1) W_t. \quad (7.26)$$

Представляют интерес также выражения для нормальной к границе компонент потоков энергии в отраженной волне в жидкости E' , а также в продольной и поперечной волнах в твердом теле E_l и E_t , отнесенные к аналогичной величине в падающей волне E :

$$\frac{E'}{E} = |V|^2, \quad \frac{E_l}{E} = (\rho_1 \operatorname{tg} \vartheta / \rho \operatorname{tg} \vartheta_1) |W_l|^2, \quad \frac{E_t}{E} = (\rho_1 \operatorname{tg} \vartheta / \rho \operatorname{tg} \gamma_1) |W_t|^2. \quad (7.27)$$

Читатель может убедиться, используя формулы (7.13) — (7.15), в справедливости закона сохранения энергии: $E = E' + E_l + E_t$. На рис. 7.2, а семейство кривых I изображает (по К. Эрджину [144]) зависимость модуля коэффициента отражения $|V|$ от угла падения при $\rho_1/\rho = 3$, $c_1/c = 3$ для трех разных случаев: $c_1/b_1 = 1.6$ (кривая 1); 1.7 (кривая 2); 1.8 (кривая 3). Кривые II на рис. 7.2, а и кривые III на рис. 7.2, б для тех же случаев изображают соответственно $(E_l/E)^{1/2}$ и $(E_t/E)^{1/2}$.

7.3. Другие случаи отражения. Пусть теперь из упругого полупространства на границу с жидкостью падает продольная волна. Очевидно, в (7.3) и (7.4) имеем в этом случае $\varphi'' = \psi_1 = 0$. После этого из (7.5) находим для коэффициента отражения:

$$\tilde{\varphi}_1''/\varphi_1' = (Z + Z_1 \sin^2 2\gamma_1 - Z_1 \cos^2 2\gamma_1) (Z + Z_1 \sin^2 2\gamma_1 + Z_1 \cos^2 2\gamma_1)^{-1}, \quad (7.28)$$

а также для коэффициентов трансформации продольной волны в поперечную и в звуковую волну в жидкость:

$$\tilde{\varphi}_1''/\varphi_1' = -(b_1^2 \sin 2\vartheta_1 / c_1^2 \cos 2\gamma_1) (1 - \tilde{\varphi}_1''/\varphi_1'), \quad (7.29)$$

$$\varphi''/\varphi_1' = (c \cos \vartheta_1 / c_1 \cos \vartheta \cos^2 2\gamma_1) (1 - \tilde{\varphi}_1''/\varphi_1'). \quad (7.30)$$

*После сдачи книги в печать появилась работа Motta (J. Acoust. Soc. Amer., 1971, 50, N 3 (part 2), 819), в которой рассматривается задача об отражении на границе жидкости и твердого тела с учетом потерь в средах.

Иллюстрацию энергетических соотношений для этого случая см. в работе К. Эрджина [144]. Они воспроизведены также в монографиях В. Юнга, В. Джарджетского и Ф. Пресса [145] и М. Редвуда [226].

Когда на границу падает поперечная волна ($\varphi'' = \varphi'_1 = 0$), получаем из (7.5):

$$\psi'_1/\psi_1' = -(Z + Z_1 \cos^2 2\gamma_1 - Z_t \sin^2 2\gamma_1)(Z + Z_1 \cos^2 2\gamma_1 + Z_t \sin^2 2\gamma_1)^{-1}, \quad (7.31)$$

$$\varphi'/\psi_1' = (\operatorname{tg} \theta/2 \sin^2 \gamma_1)(1 + \psi'_1/\psi_1'), \quad (7.32)$$

$$\varphi_1'/\psi_1' = (c_1^2 \cos 2\gamma_1 / b_1^2 \sin 2\theta)(1 + \psi_1'/\psi_1') \quad (7.33)$$

при $Z \rightarrow 0$ мы получаем рассмотренный в § 6 случай, когда упругое полупространство граничит с пустотой.

7.4. Поверхностная и «вытекающая» волны на границе. По определению, поверхностные волны могут существовать на границе при отсутствии падающей волны, следовательно, систему потенциалов для нее мы получим из (7.3) и (7.4), положив

$$\varphi'' = \varphi'_1 = \psi'_1 = 0. \quad (7.34)$$

Таким образом,

$$\varphi = \varphi' e^{iaz}, \quad \varphi_1 = \varphi''_1 e^{-ia_1 z}, \quad \psi_1 = \psi''_1 e^{-i\beta_1 z}. \quad (7.35)$$

Система (7.5) при учете (7.34) будет давать связь между постоянными φ' , φ_1 и ψ_1 . Так как система однородная, то равенство нулю ее детерминанта дает уравнение для горизонтального волнового числа ξ для этой волны

$$4mz\xi^2(x_1\beta_1 + p_1^2) + x_1\kappa_1^4 = 0. \quad (7.36)$$

Обозначим аналогично (6.20)

$$q = (b_1/c_1)^2, \quad r = (b_1/c)^2, \quad s = (x_1\xi)^2 = (v/b_1)^2, \quad (7.37)$$

где v — скорость поверхностной волны. Тогда, согласно (7.3) и (7.4),

$$\alpha = (i\omega/v)\sqrt{1-sr}, \quad \alpha_1 = (i\omega/v)\sqrt{1-sq}, \quad \beta_1 = (i\omega/v)\sqrt{1-s}. \quad (7.38)$$

В результате уравнение (7.36) запишется в виде, аналогичном (6.21),

$$4\sqrt{1-s}\sqrt{1-q} - (s-2)^2 = (\rho s^2/\rho_1)(1-sq)^{1/2}(1-sr)^{-1/2}. \quad (7.39)$$

Как и в случае рэлеевской волны (см. § 6.2), уравнение (7.36) можно получить из условия $V = \infty$, где V дается выражением (7.7).

Уравнение (7.39) всегда имеет решение, для которого $v < c$, $v < b_1$; α , α_1 и β_1 — положительно мнимые величины, а потенциалы (7.35) будут соответствовать поверхностной волне.

Найдем решение уравнения (7.39) в случае, когда упругое полупространство граничит с сравнительно разреженной средой, например, с газом, так, что можно считать выполненным условия $\rho/\rho_1 \ll 1$, $1/r = (c/b_1)^2 \ll 1$. Поскольку мы ищем корень $v < c$, то и $s = (v/b_1)^2 \ll 1$. Раскладывая в (7.39) левую часть по степеням s и ограничиваясь первой степенью, а затем возводя все уравнение в квадрат, мы получаем из него

$$1 - sr = \frac{s^2 \rho^2 (1 - sq)}{4\rho_1^2 (1 - q)^2}.$$

Считая здесь сначала правую часть нулем, мы получаем $s = 1/r$. В следующем приближении в правой части положим $s = 1/r$ и пренебрежем q/r по сравнению с 1. Тогда получаем

$$r_3 = 1 - \rho^2/4\rho_1^2 r^2 (1 - q)^2. \quad (7.40)$$

Это дает для скорости

$$v = b_1 \sqrt{s} \approx c [1 - \rho^2/8\rho_1^2 r^2 (1 - q)^2]^{1/2}, \quad (7.41)$$

которая оказывается несколько меньшей скорости звука в верхней среде. Из (7.38) теперь находим

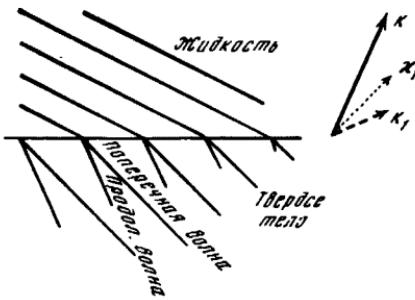
$$\alpha = ik \rho / 2\rho_1 r (1 - q), \alpha_1 \approx \beta_1 \approx ik, k = \omega/c. \quad (7.42)$$

Следовательно, убывание амплитуды потенциалов в верхней и нижней средах при удалении от границы будет описываться экспонентами

$$\exp[-k\rho z / 2\rho_1 r (1 - q)], z > 0; \quad \exp(kz), z < 0. \quad (7.43)$$

Таким образом, в газе, поскольку $\rho/\rho_1 r \ll 1$, амплитуда убывает при удалении от границы очень медленно, в то время как в упругом полупространстве весь волновой процесс сконцентрирован в слое толщиной порядка длины волны в верхней среде. В горизонтальном направлении (вдоль координаты x) волна не

Рис. 7.3. Схематическое изображение затухающей поверхностной волны на границе жидкости и твердого тела. В левой половине рисунка изображены волновые фронты, в правой — волновые векторы



затухает, если не учитывать поглощение энергии в средах. Мы встретимся с такой волной еще раз в § 41. М. Био [115], а также И. Толстой и К. Клей [94] называют ее волной Стонели, поскольку она получается как частный случай волны Стонели (см. § 8.2), когда одно из полупространств жидкое.

Кроме только что рассмотренной поверхностной волны на границе раздела жидкого и упругого полупространства существует еще одна волна. Ее природу легче понять, если снова предположить, что верхнее полупространство заполнено разреженной средой. Если бы оно было вакуумом, то на границе существовала бы волна Рэлея. Теперь она также, по-видимому, будет существовать, только ее скорость будет несколько видоизменена из-за реакции верхней среды. Однако если эта скорость будет больше c — скорости звука в верхней среде, то волна будет частично излучаться в верхнее полупространство, т. е. будет относиться к классу «вытекающих» волн (leaky waves) (см. Л. Фельзен [96]). Амплитуда такой волны будет убывать при продвижении вдоль границы. На рис. 7.3 изображены фронты волн в жидкости и в твердом теле (левая часть рисунка) и нормальные им волновые вектора (справа). Предполагается, что ослабление волны в горизонтальном направлении (слева направо) мало. Поскольку в жидкости имеет место отток энергии от границы, в твердом теле должен быть ее приток к границе. Это обеспечивается соответственным наклоном волновых фронтов по отношению к границе. Толщина линий, изображающих волновые фронты, условно передает амплитуду волны. Интересно отметить, что при удалении в жидкость от границы по направлению нормали к последней, мы будем наблюдать увеличение амплитуды волны. Это объясняется тем, что в более удаленных от границы точках волновое поле обусловлено излучением более левых участков границы, где амплитуда волны больше, чем в точках, лежащих правее.

«Вытекающая» волна сама по себе существовать не может, так как, в частности, поле на бесконечности неограниченно. Однако такого рода волны выделяются при рассмотрении поля точечного источника в слоистой среде.

При этом возрастание амплитуды волны при уходе от границы прекращается при некотором удалении и заменяется затем убыванием *.

В заключение заметим, что вопрос о волнах Рэлея на границе жидкости и твердого тела рассматривался также в работе А. Губанова [31].

§ 8. Отражение от границы упругих полупространств и от системы упругих слоев

8.1. Граница между двумя упругими полупространствами. Предположим, что упругая волна падает на границу из верхнего полупространства. Система потенциалов запишется (см. рис. 8.1):

$$z \geq 0, \quad \varphi = \varphi' e^{i\alpha z} + \varphi'' e^{-i\alpha z}, \quad \alpha = \sqrt{\xi^2 - k^2}, \quad (8.1)$$

$$\psi = \psi' e^{i\beta z} + \psi'' e^{-i\beta z}, \quad \beta = \sqrt{\xi^2 - \kappa^2},$$

$$z < 0, \quad \varphi_1 = \varphi'_1 e^{-i\alpha_1 z}, \quad \psi_1 = \psi'_1 e^{-i\beta_1 z}. \quad (8.2)$$

В нижнем полупространстве имеются только уходящие от границы волны. Фактор $\exp i(\xi x - \omega t)$ всюду опускаем. Подстановка (8.1) и (8.2) в граничные

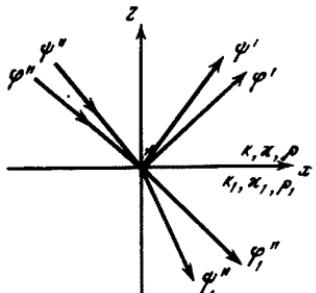


Рис. 8.1. Система волн при отражении на границе упругих полупространств

условия (5.11) дает систему уравнений, связывающих постоянные φ', \dots, ψ_1' :

$$\mu [\beta(\psi' - \psi'') - p(\varphi' + \varphi'')] = -\mu_1 (\beta_1 \psi_1' + p_1 \varphi_1'), \quad (8.3)$$

$$\mu [\alpha(\varphi' - \varphi'') + p(\psi' + \psi'')] = \mu_1 (-\alpha_1 \psi_1' + p_1 \varphi_1'), \quad (8.4)$$

$$\beta(\psi' - \psi'') - \xi(\varphi' + \varphi'') = -\beta_1 \psi_1' - \xi \varphi_1', \quad (8.5)$$

$$\alpha(\varphi' - \varphi'') + \xi(\psi' + \psi'') = -\alpha_1 \psi_1' + \varphi_1'. \quad (8.6)$$

Из двух уравнений (8.3) и (8.5) можно выразить $\varphi' + \varphi''$ и $\psi' - \psi''$ через φ_1' и ψ_1' :

$$(\kappa_1^2/2\xi^2)(\varphi' + \varphi'') = A_1 \varphi_1' + B_1 \psi_1', \quad (8.7)$$

$$(\kappa_1^2/2\xi^2)(\psi' - \psi'') = A_2 \varphi_1' + B_2 \psi_1', \quad (8.8)$$

где

$$A_1 = n^2 - mp_1/\xi; \quad A_2 = (n^2 p - mp_1)/\beta; \quad (8.9)$$

$$B_1 = (n^2 - m)\beta_1/\xi; \quad B_2 = (\beta_1/\beta)(n^2 p/\xi - m), \quad (8.9)$$

$$m \equiv \rho_1/\rho, \quad n \equiv b/b_1. \quad (8.10)$$

Аналогично, из (8.4) и (8.6) находим

$$(\kappa_1^2/2\xi^2)(\varphi' - \varphi'') = (\beta/\alpha)(x_1 B_2 \varphi_1'/\beta_1 - A_2 \psi_1'), \quad (8.11)$$

$$(\kappa_1^2/2\xi^2)(\psi' + \psi'') = -x_1 B_1 \varphi_1'/\beta_1 + A_1 \psi_1'. \quad (8.12)$$

*См., например, [53] где, в частности, рассмотрена «вытекающая» волна в случае тонкой пластинки, помещенной в жидкость.

Дальнейший ход рассуждений таков. Предположим, что на границу падает продольная волна, т. е. $\psi'' = 0$. Тогда $V_{tt} = \varphi'/\psi''$ будет коэффициентом отражения продольной волны, $V_{tt} = \psi''/\varphi''$ — коэффициентом трансформации продольной волны в поперечную при отражении, $W_{tt} = \varphi_1'/\psi''$ — коэффициентом прозрачности для продольной волны и $W_{tt} = \psi_1'/\varphi''$ — коэффициентом трансформации продольной волны в поперечную при пересечении границы. Вычитая (8.11) из (8.7), а затем (8.12) из (8.8), получаем после деления на φ'' два уравнения:

$$\begin{aligned}(A_1 - B_2 \alpha_1 \beta / \alpha \beta_1) W_{tt} + (B_1 + A_2 \beta / \alpha) W_{tt} &= x_1^2 / \xi^2, \\ (A_2 + B_1 \alpha_1 / \beta_1) W_{tt} - (A_1 - B_2) W_{tt} &= 0\end{aligned}\quad (8.13)$$

для определения W_{tt} и W_{tt} . V_{tt} и V_{tt} после этого найдутся элементарно, хотя бы из (8.11) и (8.12). Опуская простые, но несколько громоздкие выкладки, будем иметь:

$$\Delta \cdot V_{tt} = A_1^2 - \beta A_2^2 / \alpha + (\alpha_1 / \beta_1) (B_1^2 - \beta B_2^2 / \alpha) + m (\beta_1 / \beta - \alpha_1 / \alpha) (x_1^4 / 4 \xi^4), \quad (8.14)$$

где

$$\Delta = A_1^2 + \beta A_2^2 / \alpha + (\alpha_1 / \beta_1) (B_1^2 + \beta B_2^2 / \alpha) + m (\alpha_1 / \alpha + \beta_1 / \beta) (x_1^4 / 4 \xi^4). \quad (8.15)$$

И далее:

$$-(\Delta / 2) V_{tt} = A_1 A_2 + (\alpha_1 / \beta_1) B_1 B_2, \quad (8.16)$$

$$\Delta \cdot W_{tt} = (x_1^2 / \xi^2) (A_1 - B_2), \quad (8.17)$$

$$\Delta \cdot W_{tt} = (x_1^2 / \xi^2) (A_2 + \alpha_1 B_1 / \beta_1). \quad (8.18)$$

Если на границу падает поперечная волна, то надо положить $\varphi'' = 0$, $\varphi'/\psi'' = V_{tt}$, $\varphi''/\psi'' = V_{tt}$, $\varphi_1'/\psi'' = W_{tt}$, $\varphi_1''/\psi'' = W_{tt}$. При этом из (8.7), (8.8), (8.11) и (8.12) находим:

$$\Delta \cdot V_{tt} = (\alpha_1 / \beta_1) (B_1^2 - \beta B_2^2 / \alpha) + A_1^2 - \beta A_2^2 / \alpha + m (\alpha_1 / \alpha - \beta_1 / \beta) (x_1^4 / 4 \xi^4), \quad (8.19)$$

$$\Delta \cdot V_{tt} = -(2 \beta / \alpha) V_{tt}, \quad (8.20)$$

$$\Delta \cdot W_{tt} = (x_1^2 / \xi^2) (A_1 - \alpha_1 \beta B_2 / \alpha \beta_1), \quad \Delta \cdot W_{tt} = -(x_1^2 / \xi^2) (\beta A_2 / \alpha + B_1). \quad (8.21)$$

В работе [233] даны подробные таблицы значений коэффициентов отражения от границы раздела двух упругих полупространств для разных углов и соотношений параметров сред. Формально все наши результаты справедливы при наличии поглощения в средах (комплексные k , α , k_1 , α_1), хотя проведение конкретных расчетов и анализа результатов в этих случаях могут оказаться весьма нелегкими. Весьма обстоятельное исследование этого случая читатель может найти в работе Купера [133].

8.2. Поверхностная волна Стонели. Вытекающие волны. Условием существования поверхности волны является равенство

$$\Delta = 0. \quad (8.22)$$

Амплитуды отраженных и прошедших волн будут отличны от нуля при нулевой амплитуде падающей волны. Если (8.22) будет допускать вещественное решение для ξ , при котором α , β — положительно мнимые, а α_1 и β_1 — отрицательно мнимые величины, то такое решение и будет соответствовать поверхности волне. Оказывается, такое решение существовать может, на что впервые указал Р. Стонели [241]. В дальнейшем этот вопрос и, в частности, условие существования волны Стонели, исследовался в работах К. Сезава и К. Канаш [237], Л. Каньяра [128], Шолте [233], Ямагучи и Сато [270]. А. Гинзбарг и Е. Стрик [160] построили график для определения скорости волны Стонели при различных параметрах граничащих сред. Легко показать с по-

мощью формул (8.15) и (8.9), что когда одно из полупространств жидкое ($b = 0$, $n = 0$, $\beta = \kappa = \infty$), уравнение (8.22) переходит в (7.36). В результате мы получаем рассмотренный в § 7 случай волны Стонели на границе твердого тела и жидкости.

Как и в § 7, вдоль слоев могут распространяться различные классы «вытекающих волн». Хотя их амплитуда экспоненциально убывает с расстоянием, учет их иногда существен в задаче о поле точечного излучателя. Анализ этих волн для ряда случаев см. в работе Р. Финни [215].

8.3. Отражение звуковой волны от произвольного числа упругих слоев. Представим себе снова, как на рис. 3.4, систему из $n - 1$ слоев, ограниченную снизу твердым, а сверху жидким полупространствами. Из жидкого полупространства падает на систему слоев плоская звуковая волна с единичной амплитудой и углом падения θ_{n+1} . Требуется определить амплитуду отраженной волны и амплитуды двух волн (продольной и поперечной) в нижнем полупространстве. В каждом из слоев будет возникать пара продольных волн (распространяющихся вверх и вниз симметрично по отношению к горизонтальной плоскости) и пара аналогичных поперечных волн. В нижнем полупространстве будут уходящие вниз продольная и поперечная волны. Все волны будут содержать один и тот же множитель $\exp i(\xi x - \omega t)$, где

$$\xi = k_{n+1} \sin \theta_{n+1} = k_i \sin \theta_i = \kappa_i \sin \gamma_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (8.23)$$

который мы для сокращения записи будем опускать.

На каждой границе, разделяющей твердые среды, должны выполняться четыре граничных условия (5.10). На границе верхнего слоя непрерывности смещения u_x не требуется.

Прямой путь решения задачи заключался бы в составлении с помощью всех граничных условий $4n - 1$ алгебраических линейных уравнений относительно амплитуд такого же числа волн, включая и отраженную волну, а затем решение этой системы методом обращения матриц. Однако более рациональным оказывается другой метод, родственный примененному в § 3 и основывающийся на использовании рекуррентных формул, связывающих амплитуды волн в соседних слоях *.

Рассмотрим для примера слой номера n . Поместим временно начало координат на границе этого слоя и слоя $n - 1$. Выражения для потенциалов продольных и поперечных волн в слое можно записать (опуская для краткости индекс n):

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi'' e^{iaz} + \psi'' e^{-iaz}, & a &\equiv \sqrt{k^2 - \xi^2}, \\ \psi &= \psi' e^{i\beta z} + \psi'' e^{-i\beta z}, & \beta &\equiv \sqrt{\kappa^2 - \xi^2}. \end{aligned} \quad (8.24)$$

Компоненты смещений u_x и u_z найдутся по формулам (5.7), а компоненты тензора напряжений Z_z и Z_x по формулам (5.1). Значения величин u_x , u_z , Z_z , Z_x на верхней границе слоя n , т. е. при $z = d$, обозначим через $u_x^{(n)}$, $u_z^{(n)}$, $Z_z^{(n)}$, $Z_x^{(n)}$. Несложные выкладки дают:

$$\begin{aligned} u_x^{(n)} &= [i\xi \cos P(\varphi' + \varphi'') + \xi \sin P(\varphi' - \varphi'') + i\beta \cos Q(\psi' - \psi'') - \beta \sin Q(\psi' + \psi''), \\ P &\equiv ad, \quad Q \equiv \beta d. \end{aligned} \quad (8.25)$$

Аналогичный вид имеют формулы для $u_z^{(n)}$, $Z_z^{(n)}$ и $Z_x^{(n)}$. Другими лишь будут коэффициенты перед величинами $\varphi' + \varphi''$, $\varphi' - \varphi''$, $\psi' + \psi''$, $\psi' - \psi''$.

* В работе В. Томпсона [244] этим методом впервые было рассмотрено отражение волн от системы упругих слоев, ограниченных снизу и сверху жидкими полупространствами. Дальнейшее усовершенствование метода Томпсона см. в работе Д. Данкина [138]. Применение метода к неоднородным слоям см. в работе П. Ричардса (Elastic wave solutions in stratified media. Geophysics, 1971, 36, N 5, 798).

Все эти формулы можно записать в виде следующей таблицы:

$$\begin{vmatrix} u_x^{(n)} \\ u_z^{(n)} \\ Z_z^{(n)} \\ Z_x^{(n)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i\xi \cos P & \xi \sin P & i\xi \cos Q & \xi \sin Q \\ -\alpha \sin P & -i\alpha \cos P & \xi \sin Q & i\xi \cos Q \\ -(\lambda k^2 + 2\mu\alpha^2) \cos P & i(\lambda k^2 + 2\mu\alpha^2) \sin P & 2\mu\xi\beta \cos Q & -2i\mu\xi\beta \sin Q \\ 2i\mu\alpha\xi \sin P & 2\mu\alpha\xi \cos P & i\mu(\xi^2 - \beta^2) \sin Q & \mu(\beta^2 - \xi^2) \cos Q \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \varphi' + \varphi'' \\ \varphi' - \varphi'' \\ \psi' - \psi'' \\ \psi' + \psi'' \end{vmatrix} \quad (8.26)$$

Чтобы получить выражение для m -го элемента столбца ($m = 1, 2, 3, 4$) в левой части, необходимо по правилам матричной алгебры элементы крайнего столбца в правой части последовательно умножить на соответственные по номерам элементы m -й строки матрицы и результаты сложить. Для примера читатель может получить из (8.26) выражение (8.25).

На нижней границе выбранного нами слоя (при $z = 0$) аналогичные величины будут даваться таблицей, которую можно получить из (8.26), положив в последней $P = Q = 0$. Так как рассматриваемые компоненты тензора напряжений и вектора смещения при переходе через границу остаются неизменными, то это будут одновременно также и величины $u_x^{(n-1)}, \dots, Z_x^{(n-1)}$ на верхней стороне слоя $n - 1$. Таким образом, для них будем иметь:

$$\begin{vmatrix} u_x^{(n-1)} \\ u_z^{(n-1)} \\ Z_z^{(n-1)} \\ Z_x^{(n-1)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i\xi & 0 & i\xi & 0 \\ 0 & -i\alpha & 0 & i\xi \\ -(\lambda k^2 + 2\mu\alpha^2) & 0 & 2\mu\xi\beta & 0 \\ 0 & 2\mu\alpha\xi & 0 & \mu(\beta^2 - \xi^2) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \varphi' + \varphi'' \\ \varphi' - \varphi'' \\ \psi' - \psi'' \\ \psi' + \psi'' \end{vmatrix}. \quad (8.27)$$

Решая систему линейных уравнений (8.27) относительно $\varphi' + \varphi'', \dots, \psi' + \psi''$ и подставляя полученные решения в (8.26), мы получаем после простых, хотя и громоздких операций,

$$\begin{vmatrix} u_x^{(n)} \\ u_z^{(n)} \\ Z_z^{(n)} \\ Z_x^{(n)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_x^{(n-1)} \\ u_z^{(n-1)} \\ Z_z^{(n-1)} \\ Z_x^{(n-1)} \end{vmatrix}, \quad (8.28)$$

где элементы матрицы a_{ik} ($i, k = 1, 2, 3, 4$) даются выражениями:

$$a_{11} = 2\sin^2 \gamma \cos P + \cos 2\gamma \cos Q,$$

$$a_{12} = i(\operatorname{tg} \theta \cos 2\gamma \sin P - \sin 2\gamma \sin Q),$$

$$a_{13} = i \sin \theta (\cos Q - \cos P)/\omega \rho c,$$

$$a_{14} = (\operatorname{tg} \theta \sin \gamma \sin P + \cos \gamma \sin Q)/\omega \rho b,$$

$$a_{21} = i(2\operatorname{ctg} \theta \sin^2 \gamma \sin P - \operatorname{tg} \gamma \cos 2\gamma \sin Q),$$

$$a_{22} = \cos 2\gamma \cos P + 2\sin^2 \gamma \cos Q,$$

$$a_{23} = (\cos \theta \sin P + \operatorname{tg} \gamma \sin \theta \sin Q)/\omega \rho c,$$

$$a_{24} = i \sin \gamma (\cos Q - \cos P)/\omega \rho b,$$

$$a_{31} = -2i\omega \rho b \sin \gamma \cos 2\gamma (\cos Q - \cos P),$$

$$a_{32} = -\omega \rho [(c \cos^2 2\gamma / \cos \theta) \sin P + 4b \cos \gamma \sin^2 \gamma \sin Q],$$

$$\begin{aligned}
a_{33} &= \cos 2\gamma \cos P + 2 \sin^2 \gamma \cos Q, \\
a_{34} &= i(\cos 2\gamma \operatorname{tg} \theta \sin P - \sin 2\gamma \sin Q), \\
a_{41} &= -\omega b^2 [(\frac{4}{c}) \cos \theta \sin^2 \gamma \sin P + (\cos^2 2\gamma / b \cos \gamma) \sin Q], \\
a_{42} &= -2i\omega b^2 \sin \theta \cos 2\gamma (\cos Q - \cos P)/c, \\
a_{43} &= ib^2 [(\sin 2\gamma / c^2) \sin P - (\cos 2\gamma / b^2) \operatorname{tg} \gamma \sin Q], \\
a_{44} &= 2 \sin^2 \gamma \cos P + \cos 2\gamma \cos Q.
\end{aligned} \tag{8.29}$$

Углы θ и γ связаны с углом падения θ_{n+1} и значениями скоростей продольных c и поперечных b волн в этом слое законом Снеллиуса (8.23)

$$(1/c_{n+1}) \sin \theta_{n+1} = (1/c) \sin \theta = (1/b) \sin \gamma. \tag{8.30}$$

Если $c/c_{n+1} > 1$ и $\sin \theta_{n+1} > c_{n+1}/c$, то будем иметь $\sin \theta > 1$, θ — комплексно. В этом случае удобно положить $\theta = \pi/2 + i\xi$, $\sin \theta = \operatorname{ch} \xi$, $\cos \theta = -i \operatorname{sh} \xi$ и при расчетах пользоваться величиной ξ . Сказанное будет относиться и к углу γ , если $b/c_{n+1} > 1$.

Если предположить, что нам известны значения величин $u_x^{(1)}, \dots, Z_x^{(1)}$ на границе раздела 1 и 2 сред, то путем последовательного применения формулы (8.28) можно найти соответственные величины на границе сред n и $n+1$. Результат можно записать в виде

$$\begin{vmatrix} u_x^{(n)} \\ u_z^{(n)} \\ Z_z^{(n)} \\ Z_x^{(n)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_x^{(1)} \\ u_z^{(1)} \\ Z_z^{(1)} \\ Z_x^{(1)} \end{vmatrix}, \tag{8.31}$$

где матрица A является произведением всех матриц a , начиная со слоя 2 и кончая слоем $n-1$ (см. рис. 3.4). т. е.

$$A = a^{(n-1)} \dots a^{(3)} a^{(2)}, \tag{8.32}$$

где через $a^{(2)}$ обозначена матрица a , соответствующая слою 2, и т. д.

Перейдем, наконец, непосредственно к задаче об отыскании коэффициента отражения. Поместим теперь начало координат в соответствии с рис. 3.4 на границу сред 1 и 2. Суммарную толщину слоев обозначим через $H (= d_2 + \dots + d_n)$. Тогда суммарное поле падающей и отраженной звуковых волн в верхнем жидкокомплексном пространстве можно записать

$$\Phi_{n+1} = e^{-ik_{n+1}(z-H)} + V e^{ik_{n+1}(z-H)}, \tag{8.33}$$

где $\alpha_{n+1} = k_{n+1} \cos \theta_{n+1}$, а V — коэффициент отражения. В нижнем, упругом полупространстве будут только уходящие волны, потенциалы которых можно записать:

$$\Phi_1 = W e^{-ik_1 z \cos \theta_1}, \quad \Psi_1 = P e^{-ik_1 z \cos \gamma_1}. \tag{8.34}$$

Коэффициенты V , W и P могут быть найдены из условий на границах сред n и $n+1$:

$$z = H, \quad u_z^{(n+1)} = u_z^{(n)}, \quad Z_z^{(n+1)} = Z_z^{(n)}, \quad Z_x^{(n+1)} = Z_x^{(n)} = 0. \tag{8.35}$$

Подставив сюда $u_z^{(n)}$, $Z_z^{(n)}$ и $Z_x^{(n)}$ из (8.31) получаем

$$\begin{aligned}
u_z^{(n+1)} &= A_{21} u_x^{(1)} + A_{22} u_z^{(1)} + A_{23} Z_z^{(1)} + A_{24} Z_x^{(1)}, \\
Z_z^{(n+1)} &= A_{31} u_x^{(1)} + A_{32} u_z^{(1)} + A_{33} Z_z^{(1)} + A_{34} Z_x^{(1)}, \\
O &= A_{41} u_x^{(1)} + A_{42} u_z^{(1)} + A_{43} Z_z^{(1)} + A_{44} Z_x^{(1)},
\end{aligned} \tag{8.36}$$

где $u_z^{(n+1)}$ и $Z_z^{(n+1)}$ берутся при $z = H$, а $u_x^{(1)}, \dots, Z_x^{(1)}$ при $z = 0$.

Выразим из последнего уравнения $u_x^{(1)}$ и подставим в два первых, тогда будем иметь:

$$u_z^{(n+1)} = M_{22}u_z^{(1)} + M_{23}Z_z^{(1)} + M_{24}Z_x^{(1)}, \quad Z_z^{(n+1)} = M_{32}u_z^{(1)} + M_{33}Z_z^{(1)} + M_{34}Z_x^{(1)}, \quad (8.37)$$

где

$$M_{ik} = A_{ik} - A_{i1}A_{4k}/A_{41}, \quad i, k = 2, 3, 4. \quad (8.38)$$

Пользуясь формулами (5.1), (5.8), (8.33), (8.34) и полагая соответственно $z = H$ или $z = 0$, получаем

$$z = H, \quad u_z^{(n+1)} = ix_{n+1}(V - 1), \quad Z_z^{(n+1)} = -\omega^2\rho_{n+1}(1 + V) \quad (8.39)$$

$$z = 0 \quad \begin{cases} u_z^{(1)} = i(-\alpha_1 W + \xi P), & u_x^{(1)} = i(\xi W + \kappa_1 \cos \gamma_1 P), \\ Z_z^{(1)} = -\omega^2 \rho_1 (\cos 2\gamma_1 W - \sin 2\gamma_1 P), \\ Z_x^{(1)} = \omega^2 \rho_1 \left(\cos 2\gamma_1 P + \frac{b_1^2}{c_1^2} \sin 2\theta_1 W \right). \end{cases} \quad (8.40)$$

Теперь из (8.39) находим

$$V = \frac{Z_{bx} - Z_{n+1}}{Z_{bx} + Z_{n+1}}, \quad (8.41)$$

где обозначено:

$$Z_{bx} = iZ_z^{(n+1)}/\omega u_z^{(n+1)}, \quad Z_{n+1} = \rho_{n+1} c_{n+1}/\cos \theta_{n+1}. \quad (8.42)$$

Для входного импеданса системы слоев Z_{bx} находим из (8.37) и (8.40)

$$Z_{bx} = -A/B, \quad (8.43)$$

где

$$\begin{aligned} A &\equiv \alpha_1 M_{32} - i\omega^2 \rho_1 \left(\cos 2\gamma_1 M_{33} + \frac{b_1^2}{c_1^2} \sin 2\theta_1 M_{34} \right) - \\ &\quad - [\xi M_{32} + i\omega^2 \rho_1 (\sin 2\gamma_1 M_{33} - \cos 2\gamma_1 M_{34})] P/W, \\ B &\equiv i\alpha_1 \omega M_{22} + \omega^3 \rho_1 \left(\cos 2\gamma_1 M_{23} + \frac{b_1^2}{c_1^2} \sin 2\theta_1 M_{24} \right) - \\ &\quad - [i\xi \omega M_{22} - \omega^3 \rho_1 (\sin 2\gamma_1 M_{23} - \cos 2\gamma_1 M_{24})] P/W. \end{aligned}$$

Отношение P/W может быть найдено из последнего равенства (8.36) при подстановке в него (8.40)

$$\frac{P}{W} = \frac{\xi A_{41} - \alpha_1 A_{42} - \omega \rho_1 \cos 2\gamma_1 A_{43} + \omega \rho_1 (b_1^2/c_1^2) \sin 2\theta_1 A_{44}}{i\kappa_1 \cos \gamma_1 A_{41} - \xi A_{43} - \omega \rho_1 \sin 2\gamma_1 A_{43} - \omega \rho_1 \cos 2\gamma_1 A_{44}}. \quad (8.44)$$

Коэффициент прозрачности W можно получить, например, из первого из уравнений (8.36) при учете (8.39) и (8.40)

$$W = \frac{i2\alpha_{n+1}Z_{n+1}}{Z_{bx} + Z_{n+1}} S, \quad (8.45)$$

где

$$\begin{aligned} S &= [-\xi A_{21} + \alpha_1 A_{22} - i\omega^2 \rho_1 \cos 2\gamma_1 A_{23} + i\omega^2 \rho_1 (b_1^2/c_1^2) \sin 2\theta_1 A_{24}] + \\ &\quad + (P/W) (-\kappa_1 \cos \gamma_1 A_{21} - \xi A_{22} + i\omega^2 \rho_1 \sin 2\gamma_1 A_{23} + i\omega^2 \rho_1 \cos 2\gamma_1 A_{24})^{-1}. \end{aligned} \quad (8.46)$$

Здесь P/W предполагается взятым из (8.44). Формулы (8.41), (8.43), (8.44), (8.46) и решают задачу. Поглощение в средах учитывается предположением, что параметры λ и μ в них могут быть комплексными.

Как видно из (8.41), уравнение $Z_{\text{вх}} + Z_{n+1} = 0$ дает $V = \infty$ и является уравнением для определения скорости (и дисперсии) «поверхностных» волн в системе слоев. Детальный анализ этих волн проведен В. Кейлис-Бороком [43]; см. также работы [166, 130, 244].

В частном случае, рассмотренном в [244], когда нижнее полупространство является жидкостью, мы имеем $P/W = 0$, $\gamma_1 = 0$, $b_1 = 0$ и, воспользовавшись обозначением $Z_1 = \omega \rho_1 / \alpha_1 = \rho_1 c_1 / \cos \vartheta_1$, мы получим из (8.43) сравнительно простую формулу

$$Z_{\text{вх}} = \frac{i}{\omega} \frac{M_{32} - i\omega Z_1 M_{33}}{M_{22} - i\omega Z_1 M_{23}}. \quad (8.47)$$

Выпишем выражения для коэффициентов отражения и прозрачности для этого случая

$$V = \frac{M_{32} - i\omega Z_1 M_{33} - (i\omega M_{22} - Z_1 \omega^2) Z_{n+1}}{M_{32} + i\omega Z_1 M_{33} + (i\omega M_{22} - Z_1 \omega^2) Z_{n+1}}, \quad (8.48)$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_{n+1}} = W \frac{2i\omega Z_1}{M_{32} + i\omega Z_1 M_{33} + (i\omega M_{22} - Z_1 \omega^2) Z_{n+1}}. \quad (8.49)$$

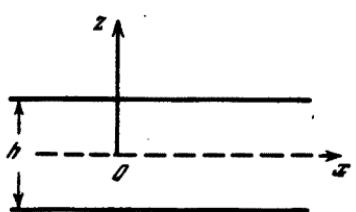
Если взять еще более частный случай одного жидкого слоя толщины d_2 , то формула (8.47) должна совпасть с (3.9). Действительно, в этом случае получаем, учитывая, что для жидкого слоя $b = 0$, $\kappa = \infty$, $\gamma = 0$:

$$\begin{aligned} M_{32} &= A_{32} = -\omega \rho_2 c_2 \sin P / \cos \vartheta_2, & P &= k_2 d_2 \cos \vartheta_2, \\ M_{33} &= A_{33} = M_{22} = A_{22} = \cos P, \\ M_{23} &= A_{23} = \cos \vartheta_2 \sin P / \omega \rho_2 c_2. \end{aligned}$$

Подстановка этих выражений в (8.47) и введение импедансов $Z_1 = \rho_1 c_1 / \cos \vartheta_1$, $Z_2 = \rho_2 c_2 / \cos \vartheta_2$ сразу переводит (8.47) в (3.9).

§ 9. Свободные волны в пластинках

Важным случаем применения полученных выше формул является отражение звуковой волны от пластиинки, помещенной в жидкость. Однако анализ этого случая целесообразно проводить после изучения свободных волн в пластинке, т. е. волн, распространяющихся самостоятельно вдоль пластиинки.



Этому вопросу и будет посвящен данный параграф. Свободные волны в пластиинке представляют существенный интерес и сами по себе, независимо от вопросов отражения звука. Их последовательная теория, по-видимому, впервые была дана Лэмбом [186].

9.1. Волны горизонтальной поляризации (SH-волны или волны Лява). Рассмотрим сначала более простой случай, когда смещение частиц $u_y = u(x, z)$ направлено параллельно границам пластиинки и перпендикулярно направлению распространения волн (направление оси x , рис. 9.1). Смещение u должно удовлетворять волновому уравнению (5.3), которое, если положить

$$u = f(z) \exp i(\xi x - \omega t), \quad (9.1)$$

запишется

$$f'' + \beta^2 f = 0, \quad \beta^2 = \kappa^2 - \xi^2. \quad (9.2)$$

Второе условие из (5.4), поскольку в окружающей пластиинку жидкости $\mu = 0$, дает

$$z = \pm h/2, \quad f' = 0. \quad (9.3)$$

Очевидно, уравнение (9.1) можно удовлетворить, положив

$$f = A \cos \beta z \quad (9.4')$$

или

$$f = B \sin \beta z. \quad (9.4'')$$

В первом случае смещение в пластинке симметрично относительно плоскости $z = 0$, во втором — антисимметрично. Соответственно мы имеем симметричную и антисимметричную волны. Подстановка (9.4') в (9.3) дает для симметричной волны

$$\sin(\beta h/2) = 0, \quad \beta_l = \pi l/h, \quad l = 0, 2, 4, \dots \quad (9.5)$$

Здесь l — номер нормальной волны в пластинке. Смещение в этом случае согласно (9.1) и (9.4') будет

$$u_l = A_l \cos(\pi l z/h) \exp i(\xi_l x - \omega t). \quad (9.6)$$

Коэффициенты A_l остаются неопределенными пока мы не рассматриваем источник волн. Заметим, что в нулевой нормальной волне ($l = 0$) смещение постоянно по всей толщине пластинки.

Аналогично, подстановка (9.4'') в (9.3) дает для антисимметричной волны:

$$\cos(\beta h/2) = 0, \quad \beta_l = \pi l/h, \quad l = 1, 3, \dots, \quad (9.7)$$

смещение в которой будет записываться

$$u_l = A_l \sin(\pi l z/h) \exp i(\xi_l x - \omega t). \quad (9.8)$$

Волновое число волн обоих типов будет согласно (9.2)

$$\xi_l = \sqrt{\kappa^2 - \beta_l^2} = \sqrt{\kappa^2 - (\pi l/h)^2}. \quad (9.9)$$

Соответственно фазовая скорость волны будет

$$V_l = \omega/\xi_l = b [1 - (\pi l/\kappa h)^2]^{-1/2} \quad (9.10)$$

и групповая скорость

$$U_l = (d\xi_l/d\omega)^{-1} = b (d\xi_l/dx)^{-1} = b [1 - (\pi l/\kappa h)^2]^{1/2}. \quad (9.11)$$

Следовательно, имеет место простое соотношение $V_l U_l = b^2$.

Заметим, что для заданной частоты ω существует максимальный номер нормальной волны

$$l_m = \text{целая часть } (\kappa h / \pi), \quad (9.12)$$

при котором ξ_l еще существенно и волна (при пренебрежении потерями) распространяется без затухания. Иначе говоря, для любой нормальной волны, кроме нулевой, существует критическая частота

$$\omega_k = \pi l_b^2 / h, \quad (9.13)$$

ниже которой волна не будет распространяться по пластинке.

Мы видим, что наличие жидкости, окружающей пластинку, никак не сказывается на характеристиках волн этого типа. Это и естественно, поскольку нормальные смещения границ пластинки равны нулю, т. е. волновой процесс в пластинке не может возбуждать какое-либо движение в жидкости (рассматриваемой как идеальная).

Наконец, мы увидим далее, что изложенная теория волн SH формально весьма схожа с теорией звуковых волн в жидком слое, ограниченном с обеих сторон неподатливыми стенками (см. § 35).

9.2. Волны вертикальной поляризации ($u_y = 0$). Компоненты смещения u_x и u_z выражаются в этом случае через потенциалы ϕ и ψ при помощи формул (5.8). Потенциалы удовлетворяют уравнениям (5.9). Мы будем рассматривать

случай, когда пластиинка граничит с вакуумом и, следовательно, на ее границах должны обращаться в нуль компоненты тензора напряжений Z_x и Z_z . Соответственно, из (5.11) получаем условия на границах:

$$z = \pm h/2, \quad \partial \psi / \partial z - ip\phi = 0, \quad \partial \phi / \partial z + ip\psi = 0. \quad (9.14)$$

Легко видеть, что уравнениям (5.9) удовлетворяют, например, выражения (фактор $\exp i(\xi x - \omega t)$ всюду подразумевается):

$$\varphi = A \cos \alpha z, \quad \psi = B \sin \beta z, \quad \alpha = \sqrt{k^2 - \xi^2}, \quad \beta = \sqrt{\kappa^2 - \xi^2}. \quad (9.15)$$

A и B — постоянные. Для u_z мы получаем

$$u_z = -A\alpha \sin \alpha z + i\xi B \sin \beta z. \quad (9.16)$$

При этом $u_z(z) = -u_z(-z)$ — вертикальные смещения симметричны относительно средней плоскости $z = 0$, которая не смещается. Это решение называют симметричной волной. Подстановка (9.15) в (9.14) дает

$$\operatorname{tg}(\alpha h/2) \operatorname{ctg}(\beta h/2) = -p^2/\alpha\beta, \quad (9.17)$$

$$B = (ipA/\beta) \cos(\alpha h/2)/\cos(\beta h/2), \quad (9.18)$$

из дисперсионного уравнения (9.17) определяется волновое число ξ_l , $l = 1, 2, \dots$, а также фазовая $V_l = \omega/\xi_l$ и групповая $U_l = d\omega/d\xi_l$ скорости.

Аналогичным образом волновые уравнения (5.9) удовлетворяются решениями для антисимметричной волны:

$$\varphi = C \sin \alpha z, \quad \psi = D \cos \beta z, \quad (9.19)$$

$$u_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x} = \alpha C \cos \alpha z + i\xi D \cos \beta z, \quad u(z) = u(-z). \quad (9.20)$$

Подстановка (9.19) в (9.14) дает

$$\operatorname{tg}(\alpha h/2) \operatorname{ctg}(\beta h/2) = -\alpha\beta p^2. \quad (9.21)$$

$$D = (i\alpha C/p) \cos(\alpha h/2)/\cos(\beta h/2). \quad (9.22)$$

Дисперсионные уравнения (9.17) и (9.18) часто называют уравнениями Рэлея — Лемба, по имени авторов, впервые их получивших и исследовавших.

Как симметричные, так и антисимметричные волны в пластиинке допускают простую физическую трактовку, на которой мы остановимся, предположив вначале, что α и β вещественны. Учитывая фактор $\exp i\xi x$, выражение (9.15) для φ запишем в виде

$$\varphi = \frac{A}{2} [e^{i(\xi x - \alpha z)} + e^{i(\xi x + \alpha z)}]. \quad (9.23)$$

Последнее выражение представляет собой суперпозицию двух плоских волн, распространяющихся в направлениях, составляемых со средней плоскостью пластиинки ($z = 0$) углы $\pm \chi$, где

$$\operatorname{tg} \chi = \alpha/\xi \quad \text{или} \quad \cos \chi = \xi/k. \quad (9.24)$$

Аналогично, ψ в (9.15) представится в виде суперпозиции двух плоских волн, распространяющихся в направлениях, составляющих углы $\pm \delta$ с плоскостью $z = 0$, где $\cos \delta = \xi/\kappa$. Таким образом, каждая нормальная волна представляет собой суперпозицию четверки плоских волн (двух продольных и двух поперечных), перемещающихся вдоль пластиинки с одной и той же скоростью $V = \omega/\xi$, удовлетворяя совместно условиям на границах пластиинки.

Как видно из (9.15), вещественные α и β соответствуют случаю $\xi < k < \kappa$, т. е. $V > c > b$ — фазовая скорость нормальной волны больше скорости продольных волн c в пластиинке. Если $k < \xi < \kappa$ ($c > V > b$), то α становится мнимой величиной. В этом случае продольные волны будут иметь характер поверхностных волн с максимальной амплитудой при $z = \pm h/2$, в то время

как поперечные волны будут по-прежнему пронизывать пластинку, имея одинаковую амплитуду, по всей ее толщине. Наконец, когда $k < \kappa < \xi$, т. е., $c > b > V$ — фазовая скорость нормальной волны меньше скорости сдвиговых волн в пластинке — как α , так и β будут мнимыми. В этом случае нормальная волна в целом будет концентрироваться около границ пластинки. При большой толщине последней, когда поверхностные волны на обеих границах не будут взаимодействовать друг с другом, надо ожидать, что мы получим около каждой границы поверхностные волны типа Рэлеевской. И действительно, полагая

$$\alpha = i\sqrt{\xi^2 - k^2}, \quad \beta = i\sqrt{\xi^2 - \kappa^2}, \quad (9.25).$$

мы будем иметь при $h \rightarrow \infty$,

$$\operatorname{tg}(\alpha h/2) \operatorname{ctg}(\beta h/2) = \operatorname{th}[\sqrt{\xi^2 - k^2} h/2]/[\operatorname{th}[\sqrt{\xi^2 - \kappa^2} h/2] \rightarrow 1,$$

в результате чего (9.17) и (9.21) переходят в уравнение (6.18) для скорости волны Рэлея.

Весьма важным является также случай малых толщин или, что то же самое, низких частот. Рассмотрим сначала симметричную волну. Заменив в (9.17) тангенсы аргументами, получаем $-\alpha^2 = p^2$, т. е. p будет мнимо. Учитя здесь значение p^2 из (5.13), а также, что $-\alpha^2 = \xi^2 - k^2$, мы находим

$$\xi = \kappa^2/2\sqrt{\kappa^2 - k^2}, \quad V = \omega/\xi = 2b\sqrt{1 - (b/c)^2}. \quad (9.26).$$

Эту волну, распространяющуюся без дисперсии (V не зависит от частоты) и аналогичную юнговской волне в стержне, обычно называют продольной. Название не совсем удачное, поскольку во всех точках (кроме плоскости $z = 0$) отличны от нуля и поперечные смещения.

Рассмотрим теперь антисимметричную волну, положив в (9.21) при малой толщине пластинки:

$$\operatorname{tg}(\alpha h/2) \approx (\alpha h/2)(1 + \alpha^2 h^2/12), \quad \operatorname{ctg}(\beta h/2) \approx 2/\beta h(1 + \beta^2 h^2/12). \quad (9.27).$$

Тогда получаем

$$p^2 [1 - \kappa^2 - k^2] h^2/12 = -\beta^2,$$

отсюда находим

$$\xi = 3^{-1/4} \kappa h^{-1/2} (\kappa^2 - k^2)^{-1/4} \quad (9.28).$$

$$V = \omega/\xi = 3^{-1/4} b \sqrt{\kappa h} (1 - b^2/c^2)^{1/4}. \quad (9.29).$$

В этом случае мы имеем хорошо известную изгибную волну. Изгибная волна обладает дисперсией. Ее групповая скорость будет

$$U = (d\xi/d\omega)^{-1} = 2 \cdot 3^{-1/4} (\kappa h)^{1/4} (1 - b^2/c^2)^{1/4} (1 - 2b^2/c^2)^{-1}. \quad (9.30).$$

Продольная и изгибная волны являются волнами, не обладающими критической частотой, т. е. способными распространяться при любой, как угодно малой частоте (хотя скорость изгибных волн стремится к нулю при стремлении к нулю частоты). Кроме того, в пластинке существует неограниченное ко-

Рис. 9.2. Симметричные волны $l = 1$ и $l = 2$. Зависимость фазовой скорости от длины волны при $\sigma = 1/4$ (по Толстому и Асадину [248])

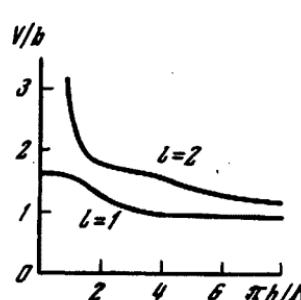
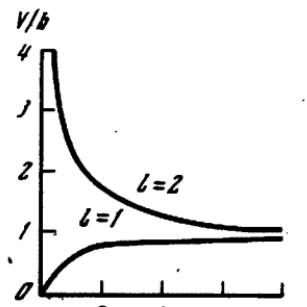


Рис. 9.3. Антисимметричные волны $l = 1$ и $l = 2$. Зависимость фазовой скорости от длины волны при $\sigma = 1/4$ (по Толстому и Асадину [248])



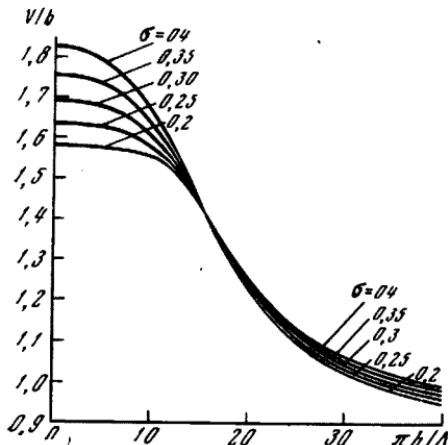


Рис. 9.4. Зависимость отношения фазовой скорости к скорости поперечных волн b от длины волны при разных значениях коэффициента Пуассона σ для симметричной волны $l = 1$ (продольная волна) по Морзе [226]

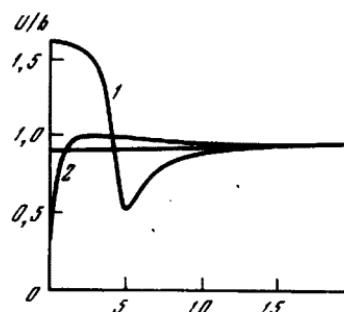
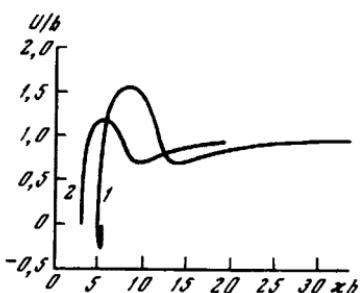


Рис. 9.5. Зависимость отношения групповой скорости U к скорости поперечных волн b от частоты (точнее, параметра $\chi h = \omega h/b$) при $\sigma = 1/4$ по Толстому и Асдину [248]

1 — продольная (симметричная) волна;
2 — изгибная (антисимметричная) волна

Рис. 9.6. То же, что и для рис. 9.5, но для $l = 2$



личество как симметричных, так и антисимметричных волн более высоких порядков, каждая из которых обладает своей критической частотой. Мы будем присваивать им индексы $l = 2, 3, \dots$ в порядке возрастающих критических частот. $l = 1$ будет соответствовать продольной и изгибной волнам. На рис. 9.2 изображено при $\sigma = 1/4$ отношение фазовой скорости V к скорости поперечных волн для симметричных волн $l = 1$ и $l = 2$ как функция величины $\xi h/2 = \pi h/\Lambda$, Λ — длина волны.

На рис. 9.3 изображено то же для антисимметричных волн. На рис. 9.4 изображена зависимость V/b от $\pi h/\Lambda$ для продольной волны ($l = 1$) при разных значениях коэффициента Пуассона σ .

На рис. 9.5 (нижний левый рисунок) изображена зависимость групповой скорости (точнее отношения U/b) при $l = 1$ от величины $\chi h = \omega h/b$ для симметричной (продольная) и антисимметричной (изгибная) волн. Горизонтальная прямая соответствует $U = v_R$.

На рис. 9.6 отношение U/b изображено как функция того же параметра χh для $l = 2$. Критическая частота для симметричной волны оказывается выше, чем для антисимметричной. Интересно отметить, что для симметричной волны вблизи ее критической частоты имеется узкий интервал частот, для которых U отрицательно. Это означает, что на этих частотах фазовая и групповая скорости имеют разные знаки. В случае сосредоточенного источника волн, поскольку поток энергии, совпадающий по направлению с U , всегда направлен от источника, фазовая скорость будет направлена к источнику.

На критической частоте фазовая скорость становится бесконечной, что позволяет легко определить эту частоту при любом l . При $V = \infty$ имеем $\xi = 0$, $p = \infty$, $a = k = \omega/c$, $\beta = \chi = \omega/b$. В результате из (9.17) получаем для симметричных волн

$$\omega h/c = \pi, 3\pi, \dots \text{ или } \omega h/b = 2\pi, 4\pi, \dots \quad (9.31)$$

Аналогично, из (9.21) для антисимметричных волн

$$\omega h/c = 2\pi, 4\pi, \dots \text{ или } \omega h/b = \pi, 3\pi, \dots \quad (9.32)$$

Из этих условий следует, что на критических частотах на толщине пластиинки укладывается целое число продольных или поперечных полуволн.

При частотах, ниже критической, фазовая скорость при данной форме колебаний пластиинки оказывается мнимой. В этом случае никакой волны, распространяющейся вдоль пластиинки, не существует, а имеются лишь колебания частиц с одинаковой фазой вдоль пластиинки и спадающей по экспоненциальному закону амплитудой. С аналогичным явлением мы встретимся также в § 35 при изучении распространения волн в слоях.

Тот факт, что для волн в пластиинке, находящейся в пустоте, скорость V должна быть чисто вещественной или чисто мнимой, вытекает также из чисто энергетических соображений. Действительно, так как излучение энергии пластиинкой в окружающее пространство отсутствует, а затуханием в самой

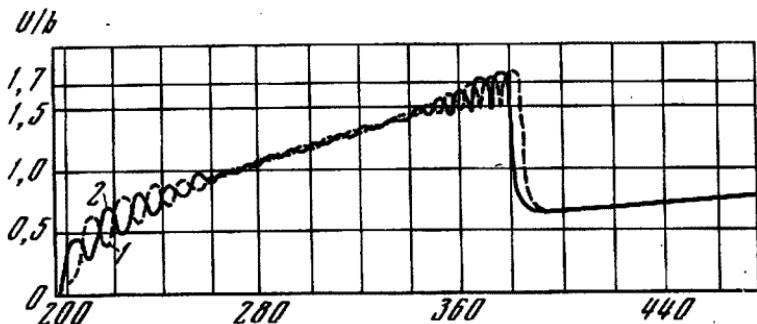


Рис. 9.7. U/b — отношение групповой скорости к скорости поперечных волн как функция параметра xh при $l = 50$ (по Толстому и Асдину [249])

1 — симметричная волна; 2 — антисимметрическая волна

пластиинке мы пренебрегаем, то поток энергии вдоль пластиинки должен быть или всюду постоянным по ее длине (V вещественно), или быть вообще равным нулю (V мнимо).

Интересно проанализировать поведение нормальных волн высоких номеров, что и было сделано И. Толстым и Е. Асдином [248]. На рис. 9.7 изображены кривые групповой скорости (отнесенной к скорости поперечных волн b) в зависимости от xh при $l = 50$ для симметричной (пунктирная линия) и антисимметрической (сплошная линия) волн. В области $200 < xh < 380$ кривые осциллируют, многократно пересекаясь друг с другом. Такое поведение кривых будет более понятно, если рассмотреть характер кривых фазовой скорости, скажем, в интервале $360 < xh < 385$ (рис. 9.8). На этом рисунке пунктирные линии, образующие сетку, представляют собой кривые фазовых скоростей, для которых:

$$\alpha = pr, \quad V_i = c(1 - p^2\pi^2/\omega^2)^{-1/2} \text{ и } \beta = s\pi, \quad V = b(1 - s^2\pi^2/\omega^2)^{-1/2}, \quad (9.33)$$

где s и p — целые числа. Кривые для фазовой скорости симметричных и антисимметрических волн пересекаются в узлах сетки, в которых $p + s = 2l$ (в нашем случае $l = 50$). В узлах, где s и p нечетны, фазовая скорость симметрических волн изменяется весьма слабо (кривая образует нечто вроде пласта) и согласно формуле

$$U = V \left(1 - \frac{\omega}{V} \frac{dV}{d\omega} \right)^{-1} \quad (9.34)$$

в этих точках имеем максимумы U . Для антисимметрических волн в этих точках $|dV/d\omega|$ не мало ($dV/d\omega < 0$) и U минимально. В точках, где s и p четны, все происходит также, но с переменной ролью симметрических и антисимметрических волн. При тех xh , когда имеем максимум U , энергия волны заключена в основном в продольных колебаниях, при U — минимальном — в основном в сдвиговых.

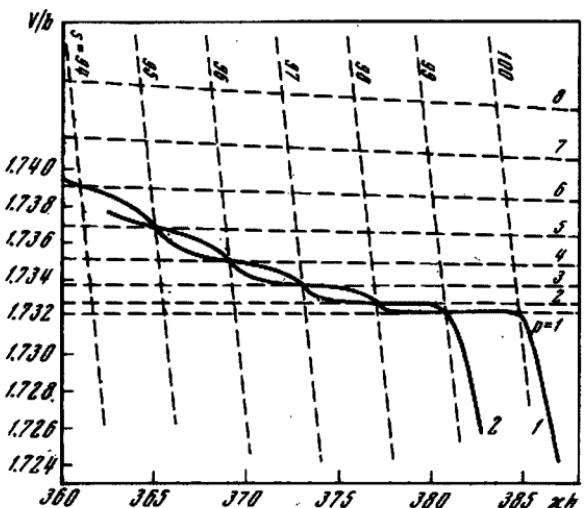


Рис. 9.8. Кривые фазовых скоростей для симметричной (1) и антисимметричной (2) волн ($l = 50$, $c = 0,25$)

печивать поток энергии как симметричной, так и антисимметричной волн. Кривые групповой скорости на рис. 9.7 при этих kh идут монотонно, приближаясь асимптотически при увеличении kh к скорости сдвиговых волн b .

Теория свободных волн в пластинке усложняется, конечно, если пластина погружена в жидкость. Дисперсионное уравнение для этого случая получено в §§ 10, 11. Там же указаны и некоторые следствия из него. Затухание волн, обусловленное излучением в окружающую среду, рассмотрено, в частности, в работе Л. Г. Меркулова [66]. Затухание волн в пластинке, вызванное вязкими потерями в ней, рассмотрено в работах [116 и 33]. Распространение волн в пластинке, граничащей со слоисто-неоднородной жидкостью, рассматривалось В. Ю. Завадским [34].

Наконец, надо отметить, что мы рассматривали только гармонические волны. В случае распространения импульса с широким спектром частот, определяющей является зависимость групповой скорости от частоты. В случае узкополосного импульса проблема требует дополнительного рассмотрения. Мы отсылаем читателя по этому вопросу к весьма полезной книге М. Редвуда [226].

§ 10. Отражение звуковой волны от пластины и прохождение ее через пластины

10.1. Коэффициенты отражения и прозрачности. Пусть пластина 2 будет помещена между двумя жидкими полубесконечными средами 1 и 3, а звуковая волна падает со стороны среды 3 (рис. 10.1). Коэффициенты отражения и прозрачности могут быть найдены из общих формул (8.48) и (8.49), в которых надо положить $n = 2$. Величины M_{ik} , $i, k = 2, 3$ определяются из (8.38), в которых $A_{ik} = a_{ik}$ даются формулами (8.29).

Рассмотрим вначале случай, когда по обе стороны пластины имеем одну и ту же жидкость, т. е. $\rho_1 = \rho_3$, $Z_1 = Z_3$. Тогда из (8.49) получаем для коэффициента прозрачности

$$W = 2i\omega Z_1 [M_{32} + i\omega Z_1 (M_{22} + M_{33}) - \omega^2 Z_1^2 M_{23}]^{-1}. \quad (10.1)$$

Входящие сюда величины мы запишем в виде

$$\omega M_{23} = 1/Z_1 N, \quad M_{22} + M_{33} = 2M/N, \quad M_{32} = \omega Z_1 (M^2 - N^2)/N, \quad (10.2)$$

Как видно из рис. 9.7, абсолютный максимум групповой скорости как для симметричной, так и для антисимметричной волн имеет место в районе $kh = 380$. При этом $U \approx \sqrt{3} b \approx c$ — скорость продольных волн. При дальнейшем увеличении kh , как видно из рис. 9.8, фазовая скорость обеих волн становится меньше c . В этом случае, как указано выше, продольная часть деформаций в каждой волне концентрируется вблизи границ пластины (a — мнимо), в то время как сдвиговая часть распространяется во всей толще пластины (если $V > b$). Именно сдвиговая часть при $kh > 385$ только и будет обес-

где

$$\begin{aligned} N &= Z_2 \cos^2 2\gamma_2 / Z_1 \sin P + Z_{2t} \sin^2 2\gamma_2 / Z_1 \sin Q, \\ \alpha_2 h &= k_2 h \cos \theta_2 = P; \quad \beta_2 h = \kappa_2 h \cos \gamma_2 = Q, \\ M &= (Z_2 / Z_1) \cos^2 2\gamma_2 \operatorname{ctg} P + (Z_{2t} / Z_1) \sin^2 2\gamma_2 \operatorname{ctg} Q, \\ Z_1 &= \rho_1 c_1 / \cos \theta_1, \quad Z_2 = \rho_2 c_2 / \cos \theta_2, \quad Z_{2t} = \rho_2 b_2 / \cos \gamma_2. \end{aligned} \quad (10.3)$$

В результате выражение для коэффициента прозрачности записывается

$$W = 2N [2M + i(N^2 - M^2 + 1)]^{-1}. \quad (10.4)$$

Точно таким же образом для коэффициента отражения получаем

$$V = i(N^2 - M^2 - 1) [2M + i(N^2 - M^2 + 1)]^{-1}. \quad (10.5)$$

Если угол падения θ_2 не превышает угла полного внутреннего отражения на границе жидкость — твердое тело ни для продольных, ни для поперечных волн, то углы θ_2 и γ_2 , а следовательно, и величины M и N являются вещественными, и для коэффициентов отражения и прозрачности по энергии мы получаем

$$|V|^2 = (N^2 - M^2 - 1)^2 [4M^2 + (N^2 - M^2 + 1)^2]^{-1},$$

$$|W|^2 = 4N^2 [4M^2 + (N^2 - M^2 + 1)^2]^{-1}. \quad (10.6)$$

При этом $|V|^2 + |W|^2 = 1$ согласно закону сохранения энергии.

В том случае, когда свойства жидких сред 3 и 1 неодинаковы, мы получаем аналогичным образом

$$V = \frac{M(Z_1 - Z_2) + i[(N^2 - M^2)Z_2 - Z_1]}{M(Z_1 + Z_2) + i[(N^2 - M^2)Z_2 + Z_1]}, \quad (10.7)$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} W = \frac{2NZ_1}{M(Z_1 + Z_2) + i[(N^2 - M^2)Z_2 + Z_1]}. \quad (10.8)$$

Представляет определенный интерес случай $Z_1 = 0$ (среда 1 — вакуум). При этом из (10.7) получаем

$$V = \exp i\phi, \quad \phi = 2 \operatorname{arctg} [M/(N^2 - M^2)]. \quad (10.9)$$

Этой формулой, например, будет выражаться коэффициент отражения звуковой волны, падающей из воды на ее ледяной покров в полярных морях, поскольку импеданс воздуха можно принять равным нулю.

Возвратимся снова к случаю, когда по обе стороны пластинки одна и та же жидкость. На рис. 10.2, взятом из [245], сплошной линией изображено теоретическое значение коэффициента прозрачности $|W|^2$ по энергии (формула (10.6)) как функция угла падения для алюминиевой пластиинки, толщиной 2,5 мм в воде. Частота звука 402 кгц, что соответствует длине волны звука в алюминии $\lambda \approx 1,3$ см. Сильное увеличение прозрачности в области 40° объясняется причинами, которые будут подробно рассмотрены в следующем разделе. Пунктирная кривая получена экспериментально. Некоторое несовпадение местоположения пиков на теоретической и экспериментальной кривых, по-видимому, объясняется тем, что в теоретических расчетах не учитывается затухание волн в пластиинке.

Так же как и в § 8.2, приравнивая к нулю знаменатель в (10.4), мы получаем условие существования свободных волн в пластиинке, погруженной в жидкость:

$$2M + i(N^2 - M^2 + 1) = 0. \quad (10.10)$$

В этом случае при стремлении амплитуды падающей волны к нулю амплитуды отраженной и прошедшей волн остаются конечными. При этом, если по-

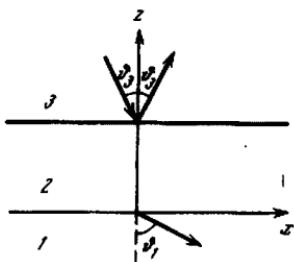


Рис. 10.1. К теории отражения плоской волны от пластиинки

следние будут обычными волнами, уходящими от пластинки, свободная волна в пластинке будет затухающей вследствие потерь энергии на излучение. Если же эти волны будут неоднородными (комплексные θ_1 и θ_3), то соответствующие им свободные волны в пластинке будут незатухающими (затуханием волн в самой пластинке пренебрегаем).

Учитывая (10.2), уравнение (10.10) можно преобразовать к виду

$$(E + iZ_1)(F - iZ_1) = 0, \quad (10.11)$$

где

$$E = Z_2 \cos^2 2\gamma_2 \operatorname{ctg} (P/2) + Z_{2t} \sin^2 2\gamma_2 \operatorname{ctg} (Q/2),$$

$$F = Z_3 \cos^2 2\gamma_3 \operatorname{tg} (P/2) + Z_{3t} \sin^2 2\gamma_3 \operatorname{tg} (Q/2). \quad (10.12)$$

Значения Z_1 , Z_2 и Z_3 даются формулой (10.3). Напоминаем, что величины P и Q дают набег фазы соответственно продольной и поперечной волн на толщине пластинки; индекс 2 относится к пластинке, индекс 1 — к окружающей среде.

При заданных толщине пластинки, ее плотности и скоростях продольных и поперечных волн в ней неопределенными в уравнении (10.11) остаются лишь углы θ_1 , θ_2 и θ_3 . Так как, однако, все они связаны законом преломления

$$\frac{\sin \theta_1}{c_1} = \frac{\sin \theta_2}{c_2} = \frac{\sin \theta_3}{b_2}, \quad (10.13)$$

то в конечном счете неопределены будет лишь один какой-нибудь из этих трех углов, через который и можно выразить два другие. Однако удобнее из уравнения (10.11) определять величину

$$V = c_1 / \sin \theta_1 = c_2 / \sin \theta_2 = b_2 / \sin \gamma_2, \quad (10.14)$$

Рис. 10.2. Коеффициент прозрачности алюминиевой пластинки, толщиной 2,5 мм в воде на частоте $4,02 \cdot 10^6$ Гц
1 — теоретическая кривая;
2 — экспериментальная

равную скорости перемещения следа каждой из этих трех волн вдоль пластинки.

Уравнение (10.11) разбивается на два уравнения

$$E + iZ_1 = 0, \quad F - iZ_1 = 0. \quad (10.15)$$

Можно показать [232], что верхнее уравнение соответствует симметричным, а нижнее — антисимметричным волнам. Если принять плотность окружающей среды ρ_1 , равной нулю (следовательно, $Z_1 = 0$), то (10.15) переписывается:

$$E = 0 \quad (10.16')$$

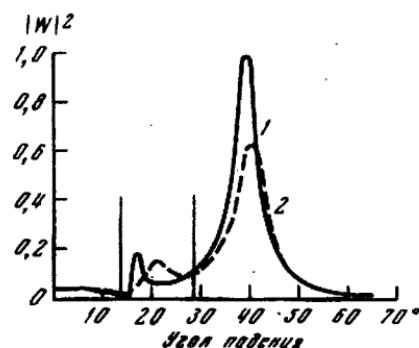
и

$$F = 0. \quad (10.16'')$$

Легко показать (учитывая, в частности, (6.13)), что (10.16') и (10.16'') эквивалентны соответственно уравнениям (9.17) и (9.21).

Решения уравнений (10.15) будут давать в общем случае комплексные значения скорости V , что объясняется потерей энергии волны на излучение в окружающую среду. Однако если в окружающей среде возбуждаются неоднородные волны (случай $V < c_1$), то излучение отсутствует, и волны в пластинке будут незатухающими. Подробное исследование [232] показывает, что таких волн будет две. Одна из них принадлежит к симметричному, другая к антисимметричному типу.

10.2. Случай полной прозрачности пластинки. Вернемся снова к выражениям (10.6) для коэффициентов отражения и прозрачности. Для величины



то в конечном счете неопределены будет лишь один какой-нибудь из этих трех углов, через который и можно выразить два другие. Однако удобнее из уравнения (10.11) определять величину

$$V = c_1 / \sin \theta_1 = c_2 / \sin \theta_2 = b_2 / \sin \gamma_2, \quad (10.14)$$

равную скорости перемещения следа каждой из этих трех волн вдоль пластинки.

Уравнение (10.11) разбивается на два уравнения

$$E + iZ_1 = 0, \quad F - iZ_1 = 0. \quad (10.15)$$

Можно показать [232], что верхнее уравнение соответствует симметричным, а нижнее — антисимметричным волнам. Если принять плотность окружающей среды ρ_1 , равной нулю (следовательно, $Z_1 = 0$), то (10.15) переписывается:

$$E = 0 \quad (10.16')$$

и

$$F = 0. \quad (10.16'')$$

Легко показать (учитывая, в частности, (6.13)), что (10.16') и (10.16'') эквивалентны соответственно уравнениям (9.17) и (9.21).

Решения уравнений (10.15) будут давать в общем случае комплексные значения скорости V , что объясняется потерей энергии волны на излучение в окружающую среду. Однако если в окружающей среде возбуждаются неоднородные волны (случай $V < c_1$), то излучение отсутствует, и волны в пластинке будут незатухающими. Подробное исследование [232] показывает, что таких волн будет две. Одна из них принадлежит к симметричному, другая к антисимметричному типу.

10.2. Случай полной прозрачности пластинки. Вернемся снова к выражениям (10.6) для коэффициентов отражения и прозрачности. Для величины

обратной прозрачности имеем

$$1/|W|^2 = 1 + (1 + M^2 - N^2)^2/4N^2 \quad (10.17)$$

или, если воспользоваться обозначениями (10.12),

$$1/|W|^2 = 1 + (Z_1^2 - EF)^2 (2/Z_1)^2 (E + F)^{-2}. \quad (10.18)$$

Условие полной прозрачности ($|W|^2 = 1$) запишется в виде

$$EF = Z_1^2. \quad (10.19)$$

Оно определяет угол падения волны θ_1 (или фазовую скорость волны $V = c_1/\cos \theta_1$ вдоль пластиинки), при котором имеет место полное прохождение звуковой волны через пластиинку.

Часто отношение $\rho_1 c_1 / \rho_2 c_2$ волновых сопротивлений окружающей среды и пластиинки весьма мало по сравнению с 1. Так, для алюминиевой пластиинки в воздухе и в воде оно приблизительно равно $2 \cdot 10^{-5}$ и 0,09 соответственно. В таких случаях величиной Z_1^2 в первом приближении можно пренебречь и уравнение (10.19) записать

$$EF = 0. \quad (10.20)$$

Это уравнение совпадает с уравнениями (10.16) для свободных волн в пластиинке. Таким образом, мы получаем важный результат: если волновое сопротивление окружающей жидкости существенно меньше, чем пластиинки, то полное прохождение имеет место при таких углах падения, когда скорость следа падающей волны вдоль пластиинки совпадает с фазовой скоростью свободных волн в пластиинке. Это правило было названо Л. Кремером [134] «правилом совпадений» *.

Экспериментальное подтверждение этого правила так же, как и анализ связи между прозрачностью пластиинки и характеристиками свободных волн в пластиинке, содержится в обстоятельной работе А. Шоха [232].

Надо иметь в виду, что совсем не каждая свободная волна в пластиинке может соответствовать полному прохождению звуковой волны через пластиинку. Так, например, сдвиговые волны в пластиинке, смещения в которых параллельны границам пластиинки, никак не могут быть связанными со звуковыми волнами в окружающей среде. Другие свободные волны в пластиинке могут соответствовать полной прозрачности лишь при комплексных углах падения звуковых волн.

10.3. Падение волны под углом полного внутреннего отражения. Продолжая анализировать различные частные случаи прохождения звуковой волны через пластиинку, имеет смысл рассмотреть случай $\theta_1 = \arcsin(c_1/c_2)$, что соответствует граничному углу полного внутреннего отражения для продольных волн на границе жидкости и упругого полупространства.

При $\sin \theta_1 \rightarrow c_1/c_2$ мы имеем $\sin \theta_2 = (c_2/c_1) \sin \theta_1 \rightarrow 1$, т. е. $\theta_2 \rightarrow \pi/2$ — продольная волна распространяется параллельно границам пластиинки. При этом в (10.12)

$$P = (\omega h/c_3) \cos \theta_2 \rightarrow 0, \quad Z_2 = \rho_2 c_2 / \cos \theta_2 \rightarrow \infty, \quad Z_2 \operatorname{tg}(P/2) \rightarrow \rho_2 \omega h / 2.$$

В результате получаем

$$E \rightarrow \infty, \quad F \rightarrow (\rho_2 \omega h / 2) \cos^2 2\gamma_2 + Z_2 \sin^2 2\gamma_2 \operatorname{tg}(Q/2). \quad (10.21)$$

Выражение (10.18) при этом приобретает вид

$$1/|W|^2 = 1 + 4F^2/Z_1^2 = 1 + 4[(\rho_2 \omega h / 2) \cos^2 2\gamma_2 + Z_2 \sin^2 2\gamma_2 \operatorname{tg}(Q/2)]/Z_1^2. \quad (10.22)$$

*Полезно отметить, что в случае прохождения волны через жидкий слой, сформулированное выше «правило совпадений» является не приближенным, а точным.

Нетрудно видеть, что здесь может осуществляться как полное отражение, так и полная прозрачность. В самом деле, при

$$Q = (2n + 1)\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (10.23)$$

получаем $|W|^2 = 0$, т. е. полное отражение. Учитывая значение Q из (10.3), последнее условие можно записать

$$h = (2n + 1) \lambda_t / 2 \cos \gamma_2. \quad (10.24)$$

Таким образом, полное отражение наступает тогда, когда на толщине пластиинки укладывается нечетное число половин эффективных длин сдвиговых волн $\lambda_t / \cos \gamma_2$.

Полную прозрачность ($|W|^2 = 1$) мы получим, приравняв к нулю скобку в (20.22). В результате получаем трансцендентное уравнение для определения соответственных толщин пластиинки

$$\rho_2 \omega h = 2Z_{22} \operatorname{tg}^2 2\gamma_2 \operatorname{tg}(Q/2). \quad (10.25)$$

Экспериментальное подтверждение этих результатов см. в работе К. Макинсона [197]. Формулы (10.24) и (10.25) могут служить основой для определения упругих параметров пластиинки при помощи определения углов полного отражения и полной прозрачности.

Полезную дискуссию вопроса о прозрачности пластиинки для звуковой волны (на основе выражения, аналогичного (10.18)) вместе с некоторыми расчетными результатами читатель может найти в работе Р. Фая [147] и в комментариях к ней [198].

§ 11. Приближение тонкой пластиинки

Выше мы исследовали прохождение звуковой волны через пластиинку (так же, как и свободные волны в пластиинке) для пластиинки любой толщины. Результаты упрощались в случае, когда толщина пластиинки была мала по сравнению с длинами упругих волн. Ввиду важности случая тонкой пластиинки его имеет смысл рассмотреть независимо, не осложняя теорию вопросами, специфическими для толстых пластиинок. При этом мы сразу будем учитывать связанность колебаний пластиинки и окружающей ее жидкой среды.

11.1. Уравнения движения и импедансы для продольных и изгибных колебаний тонкой пластиинки. Будем сразу рассматривать раздельно симметричные и антисимметричные колебания пластиинки. Для первых из них, называемых далее *продольными*, вертикальные смещения на границах пластиинки одинаковы по величине и обратны по знаку:

$$u_z(h/2) = -u_z(-h/2) \equiv u_s. \quad (11.1)$$

Смещения в плоскости $z = 0$ при этом чисто продольные ($u_z(0) = 0$). Для вторых, называемых далее также *изгибными*, смещения на границах одинаковы:

$$u_z(-h/2) = u_z(h/2) \equiv u_a. \quad (11.2)$$

При падении на пластиинку звуковой волны изгибные колебания вызываются разностью давлений по ту и другую стороны пластиинки: $p_a = (p_1 - p_2)/2$ (антисимметричная часть давления), а симметричным колебаниям будет соответствовать симметричная часть давления $p_s = (p_1 + p_2)/2$. Здесь p_1 и p_2 — давления соответственно на верхней и нижней границах пластиинки.

Уравнение для продольных (симметричных) колебаний пластиинки (в одномерном случае получено в [61]) имеет вид

$$\left(\Delta_{xy} - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u_s = -\frac{h}{2E_1} \left(\Delta_{xy} + \frac{\sigma_1^2 - 1}{c_s^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) p_s. \quad (11.3)$$

Здесь

$$\Delta_{xy} \equiv \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2, \quad \sigma_1 = \sigma/(1 - \sigma), \quad E_1 = E/(1 - \sigma^2), \quad c_s = E_1/\rho_0, \quad (11.4)$$

где c_s — скорость распространения продольных волн в свободной пластинке, ρ_0 — плотность материала пластины. Предположим, что p_s и u_s имеют вид (гармоническая волна)

$$p_s = p_s^0 \exp i(\xi x - \omega t), \quad u_s = u_s^0 \exp i(\xi x - \omega t). \quad (11.5)$$

Определим импеданс пластины Z_s , по отношению к продольным волнам как $Z_s = -p_s/v_s$, где $v_s = -i\omega u_s$ — вертикальная компонента скорости на верхней границе пластины ($z = h/2$) в этой волне.

Подставляя (11.5) в (11.3), находим выражение для импеданса продольных колебаний

$$Z_s \equiv p_s^0 / (-i\omega u_s^0) = (2iE_1/\omega h)[1 - \sigma^2 / (1 - \xi^2/\xi_s^2)]^{-1}, \quad (11.6)$$

где обозначено $\xi_s = \omega/c_s$. Условие $Z_s = 0$ определяет скорость свободных продольных волн в пластиинке и, как и следовало ожидать, дает $\xi = \xi_s$. Уравнение (11.3) и, следовательно, выражение (11.6) получены в предположении, что

$$\xi_s h \ll 1, \quad (11.7)$$

т. е. что длина продольной волны много больше толщины пластины *.

Изгибные колебания пластины описываются уравнением (см. [200])

$$\left(\Delta_{xy} - \frac{m}{Q} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left(D \Delta_{xy} - \frac{1}{12} mh^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u_a + m \frac{\partial^2 u_a}{\partial t^2} = \\ = \left(1 - \frac{D}{Q} \Delta_{xy} + \frac{mh^2}{12Q} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) 2p_a, \quad (11.8)$$

где $D = E_1 h^3 / 12$ — изгибная жесткость; $m = \rho_0 h$ — масса единицы площади пластины; $Q = 4D/\kappa^2 h^2$; $\kappa^2 = 2(1 + \sigma_1)/30^2$, а θ^2 является положительным корнем уравнения

$$4 \sqrt{(1 - \theta^2)[1 - (1 - \sigma_1)\theta^2/2]} = (2 - \theta^2)^2 \quad (11.9)$$

и имеет смысл отношения скорости рэлеевской волны на границе твердого полупространства с вакуумом к скорости сдвиговой волны. Можно показать, что

$$\theta = 1 - \delta + O(\delta^2),$$

где

$$\delta = \frac{1}{4}(1 + 2\sigma_1)^{-1} \leqslant \frac{1}{4}. \quad (11.10)$$

В уравнении (11.8) учтена инерция вращения элементов пластины, а также сдвиговые деформации при ее изгибе. Это позволяет не выставлять весьма жесткого условия, чтобы толщина пластины была мала по сравнению с длиной изгибной волны. Уравнение (11.8) справедливо вплоть до весьма высоких частот, когда изгибная волна вырождается в рэлеевские волны на границах пластины.

Как и в случае продольных волн, мы предположим, что u_a и p_a имеют вид

$$p_a = p_a^0 \exp i(\xi x - \omega t), \quad u_a = u_a^0 \exp i(\xi x - \omega t). \quad (11.11)$$

Определим импеданс для изгибных волн в пластиинке как $Z_a = p_a/v_a$, где $v_a = -i\omega u_a$ — вертикальная компонента скорости в этой волне. Подставляя (11.11) в (11.8) и пренебрегая в силу условия (11.7) величиной

$$mh^2\omega^2/Q = mh^2h^4\kappa^2/4D = 3mh^2\omega^2h/E_1 \sim (\xi_s h)^2 \quad (11.12)$$

* Толщина пластины не может быть сколь угодно малой. Для возможности применения линейных уравнений ее колебаний необходимо, чтобы $u/h \ll 1$, где $u = u_s + u_a$ — вертикальное смещение границы пластины.

по сравнению с единицей, получаем для импеданса антисимметричных волн

$$Z_a = \frac{P_a}{-i\omega u_a} = -\frac{i\omega m'}{24} \frac{12 - (\xi^3 h / \xi_s)^2 + (1 + 3\xi^2) (\xi h)^2}{1 + (\xi h / 2)^2}. \quad (11.13)$$

Если толщина пластинки мала по сравнению с длиной изгибной волны ($\xi h \ll 1$), то, поскольку $\xi^2 \sim 1$, получаем из (11.13)

$$Z_a = -(i\omega m/2) [1 - (\xi^3 h / \xi_s)^2 / 12], \quad (11.14)$$

что совпадает с выражением, полученным в [61]. Условие $Z_a = 0$ определяет волновое число $\xi = \xi_a$ или скорость $c_a = \omega / \xi_a$ изгибных волн в свободной пластинке. Если воспользоваться для Z_a выражением (11.14), то получаем $\xi_a^4 = 12\xi_s^3/h^3$ или, учитывая значение $\xi_s = \omega/c_s$ согласно (11.4), получаем известное выражение для скорости изгибных волн (то же самое, что и V в (9.29), но записанное в несколько ином виде):

$$c_a = (h^2 \omega^2 E_1 / 12\rho_0)^{1/4}.$$

Теперь, кстати, выражение (11.14) можно записать в виде

$$Z_a = -\frac{1}{2} i\omega m [1 - (\xi/\xi_a)^4]. \quad (11.14')$$

11.2. Коэффициенты отражения и прозрачности пластины. При известных импедансах Z_s и Z_a задача об отражении плоской звуковой волны от пластины решается элементарно. Мы рассмотрим для простоты случай, когда по обе стороны пластины находится одна и та же жидкость.

Детальное исследование случая разных жидкостей, а также об отражении и преломлении сферической волны от такой пластины читатель может найти в работах В. М. Куртепова [53, 54].

Итак, пусть на пластинку толщины h падает плоская волна с углом падения θ . На рис. 11.1 стрелками изображены направления нормалей и фронтов падающей, отраженной и прошедшей волн. Опуская общую для всех трех волн экспоненту $\exp i(\xi x - \omega t)$, ($\xi = k \sin \theta$, k — волновое число в жидкости), будем иметь для звукового потенциала выше и ниже пластины соответственно

$$z > h/2, \quad \Phi_1 = e^{-ia(z-h/2)} + V e^{ia(z-h/2)}, \quad (11.15)$$

$$z < -h/2, \quad \Phi_2 = W e^{-ia(z+h/2)},$$

где V и W — соответственно коэффициенты отражения и прозрачности. Амплитуду падающей волны мы приняли за единицу. Для звукового давления и вертикальной компоненты v скорости на верхней и нижней границах пластины мы имеем соответственно

$$p_1 = -i\omega \rho \Phi_1|_{z=h/2} = -i\omega \rho (1 + V), \quad p_2 = -i\omega \rho \Phi_2|_{z=-h/2} = -i\omega \rho W, \quad (11.16)$$

$$v_1 = -\partial \Phi_1 / \partial z|_{z=h/2} = i\alpha (1 - V), \quad v_2 = -\partial \Phi_2 / \partial z|_{z=-h/2} = i\alpha W. \quad (11.17)$$

С другой стороны, в соответствии с определением импедансов Z_s и Z_a (см. выше), имеем

$$v_1 = v_a + v_s = (p_2 - p_1)/2Z_a - (p_2 + p_1)/2Z_s,$$

$$v_2 = v_a - v_s = (p_2 - p_1)/2Z_a + (p_2 + p_1)/2Z_s. \quad (11.18)$$

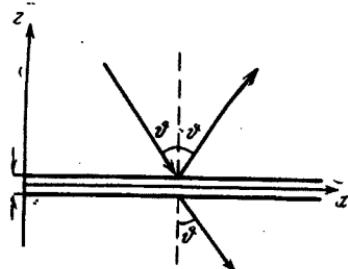


Рис. 11.1. Отражение звуковой волны от пластины

Подставляя сюда v_1 , v_2 , p_1 , p_2 из (11.16) и (11.17), получаем два уравнения для определения V и W :

$$\begin{aligned} 2(V - 1)/Z &= (W - 1 - V)/Z_a - (1 + V + W)/Z_s, \\ -2W/Z &= (W - 1 - V)/Z_a + (1 + V + W)/Z_s. \end{aligned} \quad (11.19)$$

Здесь $Z = \rho\omega/\alpha = \rho c/\cos\vartheta$, ρ и c — плотность и скорость звука в жидкости. Вычтя и сложив последние два уравнения, мы получаем два более простых уравнения, решениями которых будут

$$V = \frac{Z_a Z_s - Z^2}{(Z + Z_a)(Z + Z_s)}, \quad W = \frac{Z(Z_s - Z_a)}{(Z + Z_a)(Z + Z_s)}. \quad (11.20)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи. Полное прохождение волны ($V = 0$) реализуется при $Z^2 = Z_a Z_s$. Интересный общий анализ этого уравнения был проведен В. М. Куртеповым [52]. Им было показано, что существует некоторое критическое значение отношения плотностей $m_{kp} = \rho_0/\rho$. При $m < m_{kp}$ не существует вещественных углов полного прохождения через пластинку. При $m > m_{kp}$, наоборот, существует два таких угла.

Заметим, что (см. [61]) при $\xi = \xi_a$, т. е. когда скорость следа звуковой волны вдоль пластиинки совпадает со скоростью изгибных волн в свободной пластиинке (условие «совпадения») и, следовательно, когда согласно (11.14) $Z_a = 0$, мы имеем для коэффициента отражения из (11.20) $V = -Z/(Z + Z_s)$, но обычно для тонких пластиинок $Z_s \gg Z$ и, следовательно, имеем $V \approx -Z/Z_s$, $|V| \ll 1$, т. е. почти полное прохождение через пластиинку.

При другом «совпадении», когда скорость следа звуковой волны совпадает со скоростью продольных волн в свободной пластиинке ($\xi = \xi_s$), имеем $Z_s = 0$ и, следовательно, $V = -Z/(Z + Z_a)$.

Согласно (11.14) $Z_a \approx -i\omega m/2$. Учитывая также значение Z , получаем $V = -(1 - iM)^{-1}$, $M = kh(\rho_0/2\rho)\cos\vartheta$.

В этом случае $|V|$ может принимать любые значения, от 0 до 1, в зависимости от величины M .

При $M \gg 1$ (тяжелая пластиинка, не очень скользящие падения) $|V| \ll 1$. В обратном случае $V \approx -1$.

В упомянутой выше диссертации В. М. Куртепова [52] исследованы также в общем случае условия полного отражения волны от пластиинки.

§ 12. Упругие свойства мелкослоистых сред

Рассмотрим распространение упругих волн в среде, свойства которой (плотность и параметры Ляме) являются периодическими функциями z

$$\rho(z + h) = \rho(z), \quad \lambda(z + h) = \lambda(z), \quad \mu(z + h) = \mu(z), \quad (12.1)$$

с периодом h , малым по сравнению с длиной волны.

Теория мелкослоистых сред существенна в акустике (проблемы виброзвоньи, ультраакустика) и в сейсмологии. Ею занимались многие авторы. Наиболее хотя бы работы Д. Бругемана [123], А. Г. Тархова [92], Ю. В. Ризниченко [79], Постма [222]. Весьма полное рассмотрение вопроса для случая, когда элементарный слой состоит из двух однородных слоев толщины h_1 и h_2 ($h_1 + h_2 = h$) было дано С. М. Рытовым [82]. Е. Беренс [111] рассмотрел произвольный случай неоднородного слоя, удовлетворяющего указанному выше ограничению. Мелкослоистая среда в среднем может рассматриваться как однородная, но анизотропная. Характер симметрии у неё оказывается (см. [82, 111]) таким же, как у кристалла гексагональной симметрии, т. е. для полного описания ее упругого поведения необходимо и достаточно задать 5 упругих постоянных. Определение этих постоянных и является задачей теории.

12.1. Некоторые частные случаи распространения волн в мелкослоистой среде. Рассмотрим, следуя С. М. Рытову [82], случай чередования двух слоев толщины h_1 и h_2 (рис. 12.1), плотность и постоянные Ляме в которых обозначим

$$\rho, \lambda, \mu \text{ при } 0 < z < h_1 - \text{ первый слой,}$$

$$\bar{\rho}, \bar{\lambda}, \bar{\mu} \text{ при } -h_2 < z < 0 - \text{ второй слой.}$$

Разложим полное смещение \mathbf{U} частиц среды в произвольном из слоев на безвихревую и соленоидальную части \mathbf{u} и \mathbf{v} (продольная и поперечная волны):

$$\mathbf{U} = \mathbf{u} + \mathbf{v}, \quad (12.2)$$

где в соответствии с выражением (5.7) $\mathbf{u} = \operatorname{grad} \phi$, $\mathbf{v} = \operatorname{rot} \psi$, ϕ и ψ — скалярный и векторный потенциалы; \mathbf{u} и \mathbf{v} будут удовлетворять уравнениям

$$\ddot{\mathbf{u}} - c^2 \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{u} = 0, \quad (12.3)$$

$$\ddot{\mathbf{v}} - b^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{v} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0,$$

где скорости волн сжатия c и волн сдвига b определяются уравнениями (5.3) и (5.9).

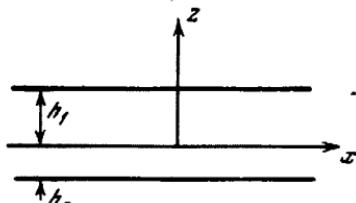


Рис. 12.1. К теории распространения звука в мелкослоистой среде

Целесообразно рассмотреть 4 частных случая распространения волн. При этом определяются четыре из пяти постоянных нашей анизотропной среды.

Начнем с рассмотрения волны, поляризованной в плоскости xz ($U_y = 0$) и распространяющейся в направлении оси x . При этом для гармонической волны частоты ω уравнения (12.3) принимают вид

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2} + k^2 \mathbf{u} = 0, \quad k = \frac{\omega}{c}, \quad \frac{\partial u_z}{\partial x} = \frac{\partial u_x}{\partial z}, \quad (12.4)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial z^2} + \kappa^2 \mathbf{v} = 0, \quad \kappa = \frac{\omega}{b}, \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{\partial v_z}{\partial z}.$$

Ищем решение, например, для u_x в слое 1 в виде

$$u_x = P(z) e^{i\xi x}, \quad P(z) = A \cos \alpha (z - h_1/2) + B \sin \alpha (z - h_1/2), \quad x^2 = k^2 - \xi^2, \quad (12.5)$$

где A и B — пока неопределенные постоянные. В выражении для $P(z)$ мы выделили симметричную и антисимметричную части относительно середины слоя $z = h_1/2$.

Из правого верхнего уравнения в (12.4) получаем

$$u_z = (P'(z)/i\xi) e^{i\xi x}. \quad (12.6)$$

В дальнейшем $\exp i\xi x$ для сокращения записи всюду будем опускать. Таким же образом для v_x и v_z получаем

$$v_x = iQ'(z)/\xi, \quad v_z = Q(z), \quad (12.7)$$

где

$$Q(z) = C \cos \beta (z - h_1/2) + D \sin \beta (z - h_1/2), \quad \beta^2 = \kappa^2 - \xi^2. \quad (12.8)$$

Величины, относящиеся ко второму слою, отмечаем чертой сверху.
В этом слое будем иметь (сразу опуская $\exp i\xi x$)

$$\bar{u}_x = \bar{P}(z), \quad \bar{u}_z = \bar{P}'(z)/i\xi \quad \bar{v}_x = i\bar{Q}'(z)/\xi, \quad \bar{v}_z = \bar{Q}(z), \quad (12.9)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{P}(z) &= \bar{A} \cos \bar{\alpha}(z + h_2/2) + \bar{\beta} \sin \bar{\alpha}(z + h_2/2), & \bar{\alpha}^2 &= \bar{k}^2 - \xi^2, \\ \bar{Q}(z) &= \bar{C} \cos \bar{\beta}(z + h_2/2) + \bar{D} \sin \bar{\beta}(z + h_2/2), & \bar{\beta}^2 &= \bar{x}^2 - \xi^2. \end{aligned} \quad (12.10)$$

Компоненты тензора напряжений Z_x и Z_z выражаются через компоненты смещений при помощи формул (5.1), причем необходимо учесть, что в последних смещения обозначались маленькими буквами u_x и u_z , в то время как сейчас мы их обозначаем U_x и U_z . Учитывая соотношение (12.2), а также выражения (12.5) — (12.7) для u_x , u_z , v_x и v_z , находим

$$Z_x = 2\mu [P' - (\xi^2 - \beta^2) Q/2i\xi], \quad Z_z = i(\lambda k^2 + 2\mu \alpha^2) P/\xi + 2\mu Q'. \quad (12.11)$$

Аналогичным образом выражаются компоненты \bar{Z}_x и \bar{Z}_z в слое 2. На границе между слоями $z = 0$ компоненты деформации $U_x = u_x + v_x$, $U_z = u_z + v_z$ и тензора напряжений должны быть непрерывными, т. е.

$$\begin{aligned} U_x(0) &= \bar{U}_x(0), & Z_x(0) &= \bar{Z}_x(0), \\ U_z(0) &= \bar{U}_z(0), & Z_z(0) &= \bar{Z}_z(0). \end{aligned} \quad (12.12)$$

Из условия периодичности, кроме того, имеем

$$\begin{aligned} U_x(h_1) &= \bar{U}_x(-h_2), & Z_x(h_1) &= \bar{Z}_x(-h_2), \\ U_z(h_1) &= \bar{U}_z(-h_2), & Z_z(h_1) &= \bar{Z}_z(-h_2). \end{aligned} \quad (12.13)$$

Подстановка в (12.12) и (12.13) соответствующих выражений дает восемь уравнений для постоянных A , B , ..., D , которые распадаются на две независимые группы. Соответственно этому мы будем иметь два типа волн:

а) *Волны в среднем продольная* ($B = C = \bar{B} = \bar{C} = 0$). Как видно из (12.9) и (12.10), в этом случае продольные смещения u_x и v_x четны (симметричны) относительно середины слоев, в то время как поперечные u_z и v_z нечетны (антисимметричны). Поэтому, если интересоваться смещениями, усредненными по периоду структуры, то волна этого типа будет продольной. Для постоянных A , D и \bar{A} , \bar{D} из (12.12) и (12.13) получаются уравнения:

$$Ai\xi \cos(\alpha h_1/2) - D\bar{\beta} \cos(3h_1/2) = A\bar{i}\xi \cos(\bar{\alpha}h_2/2) - \bar{D}\bar{\beta} \cos(\bar{\beta}h_2/2),$$

$$\begin{aligned} A(\lambda k^2 + 2\mu \alpha^2) \cos(\alpha h_1/2) - 2Di\xi \mu \beta \cos(\beta h_1) &= \\ &= \bar{A}(\bar{\lambda} \bar{k}^2 + 2\bar{\mu} \bar{\alpha}^2) \cos(\bar{\alpha}h_2/2) - 2\bar{D}\bar{i}\xi \bar{\mu} \bar{\beta} \cos(\bar{\beta}h_2/2), \end{aligned}$$

$$A\alpha \sin(\alpha h_1/2) - Di\xi \sin(\beta h_1/2) = -\bar{A}\bar{\alpha} \sin(\bar{\alpha}h_2/2) + \bar{D}\bar{i}\xi \sin(\bar{\beta}h_2/2),$$

$$\begin{aligned} 2Ai\xi \mu \alpha \sin(\alpha h_1/2) + \mu(\xi^2 - \beta^2) D \sin(\beta h_1/2) &= \\ &= -2\bar{A}\bar{i}\xi \bar{\mu} \bar{\alpha} \sin(\bar{\alpha}h_2/2) - \bar{\mu}(\xi^2 - \beta^2) \bar{D} \sin(\bar{\beta}h_2/2). \end{aligned}$$

Приравнивая детерминант этой системы нулю, получаем дисперсионное уравнение, определяющее значение волнового числа ξ , а следовательно, и скорости распространения волны $c_{xx} = \omega/\xi$ *

$$\begin{aligned} 4(\mu - \bar{\mu})^2 X \bar{X} + \omega^2 \rho [\omega^2 \rho / \xi^2 - 4(\mu - \bar{\mu})] \bar{X} \operatorname{tg}(\beta h_1/2) + \\ + \omega^2 \bar{\rho} [\omega^2 \bar{\rho} / \xi^2 + 4(\mu - \bar{\mu})] X \operatorname{tg} \bar{\beta} h_2/2 - (\omega^4 \rho \bar{\rho} / \xi^2) (Y \operatorname{tg} \bar{\beta} h_2/2 + \bar{Y} \operatorname{tg} \beta h_1/2) = 0, \end{aligned} \quad (12.14)$$

* Первый индекс у c_{xx} обозначает направление распространения волны, второй — направление смещений.

где введены обозначения

$$X = \xi^2 \operatorname{tg}(\beta h_1/2) + \alpha\beta \operatorname{tg}(xh_1/2), \quad Y = \xi^2 \operatorname{tg}(\beta h_1/2) - \bar{\alpha}\beta \operatorname{tg}(\alpha h_2/2),$$

$$\bar{X} = \xi^2 \operatorname{tg}(\bar{\beta} h_2/2) + \bar{\alpha}\bar{\beta} \operatorname{tg}(\bar{\alpha} h_2/2), \quad \bar{Y} = \xi^2 \operatorname{tg}(\bar{\beta} h_2/2) - \alpha\bar{\beta} \operatorname{tg}(\alpha h_1/2).$$

Уравнение (12.14) определяет ξ при любых значениях параметров слоев в рассматриваемой периодической структуре. Переходя к мелкослоистой среде, мы заменим все тангенсы их аргументами. Это приводит к существенному упрощению дисперсионного уравнения и дает следующее выражение для квадрата скорости волн сжатия c_{xz}

$$c_{xz}^2 = c_{zz}^2 [1 + (4h_1 h_2 / h^2)(\mu - \bar{\mu})(\mu + \lambda - \bar{\mu} - \bar{\lambda})(2\mu + \lambda)^{-1}(2\bar{\mu} + \bar{\lambda})^{-1}], \quad (12.15)$$

где пока чисто формально обозначено

$$\tilde{\rho} c_{zz}^2 = h \left(\frac{h_1}{\lambda + 2\mu} + \frac{h_2}{\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}} \right)^{-1} \quad (12.16)$$

и, кроме того, $h = h_1 + h_2$, $h\bar{\rho} = h_1\rho + h_2\bar{\rho}$ ($\bar{\rho}$ — средняя плотность среды).

б) Волна в среднем поперечная ($A = D = \bar{A} = \bar{D} = 0$). Согласно (12.9) и (12.10), поперечные смещения u_z и v_z в этом случае четны относительно середины слоев, а продольные u_x и v_x нечетны. Поэтому деформация, усредненная по периоду структуры, будет чисто поперечной (сдвиговой). Не выписывая соответствующих уравнений для B , C и \bar{B} , \bar{C} , а также получающиеся из них дисперсионного уравнения для произвольных толщин слоев, приведем сразу же только предельное значение для скорости волны для случая тонких слоев

$$\tilde{\rho} c_{xz}^2 = h(h_1/\mu + h_2/\bar{\mu})^{-1}. \quad (12.17)$$

Рассмотрим теперь распространение вдоль оси x чисто сдвиговой волны, для которой отлична от нуля лишь одна компонента смещения $U_y = v_y$. В слое 1 мы имеем для него решение (фактор $\exp i\xi z$ снова подразумевается): $v_y = Q(z)$, где

$$Q(z) = C \cos \beta \left(z - \frac{h_1}{2} \right) + D \sin \beta \left(z - \frac{h_1}{2} \right), \quad \beta^2 = \kappa^2 - \xi^2,$$

а в слое 2 решение:

$$\bar{v}_y = \bar{Q}(z)$$

где

$$\bar{Q}(z) = \bar{C} \cos \bar{\beta} \left(z + \frac{h_2}{2} \right) + \bar{D} \sin \bar{\beta} \left(z + \frac{h_2}{2} \right), \quad \bar{\beta}^2 = \bar{\kappa}^2 - \xi^2.$$

В тензоре напряжений будет отлична от нуля лишь компонента Y_z . Детерминант четырех уравнений для C , D и \bar{C} , \bar{D} , вытекающих из условий непрерывности и периодичности v_y и Y_z , будучи приравнен к нулю, дает дисперсионное уравнение

$$(\bar{\mu}\beta/\mu\beta) [\operatorname{tg}^2(\beta h_1/2) + \operatorname{tg}^2(\bar{\beta} h_2/2)] + [1 + (\bar{\mu}\beta/\mu\beta)^2] \operatorname{tg}(\beta h_1/2) \operatorname{tg}(\bar{\beta} h_2/2) = 0.$$

Отсюда для тонких слоев, т. е. при замене тангенсов их аргументами, получаем для квадрата скорости $c_{xy} = \omega/\xi$ выражение

$$\tilde{\rho} c_{xy}^2 = (h_1\mu + h_2\bar{\mu})/h. \quad (12.18)$$

Распространение перпендикулярно слоям. При распространении по оси z продольную волну, в которой отлична от нуля только компонента смещения $U_z = u_z = P(z) \exp i\xi z$, и поперечную волну, в которой смещение параллельно слоям, например, равно $U_x = v_x = Q(z) \exp i\xi z$, можно рассматривать независимо друг от друга. Согласно теореме Флоке $P(z)$ и $Q(z)$ должны быть периодическими функциями с периодом структуры $h = h_1 + h_2$.

Условия периодичности (при $z = h_1$ и $z = -h_2$) и непрерывности (при $z = 0$) должны выполняться для U_z и Z_z в продольной волне и для U_x и Z_x в поперечной волне. В первом случае дисперсионное уравнение имеет вид

$$\cos \xi h = \cos kh_1 \cos \bar{k}h_2 - (1 + s)/2s \cdot \sin kh_1 \sin \bar{k}h_2,$$

где

$$s = (\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}) \bar{k}/(\lambda + 2\mu) k,$$

а во втором — тот же вид, но с заменой k и \bar{k} в аргументах косинусов и синусов соответственно на x и \bar{x} и, кроме того, теперь $s = \bar{\mu}\bar{x}/\mu x$.

В случае тонких слоев, когда синусы можно заменить их аргументами, а в косинусах ограничиться квадратичными членами, получаем для поперечной волны скорость c_{zz} , определяемую формулой (12.16). Для поперечной волны скорость c_{xz} оказывается равной c_{zz} (см. (12.17)), как и можно было ожидать.

12.2. Мелкослоистая среда как кристалл гексагональной симметрии. Как уже указывалось выше, в отношении упругих свойств мелкослоистая среда подобна кристаллу гексагональной симметрии. Свободная энергия единицы объема такого кристалла записывается в виде *

$$F = \frac{1}{2} C_{33} e_{33}^2 + \frac{1}{2} C_{11} (e_{11} + e_{22})^2 + C_{13} e_{33} (e_{11} + e_{22}) + + 2C_{46} (e_{12}^2 - e_{11} e_{22}) + 2C_{44} (e_{13}^2 + e_{23}^2), \quad (12.19)$$

где e_{ik} — тензор деформации:

$$e_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \frac{\partial U_k}{\partial x_i} \right).$$

Индексы 1, 2, 3 соответствуют x, y, z . Нетрудно показать, что имеет место следующая связь постоянных C_{11}, \dots с найденными в предыдущем разделе скоростями распространения различных волн c_{xx}, \dots

$$C_{11} = \bar{\rho} c_{xx}^2, \quad C_{33} = \bar{\rho} c_{zz}^2, \quad C_{44} = \bar{\rho} c_{xz}^2, \quad C_{46} = \bar{\rho} c_{xy}^2. \quad (12.20)$$

Для примера рассмотрим продольную волну, распространяющуюся в направлении x (скорость c_{xx}). В e_{ik} отличной от нуля, будет только компонента $e_{11} = \partial U_x / \partial x$, а свободная энергия запишется $F = C_{11} e_{11}^2 / 2$. В случае изотропной среды мы имеем для F такое же выражение, в котором вместо C_{11} фигурирует $\lambda + 2\mu$. Из выражения для F в случае изотропной среды известным способом получают значение скорости $c^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho$. Здесь мы аналогично получаем первую из формул (12.20).

Таким образом, формулы (12.20), (12.15) — (12.18) определяют четыре упругих постоянных нашей среды. Выражение для пятой постоянной мы приводим без вывода (Е. Беренс [111])

$$C_{13} = \left(\frac{\lambda h_1}{\lambda + 2\mu} + \frac{\bar{\lambda} h_2}{\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}} \right) \left(\frac{h_1}{\lambda + 2\mu} + \frac{h_2}{\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}} \right)^{-1}. \quad (12.21)$$

Е. Беренс [111] рассмотрел также случай и непрерывного изменения свойств сред при условии, что функции $\rho(z)$, $\lambda(z)$ и $\mu(z)$ являются четными при соответственном выборе начала для z . При этом он получил

$$\frac{h}{C_{zz}} = \int \frac{dz}{\lambda + 2\mu}; \quad \frac{h}{C_{44}} = \int \frac{dz}{\mu}, \quad hC_{46} = \int \mu dz,$$

$$C_{13} = \int \frac{\lambda dz}{\lambda + 2\mu} / \int \frac{dz}{\lambda + 2\mu}, \quad hC_{11} = \int (4\mu^2 + 4\mu\lambda + C_{13}\lambda) \frac{dz}{\lambda + 2\mu}, \quad (12.22)$$

*См., например, [60].

Интегралы берутся всюду по периоду структуры h . Для частного случая чередования двух однородных слоев формулы (12.22) дают выражения (12.20) и (12.21).

Нам необходимо также еще выяснить, как будут определяться скорости упругих волн, распространяющихся в любых направлениях, а не только тех частных, которые были рассмотрены в разделе 1. Этот вопрос решается так же как для гексагонального кристалла и рассмотрен у Беренса [11]. Пусть направление нормали к фронту волны лежит в плоскости xz и составляет угол φ с осью z . Тогда в случае $U_x = U_z = 0$ мы имеем чисто сдвиговую волну, скорость которой определяется формулой

$$\tilde{\rho}c^2 = C_{44} \cos^2 \varphi + C_{66} \sin^2 \varphi. \quad (12.23)$$

При $\varphi = 0$ мы получаем выражение (12.20) для c_{xx}^2 . В случае $U_y = 0$ скорость распространения упругой волны определяется из уравнения

$$[\tilde{\rho}c^2 - (C_{44} \cos^2 \varphi + C_{11} \sin^2 \varphi)] [\tilde{\rho}c^2 - (C_{33} \cos^2 \varphi + C_{44} \sin^2 \varphi)] = \\ = (C_{44} + C_{11})^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi. \quad (12.24)$$

Из этой формулы можно получить остальные частные случаи, рассмотренные в § 12.1. Так, например, при $\varphi = 0$ мы получаем выражение (12.20) для c_{zz}^2 и c_{xz}^2 .

12.3. Поглощение волн в мелкослоистых средах. Допустим теперь, что в мелкослоистой среде имеют место диссипативные потери, обусловленные объемной ξ и сдвиговой η вязкостями. Это означает [55], что в предыдущих формулах должна быть проведена замена $\mu \rightarrow \mu - i\omega\eta$, $\lambda \rightarrow \lambda - i\omega(\xi - 2\eta/3)$, $\lambda + 2\mu \rightarrow \lambda + 2\mu - i\omega(\xi + 4\eta/3)$. В результате могут быть найдены комплексные волновые числа $\xi = \omega/c = \xi^0 + i\gamma$. Для коэффициента поглощения γ находим в случае двух чередующихся однородных слоев и сравнительно малого поглощения (в разложении по ξ и η учитываются лишь первые степени) [82]

$$\begin{aligned} \gamma_{xx} &= \frac{\omega^2 C_{33}}{2} \sqrt{\tilde{\rho}/C_{11}} \left\{ \frac{h_1(\xi + 4\eta/3)}{h(\lambda + 2\mu)^2} + \frac{h_2(\bar{\xi} + 4\bar{\eta}/3)}{h(\bar{\lambda} + 2\bar{\mu})^2} + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{C_{33}} - \frac{1}{C_{11}} \right) \left[\frac{\eta - \bar{\eta}}{\mu - \bar{\mu}} - \frac{\xi - \bar{\xi} + (\eta - \bar{\eta})/2}{\lambda + \mu - \bar{\lambda} - \bar{\mu}} - \frac{\xi + 4\eta/3}{\lambda + 2\mu} - \frac{\bar{\xi} + 4\bar{\eta}/3}{\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}} \right] \right\}, \\ \gamma_{xz} &= \gamma_{zx} = \frac{\omega^2}{2h} \sqrt{\tilde{\rho}C_{44}} \left(\frac{h_1\eta}{\mu^2} + \frac{h_2\bar{\eta}}{\bar{\mu}^2} \right), \quad \gamma_{xy} = \frac{\omega^2}{2hC_{66}} \sqrt{\tilde{\rho}/C_{66}} (h_1\eta + h_2\bar{\eta}), \quad (12.25) \\ \gamma_{zz} &= \frac{\omega^2}{2h} \sqrt{\tilde{\rho}C_{33}} [h_1(\xi + 4\eta/3)/(\lambda + 2\mu)^2 + h_2(\bar{\xi} + 4\bar{\eta}/3)/(\bar{\lambda} + 2\bar{\mu})^2]. \end{aligned}$$

Постоянные C_{ik} определены выше.

12.4. Чередование жидкких и твердых слоев. Пусть твердые слои (толщины h_1) чередуются с жидкими (толщины h_2). При этом мы рассмотрим вначале случай, когда толщина жидкого слоя мала как по сравнению с длиной звуковой волны в нем, так и по сравнению с длиной вязкой волны.

Малость толщины твердого слоя по сравнению с длиной упругих волн в нем предполагается как и выше. Будем учитывать в жидкости только сдвиговую вязкость. Тогда имеем

$$\bar{\lambda} = \tilde{\rho}\bar{c}^2 + 2i\omega\bar{\eta}/3, \quad \bar{\mu} = -i\omega\bar{\eta}, \quad (12.26)$$

где \bar{c} — скорость звука в жидкости. После этого формулами (12.15) — (12.18) определяются квадраты соответственных комплексных скоростей или волновых чисел. Затем могут быть найдены как скорости распространения волн,

так и их коэффициенты затухания γ . Так, введя для сокращения обозначения

$$\bar{\rho}c^2 = K, \quad \omega\bar{\eta} = \eta_2, \quad (12.27)$$

получаем для сдвиговых волн:

$$h_1\bar{\rho}c_{xz}^2 = 2\mu h [1 + \sqrt{1 + (h_2\mu/h_1\eta_2)^2}]^{-1}, \quad (12.28)$$

$$2\mu h\gamma_{xz}^2 = h_1\omega^2\bar{\rho} [\sqrt{1 + (h_2\mu/h_1\eta_2)^2} - 1],$$

$$h_1h\bar{\rho}c_{xy}^2 = 2(h_1^2\mu^2 + h_2^2\eta_2^2) [1 + \sqrt{1 + (h_2\eta_2/h_1\mu)^2}]^{-1},$$

$$2\gamma_{xy}^2 = h_1h\omega^2\bar{\rho}\mu (h_1^2\mu^2 + h_2^2\eta_2^2)^{-1} [\sqrt{1 + (h_2\eta_2/h_1\mu)^2} - 1].$$

Если $\eta_2 = \omega\bar{\eta}$ мало по сравнению с μ , то эти формулы упрощаются:

$$\begin{aligned} c_{xz}^2 &= 2\eta_2 h / h_2 \bar{\rho}, & \gamma_{xz}^2 &= \omega^2 \bar{\rho} h_2 / 2h\eta_2, \\ c_{xy}^2 &= h_1 \mu / \bar{\rho} h, & \gamma_{xy}^2 &= \omega^2 \bar{\rho} h h_2 \eta_2^2 / 2h_1^3 \mu^3. \end{aligned} \quad (12.29)$$

Существенно отметить, что с уменьшением $\bar{\eta}$ скорость c_{xz} падает, а поглощение γ_{xz} растет (однако надо помнить, что при этом толщина жидких слоев должна быть мала по сравнению с длиной вязкой волны). В противоположность этому скорость c_{xy} при малых $\bar{\eta}$ не зависит от $\bar{\eta}$, а затухание γ_{xy} при уменьшении $\bar{\eta}$ падает.

Рассмотрим теперь другой случай, когда толщина жидких слоев по-прежнему мала по сравнению с длиной звуковой волны, но велика по сравнению с длиной вязкой волны. При этих условиях в жидкости в первом приближении можно учитывать лишь продольные волны, а на границах жидкости и твердого тела требовать обращения в нуль тангенциальных напряжений. Из получающегося при этом разрыва тангенциальной скорости можно затем найти затухание волн, обусловленное вязкостью жидкости. Слоистая среда такого вида будет обладать некоторыми особенностями. В частности, в ней не могут распространяться сдвиговые волны в направлении, перпендикулярном слоям.

В жидкости (слой 2) мы будем иметь только продольные волны со смещениями $U(U_x, U_y, U_z)$. Давление p при этом дается соотношением $p = -K \operatorname{div} \mathbf{U}$, где $K = \bar{\rho}c^2$. Все остальные обозначения — такие же, как и в предыдущих разделах.

На границе $z = 0$ будем иметь условия непрерывности нормальных компонент скорости и тензора напряжений, а также условие обращения в нуль тангенциальных компонент тензора напряжений

$$U_z(0) = \bar{U}_z(0), \quad Z_z(0) = -p(0), \quad Z_x(0) = Z_y(0) = 0. \quad (12.30)$$

Значения соответственных величин на границах $z = h_1$ и $z = -h_2$ связаны условиями периодичности

$$U_z(h_1) = \bar{U}_z(-h_2), \quad Z_z(h_1) = -p(-h_2), \quad Z_x(h_1) = Z_y(h_1) = 0. \quad (12.31)$$

Нетрудно видеть, что если рассматривать случай продольных волн, распространяющихся перпендикулярно слоям (вдоль оси z), то мы не получаем никаких особенностей по сравнению с рассмотренным выше случаем чередования твердых слоев. Для c_{zz} получается формула, аналогичная (12.16):

$$\bar{\rho}c_{zz}^2 = h \left(\frac{h_1}{\lambda + 2\mu} + \frac{h_2}{K} \right)^{-1}, \quad (12.32)$$

т. е. дело сводится к замене $\lambda + 2\mu$ на сжимаемость жидкости K .

В остальных случаях результаты, естественно, будут существенно отличаться от полученных ранее.

Начнем рассмотрение опять с распространения вдоль слоев (по оси x) и рассмотрим сначала волну, в которой смещение лежит в плоскости xz . В твердых слоях мы имеем для смещений и напряжений прежние выражения (12.5) — (12.8) и (12.11), а в жидкости (опускается фактор $\exp i\xi x$):

$$U_x = \bar{P}(z), \quad U_z = \bar{P}'(z)/i\xi, \quad p = \bar{\rho}\omega^2\bar{P}(z)/i\xi,$$

причем

$$\bar{P}(z) = A \cos \bar{\alpha}(z + h_2/2) + \bar{B} \sin \bar{\alpha}(z + h_2/2), \quad \bar{\alpha}^2 = k^2 - \xi^2, \quad \bar{k} = \omega/c.$$

Уравнения (12.30) и (12.31) дают для постоянных $A, B, C, D, \bar{A}, \bar{B}$ шесть уравнений, которые и здесь распадаются на две группы. В соответствии с этим рассмотрим два случая:

а) *Волна в среднем продольная ($B = C = \bar{B} = 0$)*. Границные условия дают

$$A\bar{\alpha} \sin(\bar{\alpha}h_1/2) - Di\xi \sin(\beta h_1/2) + \bar{A}\bar{\alpha} \sin(\bar{\alpha}h_2/2) = 0,$$

$$Ai\alpha \sin(\alpha h_1/2) + Dp \sin(\beta h_1/2) = 0,$$

$$2A\mu\xi p \cos(\alpha h_1/2) + 2Di\xi\mu\beta \cos(\beta h_1/2) + \bar{A}\bar{\rho}\omega^2 \cos(\bar{\alpha}h_2/2) = 0; \quad 2\xi p = 2\xi^2 - \kappa^2.$$

Отсюда следует дисперсионное уравнение

$$4\xi^2\mu\bar{\alpha} \operatorname{tg}(\bar{\alpha}h_2/2) [\alpha\beta \operatorname{tg}(\alpha h_1/2) + p^2 \operatorname{tg}(\beta h_1/2)] + \bar{\rho}\omega^2\alpha\kappa^2 \operatorname{tg}(\alpha h_1/2) \operatorname{tg}(\beta h_1/2) = 0. \quad (12.33)$$

В случае тонких слоев, заменяя тангенсы их аргументами и подставляя $\mu = \omega^2\rho/\kappa^2$, $\alpha^2 = k^2 - \xi^2$, $\bar{\alpha}^2 = \bar{k}^2 - \xi^2$, [получаем $h_2\rho(k^2 - \xi^2)[4\xi^2 - (k^2 - \kappa^2) + \kappa^4] + \bar{h}_2\bar{\rho}(\bar{k}^2 - \xi^2) = 0$].

Если ввести обозначения

$$x = (\xi/\kappa)^2, \quad m = h_1\rho/h_2\rho, \quad \eta = (k/\kappa)^2, \quad \zeta = (\bar{k}/\kappa)^2, \quad (12.34)$$

то уравнение принимает вид

$$4(1 - \eta)x^2 - [4\zeta(1 - \eta) + m + 1]x + m\eta + \zeta = 0,$$

откуда

$$8(1 - \eta)x_{1,2} = 4\zeta(1 - \eta) + m + 1 \pm$$

$$\pm \sqrt{[4\zeta(1 - \eta) + m + 1]^2 + 4m[1 - 4\eta(1 - \eta)]}. \quad (12.35)$$

Нетрудно убедиться, что при $\eta < 1$ (что только и представляет реальный интерес) оба корня x_1 и x_2 вещественны и положительны, т. е. существуют две скорости продольной волны c_{xx} .

Рассмотрим некоторые частные случаи. При $\eta = 1/2$ ($c = \sqrt{2}b$) получаем

$$x_1 = \zeta + m/2, \quad c_{xx}^{(1)} = \bar{c}c(\bar{c}^2 + c^2)^{-1/2}, \quad A:D:\bar{A} = 1:\sqrt{\frac{m+2\zeta}{m+2\zeta-2}}:\frac{\rho}{\bar{\rho}},$$

$$x_2 = 1/2, \quad c_{xx}^{(2)} = c, \quad A:D:\bar{A} = 1:0:0.$$

Как видим, второй корень соответствует волне чистого сжатия в твердых слоях, которая не сопровождается сдвигом ввиду выбора специального соотношения между скоростями c и b . Жидкие слои при этом остаются в покое.

В следующем частном случае положим $m \rightarrow 0$, что соответствует уменьшению твердых слоев или увеличению их плотности. При этом имеем

$$x_1 = \zeta, \quad c_{xx}^{(1)} = \bar{c}, \quad A:D:\bar{A} = 0:0:1,$$

$$x_2 = \frac{1}{4(1-\eta)}, \quad c_{xx}^{(2)} = \frac{2b\sqrt{c^2 - b^2}}{c},$$

$$A:D:\bar{A} = \frac{\eta}{1-2\eta} : \frac{-1}{\sqrt{4\eta-3}} : \frac{2h_1(1-\eta)}{h_2[4\zeta(1-\eta)-1]\bar{\rho}}.$$

Здесь x_1 соответствует волне чистого сжатия в жидкости при неподвижных твердых слоях.

Наконец, при возрастании m , что соответствует увеличению плотности жидкости или утоньшению ее слоев (однако их толщина все же должна быть велика по сравнению с длиной волны вязкости), получаем

$$x_1 = \frac{m}{4(1-\eta)}, \quad c_{xx}^{(1)} = \frac{2b}{c} \sqrt{\frac{c^2 - b^2}{m}}, \quad A : D : \bar{A} = 1 : 1 : \frac{2(1-\eta)\rho}{\bar{\rho}},$$

$$x_2 = \eta, \quad c_{xx}^{(2)} = c, \quad A : D : \bar{A} = 1 : 0 : 0.$$

Таким образом, с ростом m скорость $c_{xx}^{(1)}$ убывает. Корень x_2 дает волну сжатия в твердых телах.

б) Волна в среднем поперечная ($A = D = \bar{A}$). В этом случае поперечное смещение в твердом слое четно относительно середины слоя, а продольное — нечетно, т. е. должно происходить изгибание твердых слоев. Дисперсионное уравнение имеет вид

$$4\xi^2\mu\bar{\alpha} \left(\alpha\beta \operatorname{tg} \frac{\beta h_1}{2} + \mu^2 \operatorname{tg} \frac{\alpha h_1}{2} \right) + \bar{\rho}\alpha^2\alpha\kappa^2 \operatorname{tg} \frac{\alpha h_2}{2} = 0.$$

При переходе к тонким слоям, если удерживать лишь члены первого порядка относительно h_1 и h_2 , получаем невыполнимое условие $\bar{\rho} = \rho p + \bar{\rho}p = 0$. Таким образом, точность этого разложения оказывается недостаточной. При учете кубических членов в разложении тангенсов уравнение запишется

$$\kappa^2 \{ h_1^2 [x(3 - 4x) + \eta(2x - 1)^2] + h_2^2 m_1 (\zeta - x) \} + 12(1 + m_1) = 0,$$

где $m_1 = h_2 \bar{\rho}/h_1 \rho$ и, кроме того, использованы обозначения (12.34). При малых κh_1 и κh_2 один из корней последнего уравнения положителен и очень велик. В частности, при $h_1 = h_2$ он равен

$$x \approx \frac{1}{\kappa h_1} \sqrt{\frac{3(1+m_1)}{1-\eta}}. \quad (12.36)$$

Можно проверить, что при этом членами пятой и выше степени при разложении тангенсов можно пренебречь, так что последнее решение является вполне корректным. В пределе при очень тонких слоях получаем

$$c_{xx} = 0. \quad (12.37)$$

Рассмотрим теперь распространение вдоль оси x чисто сдвиговой волны, смещения в которой направлены по оси y . В этом случае взаимодействия твердых слоев с жидкостью и друг с другом отсутствуют и они скользят при распространении волны по неподвижной жидкости.

Смещение в твердом теле запишем в виде

$$U_y = v_y = \left[C \cos \beta \left(z - \frac{h_1}{2} \right) + D \sin \beta \left(z - \frac{h_1}{2} \right) \right] e^{i\omega x},$$

в то время как в жидкости $\bar{U}_y = 0$. Границные условия сводятся к тому, что на обеих сторонах твердого слоя равно нулю тангенциальное напряжение Z_y , откуда для постоянных C и D получаем два уравнения:

$$C \sin \frac{\beta h_1}{2} + D \cos \frac{\beta h_1}{2} = 0, \quad -C \sin \frac{\beta h_1}{2} + D \cos \frac{\beta h_1}{2} = 0.$$

Условие разрешимости этих уравнений есть $\sin \beta h_1 = 0$, т. е. $\beta h_1 = l\pi$ и, следовательно,

$$\xi_l = \sqrt{\kappa^2 - (l\pi/h_1)^2}.$$

Этот же результат был получен выше (см. формулу (9.9)) для волнового числа волн Лява в пластинке. В граничном случае тонких слоев ($\kappa h \ll 1$) вдоль

слоев будет распространяться лишь одна волна $l = 0$ со скоростью сдвиговых волн

$$c_{xy} = b. \quad (12.38)$$

В этой волне смещение постоянно по толщине слоя $U_y = Ce^{ixx}$. Расчет ее затухания (по величине потерь, вносимых вязкостью жидкости η при скольжении твердых слоев относительно жидкого) дает для амплитудного коэффициента поглощения значение $\gamma_{xy} = (\rho\omega/\mu)^{1/2}/2h_1$. Здесь η — вязкость жидкости.

Наконец, при распространении сдвиговой волны вдоль оси z снова будет отсутствовать взаимодействие твердых слоев и жидкости, в силу чего $c_{zz} = 0$.

§ 13. Электромагнитные волны в мелкослоистых средах

Рассмотрим распространение электромагнитных волн в среде, состоящей из бесконечно чередующихся слоев двух различных однородных и изотропных веществ. Если толщины этих слоев достаточно малы по сравнению с длинами волн в них, то такая сложная среда в целом ведет себя как однородная, но анизотропная. В определении электрических и упругих параметров этой среды и состоит наша задача. Она рассматривалась во многих работах. Можно упомянуть, например, о работах Д. Бругемана [123].

М. Л. Левин [57] детально рассмотрел распространение электромагнитной волны в периодически слоистой среде перпендикулярно к слоям, лишенным поглощения. Весьма обстоятельное и последовательное изложение вопроса было дано С. М. Рытовым [81]. Им рассмотрены общие соотношения, справедливые для слоев любой толщины. При последующем предельном переходе из этих соотношений вытекают результаты для мелкослоистой среды. Учет поправочных членов позволяет уточнить условия применимости указанных предельных результатов. Все последующее изложение будет основано на работе С. М. Рытова.

Из симметрии задачи ясно, что для определения средних постоянных среды достаточно рассмотреть три случая распространения волны: распространение в направлении, параллельном слоям, при двух поляризациях (либо электрический, либо магнитный вектор параллелен слоям) и распространение в направлении, перпендикулярном к слоям.

13.1. Распространение вдоль слоев. Вектор E параллелен границам слоев. Направим ось x в направлении распространения волны. Направление E совместим с осью y . Ось z , как и в § 12, направляем нормально границам слоев. Для отличных от нуля компонент электромагнитного поля $E_y = E$, H_x и H_z имеем из (4.2) в каждом из слоев уравнения*

$$\partial E / \partial z = -ik\mu H_x, \quad \partial E / \partial x = ik\mu H_z, \quad \partial H_z / \partial x - \partial H_x / \partial z = ik\varepsilon E, \quad (13.1)$$

где $k = \omega/c$, а через ε обозначена комплексная диэлектрическая проницаемость среды (в (4.2) это ε'). Проницаемости ε и μ меняются периодически в зависимости от z , поочередно принимая значения ε_1 , μ_1 в одном слое и ε_2 и μ_2 — в другом.

Решение уравнений (13.1) будем искать в виде

$$E = U(z) e^{iknx}, \quad H_x = V(z) e^{iknx}, \quad H_z = W(z) e^{iknx}, \quad (13.2)$$

где U , V и W — пока неизвестные функции z , а n — показатель преломления, характеризующий скорость распространения волн вдоль слоев, который мы должны определить. Подстановка (13.2) в (13.1) дает

$$\partial U / \partial z = -ik\mu V, \quad nU = \mu W, \quad \partial V / \partial z - iknW = -ik\varepsilon U. \quad (13.3)$$

*При сравнении выписанных здесь уравнений (и всех последующих формул) с уравнениями С. М. Рытова надо учитывать, что временной фактор у нас выбран в виде $\exp(-i\omega t)$, в то время как у Рытова $\exp i\omega t$. Вследствие этого знак перед i у нас всюду обратный.

Выберем произвольную пару соседних слоев и поместим начало координат на границе между ними. Слой с постоянными ϵ_1 и μ_1 пусть простирается от $z = 0$ до $z = h_1$, а слой с постоянными ϵ_2 и μ_2 от $z = -h_2$ до $z = 0$ (рис. 13.1).

Решения уравнений (13.3) в каждом слое будут:

$$\begin{aligned} & 0 \leq z \leq h_1, \\ & U_1 = A \cos \alpha_1 z + B \sin \alpha_1 z, \\ & V_1 = (\alpha_1 / ik\mu_1) (A \sin \alpha_1 z - B \cos \alpha_1 z), \\ & W_1 = (n/\mu_1) (A \cos \alpha_1 z + B \sin \alpha_1 z), \end{aligned} \quad (13.4)$$

$$\alpha_1 = k \sqrt{n_1^2 - n^2}, \quad n_1^2 = \epsilon_1 \mu_1;$$

$$-h_2 \leq z \leq 0,$$

$$U_2 = C \cos \alpha_2 z + D \sin \alpha_2 z, \quad (13.5)$$

$$V_2 = (\alpha_2 / ik\mu_2) (C \sin \alpha_2 z - D \cos \alpha_2 z), \quad (13.5)$$

$$W_2 = (n/\mu_2) (C \cos \alpha_2 z + D \sin \alpha_2 z),$$

$$\alpha_2 = k \sqrt{n_2^2 - n^2}, \quad n_2^2 = \epsilon_2 \mu_2.$$

На эти решения должны быть наложены четыре условия непрерывности и периодичности E и H_x (т. е. U и V) по z :

$$\begin{aligned} U_1(0) &= U_2(0), & U_1(h_1) &= U_2(-h_2), \\ V_1(0) &= V_2(0), & V_1(h_1) &= V_2(-h_2). \end{aligned} \quad (13.6)$$

При помощи (13.4) и (13.5) получаем из (13.6) четыре однородных уравнения

$$\begin{aligned} C &= A, & C \cos \alpha_2 h_2 - D \sin \alpha_2 h_2 &= A \cos \alpha_1 h_1 + B \sin \alpha_1 h_1, \\ D &= pB, & C \sin \alpha_2 h_2 + D \cos \alpha_2 h_2 &= -p(A \sin \alpha_1 h_1 - B \cos \alpha_1 h_1), \end{aligned} \quad (13.7)$$

где

$$p = \mu_2 \alpha_1 / \mu_1 \alpha_2. \quad (13.8)$$

Приравнивая нулью детерминант системы (13.7), получаем дисперсионное уравнение, определяющее n как функцию k

$$(1 + p^2) \sin \alpha_1 h_1 \sin \alpha_2 h_2 + 2p(1 - \cos \alpha_1 h_1 \cos \alpha_2 h_2) = 0.$$

Разрешив это уравнение относительно p , нетрудно привести его к совокупности следующих двух уравнений:

$$\operatorname{tg}(\alpha_2 h_2 / 2) \operatorname{ctg}(\alpha_1 h_1 / 2) = -p, \quad \operatorname{tg}(\alpha_2 h_2 / 2) \operatorname{ctg}(\alpha_1 h_1 / 2) = -1/p. \quad (13.9)$$

Пользуясь уравнениями (13.7), можно показать, что первое из уравнений (13.9) соответствует волне, в которой E и H_z распределены в каждом слое симметрично относительно его середины, т. е. являются четными функциями $[z - \frac{h_1}{2}]$ в слое 1 и $[z + \frac{h_2}{2}]$ в слое 2. Компонента же H_x при этом нечетная. Зависимость компонент $E = E_y$ и H_x от координаты z для этого случая изображена на рис. 13.1. В дальнейшем мы будем интересоваться электрическим и магнитным полями, усредненными по периоду структуры $d = h_1 + h_2$. Так как в волне рассматриваемого типа среднее значение H_x равно нулю, то волна будет иметь лишь компоненты E_y , H_z , т. е. является чисто поперечной волной.

Таким же образом можно показать, что второе из уравнений (13.9) дает волну, в которой H_x четно, а E и H_z нечетны относительно середин слоев. В результате, усредненное поле будет иметь только продольную компоненту H_x . Однако нетрудно видеть, что такая волна будет быстро затухать

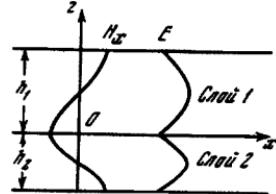


Рис. 13.1. Распределение компонент электрического и магнитного полей по толщине слоев

в направлении x , вследствие чего мы ее исключим из дальнейшего анализа. Действительно, пространство между серединами двух слоев, например, между $-\frac{h_2}{2}$ и $\frac{h_1}{2}$, можно рассматривать как ограниченное двумя абсолютно проводящими плоскостями, поскольку на них в рассматриваемом случае $E = H_z = 0$. Но известно, что в волноводах с абсолютно проводящими стенками, волны, содержащие тангенциальную компоненту E (в данном случае компонента $E_y = E$) практически не могут распространяться и сильно затухают уже на расстоянии, равном ширине волновода (в нашем случае $d/2$), если длина волны велика по сравнению с d . Этот результат остается справедливым при любых проницаемостях ϵ_1, μ_1 и ϵ_2, μ_2 «прокладок» между идеально проводящими стенками.

Итак, остановимся на первом из двух рассмотренных выше случаев и обозначим значения E_y и H_z , усредненные по периоду d , через \bar{E}_y и \bar{H}_z . Введем μ^e и ϵ^e — «эффективные» значения проницаемостей так, чтобы соблюдались соотношения:

$$E_y/\bar{H}_z = \sqrt{\mu^e/\epsilon^e}, \quad n^2 = \mu^e\epsilon^e, \quad (13.10)$$

где n — корень первого из уравнений (13.9).

Имеем

$$\bar{E}_y = \frac{1}{h_1 + h_2} \left[\int_0^{h_1} U_1 dz + \int_{-h_2}^0 U_2 dz \right].$$

Сюда необходимо подставить значения U_1 и U_2 из (13.4) и (13.5), а после интегрирования воспользоваться соотношениями (13.7) между постоянными A, B, C и D . Аналогично находится \bar{H}_z . В результате получаем

$$\bar{E}_y/\bar{H}_z = (\mu_1 x_2^2 - \mu_2 x_1^2) n (x_2^2 - x_1^2).$$

Подставляя это в (13.10) и решая затем два уравнения относительно ϵ^e и μ^e , находим:

$$\epsilon^e = n^2 (x_2^2 - x_1^2) (\mu_1 x_2^2 - \mu_2 x_1^2)^{-1}, \quad \mu^e = (\mu_1 x_2^2 - \mu_2 x_1^2) (x_2^2 - x_1^2)^{-1}. \quad (13.11)$$

Рассмотрим детальное случай малых толщин h_1 и h_2 . Заменяя в (13.9) $\operatorname{tg}(\alpha_2 h_2)/2 \approx \alpha_2 h_2/2$, $\operatorname{ctg}(\alpha_1 h_1/2) \approx (\alpha_1 h_1/2)^{-1}$, получаем, затем из (13.11)

$$\epsilon^e = \bar{\epsilon}, \quad \mu^e = \bar{\mu}, \quad (13.12)$$

где

$$\bar{\epsilon} = \frac{h_1 \epsilon_1 + h_2 \epsilon_2}{h_1 + h_2} \text{ — среднее значение } \epsilon \text{ по периоду,} \quad (13.13)$$

$$\frac{1}{\bar{\mu}} = \left(\frac{1}{\mu} \right) = \frac{h_1 \mu_1 + h_2 \mu_2}{h_1 + h_2} \text{ — среднее значение } 1/\mu \text{ по периоду.}$$

Более точная оценка, с учетом кубических членов в разложении дает

$$\begin{aligned} \epsilon^e &= \bar{\epsilon} \left[1 + \frac{k^2 h_1^2 h_2^2}{12 (h_1 + h_2)^2} \frac{\bar{\mu} \bar{\mu}}{\mu_1 \mu_2} (n_1^2 - n_2^2) \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\bar{\epsilon}} \right], \\ \mu^e &= \bar{\mu} \left[1 + \frac{k^2 h_1^2 h_2^2}{12 (h_1 + h_2)^2} \frac{\bar{\mu} \bar{\mu}^2}{\mu_1^2 \mu_2^2} (n_1^2 - n_2^2) (\mu_1 - \mu_2) \right], \end{aligned} \quad (13.14)$$

где $n_1^2 \equiv \epsilon_1 \mu_1$, $n_2^2 \equiv \epsilon_2 \mu_2$.

Мы видим, что поправочные члены имеют порядок $k^2 d^3 = k^2 (h_1 + h_2)^3$. Кроме того, при заданных h_1 и h_2 они играют тем меньшую роль, чем ближе параметры одного вещества к параметрам другого.

13.2. Распространение вдоль слоев. Вектор \mathbf{H} параллелен границам слоев. Уравнения для электромагнитного поля, имеющего в этом случае компоненты E_x , E_z и $H_y = H$ будут

$$\partial H / \partial z = ik\epsilon E_x, \quad \partial H / \partial x = -ik\epsilon E_z, \quad \partial E_x / \partial z - \partial E_z / \partial x = ik\mu H. \quad (13.15)$$

Условиям непрерывности и периодичности на границах между слоями будут подчинены H и E_x . Очевидно, все формулы, относящиеся к рассматриваемому случаю, могут быть получены из формул предыдущего случая, если в последних произвести замену H , E , ϵ , μ соответственно на E , H , μ , ϵ .

Усреднение выражений для компонент поля по периоду структуры $d = h_1 + h_2$ дает поперечную волну, компоненты которой \bar{H}_y и \bar{E}_z удовлетворяют уравнениям Максвелла

$$\partial \bar{H}_y / \partial x = -ikz^e \bar{E}_z, \quad \partial \bar{E}_z / \partial x = -ik\mu^e \bar{H}_y, \quad (13.16)$$

где эффективные значения проницаемостей выражаются формулами

$$\epsilon^e = \frac{\epsilon_1 \alpha_2^2 - \epsilon_2 \alpha_1^2}{\alpha_2^2 - \alpha_1^2}, \quad \mu^e = n^2 \frac{\alpha_2^2 - \alpha_1^2}{\epsilon_1 \alpha_2^2 - \epsilon_2 \alpha_1^2}, \quad (13.17)$$

которые получаются из (13.11) путем указанной выше замены. Соответственное уравнение для n будет

$$x_2/z_2 \operatorname{tg} (x_2 h_2 / 2) = -(\alpha_1/\epsilon_1) \operatorname{tg} (\alpha_1 h_1 / 2). \quad (13.18)$$

При малых h_1 и h_2 получаем

$$\epsilon^e = \tilde{\epsilon}, \quad \mu^e = \tilde{\mu}, \quad (13.19)$$

где

$$\frac{1}{\tilde{\epsilon}} \left(\frac{1}{\epsilon} \right) = \frac{h_1/\epsilon_1 + h_2/\epsilon_2}{h_1 + h_2}, \quad \tilde{\mu} = \frac{h_1\mu_1 + h_2\mu_2}{h_1 + h_2}. \quad (13.20)$$

13.3. Распространение в направлении, нормальному границам слоев. Возьмем в качестве отличных от нуля компонент поля $E_x = E$ и $H_y = H$. Они будут удовлетворять уравнениям

$$dE/dz = ik\mu H, \quad dH/dz = ik\epsilon E. \quad (13.21)$$

При непрерывных $\epsilon(z)$ и $\mu(z)$ можно было бы на основании теоремы Фату [146] сразу заключить, что при $d = (h_1 + h_2) \rightarrow 0$ решение уравнений (13.21) будет приближаться к решению таких же уравнений, но с усредненными проницаемостями $\tilde{\epsilon}$ и $\tilde{\mu}$ *.

Строгое решение показывает, что этот результат остается в силе и в рассматриваемом случае разрывных ϵ и μ . Тем не менее, поскольку нас будет интересовать вопрос о величине поправки к $\tilde{\epsilon}$ и $\tilde{\mu}$ в эффективных ϵ^e и μ^e , мы и здесь начнем с точного расчета, следуя способу, примененному М. Л. Левинным [57].

Учитывая теорему Флоке [150], решение уравнений (13.21) будем искать в виде

$$E = U(z) \exp(iknz), \quad H = V(z) \exp(iknz), \quad (13.22)$$

где U и V — периодические с периодом h функции от z .

* Отметим, следуя С. М. Рытову [81], следующее важное обстоятельство. Исключая из (13.21) H (или E), мы получаем для E (или H) уравнение второго порядка, применительно к которому теорема Фату дает для среднего показателя преломления значение $n^2 = \tilde{\epsilon}\mu$, в то время как из (13.21) следует, что $n^2 = \tilde{\mu}\epsilon$. Это расхождение обусловлено тем, что переход к уравнению второго порядка связан с дифференцированием одного из уравнений (13.21), производная же от приближенного решения не равна пределу, при $h \rightarrow 0$ производной от точного решения. Поэтому для получения приближенных E и H переход к уравнению второго порядка недопустим.

Если проинтегрируем уравнения (13.21) в отдельности для каждого из слоев и сопоставим результат с (13.22), то получим

$$\begin{aligned} 0 \leq z \leq h_1, \quad U_1 &= e^{-iknz} (Ae^{-i\alpha_1 z} + Be^{i\alpha_1 z}), \\ V_1 &\doteq -\frac{\alpha_1}{k\mu_1} e^{-iknz} (Ae^{-i\alpha_1 z} - Be^{i\alpha_1 z}), \\ \alpha_1 &= kn_1 = k \sqrt{\epsilon_1 \mu_1}, \\ -h_2 \leq z \leq 0, \quad U_2 &= e^{-iknz} (Ce^{-i\alpha_2 z} + De^{i\alpha_2 z}), \\ V_2 &\doteq -\frac{\alpha_2}{k\mu_2} e^{-iknz} (Ce^{-i\alpha_2 z} - De^{i\alpha_2 z}), \\ \alpha_2 &= kn_2 = k \sqrt{\epsilon_2 \mu_2}. \end{aligned} \quad (13.23)$$

Налагая на U и V условия непрерывности и периодичности, которые и здесь записываются в виде (13.6), получаем четыре однородных уравнения для постоянных интегрирования

$$\begin{aligned} C + D &= A + B, \\ e^{iknh_1} (Ce^{i\alpha_2 h_1} + De^{-i\alpha_2 h_1}) &= e^{-iknh_1} (Ae^{-i\alpha_1 h_1} + Be^{i\alpha_1 h_1}), \\ C - D &= p(A - B), \\ e^{iknh_2} (Ce^{i\alpha_1 h_2} - De^{-i\alpha_1 h_2}) &= pe^{-iknh_1} (Ae^{-i\alpha_1 h_1} - Be^{i\alpha_1 h_1}), \\ p &= \frac{\alpha_1 \mu_2}{\alpha_2 \mu_1} \sqrt{\frac{\epsilon_2 \mu_2}{\epsilon_1 \mu_1}}. \end{aligned} \quad (13.24)$$

Приравнивание нулю детерминанта системы (13.24) дает дисперсионное уравнение, определяющее n ,

$$\cos knd = \cos \alpha_1 h_1 \cos \alpha_2 h_2 - \frac{1 + p^2}{2p} \sin \alpha_1 h_1 \sin \alpha_2 h_2. \quad (13.25)$$

Снова определим средние по периоду структуры значения полей $E_x = E$ и $\bar{H}_y = \bar{H}$. Требуя, чтобы для средних полей были справедливы уравнения Максвелла

$$\partial E_x / \partial z = ik\mu^e \bar{H}_y, \quad \partial \bar{H}_y / \partial z = ik\epsilon^e E_x,$$

мы должны определить ϵ^e и μ^e из условий

$$n = \sqrt{\epsilon^e \mu^e}, \quad E_x / \bar{H}_y = \bar{U} / \bar{V} = \sqrt{\mu^e / \epsilon^e},$$

откуда

$$\epsilon^e = n \bar{H}_y / E_x, \quad \mu^e = n E_x / \bar{H}_y. \quad (13.26)$$

Вычисления дают

$$\epsilon^e = \bar{\epsilon} \left[1 + \frac{ikh_1 h_2}{4d} \frac{\mu_1 \epsilon_2 - \mu_2 \epsilon_1}{\sqrt{\epsilon \mu}} \right], \quad \mu^e = \bar{\mu} \left[1 - \frac{ikh_1 h_2}{4d} \frac{\mu_1 \epsilon_2 - \mu_2 \epsilon_1}{\sqrt{\epsilon \mu}} \right]. \quad (13.27)$$

Как мы видим, поправка к приближенной величине $n^2 = \bar{\epsilon} \bar{\mu}$ будет квадратичной.

Пусть толщины слоев h_1 и h_2 настолько малы, что поправочными членами в (13.27) и в аналогичных формулах, полученных выше, можно пренебречь. Объединяя все рассмотренные выше случаи, получаем следующую систему уравнений Максвелла для усредненных полей в нашей «квазианизотропной» среде:

$$\begin{aligned} \partial E_y / \partial x &= ik\bar{\mu} \bar{H}_z, \quad \partial E_x / \partial z = ik\bar{\mu} \bar{H}_y, \quad \partial \bar{E}_z / \partial x = -ik\bar{\mu} \bar{H}_y, \\ \partial \bar{H}_y / \partial x &= -ik\bar{\epsilon} E_z, \quad \partial \bar{H}_z / \partial x = ik\bar{\epsilon} E_y, \quad \partial \bar{H}_y / \partial z = ik\bar{\epsilon} \bar{E}_x. \end{aligned}$$

Это единая система уравнений Максвелла для среды, в которой тензоры для диэлектрической и магнитной проницаемостей ϵ^e и μ^e являются однократ-

но вырожденными, имеют совпадающие главные оси и следующие главные значения:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1^e &= \varepsilon_2^e = \bar{\varepsilon} = (h_1\varepsilon_1 + h_2\varepsilon_2)(h_1 + h_2)^{-1}, \\ \varepsilon_3^e &= \bar{\varepsilon} = \varepsilon_1\varepsilon_2(h_1 + h_2)(h_1\varepsilon_2 + h_2\varepsilon_1)^{-1}, \\ \mu_1^e &= \mu_2^e = \bar{\mu} = (h_1\mu_1 + h_2\mu_2)(h_1 + h_2)^{-1}, \\ \mu_3^e &= \bar{\mu} = \mu_1\mu_2(h_1 + h_2)(h_1\mu_2 + h_2\mu_1)^{-1}. \end{aligned} \quad (13.28)$$

Таким образом, рассматриваемая сложная среда обладает свойством одноосного кристалла с оптической осью, перпендикулярной слоям.

В заключение напомним, что в полученных выше формулах ε_1 , μ_1 , ε_2 , μ_2 будут комплексными величинами, если в слоях имеется поглощение волны.

§ 14. Отражение ограниченных пучков

До сих пор мы рассматривали отражение плоских волн от слоистых сред. Однако плоская волна является идеализацией и в действительности не существует. На практике часто приходится иметь дело с более или менее ограниченным волновым пучком. Необходимо поэтому исследовать, какие особенности возникают при отражении ограниченных пучков. Наш метод исследования [12] будет базироваться на разложении ограниченного пучка на бесконечную совокупность плоских волн. В § 31.3 показано, что результаты, полученные для ограниченного пучка, могут быть отнесены к отдельному лучу в случае точечного излучателя.

14.1. Представление ограниченного пучка в виде суперпозиции плоских волн. Допустим, что ограниченный пучок создается в результате прохождения плоской волны через щель CC' в экране, изображенном на рис. 14.1.

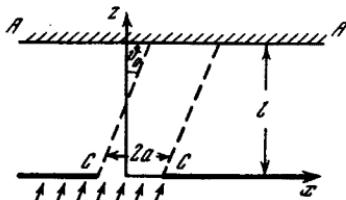


Рис. 14.1. Пучок, образующийся при падении плоской волны на отверстие в экране

Представим далее, что пучок падает на границу слоисто-неоднородной среды, от которой и исследуется отражение. Геометрические границы пучка на рис. 14.1 отмечены пунктиром. В действительности же, вследствие дифракции, пучок несколько расплывается.

Угол падения пучка на границу мы обозначим через θ_0 . Задачу будем предполагать для простоты двумерной, т. е. щель в экране бесконечной, а плоскость падения волны перпендикулярной осевой линии щели. При этом условии и таком выборе системы координат, как на рис. 14.1, координата y из формул выпадет.

Ось z направляем перпендикулярно плоскости экрана, ось x — перпендикулярно осевой линии щели, а начало координат помещаем на осевой линии. Ширину щели обозначим через $2a$, а расстояние от щели до отражающей плоскости — через l .

Поле падающего пучка между экраном и отражающей плоскостью должно удовлетворять волновому уравнению, а в плоскости экрана — граничным условиям, которые мы, предполагая ширину щели большой по сравнению с длиной волны *, зададим в приближенном виде по Кирхгофу, а именно, предположим, что:

* В точной теории дифракции на щели показывается, что для справедливости предположения Кирхгофа необходимо еще, чтобы угол падения был невелик. Однако для исследуемого здесь вопроса это не имеет принципиального значения.

- 1) на задней стенке экрана поле равно нулю;
 2) в плоскости щели поле такое же, как и при отсутствии экрана.

Этими граничными условиями и волновым уравнением поле падающего пучка определяется полностью.

Поле падающей плоской волны под плоскостью экрана мы запишем в виде (фактор $\exp(-i\omega t)$ подразумевается):

$$\psi = \exp i(\xi_0 x + \alpha_0 z), \quad (14.1)$$

где

$$\xi_0 = k \sin \vartheta_0, \quad \alpha_0 = k \cos \vartheta_0. \quad (14.2)$$

После прохождения щели при $z = 0$ мы будем иметь в соответствии со сказанным выше:

$$-a \leq x \leq a, \quad \psi(x) = \exp i\xi_0 x; \quad |x| > a, \quad \psi(x) = 0. \quad (14.3)$$

Целесообразно несколько обобщить задачу и рассмотреть случай произвольного распределения амплитуды волны по сечению пучка плоскостью $z = 0$. Поэтому в дальнейшем мы будем предполагать, что функция $\psi(x)$ имеет вид

$$\psi(x) = F(x) \exp i\xi_0 x, \quad -\infty < x < \infty. \quad (14.4)$$

Функция $F(x)$ описывает переменную, зависящую от x , прозрачности экрана. Для того чтобы понятие пучка имело смысл необходимо, чтобы ширина пучка была большой по сравнению с длиной волны. Это сводится к существенному для дальнейшего обстоятельству, что функция $F(x)$ должна быть медленно меняющейся (мало меняться на длине волны).

Поле в плоскости $z = 0$ представим в виде интеграла Фурье

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\xi) e^{i\xi x} d\xi, \quad (14.5)$$

где

$$\Phi(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) e^{-ix\xi} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) e^{i(\xi_0 - \xi)x} dx. \quad (14.6)$$

В частном случае пучка, образованного пропусканием плоской волны через щель,

$$-a \leq x \leq a, \quad F(x) = 1; \quad |x| > a, \quad F(x) = 0, \quad (14.7)$$

$$\Phi(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{+a} e^{i(\xi_0 - \xi)x} dx = \frac{\sin(\xi_0 - \xi)a}{\pi(\xi_0 - \xi)}. \quad (14.8)$$

Полезно заметить, что функция $\Phi(\xi)$ в (14.8) имеет величину порядка 1 лишь при малых разностях $(\xi_0 - \xi)$, удовлетворяющих $a(\xi_0 - \xi) \lesssim 1$. При $a(\xi_0 - \xi) \gg 1$, $\Phi(\xi)$ будет мала.

На основе функции $\psi(x)$, заданной в виде (14.5) и характеризующей поле в плоскости экрана, построим следующую функцию обеих переменных x и z

$$\psi(x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\xi) e^{i(\xi x + \alpha z)} d\xi, \quad \alpha = \sqrt{k^2 - \xi^2}, \quad \operatorname{Im} x \geq 0. \quad (14.9)$$

Эта функция и будет описывать поле падающего пучка между плоскостью экрана и отражающей плоскостью, так как, во-первых, она удовлетворяет волновому уравнению

$$\partial^2 \psi / \partial x^2 + \partial^2 \psi / \partial z^2 + k^2 \psi = 0, \quad (14.10)$$

поскольку этому уравнению удовлетворяет экспонента под интегралом; вторых, при $z = 0$ она переходит в $\psi(x)$, задаваемую выражением (14.5), т. е. удовлетворяет граничному условию.

Экспонента в подынтегральном выражении (14.9) при заданном ξ представляет собой плоскую волну, распространяющуюся под углом

$$\vartheta = \arcsin(\xi/k) \quad (14.11)$$

по отношению к направлению оси z . Таким образом, каждая компонента разложения поля в плоскости $z = 0$ в интеграл Фурье продолжается в пространство в виде плоской волны. Выражение (14.9) и будет представлять собой искомое разложение падающего пучка по плоским волнам.

При $\xi > k$ угол ϑ , согласно (14.11), будет комплексным, т. е. в разложении будут присутствовать также и неоднородные плоские волны (см. § 1). Их амплитуда будет убывать при удалении от плоскости экрана по экспоненциальному закону. Это видно также из (14.9), поскольку при $\xi > k$ экспонента под интегралом принимает вид $\exp(i\xi x - \sqrt{\xi^2 - k^2}z)$.

Наибольшую роль в (14.9) будут играть те плоские волны, направления которых близки к направлению падающей на щель плоской волны. Действительно, как уже указывалось, функция $\Phi(\xi)$ имеет заметную величину лишь при $(\xi_0 - \xi) a \lesssim 1$, т. е. при $ak(\sin \vartheta_0 - \sin \vartheta) \lesssim 1$ или, если учесть близость ϑ_0 и ϑ ,

$$(\vartheta_0 - \vartheta) \lesssim 1/ak \cos \vartheta_0. \quad (14.12)$$

Величина $a \cos \vartheta_0$ равна ширине нормального сечения пучка (в то время как a — ширина сечения в плоскости $z = 0$). Так как эта ширина должна быть, безусловно, много больше длины волны, иначе понятие пучка потеряет смысл, то, следовательно, $ak \cos \vartheta_0 \gg 1$ и

$$(\vartheta_0 - \vartheta) \ll 1. \quad (14.13)$$

14.2. Поле отраженного пучка. Смещение пучка при отражении. Обозначим через $V(\vartheta)$ коэффициент отражения плоской волны от границы

$$V(\vartheta) = \rho(\xi) e^{i\varphi(\xi)}, \quad \xi = k \sin \vartheta, \quad (14.14)$$

где $\rho(\xi)$ и $\varphi(\xi)$ — модуль и фаза коэффициента отражения.

Поле, создаваемое на границе падающим пучком, мы получим из (14.9), положив там $z = l$:

$$\Psi_{\text{пад}}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\xi) e^{i(\xi x + \alpha l)} d\xi. \quad (14.15)$$

Поле отраженного пучка получится, если здесь подынтегральное выражение, представляющее собой плоскую падающую волну с переменным углом падения, умножить на $V(\vartheta)$. Следовательно,

$$\Psi_{\text{отр}}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\xi) \rho(\xi) \exp i[\xi x + \alpha l + \varphi(\xi)] d\xi. \quad (14.16)$$

Подставляя в (14.16) $\Phi(\xi)$ из (14.6), запишем поле падающего и отраженного пучков в другом виде:

$$\Psi_{\text{пад}}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\eta) \exp i[(\xi_0 - \xi)\eta + \xi x + \alpha l] d\xi d\eta, \quad (14.17)$$

$$\Psi_{\text{отр}}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\eta) \rho(\xi) \exp i[\varphi(\xi) + (\xi_0 - \xi)\eta + \xi x + \alpha l] d\xi d\eta. \quad (14.18)$$

В дальнейшем мы будем рассматривать случай, когда модуль коэффициента отражения мало меняется в пределах углов наклона, удовлетворяющих условию (14.13). Одним из наиболее важных является случай полного внутреннего отражения волны на границе двух сред, когда модуль коэффициента отражения остается при всех углах, больших угла полного внутреннего отражения, постоянным и равным единице.

В этих случаях величину $\rho(\xi)$ можно вынести за знак интеграла при значении $\xi = \xi_0$. Кроме того, в (14.17) и (14.18) введем новую величину

$$\Omega = \xi - \xi_0. \quad (14.19)$$

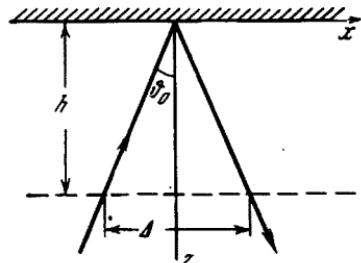


Рис. 14.2. Случай абсолютно отражающей границы

$$\Psi_{\text{пад}}(x) = \exp i\xi_0 x \cdot f_{\text{пад}}(x),$$

$$f_{\text{пад}}(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\eta) \exp i[\Omega(x - l) + \sqrt{k^2 - (\Omega + \xi_0)^2} l] d\eta d\Omega. \quad (14.22)$$

$$\Psi_{\text{отр}}(x) = \exp i\xi_0 x \cdot f_{\text{отр}}(x),$$

$$f_{\text{отр}}(x) = \frac{V(\theta_0)}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\eta) \exp i\{\Omega[x + \varphi'(\xi_0) - \eta] + \sqrt{k^2 - (\Omega + \xi_0)^2} l\} d\eta d\Omega, \quad (14.23)$$

где $f_{\text{пад}}(x)$ и $f_{\text{отр}}(x)$ — функции, описывающие форму пучка до и после отражения.

Сравнивая (14.22) и (14.23), находим

$$f_{\text{отр}}(x) = f_{\text{пад}}(x + \varphi'(\xi_0)) V(\theta_0). \quad (14.24)$$

Отсюда следует, что при отражении пучок смещается вдоль границы на величину

$$\Delta = -\varphi'(\xi_0). \quad (14.25)$$

Физический смысл величины Δ становится ясным после рассмотрения следующего простого явления.

Пусть плоская волна падает на границу $z = 0$ (рис. 14.2), коэффициент отражения от которой равен единице. Совместив плоскость xz с плоскостью падения, падающую волну, как и выше, запишем в виде $\exp i(\xi_0 x - \alpha_0 z)$ и отраженную волну в виде $\exp i(\xi_0 x + \alpha_0 z)$, где $\alpha_0 = k \cos \theta_0$.

При $z = 0$ обе волны имеют равные амплитуды и фазы. В некоторой же плоскости $z = h$ падающая и отраженная волны будут иметь выражения $\exp i(\xi_0 x - \alpha_0 h)$ и $\exp i(\xi_0 x + \alpha_0 h)$. Отношение отраженной волны к падающей

$$V = \exp(2i\alpha_0 h) \quad (14.26)$$

можно рассматривать как коэффициент отражения волны в плоскости $z = h$. Модуль этого коэффициента равен единице, а фаза $\varphi = 2\alpha_0 h = 2\sqrt{k^2 - \xi_0^2} h$ соответствует набегу фазы волны при ее пробеге от $z = h$ до $z = 0$ и обратно.

В общем случае при произвольном угле падения волны фаза ϕ будет

$$\phi = 2h \sqrt{k^2 - \xi^2}. \quad (14.27)$$

Выражение (14.25) дает для смещения Δ в этом случае

$$\Delta = -(\partial\phi/\partial\xi)|_{\xi=\xi_0} = 2h\xi_0/x_0 = 2h \operatorname{tg} \theta_0. \quad (14.28)$$

Величина Δ показана на рис. 14.2. Она равна горизонтальному смещению луча при проходе его от плоскости $z = h$ до плоскости $z = 0$ и обратно.

Таким образом, в рассматриваемом случае смещение лучей, даваемое формулой (14.25), имеет весьма простой смысл. Его можно вычислить, конечно, без обращения к формуле (14.25), на основании только лучевых представлений. Однако основную ценность изложенная выше теория имеет для случаев, когда лучевая концепция является неприменимой. Ниже мы рассмотрим несколько таких случаев.

Отметим также, что теория смещения пучка при отражении имеет много аналогий в теории распространения квазимохроматического импульса в диспергирующей среде (см., например, [28, § 21]).

14.3. Полное внутреннее отражение пучка. Согласно формуле (14.25), нужно ожидать, что смещение пучка при отражении будет значительным в тех случаях, когда фаза коэффициента отражения быстро меняется с углом. Это как раз имеет место при падении пучка на границу двух однородных сред под углом, несколько превышающим угол полного внутреннего отражения. Как видно из рис. 2.3 (здесь граничный угол составляет 56°), фаза коэффициента отражения ϕ при этом меняется весьма быстро. Для ϕ мы имеем в данном случае формулу (2.22).

Нас будет интересовать случай, когда $\sin \theta$ и $\sin \theta_0$ близки друг другу и близки к n . Тогда будем иметь приближенно, учитывая также (14.11)

$$\phi = -\frac{2}{km} \sqrt{\frac{\xi^2 - k^2 n^2}{1 - n^2}}. \quad (14.29)$$

Дифференцируя, находим выражение для смещения

$$\Delta = (\lambda/\pi m) \operatorname{tg} \theta_0 / \sqrt{\sin^2 \theta_0 - n^2}. \quad (14.30)$$

Мы видим, что смещение пучка тем больше, чем ближе угол его падения θ_0 приближается к граничному углу полного внутреннего отражения. При $\sin \theta_0 \rightarrow n$ мы имеем из (14.30) $\Delta \rightarrow \infty$.

В случае отражения электромагнитной волны, у которой вектор электрического поля ориентирован перпендикулярно плоскости падения волны, из формулы (4.16) получаем при $\mu_1 = \mu$, $\sin \theta > n$

$$V_\perp = \frac{\cos \theta - i \sqrt{\sin^2 \theta - n^2}}{\cos \theta + i \sqrt{\sin^2 \theta - n^2}} = e^{i\phi}, \quad \phi = -2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\xi^2 - k^2 n^2}{k^2 - \xi^2}}.$$

Для смещения пучка получаем выражение

$$\Delta_\perp = (\lambda/\pi) \operatorname{tg} \theta_0 / \sqrt{\sin^2 \theta_0 - n^2}. \quad (14.31)$$

Аналогично, если вектор электрического поля лежит в плоскости падения волны, имеем

$$\Delta_\parallel = (\lambda/\pi n^2) \operatorname{tg} \theta_0 / \sqrt{\sin^2 \theta_0 - n^2}. \quad (14.31')$$

В этих формулах λ — длина волны в среде, из которой падает волна, n — показатель преломления границы.

Опытное определение смещения световых пучков при полном внутреннем отражении на границе стекло — воздух производилось в работах [161, 162]. Хотя при каждом отражении смещение может по своей величине достигать многих длин волн, чтобы сделать его хорошо заметным, пришлось прибег-



Рис. 14.3. Смещение ультразвукового пучка частоты $1,6 \cdot 10^7$ Гц при отражении его от границы ксиол-алюминий



Рис. 14.4. То же, что и на рис. 14.3, но для частоты $5,5 \cdot 10^6$ Гц

Вблизи этого угла фаза коэффициента отражения также является весьма быстро меняющейся функцией.

Расчет для смещения дает в этом случае [231]

$$\Delta = \frac{2\lambda_{p1}}{\pi q} \left| \frac{6(1-q) - 2(3-2q)s - s^2}{s(1-qs)} \right| \sqrt{\frac{rs-1}{s(1-s)}}. \quad (14.32)$$

где λ — длина волны в жидкости, остальные обозначения такие же, как и в § 7 (см. (7.37)).

Величина $s = (v_R/b_1)^2$ зависит от коэффициента Пуассона и изменяется для различных твердых тел в пределах от 0,77 до 0,91. Для алюминия, например, $s = 0,87$.

Подстановка численных значений в формулу (14.32) дает для границ: а) вода — алюминий $\Delta = 24,4 \lambda$, б) ксиол — алюминий $\Delta = 33,4 \lambda$.

Угол падения ϑ_R , при котором имеет место это смещение, определяющийся из соотношения $\sin \vartheta_R = c/v_R$, составляет соответственно а) $\vartheta_R = 31^\circ$; б) $\vartheta_R = 27^\circ$.

Смещение Δ достаточно велико, чтобы быть зафиксированным простым образом. На рис. 14.3, взятом, как и два последующих, из [231], изображена снятая при помощи теневого метода картина полного отражения ультразвукового пучка (частота $1,6 \times 10^7$ Гц) от границы ксиол — алюминий для трех углов падения, возрастающих слева направо. На среднем изображении угол падения равен ϑ_R ; смещение отраженного пучка относительно падающего хорошо заметно. Это смещение отсутствует на крайних изображениях, где углы падения несколько отличны от ϑ_R . Полная ширина пучка составляет 12 мм; длина волны в ксиоле при этой частоте 0,08 мм, смещение Δ в согласии с расчетным оказывается равным 2,7 мм.

На рис. 14.4 приведена картина, полученная в тех же условиях, но для более низкой частоты $5,5 \times 10^6$ Гц ($\lambda = 0,24$ мм). Поскольку согласно теории, смещение пропорционально длине волны, здесь оно оказывается еще более заметным. Пучок смещается при этом почти на свою полную ширину. Однако вследствие увеличения длины волны границы пучка оказываются более размытыми.

нуть к многократным отражениям. При этом смещение увеличивалось в число раз, равное числу отражений. Опыты подтвердили теоретические данные.

14.4. Отражение звуковых пучков от твердых тел и от пластинок. При падении звуковой волны из жидкости на границу твердого тела полное внутреннее отражение имеет место при $\sin \vartheta > c/b_1$, где c — скорость звуковых волн в жидкости, а b_1 — скорость сдвиговых волн в твердом теле. Вблизи граничного угла полного внутреннего отражения будет иметь место, как и в оптике, заметное смещение пучка, которое можно снова подсчитать по формуле (14.25), пользуясь выражением (7.7) для коэффициента отражения и представив его в виде $V = \exp i\phi$.

Заметное смещение будет иметь место также при несколько большем угле падения волны, когда ее фазовая скорость вдоль границы будет совпадать с v_R — скоростью волны Рэлея на границе твердого тела с вакуумом.

При наличии смещения угол ϑ_R определяется с настолько хорошей точностью, что на этом принципе может быть основан достаточный метод определения скорости волны Рэлея, а значит и упругих параметров среды.

Весьма большое смещение звукового пучка может возникать при отражении его от пластиинки, так как в этом случае фаза коэффициента отражения меняется с углом особенно быстро (см., например, рис. 14.5, где изображена фаза коэффициента отражения звуковой волны от алюминиевой пластиинки в воздухе как функция угла падения). При этом по отношению к падающему пучку смещается также и прошедший пучок.

Два случая отражения ультразвукового пучка частоты $16,3 \times 10^6$ Гц от алюминиевой пластиинки, толщиной 0,43 мм, в киполе изображены [232] на рис. 14.6. Здесь несколько различными являются углы падения пучка на пластиинку. При этом в одном случае мы имеем почти полное отражение волны, в другом — почти полное ее проникновение через пластиинку. Смещение отраженного и прошедшего пучков по своей величине составляют несколько толщин пластиинки. Бросается в глаза также неоднородность отраженного пучка по его сечению. Здесь уместно отметить, что учет ограниченности пучка и его смещения вдоль отражающей системы имеет весьма существенное значение в теории резонансных оптических и других фильтров. Этот вопрос был весьма полно обследован в работах Л. В. Иогансена [40, 41].

14.5. Распределение энергии в сечении отраженного пучка. Для исследования «внутреннего строения» отраженного пучка, т. е. распределения энергии по его сечению, необходимо в формуле (14.20) для фазы коэффициента отражения учесть члены второго порядка *. При этом вместо (14.23) мы получаем следующее выражение для поля отраженного пучка:

$$\Phi_{\text{отр}}(x) = \frac{1}{2\pi} V(\vartheta_0) \exp i\xi_0 x \int_{-\infty}^{+\infty} F(\eta) \exp i\{\Omega[x + \Phi'(\xi_0) - \eta] + \\ + \sqrt{k^2 - (\Omega + \xi_0)^2} l + i\Phi''(\xi_0) \Omega^2/2\} d\Omega d\eta. \quad (14.33)$$

Мы предположим, что множитель $\exp i\sqrt{k^2 - (\Omega + \xi_0)^2} l$ можно вынести за знак интеграла при значении $\Omega = 0$ как медленно меняющийся при изменении Ω . Для этого l не должно быть слишком велико. Учет этого множителя под интегралом при больших l дал бы возможность учесть расплывание пучка из-за дифракции при его распространении от щели до отражающей поверхности. Это расплывание уже достаточно хорошо исследовано в теории дифракции. Здесь мы его учитывать не будем.

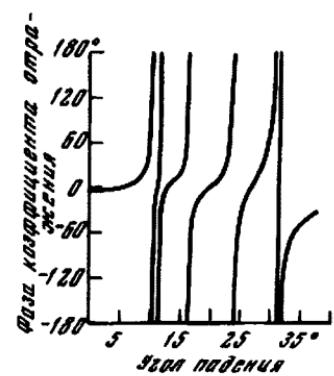


Рис. 14.5. Фаза коэффициента отражения звуковой волны от алюминиевой пластиинки в воздухе (расчет). Толщина пластиинки 3,1 мм, частота волны $3,35 \cdot 10^6$ Гц



Рис. 14.6. Отражение ультразвукового пучка частоты $1,63 \cdot 10^7$ Гц от алюминиевой пластиинки, толщиной 0,43 мм в киполе

* Рассматриваемый здесь вопрос формально аналогичен вопросу об изменении формы волнового пакета при распространении в диспергирующей среде (см. [28]), откуда мы и берем схему расчета.

Введем вместо Ω новую переменную y согласно соотношению

$$\phi'' [\Omega + (x + \varphi' - \eta)/\phi'']^2 = \pi y^2. \quad (14.34)$$

Выполняя в (14.33) интегрирование по y и учитывая, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left(\pm i \frac{\pi}{2} y^2 \right) dy = 1 \pm i, \quad (14.35)$$

получаем

$$\begin{aligned} \psi_{\text{отр}}(x) = (1+i)/2 \sqrt{\pi \phi''} V(\theta_0) \exp i(\xi_0 x + \sqrt{k^2 - \xi_0^2} l) \times \\ \times \int_{-\infty}^{+\infty} \exp [-i(x + \varphi' - \eta^2)/2\phi''] F(\eta) d\eta. \end{aligned} \quad (14.36)$$

Обозначим далее

$$(x + \varphi' - \eta)/\sqrt{\pi \phi''} = u. \quad (14.37)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \psi_{\text{отр}}(x) = \frac{1+i}{2} V(\theta_0) \exp i(\xi_0 x + \sqrt{k^2 - \xi_0^2} l) \times \\ \times \int_{-\infty}^{+\infty} \exp (-i\pi u^2/2) F(x + \varphi' - \sqrt{\pi \phi''} u) du. \end{aligned} \quad (14.38)$$

При ϕ'' достаточно малом, учитывая (14.35), мы снова получаем формулу (14.24), дающую смещение пучка без изменения его формы.

Дальнейший анализ выражений (14.38) без пренебрежения членом, содержащим $\sqrt{\pi \phi''}$, возможен только при задании определенного распределения амплитуды волны по сечению падающего пучка, т. е. при задании вида функции F . Мы предположим здесь, что функция F задается соотношениями (14.7), т. е., что падающий пучок имеет ширину $2a$ и постоянную по всему сечению интенсивность. Тогда интеграл (14.38) фактически будет браться в пределах (u_1, u_2) , определяемых из соотношения

$$x + \varphi' + \sqrt{\pi \phi''} u_{1,2} = \mp a \quad (14.39)$$

или

$$u_{1,2} = -(\mp a + x + \varphi') / \sqrt{\pi \phi''}. \quad (14.40)$$

Учитывая, что в этих пределах $F = 1$, получаем из (14.38):

$$\psi_{\text{отр}}(x) = \frac{1+i}{2} V(\theta_0) \exp i(\xi_0 x + \sqrt{k^2 - \xi_0^2} l) \int_{u_1}^{u_2} \exp (-i\pi u^2/2) du. \quad (14.41)$$

Это же можно записать в виде

$$\psi_{\text{отр}}(x) = \frac{1+i}{2} V(\theta_0) \exp i(\xi_0 x + \sqrt{k^2 - \xi_0^2} l) [f(u_2) - f(u_1)], \quad (14.42)$$

где

$$f(u_1) = \int_0^{u_1} \exp (-i\pi u^2/2) du = C(u_1) - iS(u_1) \quad (14.43)$$

и аналогично для $f(u_2)$ с заменой u_1 на u_2 . Так как интегралы Френеля C и S являются осциллирующими функциями своих аргументов, то и интенсивность в отраженном пучке будет меняться по сечению не монотонно. Это подтверждается и экспериментом (см., например, рис. 14.6).

Смещение пучка при его отражении можно получить также, рассматривая поток энергии в падающем и отраженном пучках [154, 230, 12].

14.6. Отражение от неоднородной среды. Весьма большой интерес представляет исследование отражения ограниченного пучка от среды с непрерыв-

но меняющимися свойствами. Здесь применение формулы (14.25) для смещения приводит к интересным результатам, дополняющим обычные лучевые представления о рефракции волн [11].

Мы рассмотрим конкретный случай, когда показатель преломления $n(z)$ среды имеет вид

$$z \leq 0, \quad n = 1; \quad z \geq 0, \quad n = \sqrt{1 - az}, \quad a > 0, \quad (14.44)$$

Предположим, что из однородной среды ($z < 0$) на границу $z = 0$ падает ограниченный пучок. Чтобы найти форму и местоположение отраженного пучка, необходимо, как мы видели, знать коэффициент отражения плоской волны от этой границы $V(\theta)$. Он найден для рассматриваемого случая в § 21 и дается формулой (21.22). Для удобства выпишем его фазу

$$\varphi = -\pi - 2 \operatorname{arctg} \left[\sqrt{-t_0} \frac{v(t_0)}{v'(t_0)} \right], \quad -t_0 = (k_0/a)^{1/4} \cos^2 \theta, \quad (14.45)$$

где $v(t_0)$ — функция Эйри (см. § 21), θ — угол падения, k_0 — волновое число в полупространстве $z < 0$. Предположим, что $-t_0$ велико, что осуществляется, если изменение показателя преломления мало на длине волны ($k_0/a \gg 1$), а θ не слишком близко к $\pi/2$.

Из асимптотических формул (21.13) мы имеем при $t_0 < 0$

$$v(t_0) \approx (-t_0)^{-1/4} \sin(w_0 + \pi/4), \quad v'(t_0) \approx -(-t_0)^{1/4} \cos(w_0 + \pi/4), \quad (14.46)$$

где

$$w_0 \equiv \frac{2}{3} (-t_0)^{1/2} = \frac{2}{3} \left(\frac{k_0}{a} \right) \cos^3 \theta. \quad (14.47)$$

Подставляя (14.46) в (14.45), получаем

$$\varphi = (4k_0/3a) \cos^2 \theta - \pi/2. \quad (14.48)$$

Покажем, что это выражение для фазы, за исключением слагаемого $\pi/2$ (которое при сделанных нами предположениях мало по сравнению с первым членом), может быть получено в рамках лучевой оптики. Действительно, луч, падающий на границу под углом θ , будет при произвольном z составлять с осью z угол $\theta = \theta(z)$, который находится из соотношения (закон Снеллиуса (ср. формулу (23.17))

$$n(z) \sin \theta(z) = \sin \theta. \quad (14.49)$$

В точке же «заворота» $z = z_m$, определяемой из уравнения

$$n(z_m) = \sin \theta, \quad (14.50)$$

луч примет горизонтальное положение и в дальнейшем завернет обратно (рис. 14.7).

Набег фазы при пробеге плоской волны от границы $z = 0$ до плоскости $z = z_m$ и обратно будет, очевидно,

$$\varphi = 2 \int_0^{z_m} k_z dz = 2k_0 \int_0^{z_m} n(z) \cos \theta(z) dz.$$

Это и будет фазой коэффициента отражения в лучевом приближении. Учитывая соотношение (14.49), получаем

$$\varphi = 2k_0 \int_0^{z_m} \sqrt{n^2(z) - \sin^2 \theta} dz. \quad (14.51)$$

Если теперь воспользоваться законом (14.44), то

$$\varphi = 2k_0 \int_0^{z_m} \sqrt{\cos^2 \theta - az} dz \quad (14.52)$$

или после замены $\zeta = \cos^2 \vartheta - az$,

$$\varphi = \frac{2k_0}{a} \int_0^{\cos^2 \vartheta} \zeta^{1/2} d\zeta = \frac{4k_0}{3a} \cos^3 \vartheta, \quad (14.53)$$

что совпадает с (14.48) с точностью до члена $\pi/2$.

Вычислим теперь смещение пучка при его отражении, воспользовавшись последним выражением для фазы. Выразив ϑ через ξ , согласно соотношению

$$\xi = k_0 \sin \vartheta, \quad (14.54)$$

получаем

$$\varphi = (4t_0/3a) (1 - \xi^2/k_0^2)^{1/2}. \quad (14.55)$$

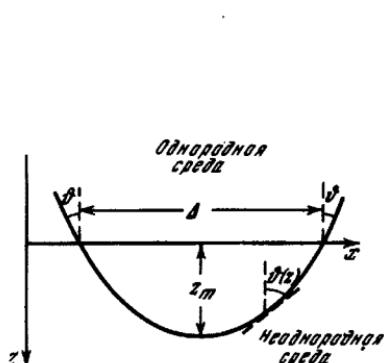


Рис. 14.7. Лучевая картина полного отражения от неоднородной среды

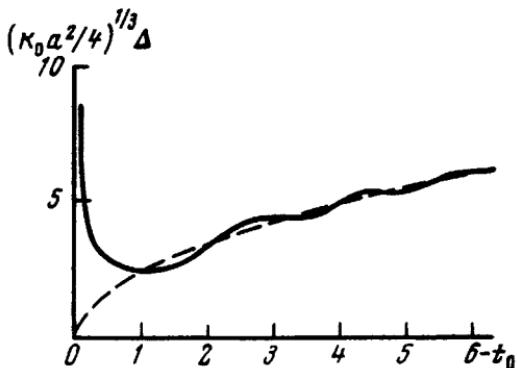


Рис. 14.8. Смещение пучка при отражении как функция параметра t_0

После этого из (14.25), учитывая также, что $\xi_0 = k_0 \sin \vartheta_0$, где ϑ_0 угол, составляемый осью пучка с осью z , получаем

$$\Delta = (2/a) \sin 2\vartheta_0. \quad (14.56)$$

Это же выражение для смещения мы получим, рассчитав ход луча на рис. 14.7 и учитя при этом соотношения (14.49) и (14.44). Мы предоставляем читателю убедиться в этом самому.

Не будем теперь ограничиваться приближением геометрической оптики. Мы имеем согласно (14.45) и (14.54)

$$t_0 = (\xi^2 - k_0^2) / (ak_0^2)^{1/2}. \quad (14.57)$$

Отсюда находим, учитывая также (14.54),

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{2\xi}{(ak_0^2)^{1/2}} \frac{\partial}{\partial t_0} = \frac{2 \sin \vartheta_0}{(k_0 a^2)^{1/2}} \frac{\partial}{\partial t_0}. \quad (14.58)$$

Теперь получаем дифференцированием φ в (14.45):

$$\Delta = - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right)_{\xi=\xi_0} = \frac{2 \sin 2\vartheta_0}{a} - \frac{\operatorname{tg} \vartheta_0}{(ak_0^2)^{1/2}} \frac{vv'}{v'^2 - t_0 v^2}, \quad (14.59)$$

где $v \equiv v(t_0)$, $v' \equiv v'(t_0)$. При дифференцировании учтено уравнение для функции Эйри $v''(t) = tv(t)$.

Предположим, что выполнено условие $(a/k_0) \ll 1$. Тогда пользоваться формулой (14.59) имеет смысл только при малых углах скольжения $\chi_0 \equiv \vartheta_0 - \pi/2$, так как в противном случае целесообразно использовать более простую формулу (14.56). Имеем при малых χ_0 :

$$\sin \vartheta_0 \approx 1, \quad \cos \vartheta_0 \approx \chi_0, \quad t_0 \approx - \left(\frac{k_0}{a} \right)^{1/2} \chi_0^2. \quad (14.60)$$

Формула (14.59) для смещения в этом случае может быть записана

$$\left(\frac{k_0 a^2}{4}\right)^{1/2} \Delta = 2^{1/2} \sqrt{-t_0} \left(1 + \frac{1}{2t_0} \frac{vv'}{v'^2 - t_0 v^2}\right). \quad (14.61)$$

На рис. 14.8 величина $\left(\frac{k_0 a^2}{4}\right)^{1/2} \Delta$ изображена графически как функция t_0 (сплошная линия). Интересно сравнить полученное значение Δ с приближенным (14.56). Последнее получится из (14.61) при замене выражения в круглых скобках единицей:

$$(k_0 a^2 / 4)^{1/2} \Delta = 2^{1/2} \sqrt{-t_0}. \quad (14.62)$$

График этой функции на рис. 14.8 изображен пунктирной линией. Из сравнения сплошной и пунктирной кривых мы видим, что лучевая теория дает приблизительно правильный результат при условии

$$-t_0 \geq 1 \text{ или } \chi_0 \geq (a/k_0)^{1/2}. \quad (14.63)$$

При невыполнении этого условия между точной и лучевой теорией возникают существенные расхождения.

Выражение (14.61) для смещения в области $|t_0| < 1$ справедливо не только для случая, когда показатель преломления $n(z)$ задан законом (14.44), но также во всех тех случаях, когда разложение функции $n(z)$ в ряд по степеням z имеет линейный член, т. е. когда при малых z можно положить

$$n(z) = 1 - az/2, \quad (14.64)$$

где a — некоторый параметр. Такая широкая применимость полученного результата обусловливается тем, что при малых углах скольжения процесс отражения волны при любом законе изменения $n(z)$ разыгрывается в слое, где $az \ll 1$ и, следовательно, справедливо разложение (14.64).

Действительно, за наибольший угол скольжения, при котором неприменима лучевая теория и нужно пользоваться точной формулой (14.61), можно согласно (14.63) взять угол

$$\chi_{rp} = (a/k_0)^{1/2} \ll 1. \quad (14.65)$$

Луч, падающий на границу однородной и неоднородной сред под этим углом скольжения, проникает в неоднородную среду на глубину z_m , определяемую из соотношения (см. (14.50))

$$n(z_m) = \cos \chi_{rp} \approx 1 - \chi_{rp}^2/2.$$

Воспользовавшись разложением (14.54), получаем из последнего соотношения

$$az_m = \chi_{rp}^2 \ll 1,$$

что и нужно было доказать.

Использованные здесь лучевые представления строго говоря неприменимы при малых углах скольжения. Однако, как показывает и строгая теория, они дают правильный порядок для z_m .

Задача о полном отражении волн от границы однородной и неоднородной сред решалась также Р. Гансом [158]. Им был рассчитан ход лучей вблизи точки заворота в неоднородной среде. При этом он нашел, что луч в самой точке заворота образует излом. Его результат не имеет физического смысла, так как прослеживать ход луча там, где неприменима лучевая теория, нельзя. Более подробно об этом см. в § 25.8.

§ 15. Отражение импульсов

15.1. Общие соотношения. Закон сохранения интегрального импульса. Рассмотрим отражение импульса с плоским фронтом от плоской границы. Для этого воспользуемся разложением импульса на гармонические волны с тем же углом падения, что и импульс.

Предположим для определенности снова, что плоскость падения совмещена с плоскостью xz (рис. 15.1). Тогда в общем выражении для импульса (1.1) будем иметь $n_x = \sin \theta$, $n_y = 0$, $n_z = \cos \theta$, θ — угол падения. Раз-



Рис. 15.1. Падение импульса с плоским фронтом на плоскую границу

ложение падающего импульса по гармоническим волнам, согласно (1.3а), будет иметь вид

$$F(\zeta) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \Phi(\omega) e^{i\omega\zeta} d\omega + \text{к. с.} \quad (15.1)$$

$$\zeta \equiv \frac{x \sin \theta + z \cos \theta}{c} - t, \quad (15.2)$$

где символом к. с. для сокращения обозначается член, комплексно-сопряженный выписанному впереди члену.

Здесь под F мы будем понимать звуковое давление, если рассматривается акустический случай. В электромагнитном случае под $F(\zeta)$ нужно понимать величину электрического поля E_y , если E перпендикулярно плоскости падения, и величину магнитного поля H_y , если H перпендикулярно этой плоскости.

Обозначив, как и ранее, коэффициент отражения плоской гармонической волны через V , отраженный импульс запишем в виде

$$F_{\text{отр}}(\zeta^-) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} V \Phi(\omega) e^{i\omega\zeta^-} d\omega + \text{к. с.}, \quad \zeta^- \equiv \frac{x \sin \theta - z \cos \theta}{c} - t. \quad (15.3)$$

Отраженный импульс имеет в общем случае форму, отличную от формы падающего импульса. Форма импульса не меняется только, если V является вещественной величиной, не зависящей от ω . Действительно, в этом случае $V^* = V$, причем V как постоянная величина выносится за знак интеграла, и из (15.3) мы получаем выражение (15.1), умноженное на коэффициент отражения с той лишь разницей, что в одном случае фигурирует величина ζ , а в другом ζ^- . Однако, если мы имеем полное внутреннее отражение от границы раздела двух однородных сред, где V хотя и не зависит от частоты, но является комплексной величиной, функция $F_{\text{отр}}(\zeta^-)$ будет отличаться от $F_{\text{отр}}(\zeta)$, т. е. форма импульса изменится. То же будет при полном отражении волны в неоднородной среде (§ 14.7). Эти случаи мы подробнее исследуем ниже.

Прошедший импульс запишется по аналогии с (15.3)

$$F_{\text{пр}}(\zeta_1) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} W \Phi(\omega) e^{i\omega\zeta_1} d\omega + \text{к. с.}, \quad \zeta_1 \equiv \frac{x \sin \theta_1 + z \cos \theta_1}{c_1} - t, \quad (15.4)$$

где θ_1 — угол преломления, связанный с углом падения соотношением $\sin \theta_1 = (c_1/c) \sin \theta$, W — коэффициент прозрачности.

Докажем теорему сохранения полного импульса: полный (интегральный) импульс в любой точке верхней среды равен полному импульсу в любой точке нижней среды *.

Математически теорема выражается тождеством

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (F + F_{\text{отр}}) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} F_{\text{пр}} dt, \quad (15.5)$$

которое остается справедливым независимо от формы падающего импульса и точек в пространстве, для которых берутся интегралы в правой и левой частях равенства.

Так, например, при полном внутреннем отражении импульса максимальное значение $F_{\text{пр}}$ в импульсе, как мы увидим ниже, будет убывать при углублении в среду, от которой исследуется отражение. Однако при этом импульс растягивается во времени так, что его площадь, даваемая интегралом в правой части (15.5), остается постоянной при как угодно большом удалении от границы.

Доказательство (15.5) начнем с рассмотрения интегральной величины падающего импульса. Учитывая, что согласно (1.4), мы имеем

$$\Phi^*(\omega) = \Phi(-\omega), \quad (15.6)$$

выражение (15.1) для падающего импульса можно записать в виде

$$F(\zeta) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \Phi(\omega) e^{i\omega\zeta} d\omega + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \Phi(-\omega) e^{-i\omega\zeta} d\omega,$$

или, заменяя во втором интеграле $-\omega$ на ω и объединяя оба интеграла в один, получаем

$$F(\zeta) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\omega) e^{i\omega\zeta} d\omega. \quad (15.7)$$

Интеграл по t в бесконечных пределах эквивалентен интегралу по ζ . Поэтому

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(\zeta) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\zeta) d\zeta = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\omega) e^{i\omega\zeta} d\zeta d\omega. \quad (15.8)$$

Но, как известно, имеет место соотношение (см., например, [39], гл. 14, § 2):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega\zeta} d\zeta = 2\pi\delta(\omega), \quad (15.9)$$

где $\delta(\omega)$ — функция Дирака, равная нулю всюду, кроме точки $\omega = 0$, причем в этой точке она обращается в бесконечность. Функция Дирака обладает следующими свойствами:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\omega) d\omega = 1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega) \delta(\omega) d\omega = f(0), \quad (15.10)$$

где $f(\omega)$ — произвольная непрерывная в нуле функция. Теперь (15.8) записывается

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(\zeta) d\zeta = \pi \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\omega) \delta(\omega) d\omega = \pi\Phi(0). \quad (15.11)$$

* См. [12]. Для некоторых ограниченных случаев этот закон был сформулирован также в [149].

Этот результат можно было бы предугадать и заранее, поскольку известно, что площадь кривой дается постоянной составляющей (соответствующей $\omega = 0$) разложения этой кривой в ряд или интеграл Фурье.

Каждая из плоских волн дает, согласно (15.3), отраженную волну

$$\frac{1}{2} V(\omega) \Phi(\omega) e^{i\omega\xi^-} + \text{к. с.} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [V(\omega) \Phi(\omega)] (e^{i\omega\xi^-} + e^{-i\omega\xi^-}) - \\ - \operatorname{Im} [V(\omega) \Phi(\omega)] \sin \omega \xi^-. \quad (15.12)$$

При интегрировании по ξ^- последний член обращается в нуль в силу его нечетности по отношению к ξ^- , а первый, как и в случае падающей волны, дает $\pi \operatorname{Re} [V(0) \Phi(0)]$. Аналогичное выражение с заменой V на W получается и для интеграла от преломленного импульса в произвольной точке пространства.

Таким образом, для доказательства (15.5) достаточно убедиться в справедливости равенства

$$\Phi(0) + \operatorname{Re} [V(0) \Phi(0)] = \operatorname{Re} [W(0) \Phi(0)].$$

Согласно (15.5), мы имеем $\Phi^*(0) = \Phi(0)$, т. е. $\Phi(0)$ — вещественно. Поэтому последнее равенство сводится к соотношению

$$1 + \operatorname{Re} V(0) = \operatorname{Re} W(0). \quad (15.13)$$

Однако справедливо более общее равенство

$$1 + V(0) = W(0), \quad (15.14)$$

взяв вещественную часть от которого, мы и получим (15.13).

Действительно в случае отражения от границы раздела двух однородных сред коэффициенты V и W не зависят от частоты и равенство $1 + V = W$ следует просто из условий непрерывности звукового давления или соответственной компоненты электромагнитного поля (см. §§ 2, 4). В более сложных случаях, когда отражение происходит от слоя или совокупности слоев, для частоты $\omega \rightarrow 0$ (т. е. для бесконечной длины волны) вся эта совокупность будет представлять собой сосредоточенную систему, которая никак не скажется на процессе отражения, и последний будет происходить так, как будто бы среды, разделяемые этой совокупностью, соприкасались непосредственно. Для случая одного слоя это можно видеть из формул (3.10) и (3.16), которые показывают, что $\omega \rightarrow 0$ ($k_{2z} \rightarrow 0$) эквивалентно случаю $d \rightarrow 0$, т. е. исключению влияния слоя.

Представляет интерес и другое доказательство закона (15.5), которое мы дадим для случая акустического импульса *.

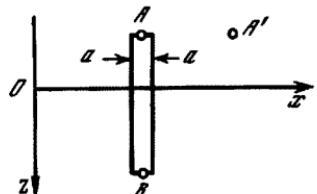


Рис. 15.2. К доказательству закона сохранения полного импульса

Прежде всего без доказательства ясно, что в двух точках A и A' (рис. 15.2), лежащих в плоскости, параллельной отражающей границе (в данном случае в плоскости $z = \text{const}$), интегральный импульс будет одинаковым, так как эти две точки расположены совершенно одинаково по отношению к отражающей границе. Поэтому имеет смысл сравнивать интегральные импульсы лишь для точек A и B , лежащих на одной и той же нормали к границе.

* На возможность этого доказательства автору указал М. А. Исаевич.

Представим себе элементарный цилиндр с бесконечно малой площадью оснований, на которых и расположены точки A и B . Этот цилиндр до прохождения волны был в покое и останется в покое после прохождения волны. Это значит, что получаемый им полный импульс равен нулю, т. е. интеграл от действующего на поверхность цилиндра давления по всей его поверхности и по времени t от $-\infty$ до $+\infty$ равен нулю. Так как действие сил на боковую поверхность (стрелки на рис. 15.2) взаимно компенсируется в силу равноправности точек, лежащих на боковой поверхности, то должны быть равны интегральные импульсы, действующие на основании цилиндра, т. е. выражения

$$dS \int_{-\infty}^{+\infty} p_A(t) dt \text{ и } dS \int_{-\infty}^{+\infty} p_B(t) dt,$$

где dS — площадь оснований цилиндра, $p_A(t)$ и $p_B(t)$ — звуковые давления в точках A и B как функции времени. Таким образом, имеет место равенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_A(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} p_B(t) dt,$$

которое нам и нужно было доказать.

К числу общих законов, выполняющихся при отражении импульса произвольной формы, относится также, конечно, и закон сохранения энергии, который записывается в виде

$$S_z + S_z^{\text{отр}} = S_z^{\text{пр}}, \quad (15.15)$$

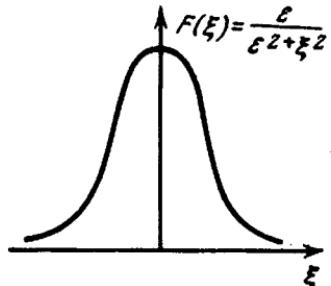


Рис. 15.3. Форма импульса, принятая для расчета

где через S_z , $S_z^{\text{отр}}$ и $S_z^{\text{пр}}$ обозначены компоненты интегрального потока энергии по оси z соответственно в падающей, отраженной и преломленной волнах. S_z и $S_z^{\text{отр}}$ имеют разные знаки.

В случае звукового импульса имеем

$$S_z = \int_{-\infty}^{+\infty} p v_z dt, \quad (15.16)$$

где p и v_z — звуковое давление и компонента скорости по оси z в падающей волне. Аналогично записываются также $S_z^{\text{отр}}$ и $S_z^{\text{пр}}$.

Убедиться в справедливости (15.15) для импульса нетрудно, поскольку он выполняется для каждой из гармонических волн, на которые может быть разложен импульс и поскольку интегральный по времени поток энергии является аддитивной величиной. При полном внутреннем отражении $S_z^{\text{пр}} = 0$, поскольку преломленный импульс распространяется вдоль границы раздела. Доказательство (15.15) в этом случае см. в [78], стр. 7.

15.2. Изменение формы импульса при полном внутреннем отражении от границы двух однородных сред. Рассмотрим вслед за Ф. Фишером [149] импульс, форма которого задается функцией (см. рис. 15.3)

$$F(\xi) = \frac{\epsilon}{\epsilon^2 + \xi^2}, \quad (15.17)$$

где ϵ — параметр, характеризующий ширину импульса. Разложение в интеграл Фурье, как легко проверить, имеет вид

$$F(\xi) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-\epsilon \omega + i \omega \xi} d\omega + \text{к.с.} \quad (15.18)$$

или

$$F(\zeta) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\varepsilon|\omega|+i\omega\zeta} d\omega. \quad (15.19)$$

Сравнивая с (15.7), находим

$$\Phi(\omega) = e^{-\varepsilon|\omega|}. \quad (15.20)$$

Из (15.9) и (15.19) видно, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ рассматриваемый импульс переходит в δ -импульс.

Учитывая значение ζ , падающий импульс (15.17) можно записать в виде

$$F(x, z, t) = \frac{s}{\varepsilon^2 + \left(\frac{x \sin \vartheta + z \cos \vartheta}{c} - t \right)^2}. \quad (15.21)$$

Если имеет место обычное, а не полное внутреннее отражение, то, как мы видели, форма отраженного и преломленного импульсов будет совпадать с формой падающего импульса, т. е.

$$F_{\text{отр}}(x, z, t) = V \frac{s}{\varepsilon^2 + \left(\frac{x \sin \vartheta - z \cos \vartheta}{c} - t \right)^2}, \quad (15.22)$$

$$F_{\text{пр}}(x, z, t) = W \frac{s}{\varepsilon^2 + \left(\frac{x \sin \vartheta_1 + z \cos \vartheta_1}{c_1} - t \right)^2}, \quad (15.23)$$

где V и W — вещественные коэффициенты отражения и прозрачности.

В случае полного внутреннего отражения V и W являются комплексными величинами. Рассмотрим для определенности акустический случай. Тогда (см. (2.2))

$$V = (m \cos \vartheta - is)/(m \cos \vartheta + is), \quad W = 1 + V, \quad s = \sqrt{\sin^2 \vartheta - n^2}. \quad (15.24)$$

Положим $V = A + iB$, где

$$A = (m^2 \cos^2 \vartheta - s^2)/(m^2 \cos^2 \vartheta + s^2), \quad B = -2sm \cos \vartheta/(m^2 \cos^2 \vartheta + s^2). \quad (15.25)$$

Отраженный импульс с учетом (15.3) и (15.20) запишется в виде

$$F_{\text{отр}}(\zeta^-) = \frac{A}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\varepsilon|\omega|+i\omega\zeta^-} d\omega - B \int_0^{\infty} e^{-\varepsilon\omega} \sin \omega \zeta^- d\omega. \quad (15.26)$$

Оба интеграла в последнем выражении берутся без труда, и мы получаем, учитя значение ζ^- :

$$F_{\text{отр}} = A \frac{s}{\varepsilon^2 + \left(\frac{x \sin \vartheta - z \cos \vartheta}{c} - t \right)^2} - B \frac{\frac{(x \sin \vartheta - z \cos \vartheta)}{c} - t}{\varepsilon^2 + \left(\frac{x \sin \vartheta - z \cos \vartheta}{c} - t \right)^2}, \quad (15.27)$$

или при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$F_{\text{отр}} = \pi A \delta \left(\frac{x \sin \vartheta - z \cos \vartheta}{c} - t \right) - B \frac{1}{\frac{x \sin \vartheta - z \cos \vartheta}{c} - t}. \quad (15.28)$$

Таким образом, отраженный импульс состоит из двух частей, одна из которых передает форму падающего импульса.

Рассмотрим проникающий в нижнюю среду импульс. В выражении (15.4) для него мы имеем

$$\zeta_1 = \frac{x \sin \vartheta_1}{c_1} - t + isz/c. \quad (15.29)$$

В результате, учитывая также (15.20), получаем

$$F_{\text{пр}} = \frac{W}{2} \int_0^{\infty} e^{-\varepsilon\omega - \omega sz/c} e^{i\omega \left(\frac{x \sin \vartheta_1}{c_1} - t \right)} d\omega + \text{к. с.}$$

или, обозначая для краткости

$$t - (x \sin \vartheta_1)/c_1 = g, \quad \varepsilon + sz/c = h \quad (15.30)$$

и подставляя значение интеграла

$$\int_0^{\infty} e^{-h\omega - ig\omega} d\omega = 1/(h + ig), \quad (15.31)$$

будем иметь

$$F_{\text{пр}} = \frac{1}{2} [W/(h - ig) + W^*(h + ig)]. \quad (15.32)$$

Учитя равенство $W = 1 + V$ и (15.25), последнее выражение можно преобразовать к виду

$$F_{\text{пр}} = [(1 + A)h - Bg]/(h^2 + g^2). \quad (15.33)$$

или, выразив h и g через координаты и время

$$F_{\text{пр}} = \frac{(1 + A)(\varepsilon + sz/c) + B(x \sin \vartheta_1/c_1 - t)}{(\varepsilon + sz/c)^2 + (x \sin \vartheta_1/c_1 - t)^2}. \quad (15.34)$$

В случае $\varepsilon = 0$ (падающий δ -импульс) из (15.34) имеем

$$F_{\text{пр}} = \frac{B(x \sin \vartheta_1/c_1 - t) + sz/c(1 + A)}{(sz/c)^2 + (x \sin \vartheta_1/c_1 - t)^2}. \quad (15.35)$$

Мы видим, что преломленный импульс не совпадает по форме с падающим импульсом. В формулы (15.34) и (15.35) время t входит только в комбинации $(x \sin \vartheta_1)/c_1 - t$. Отсюда следует, что в нижней среде импульс распространяется вдоль границы со скоростью $c_1/\sin \vartheta_1$, равной согласно закону преломления $c/\sin \vartheta$ — скорости распространения следа импульса в верхней среде вдоль границы раздела.

Интересно отметить, что на прямой

$$B(x \sin \vartheta_1/c_1 - t) + (1 + A)sz/c = 0 \quad (15.36)$$

поле преломленного импульса равно нулю и имеет разный знак по разные стороны от нее. На рис. 15.4 схематически изображена картина падающего, отраженного и преломленного импульсов при $t = 0$. Падающий импульс предполагается заданным δ -функцией. На этом рисунке AA — граница раздела сред, OB — фронт падающего импульса, задаваемый уравнением $x \sin \vartheta + z \cos \vartheta = 0$, OD — фронт той части отраженного импульса, которая соответствует первому члену в (15.28). Штриховка сплошными линиями с одной стороны от OD и пунктирной — с другой схематически отображает второй член в (15.28). Пунктирная штриховка соответствует отрицательному полю, штриховка сплошными линиями — положительному. Поле убывает при удалении от линии OD , что соответствует уменьшению густоты линий.

Поле преломленного импульса везде, кроме начала координат O , имеет конечную величину. На линии OE оно обращается в нуль и по разные стороны от нее имеет разный знак. Стрелками отмечены направления распространения падающего, отраженного и преломленного импульсов.

Отметим, что зависимость поля преломленного импульса от координаты z при $x = c_1 t / \sin \vartheta_1$ согласно (15.35) будет $F_{\text{пр}} = (1 + A) c / sz$.

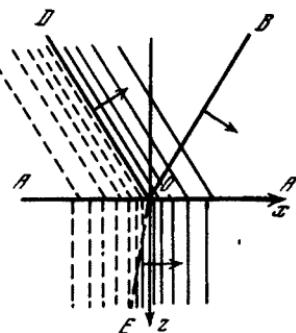


Рис. 15.4. Схематическое изображение картины отражения и преломления δ -образного импульса

Таким образом, при удалении от границы поле спадает не по экспоненциальному закону, как в случае гармонической плоской волны, а обратно пропорционально величине удаления.

В литературе можно найти исследования изменения формы импульса при полном внутреннем отражении и для случаев других форм падающего импульса. Так, Ф. Фридландер [156] исследовал отражение и преломление «столообразного» импульса, т. е. импульса, поле в котором имеет постоянную величину на некотором отрезке времени (t_1, t_2) и равно нулю вне этого отрезка.

А. Аронс и Йенни [78] рассмотрели отражение экспоненциального импульса, заданного уравнением

$$F(\zeta) = \begin{cases} 0 & \text{при } \zeta < 0, \\ F_0 \exp(-\lambda \zeta) & \text{при } \zeta \geq 0. \end{cases} \quad (15.37)$$

Эта функция неплохо описывает форму импульса в ударной волне при подводном взрыве. Свои теоретические выводы авторы сравнили с экспериментальными результатами, полученными путем регистрации взрывного импульса в слое воды, ограниченном сверху свободной поверхностью воды, а снизу дном.

Л. Дайкерс [140] рассмотрел отражение импульса, в котором экспоненциальному спаданию при $t > 0$ (как в (15.37) предшествует линейное нарастание в течение некоторого времени при $t < 0$. Искажение формы квазимонохроматического импульса (с прямоугольной или гауссовой огибающей) рассчитано в работе Б. Крона и А. Нуттала [135]. Отражение и прохождение экспоненциального импульса через пластиинку при нормальном падении рассмотрено в работе [191]. Более сложный случай отражения импульса от слоя (с поглощением), разделяющего два однородных полупространства, проанализирован с многочисленными примерами в работе [206].

Д. Таун [253] рассмотрел отражение плоского импульса как предельный случай отражения сферического импульса при удалении от источника на бесконечность. Он не получил предвестника, который как, например, в [78], давал бы поле, отличное от нуля при всех $t < 0$. Это и естественно, поскольку такой предвестник мог бы обуславливаться только боковой волной (см. ниже § 30), но она убывает как R^{-2} , по сравнению с R^{-1} для остального поля и поэтому при $R \rightarrow \infty$ будет давать исчезающее малый вклад в поле. Этот результат становится ясным, если учесть недавно выполненную работу И. Д. Иванова *, который показал, что задача об отражении плоского импульса является неоднозначной, если не привлечь начальные условия для отраженного и преломленного импульсов. В частности, учитывая работу Д. Тауна, разумными начальными условиями являются условия, чтобы преломленный и отраженный импульсы были отличны от нуля в интервале времени T , как и падающий импульс. И. Д. Иванов показал, как должна решаться задача при этих начальных условиях.

15.3. Полное отражение δ-импульса в неоднородной среде. В § 24 рассмотрен случай полного отражения плоской монохроматической волны от полупространства. В приближении геометрической оптики коэффициент отражения может быть представлен в виде $V = \exp i\varphi$, где фаза (см. формулу (24.27)):

$$\varphi = 2k_0 \int_0^{z_m} n(z) \cos \theta(z) dz - \frac{\pi}{2}. \quad (15.38)$$

Здесь первый член дает набег фазы в геометрическом приближении при пробеге волны от границы $z = 0$ до плоскости заворота $z = z_m$ и обратно. Формулу (15.38) можно трактовать так:

* И. Д. Иванов. К вопросу об отражении и преломлении плоского импульса на границе раздела жидких сред. Акуст. ж., 1973, 19, вып. 1, 106—110.

1) от плоскости $z = 0$ до плоскости $z = z_m$ и обратно волна распространяется без отражения с обычным геометрическим набегом фазы;

2) в плоскости заворота $z = z_m$ имеет место потеря фазы волны $\pi/2$ независимо от частоты.

Допустим теперь, что на границу неоднородного полупространства падает δ -импульс с плоским фронтом, задаваемый формулой (15.19) при $\epsilon = 0$. Вид импульса, получающегося после отражения, был исследован И. Толстым [250]. У нас он может быть получен простым образом на основании результатов предыдущего раздела.

Заметим прежде всего, что если имеется произвольный импульс с плоским фронтом, заданный в виде разложения (15.7) по плоским волнам, то умножение выражения для каждой плоской волны на экспоненту $\exp(i\omega t)$, где t не зависит от частоты, не меняет вида импульса и лишь сдвигает его во времени на t . Действительно, введение такого множителя под интеграл в (15.7) переводит $F(\zeta)$ в некоторую $F_1(\zeta)$, где

$$F_1(\zeta) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\omega) e^{i\omega(\zeta+t)} d\omega = F(\zeta + t),$$

что и требовалось доказать.

Распространение δ -импульса от $z = 0$ до $z = z_m$ соответствует набегу фазы каждой плоской волны на величину, равную половине первого члена в (15.38) т. е. величину вида ωt , поскольку $k_0 \sim \omega$. Таким образом, на этом участке импульс, перемещаясь, не меняет своей формы. Таким же образом и при обратном ходе от $z = z_m$ до $z = 0$ импульс не будет менять своего вида, каким бы он ни оказался после прохождения точки заворота $z = z_m$. Следовательно, нам остается проанализировать лишь изменение импульса при прохождении точки заворота или, как было видно выше, результат потери каждой элементарной гармонической волной фазы $\pi/2$.

Этот случай мы получим из рассмотренного в предыдущем разделе случая, если положим в (15.25)

$$m^2 \cos^2 \theta = s^2 \equiv \sin^2 \theta - n^2. \quad (15.39)$$

При этом мы получаем

$$A = 0, \quad B = -2\cos^2 \theta / (1 - n^2), \quad V = iB = \exp(-i\pi/2) |B|. \quad (15.40)$$

В этом случае при отражении также будет потеря фазы $\pi/2$.

Отраженный импульс будет даваться формулой (15.27), где теперь надо положить $A = 0$, $\epsilon = 0$. В результате получаем, что при прохождении точки заворота δ -импульс превращается в

$$F_{\text{отр}} = -B/\zeta^- \equiv -B \left(\frac{x \sin \theta - z \cos \theta}{c} - t \right)^{-1}. \quad (15.41)$$

Как и δ -импульс, $F_{\text{отр}}$ неограниченно растет при $\zeta^- \rightarrow 0$, т. е. на фронте, но еще имеет отличные от нуля значения при $\zeta^- > 0$ — «предвестник» и при $\zeta^- < 0$ «хвост».

Заметим, что полученный результат справедлив при любом законе $n(z)$, лишь бы имело место полное отражение и угол падения волны не был слишком близким к $\pi/2$. Однако он справедлив для плоской волны и применять его к случаю ограниченного пучка или точечного источника надо с осторожностью. Рассмотрим все же случай точечного источника в приповерхностном волноводе (о котором речь пойдет подробнее в §§ 43, 44). Последний характеризуется тем, что при удалении от абсолютно-отражающей плоскости $z = 0$ скорость звука увеличивается и определенный класс лучей, вышедших из источника O , заворачивает в среде и снова возвращается к границе. На рис. 15.5 изображен один из таких лучей, заворачивающий на горизонте $z = z_m$.

Предположим, что граница $z = 0$ абсолютно мягкая (коэффициент отражения $V = -1$) и что в O излучен δ -импульс, схематически изображенный точкой 1 на рис. 15.6. Такой же импульс будет в точке 1 по ходу луча (см. рис. 15.5). Какой вид импульса надо ожидать в точках 2, 3, ...? По пути в точку 2 луч испытывает одно полное внутреннее отражение на уровне $z = z_m$, и, следовательно, надо ожидать, что он будет описываться формулой (15.41).

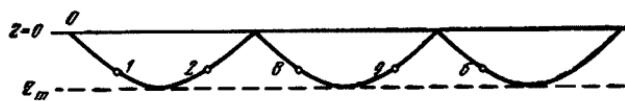


Рис. 15.5. Луч в непрерывно-слоистой среде при наличии полного отражения

Это так и будет при $\zeta^- < 0$. При $\zeta^- > 0$ в отличие от случая плоской волны (если пренебречь дифракционными эффектами) звуковое поле будет равно нулю, хотя бы по принципу причинности, поскольку в этом случае в точку наблюдения не успевает прийти какое-либо возмущение от источника. Импульс будет изображаться картиной 2 на рис. 15.6. При переходе из точки 2 в точку 3 луч испытывает отражение от границы $z = 0$ с поворотом фазы

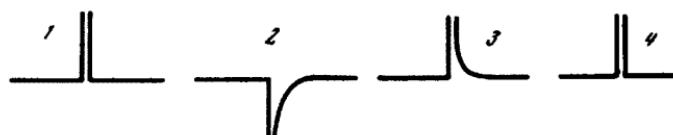


Рис. 15.6. Форма импульса в разных точках луча (см. рис. 15.5)

волны на π , что дает 3 на рис. 15.6, т. е. простое изменение знака импульса. В точке 4 по сравнению с точкой 1 луч имеет два заворота в плоскости $z = 0$ с общей потерей фазы π , а также одно отражение от плоскости $z = 0$ с прибавкой π в фазе. Поэтому в точке 4 импульс будет иметь тот же вид, что и в точке 1. При переходе в точку 5 он просто изменит знак из-за отражения в плоскости $z = 0$ и т. д.

НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ ТЕОРИИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН В ДИСКРЕТНО-СЛОИСТЫХ СРЕДАХ

Кроме того, что развитая в главе I теория необходима для понимания материала последующих глав, она имеет важные применения в ряде областей техники. Мы рассмотрим некоторые из них, не вдаваясь при этом в детали, так как по каждому из рассматриваемых ниже вопросов существует своя специальная литература.

Задачей этой главы будет также проследить некоторые методы и представления, являющиеся общими для различных областей физики и техники. Одним из примеров таких общих представлений является понятие импеданса. Наконец, в этой главе мы приведем результаты сравнения изложенной в предыдущей главе теории с экспериментом.

§ 16. Просветление оптики

Под просветлением оптики понимают, как известно, понижение коэффициента отражения на границе воздух — стекло путем нанесения на стекло тонких слоев различных материалов. Чем больше слоев может быть нанесено на стекло, тем в более широкой спектральной области и области углов падения может быть достигнута повышенная прозрачность границы. Однако поскольку больше трех слоев обычно не применяется, мы рассмотрим случай одно-, двух- и трехслойного просветления, останавливаясь лишь на основных теоретических результатах и на проверке их опытом. Подробное освещение этой проблемы см. в монографии [30], в обзорной работе [80], а также в работах [70, 185, 228, 234]. В последних с успехом применяется разработанный в радиотехнике аппарат теории длинных линий и четырехполюсников.

В последнее время стала актуальной проблема увеличения прозрачности границ для ультразвуковых волн. Это объясняется возросшей ролью жидких и твердых линз, применяемых для фокусировки звука при решении проблем ультраэлектронной дефектоскопии и проблем «видения» в оптически непрозрачных средах [182] при помощи ультразвуковых волн. Изложенные ниже результаты в их общем виде будут относиться также и к «просветлению» звуковых систем.

Отметим, что большой интерес также имеет задача увеличения прозрачности обтекателей радиолокаторов на самолетах и прозрачности обтекателей подводных ультразвуковых локаторов. Эта задача в теоретической своей части также решается при помощи излагаемых ниже методов.

16.1. Однослойное покрытие. Теория отражения волн от плоского параллельного слоя, разделяющего две среды, была рассмотрена в § 3. Полученную там формулу (3.10) для коэффициента отражения путем подстановки $\exp(\pm ik_{3z}d) = \cos k_{2z}d \pm i \sin k_{2z}d$ и последующих несложных преобразований можно записать в виде

$$V = \frac{Z_3(Z_1 - Z_2) \cos k_{2z}d - i(Z_2^2 - Z_1Z_3) \sin k_{2z}d}{Z_3(Z_1 + Z_2) \cos k_{2z}d - i(Z_2^2 + Z_1Z_3) \sin k_{2z}d}. \quad (16.1)$$

Здесь d — толщина слоя, $k_{2z} = k_z \cos \theta_3$ — проекция волнового вектора в слое на нормаль к границам раздела, $k_{2z}d$ — набег фазы волны на толщине

слоя; Z_j ($j = 1, 2, 3$) — импеданс, определяемый формулами (4.24), ϑ_j — угол между нормалью к фронту волны и нормалью к границам раздела в каждой из сред.

Номера 3, 2, 1 при этом присвоены соответственно среде, из которой падает волна, слою и среде, в которую проходит волна.

В случае нормального падения электромагнитной волны ($\vartheta_j = 0$), предполагая также, что магнитная проницаемость сред μ равна единице, мы будем иметь для обоих случаев поляризации волны $Z_j = 1/n_j$, где n_j — показатель преломления j -й среды, и формулу (16.1) можно будет записать в виде

$$V = \frac{n_2(n_3 - n_1) \cos(2\pi d/\lambda_2) - i(n_1 n_3 - n_2^2) \sin(2\pi d/\lambda_2)}{n_2(n_3 + n_1) \cos(2\pi d/\lambda_2) - i(n_1 n_3 + n_2^2) \sin(2\pi d/\lambda_2)}. \quad (16.2)$$

Здесь λ_2 — длина волны в слое.

Коэффициент отражения V обращается в нуль, если выполнены два условия:

$$n_2 = \sqrt{n_1 n_3}, \quad d = \lambda_2(2k + 1)/4, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (16.3)$$

т. е. если толщина слоя составляет нечетное число четвертей длины волны, а показатель преломления слоя является средним геометрическим из показателей преломления крайних сред.

В случае наклонного падения волны условия (16.3) должны быть заменены более общими условиями

$$Z_2 = \sqrt{Z_1 Z_3}, \quad d \cos \vartheta_2 = \lambda_2(2k + 1)/4. \quad (16.4)$$

Таким образом, при заданной частоте и угле падения волны в принципе всегда может быть подобран промежуточный слой, обеспечивающий отсутствие отражения от границы.

Качество покрытия обычно оценивают величиной коэффициента отражения по энергии $R = |V|^2$. Для этой величины мы имеем из выражения (16.1)

$$R = \frac{Z_2^2(Z_1 - Z_3)^2 \cos^2 k_{2z} d + (Z_2^2 - Z_1 Z_3)^2 \sin^2 k_{2z} d}{Z_2^2(Z_1 + Z_3)^2 \cos^2 k_{2z} d + (Z_2^2 + Z_1 Z_3)^2 \sin^2 k_{2z} d}. \quad (16.5)$$

При наклонном падении коэффициент отражения будет зависеть от поляризации волны. Если обозначить его величину для света, поляризованного перпендикулярно и параллельно плоскости падения, соответственно через R_{\perp} и R_{\parallel} , то, как известно, коэффициент отражения неполяризованного света будет

$$R = (R_{\perp} + R_{\parallel})/2. \quad (16.6)$$

На рис. 16.1 изображена по [30] зависимость коэффициента отражения R от угла падения для случая, когда показатель преломления и толщина просветляющего слоя выбраны согласно условиям (16.3), т. е. $n_2 = \sqrt{n_1 n_3}$ (для воздуха $n_3 = 1$), $d = \lambda_2/4$.

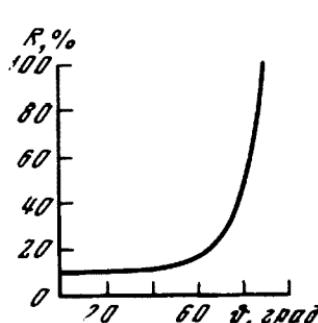
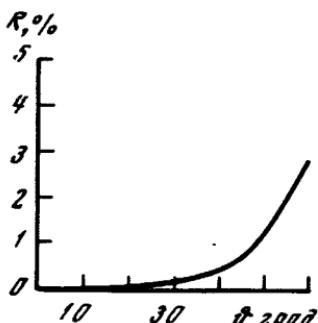


Рис. 16.1. Зависимость коэффициента отражения от угла падения при просветлении стекла однослоистым покрытием

Рис. 16.2. Зависимость коэффициента отражения от угла падения при просветлении стекла слоем двуокиси титана ($n_2 = 2,2$) толщиной $0,034 \lambda$

Однослойное покрытие имеет следующие недостатки:

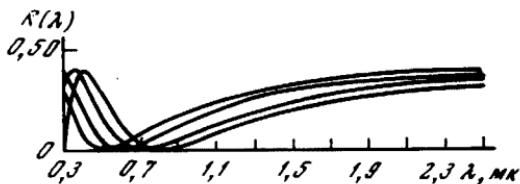
1. При низком показателе преломления просветляемой детали показатель преломления слоя должен не слишком сильно отличаться от единицы. Так, если необходимо осуществить просветление для зеркального стекла ($n = 1,52$), то слой должен иметь показатель преломления $n_2 = \sqrt{n_1} = 1,23$. Однако подобрать твердое прозрачное (к тому же достаточно технологичное) вещество с таким показателем преломления затруднительно.

Употребляемые на практике вещества для просветляющих покрытий обладают значительно большими показателями преломления, вследствие чего и качество просветления ухудшается.

На рис. 16.2 приведена по [30] теоретическая зависимость коэффициента отражения R от угла падения волны для случая, когда стекло с показателем преломления $n_1 = 1,52$ покрыто слоем двуокиси титана (TiO_2) с показателем преломления $n_2 = 2,2$ и толщиной $d/\lambda_2 = 0,034$.

2. При помощи однослойного покрытия весьма трудно осуществить качественное просветление для широкой области спектра, так как при отходе от оптимальной длины волны, для которой подобрано просветление, коэффициент отражения сравнительно быстро повышается.

Рис. 16.3. Зависимость коэффициента отражения от длины волны при просветлении слоями различной толщины



На рис. 16.3 изображена по [30] зависимость коэффициента отражения от длины волны для случая $n_1 = 1,52$, $n_2 = \sqrt{n_1} = 1,233$ для разных толщин слоев, подобранных таким образом, чтобы полная прозрачность осуществлялась при длинах волн $\lambda = 0,50, 0,58, 0,70$ и $0,80 \text{ мк}$. При расчете не учитывалась зависимость показателей преломления стекла и слоя от длины волны. Ее учет не меняет существенно результатов.

16.2. Двухслойное покрытие. Коэффициент отражения от двух слоев, разделяющих две различные среды, дается формулами (3.38) и (3.40). Ограничимся случаем нормального падения. Тогда $Z_j = 1/n_j$, $j = 1, 2, 3$; $Z_4 = 1/n_4 = 1$ (n_4 — показатель преломления воздуха). Для коэффициента отражения по энергии $R = |V|^2$ из формул (3.38) и (3.40) получаем

$$R = \left| \frac{[n_2 n_3 (1 - n_1) - (n_2^2 - n_1 n_3^2) \delta_2 \delta_3] i [n_3 (n_1 - n_2^2) \delta_2 + n_2 (n_1 - n_3^2) \delta_3]}{[n_3 n_3 (1 + n_1) - (n_2^2 + n_1 n_3^2) \delta_2 \delta_3] i [n_3 (n_1 + n_2^2) \delta_2 + n_2 (n_1 + n_3^2) \delta_3]} \right|^2. \quad (16.7)$$

Здесь n_1, n_2, n_3 — показатели преломления соответственно просветляемой детали, нижнего и верхнего слоев; $\delta_2 = \operatorname{tg} \varphi_2$, $\delta_3 = \operatorname{tg} \varphi_3$, где $\varphi_2 = 2\pi d_2 / \lambda_2$, $\varphi_3 = 2\pi d_3 / \lambda_3$ — набег фазы в нижнем и верхнем слоях.

В случае, когда оба слоя — четвертьвольновые ($\operatorname{tg} \varphi_2 \rightarrow \operatorname{tg} \varphi_3 \rightarrow \infty$) из (16.7), получаем

$$R = (n_2^2 - n_1 n_3^2)^2 / (n_2^2 + n_1 n_3^2)^2. \quad (16.8)$$

Таким образом, в этом случае отражение исчезает при выполнении условия

$$n_2^2 = n_1 n_3^2. \quad (16.9)$$

Уже отсюда видно, что выбор материалов для двухслойного покрытия может быть сравнительно широким и гораздо легче осуществимым, чем в случае одного слоя.

Однако равенство нулю коэффициента отражения достигается не только в случае четвертьвольновых слоев. Приравнивая к нулю по отдельности ве-

щественную и мнимую части числителя в (16.7), мы находим, что при отсутствии отражения должны выполняться соотношения:

$$\operatorname{tg} \varphi_3 = - \frac{n_3(n_1 - n_2^2)}{n_2(n_1 - n_3^2)} \operatorname{tg} \varphi_2, \quad (16.10)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \left[\frac{n_2^2(n_1 - 1)(n_1 - n_3^2)}{(n_2^2 - n_1 n_3^2)(n_1 - n_2^2)} \right]^{1/2}. \quad (16.11)$$

Если выражение в квадратных скобках в последнем соотношении положительно, то $\operatorname{tg} \varphi_2$ будет вещественным и, следовательно, могут быть подобраны толщины слоев, отличные от четвертьвольновых, дающие полное просветление.

Показатели преломления всех веществ, пригодных для нанесения в виде слоев для просветления стекла, существенно больше, чем $\sqrt{1,5}$ или $\sqrt{1,6}$, поэтому мы будем считать, что в (16.11) $n_2^2 > n_1$, $n_3^2 > n_1$. Таким образом, выражение в квадратных скобках будет положительным, если только $n_2^2 > n_1 n_3^2$.

Если показатель преломления стекла n_1 задан, то остается еще много возможных комбинаций n_2 и n_3 , приводящих к отсутствию отражения. Если взять практически реальный случай, когда $n_1 = 1,75$, $n_2 = 2,0$, то n_3 должно быть меньше 1,51, что нетрудно получить. Если $n_2^2 = n_1 n_3^2$, мы возвращаемся к случаю четвертьвольновых слоев.

Приведем (следуя [192]) некоторые экспериментальные данные, касающиеся эффективности двухслойных покрытий, и сравним их с теоретическими результатами.

Пусть стекло, которое необходимо просветлить, имеет показатель преломления $n_1 = 1,525$. Наименьший показатель преломления слоя, который еще без труда можно получить, учитывая, что слой должен быть прочным и не рассеивать свет, равен примерно 1,47. Полагая $n_1 = 1,525$ и $n_3 = 1,47$, из (16.10) получаем для показателя преломления внутреннего слоя $n_2 = 1,81$.

Представляет интерес проследить, как меняется коэффициент отражения R при отклонении n_2 от этой величины. Это видно из рис. 16.4, где по оси абсцисс откладывается значение n_2 , по оси ординат значение R . Толщины обоих слоев составляют четверть длины волны, так что при изменении n_2 меняется соответственно и толщина слоя d_2 . Сплошная кривая получена теоретически, треугольники — экспериментальные точки. Видно хорошее совпадение теории с экспериментом.

Преимущество двухслойного просветления по сравнению с однослойным хорошо видно из рис. 16.5. На нем по оси абсцисс отложен показатель преломления стекла, подлежащего просветлению, по оси ординат — коэффициент отражения. Пунктирная кривая соответствует просветлению одним слоем с показателем преломления $n_2 = 1,38$ (MgF_2). Сплошная кривая соответствует двухслойному просветлению четвертьвольновыми слоями при показателях преломления внутреннего и внешнего слоев, равных соответственно 1,80 и 1,47. Из этого графика мы видим, что, используя четвертьвольновые слои двух веществ с этими показателями преломления, можно осуществить просветление всех сортов стекла от $n_1 = 1,50$ до $n_1 = 1,70$, причем коэффициент отражения не будет превышать 0,5%.

Важной характеристикой покрытия является ширина области частот, в которой осуществляется просветление. На рис. 16.6 приведены теоретическая и экспериментальная кривые для коэффициента отражения как функции длины волны света в случае двухслойного просветления четвертьвольновыми слоями. Совпадение между теоретической и экспериментальной кривыми можно считать удовлетворительным. Расхождение может быть

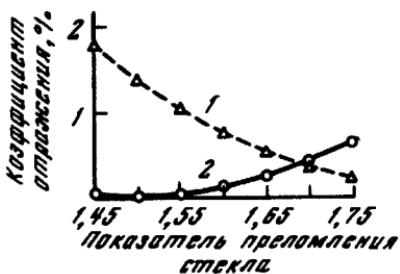
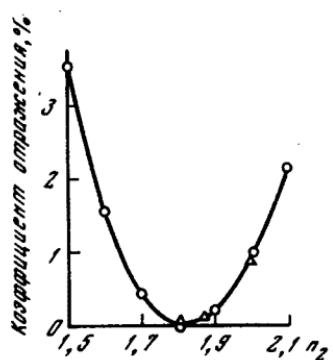


Рис. 16.4. Влияние величины показателя преломления внутреннего слоя при двухслойном просветлении стекла на значение минимального коэффициента отражения, осуществляющееся при четвертьволновых слоях. Показатель преломления верхнего слоя 1,47, стекла 1,525

1 — теоретическая величина; 2 — экспериментальная

Рис. 16.5. Теоретические значения минимального коэффициента отражения, получающегося при просветлении стекла одним слоем MgF_2 ($n = 1,38$) и двумя четвертьволновыми слоями ($n = 1,80$, $n_3 = 1,47$)

1 — однослоиное просветление; 2 — двухслойное просветление ($n_2 = 1,38$)

объяснено некоторой неточностью в определении толщины слоев, а также неучетом зависимости показателей преломления от длины волны.

На рис. 16.7 изображена аналогичная зависимость коэффициента отражения от длины волны для случая, когда верхний слой имеет толщину, равную не одной, а трем четвертям длины волны.

Совпадение между теорией и экспериментом снова можно считать хорошим. Необходимо отметить более узкую по сравнению с предыдущим случаем спектральную полосу просветления.

Как выше указывалось, просветление может быть осуществлено не только четвертьволновыми слоями. На рис. 16.8 изображена спектральная характеристика одного такого покрытия.

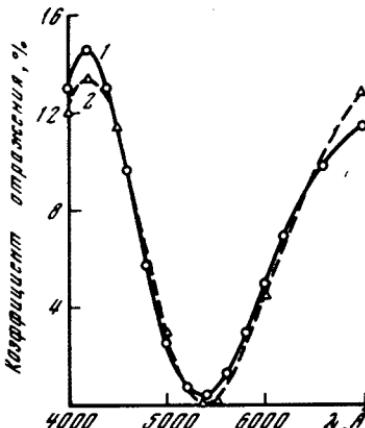
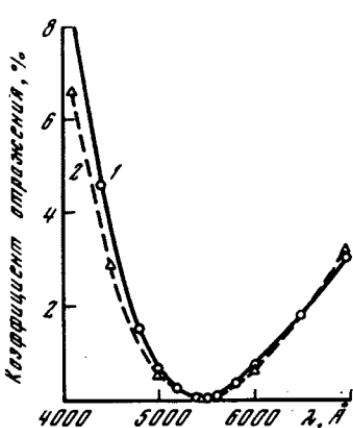


Рис. 16.6. Спектральная характеристика просветления двумя четвертьволновыми слоями. Показатели преломления стекла внутреннего и внешнего слоев равны соответственно 1,525; 1,80; 1,47

1 — теоретическая кривая; 2 — экспериментальная кривая

Рис. 16.7. Спектральная характеристика двухслойного просветления при толщине верхнего слоя в три, а нижнего в одну четверть длины волны. Показатели преломления стекла внутреннего и внешнего слоев равны соответственно 1,53; 1,87; 1,47

1 — теоретическая кривая; 2 — экспериментальная кривая

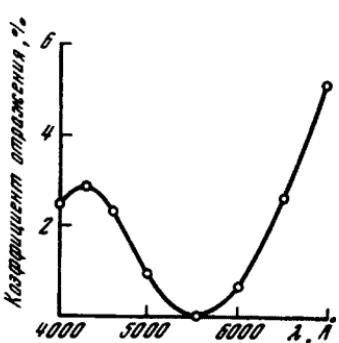


Рис. 16.8. Теоретическая спектральная характеристика двухслойного покрытия

Данные покрытия: внутренний слой $n_2 = 2,0$, $d_2 = 0,385 \lambda_s$; внешний слой $n_3 = 1,47$; $d_3 = 0,190 \lambda_s$; стекло $n_1 = 1,53$

Рис. 16.9. Спектральная характеристика двухслойного покрытия, имеющего сравнительно малый коэффициент отражения для всей видимой области спектра, но не обращающийся в нуль ни при какой длине волны

Данные покрытия: внешний слой $d_3 = 0,350 \lambda_s$, $n_3 = 1,87$; внутренний слой $d_2 = 0,20 \lambda_s$, $n_2 = 1,47$; стекло $n_1 = 1,53$; 1 — теоретическая кривая; 2 — экспериментальная

Совсем не обязательным является требование, чтобы при некоторой длине волны коэффициент отражения обращался в нуль. На рис. 16.9 изображена спектральная характеристика покрытия, которое рассчитано для стекла, в котором $n_1 = 1,53$. Как нетрудно видеть из рисунка, отражение во всей области видимого спектра весьма мало. Коэффициент отражения, измеренный при помощи фотоэлемента с кривой чувствительности, примерно такой же, как у глаза, составил 0,53%. Между тем, коэффициент отражения ни при какой длине волны в нуль не обращается, хотя его наименьшее значение составляет всего лишь 0,04%.

16.3. Трехслойное покрытие. Применение трехслойных покрытий позволяет еще больше расширить область спектра, в которой отражение является достаточно низким, приблизиться к осуществлению «невидимого стекла».

Коэффициент отражения от системы трех слоев дается формулами (3.38) и (3.41). Свое рассмотрение мы снова ограничим случаем нормального падения, когда $z_j = 1/n_j$, $j = 1, 2, 3, 4$; $Z_5 = 1/n_5 = 1$. Если, кроме того, воспользоваться обозначением $\delta_j = \operatorname{tg} \varphi_j$, где $\varphi_j = 2\pi d_j/\lambda$ — набег фазы в j -м слое ($\lambda_j = \lambda/n_j$ — длина волны в этом слое), то выражение для коэффициента отражения по энергии $R = |V|^2$ может быть записано в виде

$$R = |(A - B)/(A + B)|^2, \quad (16.12)$$

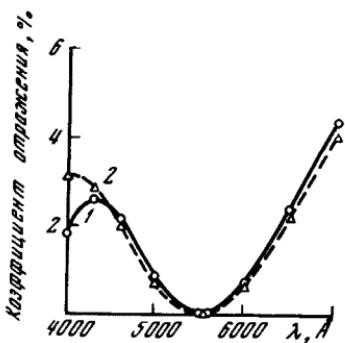
где

$$\begin{aligned} A &= [n_2 n_3 n_1 - n_2^2 n_4 \delta_2 \delta_3 - n_2^2 n_3 \delta_2 \delta_4 - n_2 n_3^2 \delta_3 \delta_4] - i[n_1 n_3 n_4 \delta_2 + \\ &\quad + n_1 n_2 n_4 \delta_3 + n_1 n_2 n_3 \delta_4 - n_1 n_3^2 \delta_2 \delta_3 \delta_4], \\ B &= [n_1 n_2 n_3 n_4 - n_1 n_3^2 n_4 \delta_2 \delta_3 - n_1 n_3 n_4^2 \delta_2 \delta_4 - n_1 n_2 n_4^2 \delta_3 \delta_4] - \\ &\quad - i[n_2^2 n_3 n_4 \delta_2 + n_2 n_3^2 n_4 \delta_3 + n_2 n_3 n_4^2 \delta_4 - n_2^2 n_4^2 \delta_2 \delta_3 \delta_4]. \end{aligned} \quad (16.13)$$

Внутренний слой, прилегающий к стеклу, отмечается индексом 2, средний слой — индексом 3 и внешний слой — индексом 4.

Из всех возможных комбинаций толщин слоев и их показателей преломления, ведущих к исчезновению отражения при определенной длине волны, мы рассмотрим только две:

1. Каждый слой имеет оптическую толщину, равную четверти длины волны ($n_j d_j = \lambda_j/4$). В этом случае $\delta_2 = \delta_3 = \delta_4 = \infty$ и из (16.13), поделив пред-



вариально все выражение на произведение $\delta_2\delta_3\delta_4$, получаем $\frac{A}{B} = n_1n_3^2/n_2^2n_4^2$. Для коэффициента же отражения в этом случае получаем

$$R = (n_1n_3^2 - n_2^2n_4^2)^2/(n_1n_3^2 + n_2^2n_4^2)^2. \quad (16.14)$$

Таким образом, коэффициент отражения обращается в нуль, если

$$\sqrt{n_1n_3} = n_2n_4. \quad (16.15)$$

2. Крайние слои — четвертьволновые, средний слой — полуволновой. В этом случае $\delta_2 = \delta_4 = \infty$, $\delta_3 = 0$. Поделив числитель и знаменатель в (16.13) на $\delta_2\delta_4$ и положив затем $\delta_3 = 0$, получим $\frac{A}{B} = n_2^2/n_1n_4^2$ и, следовательно,

$$R = (n_2^2 - n_1n_4^2)^2/(n_2^2 + n_1n_4^2)^2 \quad (16.16)$$

Таким образом, в этом случае, получаем $R = 0$ при

$$n_2^2 = n_1n_4^2. \quad (16.17)$$

Как мы видим, в этом случае в условие исчезновения отражения не входит показатель преломления среднего слоя. Этого нужно было ожидать и заранее, поскольку в предыдущей главе было показано, что полуволновой слой эквивалентен слою нулевой толщины.

На рис. 16.10 и 16.11 приведены вычисленные по формулам (16.12) и (16.13) спектральные характеристики для двух конкретных случаев трехслойного покрытия [192]. В первом случае все три слоя четвертьволновые, во втором случае, средний слой полуволновой. Различные кривые на рисунках относятся к различным значениям показателей преломления. Показатель преломления среднего слоя во втором случае играет важную роль на всех длинах волн, исключая ту длину волны, для которой он является полуволновым.

Мы видим, что трехслойное покрытие, где все слои являются четвертьволновыми, дает более широкий минимум коэффициента отражения, чем рассмотренные ранее двухслойные покрытия. Однако наиболее широкий

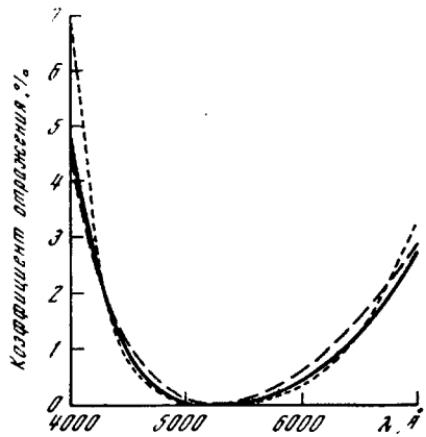


Рис. 16.10. Теоретические спектральные характеристики трехслойного просветления для различных показателей преломления слоев

— — — $n_1 = 1.53$; $n_2 = 1.70$; $n_3 = 2.02$; $n_4 = 1.47$; — $n_1 = 1.53$; $n_2 = 1.80$; $n_3 = 2.14$; $n_4 = 1.47$; $n_1 = 1.53$; $n_2 = 2.00$; $n_3 = 2.38$; $n_4 = 1.47$. Все слои четвертьволновые

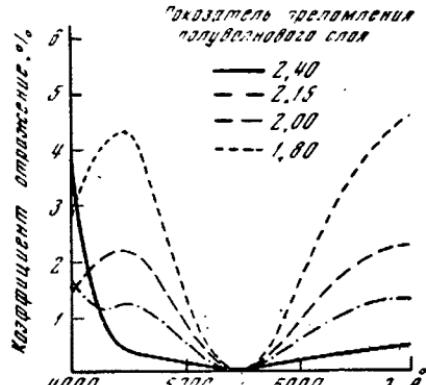


Рис. 16.11. Теоретическая спектральная характеристика трехслойного покрытия (крайние слои — четвертьволновые, средний — полуволновой). Показатели преломления: стекла 1,53; нижнего слоя 1,80; верхнего 1,47, среднего — различные

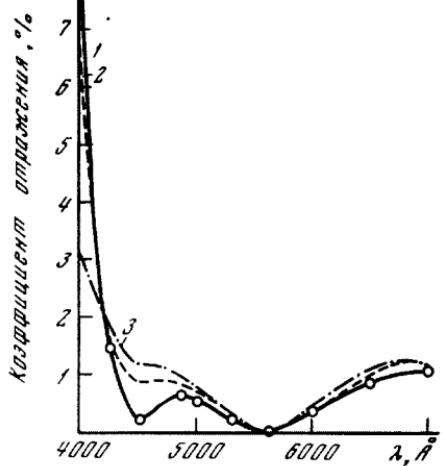


Рис. 16.12. Сравнение теоретической и экспериментальной спектральных характеристик трехслойного покрытия (крайние слои четвертьволновые, средний — полуволновой)
1 — экспериментальная кривая; 2 — теоретическая с учетом дисперсии; 3 — теоретическая без учета дисперсии

Рис. 16.13. Кривые дисперсии, использовавшиеся для расчета рис. 16.12

1 — средний слой; 2 — нижний слой; 3 — стекло; 4 — верхний слой

минимум получается в случае, когда крайние слои являются четвертьволновыми, а средний полуволновым (рис. 16.11). Впрочем наибольшая ширина минимума получается при значениях показателя преломления полуволнового слоя порядка 2,3—2,4. Такая высокая величина показателя преломления затрудняет выбор материала, так как при этом необходимо обеспечить также отсутствие заметного поглощения света.

На рис. 16.12 приведено сравнение теоретических и экспериментальных данных для зависимости коэффициента отражения от стекла, покрытого трехслойным покрытием, в котором средний слой является полуволновым, а крайние слои четвертьволновыми. Зависимость показателя преломления стекла и каждого из слоев от длины волны изображена на рис. 16.13. На рис. 16.12 нанесены две теоретические кривые. Одна из них получена без учета зависимости показателей преломления стекла и слоев от длины волны, другая (пунктир) — с учетом этой зависимости. Мы видим, что обе кривые разнятся между собой несущественно и удовлетворительно передают ход экспериментальной кривой.

Рис. 16.14. Спектральные характеристики типичных однослойного (кривая 1), двухслойного (кривая 2) и трехслойного (кривая 3) покрытий

На рис. 16.14 для сравнения приведены полученные на опыте спектральные характеристики типичных одно-, двух- и трехслойного покрытий для стекла с показателем преломления $n_1 = 1,53$. В случае однослойного покрытия кривая получена экспериментально для слоя MgF_2 . На рисунке ясно видно преимущество трехслойного покрытия.

Формулы для расчета коэффициента отражения звуковых волн от системы слоев, наносимых на твердые поверхности для увеличения их звукоизоляции для случая нормального падения волны, получаются аналогичным образом из общих формул § 3. Некоторые результаты по этому вопросу см. в [90]. При наклонном падении картина сильно осложняется вследствие того, что входят в игру сдвиговые волны.

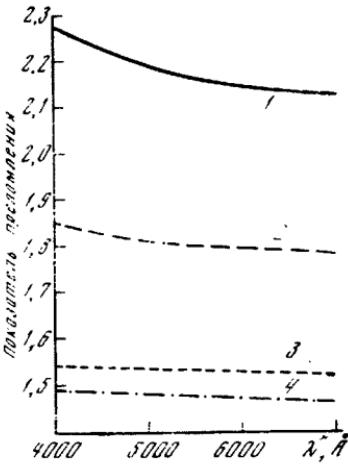


Рис. 16.12. Сравнение теоретической и экспериментальной спектральных характеристик трехслойного покрытия (крайние слои четвертьволновые, средний — полуволновой)

1 — экспериментальная кривая; 2 — теоретическая с учетом дисперсии; 3 — теоретическая без учета дисперсии

Рис. 16.13. Кривые дисперсии, использовавшиеся для расчета рис. 16.12

1 — средний слой; 2 — нижний слой; 3 — стекло; 4 — верхний слой

минимум получается в случае, когда крайние слои являются четвертьволновыми, а средний полуволновым (рис. 16.11). Впрочем наибольшая ширина минимума получается при значениях показателя преломления полуволнового слоя порядка 2,3—2,4. Такая высокая величина показателя преломления затрудняет выбор материала, так как при этом необходимо обеспечить также отсутствие заметного поглощения света.

На рис. 16.12 приведено сравнение теоретических и экспериментальных данных для зависимости коэффициента отражения от стекла, покрытого трехслойным покрытием, в котором средний слой является полуволновым, а крайние слои четвертьволновыми. Зависимость показателя преломления стекла и каждого из слоев от длины волны изображена на рис. 16.13. На рис. 16.12 нанесены две теоретические кривые. Одна из них получена без учета зависимости показателей преломления стекла и слоев от длины волны, другая (пунктир) — с учетом этой зависимости. Мы видим, что обе кривые разнятся между собой несущественно и удовлетворительно передают ход экспериментальной кривой.

Рис. 16.14. Спектральные характеристики типичных однослойного (кривая 1), двухслойного (кривая 2) и трехслойного (кривая 3) покрытий

На рис. 16.14 для сравнения приведены полученные на опыте спектральные характеристики типичных одно-, двух- и трехслойного покрытий для стекла с показателем преломления $n_1 = 1,53$. В случае однослойного покрытия кривая получена экспериментально для слоя MgF_2 . На рисунке ясно видно преимущество трехслойного покрытия.

Формулы для расчета коэффициента отражения звуковых волн от системы слоев, наносимых на твердые поверхности для увеличения их звукоизоляции для случая нормального падения волны, получаются аналогичным образом из общих формул § 3. Некоторые результаты по этому вопросу см. в [90]. При наклонном падении картина сильно осложняется вследствие того, что входят в игру сдвиговые волны.

§ 17. Интерференционные светофильтры

17.1. Общие соображения. В оптике находят широкое применение слоистые или так называемые интерференционные светофильтры. Принцип действия таких фильтров основан на использовании интерференции волн, отраженных от слоев, из которых состоит фильтр. Этот принцип близок к принципу действия электрических фильтров [122] и механических фильтров в акустике. Такого рода фильтры употребляются также для сантиметровых радиоволн.

По сравнению с обычными абсорбционными светофильтрами интерференционные светофильтры обладают тем преимуществом, что потери света внутри полосы пропускания в них могут быть значительно меньше. Положение полосы пропускания в интерференционных светофильтрах может легко изменяться.

С другой стороны, по сравнению с монохроматорами различного вида интерференционные светофильтры имеют то преимущество, что сечение фильтруемого пучка может быть весьма значительным.

Основные физические вопросы, возникающие при анализе работы светофильтров, рассмотрены в специальной литературе [166, 220]. Особенно полно эти вопросы изложены в обзорной работе Г. В. Розенберга [80].

Здесь мы остановимся лишь на основных теоретических результатах, касающихся светофильтров, работающих как в отраженном, так и проходящем свете, и на сравнении их с опытными данными.

Простейший вид интерференционного фильтра для работы в отраженном свете изображен на рис. 17.1. В нем на хорошо отражающее металлическое зеркало *aa* панесен слой диэлектрика *baab*, покрытого в свою очередь тонким полупроницаемым для света металлическим слоем *bb*.

При нормальном падении волны на такой фильтр от него полностью отражаются те области спектра, для которых расстояние между зеркалом и металлическим слоем составляет целое число половин длии волн

$$\Delta = \frac{\lambda}{2}, \quad 2 \frac{\lambda}{2}, \quad 3 \frac{\lambda}{2}, \dots, \quad (17.1)$$

здесь λ — длина волны в диэлектрике. Наоборот, отражение будет минимальным (практически нулем), если выполняется условие

$$\Delta = \frac{\lambda}{4}, \quad 3 \frac{\lambda}{4}, \quad 5 \frac{\lambda}{4}, \dots \quad (17.1a)$$

Действительно, если предположить, что зеркало является абсолютным проводником, то на границе *aa* и на расстояниях, кратных $\lambda/2$ от нее, вследствие интерференции прямой и отраженной волн, напряженность электрического поля будет равна нулю. Если металлический слой помещен в одно из этих мест, то он почти не поглощает энергии электромагнитной волны, и волна отражается полностью. Этот случай как раз и реализуется при выполнении условия (17.1). Наоборот, если выполняется условие (17.1a), то металлический слой оказывается в пучности электрического поля и поглощение энергии волны будет наибольшим. Такие волны будут почти полностью поглощаться фильтром.

Простейший вид фильтра для проходящего света изображен на рис. 17.2. Он состоит из двух тонких металлических слоев *aa* и *bb* и слоя диэлектрика между ними. Такая система имеет максимальную проницаемость для тех волн, для которых толщина диэлектрического слоя составляет целое кратное половинам длины волны. Однако проницаемость при этом является не полной, а равной в практических случаях 30—40%. Невозможность достижения полной прозрачности становится ясной из следующих соображений. Поглощение волны в светофильтре обусловливается омическими потерями токов, индуцированных в металлических слоях. Оно будет отсутствовать только в том случае, если в местах расположения металлических слоев элек-

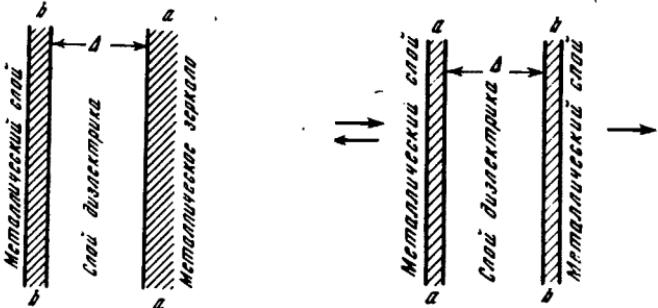


Рис. 17.1. Простейший вид отражательного интерференционного светофильтра

Рис. 17.2. Схематическое изображение интерференционного светофильтра для проходящего света

трическое поле будет постоянно равно нулю. Для этого, очевидно, необходимо, чтобы в фильтре образовалась стоячая волна, имеющая узлы электрического поля в местах расположения металлических слоев. Однако такая стоячая волна может образоваться лишь при наличии отраженной волны с амплитудой, равной амплитуде падающей волны. При этом вместо полного прохождения мы получаем полное отражение.

Ширина полосы пропускания фильтра может быть сделана порядка 100 Å.

Минимальную пропускаемость (на практике меньше 1%) фильтр, изображенный на рис. 17.2, имеет по отношению к волнам, удовлетворяющим ус-

ловию $\Delta = \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \dots$. В этом случае, если один

из металлических слоев окажется в узле электрического поля, другой при этом обязательно будет в пучности, и в результате поглощение будет максимальным.

17.2. Теория простейшего отражательного фильтра. Коэффициент отражения падающей на фильтр световой волны может быть найден путем полного решения задачи об электромагнитном поле в каждом из слоев фильтра с учетом соответственных условий на границах. Однако мы пойдем по более простому пути, уже использованному в § 3.2. Отраженную от фильтра волну можно представить себе как суперпозицию плоских волн $E_1 + E_2 + E_3 + \dots$ (рис. 17.3), где $E_1 = V_{31}E_0$ получается в результате отражения падающей волны от ме-

Рис. 17.3. К расчету коэффициента отражения фильтра

тальлического слоя (через V_{31} обозначен соответственный коэффициент отражения); $E_2 = W_{13} \exp(2i\phi) V_{43}W_{31}E_0$ получается в результате проникновения волны через металлический слой (коэффициент проникновения W_{13}) пробега по слою диэлектрика толщины Δ (набег фазы $\phi = kn_3\Delta \cdot \cos\vartheta_3$, где k — волновое число в вакууме, n_3 — показатель преломления диэлектрика, ϑ_3 — угол преломления волны в диэлектрике), отражения от металлического зеркала (коэффициент отражения V_{43}), вторичного пробега по слою диэлектрика и, наконец, проникновения через металлический слой со стороны диэлектрика (коэффициент проникновения W_{31}); $E_3 = W_{13} \cdot \exp(4i\phi) V_{13}W_{31}E_0$ получается в результате проникновения через металлический слой четырехкратного пробега по диэлектрическому слою, двукратного отражения от металлического зеркала, однократного отражения от металлического слоя со стороны диэлектрика (коэффициент отражения V_{13}) и обратного проникновения через металлический слой и т. д.

Суммируя все волны, получаем для коэффициента отражения фильтра

$$\begin{aligned} E/E_0 &= V_{31} + W_{13} \exp(2i\varphi) V_{43} W_{31} + W_{13} \exp(4i\varphi) V_{43}^2 V_{13} W_{31} + \\ &+ W_{13} \exp(6i\varphi) V_{43}^3 V_{13}^2 W_{31} + \dots = V_{31} + \\ &+ W_{13} W_{31} V_{43} \exp(2i\varphi) \sum_{s=0}^{\infty} \exp(2is\varphi) V_{43}^s V_{13}^s. \end{aligned}$$

Отсюда, воспользовавшись формулой геометрической прогрессии, получим

$$\frac{E}{E_0} = \frac{V_{31} + V_{43} \exp(2i\varphi) (W_{13} W_{31} - V_{13} V_{31})}{1 - V_{43} V_{13} \exp(2i\varphi)}. \quad (17.2)$$

Коэффициенты V_{31} и W_{13} отражения волны от металлического слоя и проникновения ее через слой равны V и W , даваемым формулами (3.28)–(3.31). Коэффициенты V_{13} и W_{31} , соответствующие обратному ходу волны, получаются из этих формул переменой ролей индексов I и 3.

Формулу (17.2) можно упростить, ограничив общность рассмотрения задачи.

Будем предполагать, что отражение от металлического зеркала является полным, т. е. $V_{43} = -1$. Отрицательный знак V_{43} вытекает из требуемого граничным условием обращения в нуль тангенциальной компоненты электрического поля на поверхности зеркала.

Важной областью применения отражательных интерференционных фильтров является инфракрасная область спектра, где подбор обычных абсорбционных светофильтров оказывается очень затруднительным или даже вовсе невозможным. Для этой области спектра толщину металлического слоя можно считать малой по сравнению с длиной волны. Для показателя же преломления металла будем иметь $n^2 \approx 2i\sigma/\nu$, где σ — проводимость металла в гауссовой системе единиц, ν — частота, при этом $|n|^2 \gg 1$.

В результате, если ограничиться пока случаем нормального падения, будем иметь для коэффициента отражения фильтра приближенно*

$$R = |E/E_0|^2 = [(1-f)^2 + n_3^2 \operatorname{ctg}^2(2\pi n_3 \Delta/\lambda)] [(1+f)^2 + n_3^2 \operatorname{ctg}^2(2\pi n_3 \Delta/\lambda)]^{-1}, \quad (17.3)$$

где $f = 4\pi\sigma l/c$, причем c и λ — скорость света и длина волны в пустоте, l — толщина металлического слоя.

Как видно из последней формулы, коэффициент отражения обращается в нуль при выполнении двух условий:

$$f = 1, \quad \Delta = (2m-1)\lambda/4n_3, \quad m = 1, 2, \dots \quad (17.4)$$

Наоборот, при выполнении условия

$$\Delta = m\lambda/2n_3 \quad (17.5)$$

коэффициент отражения обращается в единицу.

На рис. 17.4 коэффициент отражения фильтра изображен как функция частоты для $f = 0,5; 1, 2$ в предположении, что $n_3 = 1,3$. Через ν_0 обозначена частота, для которой $\Delta = \lambda_0/4n_3$.

Анализ формулы (17.3) показывает, что вид кривых, дающих зависимость R от частоты, зависит от n_3 . При увеличении n_3 максимумы отражения становятся шире, в то время как минимумы сужаются.

* Эту формулу можно получить, исходя из выражений (17.2), (3.10) и (3.16) при условии $k_{xz}d \approx 2\pi d n_3 / \lambda \ll 1$. См. также [166], где выражение для f записывается несколько иначе вследствие особенностей принятой там системы единиц.

В случае наклонного падения света на фильтр мы будем иметь для различных поляризаций формулы, аналогичные (17.3)

$$R_{\perp} = \frac{(1 - f/p)^2 + (q/p)^2 \operatorname{ctg}^2(2\pi q \Delta/\lambda)}{(1 + f/p)^2 + (q/p)^2 \operatorname{ctg}^2(2\pi q \Delta/\lambda)}, \quad (17.6)$$

$$R_{\parallel} = \frac{(1 - f/p)^2 + (n_3 p/q)^2 \operatorname{ctg}^2(2\pi q \Delta/\lambda)}{(1 + f/p)^2 + (n_3 p/q)^2 \operatorname{ctg}^2(2\pi q \Delta/\lambda)}, \quad (17.7)$$

где знаки \perp и \parallel означают соответственно случай, когда E перпендикулярно и параллельно плоскости падения. Кроме того, $p = \cos \vartheta_1$, $q = n_3 \cos \vartheta_3 = \sqrt{n_3^2 - \sin^2 \vartheta_1}$. Коэффициенты отражения R_{\perp} и R_{\parallel} в ряде случаев могут иметь существенно различные значения. В частности, если фильтр рассчитан

так, чтобы получить $R_{\perp} = 0$ при угле падения $\vartheta_1 = 60^\circ$ (для чего должно быть $f = 1/2$), то для R_{\parallel} при этом получаем $R_{\parallel} = (1 - fp)^2 / (1 + fp)^2 = 0.36$, т. е. весьма заметную величину. Такой фильтр может быть использован для получения поляризованного света.

17.3. Теория простейшего фильтра в проходящем свете. Как и в предыдущем разделе, суммируя последовательно волны, имеющие различное число пробегов в диэлектрическом слое, нетрудно получить выражение для амплитуды волны $E_{\text{пр}}$, прошедшей через систему, состоящую из двух тонких одинаковых металлических слоев и диэлектрического слоя (рис. 17.2):

$$E_{\text{пр}} = W_{13} W_{31} e^{i\varphi} (1 - V_{13}^2 e^{2i\varphi})^{-1} E_0, \quad (17.8)$$

где E_0 — амплитуда падающей волны. остальные обозначения те же, что и в § 17.2.

Обозначим

$$W_{31} = \eta_{31} \exp i\Phi_{31}, \quad W_{13} = \eta_{13} \exp i\Phi_{13}, \quad V_{13} = \rho_{13} \exp i\varphi_{13}. \quad (17.9)$$

Тогда из (17.8) получаем для коэффициента прозрачности фильтра

$$T = |E_{\text{пр}}/E_0|^2 = \eta_{31}^2 \eta_{13}^2 [(1 - \rho_{13}^2)^2 + 4\rho_{13}^2 \sin^2(\varphi + \varphi_{13})]^{-1}. \quad (17.10)$$

Максимальная прозрачность имеет место для частот, удовлетворяющих условию

$$\varphi + \varphi_{13} = m\pi, \quad m = 1, 2, \dots$$

При этих частотах

$$T = T_{\max} = \eta_{31}^2 \eta_{13}^2 (1 - \rho_{13}^2)^{-2}. \quad (17.11)$$

Наоборот, минимальная прозрачность имеет место при $\varphi + \varphi_{13} = (2m - 1) \cdot \pi/2$, причем

$$T_{\min} = \eta_{31}^2 \eta_{13}^2 (1 + \rho_{13}^2)^{-2}. \quad (17.12)$$

Ширину полосы пропускания δ определим как удвоенную величину интервала длин волн между максимумом прозрачности и точкой, где прозрачность T равна половине максимальной. Для нее получаем из (17.10)

$$\delta = \frac{2\lambda_{\max}}{m\pi - \varphi_{13} + \arcsin^2[(1 - \rho_{13}^2)/2\rho_{13}]} \arcsin[(1 - \rho_{13}^2)/2\rho_{13}], \quad (17.13)$$

где λ_{\max} — длина волны, соответствующая максимуму прозрачности. При выводе формулы (17.13) предполагалось, что величины ρ_{13} , φ_{13} , η_{13} и η_{31} в пределах полосы пропускания можно считать постоянными.

Как видно из формулы (17.13), ширина полосы пропускания оказывается тем меньше, чем больше коэффициент отражения от металлического слоя. Однако при увеличении коэффициента отражения уменьшается прозрачность фильтра, поэтому в практических случаях приходится искать некоторое оптимальное значение отражения, обеспечивающее необходимую ширину полосы пропускания вместе с удовлетворительным значением прозрачности.

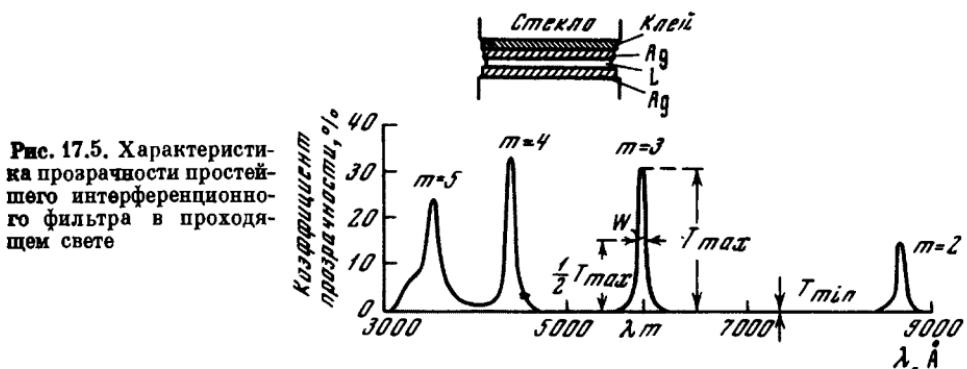


Рис. 17.5. Характеристика прозрачности простейшего интерференционного фильтра в проходящем свете

Обычно наиболее целесообразным оказывается выбирать максимальную прозрачность от 10 до 40%. Ширина полосы пропускания при этом оказывается равной от 50 до 300 Å, в зависимости от порядка интерференции m и области спектра. Минимальное значение прозрачности посередине между соседними полосами пропускания при этом может быть меньше 0,25%.

На рис. 17.5 приведена полученная экспериментально кривая прозрачности фильтра рассмотренного нами вида [163]. Значения минимальной прозрачности между полосами $m = 2$ и $m = 3$, а также между $m = 3$ и $m = 4$ равны соответственно 0,03 и 0,15%.

17.4. Более сложные фильтры. Увеличивая число слоев в фильтре, мы получаем больше возможностей для выбора фильтра с необходимыми характеристиками. В частности, можно добиться подавления нежелаемых полос пропускания и отражения.

На рис. 17.6 представлена характеристика простейшего отражательного фильтра, состоящего из слоя MgF_2 , укрепленного на зеркале из алюминия и покрытого тонким слоем этого же металла [80]. На этом же рисунке приведены кривые, показывающие отражательную способность алюминиевого зеркала и тонкого алюминиевого слоя, использованного в фильтре.

На рис. 17.7 изображена характеристика отражательного фильтра, состоящего из двух слоев диэлектрика и двух слоев металла. Мы видим, что

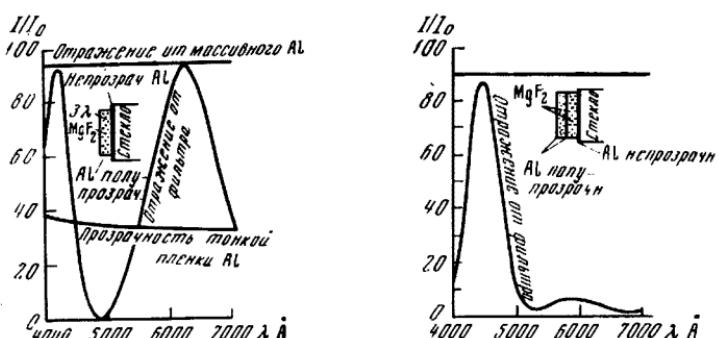


Рис. 17.6. Типичная спектральная характеристика простейшего отражательного фильтра

Рис. 17.7. Спектральная характеристика двойного отражательного фильтра

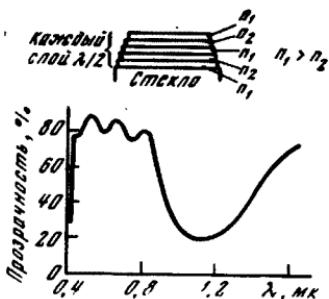


Рис. 17.8. Фильтр в проходящем свете, отражающий инфракрасные лучи

гослойного фильтра без металлических слоев [163], отличающегося той особенностью, что он пропускает всю видимую область спектра и хорошо отражает область спектра, где лежит максимум теплового излучения у большинства используемых мощных источников света. Такого рода фильтры имеют весьма большое практическое значение.

В заключение напомним замечание о важности учета ограниченности пучка, сделанные в конце § 14.4.

§ 18. Слоистая звукоизоляция

18.1 Теория слоистой звукоизоляции. Используя слоистые конструкции, можно создать легкие и достаточно эффективные звукоизолирующие перегородки. Такие перегородки состоят из чередующихся между собой слоев непроницаемого (для стационарного потока воздуха) материала и слоев пористого материала, разделенных в ряде случаев также еще воздушными промежутками. Число различающихся между собой конструкций может быть весьма большим.

В этом разделе мы рассмотрим (по [114]) теорию звукоизоляции конструкций (рис. 18.1), состоящей из: 1) слоя непроницаемого материала с массой $\sigma_1 \text{ см}^{-2}$; 2) воздушного промежутка толщины l ; 3) слоя пористого материала толщины d_1 ; 4) непроницаемого слоя с массой $\sigma_2 \text{ см}^{-2}$; слоя пористого материала толщины d_2 .

Конструкции такого вида подвергались детальному изучению в целях создания звукоизоляции для самолетных кабин. В этом случае непроницаемым слоем σ_1 является дюралевая стена кабины.

В настоящем разделе мы ограничимся случаем нормального падения волн.

Обозначим звуковое давление перед слоистой конструкцией (сумма давлений в падающей и отраженной волнах) через p_0 , а звуковое давление в волне, прошедшей конструкцию, через p_5 (см. рис. 18.1). Звукоизоляция конструкции будет определяться отношением p_0/p_5 , найти которое и является нашей задачей.

Прежде всего свяжем последовательно друг с другом величины звуковых давлений p_0, p_1, \dots, p_5 . Так, например, связь между p_0 и p_1 определяется уравнением движения слоя σ_1 , рассматриваемого как инертная масса (толщина этого слоя предполагается малой по сравнению с длиной волны), т. е. $p_0 - p_1 = \sigma_1 d_1 v_1 / dt$, где v_1 — скорость слоя.

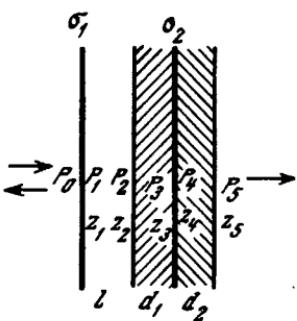


Рис. 18.1. Схематическое изображение звукоизолирующей конструкции общего вида

второй максимум отражения в длинноволновой области, хорошо выраженный в случае простейшего фильтра (рис. 17.6), здесь оказался срезанным.

Успешно разрабатываются также фильтры, состоящие из ряда слоев диэлектрика, причем слои с низким и высоким показателями преломления чередуются друг с другом. Металлические слои при этом отсутствуют. Преимуществом такого рода фильтров является отсутствие потерь энергии на поглощение. Наиболее удобным методом расчета таких многослойных систем является метод импеданса, изложенный в § 3.

На рис. 17.8 приведена характеристика многослойного фильтра без металлических слоев [163], отличающегося той

особенностью, что он пропускает всю видимую область спектра и хорошо отражает область спектра, где лежит максимум теплового излучения у большинства используемых мощных источников света. Такого рода фильтры имеют весьма большое практическое значение.

В заключение напомним замечание о важности учета ограниченности пучка, сделанные в конце § 14.4.

Учитывая, что $dv_1/dt = -i\omega v_1$, а также определение импеданса $Z_1 = p_1/v_1$, это уравнение можно записать в виде

$$p_0/p_1 = 1 - i\omega\sigma_1/Z_1. \quad (18.1)$$

Аналогично будут связаны между собой давления p_3 и p_4 .

Связем теперь между собой давления p_1 и p_2 в точках, разделенных между собой воздушным слоем.

Давление в слое, откидывая как обычно фактор $\exp(-i\omega t)$, можно записать в виде

$$p = a_1 e^{bz} + a_2 e^{-bz}, \quad (18.2)$$

где z — координата, отсчитываемая в направлении, перпендикулярном плоскостям слоев, b — постоянная распространения, равная в случае непоглощающей среды $i\omega/c$, где c — скорость звука.

Выражение (18.2) можно записать также в виде

$$p = 2A \operatorname{ch}(bz + \varepsilon), \quad (18.3)$$

где A и ε — постоянные, связанные с a_1 и a_2 соотношениями

$$a_1 = A e^\varepsilon, \quad a_2 = A e^{-\varepsilon}.$$

Координату в (18.3) мы будем отсчитывать от точки, где импеданс предполагается заданным. Обозначим это значение импеданса, соответствующее $z = 0$, через Z_t . Постоянную ε нетрудно выразить через Z_t . Действительно, учитывая, что в плоской монохроматической волне скорость выражается через давление формулой (2.1), находим из (18.3)

$$Z_t = \left(\frac{p}{v} \right)_{z=0} = i\omega\rho \left(p' \middle| \frac{dp}{dz} \right)_{z=0} = i\omega\rho/b \operatorname{th} \varepsilon, \quad (18.4)$$

но $i\omega\rho/b = Z_0$ — характеристический импеданс среды. Поэтому

$$\varepsilon = \operatorname{arth}(Z_0/Z_t). \quad (18.5)$$

Применяя формулу (18.3) к воздушному слою и предполагая, что точка $z = 0$ соответствует его границе с звукопоглощающим слоем d_1 , находим

$$p_2 = 2A \operatorname{ch} \varepsilon, \quad p_1 = 2A \operatorname{ch}(i\omega l/c + \varepsilon_1), \quad (18.6)$$

где

$$\varepsilon_1 = \operatorname{arth}(\rho c/Z_2).$$

В процессе вывода мы учли, что для воздушного слоя $b = i\omega/c$, $Z_0 = \rho c$. Из (18.6) получаем

$$p_1/p_2 = \operatorname{ch}(i\omega l/c + \varepsilon_1)/\operatorname{ch} \varepsilon_1. \quad (18.7)$$

По аналогии с (18.7) и (18.1) имеем далее

$$p_2/p_3 = \operatorname{ch}(bd_1 + \varepsilon_2)/\operatorname{ch} \varepsilon_2, \quad \varepsilon_2 = \operatorname{arth}(Z_0/Z_3), \quad (18.8)$$

$$p_3/p_4 = 1 - i\omega\sigma_2/Z_4, \quad (18.9)$$

$$p_4/p_5 = \operatorname{ch}(bd_2 + \varepsilon_4)/\operatorname{ch} \varepsilon_4, \quad \varepsilon_4 = \operatorname{arth}(Z_0/Z_5). \quad (18.10)$$

Здесь Z_1, Z_2, \dots, Z_5 — импедансы в плоскостях, указанных на рис. 18.1, причем $Z_5 = \rho c$ — волновое сопротивление воздуха; Z_0 — характеристический импеданс пористого материала; b — его постоянная распространения; Z_0 и b являются, вообще говоря, сложными функциями параметров, характеризующих пористый материал: удельного сопротивления R_1 , плотности ρ_m и в меньшей степени структурного фактора k [103], пористости Y и объемных коэффициентов упругости воздуха в материале K и самого материала Q . При этом мы ограничимся случаем мягкого пористого материала (отношение K/Q больше, чем, скажем, 20), в котором волна, распространяющаяся по скелету, будет весьма быстро затухающей и ею можно пренебречь. Только

при этом условии материал можно характеризовать лишь одной постоянной распространения b .

Связь между импедансами Z_1 и Z_2 , Z_2 и Z_3 и т. д. в точках, разделенных слоями, была рассмотрена нами в § 3, однако здесь нам удобнее представить эту связь в несколько ином виде.

Как мы выше видели, давление в слое, с одной стороны которого (при $z = 0$) импеданс равен Z_t , дается формулами (18.3) и (18.5). Для импеданса с другой стороны слоя при $z = l$ получаем

$$Z = i\omega\rho \left(p \middle/ \frac{dp}{dz} \right)_{z=l} = \frac{i\omega\rho}{b} \operatorname{cth}(bl + \varepsilon) = Z_0 \operatorname{cth}(bl + \varepsilon). \quad (18.11)$$

В случае воздушного слоя $Z_0 = \rho c$, $b = i\omega/c$.

Теперь мы можем выписать всю необходимую для расчетов систему импедансов. Прежде всего имеем

$$Z_5 = \rho c, \quad Z_4 = Z_0 \operatorname{cth}(bd_2 + \varepsilon_1). \quad (18.12)$$

Далее, так как по обе стороны непроницаемого слоя σ_2 скорости одинаковы, то отношение импедансов по разные стороны от него равно отношению звуковых давлений, т. е. согласно (18.9),

$$Z_3 = p_3 Z_4 / p_4 = Z_4 = i\omega\sigma_2. \quad (18.13)$$

Наконец, по аналогии с (18.12)

$$Z_2 = Z_0 \operatorname{cth}(ba_1 + \varepsilon_2), \quad Z_1 = \rho c \operatorname{cth}(i\omega l/c + \varepsilon_1). \quad (18.14)$$

Перемножая уравнения (18.1) и (18.7) — (18.10), получаем искомое отношение p_1/p_5 . Учитывая уравнения (18.12) — (18.14), это отношение можно представить в следующем, наиболее удобном для расчетов виде:

$$p_1/p_5 = \operatorname{ch} bd_2 (X_1 \operatorname{ch} bd_1 + X_2 \operatorname{sh} bd_1) + \operatorname{sh} bd_2 (X_3 \operatorname{ch} bd_1 + X_4 \operatorname{sh} bd_1), \quad (18.15)$$

где

$$\begin{aligned} X_1 &= A - i(B + A\omega\sigma_2/\rho c), & X_3 &= AZ_0/\rho c - i(B\rho c/Z_0 + A\omega\sigma_2/Z_0), \\ X_2 &= AZ_0/\rho c - B\omega\sigma_2/Z_0 - iB\rho c/Z_0, & X_4 &= A - \omega\sigma_2\rho c B/Z_0^2 - iB \end{aligned} \quad (18.16)$$

и, наконец,

$$A = \cos(\omega l/c) + (\omega\sigma_1/\rho c) \sin(\omega l/c), \quad B = -\sin(\omega l/c) + (\omega\sigma_1/\rho c) \cos(\omega l/c). \quad (18.17)$$

Представляет интерес рассмотрение ряда звукоизолирующих конструкций, получающихся из рассмотренной здесь конструкции при частных значениях характеризующих ее параметров.

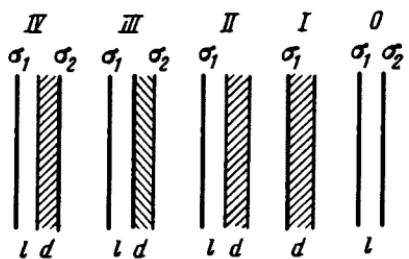


Рис. 18.2. Схемы звукоизолирующих конструкций различных частных видов

Мы рассмотрим здесь пять таких конструкций, обозначив их номерами от 0 до IV, причем возрастание номера будет соответствовать увеличению сложности конструкции. Рассмотренная выше конструкция, как самая сложная, в дальнейшем будет обозначаться номером V, остальные будут полу-

чаться из нее при следующих значениях параметров конструкций (рис. 18.2):

$$\text{IV } d_2 = 0, \quad d_1 = d;$$

$$\text{III } d_1 = 0, \quad d_2 = d;$$

$$\text{II } \sigma = 0, \quad d_2 = 0, \quad d_1 = d;$$

$$\text{I } l = 0, \quad \sigma_2 = 0, \quad d_2 = 0, \quad d_1 = d;$$

$$0 \quad d_1 = 0, \quad d_2 = 0.$$

Таким образом, конструкция 0 представляет собой две непроницаемые стенки, разделенные воздушным промежутком, конструкция I — стенку с наклеенным на нее слоем пористого материала и т. д.

Из формул (18.15) — (18.17) получаем формулы для звукоизоляции всех указанных выше конструкций:

$$\text{IV } p_0/p_5 = X_1 \operatorname{ch} bd + X_2 \operatorname{sh} bd, \quad (18.18)$$

$$\text{III } p_0/p_5 = X_1 \operatorname{ch} bd + X_3 \operatorname{sh} bd, \quad (18.19)$$

$$\text{II } p_0/p_5 = (A - iB) \operatorname{ch} bd + (AZ_0/\rho c - iB\rho c/Z_0) \operatorname{sh} bd, \quad (18.20)$$

$$\text{I } p_0/p_5 = (1 - i\omega_1/\rho c) \operatorname{ch} bd + (Z_0/\rho c - i\omega_1/Z_0) \operatorname{sh} bd, \quad (18.21)$$

$$0 \quad p_0/p_5 = X_1 = A - i(B + A\omega_2/\rho c). \quad (18.22)$$

Представляет интерес также рассмотреть конструкцию, состоящую из двух одинаковых непропицаемых слоев, промежуток между которыми заполнен звукопоглощающим материалом. При этом $d_2 = 0$, $l = 0$, $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ и $p_0/p_5 = (1 - 2i\omega\sigma/\rho c)\operatorname{ch} bd + (Z_0/\rho c - \omega^2\sigma^2/Z_0\rho c - i\omega\sigma/Z_0) \operatorname{sh} bd$. (18.23)

Кривые звукоизоляции для конструкции 0 (двойная стенка) и конструкции V в зависимости от частоты, рассчитанные при помощи полученных выше формул, изображены на рис. 18.3 и 18.4.

Мы видим, что на некоторых частотах прибавление второй стенки даже понижает звукоизоляцию (см. рис. 18.3). Нетрудно показать, что это соответствует частотам резонанса всей системы, состоящей из двух слоев с воздушным промежутком между ними, нагруженной с обеих сторон на воздух.

На кривых звукоизоляции двойной стенки имеется также довольно много хорошо выраженных пиков, соответствующих местным провалам звукоизоляции. Эти пики наблюдаются на частотах, при которых в воздушном промежутке между стенками укладывается целое число полуволн. Можно показать, что при этих частотах звукоизоляция равна

$$10 \lg |p_0/p_5|^2 = 10 \lg [1 + \omega^2(\sigma_1 + \sigma_2)^2/\rho^2 c^2], \quad (18.24)$$

т. е. в этом случае обе стенки действуют как одна стенка с суммарным весом. Этого и нужно было ожидать, исходя из изложенной в § 3 общей теории, где было показано, что слой, толщиной в целое число полуволн, никак не влияет на коэффициенты прозрачности и отражения системы и эквивалентен в этом отношении слою нулевой толщины *.

В промежутках между пиками звукоизоляция оказывается равной

$$10 \lg |p_0/p_5|^2 = 10 \lg (1 + \omega^2\sigma_1^2/\rho^2 c^2) + 10 \lg (1 + \omega^2\sigma_2^2/\rho^2 c^2), \quad (18.25)$$

т. е. в этом случае эффект от обеих стенок складывается независимо.

* В случае одиночной стенки звукоизоляция у нас выражается формулой $10 \lg (1 + \omega^2\sigma^2/\rho^2 c^2)$, где σ — плотность стенки на 1 см^2 . Это отличается от обычно употребляемой формулы $10 \lg (1 + \omega^2\sigma^2)/4\rho^2 c^2$. Разница обусловливается тем, что в нашем случае под звукоизоляцией стенки понимается выраженное в децибелах отношение звуковых давлений перед стенкой и позади нее, в то время как обычно под звукоизоляцией понимается выраженное в децибелах отношение давлений в одной и той же точке позади стенки при наличии стенки и без нее. В частности, при $\omega\sigma/\rho c \gg 1$, когда имеет место почти полное отражение от стенки, давление перед стенкой удваивается, и разница между тем и другим определением звукоизоляции будет составлять 6 дБ. Наше определение звукоизоляции нам кажется более естественным.

На рис. 18.4, соответствующем сравнительно сложной звукоизолирующей конструкции, содержащей слой пористых материалов, из-за наличия трения в этих слоях пики на кривых выражены менее сильно. На этих рисунках ρ_m означает плотность пористого материала, ρ — плотность воздуха, R_1 — удельное (дин·сек/ см^3) сопротивление материала, близкое на всех частотах к сопротивлению в постоянном потоке. Для определения постоянной распространения b были использованы результаты работы [113]. Там же было показано, что для мягких пористых материалов, имеющих значение пористо-

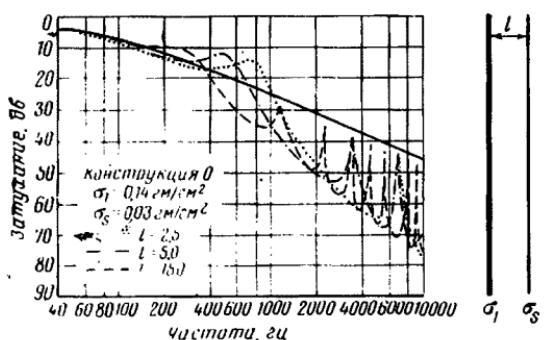
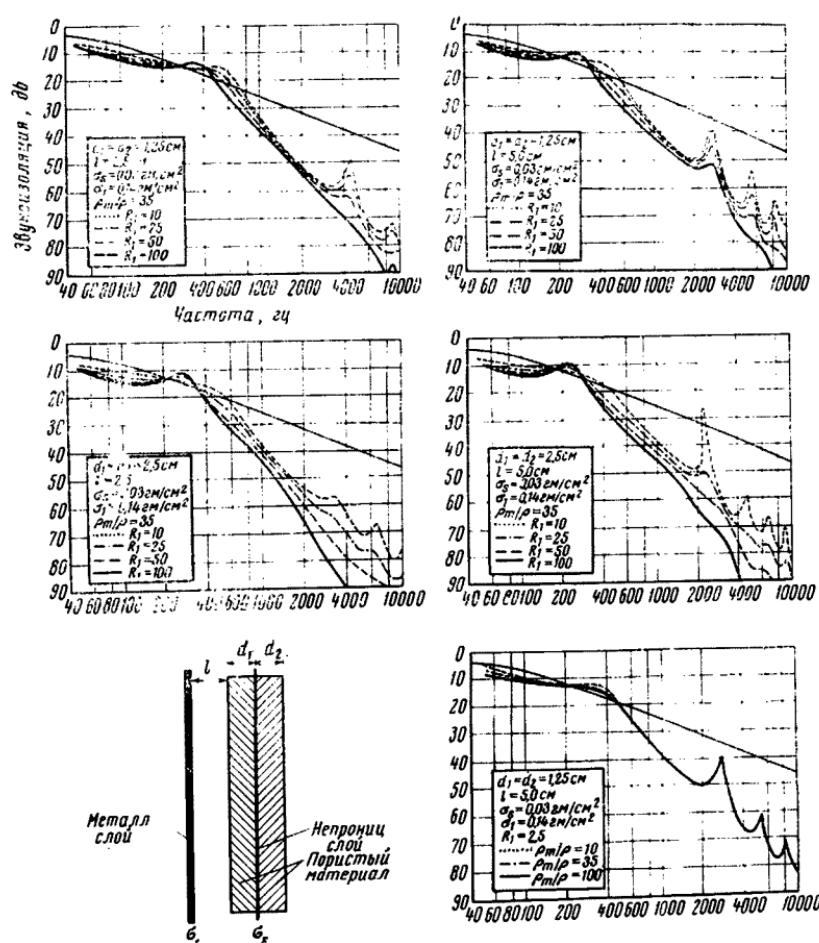


Рис. 18.3. Звукоизоляция двойной стекки. Сплошная линия соответствует звукоизоляции одиночной стекки с поверхностью плотностью σ_1 [113]



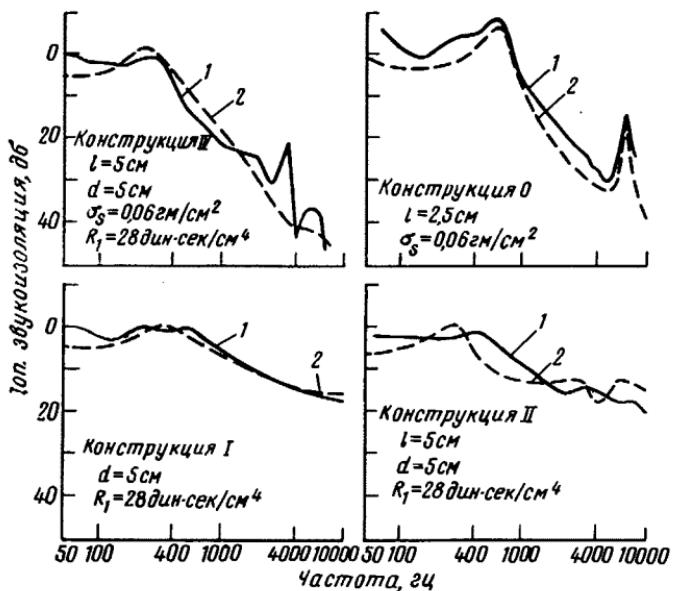


Рис. 18.5. Сравнение экспериментальных и теоретических данных для звукоизоляции различных конструкций в зависимости от частоты. По оси ординат — превышение звукоизоляции данной конструкции по сравнению со звукоизоляцией одиночной стенки с плотностью $\sigma_1/\text{см}^2$

1 — теоретическая кривая; 2 — экспериментальная

сти Y больше 95%, характеристический импеданс Z_0 связан с постоянной b соотношением * $Z_0 = -iKb/\omega Y$.

18.2. Сравнение с экспериментом. Анализ других случаев. При экспериментальной проверке теории слоистой звукоизоляции оказалось необходимым предусмотреть ряд предосторожностей. В частности, очень важно было исключить возможность передачи звука через слой путем возбуждения на нем изгибных волн, которые излучают звук с другой стороны слоя.

Это достигалось тем, что слой составлялся из совокупности более тонких металлических слоев с наклеенными на них слоями слюды с плотностью $0,04 \text{ г/см}^2$, создающими весьма большое затухание для изгибных волн. Так составлялись слои с полной плотностью от $0,16$ до $1,6 \text{ г/см}^2$. Опыт показал, что только при принятии этой предосторожности удается добиться того, чтобы одиночная стена давала звукоизоляцию, соответствующую ее весу.

Кроме того, необходимо было также исключить волны, распространяющиеся вдоль воздушного зазора между слоями σ_1 и d_1 . Для этого по краям воздушного зазора помещался звукопоглощающий материал. Подробное описание эксперимента читатель может найти в работах [113, 114].

Эксперимент хорошо подтвердил развитую выше теорию. На рис. 18.5 и 18.6 приведены экспериментальные и теоретические кривые звукоизоляции для ряда конструкций. На графиках по оси абсцисс откладывается частота в герцах, по оси ординат превышение звукоизоляции в децибелах над звукоизоляцией одиночной стены с поверхностной плотностью σ_1 . Рис. 18.5 относится к четырем различным конструкциям, рис. 18.6 к конструкциям III и IV. Обозначения параметров конструкций те же, что и выше. В качестве звукопоглощающего материала в конструкциях употреблялся войлок из минеральной ваты.

* Мы выбираем временной множитель в виде $\exp(-i\omega t)$, в то время как в [113] и [114] он выбран в виде $\exp i\omega t$, в связи с чем знаки перед i оказываются всюду противоположными.

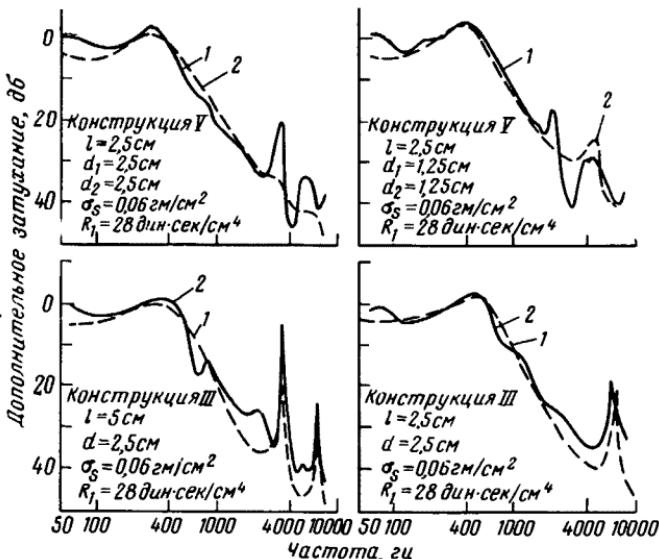


Рис. 18.6. То же, что на рис. 18.5, но для других параметров конструкций

Из графиков видно, что общий ход теоретических и экспериментальных кривых хорошо совпадает. Подробное изучение частотных характеристик звукоизоляции различных конструкций показало, что:

- для обеспечения хорошей звукоизоляции на низких частотах необходимо, чтобы общая толщина конструкций была максимальной;
- на частотах 1000 - 5000 Гц, наиболее существенных в проблеме звукоизоляции самолетных кабин, конструкции III, IV и V дают примерно одинаковые результаты.

Весьма существенной в ряде случаев является задача об определении средней звукоизоляции для различных углов падения звуковых волн на стенку. В теоретическом отношении эта задача не содержит принципиальных трудностей и заключается в обобщении полученных выше формул на произвольный угол падения (что при учете результатов § 3 не представляет особого труда) и в последующем усреднении результатов по углам.

Практически это усреднение сводится к численному интегрированию. Частично этот вопрос рассмотрен в работах А. Лондона [193, 194].

Целесообразно также указать на некоторые более старые работы по слоистой звукоизоляции. В работе [131] рассматривается звукоизоляция двумя одинаковыми перегородками, разделенными воздушным промежутком. В работе [174] рассматривается звукоизоляция системой перегородок, каждая из которых имеет некоторую собственную частоту колебаний. Представляет также интерес работа [132].

ВОЛНЫ В НЕПРЕРЫВНО-СЛОИСТЫХ СРЕДАХ

В главе I мы рассматривали теорию плоских волн в однородных средах, соприкасающихся друг с другом вдоль плоских границ раздела. При переходе через эти границы свойства сред менялись скачком. В этой главе мы исследуем случай, когда свойства среды непрерывно изменяются в направлении одной из осей прямоугольной системы координат (например, оси z) и остаются неизменными в плоскостях, перпендикулярных этой оси. Среды такого рода мы будем называть непрерывно-слоистыми. Земная атмосфера, морская вода и земная кора в известном приближении являются такими средами, поскольку их свойства (скорость упругих и электромагнитных волн, плотность и т. д.) заметно меняются по вертикали; изменения же в горизонтальном направлении выражены значительно меньше.

Нашей задачей будет исследование звукового и электромагнитного полей в такого рода средах. В частности, существенным является определение коэффициента отражения волн от различного рода неоднородностей слоистого характера.

§ 19. Уравнения звукового и электромагнитного полей в неоднородной среде

19.1. Уравнения звукового поля в неоднородной среде. Уравнения звукового поля в неоднородной среде, легко получающиеся путем линеаризации уравнений гидродинамики, имеют вид [55]:

$$\frac{dp}{dt} + \rho c^2 \operatorname{div} v = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p = 0, \quad (19.1)$$

где p — звуковое давление; v — скорость в звуковой волне; ρ и c — плотность среды и скорость звука в ней. В общем случае ρ и c зависят от координат точек в пространстве. Первое из уравнений (19.1) получается из уравнения неразрывности, второе из уравнения Эйлера.

Полагая для гармонической волны $\partial/\partial t = -i\omega$ и исключая из уравнений (19.1) v , получаем

$$\rho \operatorname{div} \left(\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p \right) + k^2 p = 0 \quad (19.2)$$

или

$$\Delta p + k^2 p - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} \rho \operatorname{grad} p = 0. \quad (19.3)$$

Это уравнение можно преобразовать в уравнение типа волнового. Для этого введем вместо p новую функцию ψ :

$$\psi = p/V\rho. \quad (19.4)$$

После несложных преобразований для ψ получаем уравнение

$$\Delta \psi + K^2(x, y, z)\psi = 0, \quad (19.5)$$

где

$$K^2(x, y, z) = k^2 + \frac{1}{2\rho} \Delta \rho - \frac{3}{4} \left(\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} \rho \right)^2. \quad (19.6)$$

19.2. Уравнения электромагнитного поля. В случае неоднородной среды уравнения (4.2) остаются в силе; однако комплексная диэлектрическая постоянная ϵ' (в дальнейшем штрих будем опускать) и магнитная проницаемость μ в них будут теперь функциями координат. Два же уравнения в (4.1), содержащие $\operatorname{div} \mathbf{E}$ и $\operatorname{div} \mathbf{H}$, заменяются следующими двумя уравнениями:

$$\operatorname{div}(\epsilon \mathbf{E}) = 0, \quad \operatorname{div}(\mu \mathbf{H}) = 0. \quad (19.7)$$

Мы ограничимся случаем $\mu = 1$. Тогда из уравнений (4.2) получаем

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = (\omega^2 \epsilon / c^2) \mathbf{E} \quad (19.8)$$

или

$$\Delta \mathbf{E} + (\omega^2 \epsilon / c^2) \mathbf{E} - \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} = 0. \quad (19.9)$$

Это уравнение может быть представлено в несколько ином виде. Действительно из первого уравнения (19.7) получаем

$$\epsilon \operatorname{div} \mathbf{E} + \mathbf{E} \operatorname{grad} \epsilon = 0.$$

Выразив отсюда $\operatorname{div} \mathbf{E}$ и подставив в (19.9), находим

$$\Delta \mathbf{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \mathbf{E} + \operatorname{grad} \left(\mathbf{E} \frac{1}{\epsilon} \operatorname{grad} \epsilon \right) = 0. \quad (19.10)$$

Отсюда видно, что при достаточно медленном изменении ϵ в пространстве, когда последним членом можно пренебречь, уравнение для электрического поля сводится к обычному волновому уравнению с переменным волновым числом k

$$\Delta \mathbf{E} + k^2(x, y, z) \mathbf{E} = 0, \quad k^2(x, y, z) \equiv \omega^2 \epsilon(x, y, z) / c^2. \quad (19.11)$$

Однако неосторожное отбрасывание малого члена в дифференциальном уравнении (19.10) иногда может привести к грубой ошибке в конечном результате. Поэтому представляет интерес рассмотрение методов, которые позволяют сводить к волновому уравнению точное уравнение (19.10). Это оказывается возможным при использовании скалярного и векторного потенциалов ϕ и \mathbf{A} .

Как известно, электрическое и магнитное поля выражаются через потенциалы ϕ и \mathbf{A} при помощи формул (при $\mu = 1$) *

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \phi - (1/c) \partial \mathbf{A} / \partial t = -\operatorname{grad} \phi + (i\omega/c) \mathbf{A}, \quad \mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (19.12)$$

Уравнения (4.2) и (19.7) будут удовлетворяться, если подчинить ϕ и \mathbf{A} условию

$$\phi = -(ic/\omega^2) \operatorname{div} \mathbf{A}, \quad (19.13)$$

и если \mathbf{A} будет удовлетворять уравнению

$$\Delta \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} - (2/k) \operatorname{div} \mathbf{A} \operatorname{grad} k = 0. \quad (19.14)$$

В дальнейшем мы будем рассматривать случай слоистой среды, когда волновое число k зависит лишь от одной координаты z . Кроме того, в этой главе мы ограничиваемся плоской задачей, и направление оси y можно выбрать так, чтобы от этой координаты \mathbf{A} не зависело. Остаповимся по отдельности на двух случаях:

а) Вектор \mathbf{A} направлен по оси z ($A_x = A_y = 0$, $A_z \equiv A$). Из формул (19.12) с учетом (19.13) получаем

$$E_x = \frac{i\omega^2}{ck^2} \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial z}, \quad E_y = 0, \quad E_z = \frac{i\omega}{c} \left[A + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{k^2} \frac{\partial A}{\partial z} \right) \right],$$

$$H_x = 0, \quad H_y = -\frac{\partial A}{\partial x}, \quad H_z = 0. \quad (19.15)$$

* В однородной среде векторный потенциал \mathbf{A} с точностью до постоянного множителя $-i\omega \epsilon / c$ совпадает с используемым в последующих главах вектором Герца \mathbf{P}

Таким образом, мы имеем случай волны, поляризованной в плоскости падения.

Из (19.4) получаем уравнения для A

$$\Delta A + k^2 A - \frac{1}{k^2} \frac{\partial A}{\partial z} \frac{\partial k^2}{\partial z} = 0. \quad (19.16)$$

Введем вместо A новую функцию

$$\psi = A/k. \quad (19.17)$$

Из (19.16) для нее без труда получаем уравнение

$$\Delta \psi + (k^2 + k''/k - 2k'^2/k^2)\psi = 0, \quad (19.18)$$

где штрих у k означает производную по z .

В результате мы получили волновое уравнение с некоторым «эффективным» квадратом волнового числа, равным

$$K^2 = k^2 + k''/k - 2k'^2/k^2. \quad (19.19)$$

Здесь, очевидно, надо предположить, что в среде непрерывно как k , так и k' (т. е. существуют k' и k'').

б) Вектор Λ направлен по оси y ($A_x = A_z = 0$, $A_y \equiv A$). Из (19.16) для A получаем непосредственно волновое уравнение

$$\Delta A + k^2 A = 0. \quad (19.20)$$

Из (19.12) для составляющих электромагнитного поля получаем (заметим, что при этом $\varphi = 0$)

$$\begin{aligned} E_x &= 0, & E_y &= (i\omega/c) A_y, & E_z &= 0, \\ H_x &= -\partial A_y / \partial z, & H_y &= 0, & H_z &= \partial A_y / \partial x. \end{aligned} \quad (19.21)$$

Таким образом, здесь мы имеем случай волны, поляризованной перпендикулярно плоскости падения.

§ 20. Отражение волны от слоя Эпштейна

20.1. Постановка задачи. Строгое решение задачи об отражении волны от неоднородного слоя сводится к решению полученных в предыдущем параграфе уравнений с соответствующими граничными условиями. Такого рода решения в конечном виде известны только для немногих видов функции $k(z)$ (см. § 22). Мы рассмотрим здесь один такой случай для того, чтобы представить себе основные закономерности отражения от неоднородных слоев. Слой, отражение от которого мы будем анализировать, впервые был рассмотрен Н. Эпштейном [143]. Однако мы несколько обобщим его выкладки и вместо случая нормального падения волны рассмотрим случай произвольного угла падения.

Математическая задача сводится к решению волнового уравнения

$$\Delta \psi + k^2(z)\psi = 0. \quad (20.1)$$

Как и раньше, плоскость падения волны будем считать совмещенной с плоскостью xz . Поэтому ψ будет функцией только переменных x и z . Смысл этой функции будет различным в разных случаях.

а) В акустическом случае ψ дается выражением (19.4), а вместо $k^2(z)$ в (20.1) должно фигурировать $K^2(z)$ из (19.6). Однако, вторым и третьим членами в (19.6) можно пренебречь, если изменение плотности мало на длине волны.

б) В электромагнитном случае, когда \mathbf{E} лежит в плоскости xz , согласно (19.17) имеем $\psi = A/k$. Однако мы можем взять $\psi = H_y/k$ поскольку согласно (19.5) H_y получается из A дифференцированием по x , что, как видно будет дальше, в нашем случае эквивалентно умножению на постоянную величину.

Уравнение (19.18) для ψ имеет вид (20.1), если вместо $k^2(z)$ подразумевать эффективное $K^2(z)$, даваемое выражением (19.19).

в) В электромагнитном случае, когда E перпендикулярно плоскости xz , за ψ , как видно из (19.20) и (19.21), можно взять E_y .

Итак, имеем для наших трех случаев:

$$a) \psi \equiv p/\sqrt{\rho}, \quad b) \psi \equiv H_y/k(z), \quad c) \psi = E_y. \quad (20.2)$$

Задача об отражении плоской волны от неоднородного слоя ставится таким образом. Предполагается, что неоднородности среды сконцентрированы в ограниченной области z , т. е. функция $k(z)$ стремится к постоянным значениям k_0 (при $z \rightarrow -\infty$) и k_1 (при $z \rightarrow +\infty$). Предполагается, что при $z = -\infty$ задана падающая плоская волна единичной амплитуды

$$\Psi_{\text{пад}} = \exp i(\xi x - k_0 \cos \vartheta_0 z), \quad (20.3)$$

где ϑ_0 — угол падения (угол между нормалью к фронту волны и осью z). Наличие слоя (области переменных $k(z)$) приводит к появлению при $z = -\infty$ отраженной волны

$$\Psi_{\text{отр}} = V \exp i(\xi x + k_0 \cos \vartheta_0 z), \quad (20.4)$$

а в области $z = \infty$ прошедшей волны

$$\Psi_{\text{пр}} = W \exp i(\xi x - k_1 \cos \vartheta_1 z), \quad (20.5)$$

где ϑ_1 — угол преломления, а V и W — постоянные величины — коэффициенты отражения и прозрачности. Величина

$$\xi = k_0 \sin \vartheta_0 = k_1 \sin \vartheta_1 \quad (20.6)$$

является «горизонтальным» волновым числом и определяет фазовую скорость перемещения системы волн (20.3) — (20.5) так же, как и поля в слое, вдоль оси x .

Угол ϑ_1 определяется через ϑ_0 из (20.6). Задача заключается в определении V и W . Для этого необходимо проанализировать решения для ψ в слое. Естественно искать эти решения в виде

$$\psi(x, z) = Z(z) \exp i\xi x. \quad (20.7)$$

Для новой неизвестной функции $Z(z)$ получаем подстановкой (20.7) в (20.1) уравнение

$$Z'' + [k^2(z) - \xi^2]Z = 0. \quad (20.8)$$

В случае слоя Эштейна зависимость $k(z)$ такова, что (20.8) сводится к гипергеометрическому уравнению, которое мы и рассмотрим кратко в следующем разделе.

20.2. Гипергеометрическое уравнение. Гипергеометрическим уравнением для функции $F(\zeta)$ называют уравнение

$$\frac{d^2F}{d\zeta^2} - \frac{(\alpha + \beta + 1)\zeta - \gamma}{\zeta(1-\zeta)} \cdot \frac{dF}{d\zeta} - \frac{\alpha\beta}{\zeta(1-\zeta)} F = 0, \quad (20.9)$$

где α , β и γ — параметры.

Простыми, хотя и несколько громоздкими операциями можно показать, что путем замены

$$F = r(z)Z, \quad \zeta = P(z), \quad (20.10)$$

где $P(z)$ — произвольная функция, а

$$r(z) = \frac{1}{2} r_0 \zeta^{-\gamma/2} (1-\zeta)(\gamma - \alpha - \beta - 1) \left(\frac{d\zeta}{dz} \right)^{1/2}, \quad (20.11)$$

уравнение (20.9) сводится к волновому уравнению

$$d^2Z/dz^2 + g(z)Z = 0, \quad (20.12)$$

при этом в (20.11) r_0 — постоянная величина.

Функция $g(z)$ дается выражением

$$g(z) = \left\{ \frac{1}{2} \frac{d^2}{dz^2} \left(\ln \frac{dP}{dz} \right) - \frac{1}{4} \left[\frac{d}{dz} \left(\ln \frac{dP}{dz} \right) \right]^2 \right\} - \left(\frac{d}{dz} \ln P \right)^2 \left\{ K_1 + K_2 \frac{P}{1-P} + K_3 \frac{P}{(1-P)^2} \right\}, \quad (20.13)$$

где

$$\begin{aligned} 4K_1 &= \gamma(\gamma - 2), \\ 4K_2 &= 1 - (\alpha - \beta)^2 + \gamma(\gamma - 2), \\ 4K_3 &= (\alpha + \beta - \gamma)^2 - 1. \end{aligned} \quad (20.14)$$

Выбирая различным образом функцию $P(z)$, можно получить различные функции $g(z)$. Сравнивая уравнение (20.12) с (20.8), мы видим, что выбрав определенным образом функцию $g(z)$, можно найти решение нашей задачи для слоя, характеризуемого функцией

$$k^2(z) = g(z) + \xi^2. \quad (20.15)$$

В частности, при нормальном падении волны на слой ($\xi = 0$) квадрат волнового числа $k^2(z)$ будет непосредственно совпадать с функцией $g(z)$.

Для дальнейшего анализа мы положим

$$P(z) = -e^{mz}. \quad (20.16)$$

При этом из (20.13) и (20.15) мы получаем для квадрата волнового числа в слое

$$k^2(z) = \xi^2 - m^2 \left(K_1 + \frac{1}{4} \right) + m^2 K_2 \frac{e^{mz}}{1 + e^{mz}} + m^2 K_3 \frac{e^{mz}}{(1 + e^{mz})^2}.$$

Постоянные K_1 , K_2 и K_3 целесообразно выразить через величину k_0 и две новых постоянных M и N при помощи равенств

$$K_1 = (\xi^2 - k_0^2)/m^2 - 1/4, \quad K_2 = -k_0^2 N/m^2, \quad K_3 = -4k_0^2 M/m^2. \quad (20.17)$$

Физический смысл постоянных M и N будет разъяснен ниже. Теперь будем иметь

$$\frac{k^2(z)}{k_0^2} = 1 - N \frac{e^{mz}}{1 + e^{mz}} - 4M \frac{e^{mz}}{(1 + e^{mz})^2}. \quad (20.18)$$

На рис. 20.1 графически изображена величина $n^2 = k^2(z)/k_0^2$, т. е. квадрат показателя преломления среды как функция z для двух случаев: $M = 0$, $N \neq 0$ и $M \neq 0$, $N = 0$. Мы видим, что в первом случае формула (20.18) описывает «переходной» слой, в котором показатель преломления от значения $n^2 = 1$ при больших отрицательных значениях z , плавно изменяясь, переходит к значению $n^2 = 1 - N$ при больших положительных значениях z . Во втором же случае мы получаем «симметричный» слой, в котором показатель преломления является четной функцией z . При этом он обращается в единицу при больших удалениях от средней плоскости $z = 0$ и имеет наибольшее отклонение от единицы при $z = 0$, где $n^2 = 1 - M$. По оси абсцисс на рис. 20.1 оказалось удобным откладывать не величину n^2 , а $(1 - n^2)/N$ для переходного слоя и $(1 - n^2)/M$ для симметричного слоя.

По оси ординат откладывается комбинация $z/S\lambda_0 = mz/4\pi$, где величина

$$S \equiv 2k_0/m \quad (20.19)$$

обычно называется относительной толщиной слоя. Простые расчеты показывают, что в случае симметричного слоя полная толщина слоя, определяемая

как расстояние по оси z между точками по обе стороны середины слоя, в которых $1 - n^2$ равно половине значения этой величины в максимуме (при $z = 0$), оказывается равной

$$l = 0,28\lambda_0 S. \quad (20.20)$$

Нам остается теперь связать характеризующие слой параметры S , M и N с параметрами гипергеометрического уравнения α , β и γ .

Решая систему уравнений (20.14) относительно α , β и γ , получаем

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2} [1 + \sqrt{1 + 4K_1} + \sqrt{1 + 4K_3} - \sqrt{1 + 4(K_1 - K_2)}], \\ \beta &= \frac{1}{2} [1 + \sqrt{1 + 4K_1} + \sqrt{1 + 4K_3} + \sqrt{1 + 4(K_1 - K_2)}], \quad (20.21) \\ \gamma &= 1 + \sqrt{1 + 4K_1}. \end{aligned}$$

С другой стороны, учитывая (20.17), получаем из первого уравнения (20.21)

$$\sqrt{1 + 4K_1} = (2/m) \sqrt{\xi^2 - k_0^2} = iS \cos \vartheta_0. \quad (20.22)$$

Аналогично, из двух других уравнений (20.21) находим

$$\sqrt{1 + 4(K_1 - K_2)} = iS \sqrt{\cos^2 \vartheta_0 - N}, \quad \sqrt{1 + 4K_3} = \sqrt{1 - 4S^2 M} \equiv 2(d_2 + id_1), \quad (20.23)$$

где через d_2 и d_1 обозначены соответственно вещественная и мнимая части корня $(1/2)\sqrt{1 - 4S^2 M}$. Теперь получаем

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2} + d_2 + (iS/2)(\cos \vartheta_0 - \sqrt{\cos^2 \vartheta_0 - N}) + id_1, \\ \beta &= \frac{1}{2} + d_2 + (iS/2)(\cos \vartheta_0 + \sqrt{\cos^2 \vartheta_0 - N}) - id_1, \quad (20.24) \\ \gamma &= 1 + iS \cos \vartheta_0. \end{aligned}$$

Перейдем теперь к анализу решений гипергеометрического уравнения (20.9) и к определению коэффициентов отражения и прозрачности слоя.

20.3. Коэффициенты отражения и прозрачности слоя. В курсах математического анализа (см., например, [95, гл. 14]) показывается, что уравнение (20.9) может быть удовлетворено следующим «гипергеометрическим рядом»:

$$\begin{aligned} F_1 = F(\alpha, \beta, \gamma, \zeta) &= 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma} \zeta + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2\gamma(\gamma+1)} \zeta^2 + \\ &+ \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} \zeta^3 + \dots \quad (20.25) \end{aligned}$$

Этот ряд сходится при $|\zeta| < 1$. Можно также показать, что вторым линейно-независимым решением уравнения, сходящимся в области $|\zeta| < 1$, является ряд

$$F_2 = \zeta^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma, \zeta). \quad (20.26)$$

Уравнение (20.9) имеет три особые точки: $\zeta = 0, 1, \infty$. Соответственно имеются три пары линейно-независимых решений, причем каждая пара этих решений сходится около «своей» особой точки. Так, около $\zeta = 0$ решениями являются сходящиеся вблизи этой точки ряды

$$F_1 = F(\alpha, \beta, \gamma, \zeta), \quad F_2 = \zeta^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma, \zeta), \quad (20.27)$$

на что уже указывалось выше.

Вблизи точки $\zeta = 1$

$$\begin{aligned} F_3 &= F(\alpha, \beta, \alpha + \beta - \gamma + 1, 1 - \zeta), \\ F_4 &= (1 - \zeta)^{\gamma - \alpha - \beta} F(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma - \alpha - \beta + 1, 1 - \zeta). \quad (20.28) \end{aligned}$$

Вблизи точки $\zeta = \infty$

$$F_5 = \zeta^{-\alpha} F\left(\alpha, \alpha - \gamma + 1, \alpha - \beta + 1, \frac{1}{\zeta}\right),$$

$$F_6 = \zeta^{-\beta} F\left(\beta, \beta - \gamma + 1, \beta - \alpha + 1, \frac{1}{\zeta}\right). \quad (20.29)$$

Каждое из этих выражений представляет собой аналитическую функцию, являющуюся решением гипергеометрического уравнения во всей области сходимости соответственных рядов.

Методом аналитического продолжения каждое из этих решений можно продолжить за граници области сходимости соответствующего ему ряда. При этом мы в новой области получаем уже три решения — одно, продолженное из другой области, и два решения, даваемые одной из формул (20.27) — (20.29). Так как в каждой из областей может существовать лишь два линейно-независимых решения, то между этими тремя решениями должна иметься линейная связь с постоянными коэффициентами. В дальнейшем мы используем лишь одну связь этого рода. Так, оказывается [95], что если решение

$$F_5 = \zeta^{-\alpha} F\left(\alpha, \alpha - \gamma + 1, \alpha - \beta + 1, \frac{1}{\zeta}\right), \quad (20.30)$$

справедливо в области $|\zeta| > 1$, аналитически продолжить в область $|\zeta| < 1$, то в этой последней области получаем новое решение, которое выражается через F_1 и F_2 при помощи линейной комбинации:

$$(-1)^{-z} \frac{\Gamma(\alpha - \beta + 1) \Gamma(1 - \gamma)}{\Gamma(1 - \beta) \Gamma(1 + \alpha - \gamma)} F_1 + (-1)^{\gamma-1-z} \frac{\Gamma(\alpha - \beta + 1) \Gamma(\gamma - 1)}{\Gamma(\gamma - \beta) \Gamma(\alpha)} F_2, \quad (20.31)$$

где Γ — гамма-функция.

Перейдем теперь при помощи соотношений (20.10) и (20.11) от решения гипергеометрического уравнения F к решению волнового уравнения Z . Так как в нашем случае

$$\zeta = -e^{mz}, \quad d\zeta/dz = m, \quad (20.32)$$

мы получаем

$$Z = r_0^{-1} m^{-\frac{1}{2}} \zeta^{\frac{1}{2}(\gamma-1)} (1 - \zeta)^{\frac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)} F. \quad (20.33)$$

Рассмотрим теперь асимптотические выражения для решений волнового уравнения Z , соответствующих F_5 , F_1 и F_2 для случаев а) $z \rightarrow \infty$, что соответствует $\zeta \rightarrow -\infty$, б) $z \rightarrow -\infty$, что соответствует $\zeta \rightarrow 0$.

В случае а) можно воспользоваться выражением (20.29) для F_5 , причем в выражении для гипергеометрического ряда F при $|\zeta| \rightarrow \infty$ остается один первый член, равный единице. В результате, учитывая также связь (20.32) между ζ и z , получаем

$$z \rightarrow \infty, \quad Z \rightarrow r_0^{-1} m^{-\frac{1}{2}} (-1)^{\frac{1}{2}(\gamma-1)-z} e^{\frac{1}{2}m(\beta-z)z}. \quad (20.34)$$

Таким же образом и в случае б) мы можем получить асимптотические выражения для решений волнового уравнения, соответствующих решениям гипергеометрического уравнения F_1 и F_2 . Однако мы получим сразу асимптотическое выражение для линейной комбинации (20.31). Снова, пользуясь выражениями (20.33) и (20.32), подставляя вместо F последовательно F_1 и F_2 , которые при $\zeta \rightarrow 0$, согласно (20.27), переходят в 1 и в $\zeta^{1-\gamma}$, получаем при $z \rightarrow -\infty$ для (20.31):

$$r_0^{-1} m^{-\frac{1}{2}} (-1)^{\frac{1}{2}(\gamma-1)-z} \left[\frac{\Gamma(\alpha - \beta + 1) \Gamma(1 - \gamma)}{\Gamma(1 - \beta) \Gamma(1 + \alpha - \gamma)} e^{\frac{1}{2}m(\gamma-1)z} + \right. \\ \left. + \frac{\Gamma(\alpha - \beta + 1) \Gamma(\gamma - 1)}{\Gamma(\gamma - \beta) \Gamma(\alpha)} e^{-\frac{1}{2}m(\gamma-1)z} \right]. \quad (20.35)$$

Последнее выражение, справедливое при $z \rightarrow -\infty$, является, как было указано, аналитическим продолжением выражения (20.34), справедливого при $z \rightarrow \infty$.

Пусть параметры гипергеометрического уравнения α , β и γ выбраны такими, что $(\beta - \alpha)/i$ и $(\gamma - 1)/i$ являются вещественными положительными величинами. Тогда выражение (20.34) будет представлять собой плоскую незатухающую волну, распространяющуюся в сторону $z \rightarrow \infty$. Выражение же (20.35) будет представлять собой комбинацию двух плоских волн, распространяющихся одна в сторону $z = -\infty$ (второй член в скобках), другая в обратном направлении.

Найденные выше решения гипергеометрического уравнения F_1 , F_2 и F_3 дают возможность найти решение волнового уравнения во всем интервале изменений z от $-\infty$ до $+\infty$, причем это решение при $z \rightarrow \infty$ вырождается в плоскую волну (выражение (20.34)), а при $z \rightarrow -\infty$ — в комбинацию из двух плоских волн, распространяющихся в противоположных направлениях (выражение (20.35)). Из этого вытекает, что выражение (20.35) мы можем трактовать как суперпозицию падающей и отраженной волн на достаточно большом удалении от слоя, где среду уже можно считать однородной, а выражение (20.34) — как пропущенную волну. Сравнивая коэффициенты перед соответственными экспонентами, получаем для коэффициента отражения:

$$V = \frac{\Gamma(\gamma - 1) \Gamma(1 - \beta) \Gamma(1 + z - \gamma)}{\Gamma(1 - \gamma) \Gamma(\gamma - \beta) \Gamma(z)}, \quad (20.36)$$

для коэффициента прозрачности слоя:

$$W = \frac{\Gamma(1 - \beta) \Gamma(1 + z - \gamma)}{\Gamma(1 - \gamma) \Gamma(z - \beta + 1)}. \quad (20.37)$$

Таким образом, нам пришлось воспользоваться лишь предельными значениями гипергеометрических рядов. Пользуясь этими рядами для произвольных значений переменной, можно было бы рассчитать поле в любой точке слоя. Однако в дальнейшем нам к этому прибегать не придется.

20.4. Коэффициент отражения от переходного слоя. Проанализируем формулу для коэффициента отражения (20.36) в случае переходного слоя, т. е. в случае $M = 0$, $N \neq 0$. Из (20.23) и (20.24) при $M = 0$ получаем

$$d_1 = 0, \quad d_2 = 1/2, \quad z = 1 + (iS/2)(\cos \theta_0 - \sqrt{\cos^2 \theta_0 - N}), \quad (20.38)$$

$$\beta = 1 + (iS/2)(\cos \theta_0 + \sqrt{\cos^2 \theta_0 - N}), \quad \gamma = 1 + iS \cos \theta_0.$$

Выражение (20.36) в этом случае принимает вид

$$V = \frac{\Gamma(iS \cos \theta_0) \Gamma[(-iS/2)(\cos \theta_0 + \sqrt{\cos^2 \theta_0 - N})] \Gamma[1 - (iS/2)(\cos \theta_0 + \sqrt{\cos^2 \theta_0 - N})]}{\Gamma(-iS \cos \theta_0) \Gamma[(iS/2)(\cos \theta_0 - \sqrt{\cos^2 \theta_0 - N})] \Gamma[1 + (iS/2)(\cos \theta_0 - \sqrt{\cos^2 \theta_0 - N})]}. \quad (20.39)$$

Более простое выражение получается для модуля коэффициента отражения $\rho \equiv |V| \equiv \sqrt{VV^*}$. При этом мы воспользуемся известным соотношением

$$\Gamma(z)\Gamma(1 - z) = \pi/\sin \pi z. \quad (20.40)$$

Необходимо различать два случая $\cos^2 \theta_0 < N$ и $\cos^2 \theta_0 > N$.

В первом случае мы будем иметь $\sqrt{\cos^2 \theta_0 - N} = i\sqrt{N - \cos^2 \theta_0}$. Умножая выражение (20.39) на его комплексно-сопряженное, получаем в этом случае $\rho = 1$, т. е. полное отражение волны. Во втором случае для модуля коэффициента отражения таким же образом получаем

$$\rho = \frac{\operatorname{sh}[(\pi S/2)(\cos \theta_0 - \sqrt{\cos^2 \theta_0 - N})]}{\operatorname{sh}[(\pi S/2)(\cos \theta_0 + \sqrt{\cos^2 \theta_0 - N})]}. \quad (20.41)$$

Выше (см. раздел 20.2) было показано, что $1 - N = n_\infty^2$, где n_∞ — показатель преломления среды вдали от слоя со стороны, противоположной падающей волне (при $z = \infty$). Поэтому условие полного отражения $\cos^2 \theta_0 < N$ можно записать в виде

$$\sin \theta_0 > n_\infty. \quad (20.42)$$

При стремлении толщины переходного слоя S к пулю мы получаем из (20.41) формулу Френеля для коэффициента отражения электромагнитной волны, поляризованной перпендикулярно плоскости падения (см. § 4)

$$V = \frac{\cos \theta_0 - \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_0}}{\cos \theta_0 + \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_0}}, \quad (20.43)$$

причем надобность в индексе ∞ у n в этом случае уже отпадает. При $S \rightarrow 0$ мы не получаем правильного значения для коэффициента отражения электромагнитной волны, поляризованной в плоскости падения, а также для коэффициента отражения звуковой волны. Это объясняется тем, что в этом случае градиент показателя преломления стремится к бесконечности, и при сведении уравнений поля к волновому уравнению «эффективное» волновое число, даваемое формулами (19.6) и (19.19), также стремится к бесконечности, в результате чего выбранный нами метод решения задачи становится неприменим. Случай малых толщин слоя будет рассматриваться в § 24 для слоя более общего вида, чем рассматриваемый здесь, поэтому на этом вопросе мы больше останавливаться не будем.

На рис. 20.2 и 20.3 изображен коэффициент отражения ρ от переходного слоя как функция угла падения волны θ_0 для $n_\infty = 1,1$ и $n_\infty = 0,9$, при различных значениях отношения l/λ_0 , где l — эффективная толщина слоя, определяемая выражением (20.20). Напоминаем, что волна предполагается падающей из $z = -\infty$, где $n = 1$ и длина волны λ_0 . По оси абсцисс на графиках откладывается угол падения волны, по оси ординат коэффициент отражения, выраженный в децибелах. Мы видим, что при увеличении толщины слоя коэффициент отражения резко падает. Так, в случае нормального падения при увеличении толщины слоя l от $0,1\lambda_0$ до $5\lambda_0$ амплитуда отраженной волны при $n_\infty = 1,1$ с 27 дБ ($\rho = 4 \cdot 10^{-2}$) уменьшается до 486 дБ ($\rho = 5 \cdot 10^{-5}$). Зависимость коэффициента отражения от угла падения выражена тем же

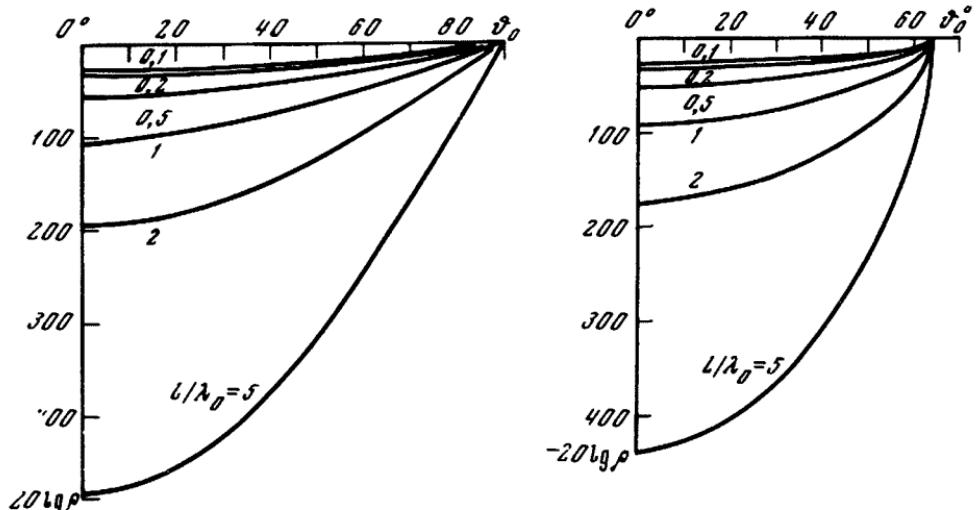


Рис. 20.2. Коэффициент отражения волны от переходного слоя в зависимости от угла падения для различных толщин слоя $n_\infty = 1,1$

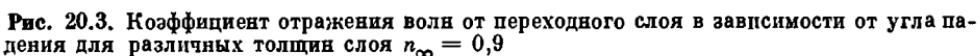


Рис. 20.3. Коэффициент отражения волны от переходного слоя в зависимости от угла падения для различных толщин слоя $n_\infty = 0,9$

чем больше толщина слоя. При $\vartheta_0 \rightarrow 90^\circ$ имеем $\rho \rightarrow 1$ ($\lg \rho \rightarrow 0$). В случае $n_\infty = 0,9$ при $\vartheta_0 > 64^\circ 10'$ имеет место полное отражение волны.

Приведенные выше результаты позволяют во многих практических случаях правильно оценивать качественную зависимость коэффициента отражения от толщины слоя, угла падения волны, от значений показателя преломления по ту и другую сторону слоя и т. д.

20.5. Сравнение с линейным слоем. Интересно сравнить коэффициент отражения ρ для двух видов переходного слоя в случае нормального падения волны.

Формула (20.41) для нормального падения ($\vartheta_0 = 0$) при учете соотношения $N = 1 - n_\infty^2$ будет иметь вид

$$\rho = \operatorname{sh} \left[\frac{\pi S}{2} (1 - n_\infty) \right] / \operatorname{sh} \left[\frac{\pi S}{2} (1 + n_\infty) \right]. \quad (20.44)$$

Рассмотрим отражение от слоя толщины L , показатель преломления в котором при $-L/2 \leq z \leq L/2$ меняется по закону (линейная зависимость от z для скорости распространения волн):

$$n = A (A + z/L + 1/2)^{-1}, \quad A = n_1/(1 - n_1), \quad (20.45)$$

а n_1 — показатель преломления при $z \geq L/2$. Показатель преломления среды с той стороны слоя, откуда падает волна ($z \leq 0$), как и выше, предполагается равным 1.

Коэффициент отражения от такого слоя при нормальном падении рассчитывается сравнительно легко и оказывается равным ([188, 84, т. I, § 148в])

при $k_0 L A < 1/2$

$$\rho = \frac{\operatorname{sh}(\mu \ln n_1)}{\sqrt{\operatorname{sh}^2(\mu \ln n_1) + 4\mu^2}}, \quad \mu = \sqrt{1/4 - (k_0 L A)^2}, \quad (20.46)$$

при $k_0 L A > 1/2$

$$\rho = \frac{\sin(m \ln n_1)}{\sqrt{\sin^2(m \ln n_1) + 4m^2}}, \quad m = \sqrt{(k_0 L A)^2 - 1}.$$

Здесь $k_0 = 2\pi/\lambda_0$ — длина волны в среде, из которой волна падает на слой.

На рис. 20.4 представлены коэффициенты отражения, даваемые формулой (20.44) (кривая 1) и формулами (20.46) (кривая 2). В обоих случаях показатель преломления среды с противоположной по отношению к падающей волне стороны слоя [n_1 в формулах (20.46) и n_∞ в формуле (20.44)] взят равным 0.8. Соотношение между толщинами слоев выбрано таким, что $S = 2.09L/k_0$, где S характеризует толщину переходного слоя Энштейна. На рис. 20.5 изображена зависимость $n(z)$ в том и другом случае.

Мы видим, что в случае плавного переходного слоя (кривая 1 на рис. 20.5) коэффициент отражения убывает с увеличением толщины слоя монотонно

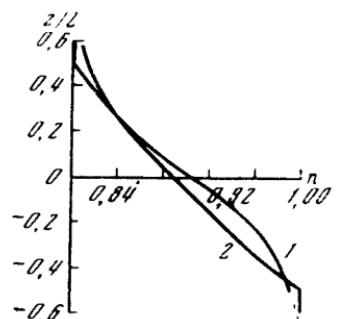
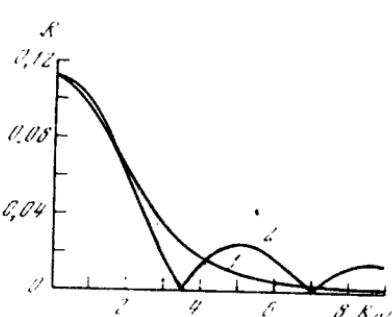


Рис. 20.4. Сравнение коэффициентов отражения в функции толщины слоя для двух видов переходных слоев, показатель преломления для которых изображен на рис. 20.5:

Рис. 20.5. Сравнение зависимости $n(z)$ для двух видов слоев

В случае же ограниченного по толщине переходного слоя (кривая 2 на рис. 20.5) коэффициент отражения обращается в нуль в точках, удовлетворяющих уравнению $m \ln n_1 = v\pi$, где v — целое число [см. (20.46)], а приблизительно посередине между этими точками имеет максимальные значения. Это объясняется, очевидно, интерференцией волн, отраженных от плоскостей $z = \pm L/2$ разрыва производной dn/dz .

При весьма большой толщине слоя формулы (20.44) и (20.46) дают соответственно

$$\pi S/2 \gg 1, \quad \rho \approx e^{-\pi S n_\infty}, \quad (20.47)$$

$$k_0 L A \gg 1, \quad \rho \approx (1/2m) \sin(m \ln n_1). \quad (20.48)$$

Таким образом, в одном случае коэффициент отражения падает с увеличением толщины слоя по экспоненте, в другом случае — в среднем обратно пропорционально толщине слоя.

Мы не занимались анализом коэффициента прозрачности W слоя. Однако в этом нет необходимости, поскольку в большинстве случаев представляет интерес лишь величина $|W|^2$, которая после определения ρ может быть получена из закона сохранения энергии.

20.6. Коэффициент отражения от симметричного слоя. Проанализируем теперь формулу для коэффициента отражения (20.36) для случая симметричного слоя, задаваемого формулой (20.18), в которой $N = 0$, $M \neq 0$. Характер зависимости $n(z)$ в этом случае виден из рис. 20.1.

Полагая в формулах (20.24) $N = 0$, подставляя получающиеся значения α , β и γ в выражение (20.36) и используя формулу (20.40), получаем для коэффициента отражения

$$V = \frac{\Gamma(iS \cos \theta_0)}{\pi \Gamma(-iS \cos \theta_0)} \Gamma\left(\frac{1}{2} - d_2 - id_1 - iS \cos \theta_0\right) \times \\ \times \Gamma\left(\frac{1}{2} + d_2 + id_1 - iS \cos \theta_0\right) \cos \pi(d_2 + id_1). \quad (20.49)$$

Рассмотрим два случая:

а) $4S^2 M > 1$.

В этом случае, согласно (20.23), имеем $d_2 = 0,2d_1 = \sqrt{4S^2 M - 1}$. Используя еще раз соотношение (20.40), получаем для квадрата модуля коэффициента отражения

$$\rho^2 = VV^* = \frac{\operatorname{ch}^2 \pi d_1}{\operatorname{ch} \pi(\alpha_1 - S \cos \theta_0) \operatorname{ch} \pi(\beta_1 - S \cos \theta_0)}. \quad (20.50)$$

б) $4S^2 M < 1$.

В этом случае $d_1 = 0,2d_2 = \sqrt{1 - 4S^2 M}$ и из (20.49) таким же образом, как и выше, получаем

$$\rho^2 = VV^* = \frac{\cos^2 \pi d_2}{\cos \pi(d_2 + iS \cos \theta_0) \cos \pi(d_2 - iS \cos \theta_0)} \quad (20.51)$$

или

$$\rho^2 = \frac{\cos^2 \pi d_2}{\cos^2 \pi d_2 \operatorname{ch}^2(\pi S \cos \theta_0) + \sin^2 \pi d_2 \operatorname{sh}^2(\pi S \cos \theta_0)}.$$

В этих формулах M связан с показателем преломления n_1 в центре слоя формулой $M = 1 - n_1^2$. По обе стороны слоя, на достаточном удалении от него, показатель преломления предполагается равным единице, в середине слоя отличие показателя преломления от единицы является максимальным.

При $M \rightarrow 0$ слой исчезает. При этом мы имеем $d_2 \rightarrow 1/2$, и согласно (20.51), $\rho \rightarrow 0$, что и нужно было ожидать.

Заметим, что если в слое скорость распространения волны меньше, чем в среде по обе стороны его, т. е. $n_1 > 1$, то M будет отрицательной величиной

и при любой толщине слоя S коэффициент отражения будет даваться формулой (20.51). При этом, если толщину слоя стремить к ∞ , то, как нетрудно видеть, эта формула дает $\rho \rightarrow 0$, т. е. отражение исчезает. Этот результат вполне естествен, поскольку при бесконечном растяжении слоя градиент показателя преломления стремится к нулю. В этом случае становится примененным приближение геометрической оптики (см. § 23).

Несколько сложнее обстоит дело с предельным переходом $S \rightarrow \infty$ в случае, когда $n_1 < 1$, т. е., когда скорость в слое больше, чем в прилегающих к нему однородных средах. Здесь $M > 0$ и при достаточно большой толщине слоя S мы должны пользоваться формулой (20.50). При этом в свою очередь нужно различать два случая:

$$1) d_1 > S \cos \theta_0, \quad 2) d_1 < S \cos \theta_0. \quad (20.52)$$

В первом случае, при $S \rightarrow \infty$, имеем

$$\operatorname{ch} \pi d_1 \rightarrow \frac{1}{2} e^{\pi d_1}, \quad \operatorname{ch} \pi (d_1 + S \cos \theta_0) \rightarrow \frac{1}{2} e^{\pi (d_1 + S \cos \theta_0)},$$

$$\operatorname{ch} \pi (d_1 - S \cos \theta_0) \rightarrow \frac{1}{2} e^{\pi (d_1 - S \cos \theta_0)}. \quad (20.53)$$

В результате из (20.50) получаем $\rho \rightarrow 1$, т. е. будем иметь полное отражение.

Во втором случае две первые формулы (20.53) остаются без изменения, а третья записывается

$$\operatorname{ch} \pi (d_1 - S \cos \theta_0) \rightarrow \frac{1}{2} e^{\pi (S \cos \theta_0 - d_1)}.$$

В результате при $S \rightarrow \infty$ формула (20.50) даст $\rho \rightarrow 0$.

Если учесть, что

$$d_1 = \frac{1}{2} \sqrt{4S^2 M - 1} \rightarrow S M^{1/2} = S \sqrt{1 - n_1^2},$$

то условия (20.52) запишутся

$$1) \sin \theta_0 > n_1, \quad 2) \sin \theta_0 < n_1.$$

Нетрудно видеть, что первое из этих условий означает, что луч, соответствующий плоской падающей волне, вследствие рефракции заворачивает в слое и возвращается обратно в ту же среду, из которой падает волна. Второе условие соответствует случаю, когда луч хотя и искривляется в слое, но все же выходит на другую сторону слоя.

В первом случае проникновение волны через слой осуществляется только благодаря просачиванию волны через слой, аналогичному тоннельному эффекту при проникновении частицы через потенциальный барьер в квантовой механике. При увеличении толщины слоя такое просачивание ослабляется, и мы получаем полное отражение.

На этом мы закончим общий анализ (20.50) и (20.51). Эти выражения достаточно просты, чтобы читатель смог быстро в любом случае получить численное значение коэффициента отражения.

На рис. 20.6 и 20.7 значение $-20 \lg \rho$ изображено графически как функция угла падения θ_0 для различных значений толщины слоя l , для $n_1 = 0,9$ и $n_1 = 1,1$ *.

Формулы (20.50) и (20.51) часто используются в случае отражения радиоволн от ионосферных слоев. При нормальном падении электромагнитной волны на ионосферный слой для квадрата показателя преломления в середине слоя n_1^2 имеем [28]

$$n_1^2 = 1 - f_k^2/f^2, \quad (20.54)$$

* При заданных n_1 и θ_0 имеется значение отношения l/λ , при котором коэффициент отражения будет максимальным, что можно показать также, пользуясь формулой (20.51).

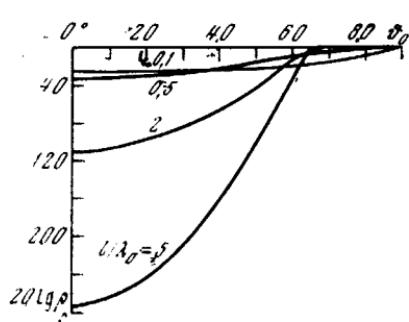


Рис. 20.6. Коэффициент отражения волны от симметричного слоя в зависимости от угла падения для различных толщин слоя $n_1 = 0,9$

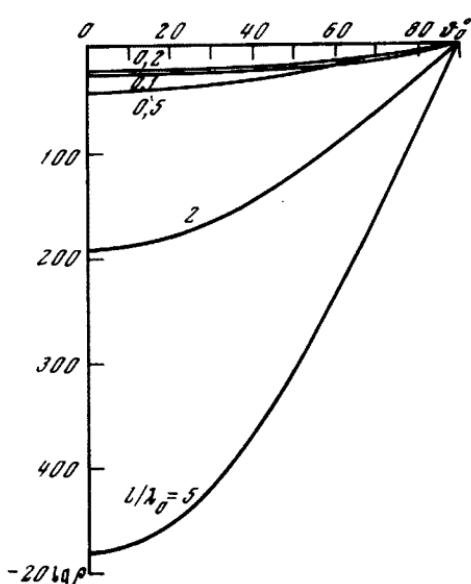


Рис. 20.7. Коэффициент отражения волны от симметричного слоя в зависимости от угла падения для различных толщин слоя $n_1 = 1,1$

где f — частота волны, f_k — так называемая критическая частота слоя, выражающаяся через максимальную концентрацию электронов в слое N_m формулой

$$f_k^2 = N_m e^2 / \pi m, \quad (20.55)$$

m и e — масса и заряд электрона. При этом мы пренебрегаем поглощением радиоволны в ионосфере.

Таким образом, мы имеем

$$M = 1 - n_1^2 = f_k^2 / f^2. \quad (20.56)$$

На рис. 20.8 дана зависимость коэффициента отражения при нормальном падении от величины f_k^2/f^2 при различных значениях S .

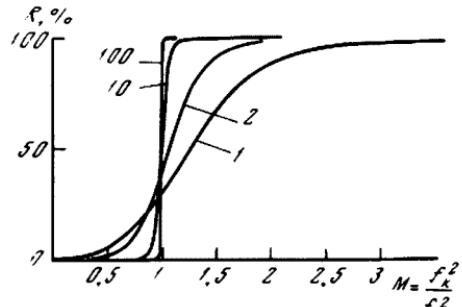


Рис. 20.8. Зависимость коэффициента отражения $R = \rho^2$ по энергии от частоты для простейшего ионосферного слоя для различных толщин слоя

Как мы видим, при $S \geq 100$, что согласно соотношению (20.20), соответствует толщине слоя $l \geq 28\lambda_0$, волна практически полностью отражается от слоя, если ее частота меньше критической частоты, и практически полностью проходит сквозь слой, если ее частота больше критической. При уменьшении толщины слоя ширина частотного диапазона, соответствующего переходной зоне от полного отражения к полному прохождению, увеличивается.

Исследование отражения волн от слоев, заданных законами, получающимися в результате обобщения закона Эпштейна см. в работах К. Рауэра [224] и Р. Бурмана и Р. Голда [126].

§ 21. Отражение волны от полупространства с линейным законом для квадрата показателя преломления

21.1. Общие соотношения. Функции Эйри. Рассмотрим случай, когда однородное полупространство $z < 0$ граничит с неоднородным полупространством $z > 0$. Примем

$$z \leq 0, \quad n = 1; \quad z \geq 0, \quad n^2 = 1 \pm az, \quad a > 0. \quad (21.1)$$

Пусть из однородного полупространства $z < 0$ на границу $z = 0$ падает плоская волна. Полное поле, представляющее собой сумму падающей и отраженной волн в этом полупространстве, записывается [см. (20.3) и (20.4)]

$$\psi(x, z) = Z(z) e^{izx}, \quad (21.2)$$

где

$$\xi = k_0 \sin \vartheta_0, \quad Z(z) = [e^{ik_0 z} \cos \vartheta_0 + V(\vartheta_0) e^{-ik_0 z} \cos \vartheta_0]. \quad (21.3)$$

Здесь ϑ_0 — угол падения, $V(\vartheta_0)$ — коэффициент отражения. Определение последнего и является нашей задачей. Амплитуду падающей волны мы приняли равной единице.

Выражение для поля в неоднородной среде $z > 0$ будем также искать в виде (21.2), причем функция $Z(z)$ будет удовлетворять уравнению (20.8), где $k(z) = k_0 n(z)$.

Введем вместо z переменную t

$$t = t_0 - z/H, \quad t_0 = H^2(\xi^2 - k_0^2), \quad H = (a/k_0)^{-1/2}. \quad (21.4)$$

Уравнение (20.8) при этом записывается

$$Z''(t) = tZ(t). \quad (21.5)$$

Его решениями являются функции Эйри, исследованные и протабулированы В. А. Фоком [97].

Несколько функции Эйри нашли широкое применение в теории дифракции и распространения волн и не раз используются в этой книге. Дадим краткую их основных свойств, пользуясь [97].

Два линейно-независимых решения $u(t)$ и $v(t)$ уравнения (21.5) могут быть представлены как вещественная и мнимая части интеграла

$$Z(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\Gamma} \exp \left(ts - \frac{1}{3} s^3 \right) ds, \quad (21.6)$$

где контур Γ в плоскости s идет по лучу $\arg s = -2\pi/3$ из бесконечности в нулю и по вещественной оси от нуля до бесконечности.

Интеграл (21.6) сходится при всех комплексных значениях t и представляет собой целую трансцендентную функцию t . Легко проверить, что функция $Z(t)$, определяемая этим интегралом, удовлетворяет уравнению (21.5). При $t = 0$ имеем

$$Z(0) = \frac{2 \sqrt{\pi}}{3^{1/2} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} \exp(i\pi/6) = 1,0899290710 + i0,6292708425,$$

$$Z'(0) = \frac{2 \sqrt{\pi}}{3^{4/2} \Gamma\left(\frac{4}{3}\right)} \exp(-i\pi/6) = 0,7945704238 - i0,4587454481.$$

$Z(t)$ как целая трансцендентная функция разлагается в степенной ряд, сходящийся при любых t . Этот ряд имеет вид

$$Z(t) = Z(0) \left[1 + \frac{t^3}{2 \cdot 3} + \frac{t^6}{(2 \cdot 3)(3 \cdot 6)} + \frac{t^9}{(2 \cdot 5 \cdot 8)(3 \cdot 6 \cdot 9)} + \dots \right] + \\ + tZ'(0) \left[1 + \frac{t^3}{3 \cdot 4} + \frac{t^6}{(3 \cdot 6)(4 \cdot 7)} + \frac{t^9}{(3 \cdot 6 \cdot 9)(4 \cdot 7 \cdot 10)} + \dots \right]. \quad (21.7)$$

В случае вещественных t положим

$$Z(t) = u(t) + iv(t), \quad (21.7')$$

где $u(t)$ и $v(t)$ — вещественные функции, являющиеся двумя линейно-независимыми решениями уравнения (21.5). Их разложения в ряды (которые мы не выписываем), сразу получаются из (21.7). Имеем для вронского

$$u'(t)v(t) - u(t)v'(t) = 1. \quad (21.8)$$

В частности, $v(t)$ выражается интегралом Эйри

$$v(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \cos\left(st + \frac{1}{3}s^3\right) ds. \quad (21.9)$$

$u(t)$ и $v(t)$, являющиеся целыми трансцендентными функциями t , определены также и для комплексных t . При этом имеют место соотношения

$$\begin{aligned} Z(t) &= u(t) + iv(t), & Z(te^{i\pi/3}) &= u(-t) + iv(-t), \\ Z(te^{i\pi/3}) &= 2e^{i\pi/6}v(-t), & Z(te^{4i\pi/3}) &= 2e^{i\pi/6}v(t), \\ Z(te^{2i\pi/3}) &= e^{i\pi/3}[u(t) - iv(t)], & Z(te^{5i\pi/3}) &= e^{i\pi/3}[u(-t) - iv(-t)]. \end{aligned} \quad (21.10)$$

Эти соотношения дают, в частности, выражения $Z(t)$ на шести лучах $\arg t = n\pi/3$ ($n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$) через вещественные функции $u(t)$ и $v(t)$.

Выпишем асимптотические выражения для функций Эйри и их производных. Для этого введем систему коэффициентов:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{5}{72}, & a_2 &= \frac{(5 \cdot 11) \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot (72)^2}, & a_3 &= \frac{(5 \cdot 11 \cdot 17) \cdot (7 \cdot 13)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (72)^3}, \dots; \\ a_n &= \frac{5 \cdot 11 \cdots (6n-1) \cdot 7 \cdot 13 \cdots (6n-5)}{1 \cdot 2 \cdots n (72)^n}, \end{aligned} \quad (21.11)$$

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{7}{72}, & b_2 &= \frac{(7 \cdot 13) \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot (72)^2}, & b_3 &= \frac{(7 \cdot 13 \cdot 19) (5 \cdot 11)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (72)^3}, \dots; \\ b_n &= \frac{7 \cdot 13 \cdots (6n+1) \cdot 5 \cdot 11 \cdots (6n-7)}{1 \cdot 2 \cdots n (72)^n}. \end{aligned}$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned} t > 0, \quad w &\equiv \frac{2}{3} t^{3/2}, \\ u(t) &= t^{-1/4} e^{iw} \left(1 + \frac{a_1}{w} + \frac{a_2}{w^2} + \dots \right), \\ u'(t) &= t^{1/4} e^{iw} \left(1 - \frac{b_1}{w} - \frac{b_2}{w^2} - \dots \right), \\ v(t) &= \frac{1}{2} t^{-1/4} e^{-iw} \left(1 - \frac{a_1}{w} + \frac{a_2}{w^2} - \frac{a_3}{w^3} + \dots \right), \\ v'(t) &= -\frac{1}{2} t^{1/4} e^{-iw} \left(1 + \frac{b_1}{w} - \frac{b_2}{w^2} + \frac{b_3}{w^3} - \dots \right); \end{aligned} \quad (21.12)$$

$$t < 0, \quad w \equiv \frac{2}{3} (-t)^{3/2}$$

$$\begin{aligned} u(t) &= (-t)^{-1/4} \left[\cos\left(w + \frac{\pi}{4}\right) \left(1 - \frac{a_2}{w^2} + \frac{a_3}{w^4} - \frac{a_6}{w^6} + \dots \right) + \right. \\ &\quad \left. + \sin\left(w + \frac{\pi}{4}\right) \left(\frac{a_1}{w} - \frac{a_3}{w^3} + \frac{a_5}{w^5} - \frac{a_7}{w^7} + \dots \right) \right], \end{aligned} \quad (21.13)$$

$$\begin{aligned} u'(t) &= (-t)^{1/4} \left[\sin\left(w + \frac{\pi}{4}\right) \left(1 + \frac{b_2}{w^2} - \frac{b_4}{w^4} + \frac{b_6}{w^6} - \dots \right) + \right. \\ &\quad \left. + \cos\left(w + \frac{\pi}{4}\right) \left(\frac{b_1}{w} - \frac{b_3}{w^3} + \frac{b_5}{w^5} - \frac{b_7}{w^7} + \dots \right) \right], \end{aligned}$$

$$v(t) = (-t)^{-1/4} \left[\sin\left(w + \frac{\pi}{4}\right) \left(1 - \frac{a_2}{w^2} + \frac{a_4}{w^4} - \frac{a_6}{w^6} + \dots\right) - \cos\left(w + \frac{\pi}{4}\right) \left(\frac{a_1}{w} - \frac{a_3}{w^3} + \frac{a_5}{w^5} - \frac{a_7}{w^7} + \dots\right) \right],$$

$$v'(t) = (-t)^{1/4} \left[-\cos\left(w + \frac{\pi}{4}\right) \left(1 + \frac{b_2}{w^2} - \frac{b_4}{w^4} + \frac{b_6}{w^6} - \dots\right) + \sin\left(w + \frac{\pi}{4}\right) \left(\frac{b_1}{w} - \frac{b_3}{w^3} + \frac{b_5}{w^5} - \frac{b_7}{w^7} + \dots\right) \right].$$

Функции Эйри выражаются через цилиндрические функции порядка $1/3$, следующим образом (для цилиндрических функций мы пользуемся обозначениями Г. Н. Ватсона [21]):

$$t > 0, \quad w \equiv \frac{2}{3} t^{3/4},$$

$$u(t) = \sqrt{\frac{\pi t}{3}} [I_{-1/3}(w) + I_{1/3}(w)], \quad v(t) = \frac{1}{3} \sqrt{\pi t} [I_{-1/3}(w) - I_{1/3}(w)]; \quad (21.14)$$

$$t < 0, \quad w \equiv \frac{2}{3} (-t)^{3/4},$$

$$u(t) = \sqrt{-\frac{\pi t}{3}} [J_{-1/3}(w) - J_{1/3}(w)], \quad v(t) = \frac{1}{3} \sqrt{-\pi t} [J_{-1/3}(w) + J_{1/3}(w)],$$

$$Z(t) = \sqrt{\frac{\pi t}{3}} e^{2\pi i/3} H_{1/3}^{(1)}(w). \quad (21.15)$$

В приложениях чаще встречается функция $v(t)$. Дадим таблицу значений $v(t)$ при $|t| \leq 6$ (табл. 1). На рис. 21.1 дан график функций $v(t)/v(0)$, причем $v(0) = 0,6293$. Эта функция осциллирует при $t < 0$ и быстро, монотонно спадает до нуля при $t > 0$.

Полезно также выписать значения нулей $v(t)$ и $v'(t)$, которые все лежат при $t < 0$. Обозначим $v(-y_l) = 0$, $v'(-x_l) = 0$, $l = 1, 2, \dots$. Значения y_l и x_l задаются таблицей:

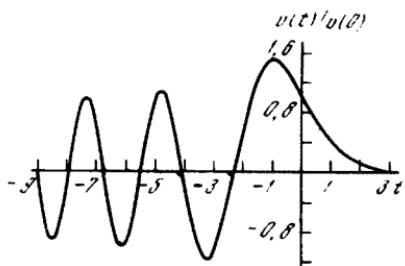


Рис. 21.1. График функции $v(t)/v(0)$

| l | y_l | x_l |
|-----|---------|---------|
| 1 | 2,33811 | 1,01879 |
| 2 | 4,08795 | 3,24820 |
| 3 | 5,52056 | 4,82010 |
| 4 | 6,78671 | 6,16331 |
| 5 | 7,94417 | 7,37218 |

Обозначим

$$y_l = \left(\frac{3}{2} w_l\right)^{1/3}, \quad x_l = \left(\frac{3}{2} w_l\right)^{1/4}, \quad (21.16)$$

w_l и w'_l приближенно (хотя и весьма точно даже при небольших l) даются следующими выражениями:

$$w_l = \left(l - \frac{1}{4}\right)\pi + \frac{0,0884194}{4l-1} - \frac{0,08328}{(4l-1)^3} + \frac{0,4065}{(4l-1)^5} - \dots,$$

$$w'_l = \left(l - \frac{3}{4}\right)\pi - \frac{0,1237872}{4l-3} + \frac{0,07758}{(4l-3)^3} - \frac{0,389}{(4l-3)^5} + \dots \quad (21.17)$$

Как легко видеть из второго равенства (21.10), нули функции $Z(t)$ (обозначим их t_l , $l = 1, 2, \dots$) лежат на луче $\arg t = \pi/3$ и выражаются через y_l формулой

$$t_l = y_l e^{i\pi/3}. \quad (21.17')$$

Таблица 1. Функции Эйри

| t | $v(t)$ | t | $v(t)$ | t | $v(t)$ | t | $v(t)$ | t | $1000 v(t)$ |
|------|---------|------|---------|------|---------|-----|----------|-----|-------------|
| -6,0 | -0,5834 | -3,5 | -0,6656 | -1,0 | 0,9493 | 1,5 | 0,12717 | 4,0 | 1,6866 |
| -5,9 | -0,5054 | -3,4 | -0,7146 | -0,9 | 0,9429 | 1,6 | 0,11084 | 4,1 | 1,3712 |
| -5,8 | -0,3977 | -3,3 | -0,7394 | -0,8 | 0,9280 | 1,7 | 0,09629 | 4,2 | 1,1122 |
| -5,7 | -0,2670 | -3,2 | -0,7399 | -0,7 | 0,9057 | 1,8 | 0,08337 | 4,3 | 0,9000 |
| -5,6 | -0,1211 | -3,1 | -0,7167 | -0,6 | 0,8771 | 1,9 | 0,07195 | 4,4 | 0,7267 |
| -5,5 | 0,0315 | -3,0 | -0,6714 | -0,5 | 0,8432 | 2,0 | 0,06190 | 4,5 | 0,5854 |
| -5,4 | 0,1824 | -2,9 | -0,6060 | -0,4 | 0,8051 | 2,1 | 0,05309 | 4,6 | 0,4705 |
| -5,3 | 0,3236 | -2,8 | -0,5230 | -0,3 | 0,7638 | 2,2 | 0,04539 | 4,7 | 0,3773 |
| -5,2 | 0,4477 | -2,7 | -0,4255 | -0,2 | 0,7201 | 2,3 | 0,03870 | 4,8 | 0,3019 |
| -5,1 | 0,5486 | -2,6 | -0,3164 | -0,1 | 0,6750 | 2,4 | 0,03289 | 4,9 | 0,2410 |
| -5,0 | 0,6217 | -2,5 | -0,1991 | 0 | 0,6293 | 2,5 | 0,02787 | 5,0 | 0,19204 |
| -4,9 | 0,6638 | -2,4 | -0,0768 | 0,1 | 0,5835 | 2,6 | 0,02355 | 5,1 | 0,15267 |
| -4,8 | 0,6736 | -2,3 | 0,0473 | 0,2 | 0,5383 | 2,7 | 0,019849 | 5,2 | 0,12111 |
| -4,7 | 0,6511 | -2,2 | 0,1704 | 0,3 | 0,4942 | 2,8 | 0,016680 | 5,3 | 0,09587 |
| -4,6 | 0,5982 | -2,1 | 0,2898 | 0,4 | 0,4515 | 2,9 | 0,013978 | 5,4 | 0,07574 |
| -4,5 | 0,5178 | -2,0 | 0,4031 | 0,5 | 0,4107 | 3,0 | 0,011683 | 5,5 | 0,05971 |
| -4,4 | 0,4142 | -1,9 | 0,5083 | 0,6 | 0,3719 | 3,1 | 0,009738 | 5,6 | 0,04697 |
| -4,3 | 0,2925 | -1,8 | 0,6040 | 0,7 | 0,3353 | 3,2 | 0,008096 | 5,7 | 0,03688 |
| -4,2 | 0,1581 | -1,7 | 0,6888 | 0,8 | 0,3010 | 3,3 | 0,006713 | 5,8 | 0,02889 |
| -4,1 | -0,0172 | -1,6 | 0,7619 | 0,9 | 0,2692 | 3,4 | 0,005552 | 5,9 | 0,02259 |
| -4,0 | -0,1245 | -1,5 | 0,8229 | 1,0 | 0,2398 | 3,5 | 0,004580 | 6,0 | 0,017632 |
| -3,9 | -0,2613 | -1,4 | 0,8715 | 1,1 | 0,2128 | 3,6 | 0,003769 | | |
| -3,8 | -0,3879 | -1,3 | 0,9080 | 1,2 | 0,18810 | 3,7 | 0,003094 | | |
| -3,7 | -0,4999 | -1,2 | 0,9327 | 1,3 | 0,16568 | 3,8 | 0,002534 | | |
| -3,6 | -0,5934 | -1,1 | 0,9462 | 1,4 | 0,14541 | 3,9 | 0,002070 | | |

Аналогично, нули функции $Z'(t)$ лежат на том же луче и выражаются через x_1 формулой

$$t_l = x_1 e^{i\pi/3}. \quad (21.17')$$

21.2. Показатель преломления убывает при удалении от границы. Этот случай соответствует нижним знакам в (21.1) и в (21.4). Естественно потребовать, чтобы при $z \rightarrow \infty$ поле не возрастало неограниченно. Тогда, как видно из асимптотических формул (21.12), мы должны взять решение

$$z > 0, \quad Z(z) = Dv(t). \quad (21.18)$$

Нам остается удовлетворить граничным условиям при $z = 0$ (непрерывность Z и Z'):

$$z = 0, \quad [Z] = 0, \quad [Z'] = 0. \quad (21.19)$$

Подставляя в них (21.3) и (21.18) и учитывая при дифференцировании, что $[dv(t)/dz]_{z=0} = v'(t_0)/H$, получаем два уравнения для коэффициентов отражения и прозрачности:

$$1 + V = Dv(t_0), \quad ik_0 H \cos \vartheta_0 (1 - V) = Dv'(t_0).$$

Учитывая, что согласно (21.3) и (21.4), имеем

$$-t_0 = k_0^2 H^2 \cos^2 \vartheta_0, \quad (21.20)$$

получаем

$$V = -\frac{v'(t_0) - i \sqrt{-t_0} v(t_0)}{v'(t_0) + i \sqrt{-t_0} v(t_0)}, \quad D = \frac{2i \sqrt{-t_0}}{v'(t_0) + i \sqrt{-t_0} v(t_0)}. \quad (21.21)$$

V можно записать также в виде

$$V = e^{i\varphi}, \quad \varphi = -\pi - 2 \operatorname{arctg} \left[\sqrt{-t_0} \frac{v(t_0)}{v'(t_0)} \right]. \quad (21.22)$$

Отсюда видно, что мы имеем полное отражение от полупространства, а фаза является фазой коэффициента отражения.

Выражение (21.22) было обсуждено в § 14.7. Там было показано, что при $-t_0 \gg 1$ фаза φ может быть получена и в приближении геометрической оптики, если только учесть добавочно потерю фазы волны $\pi/2$ в «точке заворота» $z = z_m$, соответствующей

$$t = 0, \quad az_m = \cos^2 \theta_0. \quad (21.23)$$

В точке заворота луч, соответствующий нашей волне, направлен горизонтально (параллельно границе $z = 0$).

Характер поля до плоскости заворота и за неё совершенно различен. В случае $0 < z < z_m$ зависимость поля от z имеет осциллирующий характер (область $t < 0$ на рис. 21.1). Амплитуда осцилляций возрастает при приближении к плоскости заворота. При $z > z_m$ поле монотонно убывает.

21.3. Показатель преломления возрастает при удалении от границы. Этот случай соответствует нижним знакам в (21.1) и (21.4). Поле в нижнем полупространстве $z > 0$ будет даваться линейной комбинацией функций $u(t)$ и $v(t)$. Для выбора правильной комбинации воспользуемся *принципом предельного поглощения*, для чего заменим $k_0 \rightarrow k_0(1 + i\eta)$ и потребуем, чтобы при $z \rightarrow \infty$ поле не возрастило. В конечных результатах полагаем $\eta = 0$.

При $z \rightarrow \infty$ из (21.4) и (21.13) имеем $t \approx -z/H \rightarrow -\infty$, $w \rightarrow \rightarrow \frac{2}{3} \left(\frac{z}{H} \right)^{1/2} = \frac{2}{3} (az)^{1/2} k_0 z (1 + i\eta)$.

Из асимптотических представлений функций Эйри (21.13) можно видеть, что невозрастающей при $z \rightarrow \infty$ будет комбинация $u(t) - iv(t)$. Любые другие линейные комбинации будут содержать возрастающую при $z \rightarrow \infty$ экспоненту $\exp \left(\frac{2}{3} a^{1/2} z^{3/2} k_0 \eta \right)$. Итак имеем

$$z > 0, \quad Z(z) = D [u(t) - iv(t)]. \quad (21.24)$$

Снова, пользуясь выражением (21.3) для поля при $z < 0$ и граничными условиями (21.18) (теперь $\partial/\partial t = -H\partial/\partial z$), получаем для коэффициента отражения:

$$V = \frac{\sqrt{-t_0}(u + iv) - i(u' + iv')}{\sqrt{-t_0}(u + iv) + i(u' + iv')}, \quad (21.25)$$

где u , v , u' , v' берутся при аргументе $t = t_0$.

Полезно рассмотреть два крайних случая:

$$a) w_0 = \frac{2}{3} (-t_0)^{1/2} = \frac{2}{3} (k_0 H \cos \theta_0)^{3/2} = \frac{2}{3} \frac{k_0}{a} \cos^3 \theta_0 \gg 1. \quad (21.26)$$

Этот случай мы имеем при медленно меняющемся показателе преломления (a/k_0 мало) и углах θ_0 , не очень близких к $\pi/2$.

Воспользовавшись асимптотическими выражениями (21.13) для функций Эйри и их производных и пренебрегая членами $0(1/w^2)$, получаем

$$V = -i/12w_0 = -ia/8k_0 \cos^3 \theta_0. \quad (21.27)$$

Таким образом, при отражении имеет место потеря фазы волны $\pi/2$. Модуль коэффициента отражения можно записать в виде

$$|V| = \frac{\lambda_0}{8\pi \cos^3 \theta_0} \left(\frac{dn}{dz} \right)_{z=0}, \quad (21.28)$$

где λ_0 — длина волны в однородном полупространстве $z < 0$.

Заметим, что согласно § 2.1 коэффициент отражения звуковой волны от границы раздела двух однородных сред с одинаковой плотностью и с близкими значениями скоростей звука равен

$$V = (c_1 - c_0)/(c_1 + c_0) \approx -\Delta c/2c_0, \quad (21.29)$$

где $\Delta c = c_0 - c_1$ — перепад скорости звука. При нормальном падении (21.28) будет совпадать с (21.29), если положить

$$-\frac{\Delta c}{c_0} = \frac{\lambda_0}{4\pi} \left(\frac{dn}{dz} \right)_{z=0}$$

или, поскольку $n = c_0/c$, $c \approx c_0$:

$$\Delta c = -\frac{\lambda_0}{4\pi} \frac{dc}{dz}. \quad (21.30)$$

Таким образом, по модулю коэффициент отражения оказывается в этом случае таким же, как от границы раздела двух однородных сред с перепадом скоростей на границе, даваемым формулой (21.30). Этот перепад равен перепаду скорости в неоднородной среде на расстоянии $\Delta z = \lambda_0/4\pi$.

б) $w_0 = \frac{2}{3} \frac{k_0}{a} \cos^3 \theta_0 \ll 1$. Этот случай реализуется при больших градиентах скорости звука ($a/k_0 \gg 1$) или при углах падения, близких к $\pi/2$. Здесь целесообразно воспользоваться разложениями функций Эйри по степеням аргумента. Мы имеем в (21.25), согласно (21.7):

$$\begin{aligned} u + iv &\equiv Z(t) \approx Z(0), \quad u' + iv' \approx Z'(0) \\ V &= -[1 + 2i \sqrt{-t_0} Z(0)/Z'(0)] + O(t_0). \end{aligned} \quad (21.31)$$

Учитывая значения $Z(0)$, $Z'(0)$ и $-t_0$, получаем

$$V = -1 + 2 \left(\frac{k_0}{3a} \right)^{1/3} \cos \theta_0 \exp \left(-i \frac{\pi}{6} \right) \Gamma \left(\frac{1}{3} \right) / \Gamma \left(\frac{2}{3} \right) + O(k_0^{1/3} a^{-1/3} \cos^2 \theta_0). \quad (21.32)$$

при $\theta_0 \rightarrow \pi/2$ имеем $\cos \theta_0 \rightarrow 0$, $V \rightarrow -1$.

§ 22. Обзор существующих решений

В двух предыдущих параграфах мы рассмотрели поле в непрерывно-слоистой среде в двух случаях, когда уравнения допускают точные решения. В этом параграфе мы перечислим все известные нам случаи зависимости $k(z)$, когда возможны точные решения уравнения (20.8) в замкнутом виде

$$1. \quad \frac{k^2(z)}{k_0^2} = 1 - N \frac{e^{mz}}{1 + e^{mz}} - 4M \frac{e^{mz}}{(1 + e^{mz})^2} \quad (22.1)$$

— слой Эпштейна. Подробнее см. § 20, в конце которого указаны работы, содержащие обобщения формулы (22.1)

$$2. \quad k^2(z) = k_0^2 (1 \pm az), \quad (\text{см. § 21}) \quad (22.2)$$

$$3. \quad k^2(z) = k_0^2 (1 + az)^m. \quad (22.3)$$

Этот случай для нормального падения волны был рассмотрен Валлотом [259] при произвольных a и m . Для целых m и произвольных углов падения задача об отражении плоской волны была рассмотрена К. Фёрстерлингом [152].

Там же Фёрстерлингом было детально исследовано поле вблизи точки заворота $z = 0$ для случая, когда коэффициент при Z в (20.8) представляется рядом

$$k^2(z) - \xi^2 = a_m z^m + a_{m+1} z^{m+1} + \dots \quad (22.4)$$

Аналогичные задачи рассматривались в работе Фёрстерлинга и Вюстера [153].

$$4. \quad k(z) = k_0 a / (z + d). \quad (22.5)$$

Этот случай впервые был рассмотрен Рэлеем ([84], § 148, в) для случая нормального падения волны на слой. При замене $z + d = \xi$ решение уравнения (20.8) при $\xi = 0$ имеет вид

$$Z = A \xi^{\frac{1}{2} \pm im}, \quad m^2 = (k_0 a)^2 - \frac{1}{4}.$$

Выражение для коэффициента отражения при нормальном падении волны на границу однородной среды и среды, где $k(z)$ выражается формулой (22.5), имеет вид

$$V = i/2 (k_0 a + m) \quad (22.6)$$

Рэлеем был найден также коэффициент отражения от слоя, в котором показатель преломления изменяется по закону (22.5) и вне его остается постоянным. Для $|V|^2$ — коэффициента отражения по интенсивности получается при вещественном m :

$$|V|^2 = \sin^2(m \ln \mu) [4m^2 + \sin^2(m \ln \mu)]^{-1}, \quad (22.7)$$

при минимуме m ($m = im'$):

$$|V|^2 = \operatorname{sh}^2(m' \ln \mu) [\operatorname{sh}^2(m' \ln \mu) + 4m'^2]^{-1}. \quad (22.8)$$

Здесь $\mu = n_2/n_1$ — отношение показателей преломления по обе стороны слоя.

$$5. \quad k^2(z) = k_0^2(a^2 - b^2/z^2).$$

Уравнение (20.8) в этом случае имеет в качестве двух линейно-независимых решений функции Ханкеля:

$$z^{1/2} H_p^{(1)}(\beta z) \text{ и } z^{1/2} H_p^{(2)}(\beta z).$$

где

$$p = (k_0^2 b^2 + \frac{1}{4})^{1/2}, \quad \beta^2 = k_0^2 a^2 - \xi^2.$$

Задача об отражении плоской волны от таких сред была рассмотрена С. М. Рытовым и Ф. С. Юдкевичем [83].

При $a = 0$ мы получаем случай, когда скорость распространения волн линейно зависит от z : $c \sim c_0(z + d)$, т. е. рассмотренный выше случай Рэлея.

$$6. \quad k^2(z)/k_0^2 = 1 - \mathcal{P}(z).$$

$$\mathcal{P}(z) = c_2 z^2 + c_3 z^3 + c_4 z^4 + c_5 z^5 + c_6 z^6 + \dots \quad (22.9)$$

Решение уравнения (20.8) для этого случая было исследовано в работе [203].

Заменой

$$Z = \mathcal{P}^{-1/4} \psi, \quad \xi = \int_0^z \mathcal{P}^{1/4} dz, \quad \varepsilon = (1 - \xi^2)/k_0^2 \quad (22.10)$$

уравнение преобразуется к виду

$$d^2\psi/dz^2 + (k_0^2 + k_0^2 \varepsilon/\mathcal{P} - Q)\psi = 0, \quad (22.11)$$

где

$$Q = -\mathcal{P}^{-1/4} d^2(\mathcal{P}^{-1/4})/dz^2 = \mathcal{P}^{-1/4} d^2 \mathcal{P}^{1/4}/dz^2. \quad (22.12)$$

Представим ξ и $k_0^2 \varepsilon/\mathcal{P} - Q$ в виде разложения в ряд по возрастающим степеням z и учтем пять первых членов, что соответствует представлению $\mathcal{P}(z)$ в виде ряда по степеням z с учетом z^6 включительно. Тогда

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} + \left(\frac{3}{16\xi^2} + \frac{\lambda_1}{\xi} + \frac{\lambda_2}{\xi^{1/2}} + \lambda_0 \right) \psi = 0, \quad (22.13)$$

где

$$\lambda_0 = \left\{ k_0^2 + \frac{k_0^2 c}{2c_2} \left(-\frac{3c_4}{2c_2} + \frac{103c_3^2}{72c_2^2} + \frac{3}{2c_2} \right) \left(-\frac{5c_6}{3c_2} + \frac{5c_3c_5}{2c_2^2} + \frac{109c_4^2}{96c_2^2} - \frac{1723c_3^2c_4}{576c_2^3} + \frac{12061c_3^4}{13824c_2^4} \right) \right\}, \quad (22.14)$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2c_2^{1/2}} \left\{ k_0^2, -\frac{1}{8} \left(\frac{3c_4}{c_2} - \frac{7c_3^2}{4c_2^2} \right) \right\}, \quad (22.15)$$

$$\lambda_2 = \frac{\sqrt{2}}{c_2^{3/4}} \left\{ -\frac{k_0^2 c_3}{3c_2} + \frac{3}{10} \left(-\frac{2c_5}{c_2} + \frac{8c_3c_4}{3c_2^2} - \frac{28c_3^3}{27c_2^3} \right) \right\}. \quad (22.16)$$

Уравнение (22.13) решается в функциях параболического цилиндра [95]. В качестве двух линейно-независимых решений можно взять

$$\psi_1 = \zeta^{1/4} D_n(y), \quad \psi_2 = \zeta^{1/4} D_{-n-1}(iy), \quad (22.17)$$

где

$$n = -\frac{1}{2} + \frac{i}{\lambda_0^{1/2}} \left(\lambda_1 - \frac{\lambda_2^2}{4\lambda_0} \right), \quad (22.18)$$

$$y = 2\lambda_0^{1/2} \left(\frac{\zeta^{1/2}}{\zeta} + \frac{\lambda_2}{2\lambda_0} \right) e^{-i\pi/4}.$$

Таким образом, двумя линейно-независимыми решениями уравнения (20.8) будут

$$Z_1 = \mathcal{P}^{-1} \zeta^{1/4} D_n(y), \quad Z_2 = \mathcal{P}^{-1} \zeta^{1/4} D_{-n-1}(iy). \quad (22.19)$$

Заметим кстати, что если в уравнении (22.9) ограничиться членом z^2 и положить $\mathcal{P}(z) = c_2 z^2$, то при $c_2 > 0$ получим уравнение Шредингера для гармонического осциллятора.

Случай $c_2 < 0$ исследовался в работе [175] в связи с теорией приземного радиоволновода в атмосфере. Ему же посвящена работа Е. П. Мастерова [65].

$$7. \quad k(z) = k_0 e^{\alpha z}. \quad (22.20)$$

Этот случай соответствует экспоненциальному изменению скорости распространения волн в среде: $c = c_0 \exp(-\alpha z)$. Отражение плоской волны от границы однородной среды и среды, в которой волновое число изменяется по закону (22.20), было исследовано в работах Элиаса [142] и Геллера [170]. При замене $v = (k_0/a) \exp(\alpha z)$ уравнение (20.8) решается в цилиндрических функциях $H_q^{(1)}(v)$ и $H_q^{(2)}(v)$, где $q = (k_0 \sin \theta)/\alpha$. Для сравнительно высоких частот и небольших углов падения коэффициент отражения по энергии имеет вид

$$R = [16 (k_0/\alpha)^2 \cos^6 \theta + 1]^{-1}. \quad (22.21)$$

Это выражение может быть получено также и при помощи приближенного метода ВКБ (см. ниже). В работе произведено также сравнение результатов расчета при помощи приближенного и точного методов при разных частотах и углах падения. Отражение от симметричного слоя, составленного из двух экспоненциальных законов, рассмотрено в [165].

$$8. \quad k^2(z)/k_0^2 = p^2 + (1 - p^2 + q) e^{-az} - q e^{-2az}. \quad (22.22)$$

Это биэкспоненциальный закон, рассмотренный Е. П. Мастеровым [64]. Решения выражаются через функции Уиттекера $M_{k,\mu}$ и $W_{k,\mu}$ [95].

§ 23. Геометрическая оптика. Приближение ВКБ

Поскольку число случаев, когда точные решения существуют, невелико, большое значение приобрели приближенные методы и из них, пожалуй, наиболее важным является приближение геометрической оптики. В этом параграфе мы рассмотрим его с разных точек зрения, включая уточнения метода, необходимые для описания поля вблизи так называемых точек поворота. В этом расширенном виде метод геометрической оптики обычно называют приближением ВКБ (Вентцеля, Крамерса, Бриллюэна). Наше изложение приближения геометрической оптики и метода ВКБ не претендует на полноту и математическую строгость. Читателю, заинтересованному в более углубленном рассмотрении вопроса, рекомендуем обратиться к монографиям [102, 100, 63]. Некоторое расширение метода ВКБ имеется в работе Е. Бахара [107].

Как и всюду, в этой главе, считаем, что свойства среды зависят лишь от координаты z , а в областях, где среда однородна, поле вырождается в одну или две (встречные) плоские волны. Аналогичные вопросы в случае точечного излучателя волн рассматриваются в главе 6.

23.1. Приближение геометрической оптики и его физический смысл. Рассмотрим вначале простейший случай, когда волна распространяется в направлении оси z . Тогда, полагая в (20.7) и (20.8) $\xi = 0$, $k(z) = k_0 n(z)$, получаем уравнение

$$\psi''(z) + k_0^2 n^2(z) \psi(z) = 0, \quad (23.1)$$

где $k_0 = \omega/c_0$, c_0 — скорость при каком-либо произвольном $z = z_0$. Заметим, что $n(z_0) = 1$.

Будем предполагать, что частота волны ω , а значит и постоянная k_0 , достаточно велики (о критериях «достаточности» см. ниже). Но чем больше k_0 , а значит, чем меньше соответственная длина волны $\lambda_0 = 2\pi/k_0$, тем меньше на распространение волны влияют неоднородности среды, масштаб которых от ω не зависит. Если бы среда была вообще однородной ($n(z) = 1$), то решениями (23.1) были бы экспоненты $\exp(\pm ik_0 z)$. В случае неоднородной среды можно надеяться получить разумное решение в виде

$$\psi = \exp[ik_0 M(z)], \quad (23.2)$$

где $M(z)$ — функция, которую нужно искать в виде ряда по степеням малой величины $1/k_0$, начиная с нулевой ее степени. Для дальнейших выкладок удобнее (хотя это и не принципиально) искать $M(z)$ в виде интеграла от некоторой функции, которая представляется рядом, т. е.

$$M(z) = \int_{z_0}^z dz \sum_{v=0}^{\infty} y_v(z)/k_0^v. \quad (23.3)$$

Подставим теперь (23.2) с учетом (23.3) в уравнение (23.1). При этом имеем

$$\psi'' = (ik_0 M'' - k_0^2 M'^2) \exp(ik_0 M),$$

$$M' = \sum_{v=0}^{\infty} y_v/k_0^v, \quad M'' = \sum_{v=0}^{\infty} y'_v/k_0^v.$$

Приравнивание в (23.1) коэффициентов при k_0^2 , k_0 и k_0^0 дает соответственно $y_0^2 = n^2(z)$, $-2y_0 y_1 + iy_0 = 0$, $-2y_0 y_2 - y_1^2 + iy_1 = 0$. Отсюда находим последовательно

$$y_0 = \pm n, \quad y_1 = i(\ln n^{1/2})', \quad y_2 = \pm 1/2 n^{-1/2} (n^{-1/2})'', \quad (23.4)$$

где аргументы $y n(z)$ и $y(z)$ опускаются.

Теперь из (23.3) и (23.2) паходим, ограничиваясь тремя первыми членами ряда и учитывая, что $n(z_0) = 1$:

$$\psi = n^{-1/2} \exp \left[\pm ik_0 \int_{z_0}^z (1 + \varepsilon) n dz \right], \quad (23.5)$$

где

$$\varepsilon \equiv n^{-1/2} (n^{-1/2})'' / 2k_0^2. \quad (23.6)$$

Если исключить особые случаи, то надо ожидать, что полученное решение будет не сильно отличаться от точного, когда выполняются неравенства

$$y_2/k_0^2 \ll y_1/k_0 \ll y_0 \quad (23.7)$$

или

$$\varepsilon \ll 1, \quad (\lambda_0 / 2\pi n^2) \partial n / \partial z \ll 1. \quad (23.8)$$

Обычно в качестве приближения геометрической оптики берется выражение (23.5), в котором величина ε считается пулем, т. е.

$$\psi = n^{-1/2} \exp \left[\pm ik_0 \int n(z) dz \right]. \quad (23.9)$$

Очевидно, для его справедливости необходимо выполнение условия

$$k_0 \int_{z_0}^z n^\varepsilon dz \ll 1. \quad (23.10)$$

Если предположить, что $(z - z_0) \geq 1/k_0$, то оно будет более жестким, чем первое из условий (23.8). Таким образом, в качестве необходимых условий для справедливости (23.9) у нас остается второе условие (23.8), ограничивающее величину производной dn/dz , и условие (23.10), ограничивающее вторую производную от n и разность $z - z_0$.

Выражение (23.9) представляет собой совокупность двух волн, распространяющихся во взаимно противоположных направлениях, без взаимодействия друг с другом. Таким образом, в приближении геометрической оптики, отражение волн отсутствует. Выражение в экспоненте дает набег фазы волны при распространении от z_0 до z . Предэкспоненциальный множитель в (23.9) обеспечивает выполнение закона сохранения энергии.

В случае наклонного падения волны, решение волнового уравнения будет даваться формулой (20.7), где ξ — постоянная величина, связанная с углом между нормалью к фронту волны и осью z на уровне $z = z_0$ формулой $\xi = k_0 \sin \theta_0$. Для функции $Z(z)$ будем иметь выражение, аналогичное (23.9), только величина $k^2 = k_0^2 n^2$ заменится на $k^2 - \xi^2 = k_0^2 (n^2 - \sin^2 \theta_0)$. В результате получаем

$$\Psi(x, z) = (n^2 - \sin^2 \theta_0)^{-1/4} \exp \left[i \left(\xi x \pm k_0 \int_{z_0}^z \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_0} dz \right) \right]. \quad (23.11)$$

Общее решение волнового уравнения (20.1) в приближении геометрической оптики записывается

$$\begin{aligned} \psi(x, z) = & (n^2 - \sin^2 \theta_0)^{-1/4} \left[C_1 \exp \left(ik_0 \int_{z_0}^z \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_0} dz \right) + \right. \\ & \left. + C_2 \exp \left(- ik_0 \int_{z_0}^z \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_0} dz \right) \right] \exp(i\xi x), \end{aligned} \quad (23.12)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Ниже будет показано, что каждому из двух членов в (23.12) может быть сопоставлен луч, касательная к которому составляет с осью z угол θ . При этом $\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_0} = n(z) \cos \theta(z) -$

для произвольного z . Поэтому (23.12) может быть записано также в виде

$$\begin{aligned}\psi(x, z) = (n \cos \vartheta)^{-1/2} & \left[C_1 \exp \left(ik_0 \int_{z_0}^z n \cos \vartheta dz \right) + \right. \\ & \left. + C_2 \exp \left(-ik_0 \int_{z_0}^z n \cos \vartheta dz \right) \right] \exp(i\xi x).\end{aligned}\quad (23.13)$$

Это решение не зависит от выбора z_0 , так как последний сказывается только на значениях произвольных постоянных C_1 и C_2 .

В критериях (23.8) и (23.10) справедливости этого решения также нужно n заменить на $(n^2 - \sin^2 \vartheta_0)^{1/2} = n \cos \vartheta$. В частности, тогда легко видеть, что они не будут удовлетворяться в окрестности «точки поворота», определяемой соотношением $n(z) = \sin \vartheta_0$, $\vartheta = 0$.

Перейдем теперь к лучевой трактовке решения (23.13). Прежде всего, назовем фронтами волн поверхности равных фаз

$$F(x, z) \equiv \xi x + k_0 \int_{z_0}^z \sqrt{n^2 - \sin^2 \vartheta_0} dz = \text{const.}\quad (23.14)$$

Лучами, по определению, называют линии, ортогональные фронтам. Другими словами, единичный вектор касательной к лучу совпадает по направлению с $\text{grad } F$:

$$\mathbf{l} = \text{grad } F / |\text{grad } F|.$$

По из (23.14) имеем

$$\text{grad}_x F = \xi + k_0 \sin \vartheta_0, \quad \text{grad}_z F = \pm k_0 \sqrt{n^2 - \sin^2 \vartheta_0} \quad (23.15)$$

$$|\text{grad } F| = k_0 n, \quad l_x = \sin \vartheta_0 / n, \quad l_z = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \vartheta_0 / n^2}. \quad (23.16)$$

Обозначим через $\vartheta = \vartheta(z)$ — острый угол, составляемый единичным вектором \mathbf{l} с осью z . Тогда, очевидно, должно быть $l_x = \sin \vartheta$. Сравнивая это с l_x из (23.16), мы находим, что ϑ связан с ϑ_0 соотношением

$$n \sin \vartheta = \sin \vartheta_0. \quad (23.17)$$

что можно назвать законом Снеллиуса для слоистой среды. Из (23.16) теперь получаем $l_z = \pm \cos \vartheta$. Здесь знак плюс соответствует волне (лучу), распространяющейся в сторону положительных z , знак минус — волне (лучу), распространяющейся в сторону отрицательных z . Заметим, что мы ограничились случаем, когда волны распространяются в сторону только положительных x .

Закон (23.17) можно получить из независимых соображений, рассматривая непрерывно-слоистую среду как состоящую из очень большого числа очень тонких однородных слоев. Применяя закон преломления (2.10) на границах этих слоев, а затем устремляя их толщины к нулю, мы и получим формулу (23.17).

23.2. Другой вывод приближения геометрической оптики. Рассмотрим вывод приближения геометрической оптики по Бреммеру [119, 120], что позволит выяснить физический смысл дальнейших приближений. В аналогичном аспекте вопрос о приближении ВКБ или геометрической оптике рассматривался в работе [112].

Мы будем рассматривать акустический¹ случай, предполагая, что $\rho = \text{const}$ *. Рассмотрение электромагнитного случая после этого, при желании, не составит трудности.

Будем пользоваться звуковым потенциалом ψ так, что

$$\mathbf{v} = -\text{grad } \psi, \quad p = \rho \partial \psi / \partial t = -i \omega \rho \psi. \quad (23.18)$$

* Это предположение не принципиально. Учет непостоянства плотности ρ см. в § 24.

Как и выше, предполагаем, что зависимость от x дается фактором $\exp i\xi x$. Тогда, обозначая для краткости $v_z = v$ и учитывая волновое уравнение для ψ , получаем два уравнения для неизвестных v и ψ

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = -v, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = (k^2 - \xi^2) \psi, \quad k \equiv \omega/c(z). \quad (23.19)$$

Умножив (23.17) на k_0 , мы получим

$$k(z) \sin \vartheta(z) = \xi. \quad (23.20)$$

Теперь в (23.19) будем иметь

$$k^2 - \xi^2 = k^2 \cos^2 \vartheta = k_0^2 n^2 \cos^2 \vartheta. \quad (23.21)$$

Будем искать решение уравнений (23.19) в виде

$$\psi = (n \cos \vartheta)^{-1/2} \left[\chi_1 \exp \left(ik_0 \int_0^z n \cos \vartheta dz \right) + \chi_2 \exp \left(- ik_0 \int_0^z n \cos \vartheta dz \right) \right] \exp(i\xi x), \quad (23.22)$$

$$v = -ik_0(n \cos \vartheta)^{1/2} \left[\chi_1 \exp \left(ik_0 \int_0^z n \cos \vartheta dz \right) - \chi_2 \exp \left(- ik_0 \int_0^z n \cos \vartheta dz \right) \right] \exp(i\xi x),$$

где $\chi_1 = \chi_1(z)$ и $\chi_2 = \chi_2(z)$ — новые неизвестные функции. Заметим, что ψ в (23.22) отличается от (23.13) только тем, что вместо постоянных C_1 и C_2 стоят функции χ_1 и χ_2 и для z_0 выбрано значение $z_0 = 0$. При этом, согласно (23.17)

$$(n^2 - \sin^2 \vartheta_0)^{1/2} = n \cos \vartheta. \quad (23.23)$$

Подставляя (23.22) в (23.19), получаем с учетом (23.21), после несложных преобразований, систему из двух уравнений первого порядка для χ_1 и χ_2 :

$$\chi'_1 = \frac{1}{2} [\ln(n \cos \vartheta)]' \chi_2 \exp \left(-2ik_0 \int_0^z n \cos \vartheta dz \right), \quad (23.24)$$

$$\chi'_2 = \frac{1}{2} [\ln(n \cos \vartheta)]' \chi_1 \exp \left(2ik_0 \int_0^z n \cos \vartheta dz \right).$$

Как было видно выше, приближение геометрической оптики дает тем лучший результат, чем медленнее изменяется $n(z)$, а значит и произведение $n \cos \vartheta$. Поэтому множитель с производной от логарифма в правой части можно считать малым и решать систему методом последовательных приближений. В нулевом приближении, полагая правые части равными нулю, получаем

$$\chi_1^{(0)} = C_1, \quad \chi_2^{(0)} = C_2. \quad (23.25)$$

Подставив эти значения χ_1 и χ_2 в выражения (23.22), мы получим решение в приближении геометрической оптики, причем член, содержащий $\chi_1^{(0)}$, будет описывать волну, распространяющуюся в положительном направлении оси z («прямая» волна), а член, содержащий $\chi_2^{(0)}$ — волну, распространяющуюся в направлении отрицательных z («обратная» волна). При этом выражение (23.22) для ψ в точности совпадает с полученным ранее выражением (23.13).

Для удобства дальнейших выкладок запишем уравнения (23.24) в виде

$$\frac{d\chi_1}{dz} = \epsilon \lambda_1(z) \cdot \chi_2(z), \quad \frac{d\chi_2}{dz} = \epsilon \lambda_2(z) \chi_1(z), \quad (23.26)$$

где ϵ — малый параметр. Теперь нетрудно получить решения в виде сходящихся рядов вида:

$$\chi_1^{(m)} = \chi_1^{(0)} + \epsilon \chi_1^{(1)} + \epsilon^2 \chi_1^{(2)} + \dots, \quad \chi_2^{(m)} = \chi_2^{(0)} + \epsilon \chi_2^{(1)} + \epsilon^2 \chi_2^{(2)} + \dots \quad (23.27)$$

Подставляя эти выражения в уравнения (23.26) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε , находим, что последовательные приближения связаны между собой уравнениями

$$\frac{d\chi_1^{(m)}}{dz} = \varepsilon \lambda_1(z) \cdot \chi_2^{(m-1)}(z), \quad \frac{d\chi_2^{(m)}}{dz} = \varepsilon \lambda_2(z) \chi_1^{(m-1)}(z). \quad (23.28)$$

При $m = 1$ эту систему уравнений надо трактовать таким образом, что обратная волна нулевого приближения дает в каждой точке пространства начало прямой волне первого порядка $\chi_1^{(1)}$ и наоборот. Другими словами, волна нулевого приближения, испытывая, вследствие неоднородности среды, отражения на любом горизонте z , дает распространяющуюся в обратном направлении волну первого приближения.

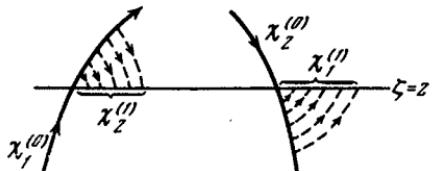


Рис. 23.1. Генерация вторичных волн первичными

При некотором заданном z вторичная обратная волна $\chi_2^{(1)}$ получается в результате отражения первичной прямой волны $\chi_1^{(0)}$ при всех ζ , где $z < \zeta < \infty$. Наоборот, прямая вторичная волна $\chi_1^{(1)}$ получается в результате отражения волны $\chi_2^{(0)}$ на всех уровнях, для которых $-\infty < \zeta < z$. Схематически это изображено на рис. 23.1. Эти соображения относятся к генерации волн любого порядка m .

В полном соответствии с этими соображениями наглядного характера, решения уравнений (23.28) могут быть записаны в виде

$$\chi_1^{(m)}(z) = \varepsilon \int_{-\infty}^z \lambda_1(\zeta) \chi_2^{(m-1)}(\zeta) d\zeta, \quad \chi_2^{(m)}(z) = \varepsilon \int_z^{\infty} \lambda_2(\zeta) \chi_1^{(m-1)}(\zeta) d\zeta. \quad (23.29)$$

Полагая в этих формулах $m = 1, 2, \dots$, учитывая равенства (23.25) и подставляя получаемые при этом выражения для $\chi_1^{(1)}, \chi_2^{(1)}, \chi_1^{(2)}, \chi_2^{(2)}$ и т. д. в (23.27), получаем решения нашей задачи. Эти решения будут содержать две постоянные интегрирования C_1 и C_2 и поэтому будут наиболее общими решениями уравнений (23.26). Так, например, нетрудно получить

$$\chi_1^{(1)}(z) = \varepsilon C_2 \int_{-\infty}^z \lambda_1(\zeta) d\zeta.$$

или, подставив значение $\varepsilon \lambda_1(\zeta)$,

$$\chi_1^{(1)}(z) = \frac{1}{2} C_2 \int_{-\infty}^z \frac{d}{dz} [\ln(n \cos \vartheta)] \exp \left(-2ik_0 \int_0^z n \cos \vartheta dz \right) dz. \quad (23.30)$$

Посредством многократного применения формул (23.29) можно получить явные выражения для функций $\chi_1^{(m)}$ и $\chi_2^{(m)}$ в виде m -кратного интеграла. Структура этих интегралов видна, например, из выражений для $\chi_1^{(4)}$ и $\chi_2^{(4)}$, имеющих вид

$$\begin{aligned} \chi_1^{(4)}(z) &= C_1 \int_{-\infty}^z d\zeta_1 \lambda_1(\zeta_1) \int_{-\infty}^{\zeta_1} d\zeta_2 \lambda_2(\zeta_2) \int_{-\infty}^{\zeta_2} d\zeta_3 \lambda_1(\zeta_3) \int_{-\infty}^{\zeta_3} d\zeta_4 \lambda_2(\zeta_4), \\ \chi_2^{(4)}(z) &= C_2 \int_{-\infty}^z d\zeta_1 \lambda_2(\zeta_1) \int_{-\infty}^{\zeta_1} d\zeta_2 \lambda_1(\zeta_2) \int_{-\infty}^{\zeta_2} d\zeta_3 \lambda_2(\zeta_3) \int_{-\infty}^{\zeta_3} d\zeta_4 \lambda_1(\zeta_4). \end{aligned} \quad (23.31)$$

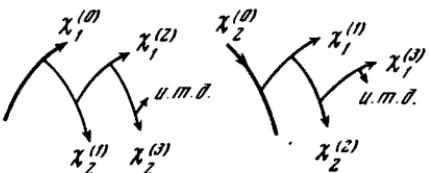
Физически $\chi_1^{(m)}$ и $\chi_2^{(m)}$ нужно трактовать как волны, получающиеся в результате m -кратных отражений в неоднородной среде. Так, $\chi_1^{(1)}$ и $\chi_2^{(1)}$ получаются в результате отражений на уровнях ζ_1 , ζ_2 , ζ_3 и ζ_4 . Для получения полных выражений для $\chi_1^{(4)}$ и $\chi_2^{(4)}$ производится интегрирование по всем возможным уровням отражений.

Последовательная генерация волн различных порядков схематически изображена на рис. 23.2.

Сходимость получающихся рядов типа (23.27) доказывается в [100] гл. 3.

Изложенный только что метод обоснования геометрической оптики менее удобен, чем метод, изложенный в § 23.1, для получения необходимых критериев применимости этого приближения. Очевидно, однако, что вторичные волны $\chi_1^{(1)}$ и $\chi_2^{(1)}$ должны быть малы по сравнению с первичными $\chi_1^{(0)}$ и $\chi_2^{(0)}$.

Рис. 23.2. Последовательная генерация волн различных порядков в неоднородной среде



Нетрудно показать, что это обеспечивается при выполнении второго из условий (23.8), в котором, поскольку мы рассматриваем наклонное падение волны, n заменено на $n \cos \vartheta$. Условие (23.10) в этом методе не получается достаточно просто. Вопрос о достаточных условиях применимости геометрической оптики в общем случае очень непрост, [100], и на нем мы останавливаться не будем. В заключение отметим, что еще один способ приближенной трактовки отражения волн от слоистых сред, когда в первом приближении получается геометрическая оптика, изложен в работе [108].

§ 24. Понятие об эталонных уравнениях.

Поле при наличии точек поворота

Обоснование геометрической оптики или метода ВКБ можно дать также при помощи метода эталонных уравнений. Этот метод имеет широкую применимость и позволяет, в частности, найти решение задачи при наличии точки поворота $z = z_m$, в которой $\cos \vartheta = 0$, и решение (23.13) теряет смысл.

24.1. Преобразование основного уравнения. Будем рассматривать уравнение (23.1). Оно будет охватывать и случай наклонного падения волны, если под $n^2(z)$ подразумевать $n^2(z) = \sin^2 \vartheta_0$, что допустимо, поскольку вид функции $n^2(z)$ в (23.1) мы не детализируем. Предполагаем только, что в рассматриваемой области функция $n(z)$ непрерывна вместе со своими производными. $n(z)$ может обращаться в нуль при некотором $z = z_m$ и эту точку мы называем точкой поворота. В случае наклонного падения волны в точке поворота $n(z_m) = \sin \vartheta_0$ или согласно (23.17) $\vartheta = \pi/2$, т. е. касательная к лучу в данной точке лежит в плоскости $z = \text{const}$. Проведем некоторые формальные преобразования уравнения (23.1), следуя Д. Хидингу [102]. Введем вместо z новую независимую переменную t . Пусть $z = z(t)$. Тогда $d\varphi/dt = \psi'/z'$, где штрих означает производную по t .

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\psi'}{z'} \right) \frac{1}{z'} = \frac{\psi''}{z'^2} - \frac{\psi' z''}{z'^3}.$$

Уравнение (23.1) теперь запишется

$$\psi'' - (z''/z') \psi' + k_0^2 n^2 z'^2 \psi = 0.$$

Чтобы освободиться от члена с ψ' , произведем замену ψ на Ψ

$$\Psi = (z')^{1/2} \Psi', \quad (24.1)$$

что дает

$$\Psi' = (z')^{1/2} \Psi' + \frac{1}{2} (z')^{-1/2} z'' \Psi.$$

$$\Psi'' = (z')^{1/2} \Psi'' + (z')^{-1/2} z'' \Psi' + \frac{1}{2} (z')^{-1/2} z''' \Psi - \frac{1}{4} (z')^{-3/2} (z'')^2 \Psi.$$

Теперь получаем уравнение для Ψ'

$$\Psi'' + k_0^2 (z') n^2 \Psi = [3(z'')^2/4(z')^2 - z'''/2z'] \Psi. \quad (24.2)$$

24.2. Решение в области, не содержащей точки поворота. Зададимся теперь конкретным видом функции $z(t)$, положив

$$t = ik_0 \int_{z_0}^z ndz. \quad (24.3)$$

Тогда

$$z' = 1/ik_0 n, \quad z''/z' = in'/k_0 n^2, \quad z'''/z' = (n'' - 3n'^2/n)/k_0^2 n^3, \quad (24.4)$$

где штрихи у n' и n'' означают производные по z . Уравнение (24.2) теперь запишется

$$\Psi''' - \Psi = [3(n')^2/2n - n'']/2k_0^2 n^3. \quad (24.5)$$

При больших k_0 правой частью можно пренебречь. Уравнение

$$\Psi'' - \Psi = 0 \quad (24.6)$$

называется *эталонным* [32] по отношению к (24.5). Его решение представляет собой равномерную асимптотику решения уравнения (24.5) при $k_0 \rightarrow \infty$.

Двумя линейно-независимыми решениями уравнения (24.6) будут $\Psi = e^{\pm t}$ или, переходя от Ψ и t к ψ и z , получаем

$$\Psi = n^{-1/2} \exp \left(\mp ik_0 \int_{z_0}^z ndz \right), \quad (24.7)$$

что совпадает с (23.9) — решением в приближении геометрической оптики.

24.3. Случай наличия точки поворота. Без ограничения общности можно предположить, что точка поворота соответствует $z = 0$ (т. е. $n(0) = 0$). Очевидно, при z , близких к нулю, решение (24.7) теряет смысл. В этом случае уравнение (24.6) не является эталонным по отношению к уравнению (24.5), так как при $z \rightarrow 0$ правая часть в последнем не мала, а наоборот, неограниченно возрастает.

Предположим, что $n^2(z)$ в (23.1) вблизи $z = 0$ может быть представлен рядом

$$n^2 = -az + bz^2 + \dots, \quad a > 0. \quad (24.8)$$

В этом случае $z = 0$ называют точкой поворота первого порядка. При $a = 0$, $b \neq 0$ была бы точка поворота второго порядка и т. д.

Если пренебречь в (24.8) всеми членами кроме первого, то мы получим случай, исследованный в § 21. Как мы видели, решение в этом случае выражается через функции Эйри. Это наталкивает на мысль, что эталонным для этого случая будет уравнение для функций Эйри. Чтобы преобразовать к нему уравнение (24.2), введем переменную t

$$t = \left(\frac{3ik_0}{2} \int_0^z ndz \right)^{1/3} \quad \text{или} \quad t^{1/3} = \frac{3ik_0}{2} \int_0^z ndz. \quad (24.9)$$

Отсюда

$$t^{1/3} dt = ik_0 ndz, \quad z' = t^{1/3}/ik_0 n. \quad (24.10)$$

Если заменить в рассматриваемом случае правую часть в (24.2) нулем, то мы действительно получим уравнение Эйри:

$$\Psi'' - t\Psi = 0. \quad (24.11)$$

t согласно (24.9) может быть однозначно задано на трехлистной поверхности Римана с точкой ветвления $z = 0$. Чтобы оставаться на одном листе, мы проведем разрез, идущий по какому-либо лучу из точки $z = 0$ на бесконечность. Для нахождения нужного нам листа рассмотрим случай малых z , когда в (24.8) можно ограничиться первым членом ряда

$$n^2 = -az. \quad (24.12)$$

Тогда, выполняя в (24.9) интегрирование, получаем

$$t = (\pm 1)^{1/2}z/H. \quad (24.13)$$

Как и в предыдущих параграфах, нас будет интересовать задача об отражении плоской волны, приходящей из $z = -\infty$. В этом случае целесообразно выбрать такие знаки радикалов в (24.13), что

$$t = z/H. \quad (24.14)$$

Этим соотношением, справедливым при малых z , и будет определяться выбор нужного для нас листа поверхности Римана.

Заметим, что согласно (24.14), имеем $z' = \text{const}$, и правая часть в (24.2) обращается тождественно в нуль. Значит при достаточно малых z , когда справедливо (24.12), решение уравнения (23.1) будет выражаться через функцию Эйри $v(t)$.

Сконструируем теперь решение уравнения (23.1) при любых z . Для этого выделим вблизи $t = 0$ (т. е. $z = 0$) область $|t| \leq t_1$, $t_1 \gg 1$ такую, в которой справедливо разложение (24.12). Как всегда, считаем, что при $z \rightarrow -\infty$, $n(z) \rightarrow n_0 = \text{const}$. Отсюда на нашу среду падает плоская волна. Нам требуется найти ψ при всех z . Считаем, что других точек поворота кроме $z = 0$ нет. Рассмотрим выражение для ψ , заданные при разных значениях z и t формулами:

$$t \leq -t_1, \quad \psi = n^{-1/2}C_1 \exp\left(ik_0 \int_0^z ndz\right) + n^{-1/2}C_2 \exp\left(-ik_0 \int_0^z ndz\right), \quad (24.15)$$

$$|t| \leq t_1, \quad \psi = C_3 (-t n^2)^{1/4} v(t), \quad (24.16)$$

где при $z, t < 0$, $n^2 > 0$

$$-t = \left(-\frac{3k_0}{2} \int_0^z ndz\right)^{1/2}, \quad (24.17)$$

при $z, t > 0$, $n^2 < 0$

$$t = \left(\frac{3k_0}{2} \int_0^z V - n^2 dz\right)^{1/2}, \quad (24.18)$$

знак $V - n^2$ здесь и ниже берется арифметический.

Далее

$$t \geq t_1, \quad \psi = C_4 (-n^2)^{-1/4} \exp\left(-k_0 \int_0^z V - n^2 dz\right), \quad (24.19)$$

где C_1, \dots, C_4 — постоянные.

Покажем теперь, что формулы (24.15) — (24.19) при соответствующем выборе постоянных и являются при достаточно большом k_0 решением уравнения (23.1). Действительно, при $|t| \leq t_1$ мы имеем $\Psi = v(t)$. Используя формулу (24.1) перехода от Ψ к ψ , а также значение z' в соответствии с формулой (24.10), мы и получим (24.16).

Выражения (24.15) и (24.19) являются знакомыми нам решениями в приближении геометрической оптики, что и естественно, поскольку условие $|t| \geq t_1 \gg 1$ означает большую удаленность от точки поворота. Правда, заранее неясно, достаточна ли эта удаленность для того, чтобы приближение геометрической оптики годилось. Этот вопрос решается положительно тем, что, как мы сейчас покажем, асимптотика выражения (24.16) при $-t = t_1$ совпадает с (24.15), если связать соответственным образом постоянные C_1 , C_2 и C_3 . Пользуясь формулой (21.13) и откидывая члены порядка $1/w$ и меньше, заменяя $\sin(w + \pi/4)$ на сумму экспонент, получаем из (24.16) при $t < 0$

$$\Psi = \frac{1}{2} C_3 e^{-i\pi/2} n^{-1/2} \left[e^{i(w + \frac{\pi}{4})} - e^{-i(w + \frac{\pi}{4})} \right], \quad (24.20)$$

$$w = \frac{2}{3} (-t)^{3/2} = -k_0 \int_0^z n dz. \quad (24.21)$$

Замечаем, что (24.20) совпадает с (24.15) при

$$C_1 = \frac{1}{2} C_3 \exp(i\pi/4), \quad C_2 = \frac{1}{2} C_3 \exp(-i\pi/4). \quad (24.22)$$

Таким же образом легко показать, что при $t \geq t_1 \gg 1$ выражение (24.16) асимптотически переходит в (24.19), если положить

$$C_3 = 2C_4. \quad (24.23)$$

Выразим все постоянные через C_1 , тогда решение уравнения (23.1) при достаточно больших k_0 будет даваться выражениями

$$t < -t_1, \quad \Psi = \Psi_+ + \Psi_-, \quad \Psi_+ = C_1 n^{-1/2} \exp\left(ik_0 \int_0^z n dz\right),$$

$$\Psi_- = C_2 n^{-1/2} \exp\left(-ik_0 \int_0^z n dz\right), \quad (24.24)$$

$$|t| \leq t_1, \quad \Psi = 2C_1 e^{-i\pi/4} (-t/n^2)^{1/4} v(t). \quad (24.25)$$

(Определение t см. (24.17) и (24.18)).

$$t > t_1, \quad \Psi = C_1 e^{-i\pi/4} (-n^2)^{-1/4} \exp\left(-k_0 \int_0^z V \sqrt{-n^2} dz\right). \quad (24.26)$$

Как было показано в предыдущих параграфах, Ψ_+ и Ψ_- в (24.24) представляют собой соответственно прямую (падающую) и обратную (отраженную) волны в приближении геометрической оптики. Выражение (24.25) описывает поле вблизи точки поворота, а (24.26) дает экспоненциально затухающее при увеличении z поле за точкой поворота.

Представляет интерес отношение $V(z) = \Psi_-/\Psi_+$, которое можно условно назвать коэффициентом отражения, отнесенными к плоскости z . Имеем, учитывая, что $k(z) = k_0 n(z)$.

$$V(z) = \exp\left(2i \int_z^0 k(z) dz - \frac{i\pi}{2}\right). \quad (24.27)$$

Напомним, что здесь $z < 0$, причем z достаточно удалено от нуля. Интегральный член в экспоненте в (24.27) дает набег фазы волны в геометрическом приближении при пробеге волны от уровня z до уровня $z = 0$ и обратно. Слагаемое $-i\pi/2$ дает потерю фазы в $\pi/2$ в точке поворота, не предсказываемую геометрическим приближением.

24.4. Случай двух точек поворота. Этот случай рассмотрен в ряде работ (см., например, [98, 19, 46, 71]). Ниже мы в основном базируемся на работе Е. Марфи [202].

Удобнее иметь в виду явным образом наклонное падение волны. Поэтому вместо (23.1) будем рассматривать уравнение

$$\psi''(z) + k_0^2 p^2(z) \psi(z) = 0, \quad p^2 = n^2(z) - \sin^2 \vartheta_0. \quad (24.28)$$

Пусть величина $p^2(z)$ обращается в нуль в трех точках $z = z_1, z_2$, а между ними имеет минимум. Соответствующий график для скорости $c(z)$ изображен на рис. 24.1, а. На нем z_m — горизонт максимальной скорости. Пусть при некотором произвольно выбранном $z = z_0$ скорость равна $c(z_0) = c_0$, угол падения волны ϑ_0 . Тогда горизонты заворота z_1 и z_2 находятся из равенства $c(z_1) = c(z_2) = c_0/\sin\vartheta_0$. Этапонным уравнением, также имеющим две точки заворота, является уравнение

$$\Psi'' + (E + t^2)\Psi = 0, \quad (24.29)$$

где E — пока неопределенный параметр, не зависящий от t . Чтобы левая часть (24.29) совпадала с левой частью (24.2), (где вместо n^2 будет $p^2(z)$), мы должны положить

$$E + t^2 = k_0^2 p^2(z) (dz/dt)^2. \quad (24.30)$$

Извлекая корень и интегрируя, мы и получим связь между переменными t и z

$$\int_{t_1}^t (E + \tau^2)^{1/2} d\tau = k_0 \int_{z_1}^z p(\zeta) d\zeta. \quad (24.31)$$

В качестве постоянных интегрирования t_1 и z_1 выберем величины, обращающие в нуль подынтегральные выражения (одна из точек поворота). Параметр E теперь мы можем выбрать так, чтобы второй точке поворота z_2 соответствовало t_2 , также обращающее в нуль величину $E + t^2$. Тогда, полагая в (24.31) в верхних пределах z_2 и t_2 и осуществляя интегрирование слева, находим

$$E = \frac{2i}{\pi} \int_{z_1}^{z_2} p(\zeta) d\zeta. \quad (24.32)$$

Излагаемая теория применима как к случаю наличия вещественных точек заворота z_1 и z_2 (отражение волны от «потенциального барьера» — по квантовомеханической терминологии), так и в случае отсутствия вещественных точек заворота («надбарьерное» распространение и отражение волны). В каждом случае важным является правильный выбор знаков корней и путей интегрирования. При вещественных z_1 и z_2 мы выбираем $\text{Im} p > 0$ при $z_1 < z < z_2$ и тогда E — вещественная отрицательная величина. При комплексных z_1 и z_2 , $\text{Re} p > 0$, E — вещественно, положительно.

При замене

$$x = \sqrt{-2t} \exp(-i\pi/4), \quad n = (iE - 1)/2 \quad (24.33)$$

уравнение (24.29) будет совпадать с каноническим уравнением для функций параболического цилиндра [95]

$$d^2 D_n(x)/dx^2 + (n + 1/2 - x^2/4) D_n(x) = 0. \quad (24.34)$$

Пользуясь формулой (24.1), связывающей функции ψ и Ψ , мы получаем для решения уравнения (24.28)

$$\psi = (dz/dt)^{1/2} D_{(iE-1)/2}(\sqrt{-2t} e^{-ix/4}). \quad (24.35)$$

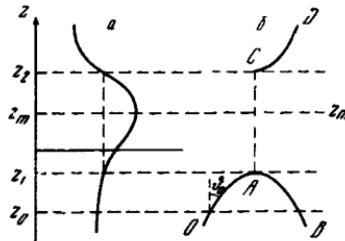


Рис. 24.1. Лучевая картина при наличии двух точек поворота луча

Асимптотика этого решения при $z \rightarrow \pm \infty$ имеет вид [95]

$$z \rightarrow \infty, \quad Q(E) \psi(z) \approx C(E) p^{-1/2} \exp \left(ik_0 \operatorname{Re} \int_{z_2}^z p(\xi) d\xi \right), \quad (24.36)$$

$$\begin{aligned} z \rightarrow -\infty, \quad Q(E) \psi(z) \approx A(E) p^{-1/2} \exp \left(-ik_0 \operatorname{Re} \int_z^{z_1} p(\xi) d\xi \right) + \\ + B p^{-1/2} \exp \left(ik_0 \operatorname{Re} \int_z^{z_1} p(\xi) d\xi \right), \quad (24.37) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} A(E) = (1 + e^{\pi E})^{1/2} e^{i\chi(E)}, \quad B = e^{-i\pi/2}, \quad C(E) = e^{\pi E/2}, \\ Q(E) = (2e^{-i\pi/2})^{1/4} (|E| e^{3\pi i/2}/2) e^{-iE/4}, \quad (24.38) \end{aligned}$$

$$\chi(E) = \frac{E}{2} - \frac{E}{2} \ln \frac{|E|}{2} + \operatorname{Im} \ln \Gamma[(1 + iE)/2]. \quad (24.39)$$

Здесь Im и Re означают мнимую и вещественную части.

Выражение (24.37) представляет собой суперпозицию падающей и отраженной волн, выражение (24.36) — прошедшую волну. Величины

$$V = B/A = (1 + e^{\pi E})^{-1/2} e^{-i(\chi + \pi/2)}, \quad (24.40)$$

$$W = C/A = (1 + e^{-\pi E})^{-1/2} e^{-i\chi}. \quad (24.41)$$

уместно назвать коэффициентами отражения и прозрачности. Амплитуду и фазу отраженной и прошедшей волн в достаточном удалении от слоя (z_1, z_2) можно найти, умножив амплитуду падающей волны на V и W и учитя соответственный набег фаз, даваемый геометрической оптикой. Как показано в [202], $|V| \leq 0.095\pi/2$. Коэффициенты отражения и прозрачности по энергии будут

$$|V|^2 = 1/(1 + e^{\pi E}), \quad |W|^2 = 1/(1 + e^{-\pi E}). \quad (24.42)$$

Выражение (24.32) для E можно переписать также в виде

$$E = \frac{2}{\pi} \int_{z_1}^{z_2} V \sqrt{\sin^2 \vartheta_0 - n^2(z)} dz, \quad (24.43)$$

где $n(z) = k(z)/k_0$, $k_0 \equiv k(z_0)$, $\vartheta_0 \equiv \vartheta(z_0)$. Для такого угла падения $\vartheta_0 = \vartheta_m$, когда $n(z_m) = \sin \vartheta_m$, т. е., когда соответственный луч заворачивает как раз на горизонте максимальной скорости, имеем $E = 0$. $|V|^2 = |W|^2 = \frac{1}{2}$, т. е. половина энергии проходит, половина отражается.

Полученные результаты применимы к произвольному закону типа, изображенного на рис. 24.1, лишь бы были выполнены некоторые необходимые для метода эталонного уравнения требования медленности изменения $n(z)$. Принципиально эти требования должны обеспечивать малость правой части в (24.2), однако практически их получить непросто. Некоторое представление о пределах применимости метода можно получить, сравнивая полученные методом эталонного уравнения результаты с результатами точного решения, когда его можно получить. Для такого сравнения Е. Марфи [202] берет точное решение для слоя Эпштейна (см. § 20.6) и показывает, что приближенное решение достаточно хорошо совпадает с точным, если $m\lambda_0 \lesssim 1$. Как указано выше, в случае одной точки поворота можно представить себе луч, который заворачивает на определенном горизонте, теряя при этом в точке поворота фазу $\pi/2$. Каким будет соответственное лучевое представление в случае двух точек поворота? Е. Марфи [202] решает этот вопрос, исследуя поведение ограниченного пучка (см. § 14) и получает результат,

изображенный на рис. 24.1, б. Для достаточно толстого слоя отраженный луч OAB выглядит так же, как и при одной точке заворота (включая потерю фазы $\pi/2$), но только его амплитуда, естественно, не равна амплитуде падающего луча. Прошедший луч CD надо представлять начинаящимся в C . «Скачок» луча из A в C происходит без потери фазы, но с уменьшением амплитуды. В случае небольшой толщины слоя ($t\lambda_0 \lesssim 1$ для слоя Эпштейна) для луча с горизонтом заворота, близким к z_m , перескок из A в C происходит с горизонтальным сдвигом, зависящим от длины волны.

Стоит также отметить, что при приближении угла падения к критическому ϑ_m (при угле падения ϑ_m луч поворачивает на горизонте z_m) величина горизонтальных расстояний между точками O и B , O и D неограниченно возрастает.

§ 25. Отражение волны от слоя с произвольным законом изменения параметров

Как видно из § 22, точные решения задачи об отражении волны от неоднородного слоя существуют лишь для небольшого числа случаев. Хотя исследование этих случаев имеет весьма большое значение и раскрывает ряд важных закономерностей, это не снимает вопроса об исследовании отражения волн от слоев, в которых зависимость параметров среды от координаты z может быть произвольной.

Существенно также, что в реальных геофизических ситуациях параметры среды не остаются постоянными, а испытывают с течением времени как систематические изменения, так и изменения флюктуационного характера. Необходимо знать, как эти изменения сказываются на коэффициенте отражения от слоев с произвольным законом изменения параметра. Забегая вперед (см. § 25.5), укажем, что даже небольшие изменения в этом законе могут существенно сказываться на коэффициенте отражения.

Исследование коэффициента отражения плоской волны имеет большое значение также и для решения задачи о поле точечного излучателя в слоисто-неоднородной среде, поскольку сферическая волна может быть разложена на плоские.

Ряд результатов для слоисто-неоднородной среды общего вида был получен в работах [108, 141, 171, 173, 223, 77, 261, 164]. Непосредственное отношение к рассматриваемой проблеме имеет также работа М. Лессера [190]. Мы рассмотрим здесь метод, более подробно разработанный нами [19].

Пусть зависимость параметров среды от координаты z дается функциями $\rho = \rho(z)$ и $c = c(z)$ — в акустике; $\epsilon = \epsilon(z)$ — в электромагнитном случае. Здесь ρ и c — плотность среды и скорость звука в ней, ϵ — диэлектрическая постоянная (в общем случае комплексная). Для простоты полагаем $\mu = 1$. Предполагаем, что при $z = -\infty$ и $z = \infty$ параметры среды стремятся к постоянным значениям, равным соответственно ρ_0 , c_0 , ϵ_0 и ρ_1 , c_1 , ϵ_1 .

25.1. Уравнение для коэффициента отражения звуковой волны. Пусть при $z = -\infty$ задана плоская волна, распространяющаяся в сторону положительных z (падающая волна). Пусть нормаль к ее фронту лежит в плоскости xz (плоскость падения) и составляет угол ϑ_0 (угол падения) с положительным направлением оси z . На основании изложенного выше естественно предположить, что во всем пространстве зависимость величин, характеризующих поле от координаты x , будет даваться экспонентой $\exp i\xi x$, $\xi = k_0 \sin \vartheta_0$, $k_0 = \omega/c_0$. Вопрос о зависимости от z значительно сложнее. В общем случае уравнения для акустического и электромагнитного полей могут быть удовлетворены только при допущении, что при $z = -\infty$ существует также отраженная волна. Нашей задачей будет отыскание отношения комплексных амплитуд отраженной и падающей волн, т. е. коэффициента отражения по модулю и фазе. При этом мы не пойдем по обычному пути, согласно которому нужно было бы написать волновое уравнение для поля и попытаться его решить. В конечном счете нам нужно знать не поле, а только

лишь коэффициент отражения, для которого оказывается возможным получение особого уравнения.

Рассмотрим сначала случай звуковой волны. Звуковое поле в неоднородной среде описывается уравнениями (19.1). Учитывая, что $\partial/\partial y = 0$, $\partial/\partial x = i\xi$, $\partial/\partial t = -i\omega$, получаем, взяв x -компоненту от второго из уравнений (19.1)

$$v_x = \xi p/\rho\omega. \quad (25.1)$$

Учитывая это соотношение, получаем для z -компоненты того же уравнения, а также для первого из уравнений (19.1)

$$\partial v_z / \partial z = i\beta^2 p/\rho\omega, \quad \partial p / \partial z = i\rho\omega v_z. \quad (25.2)$$

Здесь обозначено

$$\beta = \beta(z) \equiv k \cos \vartheta \equiv \sqrt{k^2 - \xi^2}, \quad (25.3)$$

ϑ является углом, составленным нормалью к фронту волны с осью z при произвольном z .

Для удовлетворения равенств (25.2) введем понятие о «падающей» и «отраженной» волнах при любом z , определив их следующим образом (фактор $\exp(i(\xi x - \omega t))$ всюду подразумевается):

падающая волна

$$p = P(z), \quad v_z = (\beta/\omega\rho) P(z), \quad (25.4)$$

отраженная волна

$$p = R(z), \quad v_z = -(\beta/\omega\rho) R(z), \quad (25.4')$$

где $P(z)$ и $R(z)$ две новые неизвестные функции. Заметим, что поскольку

$$\beta/\omega\rho = k \cos \vartheta/\omega\rho = \cos \vartheta/\rho c, \quad (25.5)$$

то связь между p и v_z в каждой из волн такая же, как и в приближении лучевой теории, когда падающая и отраженная волны распространяются, не взаимодействуя друг с другом. Однако, несмотря на условность определения (25.4), мы пока не будем вводить какие-либо приближения. Подставив в (25.2) вместо p и v_z сумму падающей и отраженной волн (25.4) и (25.4'), получаем уравнения для $P(z)$ и $R(z)$

$$\begin{aligned} i\beta(P - R) - P' - R' &= 0, \\ -i\beta(P + R) + P' - R' + (P - R)q'/q &= 0. \end{aligned}$$

Здесь и ниже штрих обозначает дифференцирование по z . Решая последние уравнения относительно P' и R' , находим

$$P' = i\beta P - \gamma(P - R), \quad R' = -i\beta R + \gamma(P - R), \quad \gamma \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\beta}{\rho} \right)' \frac{p}{\beta}. \quad (25.6)$$

Определим коэффициент отражения для произвольного z как $V(z) \equiv R(z)/P(z)$. Умножив первое из уравнений (25.6) на R , второе на P , вычтя их друг из друга и поделив результат на P^2 , получим для коэффициента отражения уравнение Рикатти:

$$V' = -2i\beta V + \gamma(1 - V^2). \quad (25.7)$$

В качестве граничного условия, необходимого для однозначного определения решения уравнения (25.7), можно взять условие обращения в нуль коэффициента отражения на бесконечности

$$V \rightarrow 0 \text{ при } z \rightarrow \infty, \quad (25.8)$$

поскольку при $z \rightarrow \infty$ (позади неоднородного слоя) отраженная волна отсутствует.

В качестве граничного условия можно использовать также задание $V(z_1)$ при некотором z_1 . Так, если при $z = z_1$ расположена полностью отражающая граница, то $V(z_1) = \pm 1$.

Отметим, что уравнение Рикатти для коэффициента отражения в акустическом случае получено также в работе [247].

25.2. Уравнение для коэффициента отражения электромагнитной волны. Рассмотрим вначале случай, когда вектор \mathbf{E} перпендикулярен плоскости падения ($E_x = E_z = H_y = 0$). Учитывая, снова, что $\partial/\partial x = i\xi$, из второго уравнения (4.2) находим $(\omega/c)H_z = \xi E_y$. После этого, из первого из уравнений (4.2) и из уравнения $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$ получаем два уравнения для H_x и E_y :

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} + \frac{ic}{\omega} (\xi^2 - \xi^2) E_y = 0, \quad k^2(z) \equiv \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon', \quad \frac{\partial E_y}{\partial z} + i \frac{\omega}{c} H_x = 0. \quad (25.9)$$

Как и в акустическом случае, решаем эту систему, введя падающую волну

$$E_y = P(z), \quad H_x = -\frac{c}{\omega} \beta P(z), \quad \beta \equiv \sqrt{k^2(z) - \xi^2}; \quad (25.10)$$

отраженную волну

$$E_y = R(z), \quad H_x = \frac{c}{\omega} \beta R(z), \quad (25.10')$$

где $P(z)$ и $R(z)$ — неизвестные пока функции. Подставляя сумму полей (25.10) и (25.10') в уравнения (25.9), как и в акустическом случае, для коэффициента отражения $V(z) = R(z)/P(z)$ получаем снова уравнение (25.7), где

$$\gamma = \beta'/2\beta. \quad (25.11)$$

В случае, когда \mathbf{E} лежит в плоскости падения, будем иметь падающую волну

$$E_x = (\omega \beta / ck^2) P(z), \quad H_y = P(z); \\ \text{отраженную волну}$$

$$E_x = -(\omega \beta / ck^2) R(z), \quad H_y = R(z). \quad (25.12)$$

Для коэффициента отражения $V(z) = R(z)/P(z)$ снова получаем уравнение (25.7), где

$$\gamma = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{k^2} \right)' \frac{k^2}{3}. \quad (25.13)$$

25.3. Уравнение для импеданса. Можно получить уравнение Рикатти также для импеданса $Z_1 \equiv p(z)v_z(z)$. Мы рассматриваем здесь акустический случай. Электромагнитный (э.м.) случай рассматривается аналогично (см., например, [216]). Умножив первое из уравнений (25.2) на p , второе на v_z и вычтя из первого второе, получим

$$v_z p - p' v_z = i \rho \omega [(3^2 / \rho^2 \omega^2) p^2 - v_z^2].$$

Разделив это уравнение на v_z^2 , мы получаем искомое уравнение

$$Z' = i \rho \omega [(3^2 / \rho^2 \omega^2) Z^2 - 1]. \quad (25.14)$$

При помощи второго из уравнений (25.2), импеданс может быть выражен через p и p' так:

$$Z \equiv p/v_z = i \rho \omega p/p', \quad (25.15)$$

отсюда находим

$$p' p = i \rho \omega / Z,$$

или, интегрируя,

$$\ln p = i \omega \int_{z_0}^z \rho Z^{-1} dz, \quad p = \exp \left[i \omega \int_{z_0}^z \rho Z^{-1} dz \right]. \quad (25.16)$$

Нижний предел z_0 может быть выбран произвольно, для удовлетворения граничных условий. Таким образом, после того, как импеданс $Z(z)$ найден (скажем, путем решения уравнения (25.14)), давление может быть найдено по формуле (25.16).

25.4. Первый метод последовательных приближений для определения коэффициента отражения [9, 10]. Мы изложим два метода последовательных приближений для определения коэффициента отражения V . Один из них, рассматриваемый в настоящем разделе, удобно применять в случаях тонких слоев, другой, излагаемый в следующем разделе, дает быстро сходящийся ряд в случае слабо отражающих слоев, где в качестве первого приближения можно применять геометрическую оптику.

Мы будем исходить из уравнения (25.7) в котором, как показано выше,

$$\gamma = q'/2q, \quad (25.17)$$

где $q = \beta/\rho$ — в акустике; $q = \beta$ — в э.м. случае, E перпендикулярно плоскости падения; $q = \beta/k^2$ — в э. м. случае, E лежит в плоскости падения.

Представим коэффициент отражения $V = V(z)$ в виде

$$V = \frac{qv - q_1 u}{qv + q_1 v}, \quad (25.18)$$

где $u = u(z)$ и $v = v(z)$ — две новые неизвестные функции и $q_1 = \lim_{z \rightarrow \infty} q$.

Подставляя (25.18) в (25.7) и учитывая выражение (25.17) для γ , получаем уравнение

$$\frac{v'}{v} - \frac{u'}{u} = i\beta \left[\frac{q_1}{q} \frac{u}{v} - \frac{q}{q_1} \frac{v}{u} \right]. \quad (25.19)$$

Это уравнение можно удовлетворить, подчинив u и v двум уравнениям:

$$u' = i\beta q v / q_1, \quad v' = i\beta q_1 u / q. \quad (25.20)$$

Их решения с граничными условиями

$$u(\infty) = v(\infty) = 1 \quad (25.21)$$

дает выражение (25.18) для коэффициента отражения, удовлетворяющее уравнению (25.7) и граничному условию (25.8). Это и будет решением нашей задачи. При найденных u и v для коэффициента отражения в точке $z = z_0$ на достаточно большом удалении от слоя получаем, обозначая $q(z_0) = q_0$

$$V = -\frac{q_0 v(z_0) - q_1 u(z_0)}{q_0 v(z_0) + q_1 u(z_0)}. \quad (25.22)$$

Решения системы (25.20) можно найти при помощи метода последовательных приближений. Обозначим

$$\eta_1 = n(q/q_1) \cos \vartheta, \quad \eta_2 = n(q_1/q) \cos \vartheta. \quad (25.23)$$

Тогда система (25.20) запишется

$$u' = ik_0 \eta_1 v, \quad v' = ik_0 \eta_2 u. \quad (25.24)$$

Заменяя правые части уравнений нулями, получаем в нулевом приближении $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ или, учитывая граничные условия (25.21), получаем

$$u = 1, \quad v = 1. \quad (25.25)$$

Подставляя найденные значения u и v в правые части уравнений (25.20), получаем, опять учитывая граничные условия,

$$u(z) = 1 + ik_0 \int_{-\infty}^z \eta_1(z) dz, \quad v(z) = 1 + ik_0 \int_{-\infty}^z \eta_2(z) dz. \quad (25.26)$$

Подставив (25.26) в правые части (25.24) и взяв интеграл от обеих частей равенств, получим второе приближение для u и v и т. д. В результате $u(z)$ и $v(z)$ будут выражаться в виде бесконечных рядов. При произвольном, но заданном $z = z_0$, будем иметь

$$\begin{aligned} u(z_0) &= 1 + ik_0 \int_{-\infty}^{z_0} \eta_1(z) dz - k_0^2 \int_{-\infty}^{z_0} \eta_1(z) dz \int_{-\infty}^z \eta_2(z) dz - \\ &\quad - ik_0^3 \int_{-\infty}^{z_0} \eta_1(z) dz \int_{-\infty}^z \eta_2(z) dz \int_{-\infty}^z \eta_1(z) dz + \dots, \\ v(z_0) &= 1 + ik_0 \int_{-\infty}^{z_0} \eta_2(z) dz - k_0^2 \int_{-\infty}^{z_0} \eta_2(z) dz \int_{-\infty}^z \eta_1(z) dz - \\ &\quad - ik_0 \int_{-\infty}^{z_0} \eta_2(z) dz \int_{-\infty}^z \eta_1(z) dz \int_{-\infty}^z \eta_2(z) dz + \dots \end{aligned} \quad (25.27)$$

Практически в нижних пределах всех интегралов вместо ∞ необходимо брать $z = z_1$, соответствующее границе слоя.

Нетрудно показать, что полученные нами ряды дают разложение функций u и v по степеням $k_0 l = 2\pi l/\lambda_0$, где l — толщина слоя. Для этого в уравнениях (25.20) вместо z введем безразмерную координату $\zeta = z/l$ и обозначим $\eta_1(z) \equiv \sigma_1(\zeta)$, $\eta_2(z) \equiv \sigma_2(\zeta)$. Тогда уравнения (25.24) запишутся

$$du/d\zeta = ik_0 l \sigma_1(\zeta) \cdot v, \quad dv/d\zeta = ik_0 l \sigma_2(\zeta) \cdot u. \quad (25.28)$$

Интегрируя последнюю систему методом последовательных приближений, получаем снова ряды типа (25.27) с той лишь разницей, что перед отдельными членами вместо множителей k_0^n , $n = 0, 1, 2, \dots$, будут стоять множители $(k_0 l)^n$, что и требовалось доказать. Заметим, что в нулевом приближении, когда $u = v = 1$, мы из (25.18) получаем

$$V(z_0) = (q_0 - q_1)/(q_0 + q_1) \quad (25.29)$$

— коэффициент отражения от границы раздела двух сред, что и естественно, поскольку этот случай соответствует бесконечно тонкому переходному слою ($l = 0$).

Ряды (25.27) являются сходящимися, если функция $q(z)$ во всей рассматриваемой нами области (z_0, z_1) не обращается ни в нуль, ни в бесконечность. Это следует из того, что правые части уравнений (25.24) удовлетворяют всем условиям, необходимым для сходимости использованного выше метода последовательных приближений. В частности, сходимость этих рядов без труда доказывается при помощи теоремы Каччиополли — Тихонова [74]. Сходимость рядов этого вида рассматривается также в книге Н. Фрёман и П. У. Фрёман [100, гл. 3].

25.5. Второй метод последовательных приближений для определения коэффициента отражения [9]. Уравнение (25.7) можно записать в виде

$$\frac{d}{dz} \left[V \exp \left(2i \int_{z_0}^z \beta dz \right) \right] = \gamma (1 - V^2) \exp \left(2i \int_{z_0}^z \beta dz \right). \quad (25.30)$$

Нижний предел интегрирования z_0 в экспоненте является произвольным.

Уравнению (25.30) с граничным условием (25.8) эквивалентно интегральное уравнение

$$\exp \left(2i \int_{z_0}^z \beta dz \right) V(z) = - \int_z^\infty \gamma (1 - V^2) \exp \left(2i \int_{z_0}^z \beta dz \right) dz. \quad (25.31)$$

Последнее снова будем решать методом последовательных приближений. Считая γ малой и пренебрегая в нулевом приближении правой частью, мы получаем $V_{(0)}(z) = 0$. Это соответствует приближению геометрической оптики, в котором, как мы видели (см. § 23), волна распространяется в среде без отражения.

Подставляя $V = 0$ в правую часть (25.31) и обозначая

$$s(z) \equiv 2 \int_{z_0}^z \beta(z) dz, \quad (25.32)$$

получаем в первом приближении

$$V_{(1)}(z) = -e^{-is(z)} \int_z^\infty \gamma(z) e^{is(z)} dz. \quad (25.33)$$

Второе приближение получим, подставляя последнее выражение в правую часть (25.31) и т. д. В результате получим последовательность функций $V_{(0)}, V_{(1)}, V_{(2)}, \dots$, где $V_{(m+1)}$ находится из $V_{(m)}$ при помощи соотношения

$$V_{(m+1)}(z) = -e^{-is(z)} \int_z^\infty \gamma(z) [1 - V_{(m)}^2(z)] e^{is(z)} dz. \quad (25.33a)$$

Можно показать, что если функция $\gamma(z)$ во всех точках ограничена по своей величине, что согласно (25.17) физически означает отсутствие мест со скачкообразным изменением параметров среды и точек, где $m(z) = \sin \vartheta_0$, соответствующих завороту луча, то при $n \rightarrow \infty$ мы получаем сходящуюся последовательность для $V(z)$. Это непосредственно следует из общих критерий сходимости метода последовательных приближений Пикара (см. [74, § 42], [100, гл. 3]).

Из изложенного выше нетрудно также видеть, что последовательность получаемых приближений сходится тем быстрее, чем меньше абсолютное значение квадрата коэффициента отражения $|V|^2$.

Различные приближения для коэффициента отражения имеют простой физический смысл. Как уже указывалось, нулевое приближение $m = 0$, в котором $V = 0$ соответствует приближению геометрической оптики. Можно также показать, что первое приближение (25.33) соответствует учету однократных отражений в неоднородной среде, последующие же приближения — двухкратному, трехкратному и т. д. отражениям (см. § 23.2).

Действительно, рассмотрим подробнее выражение (25.33). При $z = z_0$ из него получаем

$$V_{(1)}(z_0) = - \int_{z_0}^\infty \gamma(z) \exp\left(2i \int_{z_0}^z \beta dz\right) dz. \quad (25.34)$$

Чтобы нагляднее представить себе физический смысл этого выражения, разобьем всю неоднородную среду от $z = z_0$ до $z = \infty$ на большое число очень тонких слоев, простирающихся от z_0 до z_1 , от z_1 до z_2 , от z_2 до z_3 и т. д. Разобьем интеграл (25.34) на сумму интегралов, каждый из которых распространяется на отдельный слой

$$\begin{aligned} V_{(1)}(z_0) = & - \int_{z_0}^{z_1} \gamma(z) \exp\left(2i \int_{z_0}^z \beta dz\right) dz - \int_{z_1}^{z_2} \gamma(z) \exp\left(2i \int_{z_0}^z \beta dz\right) dz - \dots \\ & \dots - \int_{z_n}^{z_{n+1}} \gamma(z) \exp\left(2i \int_{z_0}^z \beta dz\right) dz - \dots \end{aligned} \quad (25.35)$$

Рассмотрим интеграл от z_n до z_{n+1} . Если взять z_n и z_{n+1} достаточно близкими, то величина $\exp\left(2i \int_{z_0}^z \beta dz\right)$ в пределах этого слоя будет меняться мало и ее можно вынести за знак интеграла при значении, скажем, $z = z_n$. Остающийся интеграл от $\gamma(z)$ при учете (25.17) запишется

$$\int_{z_n}^{z_{n+1}} \gamma(z) dz = \frac{1}{2} \int_{z_n}^{z_{n+1}} \frac{1}{q} \frac{dq}{dz} dz.$$

Снова, вынося $1/q$ за интеграл при значении $q = q_n$, получаем

$$\int_{z_n}^{z_{n+1}} \gamma(z) dz = \frac{1}{2q_n} \int_{z_n}^{z_{n+1}} \frac{dq}{dz} dz = \frac{q_{n+1} - q_n}{2q_n}.$$

Здесь вследствие близости значений q_n и q_{n+1} , величину $2q_n$ можно заменить на $q_n + q_{n+1}$.

В результате для n -го члена в (25.35) получаем

$$-\int_{z_n}^{z_{n+1}} \gamma(z) \exp\left(2i \int_{z_0}^z \beta dz\right) dz = \frac{q_n - q_{n+1}}{q_n + q_{n+1}} \exp\left(2i \int_{z_0}^{z_n} \beta dz\right). \quad (25.36)$$

Отсюда видим, что n -й член в (25.35) представляет собой волну, отраженную от слоя (z_n, z_{n+1}) . При этом фактор $\exp\left(2i \int_{z_0}^z \beta dz\right)$ дает набег фазы при

распространении прямой волны от z_0 до z_n и отраженной волны при обратном пробеге. Фактор же $(q_n - q_{n+1})/(q_n + q_{n+1})$ представляет собой коэффициент отражения от слоя. Если представить себе, что наши слои являются однородными, а изменение свойств среды происходит на их границах, то последнее будет совпадать с известным выражением для коэффициента отражения на границе раздела двух сред.

Таким образом, выражение (25.34) представляет собой сумму волн, отраженных в полупространстве $z_0 \rightarrow \infty$ и суммирующихся при $z = z_0$ каждая со своим набегом фазы. В этом приближении прямая волна, распространяющаяся от $z = z_0$ к $z = \infty$ и «генерирующая» по дороге отраженные волны, предполагается имеющей неприменимую амплитуду, равную 1, т. е., ее ослаблением пренебрегается. В следующих приближениях учитывается как ослабление прямой волны, так и многократные отражения волн в разных слоях.

В заключение отметим, что под коэффициентом отражения $V(z_0)$ мы понимаем отношение комплексных амплитуд прямой и обратной волн с учетом фазы той и другой волны. Так, например, если бы при некотором $z = z_1$ в однородной среде была расположена абсолютно отражающая плоскость, для которой $V = 1$, то при $z = z_0$ наш коэффициент отражения записался бы в виде

$$V(z_0) = \exp[2ik_0(z_1 - z_0)].$$

Это выражение сразу получается при интегрировании (25.30) при $\gamma = 0$ и граничном условии $V(z_1) = 1$.

Нетрудно видеть, что если точку, для которой определяется коэффициент отражения в случае отражения от неоднородного слоя, перенести из $z = z_0$ в $z = z_0 - \Delta$, причем как z_0 , так и $z_0 - \Delta$ лежат вне области, где имеет место заметное отражение, то справедливо следующее соотношение между коэффи-

циентами отражения в этих двух точках:

$$V(z_0 - \Delta) = V(z_0) \exp \left(-2i \int_{z_0 - \Delta}^z \beta dz \right). \quad (25.37)$$

25.6. Сравнение точного и приближенного методов расчета на конкретном примере. В качестве примера рассмотрим нормальное падение электромагнитной волны на слой, простирающийся от $z = -L/2$ до $z = L/2$, в котором показатель преломления меняется по закону

$$n = A [A + (z/L + 1/2)]^{-1}, \quad A = n_1/(1 - n_1), \quad (25.38)$$

а за пределами этого интервала имеет постоянные значения, равные 1 при $z < -L/2$ и n_1 (при $z > L/2$). Введенные выше функции $\beta(z)$ и $\gamma(z)$, а также q и q_1 здесь будут иметь значения $\beta = k_0 n$, $\gamma = n'/2n$, $q(z) = nk_0$, $q_1 = n_1 k_0$. Этот случай относится также к акустике, если показатель преломления n

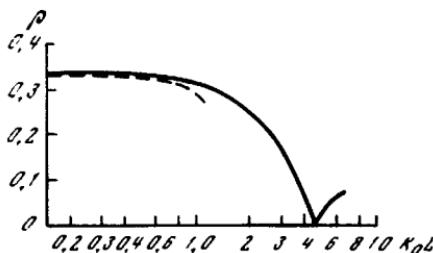


Рис. 25.1. Сравнение результатов точного и приближенного методов расчета коэффициента отражения

заменить на величину $\rho_0 c_0 / \rho c$, где ρ_0 и c_0 — плотность среды и скорость звука в ней при $z < -L/2$. При вычислениях мы ограничимся вторыми приближениями в обоих методах. Точное выражение для коэффициента отражения в этом случае дается формулами (20.46).

На рис. 25.1 приведены результаты вычислений модуля коэффициента отражения $\rho = |V|$ при $n_1 = 2$. По оси ординат отложено ρ в натуральном масштабе, по оси абсцисс $k_0 L$ в логарифмическом масштабе. Пунктирная кривая вычислена по первому методу, сплошная — по второму. При малых $k_0 L$ обе кривые совпадают друг с другом. На рисунке не нанесена кривая, вычисленная по точной формуле, так как она практически наложилась бы на сплошную кривую. Оказывается, что в этом случае второе приближение во втором методе последовательных приближений при всех значениях $k_0 L$ дает значения ρ , отличающиеся от вычисленных по точной формуле не больше чем на 1%.

Полученное приближенным путем значение $k_0 L$, для которого коэффициент отражения ρ обращается в нуль, совпадает с правильным с точностью до 0,02%. Из рисунка видно, что первый метод последовательных приближений дает удовлетворительный результат только до $k_0 L \approx \pi/4$.

Заметим, что в рассмотренном случае функция $\gamma = n'/2n$ имеет разрыв непрерывности на границах слоя. Несмотря на это, предложенные выше методы последовательных приближений применимы.

Сравнение точных значений для коэффициента отражения с полученными приближенным интегрированием уравнения Риккатти для других случаев см. в работе [155].

25.7. Отражение волны от неоднородного полупространства. Применим второй метод последовательных приближений для вычисления коэффициента отражения от полупространства, в котором квадрат показателя преломления изменяется по линейному закону. Предположим, что это полупространство в плоскости $z = 0$ соприкасается с однородным полупространством. Зависимость показателя преломления $n(z) = c_0/c(z)$ от координаты z будет

даваться формулами *

$$z \leq 0, \quad n = 1; \quad z \geq 0, \quad n^2 = 1 + az. \quad (25.39)$$

Волна предполагается падающей из однородной среды. Угол падения как и раньше, обозначим через ϑ_0 . Мы предположим, также, что величина a достаточно мала [см. неравенство (25.47) ниже]. Это позволит нам ограничиться первым приближением, достаточным для многих практических применений.

В выражении (25.34) для коэффициента отражения примем $z_0 = 0$. Это будет соответствовать предположению, что точка, в которой вычисляется коэффициент отражения, лежит в плоскости $z = 0$, т. е. на границе раздела однородной и неоднородной сред.

Рассмотрим для определенности случай отражения электромагнитной волны, в которой вектор электрического поля направлен перпендикулярно плоскости падения. Функции $\gamma(z)$ и $\beta(z)$ в (25.34) согласно (25.17) и (25.3) запишутся

$$\begin{aligned} \beta(z) &= k_0 \sqrt{n^2(z) - \sin^2 \vartheta_0} = k_0 \sqrt{\cos^2 \vartheta_0 + az}, \\ \gamma &= \beta'/2\beta = a/4(\cos^2 \vartheta_0 + az). \end{aligned} \quad (25.40)$$

Теперь из (25.34) получаем

$$V = -\frac{a}{4} \int_0^\infty \frac{dz}{\cos^2 \vartheta_0 + az} \exp \left(2ik_0 \int_0^z \sqrt{\cos^2 \vartheta_0 + az} dz \right). \quad (25.41)$$

Здесь мы имеем

$$2 \int_0^z \sqrt{\cos^2 \vartheta_0 + az} dz = \frac{4}{3a} [(\cos^2 \vartheta_0 + az)^{3/2}]_0^z = \frac{4}{3a} [(\cos^2 \vartheta_0 + az)^{3/2} - \cos^3 \vartheta_0]. \quad (25.42)$$

Введем вместо z новую переменную ζ в соответствии с равенством

$$\frac{4k_0}{3a} [(\cos^2 \vartheta_0 + az)^{3/2} - \cos^3 \vartheta_0] = i\zeta. \quad (25.43)$$

Пределы интегрирования по этой переменной будут 0 и $-i\infty$. Однако, поскольку в четвертом квадранте плоскости не содержится никаких особых точек подынтегральной функции, интегрирование по мнимой оси от 0 до $-i\infty$ можно заменить интегрированием по вещественной оси от 0 до ∞ . В результате выражение (25.41) записывается

$$V = -\frac{ia}{8k_0} \int_0^\infty \left(\cos^3 \vartheta_0 + \frac{3a}{4k_0} i\zeta \right)^{-1} e^{-\zeta} d\zeta. \quad (25.44)$$

Здесь под интегралом произведем разложение по степеням ζ

$$\left(\cos^3 \vartheta_0 + \frac{3a}{4k_0} i\zeta \right)^{-1} = \frac{1}{\cos^3 \vartheta_0} \left(1 - \frac{3a}{4k_0} \frac{i\zeta}{\cos^3 \vartheta_0} - \frac{9a^2}{16k_0^2} \frac{\zeta^2}{\cos^6 \vartheta_0} + \dots \right)$$

и воспользуемся значением интеграла (p — целое число)

$$\int_0^\infty e^{-\zeta} \zeta^{p-1} d\zeta = (p-1)!$$

* В § 21 рассмотрено точное решение этой задачи, требующее привлечения значительно более сложного математического аппарата.

Тогда выражение (25.44) для коэффициента отражения записывается

$$V = \frac{a}{8ik_0 \cos^3 \vartheta_0} \left[1 - \frac{3i}{4} \left(\frac{a}{k_0 \cos^3 \vartheta_0} \right) - \frac{9}{8} \left(\frac{a}{k_0 \cos^3 \vartheta_0} \right)^2 + \dots \right]. \quad (25.45)$$

Так как в нашем выводе предполагалось, что $|V|^2 \ll 1$ [только при этом условии справедлива формула (25.34)], то, следовательно, величина $a/k_0 \cos^3 \vartheta_0$ должна быть малой по сравнению с единицей. Поэтому все члены в квадратной скобке кроме единицы можно отбросить, и мы получаем

$$V = a/8ik_0 \cos^3 \vartheta_0. \quad (25.46)$$

Этот результат совпадает с формулой (21.27), полученной более сложным методом. Для справедливости (25.46) необходимо, как мы видим, выполнение неравенства

$$a/k_0 \cos^3 \vartheta_0 \ll 1. \quad (25.47)$$

Для случая нормального падения волны выражение (25.46) было получено еще Р. Гансом [158]. Однако Р. Ганс и последующие авторы трактовали это выражение как коэффициент отражения от границы раздела однородной и неоднородной сред, т. е. от границы, где градиент диэлектрической постоянной терпит разрыв. При этом считалось, что имеется близкая аналогия между отражением в рассматриваемом случае и отражением волн от границы двух однородных сред (формула Френеля), только в первом случае отражение происходит от границы, где терпит разрыв градиент диэлектрической постоянной, а во втором случае — от границы, на которой скачкообразно изменяется сама диэлектрическая постоянная. Из наших формул (25.34) и (25.41) видно, что в действительности в первом случае отражает не граница $z = 0$, а все неоднородное полупространство.

Так, в частности, по Гансу, отражение должно было бы исчезнуть, если функцию $n(z)$ сгладить так, чтобы dn/dz было непрерывной функцией z . Пользуясь же нашими результатами, легко можно показать, что сглаживание скачка dn/dz на интервале Δz , малом по сравнению с эффективной длиной волны в направлении z , равной $\lambda_0/\cos \vartheta_0$, никак не сказывается на значении коэффициента отражения.

25.8. О неоднозначности разбиения полного поля на прямую и обратную волны. Во избежание недоразумений необходимо иметь в виду, что уравнения поля, из которых мы исходим (уравнения звукового поля (19.1) или уравнение Максвелла (25.9)) определяют только полное значение поля. Разбиение же последнего на сумму падающей и отраженной волн, как это сделано выше, сопряжено с некоторой степенью произвола. Исключением являются лишь случаи однородной среды или среды с медленно меняющимися свойствами. Только в них поле однозначно может быть разбито на волны, распространяющиеся в ту и другую сторону.

В неоднородной среде бегущей волной обычно называют выражение вида $A(z) \exp i\Phi(z)$, где A — амплитуда волны, а $\Phi(z)$ — фаза. Однако это выражение, если только $A(z)$ не является постоянной или медленно меняющейся функцией, может с таким же успехом представлять собой и стоящую волну. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим следующий пример, указанный С. ІЦелкуновым [229].

Пусть мы имеем функцию

$$E(z) = \cos \beta z + \varepsilon \exp(i\beta z). \quad (25.48)$$

При $\varepsilon \ll 1$ эта функция описывает волну, являющуюся в основном стоячей, так как доминирует первый член. Однако это же выражение можно представить в виде

$$E(z) = A(z) \exp i\Phi(z), \quad (25.49)$$

где

$$A(z) = \sqrt{(1+\varepsilon)^2 \cos^2 \beta z + \varepsilon^2 \sin^2 \beta z},$$
$$\Phi(z) = \operatorname{arctg} [\varepsilon \sin \beta z / (1+\varepsilon) \cos \beta z].$$

Тем самым это выражение как бы приобретает вид бегущей волны.

Поле в неоднородной среде в общем случае всегда можно представить в виде $A(z) \exp i\Phi(z)$, но разделить однозначно это выражение на сумму «прямой» и «отраженной» волн не представляется возможным. Более того, такое разделение в общем случае не имело бы никакого физического смысла. Понимание этого иногда отсутствует даже в весьма солидных работах по распространению волн. В частности, этим объясняется одна существенная ошибка в уже упомянутой выше работе Р. Ганса [158]. Исследуя полное отражение волны в неоднородной среде, он получает совершенно правильное выражение для поля вблизи точки поворота: $w^{1/3} [e^{i\pi/3} H_{13}^{(1)}(w) + H_{13}^{(2)}(w)]$. В этом выражении он считает член $w^{1/3} H_{13}^{(1)}(w)$ падающей волной, другой же член — отраженной волной. Основанием для этого ему служит только то, что вдали от точки отражения (w — велико), где применима геометрическая оптика, этот член переходит в падающую, а другой в отраженную волны.

Однако можно предложить много способов разбиения выписанного выше выражения на «падающую» и «отраженную» волны, каждый из которых при $w \rightarrow \infty$ будет приводить к одному и тому же результату и давать совершенно различные значения для той и другой волны при $w \ll 1$.

В результате своего ошибочного предположения Р. Ганс пришел к линенному всякого смысла заключению, что в так называемой «точке отражения» (точка, соответствующая $w = 0$) падающий и отраженный лучи составляют между собой конечный угол (см. об этом также в § 14.6).

25.9. Для волны данной частоты всегда можно найти неотражающий слой. В заключение параграфа мы покажем, согласно В. Кофинку [184], что при заданной частоте волны всегда можно указать слой с таким распределением параметров по его толщине, что отражение от него будет отсутствовать. Для простоты рассмотрим случай нормального падения волны на слой.

В § 23 было показано, что выражения (23.9) являются приближенными решениями уравнения (23.1), если функция $n(z)$ является достаточно медленно меняющейся. Непосредственной подстановкой легко показать, что выражения (23.9) являются точными решениями уравнения

$$\psi'' + k^2 N^2 \psi = 0, \quad (25.50)$$

где

$$N^2 = n^2(z) + \mathcal{P}(z), \quad \mathcal{P}(z) \equiv \frac{1}{2k^2} \left[\frac{n''}{n} - \frac{3}{2} \left(\frac{n'}{n} \right)^2 \right]. \quad (25.51)$$

Если предположить, что при $z = \pm \infty$ величина $n(z)$ принимает постоянные значения, то $\mathcal{P}(z)$ в этих областях будет исчезать.

Слой, показатель преломления в котором равен $N(z)$, является для частоты ω неотражающим. В нем независимо друг от друга, в противоположных направлениях распространяются две волны (23.9). Итак, если взять не обращающуюся нигде в нуль функцию $n(z)$, то из нее можно по (25.51) найти $N(z)$ для слоя.

Для примера рассмотрим случай, когда функция $n^2(z)$ задается по Эпштейну, а именно:

$$n^2(z) = \frac{\varepsilon_2 + \varepsilon_1}{2} + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2} \operatorname{th} \frac{mz}{2} + \frac{\varepsilon_3}{4} \operatorname{ch}^{-2} \frac{mz}{2}, \quad (25.52)$$

что совпадает с (20.18), если положить $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = 1 - N$, $\varepsilon_3 = -4M$, $n^2 = k^2(z)/k_0^2$.

Для добавочного члена $\mathcal{P}(z)$, сводящего отражение к нулю, получаем, подставляя (25.52) в (25.51)

$$\mathcal{P}(z) = -a(z) S^{-2} [(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) + \varepsilon_2 e^{mz} + \varepsilon_1 e^{-mz}]^{-2}, \quad (25.53)$$

где

$$\varphi(z) = \frac{1}{4} [(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^2 + 2\varepsilon_3^2] + 2\varepsilon_3(\varepsilon_2 + \varepsilon_1) + [\varepsilon_2(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) - \varepsilon_2\varepsilon_3] e^{mz} - \\ - [\varepsilon_1(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) + \varepsilon_1\varepsilon_3] e^{-mz} + \frac{3}{2}\varepsilon_3(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \operatorname{th} \frac{mz}{2} - \frac{\varepsilon_3^2}{4} \operatorname{th}^2 \frac{mz}{2}. \quad (25.54)$$

Величина S , пропорциональная толщине слоя, имеет то же значение, что и в § 20 [см. (20.19)].

Из (25.53) мы видим, что добавочный член обратно пропорционален S^2 . Таким образом, при больших толщинах слоя даже небольшие добавки к ε достаточны, чтобы свести отражение к нулю.

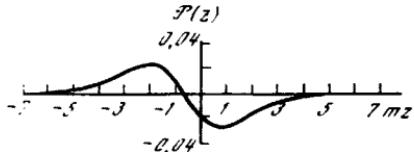


Рис. 25.2. График добавочного члена, сводящего к нулю отражение от переходного слоя

Рассмотрим подробнее оба исследованных в § 20 эпштейновских случаев.

а) Переходной слой ($\varepsilon_3 = 0$). Коэффициент отражения в этом случае дается формулой (20.44), где $n_\infty = \sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1}$. Добавочный член, сводящий отражение к нулю, будет

$$\mathcal{P}(z) = -\frac{\varepsilon_2}{S^2} \frac{(\varepsilon_2 + \varepsilon_1)e^{mz} - \varepsilon_1 e^{-mz} + \frac{1}{4}\varepsilon_2}{[\varepsilon_2(1 + e^{mz}) + \varepsilon_1(2 + e^{mz} + e^{-mz})]^2}. \quad (25.55)$$

На рис. 25.2 добавочный член $\mathcal{P}(z)$ изображен графически для $S = 2$, $\varepsilon_2 = 2$, $\varepsilon_1 = 1$ [184].

Максимальное положительное значение добавки, имеющее место при $mz = -2$, составляет 0,0232, а максимальное по модулю отрицательное зна-

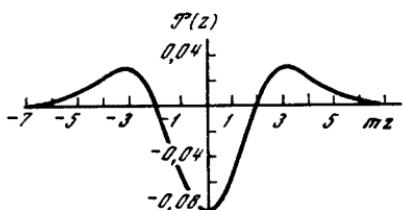


Рис. 25.3. То же, что и на рис. 25.2, но для симметричного слоя

чение (при $mz \approx 0,73$) составляет -0,027. Значение $S = 2$ согласно (20.20) означает, что эффективная толщина слоя составляет примерно $\lambda/2$. Так как добавочный член обратно пропорционален S и на рис. 25.2 он изображен для $S = 2$, то для всех других значений S он будет получаться из этого рисунка путем умножения ординат на величину $(2/S)^2$. Так, при $S = 20$, когда эффективная толщина слоя составляет примерно 10%, добавка к ε не превышает значения 0,00232.

б) Симметричный слой ($\varepsilon_2 = \varepsilon_1$). Коэффициент отражения от слоя дается формулами (20.50) и (20.51). Добавочный член, сводящий отражение к нулю, будет

$$\mathcal{P}(z) = -DS^{-2} [(3\varepsilon_1 + \varepsilon_3) + 2\varepsilon_1 e^{mz} + \varepsilon_1 e^{-mz}]^{-2}, \quad (25.56)$$

где

$$D = \frac{1}{4} (\varepsilon_1^2 + 2\varepsilon_3^2) + 6\varepsilon_3\varepsilon_1 + 2\varepsilon_1(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)e^{mz} - \\ - \varepsilon_1(\varepsilon_1 + \varepsilon_3)e^{-mz} + \frac{3}{2}\varepsilon_1\varepsilon_3 \operatorname{th} \frac{mz}{2} - \frac{\varepsilon_3^2}{2} \operatorname{th}^2 \frac{mz}{2}$$

Графически этот член при $S = 2$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$, $\varepsilon_3 = 8$ изображен на рис. 25.3. Мы видим, что как и в случае переходного слоя, добавки к $n^2(z)$ невелики, даже для $S = 2$, и будут также уменьшаться при увеличении S .

ОТРАЖЕНИЕ И ПРЕЛОМЛЕНИЕ СФЕРИЧЕСКИХ ВОЛН

В теории распространения электромагнитных и звуковых волн, как правило, надо учитывать конечную удаленность источника волн как от приемника, так и от границ раздела сред. Классической и простейшей задачей такого рода является задача о поле точечного излучателя, расположенного на конечном удалении от плоской границы раздела двух однородных сред. Другими словами, это задача об отражении и преломлении сферической волны. Ей и будет посвящена настоящая глава. Впервые эту задачу для электромагнитных волн сравнительно полно рассмотрел А. Зоммерфельд [240]. В дальнейшем появились фундаментальные работы Вейля [263], В. А. Фока (см. [99], главу 23, отредактированную Фоком), М. А. Леонтьевича [58], М. А. Леонтьевича и В. А. Фока [59], А. Баньоса [109].

Ниже мы будем следовать в основном своим работам [7, 8]. При помощи изложенного в них метода можно с единой точки зрения исследовать случаи, рассматривавшиеся до сих пор различными методами (например, случаи излучателя на границе раздела и поднятого излучателя, случай умеренной и большой проводимости одной из сред, акустический случай и т. д.). Этим же методом удается решить задачу о преломлении сферических волн. Основой метода является использование и дальнейшее развитие предложения Вейля [263] о разложении сферической волны на плоские. Мы будем рассматривать лишь случай гармонической волны. Теория отражения сферического импульса развита, например, в работе Д. Тауна [252]. Некоторые особенности отражения от плоской границы импульса, излучаемого линейным источником, исследованы в работе А. Нирия [219]. В частности, детально проанализированы характеристики вступления отраженной и преломленной волн и сравчены с теми, которые ранее были найдены в приближении геометрической акустики Фридрихсона и Келлером. Некоторые теоретические и экспериментальные результаты, относящиеся к отражению акустических волн, см. в работах [176, 189, 227].

§ 26. Сферические волны

26.1. Поле элементарного излучателя электромагнитных волн. Элементарным излучателем электромагнитных волн является, например, переменный электрический диполь. Напомним, что векторный потенциал произвольной системы токов выражается формулой [89]

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}\left(t - \frac{r}{c}\right) dr}{r}, \quad (26.1)$$

причем интегрирование производится по объему всех тел, где плотность тока \mathbf{j} отлична от нуля, а r — расстояние от произвольного элемента интегрирования dr до точки наблюдения. При этом мы пользуемся гауссовой системой единиц.

В простейшем случае переменный электрический диполь или, как иногда говорят, электрический вибратор, может быть представлен в виде прямолинейного отрезка провода длины l ($l \ll \lambda$), к концам которого приложено пере-

менное напряжение. Предполагая силу возникающего при этом тока I постоянной по длине l , формулу (26.1) можно записать в виде

$$\mathbf{A} = \mathbf{I}(t - R/c)l/cR, \quad (26.2)$$

где R — расстояние от средней точки диполя до точки наблюдения.

Зная \mathbf{A} , скалярный потенциал φ можно найти из соотношения

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = -(\epsilon\mu/c)\partial\varphi/\partial t, \quad (26.3)$$

после чего электрическое и магнитное поля найдутся по формулам

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (26.4)$$

При исследовании поля элементарного диполя оказывается удобным вместо двух функций \mathbf{A} и φ пользоваться одной функцией — вектором Герца Π , через которую \mathbf{A} и φ выражаются следующим образом:

$$\mathbf{A} = (\epsilon\mu/c)\partial\Pi/\partial t, \quad \varphi = -\operatorname{div} \Pi. \quad (26.5)$$

При этом соотношение (26.3) удовлетворяется автоматически. Вектора \mathbf{E} и \mathbf{H} , как легко видеть из (26.4) и (26.5), через вектор Герца будут выражаться так:

$$\mathbf{E} = -(\epsilon\mu/c^2)\partial^2\Pi/\partial t^2 + \operatorname{grad} \operatorname{div} \Pi, \quad \mathbf{H} = (\epsilon\mu/c)\partial/\partial t(\operatorname{rot} \Pi). \quad (26.6)$$

В (26.2) мы сделаем замену $\Pi = d\mathbf{p}/dt$, где \mathbf{p} — электрический момент диполя. Сравнивая получающееся при этом выражение с первым из соотношений (26.5), мы получаем явное выражение для самого вектора Герца

$$\Pi = \frac{\mathbf{p}(t - R/c)}{\mu\epsilon R}. \quad (26.7)$$

В дальнейшем мы будем рассматривать почти исключительно синусоидальный во времени режим излучения. Задавая, как и выше, зависимость от t в виде фактора $\exp(-i\omega t)$, мы получаем

$$\Pi = (\mathbf{p}_0/\mu\epsilon R)\exp i(kR - \omega t), \quad (26.8)$$

где \mathbf{p}_0 — амплитуда дипольного момента. Таким образом, показано, что вектор Герца элементарного излучателя выражается в виде сферической волны. Поле первичной сферической волны в результате влияния неоднородностей среды может сильно усложняться. Однако во всех случаях, получив вектор Герца этого поля, мы всегда можем перейти к векторам \mathbf{E} и \mathbf{H} по формулам (26.6). Ввиду того, что такой переход никогда не представляет принципиальных затруднений, мы свою задачу будем считать решенной, если будет найден вектор Π .

Заметим, что в случае синусоидального режима, когда $\partial/\partial t = -i\omega$, уравнения (26.6) записываются

$$\mathbf{E} = k^2\Pi + \operatorname{grad} \operatorname{div} \Pi, \quad \mathbf{H} = -(i\omega\epsilon\mu/c)\operatorname{rot} \Pi. \quad (26.9)$$

Нетрудно показать, что последние выражения для \mathbf{E} и \mathbf{H} удовлетворяют уравнениям Максвелла (4.2), если вектор Π удовлетворяет волновому уравнению.

Приведенные выше рассуждения допускают одно важное обобщение. Можно заметить, что уравнения (4.2) имеют определенную симметрию относительно векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} . Поэтому этим уравнениям удовлетворяют не только выражения (26.9), но также и выражения

$$\mathbf{H} = -k^2\Pi_m + \operatorname{grad} \operatorname{div} \Pi_m, \quad \mathbf{E} = (i\omega\epsilon\mu/c)\operatorname{rot} \Pi_m, \quad (26.10)$$

где по сравнению с (26.9) роли \mathbf{E} и \mathbf{H} перенесены (с точностью до знака).

Решение (26.10) называют магнитным решением уравнений Максвелла, а фигурирующий в (26.10) вектор Π_m — магнитным вектором Герца. Зададим вектор Π_m в виде сферической волны $\Pi_m = \mathbf{M} \frac{e^{ikR}}{R}$.

Нетрудно показать, что получающиеся при этом из (26.10) **Е** и **Н** будут представлять собой электромагнитное поле переменного магнитного диполя с моментом **M**. В самом деле, задавая раньше **Н** в виде (26.8) и пользуясь формулами (26.9) для перехода от **Н** к **Е**, мы получали поле переменного **электрического** диполя, у которого электрические силовые линии лежали в меридиональных плоскостях, проходящих через ось диполя, а магнитные силовые линии совпадали с широтными кругами. Теперь, поскольку места **Е** и **Н** переменены, мы получаем электромагнитное поле, в котором магнитные силовые линии направлены по меридианам, а электрические силовые линии по широтным кругам. Это и будет полем переменного магнитного диполя.

Практически такой диполь осуществляется в виде проволочной рамки малых по сравнению с длиной волны размеров, с протекающим по ней переменным током.

26.2. Элементарный излучатель в акустике. В акустике простейшим излучателем является пульсирующая сфера малого радиуса. Звуковое давление или звуковой потенциал этого излучателя также будет выражаться в виде сферической волны указанного выше вида. Если снова ограничиться синусоидальным режимом излучателя и предположить, что радиус сферы мал по сравнению с длиной волны, то звуковой потенциал на расстоянии R от сферы будет выражаться формулой [101]

$$\psi = (V_0 / 4\pi R) \exp i(kR - \omega t),$$

где $V_0 = 4\pi r_0^2 v_0$ — так называемая объемная скорость излучателя, равная произведению площади сферы на амплитуду скорости ее поверхности.

В дальнейшем мы будем изучать отражение и преломление сферической волны безотносительно к тому, какое поле, электромагнитное или акустическое, она собой представляет.

26.3. Разложение сферической волны на плоские. Трудность задачи об отражении и преломлении сферической волны на плоской границе раздела двух сред обусловливается различием между симметрией волны и видом границы. В то время как волна имеет сферическую симметрию, граница является плоской. Естественно поэтому решать задачу, разложив сферическую волну на плоские, тем более что теория отражения и преломления плоских волн теперь нам хорошо известна.

Откладывая всюду фактор $\exp(-i\omega t)$, а также факторы, характеризующие мощность излучателя, сферическую волну запишем в виде e^{ikr}/R . Предполагая, кроме того, временно, что излучатель находится в начале координат, будем иметь $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

В плоскости $z = 0$ поле сферической волны будет иметь вид e^{ikr}/r , где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Разложим это поле в двойной интеграл Фурье по переменным x и y

$$\frac{e^{ikr}}{r} = \iint_{-\infty}^{\infty} A(k_x, k_y) e^{i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y. \quad (26.11)$$

Для определения $A(k_x, k_y)$ имеем согласно хорошо известным формулам

$$(2\pi)^2 A(k_x, k_y) = \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikr}}{r} e^{-i(k_x x + k_y y)} dx dy. \quad (26.12)$$

Перейдем к полярным координатам и обозначим

$$k_x = q \cos \psi, \quad k_y = q \sin \psi, \quad q = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}, \\ x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad dx dy = r dr d\varphi. \quad (26.13)$$

Тогда получаем

$$(2\pi)^2 A(k_x, k_y) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} e^{ir[k - q \cos(\psi - \varphi)]} dr.$$

Интеграл по r берется элементарно. Если, кроме того, предположить, что в среде имеется некоторое, хотя бы как угодно малое поглощение, т. е. k имеет положительную мнимую часть, то подстановка верхнего предела дает нуль и мы получаем

$$(2\pi)^2 A(k_x, k_y) = i \int_0^{2\pi} \frac{d\Phi}{k - q \cos(\psi - \Phi)} = \frac{i}{k} \int_0^{2\pi} \frac{d\delta}{1 - (q/k) \cos \delta}.$$

Подставляя значение табличного интеграла, находим

$$A(k_x, k_y) = \frac{i}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{k^2 - q^2}} = \frac{i}{2\pi \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}}. \quad (26.14)$$

Таким образом,

$$\frac{e^{ikr}}{r} = \frac{i}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(k_x x + k_y y)}}{\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}} dk_x dk_y. \quad (26.15)$$

Так же, как это делалось в § 14 для ограниченного пучка, последнее выражение, описывающее поле в плоскости xy , нетрудно «продолжить» в пространство. Как известно, каждая компонента Фурье при этом будет соответствовать в пространстве плоской волне. С формальной стороны при таком «продолжении» достаточно в экспоненте под интегралом добавить член

$$\pm ik_z z, \text{ где } k_z \equiv \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2} \quad (26.16)$$

Знак плюс соответствует точкам, лежащим в полупространстве $z > 0$, и волнам, распространяющимся в направлении положительных z . Знак минус соответствует точкам, для которых $z < 0$. Таким образом,

$$\begin{aligned} z \geq 0, \quad \frac{e^{ikR}}{R} &= \frac{i}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)} \frac{dk_x dk_y}{k_z}, \\ z \leq 0, \quad \frac{e^{ikR}}{R} &= \frac{i}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} e^{i(k_x x + k_y y - k_z z)} \frac{dk_x dk_y}{k_z}. \end{aligned} \quad (26.17)$$

Правильность проделанного здесь «продолжения» обосновывается тем, что правая часть последнего выражения удовлетворяет волновому уравнению (поскольку ему удовлетворяет подынтегральное выражение) и дает правильное значение поля при $z = 0$.

Выражения (26.17) и представляют собой разложение сферической волны по плоским. Экспонента под интегралом является плоской волной, направление распространения которой задается значениями компонент волнового вектора k_x, k_y, k_z .

В (26.17) интегрирование по горизонтальным компонентам k_x и k_y волнового вектора \mathbf{k} можно заменить интегрированием по углам ϑ и φ , характеризующим направление распространения каждой из плоских волн (см. рис. 26.1). При этом

$$k_x = k \sin \vartheta \cos \varphi, \quad k_y = k \sin \vartheta \sin \varphi, \quad k_z = k \cos \vartheta. \quad (26.18)$$

Интегрирование по φ будем производить в пределах $(0, 2\pi)$. Интегрирование по ϑ не может ограничиться вещественными значениями этого угла. Согласно (26.16), k_z изменяется от значения $k_z = k$ при $k_x = k_y = 0$ до $k_z \rightarrow i\infty$ при $k_x \rightarrow \pm \infty$ или $k_y \rightarrow \pm \infty$.

Поскольку согласно (26.18), имеем $\cos \vartheta = k_z/k$, ϑ будет при этом меняться от $\vartheta = 0$ до $\vartheta = \pi/2 - i\infty$. Путь интегрирования по ϑ мы выберем в виде контура Γ_0 , изображенного на рис. 26.2.

При помощи формул преобразования переменных получаем $dk_x dk_y / k_z = -k_z \sin \vartheta d\vartheta d\phi$.

В результате разложение (26.17) может быть записано также в виде

$$z \geq 0, \quad \frac{e^{ikR}}{R} = \frac{ik}{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_{-\infty}^{i\infty} e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)} \sin \vartheta d\vartheta d\phi,$$

$$z \leq 0, \quad \frac{e^{ikR}}{R} = \frac{ik}{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_{i\infty}^{2\pi} e^{i(k_x x + k_y y - k_z z)} \sin \vartheta d\vartheta d\phi, \quad (26.19)$$

где k_x , k_y и k_z выражаются через ϑ и ϕ при помощи формул (26.18).

Таким образом, мы видим, что в разложении сферической волны, кроме обычных волн всевозможных направлений в пределах углов $0 \leq \phi \leq 2\pi$, $0 \leq \vartheta \leq \pi/2$, содержатся также волны, соответствующие комплексным углам ϑ .

Рис. 26.1. Расположение вектора \mathbf{k} в пространстве и смысл углов ϑ и ϕ

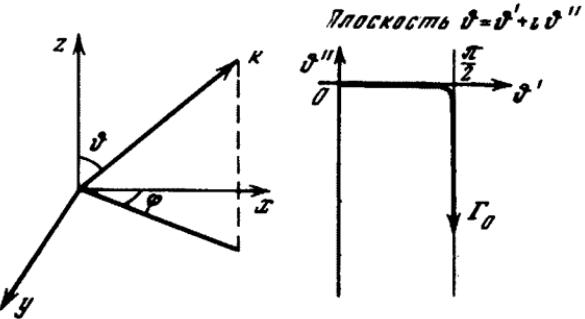
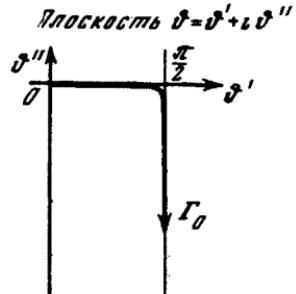


Рис. 26.2. Путь интегрирования в комплексной плоскости



Волны такого типа, называемые также неоднородными, были рассмотрены в § 1. В точках $\vartheta = \pi/2 - ia$, соответствующих контуру интегрирования Γ_0 (см. рис. 26.2), где a — вещественная положительная величина, эти волны распространяются с укороченной длиной волны вдоль некоторого направления в плоскости xy (задаваемого углом ϕ) и экспоненциально убывают по амплитуде в направлении z .

Суперпозицией одних только обычных плоских волн нельзя получить поле, которое имело бы требуемую особенность при $R \rightarrow 0$. Однако нетрудно из наглядных соображений понять, как такая особенность получается при использовании неоднородных волн.

Полагая $\vartheta = \pi/2 - ia$, мы получаем из (26.18) для компонент волнового вектора неоднородных волн

$$k_x = k \cos \phi \cdot \operatorname{ch} a, \quad k_y = k \sin \phi \cdot \operatorname{ch} a, \quad k_z = i \operatorname{sh} a. \quad (26.20)$$

При $a \rightarrow \infty$ получаем $k_x \rightarrow \infty \cos \phi$, $k_y \rightarrow \infty \sin \phi$, $k_z \rightarrow i\infty$. Это означает, что мы имеем волны, распространяющиеся в горизонтальной плоскости (плоскости xy) с длиной волны, стремящейся к нулю, и одновременно затухающие в вертикальном направлении с коэффициентом затухания, стремящимся к бесконечности.

При $x = y = z = 0$ суперпозиция бесконечного числа этих волн [интеграл (26.19)] дает бесконечное значение для поля. При отходе же от этой точки получаются конечные значения или из-за затухания (при $z \neq 0$) или из-за расфазировки (при $x \neq 0$ или $y \neq 0$).

Уместно заметить, что направление осей координат при проведенном выше разложении сферической волны на плоские может выбираться произвольным. Поэтому можно разложить сферическую волну на плоские волны так, чтобы входящие в это разложение неоднородные волны затухали не в направлении оси z , а в любом другом заданном направлении.

Заметим, наконец, что в дальнейшем мы часто вместо угла падения ϑ будем пользоваться дополнительным к нему углом скольжения χ . Замена в (26.19) ϑ на $\vartheta = \pi/2 - \chi$ дает (для $z \geq 0$)

$$\frac{e^{ikR}}{R} = -\frac{ik}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)} \cos \chi d\chi d\varphi, \quad (26.21)$$

где $k_x = k \cos \chi \cos \varphi$, $k_y = k \cos \chi \sin \varphi$, $k_z = k \sin \chi$.

Путь интегрирования по χ проходит от $\chi = \pi/2$ по вещественной оси до $\chi = 0$ и затем по мнимой оси до $\chi = i\infty$.

Здесь мы рассмотрели разложение на плоские волны гармонической сферической волны, зависимость поля от времени в которой дается фактором $\exp(-i\omega t)$. Аналогичное разложение для сферической волны вида $(1/R) F(ct - R)$ с произвольной функцией F дано в работе [221].

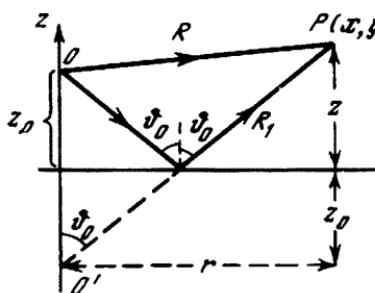


Рис. 26.3. Расположение излучателя O и точки наблюдения P по отношению к границе раздела

(рис. 26.3). Разложение падающей на границу сферической волны по плоским волнам при этом будет записываться в виде формул (26.19), где вместо z будет $z - z_0$.

Отраженная волна $\Phi_{\text{отр}}$ очевидно, может быть представлена в виде суперпозиции плоских волн, получающихся при отражении плоских волн, на которые раскладывается первичная сферическая волна. При отражении каждой плоской волны ее амплитуда должна быть умножена на коэффициент отражения $V(\vartheta)$, где ϑ — угол падения волны и, кроме того, должен быть учтен набег фазы волны при ее проходе от излучателя до границы и затем обратно до точки наблюдения.

Поскольку проекции проходимого при этом волной пути по осям координат есть x , y и $z + z_0$, выражение для отраженной плоской волны будет

$$V(\vartheta) \exp i [k_x x + k_y y + k_z (z + z_0)], \quad (26.23)$$

где k_x , k_y и k_z по-прежнему даются формулами (26.18).

Интегрируя по всем плоским волнам, мы получим выражение $\Phi_{\text{отр}}$ в виде, аналогичном (26.19)

$$\Phi_{\text{отр}} = \frac{ik}{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} e^{i[k(x \sin \theta \cos \varphi + y \sin \theta \sin \varphi + (z + z_0) \cos \theta)]} V(\vartheta) \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (26.24)$$

Интегрирование по ϑ и φ осуществляется в тех же пределах, что и в выражении (26.19) для первичной сферической волны.

Последнюю формулу можно записать в другом виде, учитя, что интеграл по φ сводится к функции Бесселя нулевого порядка. Действительно, обозначим $x = r \cos \varphi_1$, $y = r \sin \varphi_1$. Тогда в (26.24) будем иметь

$$\int_0^{2\pi} e^{i[k(x \cos \varphi + y \sin \varphi) \sin \theta]} d\varphi = \int_0^{2\pi} e^{i[kr \sin \theta \cos(\varphi - \varphi_1)]} d\varphi = 2\pi J_0(u), \quad (26.25)$$

где $u = kr \sin \vartheta$. В результате (26.24) записывается

$$\Psi_{\text{отр}} = ik \int_0^{\pi/2-i\infty} J_0(u) e^{ik(z+z_0)\cos\theta} V(\vartheta_0) \sin \vartheta d\vartheta. \quad (26.26)$$

Последнее выражение также целесообразно преобразовать, изменив пределы интегрирования и заменив функцию Бесселя через функции Ханкеля. Для этого заметим, что

$$J_0(u) = \frac{1}{2} [H_0^{(1)}(u) + H_0^{(2)}(u)],$$

где $H_0^{(1)}$ и $H_0^{(2)}$ — функции Ханкеля 1 и 2-го рода.

Подставив последнее выражение в (26.26), мы разобьем интеграл на два интеграла. В том из них, в который входит $H_0^{(2)}(u)$, заменим ϑ на $-\vartheta$ и учтем что (см. [21], стр. 89) $H_0^{(2)}(e^{-\pi i} u) = -H_0^{(1)}(u)$, а также, что $V(-\vartheta) = V(\vartheta)$. Тогда получим два интеграла с совершенно одинаковыми подынтегральными выражениями, но один, взятый в пределах от 0 до $\pi/2 - i\infty$, пределы же второго будут от $-\pi/2 + i\infty$ до 0. Объединяя оба интеграла в один, взятый в пределах от $-\pi/2 + i\infty$ до $\pi/2 - i\infty$ по пути Γ_1 (см. ниже рис. 28.1), получаем

$$\Psi_{\text{отр}} = \frac{ik}{2} \int_{-\pi/2+i\infty}^{\pi/2-i\infty} H_0^{(1)}(u) e^{ik(z+z_0)\cos\theta} V(\vartheta) \sin \vartheta d\vartheta. \quad (26.27)$$

Пользуясь этой формулой, можно рассчитывать волну, отраженную не только от границы раздела двух однородных сред, но также и от любого неоднородного слоя, подставляя соответствующий коэффициент отражения $V(\vartheta)$ *.

Выражения для коэффициентов отражения звуковых и электромагнитных волн от границы раздела однородных сред были получены соответственно в §§ 2 и 4.

§ 27. Метод перевала. Эталонные интегралы

В дальнейшем мы будем интересоваться анализом отраженной волны, даваемой интегралом (26.27) в волновой зоне, т. е. на больших по сравнению с длиной волны расстояниях от излучателя. При этом его оказывается возможным представить таким образом, что основную роль будут играть только те плоские волны, направление которых близко к направлению луча $O'P$ (рис. 26.3), соответствующего отражению по законам геометрической оптики.

27.1. Метод перевала. Удобным математическим приемом здесь оказывается так называемый метод перевала. Он служит для оценки значений интегралов вида

$$I = \int_C e^{cf(\zeta)} F(\zeta) d\zeta \quad (27.1)$$

при больших значениях параметра ρ . Здесь $f(\zeta)$ и $F(\zeta)$ — некоторые, в общем довольно произвольные аналитические функции комплексной переменной ζ ; C — путь интегрирования в плоскости ζ , который в частном случае может захватывать только вещественные значения ζ .

Общую теорию метода перевала читатель найдет в литературе [51, 86, 68, 121, 151, 178]. В основных чертах этот метод сводится к следующему. Путь интегрирования в комплексной плоскости в известных пределах можно

* Основываясь на излагаемом здесь методе, С. С. Войт [23] рассмотрел задачу об отражении сферической волны при переходе из неподвижной среды в движущуюся.

деформировать, не меняя при этом значения интеграла. Пользуясь этим, постараемся путь интегрирования выбрать так, чтобы можно было выделить некоторую часть пути, притом сравнительно короткую, которая в основном и определяла бы все значение интеграла. Тогда, как мы увидим, подынтегральную функцию удается заменить на другую, более простую функцию, достаточно точно совпадающую с подынтегральной функцией на этом существенном участке пути интегрирования, не заботясь о том, какой она будет на других, несущественных участках.

Не ограничивая общности, ρ в (27.1) можно считать вещественным и положительным. Выделим в $f(\zeta)$ вещественную и мнимую части $f(\zeta) = f_1(\zeta) + i f_2(\zeta)$. Тогда экспонента под интегралом в (27.1) запишется

$$e^{i\rho f_1 + \rho f_2}. \quad (27.2)$$

Путь интегрирования будет удовлетворять указанному выше требованию, если его выбрать так, чтобы на нем функция f_1 имела в некоторой точке максимум и спадала возможно быстрее при удалении от этой точки. Но мнимая и вещественная части аналитической функции — в нашем случае f_1 и f_2 — обладают тем свойством, что в плоскости комплексного переменного линии быстрейшего спада одной из них являются линиями постоянных значений другой.

Так как путь интегрирования должен идти по линии быстрейшего спада f_1 , то отсюда вытекает, что он должен совпадать с линией $f_2 = \text{const}$ — линией постоянной фазы. Расположенная на этом пути точка, в которой f_1 принимает максимальное значение, называется точкой перевала. В ней должна быть равна нулю производная от f_1 . Так как на этом пути $f_2 = \text{const}$, то, следовательно, равна нулю и производная от f_2 . Таким образом, точка перевала может быть найдена из уравнения

$$df/d\zeta = 0. \quad (27.3)$$

Итак, наиболее выгодный путь интегрирования должен проходить через точку перевала, определяемую уравнением (27.3), и уходить от нее по линии $f_2 = \text{const}$. Такой путь мы будем называть «перевальным путем интегрирования». Если ρ велико, то экспонента (27.2) при удалении от точки перевала будет быстро спадать, так что существенную роль будет играть только малая часть пути интегрирования, включающая точку перевала.

Допустим, что решая уравнение (27.3), мы получили для точки перевала значение $\zeta = \zeta_0$. Тогда нетрудно видеть, что перевальным путем будет геометрическое место точек, определяемое уравнением

$$f(\zeta) = f(\zeta_0) - s^2, \quad (27.4)$$

где s — вещественно, $-\infty < s < \infty$. Точка перевала соответствует $s = 0$. Действительно, взяв от (27.4) мнимую и вещественную части, получаем $f_2(\zeta) = f_2(\zeta_0)$, $f_1(\zeta) = f_1(\zeta_0) - s^2$. Отсюда видно, что мнимая часть функции $f(\zeta)$ остается постоянной, а вещественная часть, максимальная при $s = 0$, убывает при удалении от этой точки в обе стороны.

Перейдем в интеграле (27.1) от ζ к новой комплексной переменной s при помощи уравнения (27.4). На плоскости s перевальный путь интегрирования совпадает, как мы только что видели, с вещественной осью. Однако интересно исследовать выражение (27.4) для $f(\zeta)$ не только для вещественных, но и для произвольных комплексных значений s . Положив $s = s' + is''$, получаем, отделив друг от друга мнимую и вещественную части: $f_1 = f_1(\zeta_0) - (s'^2 - s''^2)$, $f_2 = f_2(\zeta_0) - 2s's''$. Отсюда вытекает, что в плоскости s линиями $f_1 = \text{const}$ и $f_2 = \text{const}$ являются два ортогональных друг другу семейства гипербол (рис. 27.1).

Как уже было показано, точкой перевала является точка $s = 0$, а перевальным путем интегрирования — вещественная ось ($s' = 0$). Из рис. 27.1 мы видим, что вещественная ось является одной из линий $f_2 = \text{const}$

и идет перпендикулярно линиям $f_1 = \text{const}$, т. е. по линии быстрейшего спада f_1 . Заметим, что через точку перевала $s = 0$ проходит еще одна линия $f_2 = \text{const}$, а именно мнимая ось ($s' = 0$). Однако на этой линии при удалении от точки $s = 0$ мы имеем не убывание, а, наоборот, возрастание f_1 . Таким образом, путь $s' = 0$ является не путем быстрейшего спада, а путем быстрейшего нарастания f_1 .

Представим себе мысленно рельеф функции f_1 над плоскостью s , получающийся, если в каждой точке (s', s'') перпендикулярно плоскости s восстановить отрезок, длина которого будет пропорциональна значению функции $f_1(s', s'')$, и затем через концы всех этих отрезков провести поверхность. Этот рельеф вблизи точки $s = 0$ будет иметь вид седла, так как по обе стороны от точки $s = 0$ вдоль вещественной оси он опускается, а в перпендикулярном направлении вдоль мнимой оси поднимается. Проходя по вещественной оси слева направо, мы сначала при приближении к точке $s = 0$ поднимаемся по рельефу, а затем, пройдя эту точку и перевалив как бы через перевал, опускаемся. Поэтому точка $s = 0$ называется точкой перевала. Иногда она называется также *седловой точкой*.

Интеграл (27.1) по пути C может быть заменен интегралом от той же подынтегральной функции, взятым по перевальному пути. Возможно только, что к нему придется добавить некоторые слагаемые, получающиеся при обходе особых точек, если они встречаются при деформации пути C в перевальный путь. В частности, если нам придется обойти полюс, то добавится вычет в этом полюсе; если функция окажется многозначной, то возможно, будет нужно добавить интеграл по берегам проведенного соответствующим образом разреза. Не рассматривая здесь этих добавок, мы остановимся на вычислении интеграла по перевальному пути.

Обозначим при замене переменной ζ на s

$$F(\zeta)d\zeta ds \equiv \Phi(s). \quad (27.5)$$

Учитывая также (27.4), интеграл (27.1), взятый по перевальному пути, запишем в виде

$$I := e^{\zeta^2(\zeta_0)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\rho s^2} \Phi(s) ds. \quad (27.6)$$

Так как ρ предполагается большим, то под интегралом будут существенны только малые значения s . Вследствие этого функцию $\Phi(s)$ целесообразно представить в виде ряда по степеням s

$$\Phi(s) = \Phi(0) + \Phi'(0)s + \frac{1}{2}\Phi''(0)s^2 + \dots \quad (27.7)$$

Подставляя этот ряд под интеграл и учитывая значения интегралов

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\rho s^2} ds = \sqrt{\frac{\pi}{\rho}}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\rho s^2} s^2 ds = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\rho^3}}, \quad (27.8)$$

получаем

$$I = e^{\zeta^2(\zeta_0)} \sqrt{\frac{\pi}{\rho}} \left[\Phi(0) + \frac{1}{4\rho} \Phi''(0) + \dots \right]. \quad (27.9)$$

Таким образом, метод перевала позволяет представить значения интеграла в виде ряда по обратным степеням большого параметра ρ . Если функция $\Phi(s)$ является достаточно медленно меняющейся по сравнению с экспонен-

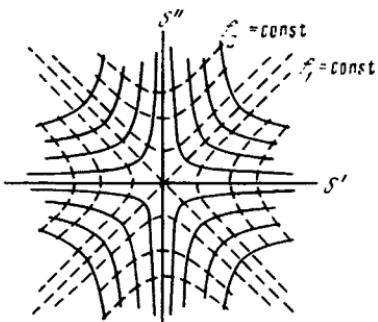


Рис. 27.1. Окрестность точки перевала

той $\exp(-ps^2)$, т. е., если ее производные достаточно малы, то в (27.9) можно ограничиться одним или несколькими первыми членами.

Заметим, что часто функцию $\Phi(s)$, определяемую соотношением (27.5), приходится сразу искать в виде ряда по степеням s , так как отыскание явного ее выражения в точном виде оказывается затруднительным (см., например, следующий параграф). Ограничивааясь выписанными в выражениях (27.7) и (27.9) членами, мы можем найти этот ряд в общем виде. Дифференцируя (27.4) по s , получаем $f'(\zeta)d\zeta/ds = -2s$.

Выражая отсюда $d\zeta/ds$ и подставляя в (27.5), находим

$$\Phi(s) = -2sF(\zeta)/f'(\zeta). \quad (27.10)$$

Представим теперь функции $f(\zeta)$ и $F(\zeta)$ в виде рядов по степеням $x \equiv \zeta - \zeta_0$:

$$f(\zeta) = f(\zeta_0) - Ax^2 + Bx^3 + Cx^4 + \dots,$$

$$A \equiv -\frac{1}{2}f''(\zeta_0), \quad B \equiv \frac{1}{6}f'''(\zeta_0), \quad C \equiv \frac{1}{24}f^{IV}(\zeta_0); \quad (27.11)$$

$$F(\zeta) = F(\zeta_0) [1 + Px + Qx^2 + \dots],$$

$$P \equiv F'(\zeta_0)/F(\zeta_0), \quad Q \equiv F''(\zeta_0)/2F(\zeta_0). \quad (27.12)$$

Подставляя $f(\zeta)$ из (27.11) в (27.4), получаем

$$-Ax^2 + Bx^3 + Cx^4 + \dots = -s^2. \quad (27.13)$$

Обращая этот ряд, можем представить x в виде ряда по степеням s . Для этого положим

$$x = s(1 + a_1s + a_2s^2 + \dots)/\sqrt{A}. \quad (27.14)$$

Подставляя это выражение в (27.13) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях s , получаем

$$a_1 = B/(2A)^{\frac{1}{2}}, \quad a_2 = C/2A^2 - 5B^2/8A^3.$$

Из (27.10) с учетом (27.11) и (27.12), имеем

$$\Phi(s) = -2sF(\zeta_0) \frac{1 + Px + Qx^2}{-2Ax - 3Bx^2 + 4Cx^3}.$$

Подставляя сюда значение x из (27.14), уже нетрудно представить $\Phi(s)$ в виде ряда по степеням s . В результате получаем

$$\Phi(s) = \frac{F(\zeta_0)}{\sqrt{A}} \left[1 + \left(\frac{P}{A^{\frac{1}{2}}} + \frac{B}{A^{\frac{3}{2}}} \right)s + \left(\frac{Q}{A} + \frac{45}{8} \frac{B^2}{A^2} + \frac{3}{2} \frac{C}{A^2} + \frac{3}{2} \frac{B^3}{A^2} \right)s^2 + \dots \right]. \quad (27.15)$$

Из (27.14) имеем вблизи точки перевала $x \equiv \zeta - \zeta_0 \approx s/\sqrt{A}$. Поэтому при $s > 0$ имеем $\arg(1/\sqrt{A}) = \arg(\zeta - \zeta_0)$. Из последнего соотношения и определяется знак корня \sqrt{A} .

Учитывая значения величин A , B , C , P и Q , согласно (27.11) и (27.12), получаем

$$\begin{aligned} \Phi(0) &= \sqrt{-\frac{2}{f''(\zeta_0)}} F(\zeta_0), \\ \frac{1}{2}\Phi''(0) &= \Phi(0) \left[\frac{f'''}{(f'')^2} \frac{F'}{F} + \frac{1}{4} \frac{f^{IV}}{(f')^2} - \frac{5}{12} \frac{(f'')^2}{(f')^3} - \frac{F''}{F'} \right]. \end{aligned} \quad (27.16)$$

Подстановка этих выражений в (27.9) и решает задачу.

Рассмотрим частный случай, когда в (27.1) $f(\zeta) = i\varphi(\zeta)$, $\varphi(\zeta)$ — вещественно; $\varphi'(\zeta_0) = 0$, ζ_0 — точка стационарной фазы. Вблизи последней имеем приближенно $f(\zeta) = i\varphi(\zeta_0) + \frac{i}{2}\varphi''(\zeta_0)(\zeta - \zeta_0)^2$. Вблизи ζ_0 перевальный

путь идет по линии, на которой $\arg(\zeta - \zeta_0) = [\text{знак } \varphi''(\zeta_0)] \frac{\pi}{4}$. Поэтому в (27.15)

$$\frac{1}{\sqrt{A}} = (2/|\varphi''(\zeta_0)|)^{1/2} \exp\left(\pm i \frac{\pi}{4}\right)$$

и, следовательно, в первом приближении метода перевала

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\rho\varphi(\zeta)} F(\zeta) d\zeta = (2\pi/\rho |\varphi''(\zeta_0)|)^{1/2} F(\zeta_0) \exp i[\rho\varphi(\zeta_0) \pm \pi/4], \quad (27.17)$$

где знак перед $\pi/4$ в экспоненте должен совпадать со знаком $\varphi''(\zeta_0)$. Изложенный метод получения формулы (27.17) называют методом стационарной фазы.

27.2. Эталонные интегралы. Метод перевала является простейшей разновидностью метода эталонных интегралов. Идея последнего заключается в следующем. Пусть нам требуется вычислить какой-то интеграл типа (27.1). Для этого мы заменим его на другой, более простой (эталонный) интеграл, в котором правильно передается поведение функций $f(\zeta)$ и $F(\zeta)$ вблизи некоторых, существенных точек, и который уже может быть выражен через некоторые, как правило, известные функции. Этalonный интеграл будет давать асимптотическое значение интеграла (27.1) при $\rho \rightarrow \infty$. В обычном методе перевала «существенной» является единственная точка перевала, вблизи которой $f(\zeta)$ задается выражением (27.4), а функция $F(\zeta)d\zeta/ds$ рядом (27.7). Этalonными в этом случае являются интегралы (27.8).

В дальнейшем, однако, мы встретимся и с другими, более сложными эталонными интегралами. Из них рассмотрим

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\rho s^2} \frac{ds}{s - s_p}. \quad (27.18)$$

Здесь подынтегральная функция имеет кроме перевальной точки $s = 0$ также полюс $s = s_p$. Докажем, что при произвольном расположении полюса по отношению к перевальной точке, I_1 выражается через интеграл вероятности следующим образом:

$$I_1 = \mp 2i\sqrt{\pi} e^{-s_p^2/\rho} Q(\pm is_p, \sqrt{\rho}), \quad Q(u) = \int_u^\infty e^{-x^2} dx. \quad (27.19)$$

Верхние знаки берутся при $\text{Im} s_p > 0$, нижние при $\text{Im} s_p < 0$.

Возьмем табличный интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi s^2} ds = \sqrt{\frac{\pi}{\xi}}, \quad \arg \sqrt{\xi} < \frac{\pi}{4}. \quad (27.20)$$

Умножим обе части (27.20) на $\exp(\xi s_p^2)$ и проинтегрируем по ξ . Путь интегрирования проведем от точки $\xi = \rho$ (вещественно) в бесконечность так, чтобы на бесконечности $\text{Re} \xi s_p^2 < 0$. Заметим, что это мы можем сделать, не пересекая вещественной положительной полуоси в плоскости ξs_p^2 . В результате, подставляя значение табличного интеграла, получаем

$$e^{cs_p^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\rho s^2} ds}{s^2 - s_p^2} = \sqrt{\pi} \int_{\rho}^{\infty} \frac{e^{\xi s_p^2}}{\sqrt{\xi}} d\xi. \quad (27.21)$$

Произведем в правой части замену $x = \mp is_p \sqrt{\xi}$, где верхний знак выбирается, если $\text{Im} s_p > 0$ и нижний, если $\text{Im} s_p < 0$. Путь интегрирования не пересекает мнимой оси в плоскости x и при указанном выборе знаков целиком лежит в правой полуплоскости. Начало его будет при $x = \mp is_p \sqrt{\rho}$,

а конец можно совместить с $x = \infty$. Теперь (27.21) запишется

$$e^{is_p^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ps^2}}{s^2 - s_p^2} ds = \mp \frac{2\sqrt{\pi}}{is_p} \int_{\mp is_p}^{\infty} e^{-sx^2} dx. \quad (27.22)$$

Умножим числитель и знаменатель под интегралом в (27.18) на $s + s_p$. Тогда получаем (поскольку интеграл, содержащий sds , исчезает ввиду нечетности подынтегральной функции)

$$I_1 := s_p \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ps^2} \frac{ds}{s^2 - s_p^2}.$$

Сравнивая это выражение с (27.22), получаем (27.19).

При переходе s_p через вещественную ось значение I_1 , как видно из (27.19), изменяется скачком. Это и естественно, так как при этом добавляется вычет в полюсе $s = s_p$.

Если s_p достаточно велико по модулю так, что

$$\rho |s_p|^2 \gg 1, \quad (27.23)$$

т. е. полюс лежит достаточно далеко от точки перевала, под интегралом в (27.18) будут из-за наличия экспоненты существенны только s малые по сравнению с s_p и величиной s в знаменателе можно пренебречь. Тогда из (27.18) получаем

$$I_1 = -\frac{1}{s_p} \sqrt{\frac{\pi}{\rho}}. \quad (27.24)$$

Это же значение для I_1 мы получим из (27.19), если учтем, что при $u \gg 1$ получаем путем интегрирования по частям

$$Q(u) = \left(\frac{1}{2u} - \frac{1}{4u^3} - \frac{3}{8u^5} - \dots \right) e^{-u^2}. \quad (27.25)$$

Следующий эталонный интеграл, который мы только упомянем, поскольку он уже рассматривался в § 21, будет (см. (21.10)):

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(st + \frac{1}{3}s^3)} ds = 2 \int_0^{\infty} \cos \left(st + \frac{1}{3}s^3 \right) ds = 2\sqrt{\pi} v(t). \quad (27.26)$$

Подынтегральное выражение в I_2 имеет две точки перевала $s_{1,2} := \pm i\sqrt{\tilde{\rho}}$. При большом расстоянии между ними (t велико) можно воспользоваться асимптотическим представлением для $v(t)$, даваемым формулами (21.12) и (21.13).

§ 28. Анализ поля отраженной волны

28.1. Применение метода перевала. Поле в волновой зоне [7, 8, 208]. Проанализируем выражение (26.27) для отраженной волны на больших по сравнению с длиной волны расстояниях от источника. Воспользуемся асимптотическим представлением функции Ханкеля

$$H_0^{(1)}(u) \approx \sqrt{\frac{-2}{\pi u}} e^{i(u - \frac{\pi}{4})} (1 + 1.8iu + \dots). \quad (28.1)$$

Полагая $u = krs \sin \theta$, получаем под интегралом в (26.27) $\exp ik[(z - z_0)\cos \theta + r \sin \theta]$.

Учитывая, что $z - z_0 = R_1 \cos \theta_0$, $r = R_1 \sin \theta_0$, где R_1 — расстояние от минимого излучателя O' до точки наблюдения P (рис. 26.3), эту экспоненту можно записать в виде $\exp ikR_1 \cos(\theta - \theta_0)$. В результате отраженная волна

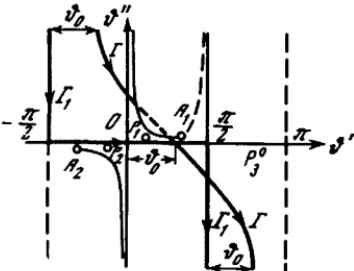
запишется

$$\Psi_{\text{отр}} = \sqrt{\frac{k}{2\pi r}} e^{i\pi/4} \int_{-\pi/2+i\infty}^{\pi/2-i\infty} e^{ikR_1 \cos(\theta - \theta_0)} (1 + 1/8kr \sin \theta) V(\theta) \sqrt{\sin \theta} d\theta. \quad (28.2)$$

Поскольку по предположению kR_1 велико по сравнению с единицей, этот интеграл целесообразно анализировать при помощи метода перевала. Обозначим путь интегрирования, идущий из точки $-\pi/2 + i\infty$ в точку $\pi/2 - i\infty$

Рис. 28.1. Преобразование пути интегрирования в комплексной плоскости

P_1, P_2 и P_3 — полюсы в электромагнитном случае



через Γ_1 (рис. 28.1) и найдем по правилам, указанным выше, перевальный путь Γ^* . Сравнивая интеграл в (28.2) с (27.1), мы полагаем

$$\rho = kR_1, \quad f(\theta) = i \cos(\theta - \theta_0),$$

$$F(\theta) = e^{i\pi/4} \sqrt{\frac{k}{2\pi r}} (1 - 1/8kr \sin \theta) V(\theta) \sqrt{\sin \theta}. \quad (28.3)$$

Точка перевала, определяемая уравнением $d/\theta = 0$, будет $\theta = \theta_0$. Уравнение (27.4) для перехода к переменной s в нашем случае будет

$$\cos(\theta - \theta_0) = 1 + is^2. \quad (28.4)$$

Перевальный путь интегрирования соответствует вещественным значениям s . Взяв вещественные части от обеих сторон равенства и учитя, что при $\theta = \theta' + i\theta''$

$\sin \theta = \sin \theta' \operatorname{ch} \theta'' + i \cos \theta' \operatorname{sh} \theta'', \cos \theta = \cos \theta' \operatorname{ch} \theta'' - i \sin \theta' \operatorname{sh} \theta'',$ (28.5)
мы получим уравнение перевального пути в комплексной плоскости

$$\cos(\theta' - \theta_0) \operatorname{ch} \theta'' = 1. \quad (28.6)$$

Нетрудно показать, что этот путь будет пересекать вещественную ось в точке $\theta' = \theta_0$ под углом в 45° и уходить с одной стороны в $-\pi/2 + \theta_0 + i\infty$, а с другой — в $\pi/2 + \theta_0 - i\infty$ (путь Γ на рис. 28.1).

Прежде чем приступить к оценке интеграла по пути Γ , рассмотрим детально возможность замены пути интегрирования Γ_1 на Γ . Для этого необходимо проанализировать, какие особые точки подынтегральной функции могут встретиться на плоскости θ при непрерывной деформации Γ_1 в Γ . Прежде всего, так как под интеграл входит $\sqrt{\sin \theta}$, то мы имеем точку ветвления $\theta = 0$. Однако она для нас не является существенной, так как может быть обойдена контуром Γ_1 сверху и, следовательно, не будет задета при деформации Γ_1 в Γ . Гораздо более существенными являются особые точки, привносимые в подынтегральное выражение функцией $V(\theta)$. Как в электромагнитном, так и в акустическом случаях (см. §§ 2 и 4) она содержит корень

* В наших рассуждениях нетрудно обнаружить одну нестрогость, заключающуюся в том, что на пути Γ_1 имеется точка разветвления функции Ханкеля $u = 0$, так что пользоваться асимптотическим представлением на всем этом пути нельзя. Однако рассуждения будут совершенно строгими, если сначала путь интегрирования переведем в путь Γ , определенный ниже, и только потом уже воспользуемся асимптотическим представлением. При этом результат остается тем же. Совершенно строго этот вопрос рассмотрен в весьма обстоятельной монографии А. Баньоса [109, § 3, 4].

$\sqrt{n^2 - \sin^2 \vartheta}$, вследствие чего точки $\vartheta = \pm \arcsin n$ будут точками ветвления. Коэффициент отражения $V(\vartheta)$ при каждом ϑ может принимать два значения, в зависимости от того, какой из знаков корня мы выберем. Удобно говорить, как это всегда и делают, о двух листах плоскости ϑ (образующих двухлистную риманову поверхность), на каждом из которых функция $V(\vartheta)$ будет уже однозначной. На одном листе (назовем его «верхним») мы будем предполагать, что $\operatorname{Im} \sqrt{n^2 - \sin^2 \vartheta} > 0$, а на другом, «нижнем», $\operatorname{Im} \sqrt{n^2 - \sin^2 \vartheta} < 0$. Согласно подстрочному примечанию на стр. 11 (§ 2.2), путь интегрирования должен проходить по верхнему листу. Оба листа будут соединяться по линиям $\operatorname{Im} \sqrt{n^2 - \sin^2 \vartheta} = 0$, начинаящимся в точках ветвления.

Для удобства мы проведем вдоль этих линий «разрезы» комплексной плоскости. Уравнение этих разрезов будет

$$n^2 - \sin^2 \vartheta = x^2, \quad 0 \leq x^2 \leq \infty. \quad (28.7)$$

При $x = 0$ имеем $\sin \vartheta = n$ (точка ветвления). При $x^2 \rightarrow \infty$ имеем $\sin \vartheta \rightarrow \pm i\infty$, откуда при учете первой из формул (28.5), получаем $\vartheta' \rightarrow 0$, $\vartheta'' \rightarrow \pm \infty$. На рис. 28.1 изображены две точки ветвления A_1 и A_2 , и идущие от них разрезы для случая $n < 1$.

Входящая под интеграл (28.2) функция $V(\vartheta)$ имеет в качестве особых точек также полюсы. Их нужно рассматривать раздельно для электродинамики и для акустики.

а) *Акустика*. Согласно (2.17), коэффициент отражения $V(\vartheta)$ будет иметь полюс при $\vartheta = \vartheta_p$, где ϑ_p находится из уравнения

$$m \cos \vartheta_p + \sqrt{n^2 - \sin^2 \vartheta_p} = 0, \quad (28.8)$$

откуда

$$\sin \vartheta_p = \pm \sqrt{(m^2 - n^2) / (m^2 - 1)}. \quad (28.9)$$

Найдя отсюда ϑ_p и подставив в (28.8), мы можем найти $\sqrt{n^2 - \sin^2 \vartheta_p}$ и из знака его мнимой части определить, на каком листе находится данный полюс. Рассмотрим вначале случай $n < 1$, $m > 1$. Из (28.9) видим, что в этом случае $\sin \vartheta_p$ веществен, причем $|\sin \vartheta_p| > 1$. Это дает четыре значения для $\vartheta_p = \vartheta' + i\vartheta''$:

- 1) $\vartheta' = \pi/2$, $\vartheta'' > 0$;
- 2) $\vartheta' = -\pi/2$, $\vartheta'' < 0$;
- 3) $\vartheta' = \pi/2$, $\vartheta'' < 0$;
- 4) $\vartheta' = -\pi/2$, $\vartheta'' > 0$.

Полюс 2 симметричен полюсу 1, а полюс 4 симметричен полюсу 3 по отношению к началу координат.

Определяя при помощи (28.8) знак $\operatorname{Im} \sqrt{n^2 - \sin^2 \vartheta_p}$ для каждого из полюсов, нетрудно убедиться, что полюсы 1 и 2 лежат на верхнем листе, а 3 и 4 — на нижнем. Отсюда, а также из рис. 28.1 мы видим, что ни один из полюсов при деформации Γ_1 в Γ не затрагивается, причем полюсы 1 и 2 не затрагиваются потому, что они не лежат между Γ_1 и Γ , а 3 и 4 — потому, что они лежат на нижнем листе, в то время как Γ_1 и Γ — на верхнем.

Нетрудно проверить, что аналогичным образом полюсы не затрагиваются и при других значениях величин m и n .

б) *Электродинамика*. Предположим для простоты, что магнитные проницаемости сред равны, т. е. $\mu = \mu_1$. Тогда согласно (4.20) уравнение для полюсов в случае волны, поляризованной в плоскости падения (вертикальный электрический диполь), будет совпадать с (28.8), если принять, что $m = n^2$. Из него получаем

$$\sin \vartheta_p = \pm n \sqrt{n^2 + 1}. \quad (28.10)$$

Положим $n = |n| \exp i\varphi$. Во всех практических случаях можно считать, что

$0 \leq \varphi \leq \pi/4$. Поэтому $\sqrt{n^2 + 1} = |\sqrt{n^2 + 1}| \exp i\psi$, где $\psi \leq \varphi$ и значит

$$\sin \theta_p = \pm |n/\sqrt{n^2 + 1}| \exp i(\varphi - \psi). \quad (28.11)$$

Отсюда получаем такие четыре значения для $\theta_p = \theta'_p + i\theta''_p$:

$$P_1; 0 \leq \theta'_p \leq \pi/2, \quad \theta''_p \geq 0,$$

P_2 — симметричный P_1 ,

$$P_3; \pi/2 \leq \theta'_p \leq \pi, \quad \theta''_p \leq 0,$$

P_4 — симметричный P_3 .

Для того, чтобы решить, на каком листе находится каждый из этих полюсов, заметим, что корень

$$\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_p} = \pm n^2 / \sqrt{n^2 + 1} = \pm |n^2 / \sqrt{n^2 + 1}| \exp i(2\varphi - \psi) \quad (28.12)$$

на верхнем листе должен иметь положительную минимую часть. Следовательно, из двух знаков надо выбрать плюс. Тогда выражение $(1/n^2) \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_p} = -\cos \theta_p$ должно быть пропорционально $\exp(-i\psi)$, т. е. лежать в 4-м квадранте, а $\cos \theta_p$ — лежать во 2-м квадранте. Отсюда уже легко получить, что полюсы P_1 и P_2 лежат на нижнем, а P_3 и P_4 — на верхнем листах.

Для $|n| < 1$ полюсы P_1 , P_2 и P_3 изображены на рис. 28.1. При деформации контура Γ_1 в контур Γ снова ни один из полюсов не затрагивается.

Для дальнейшего нам необходимо точнее определить местоположение полюса P_1 . Именно, мы покажем, что он лежит ниже (а не выше) разреза, идущего от точки ветвления A_1 . Для этого в дополнение к разрезу, представляющему собой линию $\operatorname{Re} \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta} = 0$, проведем линию $\operatorname{Re} \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta} = 0$. На рис. 28.1 она изображена пунктиром. Знаки $\operatorname{Im} \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}$ и $\operatorname{Re} \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}$ меняются только при переходе через одну из этих линий. Как видно из (28.12), знаки того и другого на нижнем листе [знак — в (28.12)] отрицательны. В точке $\theta = 0$, где на нижнем листе $\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta} = -n = -|n| \exp i\varphi$, они отрицательны. Это же имеет место, как легко установить, и в полюсе P_1 . Значит полюс P_1 по ту же сторону от разреза, что и начало координат.

Итак, мы видим, что полюсы подынтегрального выражения можно не учитывать при анализе поля отраженной волны. То же самое можно показать и для случая горизонтальной поляризации E . В определенных случаях при деформации Γ_1 в Γ может появиться дополнительный интеграл по берегам разреза, давая своеобразную («боковую») волну, анализ которой мы отнесем к § 30. Теперь же вернемся к оценке интеграла по перевальному пути, входящему в (28.2). При учете формул (27.9), (27.17) и (28.3) эта оценка производится элементарно. Роль переменной в этом случае будет выполнять угол θ . В результате, пренебрегая величинами порядка $1/(kR_1)^2$ по сравнению с единицей, получаем

$$\Psi_{\text{отр}} = \frac{e^{ikR_1}}{R_1} [V(\theta_0) - iN/kR_1], \quad (28.13)$$

где

$$N = \frac{1}{2} [V'(\theta_0) + V'(\theta_0) \operatorname{ctg} \theta_0]. \quad (28.14)$$

Здесь $V'(\theta_0)$ и $V''(\theta_0)$ — производные коэффициента отражения по углу θ , взятые в точке $\theta = \theta_0$. Часто оказывается удобным выразить V через величину $\gamma = \cos \theta$. Тогда, как в случае акустики, так и в рассматриваемом нами электромагнитном случае (вертикальная поляризация), V выражается формулой

$$V = \frac{m\gamma - \sqrt{n^2 - 1 + \gamma^2}}{m\gamma + \sqrt{n^2 - 1 + \gamma^2}}, \quad (28.15)$$

где $m \equiv \rho_1/\rho$ — в акустике, $m \equiv n^2$ — в электродинамике.

Выражение (28.14) при этом можно записать в несколько ином виде

$$N = \frac{1}{2} (1 - \gamma_0^2) V''(\gamma_0) - \gamma_0 V'(\gamma_0), \quad \gamma_0 = \cos \vartheta_0, \quad (28.16)$$

где штрих означает производную по γ .

Учитывая (28.15) и вычисляя производные от $V(\gamma)$, получаем

$$N = \frac{m(1-n^2)}{q_0^3(m\gamma_0 + q_0)^3} [2m(n^2 - 1) + 3m\gamma_0^2 + q_0\gamma_0(2n^2 + 1 - \gamma_0^2) - m\gamma_0^3], \quad (28.17)$$

где

$$q_0 \equiv \sqrt{n^2 - 1 + \gamma_0^2} = \sqrt{n^2 - \sin^2 \vartheta_0}. \quad (28.18)$$

28.2. Некоторые выводы. Пределы применимости геометрической оптики.

Легко дать физическую интерпретацию математическим операциям, производимым при получении выражения (28.13) для отраженной волны. Деформация первоначального пути интегрирования Γ_1 в перевальный путь Γ означает, что одно и то же поле представляется при помощи наборов плоских волн, выбранных различными способами. Выбор пути Γ соответствует тому, что поле составляется из тех плоских волн, которые имеют в точке наблюдения одинаковую фазу, а именно ту же, что и волна, отражающаяся от границы под углом ϑ_0 . Путь, на котором фаза постоянна, согласно общим свойствам аналитических функций, является также путем, на котором подынтегральная функция при удалении от перевальной точки быстрее всего убывает *. Поэтому-то и оказалось, что при анализе интеграла были существенны только участки перевального пути, близкие к точке перевала (ϑ , близкие к ϑ_0). Это означает, что поле в точке наблюдения в основном составляется из плоских волн, отраженных от границы под углами, близкими к ϑ_0 — углу отражения (а следовательно, и падения) луча, построенного по законам геометрической оптики.

В соответствии с этим основным членом в (28.13) является первый член в скобках, дающий отраженную волну в приближении геометрической оптики. В этом приближении сферическая волна отражается с тем же коэффициентом отражения, что и плоская волна. Второй член можно рассматривать как поправку (исчезающую при $k \rightarrow \infty$), играющую, однако, в ряде случаев весьма существенную роль, в частности, как мы покажем ниже, когда излучатель и приемник находятся на малых по сравнению с длиной волны расстояниях от границы.

Поправочный член, согласно (28.14), обращается тождественно в нуль, если $V = \text{const}$, т. е. если коэффициент отражения не зависит от угла падения. Это имеет место, в частности, для абсолютно отражающих поверхностей ($V = \pm 1$). Применимость геометрической оптики в этом случае хорошо известна, причем отраженную волну здесь удобно представлять как бы исходящей из воображаемого («мнимого») излучателя O' , изображенного на рис. 28.1. В случае акустики коэффициент отражения не зависит от угла, кроме случаев полного отражения, а также при равенстве скоростей звука в обеих средах. Действительно, полагая в (28.15) $n = 1$, получаем $V = (\rho_1 - \rho)/(\rho_1 + \rho)$. В этом случае геометрическая акустика также строго справедлива.

Выведем теперь критерий, показывающий, когда поправочным членом в (28.13) можно пренебречь, если $V \neq \text{const}$. Обратимся сначала к случаю, когда излучатель или приемник (для определенности будем считать, что первый) находится на границе раздела. Тогда $R = R_1$ (см. рис. 26.3), и условие малости поправочного члена в (28.13) по сравнению с суммой прямой волны $\frac{e^{ikR}}{R}$ и отраженной волны $V(\vartheta_0) \frac{e^{ikR}}{R}$, взятой в геометрическом

* Линия постоянной фазы может быть также путем, на котором подынтегральная функция быстрее всего *возрастает*, однако эти два пути легко распознаются по знаку $f''(\zeta_0)$.

приближении, записывается

$$kR|1 + V(\theta_0)| \gg |N|. \quad (28.19)$$

Пользуясь (28.15) мы получаем

$$1 + V(\theta_0) = \frac{2m\gamma_0}{m\gamma_0 + \sqrt{n^2 - 1 + \gamma_0^2}}. \quad (28.20)$$

В силу того, что kR по предположению велико, условие (28.19) может не удовлетворяться только разве при малых $\gamma_0 = \cos \theta_0$, что соответствует углам падения волны, близким к скользящим ($\theta_0 \approx \pi/2$). При учете, что $\cos \theta_0 = z/R$ и γ_0 мало, условие (28.19) можно записать в виде

$$kz \gg \left| \frac{\frac{m}{(m\gamma_0 + \sqrt{n^2 - 1})^2}}{\frac{m}{n^2 - 1}} \right|. \quad (28.21)$$

Если $m\gamma_0 \ll \sqrt{n^2 - 1}$, последнее условие можно записать также в виде

$$kz \gg \frac{m}{\sqrt{n^2 - 1}}. \quad (28.22)$$

Таким образом, для применимости геометрической оптики необходимо, чтобы возвышение приемника над границей раздела было достаточно велико по сравнению с длиной волны.

При $|m| \rightarrow \infty$ мы имеем переход к абсолютно отражающей границе, так как согласно (28.15), при этом $V \rightarrow 1$. В соответствии с этим правая часть (28.21) стремится к нулю, откуда и следует, что геометрическая оптика (акустика) в этом случае справедлива при любых значениях z .

В случае отражения радиоволни от поверхности земли, $m \equiv n^2 \equiv \epsilon$ обычно велико по модулю по сравнению с единицей. Тогда (28.22) записывается совсем просто

$$kz \gg |n|. \quad (28.23)$$

Нетрудно понять, почему при приближении приемника к границе раздела приближение геометрической оптики все менее и менее применимо. Мы видим, что при этом величина $\gamma_0 = \cos \theta_0 = \frac{z}{R}$ убывает, так как угол падения стремится к $\pi/2$, и падение волны становится все более скользящим. При этом, как видно из (28.15), коэффициент отражения стремится к -1 , вследствие чего падающая и отраженная волны начинают все более и более компенсировать друг друга, а поправка играть все большую роль. Если приемник находится на самой границе раздела ($\gamma_0 = 0$), то в геометрическом приближении поле будет тождественно равно нулю (прямая и отраженная волны полностью компенсируют друг друга). В этом случае член, который мы называем поправочным, будет полностью определять поле, которое будет убывать с удалением точки наблюдения от излучателя как $1/R^2$.

Много существенных результатов, касающихся сферических звуковых волн от границы раздела двух сред, читатель может найти в работах [176, 189, 227].

Вопрос о полном внутреннем отражении звукового импульса, излучаемого точечным излучателем, был рассмотрен в работе [256]. Об отражении сферического звукового импульса от бесконечной поглощающей плоскости см. [136].

Наконец, отметим, что порядок величины поправочного члена можно было бы оценить, также исходя из принципа Гюйгенса и представлений о зонах Френеля на отражающей плоскости [4].

28.3. Обобщение на случай других излучателей: магнитный диполь и горизонтальный электрический диполь. Все изложенное без труда может быть обобщено на случай других излучателей. В частности, когда излучателем

является вертикальный магнитный диполь, то формулы (28.13) и (28.14) для отраженной волны остаются в силе, но только для коэффициента отражения при равенстве магнитной проницаемости сред вместо (28.15) будет справедлива формула [см. (4.16)]

$$V = \frac{\gamma - \sqrt{n^2 - 1 + \gamma^2}}{\gamma + \sqrt{n^2 - 1 + \gamma^2}}. \quad (28.24)$$

В этом случае вектор \mathbf{E} направлен перпендикулярно плоскости падения. Это ясно хотя бы из того, что при переходе от электрического к магнитному диполю роли \mathbf{E} и \mathbf{H} меняются, а следовательно, меняется и характер поляризации тех плоских волн, на которые раскладывается сферическая волна.

Существенно сложнее обстоит дело в случае горизонтального электрического диполя. Предположим, что диполь направлен параллельно оси x . Изучаемая им сферическая волна будет описываться компонентой вектора Герца Π_x . Каждая из плоских волн, на которую раскладывается эта сферическая волна, также будет содержать только компоненту Π_x . Однако оказывается, что в отраженной и преломленной волнах, кроме Π_x , будет также и компонента Π_z , так как иначе не могут быть удовлетворены четыре граничные условия, выражающие непрерывность компонент поля E_x , E_y , Π_x и H_y при переходе через границу раздела. Из этих условий нетрудно получить амплитуды всех четырех волн (две в отраженной и две в преломленной). Если амплитуду падающей плоской волны для Π_x принять за единицу, то амплитуды этих волн будут соответственными коэффициентами отражения и преломления. При этом комплексная амплитуда Π_x в отраженной волне будет

$$V_{xx} = \frac{\gamma - \sqrt{n^2 - 1 + \gamma^2}}{\gamma + \sqrt{n^2 - 1 + \gamma^2}}. \quad (28.25)$$

Амплитуда Π_z в отраженной волне

$$V_{xz} = \frac{2\gamma(1-n^2)\sqrt{1-\gamma^2}}{(\gamma + \sqrt{n^2 - 1 + \gamma^2})(n^2\gamma + \sqrt{n^2 - 1 + \gamma^2})}. \quad (28.26)$$

Мы видим, что V_{xx} совпадает с выражением (28.24) для V — коэффициента отражения горизонтально поляризованных волн.

После того, как определены величины V_{xx} и V_{xz} , дальнейшие вычисления будут протекать по изложенному выше правилу. В результате получаем для полного поля отраженной сферической волны

$$\Pi_x^{opt} = \frac{e^{ikR_1}}{R_1} \left[V_{xx}(\gamma_0) - \frac{iN_{xx}}{kR_1} \right], \quad (28.27)$$

$$\Pi_z^{opt} = \frac{e^{ikR_1}}{R_1} \left[V_{xz}(\gamma_0) - \frac{iN_{xz}}{kR_1} \right], \quad (28.28)$$

где N_{xx} и N_{xz} будут даваться формулой (28.16), в которую вместо $V(\gamma_0)$ надо подставлять соответственно V_{xx} и V_{xz} .

После того, как найден вектор Герца отраженной волны Π^{opt} с компонентами Π_x^{opt} и Π_z^{opt} , значения \mathbf{E} и \mathbf{H} в отраженной волне найдутся по формулам (26.6) перехода от Π к \mathbf{E} и \mathbf{H} .

28.4. Связь поля излучателя, расположенного на границе, с полем поднятого излучателя. Имеет место весьма простая связь поля произвольно расположенного излучателя с полем излучателя, находящегося на границе раздела. Как и выше, излучатель мы представляем в виде вертикального диполя*.

* Все изложенное ниже с одинаковым успехом может относиться к полю вертикального магнитного диполя и к полю акустического излучателя, представляющего в виде пульсирующей сферы малого радиуса. В последнем случае ψ будет означать звуковой потенциал.

Обозначим через $\psi(r, z, z_0)$ вертикальную компоненту вектора Герца в точке (r, z) от излучателя, расположенного на высоте z_0 над границей раздела. Соответственно $\psi(r, z + z_0, 0)$ будет значением вектора Герца в точке $(r, z + z_0)$ от излучателя, расположенного на границе. Мы покажем, что имеет место тождество

$$\psi(r, z, z_0) = \frac{e^{ikR}}{R} - \frac{e^{ikR_1}}{R_1} + \psi(r, z + z_0, 0), \quad (28.29)$$

где R и R_1 , как и выше — расстояния точки приема от излучателя и от «мнимого» излучателя.

Таким образом, чтобы получить для произвольной точки (r, z) вертикальную составляющую вектора Герца диполя, поднятого на высоту z_0 , нужно взять прямую волну e^{ikR}/R и добавить к ней:

а) волну $-e^{ikR_1}/R_1$, исходящую из мнимого излучателя, взятую со знаком минус.

б) вертикальную составляющую вектора Герца диполя, находящегося на границе раздела, но вычисленную не для точки $P(r, z)$, а для вспомогательной точки $P'(r, z + z_0)$ (рис. 28.2).

Этот весьма полезный рецепт для вычисления поля поднятого диполя был впервые получен, по-видимому, Герцелманом еще в 1911 г., а затем другим методом К. Ниссеном (см. [205]). Вывод его в обеих указанных работах весьма громоздок. По существу же формула (28.29) следует из довольно простых и наглядных соображений [8].

Вертикальная составляющая вектора Герца в произвольной точке состоит из прямой и отраженной волн

$$\psi(r, z, z_0) = \frac{e^{ikR}}{R} + \psi_{\text{отр}}(r, z, z_0). \quad (28.30)$$

Как видно из первоначального выражения (26.24) для отраженной волны, величины z и z_0 входят в нее только в виде суммы $z + z_0$ и, следовательно, значение $\psi_{\text{отр}}$ не изменится, если высоту излучателя уменьшить, высоту приемника увеличить на одну и ту же величину. Таким образом,

$$\psi_{\text{отр}}(r, z, z_0) = \psi_{\text{отр}}(r, z + z_0, 0). \quad (28.31)$$

Это соотношение понятно также и из наглядных соображений, поскольку при таком изменении высот излучателя и приемника не меняются ни суммарный набег фазы, ни угол падения на границу любой из плоских волн, из которых составляется поле отраженной волны. На рис. 28.2 это видно для волны, падающей на границу под углом скольжения θ . Из этого свойства отраженной волны сразу и вытекает формула (28.29).

Действительно, отраженную волну при излучателе, расположеннном на границе, т. е. $\psi_{\text{отр}}(r, z + z_0, 0)$, можно выразить через полное поле для этого случая, так как полное поле является суммой прямой и отраженной волн

$$\psi(r, z + z_0, 0) = \frac{e^{ikR_1}}{R_1} + \psi_{\text{отр}}(r, z + z_0, 0). \quad (28.32)$$

Здесь первый член представляет собой прямую волну, причем расстояние от излучателя до приемника равно здесь $CP' = R_1$ (рис. 28.2). Выразив отсюда $\psi_{\text{отр}}(r, z + z_0, 0)$ и подставив в (28.31), получим

$$\psi_{\text{отр}}(r, z, z_0) = \psi(r, z + z_0, 0) - \frac{e^{ikR_1}}{R_1}.$$

Наконец, подставив это выражение в (28.30), получим формулу (28.29).

Таким образом, если вычислено поле излучателя, расположенного на границе раздела сред, то переход к поднятому излучателю уже не представляет существенных трудностей.

§ 29. Вертикальный диполь. Формула Вейля—Ван-дер-Поля

29.1. Границы применимости выражения (28.13). Понятие о численном расстоянии. Применимость (28.13) имеет существенное ограничение, вызванное тем, что в случае вертикального электрического диполя один из полюсов коэффициента отражения может приблизиться к точке перевала, что приводит к неприменимости для этого случая обычного метода перевала.

В этом параграфе мы будем рассматривать случай скользящего падения ($\vartheta_0 \approx \pi/2, \cos \vartheta_0 \ll 1$) и, кроме того, предполагать, что $|n| \gg 1$. Тогда коэффициент отражения для рассматриваемого случая можно записать (см., например, (28.15), где надо положить $m \equiv n^2$)

$$V(\vartheta) = (n \cos \vartheta - 1) / (n \cos \vartheta + 1). \quad (29.1)$$

Мы снова перейдем от ϑ к переменной s в соответствии с соотношением (28.4). Разлагая косинус в (28.4) по степеням малой разности $\vartheta - \vartheta_0$ и ограничиваясь второй степенью, мы эту связь запишем в виде

$$\vartheta = \sqrt{2} \exp(-i\pi/4)s + \vartheta_0. \quad (29.2)$$

Уравнение для полюса

$$n \cos \vartheta + 1 = 0 \quad (29.3)$$

при подстановке сюда ϑ из (29.2) записывается (учитываются степени s не выше первой)

$$n \cos \vartheta_0 - \sqrt{2} n \exp(-i\pi/4)s \sin \vartheta_0 + 1 = 0.$$

Полагая $\sin \vartheta_0 \approx 1$, $\cos \vartheta_0 = \chi_0$ — угол скольжения, находим отсюда значение полюса s_p

$$s_p = (1/\sqrt{2}n)(n\chi_0 + 1) \exp(i\pi/4). \quad (29.4)$$

При $|n| \rightarrow \infty$, $\chi_0 \rightarrow 0$, полюс s_p приближается к точке перевала $s = 0$.

Для применимости употребленного нами выше метода перевала необходимо, чтобы полюс лежал достаточно далеко от области «существенных» значений s , т. е. значений $0 \leq s < s_1$, при которых подынтегральная функция еще не очень мала. Под интеграл входит быстро убывающая с возрастанием s экспонента $\exp(-kR_1 s^2)$, вследствие чего можно показать, что $s_1 \sim 1/\sqrt{kR_1}$. Для того, чтобы наличие полюса не сказалось, достаточно потребовать выполнения условия $|s_1/s_p|^2 \ll 1$ или

$$kR_1 |s_p|^2 \gg 1. \quad (29.5)$$

Величину $w = \sqrt{kR_1} s_p$ принято называть численным расстоянием. Следовательно, для применимости формулы (28.13) необходимо, чтобы численное расстояние было велико.

При больших значениях $|n|$ численное расстояние w по модулю может быть порядка единицы или меньше, несмотря на то, что kR_1 велико. В этом случае изложенный в предыдущем параграфе метод анализа отраженной волны неприменим.

Рассмотрим, например, случай морской воды ($\epsilon = 81$, $\sigma = 4 \cdot 10^{10}$). Для приемной и излучающей антенн, расположенных на границе ($\chi_0 = 0$), получаем

$$|w|^2 = kR_1/2 |n|^2 = (kR_1/2)(\epsilon^2 + 4\sigma^2/f^2)^{-1/2}.$$

Для длины волны $\lambda = 300 \text{ м}$ получаем $|w|^2 = 1,3 \cdot 10^{-4} kR_1$. Отсюда и видно, что условие $|w|^2 \gg 1$ может оказаться значительно более жестким, чем условие $kR_1 \gg 1$.

29.2. Формула Вейля — Ван-дер-Поля. Выражение (26.24) для отраженной волны мы перепишем в несколько ином виде, для чего в функции $V(\theta)$ под интегралом вычтем и прибавим единицу. При этом получим результат, который можно записать в виде

$$\Psi_{\text{отр}} = \frac{ik}{2\pi} \int_0^{\pi/2-i\infty} \int_0^{2\pi} \exp[ik[x \sin \vartheta \cos \varphi + y \sin \vartheta \sin \varphi + (z + z_0) \cos \vartheta] \sin \vartheta] d\vartheta d\varphi + \frac{ik}{2\pi} \int_0^{\pi/2-i\infty} \int_0^{2\pi} \exp[ik[x \sin \vartheta \cos \varphi + y \sin \vartheta \sin \varphi + (z + z_0) \cos \vartheta] [V(\vartheta) - 1] \sin \vartheta] d\vartheta d\varphi.$$

Здесь первый член представляет собой сферическую волну $(1/R_1) e^{ikR_1}$ (где $R_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z + z_0)^2}$), исходящую из «мнимого» источника O' , (см. рис. 26.3), в чем нетрудно убедиться, сравнив этот член с первым из выражений (26.19). Второй член преобразуем так же, как преобразовывалось выражение (26.24). При этом приходим к формуле, совершению аналогичной формуле (28.2) с той только разницей, что вместо $V(\theta_0)$ будет фигурировать $V(\theta) - 1$. Кроме того, мы пренебрежем членом $1/8 kr \sin \vartheta$ по сравнению с единицей. В результате получаем для отраженной волны

$$\begin{aligned} \Psi_{\text{отр}} &= \frac{e^{ikR_1}}{R_1} + I, \\ I &= \sqrt{\frac{k}{2\pi r}} e^{i\pi/4} \int_{-\pi/2+i\infty}^{\pi/2-i\infty} e^{ikR_1 \cos(\theta-\theta_0)} [V(\theta) - 1] \sqrt{\sin \vartheta} d\vartheta. \end{aligned} \quad (29.6)$$

Производим замену переменной интегрирования θ на s согласно (29.2) и интегрирование будем проводить по вещественным s (перевальный путь интегрирования). При этом

$$d\vartheta = \sqrt{-2} \exp(-i\pi/4) ds. \quad (29.7)$$

Воспользовавшись (29.1) и (29.2), нетрудно получить

$$V(\theta) - 1 = [\sqrt{-2} n(s - s_p)] e^{i\pi/4}. \quad (29.8)$$

Полагая далее в (29.6) $\sin \vartheta = \sin \theta_0$, $r \sin \theta_0 = R_1$, получаем

$$I = \frac{1}{n} \sqrt{\frac{2k}{\pi R_1}} e^{i(\pi/4+kR_1)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikR_1 s^2} \frac{ds}{s - s_p}. \quad (29.9)$$

Мы получили эталонный интеграл, рассмотренный в § 27. Заметим, что согласно (29.4) $\operatorname{Im} s_p > 0$ (поскольку $\arg n < \pi/4$). В результате согласно (27.19), получаем

$$I = \frac{1}{n} \sqrt{\frac{8k}{R_1}} \exp(3\pi i/4 + ikR_1 - w^2) Q(-iw). \quad (29.10)$$

Теперь в соответствии с (29.6) получаем для отраженной волны

$$\Psi_{\text{отр}} = \frac{e^{ikR_1}}{R_1} \left[1 - \frac{1}{n} \sqrt{\frac{8kR_1}{R_1}} e^{3\pi i/4 - w^2} Q(-iw) \right]. \quad (29.11)$$

Численное расстояние $w = \sqrt{kR_1} s_p$ находится при помощи (29.4). Полное значение для поля получится, если мы к этому выражению добавим выражение для прямой волны e^{ikR}/R .

Формулы (28.13) и (29.11) взаимно дополняют друг друга. Первая пригодна для расчетов при любых n , но лишь при больших численных расстояниях. Вторая, наоборот, годится лишь при больших $|n|$, но зато при любых численных расстояниях. При больших $|n|$ и больших численных расстояниях обе формулы применимы и должны давать один и тот же результат, что будет показано ниже.

В частном случае, когда излучатель находится на границе раздела, мы имеем $R = R_1$ (см. рис. 26.3) и для полного поля в верхней среде получаем

$$\Psi = \frac{2e^{ikR_1}}{R} \left[1 + \frac{1}{n} \sqrt{2kR} e^{3\pi i/4 - u^*} Q(-iw) \right]. \quad (29.12)$$

Последнее выражение обычно называют формулой Вейля — Ван-дер-Поля. Как мы видим, наш метод дал возможность получить формулу (29.11), справедливую также и для поднятого диполя.

Величина $(2/R)e^{ikR}$ в (29.12) соответствует вектору Герца в случае абсолютно отражающей границы. Множитель, заключенный в скобки, характеризует дополнительное ослабление поля вследствие оттока энергии электромагнитных волн в нижнюю среду и называется функцией ослабления.

При больших численных расстояниях выражение (29.11) должно совпадать с выражением (28.13), полученным обычным методом перевала. Проверим это. При учете (27.25) выражение (29.11) запишется

$$\Psi_{\text{отр}} = \frac{e^{ikR_1}}{R_1} \left[1 - \frac{1}{nw} \sqrt{2kR_1} e^{i\pi/4} (1 + 1/2w^2) \right],$$

или, учитя значение $w^2 = kR_1 s_p^2$ согласно (29.4), получаем

$$\Psi_{\text{отр}} = \frac{e^{ikR_1}}{R_1} \left[1 - \frac{2}{1 + n\chi_0} \left(1 + \frac{n^2}{ikR_1(1 + n\chi_0)^2} \right) \right].$$

Последняя формула легко преобразуется к виду

$$\Psi_{\text{отр}} = \frac{e^{ikR_1}}{R_1} \left[\frac{n\chi_0 - 1}{n\chi_0 + 1} + \frac{2in^2}{kR_1(1 + n\chi_0)^3} \right]. \quad (29.13)$$

Последнее выражение полностью совпадает с (28.13), так как там при наших предположениях ($|n| \gg 1$, $\chi_0 = (\pi/2 - \theta_0) \ll 1$) мы получаем, согласно (28.15) и (28.17),

$$\gamma_0 \approx \chi_0, \quad V \approx \frac{n\chi_0 - 1}{n\chi_0 + 1}, \quad N \approx -\frac{2n^2}{(1 + n\chi_0)^3}. \quad (29.14)$$

Примененный в настоящем параграфе обобщенный метод перевала позволяет получить достаточную ясность в вопросе о существовании поверхностной волны Цеппека в поле вертикального диполя, расположенного на границе раздела двух сред [209]. Дискуссии то затихали, то вновь возникали. Современный обзор вопроса читатель может найти в книге А. Баньоса [109, § 4.10].

§ 30. Боковая волна

30.1. Выражение для боковой волны. При анализе отраженной волны выше не был учтен факт двузначности функции $V(\theta)$, входящей под интеграл в (28.2). Учет этого обстоятельства заставляет добавить к полученному выше выражению (28.13) для отраженной волны еще один член, соответствующий так называемой боковой волне. Приведем сначала формально математическое обоснование для появления этого члена, а затем выясним его физический смысл.

В § 28 интегрирование по первоначальному пути Γ_1 мы заменили интегрированием по пути Γ (см. рис. 28.1). Как уже указывалось, подынтегральная функция в (26.27) двузначна, так как в выражение для $V(\theta)$ входит корень

$\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}$. Наш первоначальный путь интегрирования Γ_1 проходит по верхнему листу соответственной поверхности Римана. Деформация его в перевальный путь интегрирования Γ возможна только тогда, когда по крайней мере начало и конец последнего лежат на этом же пути.

Рассмотрим, например, случай, когда мнимая часть n исчезающе мала, а вещественная меньше единицы. Если при этом угол падения θ_0 удовлетворяет условию

$$\theta_0 < \delta, \quad \delta = \arcsin n, \quad (30.1)$$

т. е. не превышает угла полного внутреннего отражения δ , то мы будем иметь в комплексной плоскости картину, изображенную на рис. 28.1 (точка A_1 соответствует $\theta = \delta$). Здесь разрез пересекается перевальным путем дважды. Переход от пути Γ_1 к перевальному пути Γ производится без всяких осложнений. При этом путь Γ_1 за исключением некоторой части, отмеченной на рисунке пунктиром, будет лежать на верхнем листе.

В этом случае проведенный в § 28 анализ является полным и боковая волна будет отсутствовать. Иное положение мы будем иметь в обратном случае, когда угол θ_0 больше угла полного внутреннего отражения, т. е. когда

$$\theta_0 > \arcsin n, \quad (30.2)$$

Взаимное расположение точки ветвления и перевального пути интегрирования для этого случая изображено на рис. 30.1. Здесь перевальный путь интегрирования пересекает разрез один раз, переходит с верхнего листа на нижний и уходит по нему на бесконечность, не соединяясь нигде с путем Γ_1 , что недопустимо. Однако мы можем сконструировать более сложный путь интегрирования, дополнив перевальный путь контуром, охватывающим разрез так, что у этого более сложного пути начало и конец снова будут лежать на верхнем листе.

Полный путь интегрирования изображен на рис. 30.1. Этот путь от точки $-\pi/2 + \theta_0 + i\infty$ идет до точки $i\infty$ и затем охватывает разрез по контуру Γ_2 . После этого он пересекает разрез и уже по нижнему листу идет снова в исходную точку $-\pi/2 + \theta_0 + i\infty$. Из нее интегрирование идет по перевальному пути Γ , начальная часть которого, обозначенная пунктиром, теперь лежит на нижнем листе.

В результате, полное выражение для отраженной волны будет состоять из двух частей:

$$\psi = \psi_{\text{отр}} - \psi_b, \quad (30.3)$$

где $\psi_{\text{отр}}$ — собственно отраженная волна, выражаяющаяся в виде интеграла по перевальному пути, была исследована нами в § 28, а ψ_b — «боковая» волна, выражение для которой дается интегралом по контуру Γ_2 (интегралом по берегам разреза). Используя (28.2) и пренебрегая величиной $1/8 kr \sin \theta$ по сравнению с единицей, получаем

$$\begin{aligned} \psi_b = \sqrt{\frac{k}{2\pi r}} e^{i\pi/4} \left[\int_{-i\infty}^{A_1} e^{ikR_1 \cos(\theta - \theta_0)} V(\theta) \sqrt{\sin \theta} d\theta + \right. \\ \left. + \int_{A_1}^{i\infty} e^{ikR_1 \cos(\theta - \theta_0)} V^+(\theta) \sqrt{\sin \theta} d\theta \right]. \end{aligned}$$

Здесь $V(\theta)$ и $V^+(\theta)$ — значения коэффициента отражения соответственно на левом и правом берегах разреза. Входящий в них корень $\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}$ имеет на разрезе мнимую часть, равную нулю, а его вещественная часть па обоих берегах имеет разные знаки. Поэтому $V(\theta)$ и $V^+(\theta)$ будут отличаться друг от друга только знаками корня. Как показано в § 28.1, на левом берегу разреза (как и при $\theta = 0$) вещественная часть корня положительна.

Сменив местами пределы интегрирования в первом интеграле, мы можем свести оба интеграла к одному, взятыму от A_1 до $i\infty$ вдоль разреза. При этом получаем

$$\Psi_0 = \sqrt{\frac{k}{2\pi r}} e^{i\pi/4} \int_{A_1}^{i\infty} e^{ikR_1 \cos(\theta - \theta_0)} \Phi(\theta) \sqrt{\sin \theta} d\theta. \quad (30.4)$$

Согласно (28.15) и при учете, что $V^+(\theta)$ получается из $V(\theta)$ переменой знака корня $\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}$, получаем

$$\Phi(\theta) = V^+(\theta) - V(\theta) = \frac{4m \cos \theta}{(m \cos \theta)^2 - n^2 + \sin^2 \theta}. \quad (30.5)$$

Все дальнейшие вычисления удобно производить методом быстрейшего спуска, аналогичным методу перевала. Для этого путь интегрирования

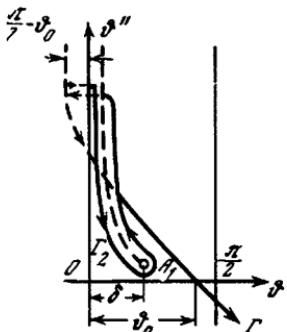


Рис. 30.1. Преобразование пути интегрирования в комплексной плоскости с обходом разреза

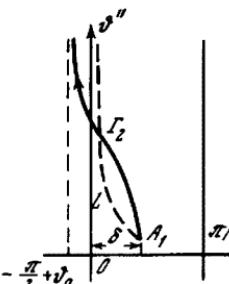


Рис. 30.2. К преобразованию интеграла по разрезу L в интеграл по пути быстрейшего спада Γ_2

деформируем так, чтобы от точки ветвления A_1 он шел по линии, на которой экспонента под интегралом быстрее всего спадает. Это будет линия, на которой вещественная часть выражения $kR_1 \cos(\theta - \theta_0)$ постоянна

$$\operatorname{Re} \cos(\theta - \theta_0) = \text{const}. \quad (30.6)$$

При этом необходимо, чтобы

$$\operatorname{Im} \cos(\theta - \theta_0) > 0. \quad (30.7)$$

Полагая в (30.6) $\theta = \delta$ (δ вещественно), получаем $\text{const} = \cos(\delta - \theta_0)$. Теперь, учитя, что

$$\cos(\theta - \theta_0) = [\cos(\theta'_1 + i\theta''_1 - \theta_0)] = \cos(\theta'_1 - \theta_0) \cosh \theta''_1 - i \sin(\theta'_1 - \theta_0) \sinh \theta''_1, \quad (30.8)$$

из (30.6) получаем уравнение пути интегрирования

$$\cos(\theta_0 - \theta') \cosh \theta'' = \cos(\delta - \theta_0). \quad (30.9)$$

Этот путь изображен на рис. 30.2 в виде сплошной линии (путь Γ_2). На нем выполняется также условие (30.7). Деформация пути интегрирования от разреза L к контуру Γ_2 производится беспрепятственно, так как в той части плоскости θ , которая лежит между ними, нет никаких особых точек подынтегрального выражения. В частности, как было показано в § 28, полюс P_1 (см. рис. 28.1) лежит вне этой области.

В результате, если учесть также выражение (30.8), будем иметь из (30.4)

$$\Psi_0 = \sqrt{\frac{k}{2\pi r}} e^{ikR_1 \cos(\delta - \theta_0) + i\pi/4} \int_{\Gamma_2} \Phi(\theta) e^{-kR_1 \sin(\theta_0 - \theta') \sinh \theta''} \sqrt{\sin \theta} d\theta. \quad (30.10)$$

Здесь, воспользовавшись равенством (30.9), выразим все подынтегральное выражение через θ'' и будем считать эту величину новой переменной интегрирования. Пределы интегрирования по ней, как видно хотя бы из рис. 30.2,

будут 0 и ∞ . Так как kR_1 предполагается большим и нами выбран путь быстрейшего спада, то под интегралом существенную роль будут играть только малые значения ϑ'' . Кроме того, как видно из рис. 30.2, на начальной части пути интегрирования можно принять $\vartheta' \approx \delta$. Поэтому полагаем $\sin(\vartheta_0 - \vartheta'') \operatorname{sh} \vartheta'' \approx \sin(\vartheta_0 - \delta) \vartheta''$, $d\vartheta'' \approx i d\vartheta'$.

В выражении (30.5) для $\Phi(\vartheta)$ всюду можно положить $\vartheta \approx \delta$ за исключением корня $\sqrt{n^2 - \sin^2 \vartheta}$, который при этом обращается в нуль, так как $\sin \delta = n$. Поэтому мы вычислим его в более высоком приближении. Имеем

$$\sqrt{n^2 - \sin^2 \vartheta} = \sqrt{n^2 - (\sin \vartheta' \operatorname{ch} \vartheta'' + i \cos \vartheta' \operatorname{sh} \vartheta'')^2}.$$

Полагая здесь $\vartheta' \approx \delta$, $\operatorname{sh} \vartheta'' \approx \vartheta''$, $\operatorname{ch} \vartheta'' \approx 1$, получаем

$$\sqrt{n^2 - \sin^2 \vartheta} = \sqrt{-2i n \cos \delta \cdot \vartheta''} = -\sqrt{2e^{-i\pi/4}} \sqrt{n \cos \delta \cdot \vartheta''}.$$

Здесь из двух возможных значений \sqrt{i} взято то, которое обеспечивает положительность мнимой части $\sqrt{n^2 - \sin^2 \vartheta}$. Теперь выражение (30.10) запишется

$$\psi_0 = \frac{-4i}{V\pi r m} \frac{\sqrt{k} n}{\sqrt{\cos \delta}} e^{ikR_1 \cos(\delta - \vartheta_0)} \int_0^\infty e^{-kR_1 \sin(\vartheta_0 - \delta) \vartheta''} \sqrt{\vartheta''} d\vartheta''. \quad (30.11)$$

Введя новую переменную $\sqrt{\vartheta''} = x$ и учитя значение второго из интегралов 27.8), получим

$$\psi_0 = \frac{-2ie^{ikR_1 \cos(\delta - \vartheta_0)}}{km \sqrt{r \cos \delta} [R_1 \sin(\delta - \vartheta_0)]^{1/2}}. \quad (30.12)$$

Это и есть искомое выражение для боковой волны. Его можно представить также в несколько ином виде. Мы имеем $kR_1 \cos(\delta - \vartheta_0) = kR_1 (\cos \delta \cos \vartheta_0 + \sin \delta \sin \vartheta_0)$. Учтем, что (рис. 26.3) $R_1 \sin \vartheta_0 = r$, $R_1 \cos \vartheta_0 = z + z_0$ и, кроме того, согласно рис. 30.3, $r = L + (z_0 + z) \operatorname{tg} \delta$. Далее, имеем $k \sin \delta = kn = k_1$. При учете всех этих соотношений легко получить

$$\begin{aligned} kR_1 \cos(\delta - \vartheta_0) &= k[nr + \sqrt{1 - n^2}(z + z_0)] = k(L_0 + L) + k_1 L_1, \\ R_1 \sin(\vartheta_0 - \delta) &= R_1(\sin \vartheta_0 \cos \delta - \cos \vartheta_0 \sin \delta) = \\ &= [r - (z + z_0) \operatorname{tg} \delta] \cos \delta = L_1 \cos \delta. \end{aligned} \quad (30.13)$$

В результате выражение (30.12) для боковой волны может быть записано в виде

$$\psi_0 = \frac{2in}{km(n^2 - 1) \sqrt{r} L_1^{1/2}} e^{ik(L_0 + L) + ik_1 L_1}. \quad (30.14)$$

Выражение $k(L_0 + L) + k_1 L_1$ может трактоваться как набег фазы по лучу $OABP$ (рис. 30.3), соединяющему излучатель с точкой наблюдения. Этот луч состоит из отрезков L_0 и L , по которым волна распространяется в верхней среде под углом δ к нормали к границе, и отрезка L_1 , по которому волна распространяется вдоль границы со скоростью, равной скорости в нижней среде. На больших расстояниях, когда $r \gg (z + z_0)$, имеем $L_1 \approx r$, откуда видно, что амплитуда боковой волны будет убывать с расстоянием как $1/r^2$. Как мы видим, полученное нами выражение для боковой волны теряет смысл при $n \rightarrow 1$ и при $L_1 \rightarrow 0$ (при $\vartheta_0 \rightarrow \delta$). Последнее ограничение мы снимем в § 31, случай же n , весьма близкий к единице, рассмотрен в особой работе автора [5]. Весьма полное рассмотрение вопроса о боковых волнах в разных (электромагнитных) случаях содержится в работе Л. Фельзена [148].

30.2. Физический смысл боковой волны. Из изложенного выше видно, что боковая волна связана с распространением в нижней среде на участке

L_1 (рис. 30.3). Поэтому полный анализ природы боковой волны мы не можем привести без рассмотрения волновых процессов в нижней среде. Более подробно они будут исследованы в § 32. Здесь же мы остановимся только на некоторых качественных соображениях.

Предположим, что в точке O на рис. 30.4 расположена источник волны. В точку B , достаточно удаленную от излучателя O , но расположенную вблизи границы раздела в нижней среде, волна попадает двумя путями, соответственно лучам OAB и OC . Луч OC падает на границу под углом бóльшим,

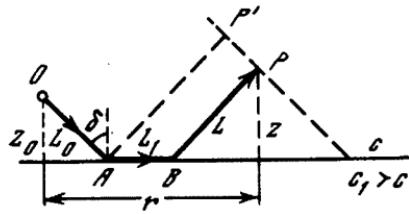


Рис. 30.3. К лучевому представлению боковой волны

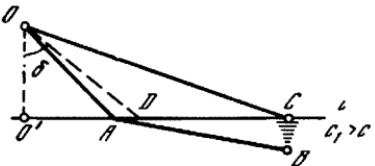


Рис. 30.4. К объяснению природы боковой волны

чем угол полного внутреннего отражения δ , полностью отражаясь, создает в нижней среде экспоненциально затухающую при углублении волну. Луч OA испытывает обычное преломление, и в виде своего продолжения AB в нижней среде попадает в точку B . Чем больше луч OA приближается к пунктирной линии OD , соответствующей углу полного внутреннего отражения, тем ближе к границе будет прилегать его продолжение AB . Волна, представляемая лучом AB , и является причиной боковой волны. Действительно, она распространяется вдоль границы со скоростью c_1 , создавая на границе возмущение. Последнее дает начало новой волне в верхней среде.

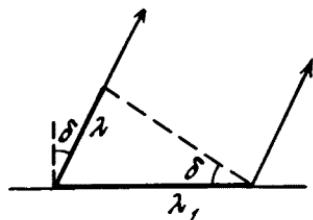


Рис. 30.5. Соотношение между длинами волн в верхней и нижней средах и углом наклона фронта боковой волны

Поскольку пространственный период этого возмущения вдоль границы равен λ_1 — длине волны в нижней среде, волна в верхней среде может «приспособиться» к этому периоду только в том случае, если направление ее распространения будет составлять с нормалью к границе такой угол δ , что $\lambda = \lambda_1 \sin \delta$ (рис. 30.5). Именно так и направлена боковая волна.

В качестве добавочного обоснования приведенных рассуждений можно показать (см. также § 33), что весь волновой процесс, распространяющийся вдоль границы, разбивается на две группы волн. В первую группу входит обычная падающая волна (луч OC , рис. 30.4), соответствующая отраженная волна и преломленная экспоненциально затухающая волна CB . Во вторую группу входит волна, идущая по пути OAB , и боковая волна. Каждая группа распространяется вдоль границы со своей скоростью и в отдельности удовлетворяет граничным условиям.

На участке $O'D$ границы (рис. 30.4) существует только падающая, отраженная и преломленная волны, входящие в первую из двух упомянутых выше групп волн. Поэтому этот участок границы не излучает боковой волны.

Таким образом, если угол δ_0 больше, чем δ (рис. 30.6), то в точку P приходят две волны: отраженная, соответствующая лучу ODP , и боковая, фаза которой дается оптической длиной луча $OABP$.

В случае импульсного излучения боковая волна приходит в точку наблюдения первой. На ее регистрации и анализе основаны весьма эффективные методы сейсмической разведки. В сейсмике боковую волну называют обычно головной волной. Теорию боковой волны для простейших видов импульсного излучения см. в работах [36, 157].

Как видно из выражений (30.13) и (30.14), фронт боковой волны дается уравнением

$$k(L_0 + L) + k_1 L_1 = k[nr + \sqrt{1 - n^2}(z + z_0)] = \text{const.} \quad (30.15)$$

В плоскости xz это прямая линия. В пространстве в силу цилиндрической симметрии задачи фронт будет коническим.

На рис. 30.7 изображены фронты прямой, отраженной и боковой волн в нижней среде, дающей начало боковой волне. Согласно уравнению (30.15), нормаль к фронту боковой волны составляет угол $\delta = \arcsin n$ с нормалью к границе. Нижний край фронта боковой волны совпадает с краем фронта волны, распространяющейся в нижней среде со скоростью c_1 ($c_1 > c$). Верхний ее край сливается с фронтом отраженной волны, которую можно представлять себе исходящей из мнимого источника O' . Амплитуда боковой волны возрастает при продвижении по ее фронту от границы раздела к точке

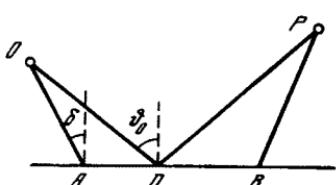


Рис. 30.6. Пути лучей, приходящих в точку наблюдения P

слияния с отраженной волной. Это видно из формулы (30.14), поскольку при этом величина L_1 уменьшается (см. рис. 30.3, где фронт боковой волны отмечен пунктирной линией PP').

Отметим, что все изложенные в предыдущем разделе выкладки можно было бы провести и для случая $n > 1$ ($c_1 < c$). При этом мы получили бы выражение для боковой волны, полностью совпадающее с (30.12), в котором $\delta = \arcsin n$ было уже комплексной величиной. Учитывая выражение (30.13) для фазы боковой волны и полагая $n > 1$, мы получаем в (30.12) множитель $\exp[-k\sqrt{n^2 - 1}(z - z_0)]$, дающий экспоненциальное убывание амплитуды волны при увеличении как z , так и z_0 . В этом случае мы имеем неоднородную волну.

С первого взгляда кажется, что в этом случае в нижней среде не может существовать волна, распространяющаяся вдоль границы раздела, так как при $n > 1$ происходит обычное преломление волны (без полного отражения), и нормаль к фронту волны при преломлении приближается к нормали к границе раздела. Однако мы должны учесть, что точечный источник излучает также и неоднородные плоские волны. Одна из таких неоднородных волн, компоненты волнового вектора которой равны $k_z = ik\sqrt{n^2 - 1}$, $k_x = kn$, при преломлении в нижнюю среду преобразуется в обычную плоскую волну, распространяющуюся вдоль границы с волновым вектором $k_x = kn$, $k_z = 0$. Эта плоская волна и излучает в верхнюю среду боковую волну, которая будет также экспоненциально затухающей.

Мы видим, что боковая волна во всех случаях представляет собой нечто вроде ответвления волны, распространяющейся в нижней среде. Она распространяется как бы сбоку от основной трассы (лежащей в верхней среде), чем и оправдывается ее название.

30.3. Смещение лучей при отражении и боковая волна. Возникновение боковой волны легко также понять, если учесть смещение лучей при отражении, рассмотренное нами в § 14. Правда, там было рассмотрено смещение

ограниченных пучков, однако в следующем параграфе будет показано, что полученное в § 14 смещение необходимо приписывать каждому лучу, выходящему из точечного излучателя и испытывающему полное внутреннее отражение.

Чем ближе будет угол падения луча на границу к углу полного внутреннего отражения, тем больше сместится луч вдоль границы при отражении. В результате, исходящий из O заштрихованный пучок лучей на рис. 30.8 после отражения разойдется в совокупность лучей BB' , CC' , EE' , FF' и т. д., идущих почти параллельно. Эти лучи и образуют боковую волну с фронтом

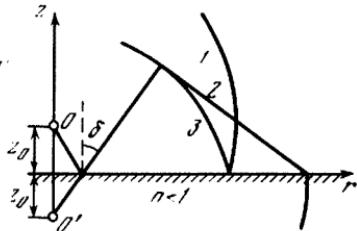


Рис. 30.7. Фронты волн различных типов:

1 — прямая волна; 2 — боковая;
3 — отраженная

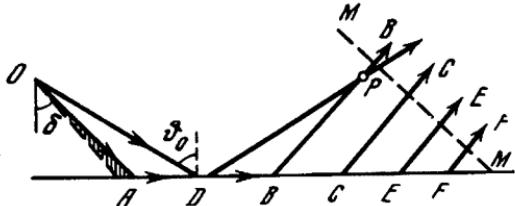


Рис. 30.8. Связь смещения лучей при отражении с боковой волной

MM . Таким образом, в произвольной точке P будут иметься две волны — боковая, представленная лучом $OABP$, и обычная отраженная, представленная лучом ODP . испытывающим весьма незначительное смещение, если угол его падения не очень близок к δ .

Эти соображения позволяют получить не только фазу боковой волны, а следовательно, и положение ее фронта, но также и ее амплитуду. Действительно, в § 14 было показано, что луч, падающий на границу под углом ϑ ($\vartheta > \delta$), смещается при отражении вдоль границы на величину $\Delta = (\lambda/\pi m) \operatorname{tg} \vartheta_0 (\sin^2 \vartheta_0 - n^2)^{-1/2}$.

Горизонтальное расстояние OB (рис. 30.8) будет $r = (z + z_0) \operatorname{tg} \vartheta_0 + \Delta$.

Воспользуемся формулой (43.14') для определения амплитуды звукового давления в точке P . Имеем, учитывая, что в нашем случае $\chi = \chi_1 = \pi/2 - \vartheta_0$, $\rho_1 = \rho$, $c_1 = c$, а также малость разности $\sin^2 \vartheta_0 - n^2$

$$\partial r / \partial \vartheta_0 \approx -(\lambda/\pi m) \sin^2 \vartheta_0 (\sin^2 \vartheta_0 - n^2)^{-1/2} = (\sin^2 \vartheta_0 / \operatorname{tg}^3 \vartheta_0) (\pi m / \lambda)^2 \Delta^3.$$

Подставляя $(\partial r / \partial \vartheta_0)$ вместо $|\partial r / \partial \chi_1|$ в (43.14), получаем, полагая $\sin \vartheta_0 \approx n$

$$p = 2n/kmr(1 - n^2) \Delta^{3/2},$$

что совпадает с $|\psi_0|$ из (30.14), поскольку $L_1 = \Delta$.

О связи боковой волны со смещением лучей при отражении см. также [196].

30.4. Случай излучателя и приемника, расположенных в сильно поглощающей среде. Мы уже упоминали, что существенную роль боковая волна играет в сейсмической разведке, так как соответствующий ей импульс вступает первым. Другим случаем, когда боковая волна имеет определяющее значение, является случай радиосвязи между двумя точками, расположенными в сильно поглощающей среде, например в земле или в морской воде. Прямая и отраженная волны в этом случае будут распространяться в поглощающей среде (для краткости будем говорить — в земле) и, следовательно, очень быстро затухать. В результате остается боковая волна, которая проникает из земли в воздух, распространяется там и затем опять попадает в землю.

Если излучателем является вертикальный диполь*, то соответствующая компонента вектора Герца боковой волны будет даваться выражением (30.14). Однако это выражение необходимо несколько преобразовать. В (30.14) имеем: $n = c/c_1$, где c — скорость в той среде, где расположены излучатель и приемник, в нашем случае — в земле, а c_1 — скорость в воздухе. Если обозначить, как всегда, через n_1 — показатель преломления земли по отношению к воздуху, а не наоборот, причем $n_1^2 = \epsilon + i(4\pi/\omega)$, где ϵ и σ — диэлектрическая постоянная и проводимость, то $n = 1/n_1$. Эту замену мы сделаем в (30.14). Необходимо также учесть, что в этом выражении $k = \omega/c_1 = k_0 n_1$, $m = n^2 = 1/n_1^2$, где k_0 — волновое число в воздухе. Воспользуемся выражением (30.13) для фазы и ограничимся случаем, когда расстояние излучателя и приемника до границы раздела мало по сравнению с горизонтальным расстоянием между ними. В этом случае можно положить $L_1 \approx r$ (см. рис. 30.3). В результате из (30.14) получаем

$$\psi_b = \frac{2in_1^2}{k_0 r^2(1 - n_1^2)} e^{ik_0[r + \sqrt{n_1^2 - 1}(z+z_0)]}. \quad (30.16)$$

ψ_b будет быстро убывать при увеличении глубины как излучателя, так и приемника. Убывание амплитуды будет подчиняться закону $e^{-k_0 \kappa(z+z_0)}$, где $\kappa = \text{Im} \sqrt{n_1^2 - 1}$, а z и z_0 — глубины приемной и излучающей антенн.

30.5. Боковая волна при наличии переходного слоя [между полупространствами была исследована детально Лангом и Шмойсом [187]. Пусть переходный слой занимает область $-L < z < 0$. Он разделяет верхнее полупространство $z > 0$, в котором расположен источник и точка наблюдения и где скорость волн c_0 , от нижнего полупространства, где скорость $c_1 > c_0$. Скорость в самом слое предполагается изменяющейся монотонно. Боковая волна получается вследствие дифракции на границе $z = -L$ «критического» луча, падающего на слой под углом $\Phi_c = \arcsin(c_0/c_1)$. Ее амплитуда существенно зависит от поведения производных от c по z при $z = -L$ и во всех случаях уменьшается при увеличении толщины переходного слоя L .

§ 31. Поле в области, близкой к углу полного внутреннего отражения

31.1. Качественные соображения. Область применимости полученных выше формул. Как было отмечено в § 30, выражение для боковой волны (30.14) теряет смысл при приближении точки наблюдения к месту смыкания фронтов боковой и отраженной волн. В этой области отраженный луч составляет с нормалью к границе угол, близкий к углу внутреннего отражения

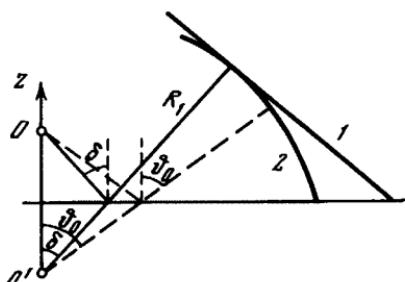


Рис. 31.1. Область углов, близкая к углу полного внутреннего отражения

1 — фронт боковой волны;
2 — фронт отраженной волны

(рис. 31.1). При этом точка P приближается к P' (рис. 30.3), а величина L_1 стремится к нулю. Применяя формулу (30.14), мы получаем $\psi_b \rightarrow \infty$. То же самое получается и из формулы (30.12), если $\Phi_0 \rightarrow \delta$.

* Если диполь помещен в цилиндрическую или сферическую полость, то требуется дополнительное рассмотрение излучения системы диполя и полости, что выходит за рамки настоящей работы.

В этой области углов теряет смысл также и полученное выше выражение (28.13) для отраженной волны. Действительно, входящая в это выражение величина N , согласно (28.17), содержит в знаменателе величину q_0 , которая при $\vartheta_0 \rightarrow \delta$, ($\sin \vartheta_0 \rightarrow n$) стремится к нулю. Вследствие этого выражение для отраженной волны обращается в бесконечность.

Причина неприменимости полученных нами формул при $\vartheta_0 \rightarrow \delta$ заключается в следующем. При их выводе мы пользовались методом перевала, считая коэффициент отражения $V(\vartheta)$ медленно меняющейся функцией. Между тем вблизи угла полного внутреннего отражения это не так. Производная $(dV/d\vartheta)_{\vartheta \rightarrow \delta}$ не только не мала, но, наоборот, обращается в бесконечность. Действительно, мы имеем

$$V(\vartheta) = \frac{m \cos \vartheta - \sqrt{n^2 - \sin^2 \vartheta}}{m \cos \vartheta + \sqrt{n^2 - \sin^2 \vartheta}},$$

$$\left(\frac{dV}{d\vartheta} \right) = \frac{2m \sin \vartheta (1 - n^2)}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \vartheta} (m \cos \vartheta + \sqrt{n^2 - \sin^2 \vartheta})^2}, \quad (31.1)$$

при $\vartheta \rightarrow \delta$ мы имеем $\sin \vartheta \rightarrow n$, откуда следует $(dV/d\vartheta)_{\vartheta \rightarrow \delta} \rightarrow \infty$. Отсюда видно, что функцию $V(\vartheta)$ в этой области углов никак нельзя считать медленно меняющейся и, следовательно, метод перевала применять нельзя.

В настоящем разделе мы проведем анализ поля в области углов, близких к углу полного внутреннего отражения. При этом будет показано, что полученные выше результаты справедливы лишь при выполнении условия

$$kR_1 (\vartheta_0 - \delta)^2 \gg 1. \quad (31.2)$$

Точная теория позволяет проследить, как при переходе из области $\vartheta_0 < \delta$ в область $\vartheta_0 > \delta$ от фронта отраженной волны отвечается фронт боковой волны.

Интересно также отметить, что при $\vartheta_0 = \delta$ отраженная волна в первом приближении может вычисляться по геометрической оптике, но поправка в следующем приближении будет не порядка $(kR_1)^{-1}$, как например, в (28.13), а порядка $(kR_1)^{-1/4}$.

31.2. Полные выражения для поля. Займемся сначала анализом боковой волны, причем снова будем исходить из интеграла (30.4). Поскольку нас интересует случай ϑ близких к δ , удобно ввести новую переменную интегрирования $\beta = \delta - \vartheta$. При этом под интегралом будем иметь

$$\begin{aligned} \exp ikR_1 \cos(\vartheta - \vartheta_0) &= \exp ikR_1 [\cos(\delta - \vartheta_0) \cos \beta + \sin(\delta - \vartheta_0) \sin \beta] = \\ &= \exp ikR_1 \cos(\delta - \vartheta_0) \exp \left\{ -2ikR_1 \left[\cos(\delta - \vartheta_0) \sin^2 \frac{\beta}{2} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sin(\delta - \vartheta_0) \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (31.3)$$

Можно выбрать такой путь интегрирования в плоскости β , что под интегралом существенную роль будут играть только малые β , не превосходящие по порядку величины

$$|\beta|_{\max} \sim 1/\sqrt{kR_1}, \quad kR_1 \gg 1. \quad (31.4)$$

Преобразуем, используя это обстоятельство, остальную часть подынтегрального выражения в (30.4). Имеем в (30.5):

$$\begin{aligned} \sqrt{n^2 - \sin^2 \vartheta} &= \sqrt{\sin^2 \delta - \sin^2 \vartheta} = \sqrt{(\sin \delta - \sin \vartheta)(\sin \delta + \sin \vartheta)} = \\ &= \sqrt{\sin(\delta + \vartheta) \sin(\delta - \vartheta)} = \sqrt{\sin(2\delta - \beta) \sin \beta} = \sqrt{\sin 2\delta \sin \beta}. \end{aligned} \quad (31.5)$$

Здесь учтено, что $\beta \ll \delta$. Знак корня выбирается из условия

$$\operatorname{Im} \sqrt{n^2 - \sin^2 \vartheta} > 0.$$

Мы положили $\sin(2\delta - \beta) \approx \sin 2\delta$, что можно делать всегда, за исключением случая, когда δ близко к $\pi/2$ и, следовательно, n близко к 1 (поскольку $n = \sin \delta$). Рассмотрим этот случай подробнее. Положим $\delta = \pi/2 - \chi$, $\chi \ll 1$. Имеем: $\cos \chi = n$, $\sin \chi \approx \chi = \sqrt{1 - n^2}$ и далее $\sin(2\delta - \beta) = \sin(2\chi - \beta)$. Теперь мы видим, что пренебрежение величиной β здесь возможно, если $\beta \ll \chi$. Учитывая значение χ и соотношение (31.4), получаем критерий, выполнение которого необходимо:

$$|\sqrt{kR_1(1-n^2)}| \gg 1. \quad (31.6)$$

Таким образом, n не должно быть очень близким к 1*. Исключая этот случай, учитывая равенство (31.1), а также малость β , мы без труда преобразуем выражение (30.4) к виду

$$\Psi_0 = -\frac{4}{m} \frac{\sqrt{2} \sqrt{k} n e^{i\pi/4}}{\sqrt{\pi r \cos \delta}} \int_0^{\delta-i\infty} \exp \{ikR_1 [\cos(\vartheta_0 - \delta) \cos \beta - \sin(\vartheta_0 - \delta) \sin \beta]\} \left(\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \right)^{1/2} \frac{d\beta}{\sin(\beta/2)}. \quad (31.7)$$

Интеграл в таком виде может быть выражен через функции Вебера (функции параболического цилиндра). Действительно, пользуясь интегральным представлением этих функций, можно показать, что имеет место тождество **

$$\frac{1}{\Gamma(-n)} \int_0^{\pi/2+\beta_0-i\infty} \exp \left[\frac{i}{2} (\xi^2 - \eta^2) \cos \beta - i\xi \eta \sin \beta \right] \left(i \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \right)^{-n} \frac{d\beta}{2 \sin(\beta/2)} = D_n(\xi - i\xi) D_n(\eta + i\eta), \quad (31.8)$$

где β_0 — произвольная вещественная величина в пределах $-\pi/2 < \beta_0 < \pi/2$. Наш интеграл (31.7) сводится к виду (31.8), если положить

$$\xi = \sqrt{2kR_1} \cos \frac{\vartheta_0 - \delta}{2}, \quad \eta = \sqrt{2kR_1} \sin \frac{\vartheta_0 - \delta}{2}; \quad (31.9)$$

в результате получаем

$$\Psi_0 = \frac{4in}{m} \sqrt{\frac{2k}{r \cos \delta}} D_{-1/2}(\xi - i\xi) D_{-1/2}(\eta + i\eta). \quad (31.10)$$

Так как $\xi \gg 1$, то можно воспользоваться асимптотическим представлением ([95], гл. 16)

$$D_{-1/2}(\xi - i\xi) \approx (\sqrt{2\xi})^{-1} \exp i(3\pi/8 + \xi^3/2).$$

Учтя еще, что

$$(\xi^2 - \eta^2)/2 = kR_1 \cos(\vartheta_0 - \delta), \quad \xi \eta = kR_1 \sin(\vartheta_0 - \delta),$$

а также соотношения (30.13), получаем

$$\Psi_0 = \frac{2in}{km(n^2 - 1) \sqrt{\pi} L_1^{1/2}} e^{ik(L_0 + L) + ik_1 L_1} F(\eta), \quad (31.11)$$

где

$$F(\eta) = (2\eta^2)^{1/4} \exp i(\eta^2/2 - 5\pi/8) D_{-1/2}(\eta + i\eta). \quad (31.12)$$

* Случай n , близкий к единице, рассмотрен нами отдельно [5].

** На существование этого тождества автору указал В. А. Фок. Заметим, что интеграл (31.7) можно выразить через функцию Вебера, не прибегая к соотношению (31.8). В самом деле, если мы экспоненту под интегралом возьмем в виде (31.3) и заменим $\sin \beta/2 = t$, причем $\cos \beta/2 \sim 1$, то получающийся интеграл совпадает с тем, который входит в интегральное представление функции Вебера [95]. Однако нам удобнее пользоваться формулой (31.8).

Таким образом, в уточненной теории мы получаем выражение (30.14) для боковой волны, но с дополнительным множителем $F(\eta)$. Приведем асимптотическое разложение $F(\eta)$ по степеням $1/\eta^2$:

$$F(\eta) \approx 1 - \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot (8\eta^2)^2} + \frac{3 \cdot 5 \cdots 15 \cdot 17}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot (8\eta^2)^4} - \dots + \\ + \frac{15i}{16\eta^2} \left(1 - \frac{7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13}{4 \cdot 6 \cdot (8\eta^2)^2} + \frac{7 \cdot 9 \cdots 19 \cdot 21}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot (8\eta^2)^4} - \dots \right). \quad (31.13)$$

При достаточно большом отличии угла падения ϑ_0 от угла полного внутреннего отражения имеем $\eta \gg 1$, $F(\eta) \approx 1$, после чего получаем результат предыдущего параграфа.

Дадим также разложение $F(\eta)$ по степеням η :

$$F(\eta) \approx \sqrt{\pi} \exp(3\pi i/8) \eta^{1/4} \left\{ \frac{4}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)} \left[1 + \frac{3\eta^2}{2} i - \frac{3 \cdot 7}{2 \cdot 1 \cdot 3} \left(\frac{\eta^2}{2}\right)^2 - \right. \right. \\ \left. - \frac{3 \cdot 7 \cdot 11}{3! \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5} \left(\frac{\eta^2}{2}\right)^3 + \dots \right] - \frac{\sqrt{2}(1+i)\eta}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} \left[1 + \frac{5}{3} \left(\frac{\eta^2}{2}\right) i - \right. \\ \left. - \frac{5 \cdot 9}{2! \cdot 3 \cdot 5} \left(\frac{\eta^2}{2}\right)^2 - \frac{5 \cdot 9 \cdot 13}{3! \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} \left(\frac{\eta^2}{2}\right)^3 i + \dots \right] \right\}. \quad (31.13a)$$

Пользуясь формулами (31.13) и (31.13a), можно табулировать функцию $F(\eta)$ (табл. 2). Формула (31.10) позволяет получить значения поля боковой волны во всей области ее существования $\vartheta_0 \geq \delta$ (см. рис. 31.1).

Таблица 2. Значения функции $F(\eta) = |F| e^{i\Phi}$

| η^2 | $ F $ | $(4/\pi) \Phi$ | η^2 | $ F $ | $(4/\pi) \Phi$ |
|----------|-------|----------------|----------|-------|----------------|
| 0,1 | 0,25 | 1,12 | 1,6 | 0,82 | 0,48 |
| 0,2 | 0,36 | 1,00 | 1,9 | 0,84 | 0,43 |
| 0,4 | 0,51 | 0,85 | 2,2 | 0,86 | 0,39 |
| 0,7 | 0,65 | 0,71 | 3,0 | 0,89 | 0,30 |
| 1,0 | 0,72 | 0,61 | 4,0 | 0,93 | 0,25 |
| 1,3 | 0,78 | 0,53 | 5,0 | 0,94 | 0,22 |

Интересно отметить, что при $\vartheta_0 \rightarrow \delta$ ($\eta \rightarrow 0$), т. е. при подходе к границе области, в которой существует боковая волна, амплитуда последней не обращается в нуль, как это могло бы показаться с первого взгляда. Действительно, из (31.11) получаем при $\eta = 0$, учитывая, что согласно (30.13) и (31.9), $kL_1 \cos \delta = \sqrt{2kR_1}\eta$:

$$\psi_6 = \frac{4in \sqrt{2\pi} \exp(-\pi i/8)}{m\Gamma(1/4) \sqrt{\sin 2\delta}} \frac{e^{ikR_1}}{R_1}. \quad (31.14)$$

В случае отраженной волны мы ограничимся анализом интеграла (28.2) при ϑ_0 , весьма близком δ . При этом пренебрежем членом $1/8 kr \sin \vartheta$ по сравнению с единицей. Кроме того, в выражении (30.1) корень $\sqrt{n^2 - \sin^2 \vartheta}$ можно считать малым, поскольку мы предполагаем, что точка перевала ϑ_0 близка к δ . Поэтому можно положить

$$V(\vartheta) \approx 1 - (2/m \cos \vartheta) \sqrt{n^2 - \sin^2 \vartheta}.$$

Введя снова вместо ϑ новую переменную интегрирования $\beta = \delta - \vartheta$ и учитывая соотношение (31.5), получаем

$$V(\vartheta) = 1 - (2/m \cos \vartheta) \sqrt{\sin 2\delta \sin \beta}. \quad (31.15)$$

При применении метода перевала Φ здесь можно заменить через ϑ_0 или, предполагая, что

$$|(\vartheta_0 - \delta)/\vartheta_0| \ll 1, \quad (31.16)$$

ϑ_0 в свою очередь можно заменить через δ . В результате

$$V(\Phi) \approx 1 - (2 \sqrt{2n/m}) \sqrt{\sin \beta / \cos \delta}.$$

Заметим кстати, что условие (31.16) обеспечивает также малость опущенных членов разложения в последней формуле.

После всего изложенного интеграл (28.2) без труда выражается через два интеграла типа (31.8). Учитывая также указанное ранее правило для выбора знака корня $\sqrt{\sin \beta}$, получаем

$$\Psi_{\text{отр}} = \frac{e^{ikR_1}}{R_1} - \frac{2in}{m} \sqrt{\frac{2k}{r \cos \delta}} D_{-1/2}(\xi - i\xi) [\pm D_{1/2}(\eta + i\eta) - iD_{1/2}(-\eta - i\eta)], \quad (31.17)$$

где знак плюс относится к случаю $\vartheta_0 < \delta$, а знак минус — к случаю $\vartheta_0 > \delta$.

При $\vartheta_0 < \delta$ выражение (31.17) представляет собой полное выражение для поля в верхней среде (исключая, конечно, падающую волну), так как боковая волна в этой области углов отсутствует. При этом линейная комбинация функций Вебера порядка $-3/2$ в квадратной скобке объединяется в функцию Вебера порядка $1/2$ (см. [95]). В результате получаем

$$\Psi_{\text{отр}} = \frac{e^{ikR_1}}{R_1} + \frac{8n}{m} \sqrt{\frac{k}{r \cos \delta}} e^{\frac{3\pi i}{4}} D_{1/2}(\xi - i\xi) D_{1/2}(\eta - i\eta). \quad (31.18)$$

При $\vartheta_0 > \delta$ в выражении (31.17) нужно взять знак минус и добавить выражение (31.10) для боковой волны. При этом опять получается выражение (31.18). Таким образом, последнее является выражением для отраженного поля, пригодным для любых ϑ_0 , близких к δ . Проанализируем его при различных значениях η , т. е. различных $\vartheta_0 - \delta$.

Воспользовавшись известным разложением функций Вебера по степеням аргумента, а также учитя (31.10), получаем

$$\begin{aligned} \Psi_{\text{отр}} = & \frac{e^{ikR_1}}{R_1} \left\{ 1 - \frac{4n \exp(i\pi/8)}{m \Gamma(1/4) (kR_1/2)^{1/4}} \right\} \sqrt{\frac{\pi}{\sin 2\delta}} \left[1 + \frac{i\eta^2}{2} + \frac{3}{2!1.3} \left(\frac{\eta^2}{2}\right)^3 - \right. \\ & - i \frac{3.7}{3!1.3.5} \left(\frac{\eta^2}{2}\right)^5 - \dots + \frac{(1-i)\Gamma(1/4)\Pi}{4\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{i\eta^2}{3/2} - \frac{1.5}{2!3.5} \left(\frac{\eta^2}{2}\right)^3 + \right. \\ & \left. \left. + i \frac{1.5.9}{3!3.5.7} \left(\frac{\eta^2}{2}\right)^5 + \dots \right) \right]. \end{aligned} \quad (31.19)$$

При $\vartheta_0 = \delta$, т. е. $\eta = 0$, в фигурных скобках остаются всего два члена. Из них первый и основной член — единица — равен коэффициенту отражения плоской волны для случая $\vartheta_0 = \delta$. Таким образом, геометрическая оптика как первое приближение годится и в этом случае. Однако второй член, представляющий собой поправку к ней, с увеличением kR_1 убывает значительно медленнее, чем поправочный член в (28.13), а именно, как $(kR_1)^{-1/4}$. Часть этого члена составляет боковую волну, отдельно проанализированную нами ранее [см. выражение (31.14)].

Разложение по степеням $1/\eta$ зависит от знака η . При $\eta < 0$ ($\vartheta_0 < \delta$) имеем

$$\begin{aligned} \Psi_{\text{отр}} = & \frac{e^{ikR_1}}{R_1} \left\{ 1 - \frac{2 \sqrt{\sin 2\delta \sin(\delta - \vartheta_0)}}{m \cos \delta} \right\} \left[1 - \frac{i\eta}{2(8\eta^2)} + \frac{1.3.5}{2.4(8\eta^2)^3} + \right. \\ & \left. + i \frac{1.3.5.7}{2.4.6(8\eta^2)^5} - \dots \right]. \end{aligned} \quad (31.20)$$

При $\eta^2 \gg 1$ в квадратной скобке всеми членами, кроме единицы, можно пренебречь. Остающиеся в фигурной скобке два члена представляют собой два первых члена разложения коэффициента отражения (31.1) в ряд по степеням корня $\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_0} \equiv \sqrt{\sin 2\delta \sin(\delta - \theta_0)}$ в предположении (31.16), т. е. мы получаем приближение геометрической оптики. Заметим, что условие $\eta^2 \gg 1$ при учете значения η записывается

$$kR_1(\theta_0 - \delta)^2 \gg 1. \quad (31.21)$$

При $\eta > 0$ асимптотическое значение для D_{11} , ($\eta = i\eta$) имеет уже иной вид и содержит два члена, из которых один в точности совпадает с (31.20), а другой дает волну с коническим фронтом (31.11).

В результате мы выяснили все детали поведения волн при угле полного внутреннего отражения и, в частности, характер смыкания боковой и отраженной волн в этой области. Кроме того, проведенный только что анализ позволяет описать отраженную волну $\Psi_{\text{отр}}$ при всех углах падения θ_0 .

Действительно, при выполнении условия (31.21) справедлив анализ, проведенный в § 28. С другой стороны, если это условие не выполняется, то $(\theta_0 - \delta)/\theta_0 \ll 1$. Однако выполнение этого условия позволяет произвести разложение (31.15), в результате чего получается выражение (31.17).

31.3. Лучевые представления. Каустика. Особенности, возникающие при углах, близких к углу полного внутреннего отражения, легко объясняются при помощи лучевых представлений.

Покажем прежде всего, что полученное в § 14 выражение для смещения ограниченного пучка лучей при отражении справедливо также и для каждого из лучей, исходящих из точечного излучателя O (см. рис. 30.8). Для этого мы снова воспользуемся выражением (28.2) для отраженной волны, пренебрегая в нем членом $1/8 kr \sin \theta$ по сравнению с единицей. Положив в этом выражении $V(\theta) = \exp i\varphi(\theta)$, где фаза коэффициента отражения $\varphi(\theta)$ может быть и комплексной функцией, получаем

$$\Psi_{\text{отр}} = e^{i\pi/4} \sqrt{\frac{k}{2\pi r}} \int_{-\pi/2-i\infty}^{\pi/2-i\infty} e^{if(\theta)} \sqrt{\sin \theta} d\theta, \quad (31.22)$$

где

$$f(\theta) = kR_1 \cos(\theta - \theta_0) + \varphi(\theta). \quad (31.23)$$

Интеграл (31.22) будем анализировать методом перевала. Для определения точки перевала $\theta = \gamma$ имеем уравнение $f'(\gamma) = 0$, т. е.

$$\sin(\gamma - \theta_0) = \varphi'(\gamma)/kR_1. \quad (31.24)$$

Учитывая, что kR_1 велико, последнее уравнение можно решать методом последовательных приближений. Полагая в нулевом приближении правую часть равной нулю, находим $\gamma \approx \theta_0$. Подставляя это в правую часть уравнения, находим в первом приближении

$$\gamma = \theta_0 + \arcsin [\varphi'(\theta_0)/kR_1]. \quad (31.25)$$

γ представляет собой угол, под которым луч приходит в точку приема. При отсутствии смещения луча угол прихода был бы равен θ_0 (рис. 31.2).

Разлагая $f(\theta)$ в (31.22) в ряд по θ около точки перевала γ и вынося $\sqrt{\sin \theta}$, как медленно меняющуюся функцию за интеграл при значении

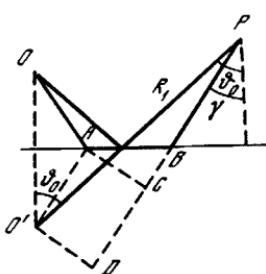


Рис. 31.2. Связь смещения луча с углом его прихода в точку наблюдения

$\vartheta = \gamma$, получаем

$$\Psi_{\text{отр}} = \sqrt{\frac{k \sin \gamma}{2\pi r}} \exp i[f(\gamma) + \pi/4] \int_{-\pi/2+i\infty}^{\pi/2-i\infty} \exp i \left[\frac{1}{2} f''(\gamma) (\vartheta - \gamma)^2 + \frac{1}{6} f'''(\gamma) (\vartheta - \gamma)^3 + \dots \right] d\vartheta, \quad (31.26)$$

где

$$f''(\gamma) = -kR_1 \cos(\gamma - \vartheta_0) + \varphi''(\gamma). \quad (31.27)$$

Пренебрежем пока кубичным и последующими членами в экспоненте. Тогда, введя новую переменную интегрирования $\gamma - \vartheta = is$ и учитя значение интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[-\frac{1}{2} f''(\gamma) s^2 \right] ds = \sqrt{\frac{2\pi}{-f''(\gamma)}} e^{is/4}, \quad (31.28)$$

получим

$$\Psi_{\text{отр}} = \sqrt{\frac{k \sin \gamma}{-f''(\gamma)}} e^{if(\gamma)}. \quad (31.29)$$

Зная угол γ , под которым луч приходит в точку приема, можно определить смещение луча $\Delta = AB$ (рис. 31.2). Мы имеем:

$$O'D = O'P \sin(\vartheta_0 - \gamma) = R_1 \sin(\vartheta_0 - \gamma),$$

где $R_1 = O'P$ — как всегда, расстояние от мнимого источника до точки наблюдения. С другой стороны, $O'D = AC = \Delta \cos \gamma$. Приравнивая два последних выражения, а также учитывая (31.24), получаем

$$\Delta = -\frac{1}{k \cos \gamma} \left(\frac{d\varphi}{d\vartheta} \right)_{\vartheta=\gamma}. \quad (31.30)$$

Это выражение тождественно (14.25) для смещения, полученного для случая отражения ограниченного пучка, если учесть, что $\xi_0 = k \sin \gamma$.

Интересную особенность для поля мы получаем в тех точках, где одновременно с первой производной от f обращается в нуль также и вторая производная, т. е. одновременно выполняются два равенства

$$kR_1 \cos(\gamma - \vartheta_0) = \varphi''(\gamma), \quad kR_1 \sin(\gamma - \vartheta_0) = \varphi'(\gamma). \quad (31.31)$$

В этих точках, как видно из (31.29), $\psi_{\text{отр}}$ в лучевом приближении стремится к ∞ (поскольку $f''(\gamma) \rightarrow 0$). Геометрическое место этих точек образует каустику. Уравнение каустики в полярных координатах (R_1, ϑ_0) с центром в точке O' (см. рис. 31.1) получится путем исключения из соотношений (31.31) переменной γ .

Таким образом, благодаря смещению лучей при отражении отражающая плоскость производит в некоторой области углов падения своего рода фокусирующее действие. Возникновение каустики легко представить, исходя из лучевых представлений. Рассмотрим пучок лучей, падающих на границу под углами, близкими к углу полного внутреннего отражения δ , но несколько большими его. Учтем, что при отражении каждый луч смещается вдоль границы, причем смещения будут тем больше, чем ближе угол падения луча к углу δ . В результате для отраженного пучка лучей получается изображенная на рис. 31.3 картина. Огибающая семейства лучей и будет представлять собой каустику.

Для определения поля вблизи каустики, где несправедлива формула (31.29), необходимо исходить из интеграла (31.26), учитывая в экспоненте члены третьего порядка. Мы не будем этого проделывать, так как выкладки были бы весьма сходны с изложенным ниже, в § 46.

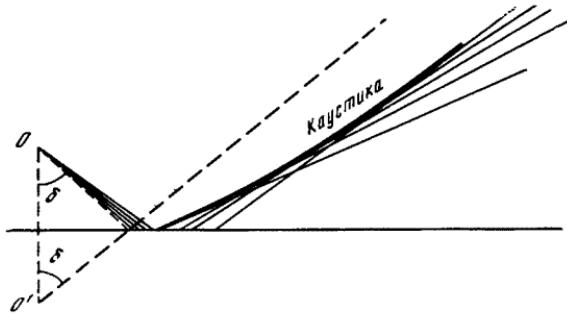


Рис. 31.3. Образование каустики в результате смещения лучей

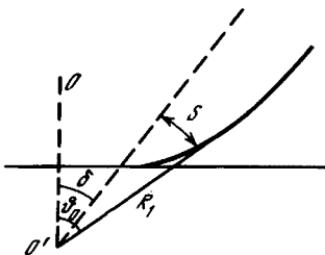


Рис. 31.4. К уравнению каустики в полярных координатах

Рассмотрим детальнее вид каустики. Формула (31.1) для коэффициента отражения в случае $\sin \theta > n$ (полное внутреннее отражение) принимает вид

$$V = \frac{m \cos \theta - i}{m \cos \theta + i} \sqrt{\sin^2 \theta - n^2} = e^{i\Phi(\theta)}, \quad (31.32)$$

$$\Phi(\theta) = -2 \operatorname{arctg} (\sqrt{\sin^2 \theta - n^2} / m \cos \theta). \quad (31.33)$$

Ограничиваюсь углами, близкими к δ ($\sin \theta$ близок к n), получаем

$$\sqrt{\sin^2 \theta - n^2} = \sqrt{\sin(\delta + \theta) \sin(\theta - \delta)} \approx \sqrt{(\theta - \delta) \sin 2\delta}.$$

В результате выражение (31.33) может быть записано

$$\Phi(\theta) = -a(\theta - \delta)^{1/2}, \quad a \equiv 2(2n)^{1/2} / m (1 - n^2)^{1/4}. \quad (31.34)$$

Преобразуем уравнения (31.31) с учетом (31.34). При этом, вследствие малости $\gamma - \theta_0$, можно положить $\sin(\gamma - \theta_0) \approx \gamma - \theta_0$, $\cos(\gamma - \theta_0) \approx 1$. В результате уравнения (31.31) запишутся $a(\gamma - \delta)^{-1/2} = 4kR_1$, $a(\gamma - \delta)^{-1/2} = 2kR_1 [(\theta_0 - \delta) - (\gamma - \delta)]$.

Исключив из этих уравнений $\gamma - \delta$, найдем

$$\theta_0 - \delta = \frac{3}{4} (2a/kR_1)^{2/3}. \quad (31.35)$$

Это и есть уравнение каустики в полярной системе координат с центром в мнимом источнике O' (рис. 31.4). При $R_1 \rightarrow \infty$ имеем $\theta_0 \rightarrow \delta$. Однако расстояние от каустики до прямой $\theta_0 = \delta$ (пунктирная прямая на рис. 31.4) непрерывно возрастает, так как

$$s \equiv R_1(\theta_0 - \delta) = \frac{3}{4} (2a/k)^{2/3} R_1^{1/3}. \quad (31.36)$$

§ 32. Преломление сферических волн

Задача о вычислении поля преломленных сферических волн имеет практический интерес в ряде случаев. К ней сводится, например, вычисление поля радиоволн или звуковых волн под землей или в воде при излучающей антенне, находящейся в воздухе. При этом, как и для отраженной волны, в качестве первого приближения мы получаем геометрическую оптику, а в последующих приближениях — поправки к ней (иногда весьма существенные). Мы остановимся сначала на анализе преломленной волны, исходя из лучевых представлений.

32.1. Поле преломленной волны в приближении геометрической оптики. Среду, в которой находится излучатель, мы условно называем «верхней». Следовательно, задачей настоящего параграфа будет анализ поля в «нижней» среде.

Через любую точку S в нижней среде проходит один из лучей, вышедших из излучателя O и преломившихся на границе по законам преломления геометрической оптики. На рис. 32.1, относящемся к случаю $n < 1$ ($c_1 > c$), это луч OTS . Угол падения ϑ связан с углом преломления ϑ_1 равенством

$$n \sin \vartheta_1 = \sin \vartheta, \quad n \equiv k_1/k \equiv c/c_1. \quad (32.1)$$

Амплитуда волны в точке S в приближении геометрической оптики может быть определена из условия сохранения потока энергии внутри лучевой трубы, а фаза — из оптической длины луча. Рассчитаем сначала фазу. Она равна $2\pi (OT/\lambda + TS/\lambda_1) = k \cdot OT + + k_1 \cdot TS$, где OT и TS — длины отрезков, из которых состоит луч. Для них согласно рис. 32.1 имеем $OT = z_0 / \cos \vartheta$. $TS = D / \cos \vartheta_1$, где $D \equiv -z$ — расстояние точки S от границы раздела.

Учитывая закон преломления (32.1), получаем для набега фазы

$$k(z_0 / \cos \vartheta + n^2 D \sqrt{n^2 - \sin^2 \vartheta}). \quad (32.2)$$

Угол ϑ при заданном расположении излучателя O и приемника S находится путем исключения ϑ_1 из уравнения (32.1) и уравнения

$$z_0 \operatorname{tg} \vartheta + D \operatorname{tg} \vartheta_1 = r, \quad (32.3)$$

геометрический смысл которого очевиден.

Для определения амплитуды волны в точке S построим луч $OT'Q$ (рис. 32.1), лежащий в плоскости OTS и падающий на границу под углом $\vartheta + \Delta\vartheta$, где $\Delta\vartheta$ мало. Рассмотрим теперь все лучи, заключенные между поверхностями, образованными вращением лучей OTS и $OT'Q$ вокруг оси z . Энергия, которую несут эти лучи, частично отражается, частично проходит в нижнюю среду и распространяется там между TS и $T'Q$. Пусть амплитуда волны в точке T в нижней среде будет $A(T)$. Для определения $A'(S)$ — амплитуды волны в S — необходимо установить зависимость между длиной отрезка SQ , который перпендикулярен к TQ в S и длиной отрезка $|T'Q'|$, который перпендикулярен к той же линии в точке Q' . Поток энергии через оба кольца, образованных вращением $Q'T'$ и QS , одинаков. Следовательно, отношение амплитуд волны в точках T и S равно корню квадратному из обратного отношения площадей колец. Площадь кольца, образованного вращением $Q'T'$, равна $2\pi (CT)(Q'T') \approx 2\pi (CT)(Q'T')$, площадь же кольца, образованного вращением SQ , будет $2\pi r (SQ)$.

Следовательно,

$$A(S)/A(T) = \sqrt{(CT)(Q'T')/(SQ)r}. \quad (32.4)$$

Но

$$CT = z_0 \operatorname{tg} \vartheta, \quad TT' = \frac{d(CT)}{d\vartheta} d\vartheta = z_0 d\vartheta / \cos^2 \vartheta,$$

$$Q'T' = TT' \cos \vartheta_1 = z_0 \cos \vartheta_1 d\vartheta / \cos^2 \vartheta. \quad (32.5)$$

SQ равно длине отрезка $Q'T'$ у границы, увеличенной на добавочный отрезок, получающийся из-за вращения луча в плоскости падения

$$SQ = Q'T' + TS d\vartheta_1 = Q'T' + D d\vartheta_1 / \cos \vartheta_1. \quad (32.6)$$

Продифференцировав уравнение (32.1), найдем выражение $d\vartheta_1$ через $d\vartheta$: $\cos \vartheta d\vartheta = n \cos \vartheta_1 d\vartheta_1$.

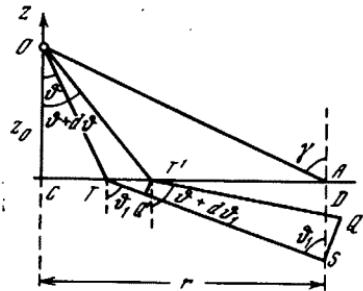


Рис. 32.1. К вычислению поля в нижней среде лучевым методом

Поле ψ_1 в точке T непосредственно ниже границы раздела связано с полем ψ в этой же точке над границей соотношением *

$$m\psi_1 = \psi, \quad (32.7)$$

где, как и выше, $m = \rho_1/\rho$ — для акустики, $m = n^2$ — для электродинамики в случае вертикальной поляризации, $m = 1$ — для электродинамики в случае горизонтальной поляризации.

Над границей раздела, где складываются прямая и отраженная волны, амплитуда суммарной волны равна $|\psi| = |1 + V(\theta)|/R$.

После этого, пользуясь равенством (32.7), нетрудно найти амплитуду $A(T) = |\psi_1|$, а пользуясь формулой (32.4), также и $A(S)$ — амплитуду волны в точке S . Учтя затем набег фазы, даваемый формулой (32.2), и выражение (31.1) для коэффициента отражения $V(\theta)$, мы получаем после несложных преобразований для поля в S

$$\psi_1(S) = \frac{2 \sqrt{\sin \theta} \exp ik[z_0 \cos \theta + nD \cos \theta_1]}{\sqrt{r(z_0 \cos^2 \theta + (D/n) \cos^2 \theta_1)(m \cos \theta + n \cos \theta_1)}}, \quad (32.8)$$

где согласно (32.1) $\cos \theta_1 = \sqrt{1 - n^{-2} \sin^2 \theta}$, а угол θ находится из (32.3) и (32.1).

Выражение (32.8) справедливо, если расстояния излучателя и приемника от границы раздела достаточно велики по сравнению с длиной волны, что будет видно из более точного решения, приведенного в следующем разделе.

32.3. Поправки к геометрической оптике для преломленных волн. Точное выражение для поля преломленной волны (поле в «нижней» среде) может быть получено в интегральном виде, аналогичном выражению (26.24) для отраженной волны. Для этого снова сферическую волну необходимо представить в виде разложения по плоским волнам. При проходе через границу раздела сред каждой из плоских падающих волн ее амплитуда множится на коэффициент прозрачности $W(\theta)$. Если принять амплитуду падающей волны за единицу, то амплитуда отраженной волны будет V , а прошедшей W . Учитывая, что полное поле около границы в верхней среде будет $\psi = 1 + V$ и поле в нижней среде $\psi_1 = W^{**}$, мы получаем из соотношения (32.7) связь между коэффициентами отражения и прозрачности $mW = 1 + V$. После этого, учитывая также соответственный набег фазы, мы получаем для поля в нижней среде ($z < 0$)

$$\psi_1 = \frac{ik}{2\pi m} \int_0^{\pi/2-i\cot \theta} \int_0^\infty \exp i[k(x \cos \varphi + y \sin \varphi) \sin \theta + kz_0 \cos \theta - k_1 z \cos \theta_1] \times$$

$$[\times (1 + V) \sin \theta] d\theta dp.$$

Анализ этого выражения на больших по сравнению с длиной волны расстояниях от источника целесообразно производить методом перевала так же, как это делалось в § 28 для отраженной волны. Мы не будем приводить выкладок ввиду их тождественности выкладкам § 28 и остановимся сразу на результатах расчетов их и физическом смысле. При этом основной интерес имеют поправки к полученному выше результату геометрической оптики.

Рассмотрим рис. 32.2, где изображены два случая преломления волны: для $n > 1$ и $n < 1$. В обоих случаях OTS представляет собой луч, построенный по законам геометрической оптики. Соответствующее ему выра-

* Соотношение (32.7) в случае акустики следует из равенства звуковых давлений по обеим сторонам границы: $p = p_1$. Отсюда и получаем соотношение для звуковых потенциалов: $\rho\psi = \rho_1\psi_1$ или $m\psi_1 = \psi$. В случае электродинамики и вертикальной поляризации из (26.6) получаем $H_y = -(\omega k_x/c)\Pi$. Так как при переходе через границу H_y должна быть непрерывным и k_x также не изменяется, то отсюда следует условие $\epsilon\Pi = \epsilon_1\Pi_1$, или $\Pi = m\Pi_1$.

** С точностью до общего для всех трех волн фазового множителя.

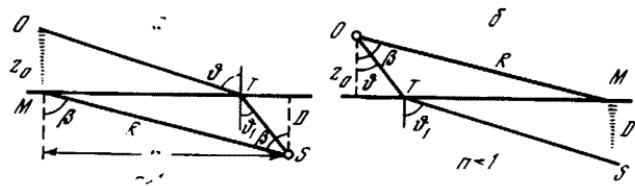
жение для звукового потенциала или вектора Герца дается формулой (32.8).

Как и в случае отраженной волны, уточнение геометрической оптики идет по двум линиям.

1. Учет второго приближения в методе перевала, благодаря чему к выражению (32.8) прибавляется еще один член порядка $1/kR_1$.

2. Добавление волны нового типа (получающейся от интегрирования по берегам разреза), аналогичной боковой волне в случае отраженных волн. Перенос энергии от излучателя к приемнику этой волной производится существенно иным путем, чем в геометрической оптике. На рис. 32.2 это —

Рис. 32.2. Пути проникновения волны в нижнюю среду для случаев $n > 1$ и $n < 1$



путь OMS . В случае б) смысл этой волны особенно прост. Здесь она представляет собой хорошо известную экспоненциально затухающую при углублении в нижнюю среду волну, получающуюся при отражении луча OM , падающего на границу раздела под углом, большим, чем угол полного внутреннего отражения ($\sin \beta > n$). В случае а) она получается вследствие того, что неоднородные, экспоненциально затухающие по z плоские волны, присутствующие в разложении исходящей из O сферической волны (на рис. 32.2 они изображены системой горизонтальных черточек), падая на границу, возбуждают в нижней среде обычные плоские волны, распространяющиеся под всеми углами падения β , удовлетворяющими условию $\sin \beta > 1/n$.

Заметим, что случай а) получится из б), если в последнем поменять местами излучатель и приемник.

Не приводя, как мы уже условились, подробного исследования в комплексной плоскости, которое имеет совершенно такой же вид, как и в случае отраженных волн, вышлем окончательные результаты. При этом мы будем рассматривать случай малых углов скольжения, когда только и могут быть существенны поправки к геометрической оптике. В соответствии с этим будем предполагать, что $(\pi/2 - \vartheta) \ll 1$, $m(\pi/2 - \vartheta) \ll \sqrt{n^2 - 1}$, $z \cos \vartheta \ll z_0 \sqrt{n^2 - 1}$. В результате имеем:

а) $n > 1$. Выражение (32.8) в уточненном виде записывается

$$\Psi_1(s) = \frac{2}{r} e^{ik(r \sin \theta + z_0 \cos \theta + D \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}} \left(\frac{\sqrt{r/z_0} \cos^3 \theta}{m \cos \theta + \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}} + \frac{im}{n^2 - 1} \frac{1}{kr} \right). \quad (32.9)$$

Угол θ здесь, как уже указывалось, находится путем исключения ϑ_1 из уравнений (32.1) и (32.3). Если при этом воспользоваться условием малости $\pi/2 - \vartheta$, то мы получим

$$\frac{\pi}{2} - \vartheta \approx z_0 (r - D/\sqrt{n^2 - 1})^{-1}. \quad (32.10)$$

Если в выражении (32.8) пренебречь $D \cos^3 \theta_1$ по сравнению с $z_0 \cos^3 \theta$ (что возможно при наименьшем предположении о малости $\pi/2 - \vartheta$) и преобразовать несложным образом экспоненту, то оно переходит в (32.9) при отброшенном втором члене в скобках, что и должно быть, так как этот член дает поправку к геометрической оптике. При $\vartheta \rightarrow \pi/2$, когда первый член в (32.9), соответствующий геометрической оптике, исчезает, второй (поправочный) член становится основным.

К выражению (32.9) нужно добавить также еще волну типа боковой волны, получающуюся от интегрирования по берегам разреза в комплексной плоскости. Она имеет место только при достаточно больших углах β (рис. 32.2), удовлетворяющих условию $\sin \beta > 1/n$. Ее аналитическое выражение имеет вид

$$\Psi_{16} = \frac{2n}{R} e^{ik_1 R - kz_0} \sqrt{n^2 \sin^2 \beta - 1} \left[\frac{\cos \beta}{n \cos \beta + im \sqrt{n^2 \sin^2 \beta - 1}} + \frac{i}{m(1 - n^2)kR} \right], \quad (32.11)$$

где

$$R = \sqrt{r^2 + D^2}.$$

Как мы видим, амплитуда этой волны, экспоненциально убывает при удалении излучателя от границы раздела. Полное поле в нижней среде будет суммой $\Psi_1 + \Psi_{16}$.

б) $n < 1$. В этом случае соответствующие формулы будут

$$\Psi_1 = \frac{2n}{r} e^{i(kr \sin \theta + kz_0 \cos \theta + k_1 D \cos \theta_1)} \left[\frac{\sqrt{r/D} \cos^3 \theta_1}{n \cos \theta_1 + m \sqrt{1 - n^2 \sin^2 \theta_1}} + \frac{i}{m^2(1 - n^2)kr} \right]. \quad (32.12)$$

При этом предполагается, что $\pi/2 - \theta_1 \ll 1$ и $n(\pi/2 - \theta_1) \ll m(1 - n^2)$. Из уравнений (32.1) и (32.3) при этих предположениях имеем

$$\pi/2 - \theta_1 \approx D(r - nz_0 \sqrt{1 - n^2})^{-1}. \quad (32.13)$$

Добавочная волна типа боковой, имеющая место при $\sin \beta > n$, будет

$$\Psi_{16} = \frac{2}{R} e^{ikR - kz} \sqrt{\sin^2 \beta - n^2} \left[\frac{\cos \beta}{m \cos \beta + i \sqrt{\sin^2 \beta - n^2}} + \frac{im}{kR(n^2 - 1)} \right], \quad (32.14)$$

где

$$R = \sqrt{r^2 + z_0^2}.$$

При этом предположено, что $m(\pi/2 - \beta) \ll \sqrt{1 - n^2}$. Если наоборот, $m(\pi/2 - \beta) \gg \sqrt{1 - n^2}$, то для второго члена в скобках получилось бы $(2/kRm^2) \sqrt{1 - n^2} \cos^3 \beta$.

На рис. 32.2 видно, что один случай переходит в другой при замене $z_0 \leftrightarrow D$, $n \rightarrow 1/n$, $m \rightarrow 1/m$, $\theta \leftrightarrow \theta_1$. Отсюда следует, что при такой замене формулы (32.9) и (32.11) должны переходить соответственно в формулы (32.12) и (32.14) и обратно. Это действительно имеет место, в чем нетрудно убедиться. При этом надо еще учесть необходимость деления на m каждой из формул при такой замене, что вытекает, например, в акустике из того, что здесь мы основываемся на принципе взаимности, справедливом для звукового давления, в то время как ϕ у нас означает звуковой потенциал, отличающийся от давления множителем ρ в верхней среде и ρ_1 — в нижней.

Основываясь на полученных формулах, найдем границы применимости приближения геометрической оптики. В случае $n > 1$ из условия пренебрежимости вторым членом в скобках (32.9), как и в § 28, получаем

$$kz_0 \gg m/\sqrt{n^2 - 1}. \quad (32.15)$$

Таким образом, для применимости геометрической оптики необходимо, чтобы возвышение излучателя над границей раздела было достаточно велико по сравнению с длиной волны. Заметим, что при увеличении z_0 стремится к нулю также амплитуда волны (32.11), что и должно быть, так как в геометрической оптике эта волна отсутствует.

Аналогично, в случае $n < 1$ условие малости второго члена в (32.12) по сравнению с первым дает

$$kz \gg 1/m \sqrt{1 - n^2}. \quad (32.16)$$

Таким образом, для применимости геометрической оптики при $n > 1$ необходимо, чтобы излучатель был достаточно далеко удален от границы, положение же приемника существенной роли не играет (однако напоминаем, что рассматривается случай $z \ll r, z_0 \ll r$). При $n < 1$, наоборот, необходимо, чтобы достаточно далеко от границы был удален приемник.

32.3. Случай, когда одна из сред обладает заметным поглощением. Рассмотрим случай, когда приемник находится в поглощающей, а излучатель в непоглощающей средах. В электродинамике этот случай реализуется при расположении приемной антенны в земле или морской воде.

При достаточно большом удалении излучателя и приемника от границы раздела задача решается элементарно при помощи геометрической оптики (см. формулу (32.8), в которой n нужно считать комплексной величиной). Мы будем рассматривать случай, когда удаления невелики по сравнению с длиной волны.

При наличии поглощения в нижней среде из двух рассмотренных выше волн заметной амплитудой в точке приема будет обладать только та волна, которая основную часть своего пути идет в верхней, непоглощающей среде. Это будет волна OTS в случае а) и волна OMS в случае б) (рис. 32.2).

Таким образом, в этих двух случаях вектор Герца, или звуковой потенциал будет даваться соответственно формулами (32.9) и (32.14). Последние отличаются друг от друга только тем, что в одну входит угол θ и r , а в другую β и R . Однако, если в формуле (32.10) для θ пренебречь D по сравнению с r , то получим $\theta \approx \beta \approx \pi/2 - z_0/r, r \approx R$.

Таким образом, для нашего случая

$$\psi_1(r, D) = \frac{2}{R} e^{ikR + ikD \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}} \left[\frac{\cos \theta}{m \cos \theta + \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}} + \frac{im}{(n^2 - 1) kR} \right], \quad (32.17)$$

где $\cos \theta \approx z_0/r$.

Интересно сравнить это выражение с выражением для поля в нижней среде непосредственно над границей раздела, на том же расстоянии r от излучателя. Последнее мы получим, складывая прямую волну $(1/R) \exp(ikr)$ с отраженной волной, даваемой (28.13). Заметим, что в последнем угол θ_0 совершенно тождествен фигурирующему в настоящем параграфе углу θ . Учитя, кроме того, выражение (28.17) и снова ограничившись малыми углами скольжения ($\gamma_0 = \cos \theta_0$ мало), получаем для полного поля в верхней среде вблизи границы раздела ($z = 0$)

$$\psi(r, 0) = \frac{2m}{R} e^{ikR} \left[\frac{\cos \theta}{m \cos \theta + \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}} + \frac{im}{kR(n^2 - 1)} \right].$$

Сравнивая последнее выражение с (32.17), получаем

$$m\psi_1(r, D) = \psi(r, 0) e^{ikD \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}}.$$

Эта формула простым образом связывает поле в нижней среде в точке S (рис. 32.1), с полем в верхней среде, взятым на самой границе раздела (точка A). Она показывает, что углубление приемника оказывается только в появлении множителя $\exp(ikD \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta})$. Взяв модуль от обеих частей последней формулы, получаем закон спадания амплитуды волны при углублении

$$m |\psi_1(r, D)| = |\psi(r, 0)| e^{-xD}, \quad (32.18)$$

где

$$x = (2\pi/\lambda) \operatorname{Re} \sqrt{\sin^2 \theta - n^2}.$$

В акустике, учитя связь между потенциалом и звуковым давлением, формулу (32.18) можно переписать в виде

$$|F_1(r, D)| = |p(r, 0)| e^{-xD}, \quad (32.19)$$

где p и p_1 — звуковое давление соответственно в верхней и нижней средах. Аналогично, в электродинамике вместо формулы (32.18) можно пользоваться формулами, связывающими значения непосредственно компонент поля в нижней и верхней средах [6].

Интересно отметить, что формулы, которыми мы пользовались при выводе соотношения (32.18), в частности выражение (28.3), справедливы только при условии, что полюс лежит слишком близко к точке перевала (см. § 29). Это означает, что при заданных расстояниях r и длине волны проводимость почвы не должна быть слишком велика. Однако можно показать [6], что соотношение (32.18) справедливо в гораздо более общем случае, когда выполняются лишь условия $kR \gg 1$, $(\pi/2 - \theta) \ll 1$.

32.4. Звуковое поле в воде от излучателя, находящегося в воздухе. Звуковое поле в воде, создаваемое излучателем, находящимся в воздухе, складывается из двух частей, даваемых формулами (32.12) и (32.14), причем для этого частного случая надо положить $m \approx 800$, $n \approx 2/9$. Так как m очень велико, то вторыми членами в скобках в (32.12) и (32.14) можно пренебречь [см. сказанное после формулы (32.14)]. Таким образом, первая составляющая звукового поля, даваемая формулой (32.12), соответствует обычно геометрической акустике. Если учесть также еще формулу (32.13), то для амплитуды этой составляющей получаем выражение

$$|\psi_1(r, D)| = \frac{2nD}{m \sqrt{r(1-n^2)}} (r - nz_0 / \sqrt{1-n^2})^{-1/2}. \quad (32.20)$$

Вторая часть звукового потенциала отлична от нуля только при выполнении условия $\sin \beta = r / \sqrt{r^2 + z_0^2} > n$, т. е. $\beta > 77^\circ$.

Из (32.14), предполагая, что $m\beta \gg 1$, получаем для амплитуды этой части поля

$$|\psi_{16}| = (2m \sqrt{r^2 + z_0^2}) \exp(-kD \sqrt{\sin^2 \beta - n^2}). \quad (32.21)$$

Мы видим, что эта часть звукового потенциала при углублении в воду экспоненциально затухает. Однако при малых D амплитуда этой волны может во много раз превышать амплитуду волны (32.20), соответствующей геометрической оптике, так как последняя пропорциональна D . Задача о преломлении сферической волны в случае, когда «нижняя» среда обладает большей скоростью распространения, рассматривалась также в работе [159]. Чисто лучевая теория звукового поля в воде от излучателя, расположенного в воздухе, рассмотрена также в [172]. Точный волновой расчет поля в воде в точке, лежащей на одной и той же вертикали, что и излучатель в воздухе, сделан М. Вайпштейном [264] для разных частот. Отличие от геометрической теории заметно лишь на таких частотах, когда удаление как излучателя, так и приемника от поверхности воды составляет длину волны или меньше. В этой же работе учтено и влияние отражающего дна.

§ 33. Отражение и преломление сферической волны на границе раздела двух упругих сред

Следующей по трудности была бы задача об отражении и преломлении сферической волны на границе жидкого и упругого полупространств. Однако мы «перепрыгнем» через этот этап * и рассмотрим сразу отражение и преломление сферической волны на границе двух однородных упругих полупространств. Эта задача является одной из основных в сейсмологии. Вместе с различными модификациями она рассматривалась в многочисленных работах, из которых мы упомянем работы В. И. Смирнова и С. Л. Соболева [88], В. Д. Купрадзе и С. Л. Соболева [50], Г. И. Петрашения и уче-

* Хороший теоретический и экспериментальный анализ этой задачи см. в работе [243]. К этому же вопросу относится работа [138].

ников [24], Г. И. Петрашена [73]. В. И. Кейлис-Борока [43]. Более подробную библиографию читатель найдет в [43] и в списке литературы к гл. 3 монографии В. М. Юинга, В. С. Ярдесского и Ф. Пресса [145]. В этом параграфе мы ставим себе ограниченную задачу изложить основные результаты анализа поля точечного источника сейсмических волн при наличии плоской границы раздела двух однородных полупространств, пользуясь схемой изложения и представлениями, принятыми в данной книге. Одной из особенностей изложения, в отличие от многих работ сейсмического профиля, будет последовательное применение спектрального метода. Впрочем, последний и в сейсмической литературе приобретает все больший вес из-за расширения применимости спектральных методов измерений. В своем изложении мы существенным образом используем результаты работ П. А. Хилана [168, 169].

33.1 Источник сферической волны в твердой среде. В жидкой среде простейшим источником упругой волны является пульсирующая сфера малого радиуса. Однако любой другой источник нулевого порядка (источник с конечным значением объемной скорости), если только его размеры малы по сравнению с длиной волны, также излучает сферическую волну. Поэтому предположение о сферической форме излучателя делалось исключительно для простоты рассуждений. Сложнее положение в случае излучателя в твердой среде. Здесь характер волны будет существенно зависеть от формы излучателя. Мы будем предполагать, что излучатель имеет цилиндрическую симметрию. Поэтому поле упругих деформаций и напряжений может быть описано при помощи трех вспомогательных функций («потенциалов») Φ_0 , Ψ_0 , χ_0 , удовлетворяющих волновым уравнениям

$$c^2 \Delta \Phi_0 = \partial^2 \Phi_0 / \partial t^2, \quad b^2 \Delta \Psi_0 = \partial^2 \Psi_0 / \partial t^2, \quad b^2 \Delta \chi_0 = \partial^2 \chi_0 / \partial t^2, \quad (33.1)$$

где $c = (\lambda + 2\mu)^{1/2}/\rho^{1/2}$ и $b = \mu^{1/2}/\rho^{1/2}$ — скорости волн сжатия и сдвиговых волн в твердом теле.

Мы будем пользоваться цилиндрической системой координат r , θ и z . Компоненты смещений u , v и w в направлениях r , θ и z соответственно будут выражаться через потенциалы при помощи формул

$$u = \frac{\partial \Phi_0}{\partial r} - \frac{\partial \Psi_0}{\partial r z}, \quad v = \frac{\partial \Psi_0}{\partial r}, \quad w = \frac{\partial \chi_0}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Psi_0}{\partial r} \right). \quad (33.2)$$

Как мы видим, Φ_0 является потенциалом волн сжатия, Ψ_0 и χ_0 — потенциалами сдвиговых (эквиволюминильных) волн, поляризованных соответственно в плоскости rz и перпендикулярно к ней. Напряжения через потенциалы будут выражаться так *:

$$\begin{aligned} \widehat{rr} &= \lambda \Delta \Phi_0 + 2\mu \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial r} - \frac{\partial \Psi_0}{\partial r z} \right), \\ \widehat{rz} &= \mu \frac{\partial}{\partial r} \left(2 \frac{\partial \Phi_0}{\partial z} + \Delta \Psi_0 - 2 \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial z^2} \right), \\ \widehat{zz} &= \lambda \Delta \Phi_0 + 2\mu \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial z} - \Delta \Psi_0 - \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial z^2} \right), \\ \widehat{r\theta} &= \mu \left(\frac{\partial^2 \chi_0}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \chi_0}{\partial r} \right), \quad \widehat{z\theta} = \mu \frac{\partial^2 \chi_0}{\partial r \partial z}. \end{aligned} \quad (33.3)$$

Как и в §§ 26 и 28, потенциалы можно представить в виде разложений по плоским волнам. Кроме того, предполагая, что режим излучения в общем случае имеет импульсный характер, мы будем представлять потенциалы в виде интегралов Фурье по времени.

Излучатель, как и раньше, будем предполагать расположенным на оси z , на расстоянии z_0 от начала координат.

* Здесь удобнее применять несколько иные обозначения для компонент тензора напряжений по сравнению с § 5 (например, \widehat{zz} вместо Z_z и т. д.).

В результате можно положить

$$\begin{aligned}\varphi_0 &= \operatorname{Re} \int_0^\infty e^{-ikct} dk \int_{\Gamma_1} f_0(k, \theta) H_0^{(1)}(kr \sin \theta) e^{ik(z_0-z) \cos \theta} \sin \theta d\theta, \\ \psi_0 &= \operatorname{Re} \int_0^\infty e^{-ikct} dk \int_{\Gamma_1} g_0(k, \theta) H_0^{(1)}(kr \sin \theta) e^{ix(z_0-z) \cos \gamma} \sin \theta d\theta, \\ \chi_0 &= \operatorname{Re} \int_0^\infty e^{-ikct} dk \int_{\Gamma_1} h_0(k, \theta) H_0^{(1)}(kr \sin \theta) e^{ix(z_0-z) \cos \gamma} \sin \theta d\theta.\end{aligned}\quad (33.4)$$

где x и γ связаны с k и θ соотношениями

$$xb = kc, \quad k \sin \theta = x \sin \gamma. \quad (33.5)$$

Путь интегрирования Γ_1 в комплексной плоскости изображен на рис. 28.1. При дальнейшем анализе интегралов с применением метода перевала функции f_0 , g_0 и h_0 будут относиться к классу медленно меняющихся по отношению к объему переменным k и θ . Хорошее рассмотрение простейших источников упругих волн читатель может найти в книге Уайта [266].

Интересен для сейсмологии случай, когда источник волны представляет собой импульсивное напряжение, приложенное к боковым стенкам цилиндрической полости. Если радиус и длина полости малы по сравнению с длиной волны и ось цилиндра направлена вертикально, то для функций f_0 , g_0 и h_0 на больших расстояниях в наших обозначениях имеем [168]

$$\begin{aligned}f_0 &= ip_1(k) [2(b^2/c^2) \cos^2 \theta - 1] (k\Delta/8\pi\mu), \\ g_0 &= p_1(k) \cos \theta (b^2\Delta/4\pi\mu c^2), \\ h_0 &= s_1(k) (\cos \theta / \cos \gamma) (bk\Delta/4\pi\mu c),\end{aligned}\quad (33.6)$$

где Δ — объем полости, а $p_1(k)$ и $s_1(k)$ — компоненты Фурье нормального и тангенциального (нормального плоскости rz) напряжений, приложенных к границам полости

$$p(t) := \operatorname{Re} \int_0^\infty p_1(k) e^{-ikct} dk, \quad s(t) := \operatorname{Re} \int_0^\infty s_1(k) e^{-ikct} dk, \quad (33.7)$$

где $p(t)$ и $s(t)$ — соответственные напряжения как функции времени.

Подставляя выражения (33.6) в (33.4), а затем выражения для φ_0 , ψ_0 и χ_0 в (33.2), можно получить выражения для смещений.

В качестве примера получим выражение для вертикального смещения в волне сжатия. Припишем волне сжатия индекс P , волне сдвига, поляризованной в вертикальной плоскости (плоскость rz), индекс SV и сдвиговой волне, поляризованной в горизонтальной плоскости (плоскость $z = \text{const}$), индекс SH . Из выражения для u в (33.2) мы видим, что $u = u_P + u_{SV}$, т. е. вертикальная компонента смещения складывается из смещения в волне сжатия и смещения в сдвиговой волне (SV). При этом $u_P = \partial \varphi_0 / \partial r$, $u_{SV} = -\partial \psi_0 / \partial rz$.

Пользуясь выражениями (33.4) и (33.6) и производя дифференцирование под интегралом, получаем

$$u_P = \operatorname{Re} \int_0^\infty e^{-ikct} U_P(k, r, z) dk, \quad (33.8)$$

где

$$U_P(k, r, z) = \frac{ip_1(k) k\Delta}{8\pi\mu} \int_{\Gamma_1} \left(2 \frac{b^2}{c^2} \cos^2 \theta - 1 \right) \frac{\partial}{\partial r} H_0^{(1)}(kr \sin \theta) e^{ik(z_0-z) \cos \theta} \sin \theta d\theta. \quad (33.9)$$

На тех же основаниях, что и в § 28, мы будем пользоваться асимптотическим представлением функции Ханкеля (28.1), причем нам здесь нет нужды учитывать поправочный член $1/8 i\omega$ в скобках. Кроме того, учтем, что согласно рис. 33.1,

$$(z_0 - z) = R \cos \vartheta_0, \quad r = R \sin \vartheta_0. \quad (33.10)$$

Тогда выражение (33.9) можно переписать в виде

$$U_P(k, r, z) = \frac{ik p_1(k) \Delta}{4\pi\mu} \sqrt{\frac{k}{2\pi r}} e^{ikz} \int_{\Gamma_1} \left(2 \frac{b^2}{c^2} \cos^2 \vartheta - 1 \right) e^{ikR \cos(\theta - \theta_0)} \sin^2 \vartheta d\vartheta. \quad (33.11)$$

Замена переменной согласно (28.4) и переход к пути интегрирования, на котором s пробегает все вещественные значения от $-\infty$ до $+\infty$, позволяет применить метод перевала, изложенный в § 27. Дело существенно облегчается тем, что нас в данном случае интересует только главный член. В результате так же, как в § 28.1

$$U_P = - \frac{ik p_1(k) \Delta}{4\pi\mu} \left(2 \frac{b^2}{c^2} \cos^2 \vartheta - 1 \right) \sin \vartheta_0 \frac{e^{ikR}}{R}. \quad (33.12)$$

Подставляя теперь U_P в (33.8), замечаем прежде всего, что если не учитывать временно множители, не зависящие от k , то получится такой интеграл по k :

$$\operatorname{Re} \int_0^\infty ik p_1(k) e^{-ikc(t-R/c)} dk = - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{Re} \int_0^\infty p_1(k) e^{-ikc(t-R/c)} dk = - \frac{1}{c} \frac{\partial p(t-R/c)}{\partial t}.$$

Учитывая теперь также и остальные множители, получаем для вертикального смещения в волне сжатия *

$$u_P = \frac{\lambda}{4\pi\mu c R} [1 - 2 \frac{b^2}{c^2} \cos^2 \vartheta_0] \sin \vartheta_0 \frac{d}{dt} [p(t - R/c)]. \quad (33.13)$$

Точно таким же образом можно получить и другие компоненты смещений. В результате будем иметь для P -волны

$$\begin{bmatrix} u_P \\ w_P \end{bmatrix} = \left[\frac{F_1(\vartheta_0)}{R} \frac{d}{dt} \{p(t - R/c)\} \right] \begin{bmatrix} \sin \vartheta_0 \\ -\cos \vartheta_0 \end{bmatrix}, \quad (33.14)$$

Значение $F_1(\vartheta_0)$ см. ниже. Мы видим, что смещение, даваемое последней формулой, направлено по радиусу-вектору, исходящему из источника O , т. е. волна P является продольной. Для сдвиговой SV -волны будем иметь

$$\begin{bmatrix} u_{SV} \\ w_{SV} \end{bmatrix} = \left[\frac{F_2(\vartheta_0)}{R} \frac{d}{dt} \{p(t - R/b)\} \right] \begin{bmatrix} \cos \vartheta_0 \\ \sin \vartheta_0 \end{bmatrix}, \quad (33.15)$$

Эта волна, как мы видим, является поперечной. Для сдвиговой SH -волны получаем

$$v_{SH} = \frac{K(\vartheta_0)}{R} \frac{d}{dt} \{s(t - R/b)\}. \quad (33.16)$$

* Такое смещение будет принято и записано прибором, обладающим «идеальной» частотной характеристикой, т. е. прибором, имеющим неизменную чувствительность при всех k от 0 до ∞ . Для того, чтобы получить результат, даваемый реальным прибором, подынтегральное выражение в (33.8) необходимо умножить на частотную характеристику прибора. Это замечание остается в силе и для всего дальнейшего изложения.

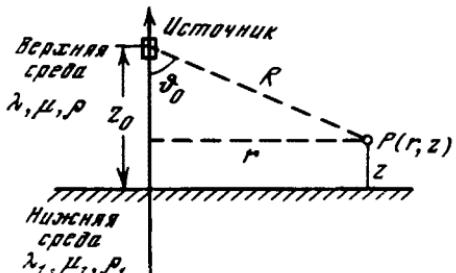


Рис. 33.1. К вычислению поля прямой волны

В выписанных выше формулах использованы следующие обозначения:

$$\begin{aligned} F_1(\vartheta_0) &= (\Delta/4\pi c) [1 - (2b^2/c^2) \cos^2 \vartheta_0], \\ F_2(\vartheta_0) &= (\Delta/4\pi b) \sin 2\vartheta_0, \quad K(\vartheta_0) = (\Delta/4\pi b) \sin \vartheta_0. \end{aligned} \quad (33.17)$$

33.2. Формальное решение для отраженной и преломленной волн. Обозначим через φ , ψ и χ соответственные потенциалы в отраженной, а через φ' , ψ' и χ' в преломленной (в нижней среде) волнах*. Чтобы найти их, заметим, что потенциалы (33.4) «падающей» на границу сферической волны, так же как и в § 26, можно представить в виде суперпозиции плоских волн. Отражая и преломляя каждую плоскую волну на границе разделя, учитывая собственный набег фазы при подходе волны к границе и при отходе от нее, а затем собирая снова все плоские волны, получаем

$$\begin{aligned} \varphi &= \operatorname{Re} \int_0^\infty e^{-ikct} dk \int_{\Gamma_1} f_1 H_0^{(1)}(\xi r) e^{i\alpha z} \sin \theta d\theta, \\ \psi &= \operatorname{Re} \int_0^\infty e^{-ikct} dk \int_{\Gamma_1} g_1 H_0^{(1)}(\xi r) e^{i\beta z} \sin \theta d\theta, \\ \chi &= \operatorname{Re} \int_0^\infty e^{-ikct} dk \int_{\Gamma_1} h_1 H_0^{(1)}(\xi r) e^{i\beta z} \sin \theta d\theta; \end{aligned} \quad (33.18)$$

$$\begin{aligned} \varphi' &= \operatorname{Re} \int_0^\infty e^{-ikct} dk \int_{\Gamma_1} f' H_0^{(1)}(\xi r) e^{-i\alpha' z} \sin \theta d\theta, \\ \psi' &= \operatorname{Re} \int_0^\infty e^{-ikct} dk \int_{\Gamma_1} g' H_0^{(1)}(\xi r) e^{-i\beta' z} \sin \theta d\theta, \\ \chi' &= \operatorname{Re} \int_0^\infty e^{-ikct} dk \int_{\Gamma_1} h' H_0^{(1)}(\xi r) e^{-i\beta' z} \sin \theta d\theta, \end{aligned} \quad (33.19)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha &= k \cos \theta, & \beta &= \kappa \cos \gamma, \\ \alpha' &= k' \cos \theta', & \beta' &= \kappa \cos \gamma', \\ \xi &= k \sin \theta = k' \sin \theta' = \kappa \sin \gamma = \kappa' \sin \gamma'; \end{aligned} \quad (33.20)$$

$$\begin{aligned} f_1 &= f_0 V_{ll} e^{i\alpha z_0} + g_0 V_{lt} e^{i\beta z_0}, & f' &= f_0 W_{ll} e^{i\alpha z_0} + g_0 W_{lt} e^{i\beta z_0}, \\ g_1 &= f_0 V_{tl} e^{i\alpha z_0} + g_0 V_{tt} e^{i\beta z_0}, & g' &= f_0 W_{tl} e^{i\alpha z_0} + g_0 W_{tt} e^{i\beta z_0}, \\ h_1 &= h_0 V e^{i\beta z_0}, & h' &= h_0 W e^{i\beta z_0}. \end{aligned} \quad (33.21)$$

Здесь V_{ll}, \dots, W_{tt} — коэффициенты отражения и прозрачности, найденные в § 8. V и W коэффициенты отражения и прозрачности для SH — волны (см. § 5). Контур интегрирования Γ_1 тот же, что и в § 26.

Смещение в отраженной волне сжатия будет состоять из двух частей (u_1 , w_1) и (u_2 , w_2).

Первая часть, которую мы будем называть PP -частью, обусловлена падающей волной сжатия, вторая часть, называемая SP -частью, обусловлена падающей сдвиговой волной, которая, как мы видели, при отражении на границе частично переходит в волну сжатия.

Пользуясь выражениями (33.18) для потенциалов и формулами (33.2) для перехода от потенциалов к смещениям, получаем (для сокращения

* Чтобы избежать путаницы в индексах, в данном параграфе величины, относящиеся к нижней среде, мы отмечаем штрихом сверху.

записи опускаем операцию $\int_0^\infty e^{-ikct} dk$:

$$u_1 = - \int_{\Gamma_1} \xi f_0 V_{ll} H_1^{(1)}(\xi r) e^{i\alpha(z+z_0)} \sin \vartheta d\vartheta, \quad w_1 = i \int_{\Gamma_1} \alpha g_0 V_{ll} H_0^{(1)}(\xi r) e^{i\alpha(z+z_0)} \sin \vartheta d\vartheta; \quad (33.22)$$

$$u_2 = - \int_{\Gamma_1} \xi g_0 V_{ll} H_1^{(1)}(\xi r) e^{i(\alpha z+\beta z_0)} \sin \vartheta d\vartheta, \quad w_2 = i \int_{\Gamma_1} \alpha g_0 V_{ll} H_0^{(1)}(\xi r) e^{i(\alpha z+\beta z_0)} \sin \vartheta d\vartheta \quad (33.23)$$

Смещение в сдвиговой SV -волне также состоит из двух частей: (u_3, w_3) , соответствующей PS -волне, и (u_4, w_4) , соответствующей SS -волне,

$$u_3 = i \int_{\Gamma_1} \xi \beta f_0 V_{ll} H_1^{(1)}(\xi r) e^{i(\beta z+\alpha z_0)} \sin \vartheta d\vartheta, \quad w_3 = - \int_{\Gamma_1} \xi^2 f_0 V_{ll} H_0^{(1)}(\xi r) e^{i(\beta z+\alpha z_0)} \sin \vartheta d\vartheta; \quad (33.24)$$

$$u_4 = i \int_{\Gamma_1} \xi \beta g_0 V_{ll} H_1^{(1)}(\xi r) e^{i\beta(z+z_0)} \sin \vartheta d\vartheta, \quad w_4 = - \int_{\Gamma_1} \xi^2 g_0 V_{ll} H_0^{(1)}(\xi r) e^{i\beta(z+z_0)} \sin \vartheta d\vartheta. \quad (33.25)$$

Наконец, сдвиговое SH (горизонтально поляризованное) смещение состоит из одного члена

$$v_1 = - \int_{\Gamma_1} \xi h_0 V H_1^{(1)}(\xi r) e^{i\beta(z+z_0)} \sin \vartheta d\vartheta. \quad (33.26)$$

Аналогично записутся смещения в нижней среде $z < 0$ (в прошедшей через границу волне). В частности, смещение в волне сжатия будет состоять из двух частей — смещения (u'_1, w'_1) типа $P\underline{P}^*$ и смещения (u'_2, w'_2) типа $S\underline{P}$. При этом

$$u'_1 = - \int_{\Gamma_1} \xi f_0 W_{ll} H_1^{(1)}(\xi r) e^{i(\alpha z_0-\alpha' z)} \sin \vartheta d\vartheta,$$

$$w'_1 = - i \int_{\Gamma_1} \alpha' f_0 W_{ll} H_0^{(1)}(\xi r) e^{i(\alpha z_0-\alpha' z)} \sin \vartheta d\vartheta; \quad (33.27)$$

$$u'_2 = - \int_{\Gamma_1} \xi g_0 W_{ll} H_1^{(1)}(\xi r) e^{i(\beta z_0-\beta' z)} \sin \vartheta d\vartheta,$$

$$w'_2 = - i \int_{\Gamma_1} \beta' g_0 W_{ll} H_0^{(1)}(\xi r) e^{i(\beta z_0-\beta' z)} \sin \vartheta d\vartheta. \quad (33.28)$$

Сдвиговое смещение также будет состоять из двух частей: (u'_3, w'_3) , соответствующей волне типа $P\underline{S}$, и (u'_4, w'_4) , соответствующей волне типа $S\underline{S}$,

$$u'_3 = i \int_{\Gamma_1} \xi \beta' f_0 W_{ll} H_1^{(1)}(\xi r) e^{i(\alpha z_0-\beta' z)} \sin \vartheta d\vartheta, \quad (33.29)$$

$$w'_3 = - \int_{\Gamma_1} \xi^2 f_0 W_{ll} H_0^{(1)}(\xi r) e^{i(\alpha z_0-\beta' z)} \sin \vartheta d\vartheta;$$

$$u'_4 = - i \int_{\Gamma_1} \xi \beta' g_0 W_{ll} H_1^{(1)}(\xi r) e^{i(\beta z_0-\beta' z)} \sin \vartheta d\vartheta, \quad (33.30)$$

$$w'_4 = - \int_{\Gamma_1} \xi^2 g_0 W_{ll} H_0^{(1)}(\xi r) e^{i(\beta z_0-\beta' z)} \sin \vartheta d\vartheta.$$

* Чертка под буквой означает, что соответствующая этой букве волна пробегает в нижней среде.

Наконец, сдвиговое SH (горизонтально поляризованное) смещение будет

$$v' = - \int_{\Gamma_1} \xi h_0 W H_1^{(1)}(\xi r) e^{i(\beta z_0 - \beta' z)} \sin \theta d\theta. \quad (33.31)$$

Формулы (33.22) — (33.31) в совокупности представляют собой полное решение задачи об отражении и преломлении сферической волны на границе раздела двух упругих сред.

33.3. Анализ решения. Отраженная и боковая волны. Полученные выше интегральные формулы для смещений весьма сложны и не позволяют сделать в общем виде каких-либо далеко идущих заключений о характере волновых процессов, сопровождавших отражение и преломление волны. Как и в предыдущих параграфах, мы остановимся на анализе смещений на достаточно больших расстояниях, когда становятся справедливыми асимптотические представления *. Адекватным для этого математическим методом, как и выше, является метод перевала.

Рассмотрим для примера выражение (33.22) для u_1 . Аналогично тому, как это сделано в § 28, путь интегрирования Γ_1 может быть деформирован так, что на новом пути при достаточно большом r будет всюду выполняться условие $\xi r \gg 1$. Тогда функция Ханкеля может быть заменена ее асимптотическим представлением $H_1^{(1)}(\xi r) \approx \sqrt{2/\pi} \xi r \exp i(\xi r - 3\pi/4)$.

Кроме того, учтем, что (см. рис. 26.3) $r = R_1 \sin \vartheta_0$, $z + z_0 = R_1 \cos \vartheta_0$, а также обозначения (33.20). Тогда выражение для u_1 запишется

$$u_1 = \sqrt{\frac{2k}{\pi r}} e^{\pm i\pi/4} \int_{\Gamma_1} f_0 V_{ll} e^{ikR_1 \cos(\vartheta_0 - \theta)} \sin^{*+} \theta d\theta. \quad (33.32)$$

Новый путь интегрирования целесообразно выбрать так, чтобы он проходил через точку перевала, где выражение в экспоненте имеет экстремум, и уходил от нее по пути, где абсолютное значение экспоненты быстрее всего убывает **.

Как и в § 28, таким оказывается путь Γ (см. рис. 28.1), на котором переменная s , введенная согласно соотношению $\cos(\theta - \vartheta_0) = 1 + is^2$, пробегает все вещественные значения от $-\infty$ до $+\infty$. При этом точка перевала соответствует $s = 0$.

Интеграл по пути Γ вычисляется при помощи метода перевала, изложенного в § 27. Мы ограничимся здесь первым приближением, когда всю подынтегральную функцию, кроме экспоненты, можно вынести за знак интеграла при значении $\theta = \vartheta_0$. В результате получаем ***

$$u_1 = 2f_0(\vartheta_0) \sin \vartheta_0 V_{ll}(\vartheta_0) (e^{ikR_1}/R). \quad (33.33)$$

* Если обозначить через λ_{\max} максимальную длину какой-либо из упругих волн, соответствующую наименьшей частоте, воспринимаемой аппаратурой в опыте, то наши результаты будут справедливы на расстояниях R , удовлетворяющих условию $R \gg \lambda_{\max}$. Если же допустить, что процесс регистрируется «идеальной» аппаратурой с почти равномерной частотной характеристикой от $\omega = 0$ до $\omega = \infty$, то наши асимптотические формулы будут все же справедливы для моментов, близких к вступлению волн, где процесс во времени изменяется сравнительно быстро и, следовательно, высокочастотная часть процесса является основной.

** Предполагается, что читателю известно содержание §§ 28 и 31, где рассмотрены аналогичные, но более простые вопросы.

*** Если отраженная волна в эксперименте регистрируется раздельно от прямой волны, то уточнение результата путем нахождения дальнейших приближений не имеет смысла, так как дальнейшие поправки по сравнению с выражением (33.33) будут порядка $1/kR_1$, $1/(kR_1)^2$ и т. д. Если же прямая и отраженная волны налагаются друг на друга, то при малых углах скольжения ($\theta \rightarrow \pi/2$), когда $V_{ll} \rightarrow -1$, выписанный в (33.33) член может в значительной степени компенсироваться прямой волной. Получающийся остаток может оказаться того же порядка, что и первый поправочный член. Однако можно показать, что даже и в этом случае поправочные члены не будут играть никакой роли, если суммарное удаление излучателя и приемника от границы раздела велико по сравнению с длиной волны.

Мы получили выражение для отраженной PP -волны. Здесь фактор $2f_0(\vartheta_0) \sin \vartheta_0$ характеризует амплитуду падающей волны сжатия, а V_{ll} — коэффициент отражения. Представим последний в виде

$$V_{ll}(\vartheta_0) = A(\vartheta_0) + iB(\vartheta_0), \quad (33.34)$$

причем, если $\vartheta_0 < \arcsin(c/c_1)$, то $B \equiv 0$.

Если теперь к выражению (33.33) применить операцию $\operatorname{Re} \int_0^\infty e^{-ikc} dk$, то получаем окончательно [ср. (33.14)]

$$u_1 = \frac{F_1(\vartheta_0)}{R_1} \left\{ A(\vartheta_0) \frac{d}{dt} [p_{\text{Re}}(t - R_1/c)] - B(\vartheta_0) \frac{d}{dt} [p_{\text{Im}}(t - R_1/c)] \right\} \sin \vartheta_0, \quad (33.35)$$

где

$$\frac{d}{dt} [p_{\text{Re}}(t - R_1/c)] = \operatorname{Re} \int_0^\infty (-ikc) p_1(k) e^{-ikc(t-R_1/c)} dk$$

$$\frac{d}{dt} [p_{\text{Im}}(t - R_1/c)] = \operatorname{Im} \int_0^\infty (-ikc) p_1(k) e^{-ikc(t-R_1/c)} dk.$$

Аналогично получим и все другие компоненты смещений. В частности, выражение для w_1 будет отличаться от (33.35) только заменой $\sin \vartheta_0$ на $\cos \vartheta_0$. Это показывает, что в первом приближении волна сжатия является продольной волной.

При преобразовании пути интегрирования Γ_1 в перевальный путь Γ может встретиться необходимость обхода имеющихся в плоскости ϑ особых точек подынтегрального выражения. Особые точки могут быть двух видов — полюсы и точки ветвления. Обход полюсов добавляет к выражению (33.35) вычеты в них. В результате мы получаем выражения для поверхностных волн Стонели и так называемых «вытекающих волн» (leaky waves). Амплитуда волны Стонели экспоненциально убывает при удалении в обе стороны от границы раздела и по закону $\sim 1/\sqrt{r}$ при удалении от источника волн вдоль границы раздела. Свойства волн этого типа рассматривались выше в §§ 7.4 и 8.2 и поэтому мы не будем на них здесь останавливаться *.

Наличие точек ветвления из-за неоднозначности подынтегрального выражения приводит к необходимости добавить к нашему решению интегралы по берегам разрезов. В результате мы получаем систему «головных» или «боковых» волн с коническими фронтами. Одна из таких волн для простейшего случая подробно была исследована в § 30.

Для примера рассмотрим выражение (33.32) для u_1 . В коэффициент отражения V_{ll} согласно (8.14) входят ** величины α' , β , β' , которые при помощи (33.20) могут быть выражены через ϑ

$$x' = \sqrt{k^2 \sin^2 \vartheta - (k')^2}, \quad \beta = \sqrt{k^2 \sin^2 \vartheta - x^2}, \quad \beta' = \sqrt{k^2 \sin^2 \vartheta - (x')^2}; \quad (33.36)$$

V_{ll} может принимать разные значения в зависимости от выбора знаков этих радикалов. Для точек ветвления, где радикалы обращаются в нуль, мы получаем значения

$$\vartheta_{k'} = \arcsin(k'/k), \quad \vartheta_x = \arcsin(x/k), \quad \vartheta_{x'} = \arcsin(x'/k). \quad (33.37)$$

Рассмотрим боковую волну, связанную с точкой ветвления $\vartheta_{k'}$. Ход рассуждений при этом будет в точности такой же, как в § 30. В процессе

* Представляет интерес определение коэффициентов возбуждения этих волн в зависимости от расположения излучателя волны относительно границы раздела. Однако на этом мы не имеем возможности здесь останавливаться.

** В § 8 α' и β' обозначались через α_1 и β_1 .

вычислений снова появятся выражения типа (30.4) и (30.10), причем $\Phi(\theta)$, по аналогии с (30.5) будет определяться выражением

$$\Phi(\theta) = V_{II}^+(\theta) - V_{II}(\theta), \quad (33.38)$$

где $V_{II}^+(\theta)$ получается из $V_{II}(\theta)$ заменой $\alpha' \rightarrow -\alpha'$. Согласно (8.14) и (8.15) имеем

$$V_{II} = (Q + \alpha' P_1) / (Q + \alpha' P), \quad (33.39)$$

где

$$Q = A_1^2 + 3A_2^2/\alpha + m\beta'^2/\alpha^2/4\beta\xi^4, \quad Q_1 = A_1^2 - 3A_2^2/\alpha + m\beta'/\beta, \quad (33.40)$$

$$P = (1/\beta') (B_1^2 + 3B_2^2/\alpha) + m\alpha'^2/4\alpha\xi^4, \quad P_1 = (1/\beta') (B_1^2 - 3B_2^2/\alpha) - m\alpha'^2/4\alpha\xi^4,$$

а величины A_1, \dots, B_2 даются формулами (8.9). Теперь получаем в соответствии с (33.38)

$$\Phi(\theta) = 2\alpha' (P_1 Q - Q_1 P) / [(Q^2 - \alpha'^2)^2 P^2]^{-1}. \quad (33.41)$$

В результате так же, как и в § 30, получаем для смещения u_1 в боковой волне

$$u_1 = [k' f_0(\delta) (P_1 Q - Q_1 P) / Q^2 \cos \delta]_{\theta=\delta} \frac{\sin \delta}{kr^2 L_1^2} e^{ikR_\delta}. \quad (33.42)$$

Здесь для удобства сравнения с результатами § 30 мы обозначили $\theta_{k'} \equiv \delta$. Величина kR_δ (33.42) имеет значение $kR_\delta = k(z + z_0)/\cos \delta + k'L_1 = k(L_0 + L) + k'L_1$.

Смысл величин L_0 , L и L_1 , имеющих размерность длии, виден из рис. 30.3.

Применим теперь к u_1 операцию $\text{Re} \int_0^\infty e^{-ikc't} dk$ и учтем при этом соотношения (33.6), (33.7), (33.17), (33.20), получаем окончательно

$$u_1 = -ik' c \sin \delta [(QP_1 - PQ_1) / Q^2 \cos \delta] \frac{F_1(\delta) p(t_1)}{r^2 L_1^2}, \quad (33.43)$$

где

$$t_1 = t - (L_0 + L)/c - L_1/c_1 \quad (33.44)$$

Выражение для смещения u_1 будет совпадать с (33.43), в котором $\sin \delta$ заменяется на $\cos \delta$. Таким образом, смещение в боковой волне происходит вдоль луча BP (рис. 30.3), т. е. волна является продольной.

Импульс, соответствующий боковой волне, проходит от излучателя до точки наблюдения за время $t - t_1 = (L_0 + L)/c + L_1/a_1$, т. е. проходит участки L_0 и L на рис. 30.3 со скоростью c , а участок L_1 со скоростью c_1 . Боковую волну этого типа удобно обозначить через $Pc'P$, что означает, что начальный и конечный участок (L_0 и L) волна проходит в виде волны сжатия в верхней среде (волны типа P), а средний участок (L_1) проходит вдоль границы со скоростью c' .

Отметим несколько важных свойств боковой волны в рассматриваемом случае.

1. Множитель $F_1(\delta)$ в (33.43) показывает, что амплитуда боковой волны пропорциональна амплитуде первичного луча, падающего на границу под углом полного внутреннего отражения δ .

2. Зависимость смещения u_1 от времени дается фактором $p(t)$. Если источником волн является цилиндрическая полость малых размеров, то этой же функцией характеризуется зависимость от времени силы, приложенной к боковым стенкам полости. Заметим, что в прямой и отраженной

волнах зависимость смещения от времени характеризовалась функцией
 $\frac{d}{dt} p(t - R/c)$.

3. Как и в § 30, выражение (33.43) для боковой волны теряет смысл на луче, исходящем из мнимого источника O' под углом δ . На этом луче $L_1 = 0$. При необходимости значение смещений на этом луче и его окрестности можно получить методом, изложенным в § 31. Поле вблизи критического угла полного внутреннего отражения специально рассмотрено в [129].

Выше был проведен анализ отраженной волны PP и боковой волны, связанной с точкой ветвления $\vartheta_{k'}$. Рассмотрение других волн проводится аналогично. Анализ полной системы волн и области существования каждой волны см. в работе [169].

ПОЛЕ ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА ВОЛН В ДИСКРЕТНО-СЛОИСТЫХ СРЕДАХ

В настоящей главе мы изложим теорию распространения волн в однородном слое, ограниченном с двух сторон плоскими параллельными границами. Исследование этого явления важно в различных областях физики. Так, распространение радиоволн на большие расстояния в атмосфере совершается в слое, ограниченном с одной стороны землей, а с другой — ионосферой. В случае длинных волн этот слой проявляет типично волноводные свойства [1, 118, 125].

Большое значение имеет исследование распространения звука в океане. В этом случае слой воды ограничен с одной стороны дном океана, а с другой — поверхностью воды. Теория распространения волн в слоях имеет большое значение в сейсмологии и в сейсмической разведке [73, 43].

В настоящей главе мы остановимся лишь на некоторых основных вопросах теории, имеющих одинаково важное значение как для распространения упругих звуковых волн, так и для различных случаев распространения электромагнитных волн в слоях. Мы постараемся также проанализировать некоторые физические представления, связанные с распространением волн в слоях.

§ 34. Слой с абсолютно отражающими границами. Картина мнимых источников и лучей

34.1. Картина мнимых источников. Представим себе слой с границами $z = 0$ и $z = h$ (рис. 34.1). Источник сферической волны будем предполагать расположенным на оси z , в точке $z = z_0$. Скорость распространения волн в слое обозначаем через c .

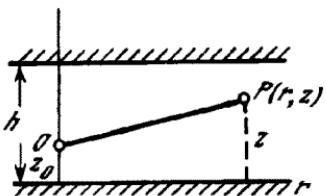


Рис. 34.1. Расположение излучателя и точки приема в слое

Наши рассуждения будут одновременно относиться и к случаю распространения звуковых волн в слое, и к случаю распространения электромагнитных волн. В первом случае источник волн, как всегда, будем предполагать в виде пульсирующей сферы малого радиуса и будем считать, что среда, заполняющая слой, не имеет сопротивления сдвигу (жидкость или газ). Во втором случае в качестве излучателя возьмем вертикальный диполь.

Функция ψ , представляющая собой в электродинамике вертикальную компоненту вектора Герца, а в акустике — звуковой потенциал, удовлетворяет в слое волновому уравнению

$$\Delta\psi + k^2\psi = 0, \quad k = \omega/c. \quad (34.1)$$

Границы слоя будем предполагать абсолютно отражающими, считая, что на них выполняются условия

$$z = 0, \ h; \quad \partial\psi/\partial z = 0. \quad (34.2)$$

В акустике это соответствует неподатливым стенкам, а в электродинамике — абсолютно проводящим поверхностям.

Покажем, что поле в произвольной точке (r, z) может быть представлено в виде суммы прямой волны и волн, излучаемых бесконечной цепочкой «мнимых» источников, получающейся в результате последовательных зеркальных отображений излучателя в границах слоя.

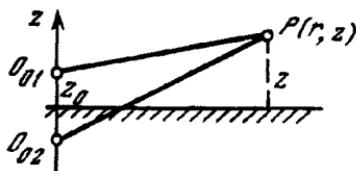


Рис. 34.2. Излучатель волн и его зеркальное отражение в нижней границе

Действительно, дополним поле нашего излучателя (обозначим его O_{01} , рис. 34.2) полем мнимого излучателя O_{02} , получающегося путем зеркального отображения в нижней границе слоя. Суммарное поле будет

$$\psi = \frac{e^{ikR_{01}}}{R_{01}} + \frac{e^{ikR_{02}}}{R_{02}}, \quad (34.3)$$

где

$$R_{01} = \sqrt{r^2 + (z - z_0)^2}, \quad R_{02} = \sqrt{r^2 + (z + z_0)^2} \quad (34.4)$$

— расстояния от O_{01} и O_{02} до точки приема $P(r, z)$.

Выражение (34.3) для ψ будет удовлетворять волновому уравнению (34.1), так как этому уравнению удовлетворяет каждый из двух членов. Оно будет удовлетворять также и граничному условию на границе $z = 0$. Последнее ясно из того, что система излучателей O_{01} и O_{02} симметрична относительно границы $z = 0$, а из условия симметрии непосредственно следует и выполнение равенства $\partial\psi/\partial z = 0$ на этой границе.

Однако сумма (34.3) не может быть решением нашей задачи потому, что она не удовлетворяет условию (34.2) на границе $z = h$.

Дополним теперь излучатели O_{01} и O_{02} парой мнимых излучателей O_{03} и O_{04} , получающихся путем зеркального отражения первых двух в верхней границе слоя (рис. 34.3). Получающееся решение будет удовлетворять волновому уравнению и граничному условию на верхней границе (так как полученная система излучателей симметрична по отношению к этой границе), но не будет теперь удовлетворять граничному условию на нижней границе.

После этого прибавим к нашему решению волны, излучаемые мнимыми источниками O_{11} и O_{12} . Так как прибавление этих источников симметризует картину источников по отношению к нижней границе, то граничные условия теперь будут удовлетворяться на нижней границе, но не будут удовлетворяться на верхней и т. д. Продолжая дальнейшее построение цепочки мнимых излучателей, мы попеременно будем получать выполнение граничных условий на одной границе и невыполнение на другой. Однако ввиду того, что каждый раз добавляется пара все более удаленных излучателей, добавка к полю в точке $P(r, z)$ будет все время уменьшаться, а в пределе при бесконечной цепочке излучателей будут удовлетворяться условия на той и на другой границах.

В результате полное поле можно будет записать в виде

$$\psi = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{e^{ikR_{l1}}}{R_{l1}} + \frac{e^{ikR_{l2}}}{R_{l2}} + \frac{e^{ikR_{l3}}}{R_{l3}} + \frac{e^{ikR_{l4}}}{R_{l4}} \right), \quad (34.5)$$

тогда

$$\begin{aligned} R_{l1} &= \sqrt{r^2 + (2lh + z - z_0)^2}, & R_{l2} &= \sqrt{r^2 + (2lh + z + z_0)^2} \\ R_{l3} &= \sqrt{r^2 + [2(l+1)h - z - z_0]^2}, & R_{l4} &= \sqrt{r^2 + [2(l+1)h + z_0 - z]^2}. \end{aligned} \quad (34.6)$$

Решение (34.5) удовлетворяет волновому уравнению, поскольку слагается из сферических волн, каждая из которых удовлетворяет ему. Далее, оно удовлетворяет и условию у источника, поскольку при приближении точки P к основному источнику O_{01} в сумме (34.5) будет основным лишь один член $\frac{e^{ikR_{l1}}}{R_{l1}}$, дающий нужную нам особенность. Выше мы видели, что оно должно удовлетворять также и граничным условиям (34.2). Однако последнее мы докажем особо.

Производную $\partial\psi/\partial z$, согласно (34.5) можно записать

$$\begin{aligned} \frac{\partial\psi}{\partial z} = \sum_{l=0}^{\infty} \left[\frac{\partial}{\partial R_{l1}} \left(\frac{e^{ikR_{l1}}}{R_{l1}} \right) \frac{\partial R_{l1}}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial R_{l3}} \left(\frac{e^{ikR_{l3}}}{R_{l3}} \right) \frac{\partial R_{l3}}{\partial z} \right] + \\ + \sum_{l=0}^{\infty} \left[\frac{\partial}{\partial R_{l2}} \left(\frac{e^{ikR_{l2}}}{R_{l2}} \right) \frac{\partial R_{l2}}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial R_{l4}} \left(\frac{e^{ikR_{l4}}}{R_{l4}} \right) \frac{\partial R_{l4}}{\partial z} \right]. \end{aligned} \quad (34.7)$$

Из (34.6) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{l1}}{\partial z} &= \frac{2lh + z - z_0}{R_{l1}}, & \frac{\partial R_{l2}}{\partial z} &= \frac{2lh + z + z_0}{R_{l2}}, \\ \frac{\partial R_{l3}}{\partial z} &= -\frac{2(l+1)h - z - z_0}{R_{l3}}, & \frac{\partial R_{l4}}{\partial z} &= -\frac{2(l+1)h - z + z_0}{R_{l4}}. \end{aligned} \quad (34.8)$$

Кроме того,

$$\frac{\partial}{\partial R_{l1}} \left(\frac{e^{ikR_{l1}}}{R_{l1}} \right) = \frac{ikR_{l1} - 1}{R_{l1}} \frac{e^{ikR_{l1}}}{R_{l1}} \text{ и т. д.} \quad (34.9)$$

Из (34.6), (34.8) и (34.9) мы получаем на верхней границе $z = h$:

$$\begin{aligned} R_{l1} &= R_{l3}, & R_{l2} &= R_{l4}, \\ \frac{\partial}{\partial R_{l1}} \left(\frac{e^{ikR_{l1}}}{R_{l1}} \right) &= \frac{\partial}{\partial R_{l3}} \left(\frac{e^{ikR_{l3}}}{R_{l3}} \right), \\ \frac{\partial}{\partial R_{l2}} \left(\frac{e^{ikR_{l2}}}{R_{l2}} \right) &= \frac{\partial}{\partial R_{l4}} \left(\frac{e^{ikR_{l4}}}{R_{l4}} \right), \\ \frac{\partial R_{l1}}{\partial z} &= -\frac{\partial R_{l3}}{\partial z}, & \frac{\partial R_{l2}}{\partial z} &= -\frac{\partial R_{l4}}{\partial z}. \end{aligned} \quad (34.10)$$

Учитывая последние соотношения, мы получаем из (34.7) $(\partial\psi/\partial z)_{z=h} = 0$, что и требовалось доказать.

Аналогично проводится доказательство для нижней границы $z = 0$, только группировать члены целесообразно несколько иначе, подбирая в пары члены, соответствующие источникам, расположенным симметрично относительно нижней границы.

Полезно отметить, что каждому мнимому источнику соответствует распространяющийся по слою луч, испытывающий на своем пути от излучателя до приемника определенное количество отражений от границ слоя. На рис. 34.4 эта эквивалентность наглядно видна, например, для мнимого источника O_{04} .

34.2. Случай отрицательного коэффициента отражения. На абсолютно отражающей границе вместо условия $\partial\phi/\partial z = 0$ может выполняться также условие $\psi = 0$. Это имеет место, например, в электромагнитном случае при падении горизонтально поляризованной волны на абсолютно проводящую границу. При распространении звуковой волны в слое жидкости с полностью неподатливым дном и свободной поверхностью на дне выполняется условие $\partial\phi/\partial z = 0$ (запрещены нормальные скорости), а на свободной поверхности условие $\psi = 0$ (равно нулю давление).

Коэффициент отражения от поверхности, на которой выполняется условие $\psi = 0$, равен -1 , в то время как для поверхности, на которой выполняется условие $\partial\phi/\partial z = 0$, он равен 1 . Цепочка мнимых источников, построенная для слоя, в котором одна или обе границы обладают коэффициентом отражения, равным -1 , содержит мнимые источники, работающие в противофазе с основным источником. Это будут те источники, которые соответствуют лучам, отразившимся нечетное число раз от границы, где $V = -1$. На рис. 34.5 построена картина мнимых источников для случая, когда нижняя граница слоя соответствует $V = 1$, а верхняя $V = -1$ (упомянутый выше акустический случай). Основной источник и синфазные с ним отмечены знаком плюс, источники, работающие в противофазе с основным, знаком минус. Нетрудно заметить, что линии, соединяющие последние источники с точкой наблюдения P , пересекают нечетное число раз пунктирные горизонтальные линии, представляющие собой верхнюю границу слоя и ее последующие зеркальные отображения.

Выражение для поля, аналогичное (34.5), в этом случае запишется

$$\Psi = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \left[\frac{e^{ikR_{l1}}}{R_{l1}} + \frac{e^{ikR_{l2}}}{R_{l2}} - \frac{e^{ikR_{l3}}}{R_{l3}} - \frac{e^{ikR_{l4}}}{R_{l4}} \right] \quad (34.11)$$

Приведенные рассуждения полезно несколько обобщить. Обозначим коэффициент отражения от нижней границы через V_1 , а от верхней через V_2 . Как тот, так и другой могут принимать значения ± 1 . Проследив число отражений от границ лучей, соответствующих каждому из мнимых источников, нетрудно показать, что выражение для поля в этом общем случае

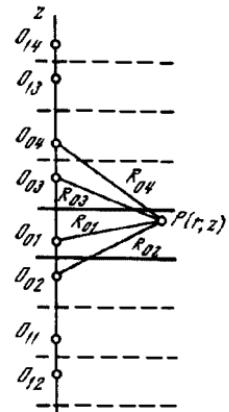


Рис. 34.3. Цепочка мнимых источников, получающаяся в результате многократных отражений на границах слоя

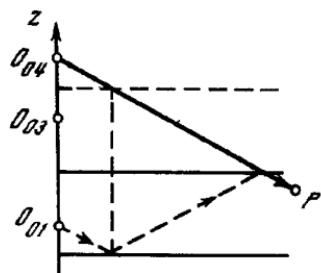


Рис. 34.4. Мнимый источник O_{04} и соответствующий ему луч, распространяющийся по слою

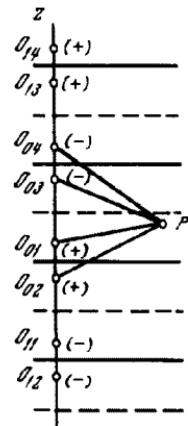


Рис. 34.5. Цепочка мнимых источников для случая, когда коэффициент отражения от верхней границы равен -1

будет

$$\psi = \sum_{l=0}^{\infty} (V_1 V_2)^l \left[\frac{e^{ikR_{l1}}}{R_{l1}} + V_1 \frac{e^{ikR_{l2}}}{R_{l2}} + V_2 \frac{e^{ikR_{l3}}}{R_{l3}} + V_1 V_2 \frac{e^{ikR_{l4}}}{R_{l4}} \right]. \quad (34.12)$$

Отсюда, как частные случаи, получаются формулы (34.5) и (34.11).

§ 35. Слой с абсолютно отражающими границами. Нормальные волны

35.1. Интегральное представление поля в слое. Поле в слое можно представить также в виде совокупности «нормальных волн», каждая из которых в отдельности удовлетворяет волновому уравнению и граничным условиям и распространяется вдоль слоя со своей скоростью.

Преобразование поля совокупности мнимых источников в поле нормальных волн мы произведем, воспользовавшись интегральным представлением поля сферической волны. Пользуясь соотношением (26.19) и учитывая преобразования (26.3) — (26.6), получаем

$$\frac{1}{R} e^{ikR} = \frac{ik}{2} \int_{\Gamma_1} \pm e^{ikz \cos \theta} H_0^{(1)}(kr \sin \theta) \sin \theta d\theta, \quad (35.1)$$

где знаки плюс и минус относятся соответственно к случаям $z > 0$ и $z < 0$. Применим последнее соотношение к каждому из членов суммы (34.12), причем величина z в (35.1) будет пробегать все значения $z = z_{lj}$, $l = 0, 1, \dots, j = 1, 2, 3, 4$, где согласно (34.6)

$$z_{l1} = 2lh + z - z_0, \quad z_{l2} = 2lh + z + z_0,$$

$$z_{l3} = 2(l+1)h - z - z_0, \quad z_{l4} = 2(l+1)h - z + z_0, \quad R_{lj} = \sqrt{r^2 + z_{lj}^2}. \quad (35.2)$$

При этом имеем $z_{lj} > 0$ для всех l и j за исключением $z_{01} = z - z_0$, которое может быть как положительным, так и отрицательным.

Для определенности мы возьмем сначала случай $z > z_0$. Выражение (34.12) при подстановке в него выражений $e^{ikR_{lj}/R_{lj}}$, преобразованных по формуле (35.1), после перемены порядка суммирования и интегрирования и некоторых несложных преобразований может быть записано

$$\begin{aligned} \psi = \frac{ik}{2} \int_{\Gamma_1} H_0^{(1)}(kr \sin \theta) \times [e^{ib(z-z_0)} + V_1 e^{ib(z+z_0)} + V_2 e^{ib(2h-z-z_0)} + V_1 V_2 e^{ib(2h-z+z_0)}] \times \\ \times \sum_{l=0}^{\infty} (V_1 V_2)^l e^{2lh} \sin \theta d\theta. \end{aligned} \quad (35.3)$$

Здесь использовано обозначение

$$b \equiv ik \cos \theta. \quad (35.4)$$

Учтем тождество

$$e^{ib(z-z_0)} + V_1 e^{ib(z+z_0)} + V_2 e^{ib(2h-z-z_0)} + V_1 V_2 e^{ib(2h-z+z_0)} \equiv \\ \equiv [e^{-bz_0} + V_1 e^{bz_0}] [e^{bz} + V_2 e^{b(2h-z)}]. \quad (35.5)$$

Кроме того, имеем для бесконечной геометрической прогрессии

$$\sum_{l=0}^{\infty} (V_1 V_2)^l e^{2lh} = \frac{1}{1 - V_2 V_1 e^{2bh}}. \quad (35.6)$$

Сходимость ряда в левой части последнего равенства не будет вызывать сомнений, если учсть наличие у волнового числа k некоторой малой мнимой части (поглощение в среде) или отличие (хотя бы и малое) V_1 или V_2 от единицы.

В результате из (35.3) получаем для $z > z_0$

$$\Psi = \frac{ik}{2} \int_{\Gamma_1} \frac{(e^{-bz_0} + V_1 e^{bz_0})(e^{-b(h-z)} + V_2 e^{b(h-z)})}{e^{-bh}(1 - V_1 V_2 e^{2bh})} H_0^{(1)}(kr \sin \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta. \quad (35.7)$$

Таким же образом можно показать, что значение поля в случае $z < z_0$ получится из (35.7) заменой z на z_0 и обратно. Это же, впрочем, следует и из принципа взаимности.

Ниже будет показано, что выражение (35.7) имеет весьма общее значение. Здесь же мы рассмотрим некоторые частные случаи. Положим вначале, как и в § 34, $V_1 = V_2 = 1$, что соответствует равенству нулю нормальной производной $\partial\psi/\partial z$ на обеих границах слоя.

При этом из (35.7) получаем

$$z > z_0, \quad \Psi = 2ik \int_{\Gamma_1} \frac{\operatorname{ch} bz_0 \operatorname{ch} b(h-z)}{e^{-bh} - e^{bh}} H_0^{(1)}(kr \sin \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta, \quad (35.8a)$$

$$z < z_0, \quad \Psi = 2ik \int_{\Gamma_1} \frac{\operatorname{ch} bz - \operatorname{ch} b(h-z_0)}{e^{-bh} - e^{bh}} H_0^{(1)}(kr \sin \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta. \quad (35.8b)$$

Покажем, что интегралы (35.8) сходятся всюду, за исключением точки $z = z_0$, $r = 0$, где они дают нужную особенность вида $1/R$. На бесконечно удаленных участках пути интегрирования Γ_1 (см. рис. 28.1), т. е. при $\vartheta = \pm(\pi/2 - ia)$, $a \rightarrow \infty$, мы имеем

$$b = ik \cos \vartheta = -k \operatorname{sh} a \rightarrow \infty; \quad \sin \vartheta = \pm \operatorname{ch} a \rightarrow \pm \infty. \quad (35.9)$$

На этих участках подынтегральное выражение в (35.8a) может быть записано в виде $e^{-k(z-z_0)\operatorname{sh} a} H_0^{(1)}(\pm kr \operatorname{ch} a) \operatorname{ch} a$. Отсюда видно, что интеграл (35.8a) сходится. Даже при $z = z_0$, когда экспоненциально убывающий фактор $e^{-k(z-z_0)\operatorname{sh} a}$ вырождается в единицу, интеграл сходится вследствие осциллирующего характера функции Ханкеля при больших значениях ее аргумента.

При $r \rightarrow 0$ наши рассуждения остаются в силе, если $z \neq z_0$, поскольку экспонента $e^{-k(z-z_0)\operatorname{sh} a}$ по-прежнему обеспечивает сходимость интеграла. Особого рассмотрения требует случай, когда одновременно $z \rightarrow z_0$, $r \rightarrow 0$. При этом ввиду того, что под интеграл входит функция $H_0^{(1)}(kr \sin \vartheta)$, основную роль будут играть удаленные от начала координат участки пути интегрирования, где $\sin \vartheta$ велик. Учитывая соотношения (35.9), выражение (35.8a) можно переписать в виде

$$\Psi = \frac{ik}{2} \int_{\Gamma_1} e^{-ik(z_0-z)\cos \vartheta} H_0^{(1)}(kr \sin \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta.$$

Сравнение с (35.1) показывает, что в этом случае Ψ представляет собой сферическую волну e^{ikR}/R , что и требовалось показать.

35.2. Нормальные волны. Преобразуем теперь интегральные выражения (35.8) для Ψ в сумму нормальных волн. Для этого полезно вместо ϑ воспользоваться переменной $\xi = k \sin \vartheta$, интегрирование по которой будет происходить от $-\infty$ до $+\infty$. В результате получаем из (35.8)

$$z > z_0, \quad \Psi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{ch} bz_0 \operatorname{ch} b(h-z)}{b \operatorname{sh} bh} H_0^{(1)}(\xi r) \xi d\xi, \quad (35.10a)$$

$$z < z_0, \quad \Psi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{ch} bz \operatorname{ch} b(h-z_0)}{b \operatorname{sh} bh} H_0^{(1)}(\xi r) \xi d\xi, \quad (35.10b)$$

$$b = \sqrt{\xi^2 - k^2}.$$

Полученные таким образом интегралы можно свести к сумме вычетов в полюсах подынтегрального выражения.

Полюсы расположены в точках, определяемых корнями уравнения

$$\operatorname{sh} b\zeta = 0, \quad (35.11)$$

решением которого будет

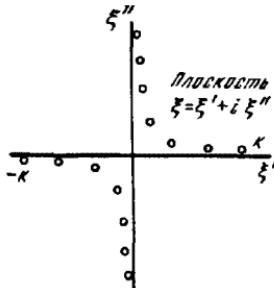
$$b\zeta = il\pi, \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (35.12)$$

Вблизи корня, соответствующего $l = 0$, имеем в (35.10)

$$\frac{1}{b \operatorname{sh} b\zeta} \approx \frac{1}{hb^2} = \frac{1}{h(\xi^2 - k^2)}. \quad (35.13)$$

Последнее выражение имеет полюсы первого порядка в точках $\xi_0 = \pm k$. Вообще же при произвольном l из (35.12) имеем для полюсов

$$\xi_l = \pm \sqrt{k^2 - (l\pi/h)^2}. \quad (35.14)$$



При $l\pi < kh$, т. е. при

$$l\lambda < 2h, \quad (35.15)$$

они лежат на вещественной оси в плоскости ξ , при больших l — на мнимой оси.

Поскольку от знака l ничего не зависит, мы будем рассматривать только положительные l .

Анализ интегралов (35.10) в комплексной плоскости облегчается, если учесть, что в среде, заполняющей слой, всегда имеет место некоторое поглощение волн. Поэтому мы будем считать, что величина k обладает малой (положительной) мнимой частью, которую в конечных результатах можно стремить к нулю. В этом случае полюсы располагаются не на координатных осях, а так, как показано схематически на рис. 35.1.

Рис. 35.1. Схематическое изображение расположения полюсов на комплексной плоскости

Оттянем теперь путь интегрирования с действительной оси на бесконечность в верхнюю полуплоскость. На бесконечности функция $H_0^{(1)}(\xi r)$ будет стремиться к нулю, если только $r \neq 0$. Можно показать, что интеграл по бесконечно удаленным частям контура интегрирования будет исчезать. В результате все выражение для ψ сводится к сумме вычетов, взятых в полюсах, расположенных в первом квадранте. Используя символ Res для вычетов, получаем для любого l , кроме $l = 0$,

$$\operatorname{Res} \left[\frac{\xi \operatorname{ch} bz_0 \operatorname{ch} b(h-z)}{b \operatorname{sh} b\zeta} \right]_{\zeta=\xi_l} = \left[\frac{\xi \operatorname{ch} bz_0 \operatorname{ch} b(h-z)}{bd(\operatorname{sh} b\zeta)/d\xi} \right]_{\zeta=\xi_l}.$$

Но при $\xi = \xi_l$ имеем $\operatorname{sh} b\zeta = 0$. Воспользовавшись этим, получим $\operatorname{ch} b\zeta (h-z)|_{\xi=\xi_l} = \operatorname{ch} b\zeta \operatorname{ch} bz$; кроме того, имеем $d(\operatorname{sh} b\zeta)/d\xi = (\xi h/b) \operatorname{ch} b\zeta$; в результате $\operatorname{Res} [\dots] = \frac{1}{h} \operatorname{ch} bz \operatorname{ch} bz_0$.

Для полюса $l = 0$ имеем, согласно (35.13),

$$\operatorname{Res} \left[\frac{1}{b \operatorname{sh} b\zeta} \right]_{\zeta=k} = \operatorname{Res} \frac{1}{h(\xi-k)(\xi+k)} = \frac{1}{2kh}.$$

В результате, если учесть еще (35.12), то получаем для поля в слое

$$\psi = \frac{2\pi i}{h} \left\{ \frac{1}{2} H_0^{(1)}(kr) + \sum_{l=1}^{\infty} \cos \frac{l\pi z}{h} \cos \frac{l\pi z_0}{h} H_0^{(1)}(\xi_l r) \right\}, \quad (35.16)$$

где ξ_l дается выражением (35.14). Последнее выражение для ψ не изменяется при замене z на z_0 и обратно и, следовательно, справедливо при любых ($0 \leq z \leq h$).

Решение (35.16) удовлетворяет всем условиям задачи. В частности, легко проверить подстановкой, что оно почленно удовлетворяет волновому уравнению (34.1) и граничным условиям (34.2). Каждый член в (34.16) представляет собой так называемую нормальную волну. Рассмотрим ее физический смысл.

На больших по сравнению с длиной волны расстояниях от излучателя функцию Ханкеля можно заменить ее асимптотическим представлением. В результате мы получаем

$$\psi = \frac{1}{h} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} e^{i\pi/4} \left\{ \frac{1}{\sqrt{k}} e^{ikr} + 2 \sum_{l=1}^{\infty} \cos \frac{l\pi z}{h} \cos \frac{l\pi z_0}{h} \frac{1}{\sqrt{\xi_l}} e^{i\xi_l r} \right\}. \quad (35.17)$$

Мы видим, что каждая нормальная волна распространяется вдоль слоя со скоростью

$$V_l = \omega/\xi_l = c [1 - (l\lambda/2h)^2]^{-1/2}. \quad (35.18)$$

Амплитуда каждой волны убывает вдоль слоя по закону $1/\sqrt{r}$.

Из последней формулы видно, что $V_l \geq c$ при $l\lambda < 2h$. При $l\lambda > 2h$ скорость V_l становится мнимой. Соответствующие нормальные волны представляют собой неоднородные волны с амплитудой, убывающей при увеличении r по экспоненциальному закону. Аналогично изложенному в § 26 наличие таких волн необходимо для получения требуемой особенности в источнике.

Рис. 35.2. Изменение амплитуды первых четырех нормальных волн по толщине слоя. Границы слоя предполагаются полностью отражающими с коэффициентом отражения, равным 1



При $r \geq h$ в сумме (35.17) практически нужно учитывать только конечное число членов, для которых $l\lambda < 2h$. Их число равно числу полуволн, укладывающихся на толщине слоя.

Каждый из членов в выражении (35.17) представляет собой волну, бегущую в направлении r и стоячую в направлении z . Зависимость амплитуды каждой волны от координаты z дается множителем $\operatorname{ch} b_l z$. Для $l = 0, 1, 2, 3$ эта зависимость изображена на рис. 35.2. На каждой из границ производная $d\psi/dz$ равна нулю. При $l = 0$ мы имеем плоскую волну.

Во всех рассуждениях мы исключаем такой случай, когда на толщине слоя укладывается целое число полуволн. Если это имеет место, то одна из ξ_l стремится к нулю, а амплитуда соответствующей волны в (35.16) стремится к бесконечности из-за неограниченного возрастания функции Ханкеля. Это случай своеобразного резонанса, при котором, если не учитывать какого-либо рода потерь, установление стационарного состояния невозможно *. Частоту ω_l , при которой выполняется это условие, называют критической частотой l -й нормальной волны.

Полезно отметить также, что каждую нормальную волну можно представлять себе в виде суперпозиции двух бегущих плоских волн с определенными углами наклона их фронтов. Действительно, в (35.17) мы имеем

$$\operatorname{ch} b_l z e^{i\xi_l r} = \frac{1}{2} [e^{i(\xi_l r + a_l z)} + e^{i(\xi_l r - a_l z)}],$$

* Сопротивление излучения источника при этом стремится к бесконечности.

где [см. (35.12)]

$$\alpha_l = -ib_l = l\pi/h, \quad \xi_l^2 + k^2 = k^2. \quad (35.19)$$

Выражение (35.19) представляет собой суперпозицию двух плоских волн, распространяющихся по z в разные стороны. Для угла ϑ_l , составляемого нормалью к фронту каждой из волн с осью z , имеем соотношение

$$\operatorname{tg} \vartheta_l = \xi_l/a_l = \sqrt{(kh)^2 - (l\pi)^2}/l\pi \text{ или } \cos \vartheta_l = l\pi/kh. \quad (35.20)$$

При увеличении l (предполагается, однако, что $l\pi < kh$) ϑ_l уменьшается, т. е. наклон плоских волн по отношению к границам слоя увеличивается.

Уравнение (35.12) или последующие его формы (35.14) и (35.20), определяющее фазовую скорость нормальных волн c_l , называется дисперсионным уравнением.

Заслуживает особого рассмотрения случай $V_1 = 1$, $V_2 = -1$, соответствующий распространению звуковых волн в слое жидкости со свободной поверхностью и абсолютно неподатливым дном. Подставляя эти значения для коэффициентов отражения в интегральное выражение (35.7) и производя те же дальнейшие операции, что и для рассмотренного выше случая, мы получаем аналогично (35.16)

$$\psi = \frac{2\pi l}{h} \sum_{l=0}^{\infty} \operatorname{ch} b_l z_0 \operatorname{ch} b_l z H_0^{(1)}(\xi_l r), \quad (35.21)$$

где

$$b_l = i\pi(l + 1/2)/h,$$

$$k\xi_l = h \sqrt{b_l^2 + k^2} = \sqrt{(kh)^2 - (l + 1/2)^2 \pi^2}, \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (35.22)$$

Нормальные волны могут распространяться в слое без затухания только, если $kh > \pi/2$ или $h > \lambda/4$, т. е. когда глубина воды больше четверти длины волны. В противном случае, как это видно из (35.22), не существует такого l , при котором ξ_l было бы вещественной величиной. Частота $\omega_{\text{кр}} = \pi c/2h$, при которой $h = \lambda/4$, называется критической частотой волновода. Волны с частотами, ниже критической, практически не распространяются в слое.

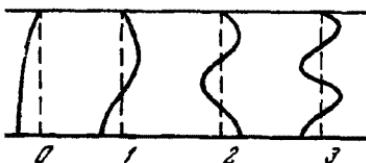


Рис. 35.3. То же, что и на рис. 35.2, но при предположении, что коэффициент отражения от верхней границы равен -1

На рис. 35.3 изображено распределение амплитуды звукового давления по оси z для первых четырех нормальных волн. Во всех случаях на поверхности жидкости (верхняя граница слоя) давление равно нулю. Плоская волна, в противоположность предыдущему случаю, здесь существовать не может, так как вследствие требования равенства нулю звукового давления на поверхности жидкости оно было бы равно нулю для этой волны и всюду в слое.

35.3. Соотношение между картиной мнимых источников и нормальными волнами. Бесконечно протяженную цепочку мнимых источников можно рассматривать как самосветящуюся дифракционную решетку. Поле такой решетки можно представить в виде совокупности спектров, каждый из которых распространяется под своим углом к оси решетки. Можно показать, что каждая нормальная волна и представляет собой совокупность пар спектров, направление которых симметрично по отношению к плоскости, перпендикулярной оси решетки. Возьмем для определенности случай $V_1 = V_2 = 1$. Мы показали ранее, что каждая нормальная волна эквива-

лентна паре волн, наклоны нормалей к фронтам которых определяются уравнением (35.20). Покажем теперь, что этим же уравнением будут определяться и наклоны спектров, если их определять при помощи элементарной теории дифракционных решеток.

Угол, определяющий направление l -го спектра, находится, как известно, из условия, согласно которому разность хода на бесконечности двух лучей, идущих параллельно друг другу и начинающихся из двух идентичных элементов в смежных периодах решетки, должна равняться целому числу волн. На рис. 35.4 изображено несколько элементов цепочки мнимых источников, соответствующей рис. 34.3. Отсюда получаем условие $2h \cos \theta_l = l\lambda$, совпадающее с условием (35.20), в котором $k = 2\pi/\lambda$.

С точки зрения картины мнимых источников интересно объясняется факт крайне большого затухания звуковых волн при распространении их в слое жидкости с неподатливым дном в случае, когда глубина воды меньше четверти длины волны (см. выше). В этом случае из-за малого «периода» решетки создается как бы короткое замыкание друг на друга соседних мнимых источников, работающих в противофазе друг с другом. Другими словами, вместо излучения звуковых волн, мы в этом случае будем иметь периодическое перекачивание жидкости между соседними мнимыми источниками (когда один источник вытесняет жидкость, другой в это время выбирает ее, и наоборот).

В первых разделах настоящего параграфа мы провели формально математическое преобразование полей мнимых источников в совокупность нормальных волн. Представляет интерес провести также и обратное преобразование [214]. Для этого мы воспользуемся формулой Пуассона [93]

$$\beta^{\nu_0} \left[\frac{1}{2} F(0) + \sum_{l=1}^{\infty} F(l\beta) \right] = \alpha^{\nu_0} \left[\frac{1}{2} f(0) + \sum_{l=1}^{\infty} f(l\alpha) \right], \quad (35.23)$$

где

$$F(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cos(xt) dt, \quad \alpha\beta = 2\pi, \quad \alpha > 0. \quad (35.24)$$

Как видим, формула Пуассона позволяет преобразовать один ряд в другой, причем члены нового ряда получаются из членов старого ряда путем преобразования по Фурье.

В нашем случае, согласно (35.16),

$$f = \frac{2\pi i}{h} H_0^{(1)} [r(k^2 - l^2\pi^2/h^2)^{\nu_0}] \cos \frac{l\pi z}{h} \cos \frac{l\pi z_0}{h}.$$

Введем переменную $u = l\pi/h$. Тогда, пользуясь формулой (35.24), получаем

$$F(x) = 2i \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \cos(hxu/\pi) H_0^{(1)} [r(k^2 - u^2)^{\nu_0}] \cos uz \cos uz_0 du. \quad (35.25)$$

Отметим, что имеет место тождество

$$\int_0^{\infty} H_0^{(1)} [r(k^2 - u^2)^{\nu_0}] \cos zu du = -(i/R) e^{ikR}, \quad R = \sqrt{z^2 + r^2}. \quad (35.26)$$

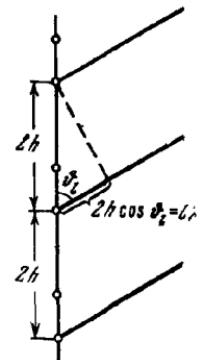


Рис. 35.4. К вопросу эквивалентности нормальных волн и спектров различных порядков

И, кроме того,

$$\cos(hxu/\pi) \cos iz \cos iz_0 = \frac{1}{4} [\cos(v+z+z_0) + \\ + \cos(v-z+z_0) + \cos(v+z-z_0) + \cos(v-z-z_0)],$$

где $v = hx/\pi$. В результате из (35.25) получаем

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \{g[r^2 + (v+z-z_0)^2] + g[r^2 + (v+z-z_0)^2] + \\ + g[r^2 + (v-z+z_0)^2] + g[r^2 + (v-z-z_0)^2]\},$$

где для сокращения введено символическое обозначение $g(R^2) \equiv e^{ikR}/R$.

Полагая теперь $\alpha = 1$, $\beta = 2\pi$, $x = l\beta$, мы получаем в левой части равенства (35.23) бесконечный ряд, соответствующий полю бесконечной цепочки мнимых источников. Этот ряд, как нетрудно проверить хотя бы по членным сравнением, будет совпадать с рядом (34.5) и будет отличаться от него только нумерацией членов и объединением их в отдельные четверки.

Взаимоотношение между лучами и нормальными волнами продискутировано также в работе И. Толстого [249]. В интересных модельных опытах А. Вуда [75] наглядно видно, как нормальные волны близких номеров образуют лучи. Дальнейшее исследование этого вопроса содержится в работе Д. Вестона [265].

§ 36. Слой с произвольными границами

36.1. Обобщение результатов предыдущего параграфа на случай произвольных границ. Формула (35.7), полученная для случая абсолютно отражающих границ, оказывается справедливой и для случая произвольных границ, когда коэффициенты отражения являются функциями угла падения. Мы сейчас докажем это [10], получив формулу (35.7) вновь для более общего случая, когда картина мнимых источников, из которой мы ранее исходили, может быть и несправедливой. При этом мы будем исходить из представления о сферической волне как суперпозиции плоских волн и обобщать рассуждения § 26.

Если границы слоя на рис. 34.1 представить себе бесконечно удаленными от излучателя и приемника, то в точке $P(r, z)$ будет наблюдаться лишь одна прямая сферическая волна, которая может быть представлена, как мы видели, в виде суперпозиции плоских волн типа $\exp i[k_x x + k_y y + k_z(z - z_0)]$, где k_x , k_y и k_z даются формулами (26.18). Здесь x , y и $(z - z_0)$ — проекции на оси координат отрезка, связывающего источник с точкой наблюдения.

Если на конечном расстоянии от излучателя и приемника присутствует нижняя граница, то кроме прямой волны будет наблюдаться также отраженная волна, которую можно представить себе в виде суперпозиции плоских волн вида $V_1(\theta) \exp i[k_x x + k_y y + k_z(z + z_0)]$, где k_x , k_y , k_z — те же величины, что и выше, а $V_1(\theta)$ — коэффициент отражения от нижней границы.

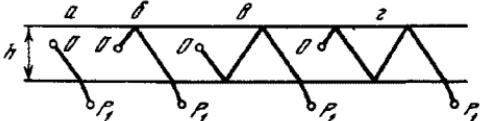
Обобщая эти рассуждения, можно получить выражение для поля точечного источника, находящегося в слое. В этом случае в точке приема, кроме прямой волны, будем иметь еще бесконечный ряд волн с различным числом отражений от границ слоя. Фаза каждой из этих плоских волн в точке приема будет даваться выражением $k_x x + k_y y + k_z z_{lj}$, где z_{lj} — проекция на ось z пути, проходимого волной [см. § 35.1]. Индексы lj характеризуют число отражений волны от границ слоя и пробегают значения $l = 0, 1, 2, \dots, \dots, \infty$, $j = 1, 2, 3, 4$.

В частности, 1) для прямой волны ($l = 0, j = 1$) $z_{01} = z - z_0$; 2) для волны, отраженной от нижней границы ($l = 0, j = 2$), $z_{02} = z + z_0$; 3) для волны, отраженной от верхней границы ($l = 0, j = 3$), $z_{03} = 2h -$

$-z - z_0$; 4) для волны, отраженной сначала от нижней, затем от верхней границы раздела ($l = 0, j = 4$), $z_{04} = 2h - z + z_0$. Значения z_{lj} для произвольных l и j даются формулами (35.2).

Полное поле мы получим, если просуммируем все плоские волны, имеющие одни и те же направляющие косинусы, но различающиеся числом отражений от границ, и проинтегрируем затем эту сумму по всем направляющим косинусам. Учитывая первичное разложение (26.19) сферической волны по плоским волнам, а также, что при каждом отражении от границы

Рис. 36.1. К выводу выражения для поля в нижней среде



амплитуда волны умножается на соответственный коэффициент отражения, мы получаем для полного поля в слое при $z > z_0$ (сравни с суммой (34.12)):

$$\Psi = \frac{ik}{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} e^{i(k_x x + k_y y)} \times \sum_{l=0}^{\infty} [e^{ik_z(z-z_0)} + V_1 e^{ik_z(z_0+z)} + V_2 e^{ik_z(2h-z-z_0)} + V_1 V_2 e^{ik_z(2h-z+z_0)}] (V_1 V_2)^l e^{2ik_z l h} \sin \vartheta d\vartheta d\phi. \quad (36.1)$$

| Выполнив в последней формуле интегрирование по φ , как это сделано в формулах (26.24) — (26.27), а также учитя соотношения (35.5) и (35.6), получаем при $z > z_0$

$$\Psi = \frac{ik}{2} \int_{r_1}^{\infty} \frac{(e^{-bz_0} + V_1 e^{bz_0}) (e^{-b(h-z)} + V_2 e^{b(h-z)})}{e^{-bh} (1 - V_1 V_2 e^{2bh})} H_0^{(1)}(kr \sin \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta, \quad (36.2a)$$

где $b = ik_z = ik \cos \vartheta$.

Это выражение совпадает с (35.7) с той лишь разницей, что теперь V_1 и V_2 не постоянные величины, а функции угла ϑ . Заменой z на z_0 и обратно получаем далее при $z < z_0$

$$\Psi = \frac{ik}{2} \int_{r_1}^{\infty} \frac{(e^{-bz} + V_1 e^{bz}) (e^{-b(h-z_0)} + V_2 e^{b(h-z_0)})}{e^{-bh} (1 - V_1 V_2 e^{2bh})} H_0^{(1)}(kr \sin \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta. \quad (36.2b)$$

Получим, следуя той же методике, интегральное выражение для поля в нижнем полупространстве ($z < 0$). При этом мы предположим, что плоская волна, обладающая в точке $x = y = 0, z = z_0$ единичной амплитудой и нулевой фазой и падающая на границу $z = 0$ под углом падения ϑ , создает в произвольной точке $z < 0$ поле

$$f(z, \vartheta) \exp i(k_x x + k_y y + k_z z_0), \quad (36.3)$$

где k_x, k_y, k_z даются формулами (26.18), а $f(z, \vartheta)$ — находится из волнового уравнения для нижнего полупространства и удовлетворяет принципу предельного затухания или излучения при $z \rightarrow -\infty$. В частном случае, когда при $z < 0$ имеем однородную среду

$$f(z, \vartheta) = W e^{-ik_{1z} z}, \quad (36.4)$$

где $k_{1z} = \sqrt{k_1^2 - k_x^2 - k_y^2} = k \sqrt{n_1^2 - \sin^2 \vartheta}$, $n_1 \equiv k_1/k$, k_1 — волновое число в нижней среде, W — коэффициент прозрачности границы (см. §§ 2, 4).

На рис. 36.1 изображены четыре простейших (из бесконечного их числа) пути, которыми волна от источника O в слое может попасть в точку P_1 в нижней среде.

Представим теперь снова сферическую волну с источником в O , расположенной по плоским волнам. Каждая из этих «первичных» волн будет испытывать многократные отражения от границ слоя, проникая при этом и за границы. При простейшем проникновении в P_1 — случай а) на рис. 36.1 поле будет даваться формулой (36.3). В случае б) поле будет

$$f(z, \vartheta) \exp[i(k_x z + k_y y + k_z(2h - z_0)) V_2(\vartheta)], \quad (36.5)$$

где $f(z, \vartheta)$ — то же, что и в (36.3), а $V_2(\vartheta)$ — коэффициент отражения от верхней границы слоя. Аналогично получаются поля для случаев в), г) и более сложных. Складывая поля всех кратностей отражений, мы находим, что первичная плоская волна создает в P_1 поле

$$f(z, \vartheta) [e^{ik_x z + ik_y y} [e^{ik_z z_0} + V_2(\vartheta) e^{ik_z(2h-z_0)}] \sum_{l=0}^{\infty} (V_1 V_2)^l e^{2ik_z l h}]. \quad (36.6)$$

Учитывая значение входящей сюда суммы [см. (35.6)], а также интегрируя по всем направляющим косинусам плоских волн, получаем

$$\Psi_1 = \left[\frac{ik}{2} \int_{\Gamma_1} \frac{e^{-b(h-z_0)} + V_2 e^{b(h-z_0)}}{e^{-bh} (1 - V_1 V_2 e^{2bh})} f(z, \vartheta) H_0^{(1)}(kr \sin \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta \right], \quad (36.7)$$

где снова $b \equiv ik_z$. Аналогичным образом можно было бы получить и поле Ψ_2 в верхней среде.

Покажем теперь, что выражения (36.2) и (36.7) удовлетворяют всем необходимым условиям, а именно:

1) интегралы сходятся всюду, за исключением точки O , где они имеют нужную особенность;

2) удовлетворяют условиям на границах слоя;

3) удовлетворяют волновому уравнению.

Для доказательства * п. 1 необходимо исследовать поведение подынтегральных выражений в бесконечно удаленных точках пути интегрирования Γ_1 (см. рис. 28.1). В плоскости $\vartheta = \vartheta' + i\vartheta''$ это точки $\vartheta' = \pm \pi/2$, $\vartheta'' = \mp \infty$. Во всех известных нам случаях (а в [10] показано, что и вообще) коэффициенты отражения $V_1(\vartheta)$ и $V_2(\vartheta)$ при приближении к этим точкам остаются ограниченными. Так как при этом $b = ik \cos \vartheta = ik (\cos \vartheta' \operatorname{ch} \vartheta'' - i \sin \vartheta' \operatorname{sh} \vartheta'') \rightarrow -\infty$, то на удаленных участках Γ_1 подынтегральное выражение в (36.2) зашатается

$$e^{b(z-z_0)} H_0^{(1)}(kr \sin \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta. \quad (36.8)$$

Если ввести новую переменную интегрирования $\xi = k \sin \vartheta$, интегрирование по которой будет осуществляться по вещественной оси от $-\infty$ до $+\infty$, и воспользоваться асимптотическим представлением функции Ханкеля, то это же выражение зашатается с точностью до постоянного множителя следующим образом:

$$\exp[i\xi r - (z - z_0) \sqrt{\xi^2 - k^2}] d\xi / \sqrt{\xi}.$$

В результате мы получаем сходящийся интеграл для всех r и z , за исключением точки $r = 0, z = z_0$, которая требует особого рассмотрения.

При $r \rightarrow 0, z \rightarrow z_0$ основную роль играют удаленные участки пути интегрирования Γ_1 , где $\sin \vartheta$ и $\cos \vartheta$ по модулю велики. При этом подынтегральное выражение в (36.2) можно заменить выражением (36.8). В результате мы получаем выражение (35.1) для сферической волны. Таким образом, интеграл всюду сходится, за исключением точки $r = 0, z = z_0$, вблизи которой он ведет себя как сферическая волна, т. е. имеет особенность вида $1/\sqrt{(z - z_0)^2 + r^2}$, что и требовалось доказать.

* Доказательство п. п. 1—3 мы проводим на уровне так называемой физической строгости, т. е. не ставя своей целью строгое математическое изложение вопроса.

Аналогичные рассуждения можно провести также и для выражений (36.26) и (36.7).

Доказательство п. 2 проведем для нижней границы и частного случая, когда нижнее полупространство однородно (для общего случая доказательство см. в [10]). Границные условия для звуковых волн при этом записываются *

$$z = 0, \quad \partial\psi/\partial z = \partial\psi_1/\partial z, \quad \psi = m\psi_1, \quad m = \rho_1/\rho. \quad (36.9)$$

Подставляя (36.7) и (36.26) в (36.9), учитывая (36.4), производя дифференцирование под интегралом и приравнивая подынтегральные выражения, получаем

$$k_{1z}W_1 = k_z(1 - V_1), \quad mW_1 = [1 + V_1]. \quad (36.10)$$

Однако мы получаем эти же уравнения для V_1 и W_1 , решая задачу об отражении плоской волны от границы раздела двух сред. Это легко проверить, задав поле в одной среде в виде суммы падающей и отраженной волн

$$\psi = e^{ik_x x + ik_y y} [e^{-ik_z z} + V_1 e^{ik_z z}],$$

а поле в другой среде в виде преломленной волны

$$\psi' = W_1 e^{ik_x x + ik_y y - k_{1z} z}.$$

Подставив эти значения ψ и ψ' в граничные условия (36.9), получаем соотношения, тождественные с (36.10). Мы, естественно, должны предположить, что эти соотношения выполняются.

Выполнение п. 3 следует из того, что подынтегральные выражения (36.2) и (36.7) удовлетворяют волновому уравнению.

36.2. О картине мнимых источников. Мы доказали выше строгую применимость картины мнимых источников для случая абсолютно отражающих границ. В случае границ, коэффициент отражения для которых отличен от единицы и зависит от угла падения, сумма полей мнимых источников не представляет собой, вообще говоря, правильного решения задачи и будет в определенных случаях лишь некоторым приближением к действительности.

Вернемся снова к точному выражению (36.1) для поля в слое и запишем его в виде

$$\psi = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=1}^4 \psi_{lj}, \quad (36.11)$$

где

$$\psi_{lj} \equiv \frac{ik}{2} \int_0^{\pi/2} \int_{-\infty}^{i\infty} \int_0^{2\pi} e^{ik_x x + ik_y y + ik_z z_l j} V_{lj}(\theta) \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (36.12)$$

Здесь z_l дается выражениями (35.2), а V_{lj} определяется равенствами

$$V_{l1} = (V_1 V_2)^l, \quad V_{l2} = V_1^{l+1} V_2^l, \quad V_{l3} = V_1^l V_2^{l+1}, \quad V_{l4} = (V_1 V_2)^{l+1}. \quad (36.13)$$

Каждое из ψ_{lj} может быть сопоставлено определенному мнимому источнику. В частности, если V_1 и V_2 являются постоянными величинами, т. е. не зависят от угла падения, то ψ_{lj} будет точным выражением поля мнимого источника. Действительно, вынося V_{lj} за интеграл и учитывая соотношение (35.1), получаем

$$\psi_{lj} = V_{lj} \frac{e^{ikR_{lj}}}{R_{lj}}, \quad (36.14)$$

* В электродинамике в случае излучателя — вертикального диполя $m = k_1^2/k^2$.

где R_{ij} дается выражениями (34.6) и представляет собой расстояние от мнимого источника с номером (i) до точки наблюдения.

В общем случае, когда V_1 и V_2 являются функциями ϑ , интеграл (36.12) может вычисляться методом перевала в точности так же, как это мы делали в § 28 при анализе волны, однократно отраженной от границы раздела. Мы можем пользоваться формулами § 28, если коэффициенту отражения $V(\vartheta)$ будем сопоставлять величину V_{ij} .

Во втором приближении метода перевала получаем для ψ_{ij} по аналогии с (28.13) и (28.14)

$$\psi_{ij} = \frac{e^{ikR_{ij}}}{R_{ij}} \left[V_{ij}(\vartheta_{ij}) - \frac{iN_{ij}}{kR_{ij}} \right], \quad (36.15)$$

где

$$N_{ij} = \frac{1}{2} [V'_{ij}(\vartheta_{ij}) + V''_{ij}(\vartheta_{ij}) \operatorname{ctg} \vartheta_{ij}], \quad \vartheta_{ij} = \operatorname{arctg}(r/z_{ij}).$$

В частном случае, когда верхняя граница слоя отражает полностью ($V_2 = 1$), мы имеем $V_{i1} = V_{i3} = V'_1$; $V_{i2} = V_{i4} = V_1^{l+1}$. Полагая для краткости

$$V_1(\vartheta_{ij}) = \frac{m\gamma - q}{m\gamma + q}, \quad \gamma = \cos \vartheta_{ij}, \quad q = \sqrt{n_1^2 - \sin^2 \vartheta_{ij}}, \quad (36.16)$$

получаем после вычисления производных

$$N_{ii} = N_{ii} = \frac{2m(n_1^2 - 1)}{q^8} \frac{(m\gamma - q)^{l-1}}{(m\gamma + q)^{l+2}} \left\{ \frac{l(l-1)m(n_1^2 - 1)(1 - \gamma^2)q}{m\gamma - q} - \right. \\ \left. - \frac{l}{2} [-m\gamma^4 + \gamma(2n_1^2 + 1 - \gamma^2)q + 2m(n_1^2 - 1) + 3m\gamma^2] \right\}. \quad (36.17)$$

N_{i2} и N_{i4} получаются отсюда увеличением l на единицу.

Оценка роли поправочного члена в (36.15), содержащего N_{ij} , производится так же, как и в § 28. При этом оказывается, что, как правило, мы

можем ограничиться первым приближением метода перевала (т. е. учетом только первого члена в квадратных скобках в (36.15)), если z_{ij} велико по сравнению с длиной волны. Таким образом, в слоях, толщина которых велика по сравнению с длиной волны, практически всегда можно пользоваться представлением о мнимых источниках. В случаях тонких слоев (с толщиной, сравнимой с длиной волны или меньше ее) картина мнимых источников справедлива только для достаточно высоких номеров отражений.

36.3. Нормальные волны. Квазимоды. Интеграл по пути Γ_1 в (36.2), как легко видеть из рис. 36.2, эквивалентен сумме интегралов по контурам Γ_2 и Γ_3 . Можно показать, что интеграл по Γ_2 обращается тождественно в нуль.

Для этого удобно вместо угла ϑ ввести в качестве

Рис. 36.2. К вопросу о преобразовании пути интегрирования в комплексной плоскости

переменной интегрирования угол скольжения $\chi = \pi/2 - \vartheta$. При переходе от ϑ к χ путь Γ_2 преобразуется в контур, совпадающий с мнимой осью.

Если остановиться для определенности на случае $z > z_0$, то согласно (36.2а) интеграл по Γ_2 может быть записан в виде

$$\int_{-i\infty}^{+i\infty} \Phi H_0^{(1)}(kr \cos \chi) \cos \chi d\chi, \quad (36.18)$$

где

$$\Phi = \frac{ik}{2} \frac{(e^{-bz_0} + V_1 e^{bz_0})(e^{-b(1-z)} + V_2 e^{b(h-z)})}{e^{-bh}(1 - V_1 V_2 e^{2bh})}. \quad (36.19)$$

Интеграл (36.18) равен тождественно нулю, так как функция $\Phi(\chi)$ является нечетной. Чтобы убедиться в этом, заметим, что во всех случаях, когда нам известны аналитические выражения для V_1 и V_2 , оказывается справедливым соотношение *

$$V_1(-\chi) = 1/V_1(\chi), \quad V_2(-\chi) = 1/V_2(\chi). \quad (36.20)$$

В простейшем случае отражения звуковой волны от границы раздела двух однородных сред это сразу следует из формулы (2.17), если заменить там θ на χ . При изменении знака χ величина $b = ik \sin \chi$ также меняет знак. Учитывая это, а также (36.20), мы из (36.19) получаем без труда $\Phi(-\chi) = \Phi(\chi)$, что и требовалось доказать.

Таким образом, нам остается вычислить интеграл по пути Γ_3 . Оттянем путь Γ_3 в положительно-мнимую бесконечность, так что он перейдет в бесконечно удаленный путь Γ_4 (рис. 36.2).

Можно показать, что интеграл по пути Γ_4 равен нулю. В результате путь интегрирования «повисает» на особых точках подынтегрального выражения, которые приходится обходить при деформировании пути. В качестве таковых прежде всего надо учитывать полюсы $\theta_1, \theta_2, \dots (P_1, P_2, \dots)$ на рис. 36.2), местоположение которых определяется уравнением

$$1 - V_1 V_2 e^{2bh} = 0. \quad (36.21)$$

Сумма вычетов в полюсах

$$\psi = 2\pi i \sum_l \operatorname{Res} [\Phi(\theta_l) H_0^{(1)}(kr \sin \theta_l) \sin \theta_l], \quad (36.22)$$

где l означает номер полюса и дает нам суммарное поле всех нормальных волн. Это так называемый дискретный спектр поля. Кроме того, в качестве особых точек могут быть точки ветвления ввиду неоднозначности $\Phi(\theta)$. Тогда от них необходимо провести разрезы, и к (36.2) добавятся интегралы по берегам разрезов. Это так называемый сплошной спектр задачи или боковые волны. На рис. 36.2 изображены две точки ветвления A_1 и A_2 . Этот случай будет иметь место, если слой ограничен жидкими однородными полупространствами с волновыми числами k_1 и k_2 . При этом A_1 и A_2 расположены в точках $\theta_{1,2} = \arcsin(k_{1,2}/k)$. Аналогичная ситуация будет иметь место, если полупространства жидкие слоисто-неоднородные, но $\lim_{z \rightarrow \pm\infty} k(z) = k_{1,2}$.

В случае упругих полупространств будем иметь 4 точки ветвления $\theta_{1,2} = \arcsin(k_{1,2}/k)$ и $\theta_{3,4} = \arcsin(k_{3,4}/k)$. В этом параграфе мы не будем рассматривать боковые волны (подробный анализ боковой волны в частном случае см. в § 37).

Выражение (36.22) для нормальных волн можно детализировать, если предположить, что имеются полюсы лишь первого порядка и ни один из них не лежит слишком близко к точкам ветвления (критерий близости в конкретном случае см. в § 37.4).

Учитывая, что при этом для l -го полюса

$$\operatorname{Res} \left(\frac{1}{1 - V_1 V_2 e^{2bh}} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial \theta} V_1 V_2 e^{2bh} \right)^{-1}_{\theta=l}$$

и, кроме того, что с учетом (36.21), имеем

$$[e^{-b(h-z)} + V_2 e^{b(h-z)}] e^{bh} = (e^{-bz} + V_1 e^{bz})/V_1,$$

* В [10] это свойство доказано для слоистых сред весьма общего вида.

получаем

$$\psi = \pi k \sum_l \left[\frac{(e^{-bz_0} + V_1 e^{bz})(e^{-bz} + V_1 e^{bz})}{V_1 \frac{\partial}{\partial \theta} (V_1 V_2 e^{2bh})} \right]_{\theta_l} H_0^{(1)}(kr \sin \theta_l) \sin \theta_l. \quad (36.23)$$

Это и есть формула для поля нормальных волн в общем виде. Она не изменяется при замене z_0 на z и обратно, следовательно, справедлива при всех $0 \leq z \leq h$. Ее, конечно, можно было бы записать в виде, где вместо V_1 входило бы V_2 . Дальнейшее исследование выражения (36.23) в общем виде возможно в случае толстых слоев [10].

Заметим, что представление поля в виде суммы нормальных волн (выражение (36.23)) плюс сплошной спектр оказывается возможным даже в случаях, когда отдельно взятая нормальная волна казалось бы не имеет смысла. Возьмем для примера случай, подробно проанализированный в следующем параграфе — распространение звука в слое жидкости, лежащем на жидком же полупространстве, и предположим, что скорость звука c_1 в полупространстве меньше, чем скорость звука в слое. Нормальные волны в слое будут затухать из-за утечки энергии в полупространство, в силу чего горизонтальное волновое число будет комплексным: $\xi = \xi_0(1 + i\alpha)$ ($\alpha > 0$ из условия конечности поля при $r \rightarrow \infty$, предполагаем, кроме того, что $\alpha \ll 1$). Такая нормальная волна будет иметь зависимость от z вида: $\exp ik_{1z} z$, $k_{1z} = \sqrt{k_1^2 - \xi^2} \approx \sqrt{k_1^2 - \xi_0^2 - 2i\alpha\xi_0}$, где $k_1 = \omega/c_1$ для простоты предполагаем вещественным. Нетрудно видеть, что в зависимости от знака корня k_{1z} будет лежать в четвертом или втором квадранте. Чтобы удовлетворить принципу излучения, мы должны выбрать вариант $\operatorname{Re} k_{1z} > 0$ (четвертый квадрант), что означает, что $\operatorname{Im} k_{1z} < 0$ и поле будет неограниченно возрастать при $z \rightarrow \infty$. Мы снова здесь столкнулись с рассмотренными в § 7 случаем вытекающих волн. Так как нормальные волны также называют «модами», то такие «незаконные» нормальные волны называют «квазимодами». Использование квазимод в задаче о поле сосредоточенного источника оказывается вполне законно, что показано, в частности, в работах В. М. Куртепова [52, 53] (в приложении к волнам в тонкой пластинке) и А. Карбовиака [179] (в приложении к волнам в волноводе со стенками конечной толщины). Хорошую дискуссию о применении квазимод см. также в [180]. Поскольку для квазимод $\operatorname{Im} k_{1z} < 0$, соответствующие им полюсы лежат на нижнем листе поверхности Римана. Они «захватываются» при вычислении интеграла по берегам разреза, идущего из точки ветвления, когда путь интегрирования при вычислении этого интеграла деформируется в путь быстрейшего спуска.

Некоторые общие свойства нормальных волн рассмотрены в монографиях И. Толстого и К. Клея [94] и в работе И. Толстого [247].

36.4. Другой способ получения дисперсионного уравнения для нормальных волн. Уравнение (36.21) для полюсов, называемое также дисперсионным уравнением для нормальных волн, имеет весьма важное значение. Поэтому мы получим его еще другим способом, взяв для определенности акустический случай. Звуковое давление во всех точках слоя (исключая источник) должно удовлетворять волновому уравнению

$$\Delta p + k^2 p = 0. \quad (36.24)$$

Учитывая цилиндрическую симметрию задачи, мы можем искать решение в виде $p = Z(z) R(r)$, после чего получаем обычным способом $R(r) = H_0^{(1)}(\xi r)$ и уравнение для $Z(z)$

$$Z'' + (k^2 - \xi^2)Z = 0, \quad (36.25)$$

где ξ — параметр разделения.

Последнему уравнению удовлетворяет функция

$$Z(z) = A e^{iaz} + B e^{-iaz}, \quad a = \sqrt{k^2 - \xi^2}. \quad (36.26)$$

Кроме уравнения (36.25), функция $Z(z)$ должна удовлетворять также определенным условиям на границах слоя $z = 0, h$, откуда получим допустимые значения $\xi = \xi_1$. Так как безразлично, на каких расстояниях r рассматривать эти условия, то мы рассмотрим участки слоя на весьма большом удалении от источника ($r \rightarrow \infty$). Тогда, полагая $r = x$ и заменяя $H_0^{(1)}(\xi x)$ ее асимптотическим представлением, получаем решение в виде

$$p = \frac{\text{const}}{\sqrt{x}} (A e^{i(\xi x + az)} + B e^{i(\xi x - az)}).$$

При больших x небольшими изменениями x можно пренебречь и относя const/ \sqrt{x} в постоянные A и B , мы получаем

$$\begin{aligned} p &= p_+ + p_-, \\ p_+ &= A e^{i(\xi x + az)}, \quad p_- = B e^{i(\xi x - az)}. \end{aligned} \quad (36.27)$$

Такой вид решения на больших расстояниях можно было предположить с самого начала. Действительно, если пренебречь кривизной фронта волны

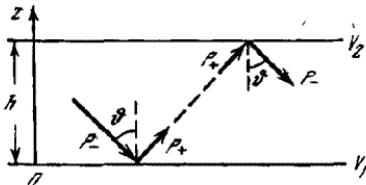


Рис. 36.3. К вопросу о приближенном определении характеристик нормальных волн

и учесть наличие отражений на границе слоя, то мы не можем получить ничего другого, кроме суперпозиции двух плоских волн (36.27), из которых p_+ распространяется в сторону положительных, а p_- — в сторону отрицательных z . Направление нормалей к фронтам этих волн изображено на рис. 36.3 стрелками.

Потребуем теперь, чтобы сумма двух волн (36.27) удовлетворяла условиям на границе, выраженным через коэффициенты отражения V_1 и V_2 . Рассмотрим рис. 36.3. На нижней границе слоя p_- является падающей волной, а p_+ отраженной волной. Поэтому должно выполняться равенство $(p_+/p_-)_{z=0} = V_1$. Подставляя сюда p_+ и p_- из (36.27), получаем

$$A/B = V_1. \quad (36.28)$$

На верхней границе p_+ является падающей волной, а p_- — отраженной. Поэтому должно выполняться равенство $(p_-/p_+)_{z=h} = V_2$ или, учитя (36.27),

$$(B/A) e^{2iah} = V_2. \quad (36.29)$$

Перемножая (36.28) и (36.29), получаем

$$V_1 V_2 e^{2iah} = 1, \quad (36.30)$$

что совпадает с (36.24), если учесть обозначение $b = ia$. Таким образом, каждый член суммы (36.23) по отдельности удовлетворяет как волновому уравнению, так и граничным условиям и представляет собой отдельную нормальную волну.

36.5. Об условности выбора границ слоя. Все полученные выше результаты справедливы в том числе и тогда, когда свойства сред, ограничивающих слой, изменяются с изменением z плавно. В этом случае выбор границ $z = 0, h$ может оказаться до некоторой степени условным. В частности, мы всегда можем сблизить их (и в пределе даже положить $h = 0$), причислив часть однородной среды к нижнему или верхнему полупространствам. Можно, наоборот, раздвинуть их, если за пределами первоначально выбранных границ неоднородность среды выражена слабо. Можно убедиться,

что при этом ни уравнение (36.21), ни сумма (36.23) не изменяются. Допустим, например, что толщина слоя уменьшена с h до $h' = h - \Delta$ за счет выбора нового местоположения верхней границы слоя. При этом фаза коэффициента отражения V_2 , очевидно, увеличивается на величину, равную набегу фазы при прямом и обратном проходе волной толщины Δ . Новый коэффициент отражения будет $V'_2 = V_2 e^{2i\Delta}$. В результате имеем $V'_2 e^{2ih'} = V_2 e^{2ih}$ и уравнение (36.1), так же как и выражение (36.23), не изменяется.

§ 37. Звуковые волны в двухслойной жидкости

Применим развитую выше общую теорию к задаче о распространении звука в жидком слое, лежащем на жидком же полупространстве. При $z > h$ (рис. 37.1) предполагается вакуум или достаточно разреженная среда*.

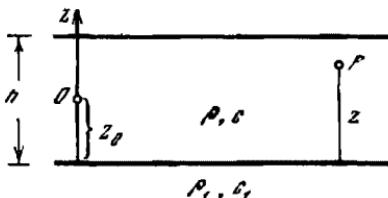


Рис. 37.1. К теории распространения волн в слое

При $z < h$ среда является двухслойной (толщина нижнего слоя бесконечна велика). Развиваемая ниже теория применяется главным образом к распространению звука в море, если его дно и поверхность считать плоскими, а грунт — жидким и однородным.

37.1. Нормальные волны. В рассматриваемом случае имеем (см. (2.17)) $V_2 = -1$,

$$V_1 = \frac{m \cos \theta - \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}}{m \cos \theta + \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}}, \quad m = \rho_1 / \rho, \quad n = c / c_1. \quad (37.1)$$

Введя обозначения

$$v^2 = 1 - n^2, \quad bh = ix, \quad x \equiv kh \cos \theta, \quad k = \omega / c, \quad (37.2)$$

дисперсионное уравнение для нормальных волн (36.21) запишем в виде

$$\operatorname{ctg} x = \frac{i}{mx} \sqrt{x^2 - (khv)^2}. \quad (37.3)$$

Знак входящего сюда корня мы для определенности будем выбирать таким, что при

$$v \rightarrow 0, \sqrt{x^2 - (khv)^2} \rightarrow x.$$

Рассмотрим детальнее решения уравнения (37.3) в функции параметра khv . Последний мы вначале будем считать положительным, что означает $n < 1$ или $c_1 > c$. Кроме того, мы предположим, что $m > 1$ ($\rho_1 > \rho$).

При $khv = 0$, т. е. при нулевой частоте или при $n = 1$, уравнение принимает вид

$$\operatorname{ctg} x = i/m. \quad (37.4)$$

Решение последнего будем искать в виде: $x = (2l + 1)\pi/2 + ix'', l = 0, 1, 2, \dots$. При этом для x'' получаем уравнение $\operatorname{th} x'' = -1/m$, откуда $x'' < 0$. Таким образом, уравнение (37.4) имеет бесконечное число корней, расположенных вдоль прямой, параллельной вещественной оси, эквидистантно через π . Однако все они лежат на нижней поверхности Римана. Действительно, при этом $\operatorname{Im} \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta} = (1/kh) \operatorname{Im} \sqrt{x^2 - (khv)^2} = (1/kh) \operatorname{Im} x = x''/kh < 0$.

* Случай, когда граница $z = h$ является абсолютно неподатливой, рассмотрен в работе W. M. Wang, J. Acoust. Soc. Amer., 1971, 49, № 3 (2).

Будем теперь увеличивать значение параметра khv . При $0 \leq khv < \pi/2$ уравнению (37.3) будут удовлетворять лишь комплексные значения x , лежащие на нижнем листе поверхности Римана, симметрично относительно начала координат. При этом при увеличивающемся значении khv каждая пара симметричных относительно вещественной оси полюсов перемещается так, что полюсы приближаются на нижнем листе к действительной оси и сливаются в некоторой ее точке вне отрезка $-n \leq \sin\theta \leq n$ [27] *. При дальнейшем повышении значения khv полюсы расходятся (оставаясь на нижнем листе), причем один из пары приближается к точке ветвления $\sin\theta = n$, а другой удаляется от нее. Наконец, при $khv = \pi/2$ (критическая частота) полюс попадает в точку ветвления и при дальнейшем увеличении khv снова удаляется от нее, но уже по верхнему листу. Таким образом, при $khv > \pi/2$ мы будем иметь одну незатухающую нормальную волну. При $khv \rightarrow \infty$ этот корень уравнения (37.3) стремится к величине $x = l$. На рис. 37.2 нижняя кривая ($l = 1$) дает зависимость величины корня от параметра khv при $m = 2$. При увеличении khv в интервале $\pi/2 < khv < 3\pi/2$ новый корень приближается к точке ветвления и выходит на верхний лист поверхности Римана при $khv = 3\pi/2$. Этот второй корень при $khv \rightarrow \infty$ стремится к значению $x = 2\pi$ (см. $l = 2$ на рис. 37.2). При дальнейшем увеличении khv уравнению (37.3) будет удовлетворять все большее количество вещественных корней.

Каждому корню уравнения, лежащему на верхнем листе, соответствует отдельная нормальная волна, получающаяся как вычет в соответствующем полюсе. Удобный способ численного решения уравнения (37.3) см. в [94, § 4.3; 218].

Рассмотрим суммарное поле нормальных волн (36.23). Уравнение полюсов (36.21), учитывая, что в рассматриваемом случае $V_2 = -1$, запишем в виде $V_1 = -\exp(-2bh)$, или

$$V_1 = -\exp(-2ix), \quad (37.5)$$

после чего в (36.23):

$$\left[\frac{1}{V_1} (e^{-bz_0} + V_1 e^{bz_0}) (e^{-bx} + V_1 e^{bx}) \right]_{\theta_l} = -[e^{b(h-z_0)} - e^{-b(h-z_0)}]_{\theta_l} \times \\ \times [e^{b(h-x)} - e^{-b(h-x)}]_{\theta_l} = 4 \sin[x_l(1 - z_0/h)] \sin[x_l(1 - z/h)]. \quad (37.6)$$

Далее, учитывая, что согласно (37.2) $[\partial/\partial\theta = -kh \sin\theta \partial/\partial x]$, находим при $\theta = \theta_l$, учитывая также (37.5),

$$\frac{\partial}{\partial\theta} (V_1 V_2 e^{2bh}) = kh \sin\theta \frac{\partial}{\partial x} (V_1 e^{2ix}) = kh \sin\theta \left(2i V_1 e^{2ix} + \frac{\partial V_1}{\partial x} e^{2ix} \right) = \\ = -kh \sin\theta \left(2i + \frac{1}{V_1} \frac{\partial V_1}{\partial x} \right). \quad (37.7)$$

Замена θ на x в (37.1) дает

$$V_1 = [mx - \sqrt{x^2 - (khv)^2}] [mx + \sqrt{x^2 + (khv)^2}]^{-1}.$$

* Наиболее полное исследование полюсов для случая двухслойной среды читатель может найти в работах Г. И. Макарова и В. В. Новикова «О собственных значениях нормальных волн в плоском волноводном канале» и «Электромагнитное поле в плоском тонком волноводе» в сб. «Проблемы дифракции и распространения волн», вып. XI. Изд. ЛГУ, 1972, стр. 3, 33.

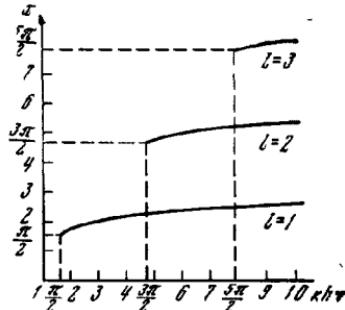


Рис. 37.2. Корни дисперсионного уравнения в зависимости от толщины слоя и частоты

После этого находим, используя также (37.3),

$$\left(\frac{1}{V_1} \frac{\partial V_1}{\partial x} \right)_{\theta_l} = - \frac{2i}{m^2 x_l^3} (khv)^2 \operatorname{tg} x_l \sin^2 x_l.$$

Теперь выражение (36.23) запишется

$$\Psi = \frac{2\pi i}{h} \sum_l \frac{\sin [x_l (1 - z/h)] \sin [x_l (1 - z/h)] H_0^{(1)}(kr \sin \theta_l)}{1 - (khv/mx_l)^2 (1/x_l) \operatorname{tg} x_l \sin^2 x_l}, \quad (37.8)$$

$$k \sin \theta_l = \frac{1}{h} \sqrt{(kh)^2 - x_l^2}.$$

Здесь x_l — корни уравнения (37.3). При этом мы предполагали, что ни один из полюсов не лежит слишком близко к точке ветвления. Обратный случай см. в разделе 37.4. Иногда (например, у К. Пекериса в [213]) используется другая форма знаменателя под суммой (37.8), получающаяся из нашей, если в соответствии с (37.3) заменить

$$(khv/mx_l)^2 = \operatorname{ctg}^2 x + 1/m^2. \quad (37.8')$$

Выражение (37.8) не меняется при пермене местами z и z_0 и, следовательно, справедливо при любых z в пределах $0 \leq z \leq h$. В предельном случае неподатливого дна ($m \rightarrow \infty$) второй член в знаменателе в (37.8) обращается в нуль, а уравнение (37.3) записывается $\cos x = 0$. В результате выражения (37.8) и (35.21) будут тождественны.

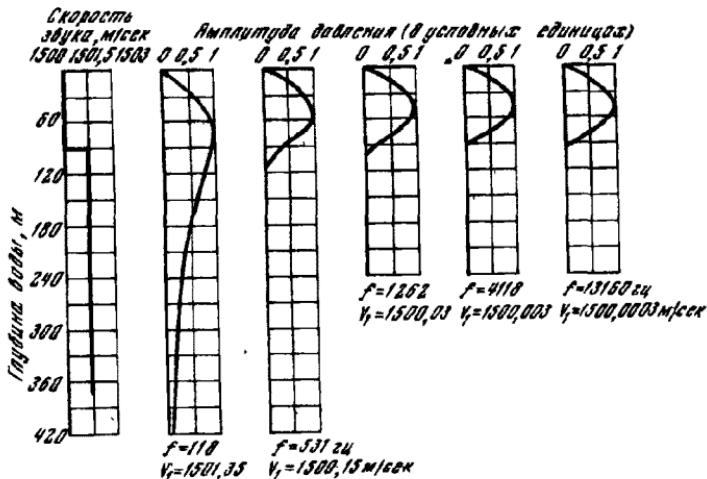


Рис. 37.3. Зависимость амплитуды первой нормальной волны от координаты z при различных частотах; V_1 — фазовая скорость распространения нормальной волны

Каждая нормальная волна в выражении (37.8) характеризуется определенным распределением амплитуды по вертикали (в направлении z), а также определенной фазовой скоростью распространения вдоль слоя и затуханием. На рис. 37.3 изображено (взято из [213]) распределение амплитуды первой нормальной волны по вертикали для случая $c = 1500 \text{ м/сек}$, $c_1 = 1501,5 \text{ м/сек}$, $\rho_1 = 2\rho$, $h = 90 \text{ м}$ для различных частот. Амплитуда волны спадает при углублении в нижнюю среду по экспоненциальному закону, причем чем выше частота, тем быстрее спадание. На высоких частотах практически вся энергия волны заключена в слое.

Учитывая, что величина $k \sin \theta_l = (1/h) \sqrt{(kh)^2 - x_l^2}$, входящая в аргумент функции Ханкеля, играет роль комплексного горизонтального волнового числа, получаем для фазовой скорости волн вдоль слоя V_1 и

коэффициента поглощения β_1

$$V_1 = \frac{k h c}{\operatorname{Re} \sqrt{(k h)^2 - x_1^2}}, \quad \beta_1 = \frac{\operatorname{Im} \sqrt{(k h)^2 - x_1^2}}{h}. \quad (37.9)$$

На рис. 37.3 указана фазовая скорость первой нормальной волны V_1 для различных частот. На самой низкой из приведенных частот V_1 близка к скорости распространения звука в нижней среде. При увеличении частоты скорость уменьшается и стремится к скорости распространения звука в слое.

Из формул (37.9) видно, что нормальная волна может быть незатухающей только при x_1 вещественном, причем должно выполняться также условие $x_1 < kh$. Выше мы видели, что наименьшее kh , при котором имеет место вещественный корень, равно $kh = \pi/2v$. Толщина слоя при этом равна

$$h = \pi/2kv = \lambda/4\sqrt{1 - n^2}. \quad (37.10)$$

При заданном h соответственная частота волны (критическая частота) будет

$$f_k = c/4h\sqrt{1 - n^2}. \quad (37.11)$$

Волны, частоты которых ниже f_k , не могут распространяться вдоль слоя без затухания. Для случая, изображенного на рис. 37.3, критическая частота составляет 93,3 гц.

Фазовая скорость волны, частота которой равна f_k , получится из (37.8) при подстановке в V_1 значения $x_1 = \pi/2$, $kh = \pi/2v$. В результате будем иметь $V_1 = c/n = c_1$. Таким образом, фазовая скорость первой нормальной волны в момент ее зарождения (при $f = f_k$) равна скорости распространения волн в грунте.

Далее из соотношений $x_1 = kh \cos \vartheta = \pi/2$, $khv = \pi/2$, справедливых для первой нормальной волны, находим $\cos \vartheta = \pi/2kh = v = \sqrt{1 - n^2}$, $\sin \vartheta = n$.

Выше было показано, что ϑ — есть угол падения на границу каждой из двух плоских волн, суперпозиция которых дает нормальную волну. Таким образом, первая незатухающая нормальная волна возникает тогда, когда угол падения соответствующих плоских волн становится равным углу полного внутреннего отражения. Этот результат имеет простой физический смысл. Отсутствие затухания волны, очевидно, обусловлено наличием полного внутреннего отражения на границе.

При дальнейшем повышении частоты волны корень x_1 , как мы выше видели, остается вещественным и стремится к величине $x_1 = \pi$. При этом, согласно (37.9), фазовая скорость волны V_1 стремится к c — скорости распространения звука в жидкости, заполняющей слой.

При $khv = 3\pi/2$ появляется второй вещественный корень $x_2 = 3\pi/2$, что означает появление второй незатухающей нормальной волны. Легко показать, что фазовая скорость этой волны при $khv = 3\pi/2$ снова равна c_1 , а угол наклона удовлетворяет равенству $\sin \vartheta = n$. При повышении частоты фазовая скорость, как и в случае первой нормальной волны, стремится к c .

При дальнейшем увеличении khv будут появляться незатухающие нормальные волны более высоких порядков. При заданном khv их число равно максимальному нечетному числу, равному или меньшему $2khv/\pi$.

Выражение (37.10) представляет собой весьма важное соотношение между толщиной слоя h , показателем преломления n и граничной длиной волны λ . Так, зная h и λ , можно найти n , а следовательно, и скорость звука в нижней среде.

Все изложенное выше относилось к случаю $n < 1$ ($c_1 < c$). В обратном случае, когда $n > 1$, физическая картина распространения будет несколько иной. В частности, незатухающие нормальные волны будут отсутствовать

из-за отсутствия полного внутреннего отражения. Все корни уравнения (37.3) будут иметь отличную от нуля мнимую часть. Правда, в определенных случаях (например, при весьма большом n) коэффициент отражения от нижней границы может быть весьма близок к единице и тогда затухание нормальных волн будет незначительным. При большом n даже незначительные изменения частоты будут приводить к существенным изменениям величины khv , определяющей корни уравнения (37.3). Это приводит к тому, что амплитуда первой нормальной волны на некотором расстоянии от излучателя с увеличением частоты будет резко возрастать. В результате мы получаем явление, сходное по своему характеру с «зарождением» нормальной волны в случае $n < 1$, которое там было связано с полным внутренним отражением.

Анализ нормальных волн, распространяющихся в жидким слое, лежащем на жидким же полуправом пространстве с поглощением, а также сравнение теории с опытными данными для дисперсии волн, полученными при исследовании распространения звука в Беринговом море, читатель может найти в работе Букера [124]. В ней учитывается также зависимость скорости звука в воде от глубины.

37.2. Толстый слой с поглощающей границей. Рассмотрим снова случай $n > 1$ ($c_f < c$). Нормальные волны будут затухающими из-за утечки энергии в нижнее полуправом пространство. Предполагаем, что $kh \gg 1$. В этом случае число нормальных волн будет велико. На достаточно больших расстояниях можно учитывать лишь наименее затухающие волны, имеющие наименьшие номера l , для которых нетрудно получить приближенное решение уравнения (37.3). Действительно, зашипим его в виде

$$\operatorname{tg} x = -imx [(kh)^2(n^2 - 1) + x^2]^{-1}. \quad (37.12)$$

Поскольку $kh \gg 1$, имеем в первом приближении $\operatorname{tg} x = 0$, $x = l\pi$. Подставляя это значение x в правую часть, получаем в следующем приближении *

$$x_l = \pi l - i \frac{\pi l}{kh} \frac{m}{\sqrt{n^2 - 1}} + 0 \left[\left(\frac{\pi l}{kh} \right)^2 \right]. \quad (37.13)$$

Используя (37.13) и (37.8), В. Ю. Завадский и В. Д. Крупин [35] вычислили значения для суммарного поля нормальных волн при $r \gg h\sqrt{n^2 - 1}/m$. На рис. 37.4 изображен один из результатов для случая $kh\sqrt{n^2 - 1}/m = 500$, $z = z_0 = 3h/4\pi$. По оси абсцисс отложен $\lg(r/r_0)$, где $r_0 = 10^{-3}k^2h^3 \cdot \sqrt{n^2 - 1}/m$, по оси ординат $10 \lg |\Psi/\Psi_0|$, где $\Psi_0 = \Psi(r_0)$. Пунктирная прямая соответствует закону $|\Psi/\Psi_0|^2 \sim 1/r^2$. На больших расстояниях, когда $\lg(r/r_0) > 2,5$, в волноводе остается первая, наименее затухающая волна, поле спадает с расстоянием по экспоненциальному закону. На «средних» расстояниях, когда $0,5 < \lg(r/r_0) < 2,0$, играет роль большое число нормальных волн, и поле имеет сложный интерференционный характер.

Полезно отметить, что если $|\Psi|^2$ усреднить по толщине слоя, то эта усредненная величина спадает на «средних» расстояниях по закону $|\Psi|^2 \sim r^{-2}$ [10].

37.3. Боковая волна. Функция $V_1(\theta)$, как видно из (37.1), двузначна, ввиду двузначности корня $\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}$. В этом случае комплексную плоскость θ полезно представить себе состоящей из двух листов: верхнего, на котором $\operatorname{Im} \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta} > 0$, и нижнего, где $\operatorname{Im} \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta} < 0$. Путь интегрирования Γ_1 в (36.7) лежит на верхнем листе. Мы проведем от

* Этот же результат можно получить (см. [10]), представляя при малых углах скольжение коэффициент отражения в виде $V = -\exp(-2px) + O(x^3)$, $p = m/\sqrt{n^2 - 1}$ и решая уравнение (36.21) при $V_2 = -1$. Этот подход может быть применен и для других видов границ, каждый раз, естественно, со своим значением p .

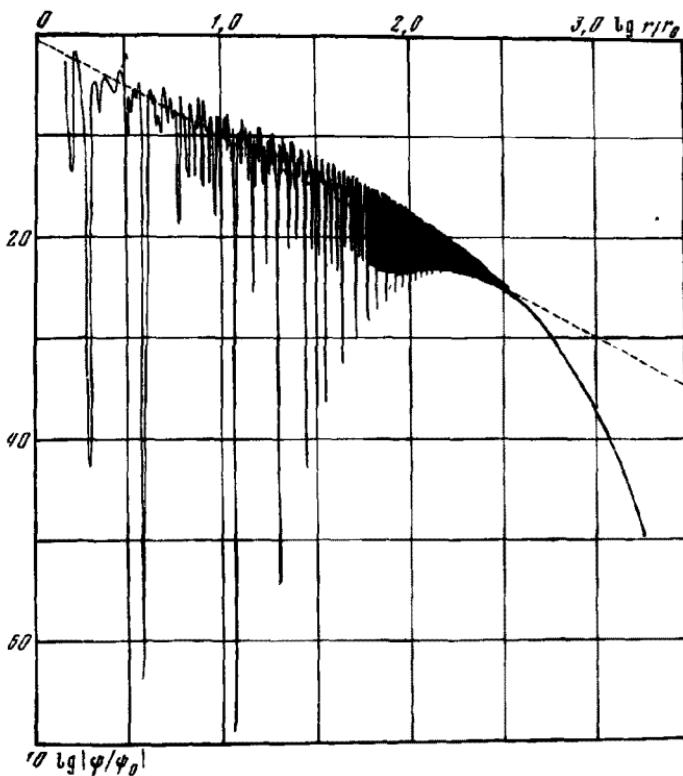


Рис. 37.4. Поле в слое для одного конкретного случая по [35]

точки ветвления $\vartheta = \delta \equiv \arcsin n$ разрез по линии

$$\begin{aligned} \sqrt{n^2 - \sin^2 \vartheta} &= x, \quad \operatorname{Im} x = 0, \\ x = 0, \quad \vartheta = \delta; \quad x = \infty, \quad \vartheta = i\infty \end{aligned} \tag{37.14}$$

и будем деформировать путь Γ_1 , нигде не переходя через разрез, т. е. все время оставаясь на верхнем листе. В результате, как уже указывалось в § 36.3, к сумме вычетов в полюсах (36.22) или соответственно (37.8) надо добавить поле «боковой волны», получающееся как интеграл по берегам разреза

$$\psi_6 = \int_{i\infty}^{\delta} \Phi(\vartheta) H_0^{(1)}(kr \sin \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta + \int_{\delta}^{i\infty} \Phi^+(\vartheta) H_0^{(1)}(kr \sin \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta, \tag{37.15}$$

где $\Phi(\vartheta)$ в соответствии с (36.19) и учетом, что $V_2 = -1$

$$\Phi(\vartheta) = ik \operatorname{sh} b(z-h)(e^{-bz_0} + V_1 e^{bz_0}) e^{bh} (1 + V_1 e^{2bh})^{-1}. \tag{37.16}$$

$\Phi^+(\vartheta)$ получается из $\Phi(\vartheta)$ переменой знака радикала $\sqrt{n^2 - \sin^2 \vartheta}$, причем в первом интеграле в (37.15) этот знак выбирается так, чтобы $\operatorname{Re} \sqrt{n^2 - \sin^2 \vartheta} > 0^*$.

* Действительно, в точке $\vartheta = 0$, лежащей по ту же сторону разреза, что и путь интегрирования, в первом интеграле в (37.15) имеем на верхнем листе $\operatorname{Re} \sqrt{n^2 - \sin^2 \vartheta} = \operatorname{Re} n > 0$.

Сменив направление интегрирования в первом интеграле в (37.15) на обратное, мы сможем объединить оба интеграла в один, ваятый от δ до $i\infty$, в котором вместо $\Phi(\vartheta)$ будет фигурировать $\Phi^+(\vartheta) - \Phi^-(\vartheta)$. В результате получаем, учитывая (37.16)

$$\psi_0 = -2ik \int_{\delta}^{i\infty} \frac{(V_1^+ - V_1) \sin b(h - z_0) \sin b(h - z) H_0^{(1)}(kr \sin \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta}{(e^{-bh} + V_1 e^{bh})(e^{-bh} + V_1^+ e^{bh})}. \quad (37.17)$$

Подставим сюда выражение для V_1 из (37.1). При этом

$$V_1^+ - V_1 = \frac{m \cos \vartheta + \sqrt{n^2 - \sin^2 \vartheta}}{m \cos \vartheta - \sqrt{n^2 - \sin^2 \vartheta}} - \frac{m \cos \vartheta - \sqrt{n^2 - \sin^2 \vartheta}}{m \cos \vartheta + \sqrt{n^2 - \sin^2 \vartheta}} = \frac{4m \cos \vartheta \sqrt{n^2 - \sin^2 \vartheta}}{m^2 \cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta - n^2}. \quad (37.18)$$

Аналогично преобразуется и знаменатель в подынтегральном выражении в (37.17).

В результате получаем

$$\psi_0 = 2ik \int_{\delta}^{i\infty} \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 \vartheta} \sin b(h - z_0) \sin b(h - z) H_0^{(1)}(kr \sin \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta}{m \cos \vartheta [\cosh^2 bh - (n^2 - \sin^2 \vartheta) \sinh^2 bh / m^2 \cos^2 \vartheta]}. \quad (37.19)$$

Здесь, предполагая $kr \gg 1$, мы можем воспользоваться асимптотическим представлением $H_0^{(1)}(kr \sin \vartheta)$. Далее, имея в своем распоряжении большой параметр kr , мы, казалось бы, могли без труда, пользуясь методом быстрейшего спуска (аналогичным изложенному в § 30.1), представить ψ_0 в виде ряда по степеням $1/kr$. Так оно и будет, кроме тех случаев, когда один из полюсов подынтегрального выражения в (37.19) совпадает с точкой $\vartheta = \delta$ или оказывается слишком близким к ней. Тогда обычный метод быстрейшего спуска не годится. Нетрудно убедиться, что полюс оказывается в точке $\vartheta = \delta$ каждый раз, когда частота совпадает с критической частотой одной из нормальных волн. Действительно, полюс подынтегрального выражения в (37.19) определяется равенством

$$m^2 \cos^2 \vartheta \cosh^2 bh = (n^2 - \sin^2 \vartheta) \sinh^2 bh. \quad (37.20)$$

Покажем, что на критической частоте это равенство удовлетворяется при $\vartheta = \delta = \arcsin n$. Как мы видели в § 37.1, критическая частота l -й нормальной волны определяется из условия (при $n < 1$)

$$khv = (2l + 1)\pi/2, \quad v = \sqrt{1 - n^2}. \quad (37.21)$$

Если, кроме того, положим $\sin \vartheta = n$, то $bh \equiv ikh \cos \vartheta = ikh v = (2l + 1)i\pi/2$, $\cosh bh = 0$ и уравнение (37.20) удовлетворяется тождественно. Проведем анализ интеграла (37.19), учитывая возможность совпадения частоты с одной из критических частот *.

Заметим, что величина x , определяемая формулой (37.14), принимает на нашем пути интегрирования все вещественные значения от 0 до ∞ .

В дальнейшем мы увидим, что наибольший вклад в интеграл дают малые x . Поэтому разложим квадратную скобку в знаменателе под интегралом в (37.19) в ряд по степеням x , ограничившись x^2 :

$$[] = \cos^2 khv + (x^2/v^2) \left(\frac{\sin^2 khv}{m^2} - khv \sin khv \cos khv \right).$$

В результате (37.19) примет вид

$$\psi_0 = \frac{2ikv}{m} \int_{\delta}^{i\infty} \frac{x \sin b(h - z_0) \sin b(h - z) H_0^{(1)}(kr \sin \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta}{v^2 \cos^2 khv + x^2 \left(\frac{1}{m^2} \sin^2 khv - khv \sin khv \cos khv \right)}. \quad (37.22)$$

* См. по этому вопросу работу Ю. Л. Газарина [27].

Для дальнейшего нам удобно путь интегрирования провести по лучу $\arg x = -\pi/4$. Переход от луча $\arg x = 0$ не встречает затруднений. Действительно, в случае малых $\cos khv$ нули знаменателя под интегралом в (37.22) лежат приблизительно в точках $x = \pm im^2 v^2 \operatorname{ctg} khv$ и не мешают переходу пути интегрирования с одного луча на другой. При не малых $\cos khv$, как будет видно дальше, член с x^2 в знаменателе под интегралом в (37.22) вообще можно не учитывать. Далее, в (37.22) воспользуемся асимптотическим разложением функции Ханкеля. Учитывая, что при этом получается экспонента $\exp(ikr \sin \vartheta)$, введем вместо ϑ новую переменную интегрирования s согласно соотношению

$$\sin \vartheta = n + is^2/kr, \quad (37.23)$$

причем с точностью до s^2 :

$$d\vartheta = 2isds/kr \cos \vartheta \approx 2isds/krv, \quad x = \sqrt{2n/kr} \exp(-i\pi/4)s. \quad (37.24)$$

Теперь в числителе под интегралом в (37.22) можно положить всюду $\sin \vartheta = n$, $\cos \vartheta = \sqrt{1 - n^2} = v$, $b = ik \cos \vartheta = ikv$ (что соответствует $s = 0$) за исключением экспоненты, получающейся в асимптотическом представлении функции Ханкеля. В результате выражение для боковой волны принимает вид

$$\psi_0 = \frac{2in}{kmr^2} \sin kv(h - z_0) \sin kv(h - z) e^{iknr} I, \quad (37.25)$$

где

$$I = -\frac{4iw^2}{\sqrt{\pi v^2 \cos^2 khv}} \int_0^\infty \frac{e^{-s^2} s^2 ds}{s^2 + iw^2}, \quad (37.26)$$

$$w^2 \equiv \frac{kr}{2n} \frac{v^2 m^2}{\operatorname{tg}^2 khv - khv m^2 \operatorname{tg} khv}. \quad (37.27)$$

Прибавляя и вычитая iw^2 в числителе под интегралом в (37.26), мы получаем, пользуясь значением табличного интеграла и тождеством (27.22) при $\rho = 1$,

Таблица 3. Значения $K(w^2)$

| w^2 | 0,00 | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,05 | 0,06 | 0,07 |
|--------|--------|---------|---------|--------|--------|--------|--------|--------|
| Re K | 0,0000 | 0,00214 | 0,00525 | 0,0098 | 0,0143 | 0,0194 | 0,0245 | 0,0300 |
| Im K | 0,0000 | 0,0175 | 0,0330 | 0,0475 | 0,0609 | 0,0737 | 0,0860 | 0,0975 |

| w^2 | 0,08 | 0,09 | 0,10 | 0,20 | 0,30 | 0,40 | 0,50 | 0,60 | 0,70 | 0,80 |
|--------|--------|--------|--------|------|------|------|------|------|------|------|
| Re K | 0,0357 | 0,0411 | 0,0470 | 0,11 | 0,16 | 0,22 | 0,27 | 0,32 | 0,36 | 0,39 |
| Im K | 0,109 | 0,120 | 0,131 | 0,20 | 0,26 | 0,30 | 0,32 | 0,34 | 0,35 | 0,36 |

| w^2 | 0,90 | 1,00 | 1,50 | 2,00 | 2,50 | 3,00 | 4,00 | 5,00 | 6,00 | 7,00 | 8,00 |
|--------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Re K | 0,43 | 0,46 | 0,60 | 0,68 | 0,76 | 0,79 | 0,84 | 0,89 | 0,92 | 0,94 | 0,95 |
| Im K | 0,37 | 0,38 | 0,38 | 0,36 | 0,34 | 0,31 | 0,27 | 0,24 | 0,21 | 0,19 | 0,17 |

$$s_p = \exp(-i\pi/4) w,$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-s^2} s^2 ds}{s^2 + iw} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - iw^2 \int_0^\infty \frac{e^{-s^2} ds}{s^2 + iw^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{w^2 \sqrt{\pi}}{s_p} e^{-\frac{s^2}{p}} \int_{is_p}^\infty e^{-x^2} dx = \\ = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - w \sqrt{\pi} e^{i(w^2 - \pi/4)} Q(e^{i\pi/4} w).$$

Интеграл вероятности $Q(u)$ определяется формулой (27.19). В результате имеем

$$I = -\frac{1}{v^3 \cos^2 khv} K(w), \quad (37.28)$$

где

$$K(w) = 2iw^2 [1 - 2we^{i(w^2 + \pi/4)} Q(e^{i\pi/4} w)]. \quad (37.29)$$

При больших w , что согласно (37.27) реализуется при не очень малых $\operatorname{tg} khv$ (при частотах не очень близких к критическим), имеем, учитывая асимптотику (27.25)

$$K = 1 - \frac{15}{4w^4} + \dots + i \left(\frac{3}{2w^2} - \frac{105}{8w^6} + \dots \right). \quad (37.30)$$

При ограничении здесь первым членом имеем согласно (37.28)

$$I = -1/v^2 \cos^2 khv. \quad (37.31)$$

Это же значение мы можем получить непосредственно из (37.26), пренебрегая в знаменателе под интегралом членом с s^2 . Подстановка (37.31) в (37.25) дает выражение для боковой волны ψ_b , спадающее с расстоянием как $1/r^2$. Это, кстати, всегда будет иметь место при $n > 1$, так как в этом случае $|\cos khv|$ не мало

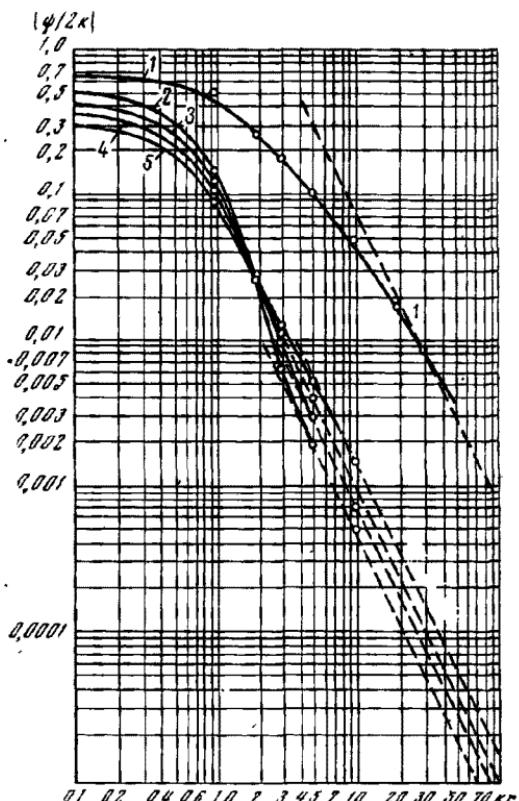


Рис. 37.5. Спадание звукового поля с расстоянием для нескольких конкретных случаев

Таблица 4

| | e/e_1 | p/p_1 | kh | z_0/h | z/h |
|---|---------|---------|--------|---------|-------|
| 1 | 0,6 | 0,50 | 1,7952 | 0,70 | 0,4 |
| 2 | 2,0 | 0,50 | 0,84 | 0,75 | 0,0 |
| 3 | 2,0 | 0,75 | 0,84 | 0,75 | 0,0 |
| 4 | 2,0 | 1,00 | 0,84 | 0,75 | 0,0 |
| 5 | 2,0 | 1,50 | 0,84 | 0,75 | 0,0 |

и, следовательно, w^2 велико.

При малых w из (37.29) нетрудно получить разложение

$$K \approx \sqrt{2\pi} w^3 (1 + w^2) - 4w^4 + \\ + i [2w^2 - \sqrt{2\pi} w^3 (1 - w^2)]. \quad (37.32)$$

При частотах, весьма близких к критическим ($\cos khv$ очень мал), таких, что $w^2 \approx (kr/2n) v^2 m^2 \times \cos^2 khv \ll 1$, имеем из (37.32) $K \approx 2iw^2$ или, учитывая значение w^2 , получаем из (37.28)

$$I = -ikr m^2/n. \quad (37.33)$$

Из (37.25) мы видим, что амплитуда боковой волны спадает в этом случае с расстоянием по закону $\psi_b \sim 1/r$.

В табл. 3 приведены значения $K(w^2)$.

Выше мы проводили анализ поля на больших расстояниях ($kr \gg 1$), когда удавалось применить те или иные асимптотические методы. На умеренных и малых расстояниях поле можно вычислять прямым численным интегрированием выражений (36.2) (при $V_2 = -1$ и V_1 , даваемом выражением (37.1)). На рис. 37.5 приведены результаты таких расчетов (взятые из [213]) для параметров задачи согласно табл. 4. Кружочки на рисунке означают значение величины $|\psi/2k|$, полученное численным интегрированием. Сплошные линии проведены по этим точкам. Пунктирные прямые соответствуют полю боковой волны, полученному по формуле (37.25) при I , даваемом формулой (37.31). Как мы видим, уже при kr порядка нескольких единиц, при выбранных значениях kh , поле практически целиком определяется полем боковой волны, спадающим по закону $1/r^2$.

§ 38. Распространение импульса в слое с абсолютно отражающими границами

Распространение звукового сигнала ограниченной длительности имеет много дополнительных интересных особенностей по сравнению с распространением монохроматической волны. К рассмотрению этих особенностей мы сейчас и перейдем.

38.1. Задание импульса. Пусть зависимость звукового давления от времени в изучаемом импульсе дается функцией $f(t)$. Это означает, что на достаточно малом расстоянии R от излучателя звуковое давление (или звуковой потенциал) равно

$$\Psi(R, t) = \frac{1}{R} f(t - R/c), \quad R = \sqrt{r^2 + z^2}. \quad (38.1)$$

В дальнейшем через $\Psi(r, z, t)$ будем обозначать текущее во времени звуковое давление в импульсе, в отличие от употреблявшегося ранее звукового давления монохроматического излучателя $\psi(r, z)$ $\exp(-i\omega t)$.

Функцию $f(t)$ представим в виде разложения в интеграл Фурье:

$$f(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} g(\omega) d\omega, \quad (38.2)$$

где

$$g(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\omega t} dt. \quad (38.3)$$

Поскольку $f(t)$ является вещественной функцией, то должно выполняться равенство

$$g(-\omega) = g^*(\omega). \quad (38.4)$$

Для примера рассмотрим два конкретных вида импульса.

a) *Широкополосный импульс*

$$t < 0, \quad f(t) = 0; \quad t \geq 0, \quad f(t) = e^{-\delta t}. \quad (38.5)$$

Подстановка в (38.3) и интегрирование дает

$$g(\omega) = 1/2\pi (\delta - i\omega). \quad (38.6)$$

При малых ω ($\omega \ll \delta$) спектральная плотность постоянна: $g(\omega) \approx 2\pi/\delta$. При $\omega \gg \delta$ $g(\omega)$ убывает при увеличении частоты. Таким образом, ширину спектра такого импульса можно при разного рода оценках принимать равной δ .

b) *Узкополосный (квазимонохроматический) импульс*

$$\begin{aligned} -b < t < b, \quad f(t) = \cos \omega_0 t, \quad \omega_0 b \gg 1; \\ |t| > b, \quad f(t) = 0. \end{aligned} \quad (38.7)$$

Интеграл (38.3) в этом случае дает

$$g(\omega) = \frac{\sin(\omega + \omega_0)b}{2\pi(\omega + \omega_0)} + \frac{\sin(\omega - \omega_0)b}{2\pi(\omega - \omega_0)}.$$

Максимальные значения $g(\omega)$ имеют место при малых отклонениях ω от частоты заполнения ω_0 . При этом первым членом в последнем выражении можно пренебречь по сравнению со вторым, и мы получаем

$$g(\omega) = \frac{\sin qb}{2\pi q}, \quad q = \omega - \omega_0. \quad (38.8)$$

Ширина спектра для этого случая равна приблизительно π/b .

Теперь звуковое давление в излучаемой волне запишется

$$\Psi(r, z, t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{R} e^{i(kR - \omega t)} g(\omega) d\omega. \quad (38.9)$$

Звуковое поле в волноводе, когда излучается сферическая волна $e^{i(kR - \omega t)}/R$, нами было исследовано ранее. Оно представляется в виде суперпозиции нормальных волн и может быть записано в виде

$$\psi(r, z) e^{-i\omega t} = \sum_{l=0}^{\infty} \psi_l e^{-i\omega_l t}, \quad (38.10)$$

где $\psi_l(r, z)$ — поле отдельной нормальной волны (см. § 35). Теперь, как видно из (38.9), чтобы получить поле импульсного излучателя, надо (38.10) умножить на $\frac{1}{2}g(\omega)$ и проинтегрировать по ω от $-\infty$ до $+\infty$. Изменив, кроме того, порядок интегрирования и суммирования, получаем для произвольных r, z и t

$$\Psi(r, z, t) = \sum_{l=0}^{\infty} \Psi_l(r, z, t), \quad (38.11)$$

где

$$\Psi_l(r, z, t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_l g(\omega) e^{-i\omega_l t} d\omega \quad (38.12)$$

— импульсное поле нормальной волны номера l .

Учитывая равенство (38.4), последнее выражение можно записать так, чтобы интегрирование производилось только по положительным частотам

$$\Psi_l(r, z, t) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \psi_l g(\omega) e^{-i\omega_l t} d\omega + \text{к. с.}, \quad (38.12')$$

где символ к. с. означает величину, комплексно-сопряженную первому члену.

На достаточно больших расстояниях ($\xi_l r \gg 1$) ψ_l зависит от r , как $e^{i\xi_l r}/\sqrt{r}$. Поэтому для дальнейшего нам удобно положить:

$$\psi_l = \frac{1}{\sqrt{r}} \Phi_l e^{i\xi_l r}, \quad (38.13)$$

где $\Phi_l = \Phi(z, z_0, \chi_l, \omega)$ — функция, не зависящая от r . Теперь для импульсного поля нормальной волны на больших расстояниях получаем выражение:

$$\Psi_l(r, z, t) = \frac{1}{2 \sqrt{r}} \int_0^{\infty} \Phi_l g(\omega) e^{i(\xi_l r - \omega t)} d\omega + \text{к. с.} \quad (38.14)$$

38.2. Импульсное поле отдельной нормальной волны. Групповая скорость. Интеграл (38.14) будем анализировать с помощью метода стационарной фазы (см. конец § 27.1). Выражение в экспоненте запишем в виде

$$\xi_l r - \omega t = \rho \varphi(\omega),$$

где

$$\rho = r, \quad \varphi(\omega) = (\xi_l - \omega t/r). \quad (38.15)$$

Точка стационарной фазы ω_s находится из уравнения

$$\varphi'(\omega_s) = 0 \text{ или } t/r = \xi'_l(\omega_s). \quad (38.16)$$

Здесь и ниже приведенные означают производную по ω . Значения производных затем берутся при $\omega = \omega_s$. При вычислении интеграла в (38.14) введем новую переменную интегрирования $\zeta = \omega - \omega_s$, интегрирование по которой можно распространить от $-\infty$ до $+\infty$ (при условии, что ω_s не близко к нулю). Тогда, воспользовавшись формулой (27.17), получаем

$$\Psi_l(r, z, t) = \frac{1}{r} V \overline{\pi/2 |\xi'_l|} \Phi_l(\omega_s) g(\omega_s) \exp i(\xi_l r - \omega_s t \pm \pi/4) + \text{к. с.}, \quad (38.17)$$

где знак перед $\pi/4$ в экспоненте выбирается тем же, что и знак перед $\xi'_l(\omega_s)$. Мы видим, что Ψ_l представляет собой волновой процесс с непрерывно изменяющейся во времени частотой. При заданных расстоянии r и времени t частота этой волны равна ω_s . Скорость, с которой распространяется сигнал частоты ω , т. е. групповая скорость, как видно из (38.16), равна

$$U_l(\omega) = r/t = (l \xi'_l / d\omega)^{-1}. \quad (38.18)$$

Или, поскольку $\omega = \xi_l V_l$, V_l — фазовая скорость, имеем

$$U_l(\omega) = d(\xi_l V_l) / d\xi_l = V_l + \xi_l dV_l / d\xi_l. \quad (38.19)$$

Таким образом, волновод является дисперсионной системой, разделяющей во времени различные спектральные составляющие импульсного сигнала.

Уравнение (38.16) в общем случае может иметь два и больше корней, что означает, что при заданном r в данной нормальной волне могут одновременно приходить сигналы двух и больше частот.

Амплитуда сигнала частоты ω_s в данный момент времени пропорциональна, кроме величин $\Phi_l(\omega_s)$ и $g(\omega_s)$, характеризующих волновод и вид сигнала, также еще величине $1/V \overline{|\xi'_l|} \sim U_l(\omega_s) / V \overline{|U'_l(\omega_s)|}$. Следовательно, амплитуда сигнала возрастает с уменьшением производной $U'_l(\omega_s)$ и обращается в бесконечность при $U'_l(\omega_s) = 0$, т. е. когда групповая скорость достигает минимума или максимума. При соответственных частоте и времени, а также вблизи их, развитая выше теория несправедлива.

Стоит также отметить, что при заданной частоте ω_s амплитуда импульсного сигнала убывает с расстоянием как $1/r$ в противоположность $1/\sqrt{r}$ в гармонической волне. Все сказанное выше относится к нормальным волнам в волноводе любого типа. Развитие этого вопроса читатель может найти в работе В. А. Полянской [76].

38.3. Импульсное поле нормальной волны в волноводе с абсолютно отражающими границами. Рассмотрим теперь простейший случай, когда однородный жидкий слой толщины h ограничен снизу абсолютно неподатливым дном, а сверху — свободной поверхностью воды. Согласно (35.22) имеем

$$\xi_l = \sqrt{k^2 - (l + 1/2)^2 (\pi/kh)^2}, \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (38.20)$$

Отсюда для групповой скорости:

$$U_l = (d\xi_l / d\omega)^{-1} = c (d\xi_l / dk)^{-1} = c \sqrt{1 - (l + 1/2)^2 (\pi/kh)^2}. \quad (38.21)$$

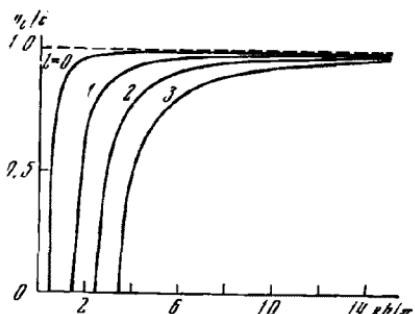


Рис. 38.1. Кривые для групповой скорости нормальных волн разных номеров

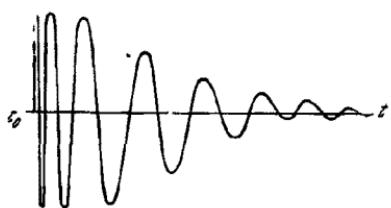


Рис. 38.2. Вид импульса при распространении звуковой волны в слое с абсолютно-отражающими границами для нормальной волны номера l

что $\xi_l = k \sin \vartheta_l$ и подставить сюда $\xi_l = c \sin \vartheta_l$, сразу даст выражение (38.21) для групповой скорости.

На рис. 38.1 изображена зависимость U_l/c от величины $kh/\pi = \omega h/c\pi = 2\pi/\lambda$ для $l = 0, 1, 2, 3$.

Мы видим, что групповая скорость равна нулю при критической частоте данной нормальной волны. При дальнейшем возрастании частоты (или волнового числа k) групповая скорость непрерывно возрастает и стремится на высоких частотах к величине c , равной скорости звука в безграничной среде.

Теперь нетрудно представить себе вид звукового сигнала, обусловленного каждой нормальной волной. Первыми на любое, произвольно выбранное расстояние r приходят высокие частоты, распространяющиеся со скоростью, близкой к c . Они обуславливают наличие фронта сигнала в начальный момент времени $t_0 = r/c$. Затем приходят все более низкие частоты. При больших t приходит частоты, близкие к критической частоте данной нормальной волны. Амплитуда волны с течением времени непрерывно уменьшается.

Сравнив (38.10) с формулой (35.21), мы найдем ϑ_l . Задавшись также видом импульса (38.5), а также воспользовавшись асимптотикой функции $H_0^{(1)}(\xi_l r)$, находим

$$\Psi_l = \frac{4U_l(\omega_s)}{c\pi r(l+1/2)\sqrt{1+\delta^2/\omega_s^2}} \cos \alpha_l z_0 \cos \alpha_l z \cos(\xi_l r - \omega_s t + \gamma), \quad (38.22)$$

$$\alpha_l = (l+1/2)(\pi/h), \quad \operatorname{tg} \gamma = \omega_s/\delta.$$

Схематический вид Ψ_l как функции времени t при заданных r, z, z_0 изображен на рис. 38.2.

Полное значение звукового поля будет составляться из суммы такого рода сигналов при различных l . В каждый данный момент времени разные-

нормальные волны будут приходить в данную точку с разными частотами, но с такими, что групповая скорость для них одинакова. Следовательно, согласно (38.21), учитывая, что $k = \omega/c$, мы получаем для последовательности частот ω_l , $l = 0, 1, 2, \dots$, приходящих одновременно условие

$$(2l + 1)/\omega_0 = \text{const} \quad (38.23)$$

или, полагая $l = 0$, находим $\text{const} = 1/\omega_0 = 1/kc$.

Теперь из (38.23) получаем для приходящих одновременно частот различных нормальных волн:

$$\omega_l = (2l + 1)\omega_0. \quad (38.24)$$

Из (38.22) нетрудно получить, что при этом амплитуда волн с увеличением номера l убывает обратно пропорционально корню $\sqrt{(2l + 1)^2 + \delta^2/\omega_0^2}$.

38.4. Лучевая трактовка. Полученные выше результаты качественно весьма простым образом вытекают из картины мнимых излучателей и лучевых представлений (см. § 34). Предположим, для простоты, что излучатель и приемник расположены на нижней (неподатливой) границе слоя, на расстоянии r друг от друга. При $t_0 = r/c$ приемника достигнет импульс, распространяющийся от источника без отражений. В последующие моменты времени в приемник будут приходить импульсы, «исходящие» из все более и более удаленных мнимых излучателей. В момент времени $t = r/c \sin \vartheta$ точки приема достигнет импульс, распространяющийся от соответственного мнимого источника по лучу, характеризуемому углом наклона ϑ . Учитывая расстояние и время прихода, для групповой скорости получаем

$$U = r/t = c \sin \vartheta. \quad (38.25)$$

Последующие импульсы прибывают приблизительно через равные промежутки времени, причем соседние импульсы имеют разный знак. Это создает в точке приема квазипериодический процесс с периодом $T = 4h/c \sin \vartheta$. Таким образом, этому времени наблюдения соответствует основная частота процесса:

$$\omega_0 = 2\pi/T = (\pi c/2h) \sin \vartheta. \quad (38.26)$$

Учитя соотношение $\omega_0 = kc$, получаем из (38.25) и (38.26)

$$U = c \sqrt{1 - (\pi/2kh)^2}. \quad (38.27)$$

То же самое мы получили бы из (38.26) для U_0 .

Таким образом, простые лучевые представления дали нам возможность получить связь между частотой и групповой скоростью пульсовой нормальной волны.

Однако рассмотренный нами квазипериодический процесс в точке наблюдения в моменты времени, следующие за t , кроме основной частоты ω_0 , будет содержать гармоники $3\omega_0$, $5\omega_0$ и т. д., все соответствующие, естественно, одной и той же групповой скорости. Таким образом, соотношение (38.24) также находит себе естественное объяснение в рамках лучевых представлений.

38.5. Случай квазимохроматического импульса. Анализ импульсного поля нормальной волны выше основывался на предположении, что в интеграле (38.14) осцилляции экспоненциального множителя с изменением ω происходят быстро по сравнению с медленными изменениями остальной части подынтегрального выражения.

В случае квазимохроматического импульса этот метод анализа не проходит. В этом случае $g(\omega)$ в (38.14) сама является быстро меняющейся функцией, имеющей острый максимум на несущей частоте $\omega = \omega_0$.

Мы рассмотрим конкретный вид импульса, задаваемого выражениями (38.7) и (38.8). Кроме того, учтем, что функция спектральной плотности

$g(\omega)$ существенно отличается от нуля только в малой области вблизи ω_0 , а поэтому в (38.14) медленно изменяющуюся с изменением ω функцию $\Phi_l(\omega)$ можно вынести за интеграл при значении $\omega = \omega_0$. В результате мы получаем для импульсного поля нормальной волны номера l

$$\Psi_l = \frac{\Phi_l(\omega_0)}{4\pi i} (I_+ - I_-) + \text{к. с.}, \quad (38.28)$$

где обозначено

$$I_+ = \int_0^\infty \exp i(\xi_l r - \omega t + bq) d\omega/q, \quad q = \omega - \omega_0. \quad (38.29)$$

I_- получается из I_+ изменением знака перед bq в экспоненте.

Для вычисления I_+ и I_- разложим волновое число $\xi_l(\omega)$ в экспоненте в ряд по степеням q : $[\xi_l(\omega) = \xi_l(\omega_0) + \xi'_l(\omega_0)q + \xi''_l(\omega_0)q^2/2 + \dots]$. Здесь $\xi_l(\omega_0) = 1/U_l(\omega_0)$, U_l — групповая скорость. Кроме того, для дальнейшего введем обозначение

$$r\xi''_l(\omega_0) = -rU'_l(\omega_0)/U_l^2(\omega_0) = a^2/2. \quad (38.30)$$

Тогда интеграл (38.29) может быть записан

$$I_+ = \exp i[\xi_l(\omega_0)r - \omega_0 t] \int_0^\infty \exp i(\tau_+ q + a^2 q^2/4) d\omega/q, \quad (38.31)$$

где

$$\tau_+ = r/U_l(\omega_0) - t + b. \quad (38.32)$$

В результате нам необходимо вычислить интеграл

$$J = \int_0^\infty \exp i(\tau_+ q + a^2 q^2/4) d\omega/q. \quad (38.33)$$

Для этого вычислим предварительно другой интеграл

$$J_0 = \int_0^\infty \exp i(\tau_+ q + a^2 q^2/4) d\omega. \quad (38.34)$$

Последний можно записать также в виде

$$J_0 = \exp(-i\tau_+^2/a^2) \int_0^\infty \exp i\left(\frac{aq}{2} + \frac{\tau_+}{a}\right)^2 d\omega.$$

Здесь целесообразно ввести новую переменную

$$\zeta = aq/2 + \tau_+/a, \quad 2d\zeta = ad\omega,$$

интегрирование по которой будет осуществляться от

$$\zeta_0 = \tau_+/a - a\omega_0/2 \quad (38.35)$$

до бесконечности.

Предположим, что

$$a\omega_0 \gg 1, \quad \tau_+ \ll a^2\omega_0. \quad (38.36)$$

Тогда ζ_0 при вычислении интеграла можно принять за $-\infty$ и, следовательно,

$$J_0 = \frac{2}{a} \exp(-\tau_+^2/a^2) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\zeta} d\zeta = (2\sqrt{\pi}/a) \exp i(\pi/4 - \tau_+^2/a^2). \quad (38.37)$$

Сравнивая выражения (38.38) и (38.39), мы видим, что $dJ/d\tau_+ = J_0$, следовательно,

$$J = \frac{2\sqrt{\pi}}{a} e^{i\pi/4} \int_0^{\tau_+/a} e^{-i\tau_+^2/a} d\tau_+ + C_1,$$

где C_1 — постоянная интегрирования. Здесь под интегралом снова целесообразно сделать замену переменных, обозначив $\tau_+/a = x$. Тогда

$$J = 2\sqrt{\pi} e^{i\pi/4} \int_0^{\tau_+/a} e^{-ix^2} dx + C_1.$$

Теперь в соответствии с (38.31) получаем

$$I_+ = e^{i[\xi_l(\omega_0)r - \omega_0 t]} \left[2\sqrt{\pi} e^{i\pi/4} \int_0^{\tau_+/a} e^{-ix^2} dx + C_1 \right],$$

I_- отсюда получится заменой τ_+ на τ_- (τ_- получается из τ_+ изменением знака перед b) и C_1 на C_2 . В результате будем иметь

$$I_+ - I_- = 2\sqrt{\pi} e^{i[\xi_l(\omega_0)r - \omega_0 t + \pi/4]} \left[\int_0^{\tau_+/a} e^{-ix^2} dx - \int_0^{\tau_-/a} e^{-ix^2} dx + C \right], \quad (38.38)$$

где C — новая постоянная. Как видно из определения I_+ (см. (38.29) и аналогичного определения I_- , имеем: $(I_+ - I_-)_{b=0} = 0$. Положив в (38.38) $b = 0$ и учитя, что при этом $\tau_+ = \tau_-$, получаем $C = 0$.

Кроме того, учтем, что в соответствии с общепринятыми обозначениями

$$\int_0^{\tau_+/a} e^{-ix^2} dx = \sqrt{\pi/2} F(\tau_+/a) \quad (38.39)$$

— интеграл Френеля.

В результате из (38.39) получаем для импульсного поля нормальной волны

$$\Psi_l = \frac{\Phi_l(\omega_0)}{2\sqrt{2r}} e^{i[\xi_l(\omega_0)r - \omega_0 t - \pi/4]} \left\{ F\left(\frac{\tau_+}{a}\right) - F\left(\frac{\tau_-}{a}\right) \right\} + \text{к.с.} \quad (38.40)$$

Мы видим, что Ψ_l представляет собой сигнал с частотой ω_0 и амплитудой, убывающей с расстоянием как $1/\sqrt{r}$. При заданном r зависимость амплитуды от времени дается выражением в фигурных скобках. В соответствии с общепринятыми обозначениями [29] имеем

$$F(x) = C(x) - iS(x), \quad (38.41)$$

где

$$C(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \cos x^2 dx$$

и аналогично для $S(x)$ с заменой под интегралом $\cos x^2$ на $\sin x^2$. Заметим, что при $|x| \gg 1$ имеем $C(x) = S(x) = 1/2$ при положительных x и $C(x) = S(x) = -1/2$ при отрицательных x .

Амплитуда сигнала при заданном r пропорциональна величине

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \left| F\left(\frac{\tau_+}{a}\right) - F\left(\frac{\tau_-}{a}\right) \right| = \\ = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\left[C\left(\frac{\tau_+}{a}\right) - C\left(\frac{\tau_-}{a}\right) \right]^2 + \left[S\left(\frac{\tau_+}{a}\right) - S\left(\frac{\tau_-}{a}\right) \right]^2}. \quad (38.42)$$

Множитель $1/\sqrt{2}$ сюда включен для того, чтобы величина A в центре сигнала была равна единице. Действительно, согласно определению (38.32) $\tau_+ = 0$ при $t = b + r/U_l(\omega_0)$, т. е. в момент прихода заднего фронта импульса, если бы последний распространялся без искажения с групповой скоростью $U_l(\omega_0)$. Аналогично $\tau_- = 0$ в момент прихода переднего фронта. Как видно из (38.42), начало и конец импульса будут искажены на интервале времени порядка a . Если $a \ll b$, то можно выбрать такое t , при котором τ_+/a будет положительно и велико, а τ_- — отрицательно и велико по модулю. Такие t будут соответствовать неискаженным частям импульса. При этом из (38.42) получаем $A = 1$.

На достаточно больших расстояниях, когда

$$b/a \ll 1, \quad (38.43)$$

вид сигнала совсем не будет походить на первоначально излученный импульс, и закон спадания его максимальной амплитуды с расстоянием будет более быстрым. Для рассмотрения этого случая заметим, что в (38.39) при малых x можно принять $\exp(-ix^2) \approx 1$. Следовательно, тогда

$$F(\tau_+/a) \approx \int_0^{\tau_+/a} dx = \sqrt{2/\pi} (\tau_+/a).$$

Теперь в (38.40) будем иметь

$$F\left(\frac{\tau_+}{a}\right) - F\left(\frac{\tau_-}{a}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\tau_+ - \tau_-}{a} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2b}{a}.$$

Учитывая (38.30), получаем теперь для импульсного поля нормальной волны

$$\Psi_l = \frac{\Phi_l(\omega_0) b}{r \sqrt{2\pi \zeta_l(\omega_0)}} e^{i[\xi_l(\omega_0)r - \omega t - \pi/4]}. \quad (38.44)$$

Таким образом, в этом случае, как в случае широкополосного импульса, поле спадает с расстоянием как $1/r$.

Последняя формула непосредственно вытекает также из формулы (38.17) с учетом того, что при этом $g(\omega) = (\sin b\omega)/q \approx b$. Это и естественно, поскольку условие (38.43) выполняется на таких больших расстояниях, когда снова экспоненциальный множитель под интегралом (38.14) можно считать быстро изменяющимся по сравнению с функцией спектральной плотности $g(\omega)$.

Обратимся теперь к условиям (38.36), выполнение которых предполагалось. Начнем со второго из них. Максимальное значение τ_+ , которое нас интересует, имеет порядок b . Следовательно, это условие можно записать

$$b \ll a^2 \omega_0. \quad (38.45)$$

Учитывая (38.30) и соотношение $r = U_l t$, можно его также записать

$$b \ll t \frac{\omega_0}{U_l} \left(\frac{dU_l}{d\omega} \right)_{\omega_0}. \quad (38.46)$$

Если предположить, что величина $\frac{\omega_0}{U_l} \left(\frac{dU_l}{d\omega} \right)_{\omega_0}$ имеет порядок единицы, то наше условие будет

$$b \ll t. \quad (38.47)$$

Другими словами, проведенный выше анализ пригоден при t , достаточно большом по сравнению с длительностью излученного импульса.

Заметим, далее, что по условию квазимохроматичности импульса имеем $b\omega_0 \gg 1$. Следовательно, если выполняется условие (38.45), то первое из условий (38.36) будет выполняться тем более. Поэтому его можно не учитывать.

В заключение параграфа отметим, что изложенная выше теория применима к распространению квазимохроматического импульса в любой диспергирующей среде. Ее приложение к случаю распространения радиоволны в моносфере см., например, в [28].

§ 39. Распространение импульса в двухслойной жидкости

Перейдем теперь к более близкому к практике случаю — распространению звукового импульса в слое жидкости, лежащем на жидком полуспространстве. Полученные при этом результаты будут иметь значение при анализе распространения звука в мелком море и, в частности, при определении характеристик морского грунта по наблюдению распространения звука взрыва в море. Впервые этот вопрос детально был рассмотрен Пекерисом [213]. Наше изложение в основном будет следовать его работе.

39.1. Качественная картина распространения импульса. В § 37 было получено выражение для поля нормальной волны точечного излучателя звука частоты ω в произвольной точке жидкого слоя (см. формулу (37.8)). Воспользуемся асимптотическим представлением функции Ханкеля и обозначим как всегда через ξ_l волновое число каждой нормальной волны, где

$$\xi_l = k \sin \vartheta_l = k \sqrt{1 - (x_l/kh)^2}, \quad x_l = kh \cos \vartheta_l. \quad (39.1)$$

Тогда выражение для функции ψ , за которую здесь мы возьмем звуковое давление, можно записать в виде (учитывая также (37.8'))

$$\psi = \sum_l \exp[-i(\omega t - k_l r - \pi/4)] Q_l(\omega), \quad (39.2)$$

где

$$Q_l(\omega) = \frac{2\pi}{h} \sqrt{\frac{2}{\pi \xi_l r}} \left\{ \frac{x_l \sin[x_l(1-z/h)] \sin[x_l(1-z_0/h)]}{x_l - \sin x_l \cos x_l - (\sin^2 x_l \tan x_l)/m^2} \right\}. \quad (39.3)$$

Для получения полного решения к выражению (39.2) для ψ необходимо добавить еще боковую волну, даваемую интегралом по берегам разреза. Однако мы будем рассматривать поле на больших расстояниях, когда боковой волной можно пренебречь. Возможность такого пренебрежения обусловлена тем, что амплитуда боковой волны убывает с расстоянием по закону $1/r^3$ (или $1/r$ при $kvh \approx (2l+1)\pi/2$), в то время как амплитуды нормальных волн убывают по закону $1/\sqrt{r}$ (рассматривается случай $c_l > c$, когда на границе слоя имеет место полное внутреннее отражение)*.

В случае импульсного источника, учитывая изложенное в § 38.1, мы будем иметь для звукового давления $\Psi(r, z, t)$ формулу (38.11), где $\Psi_l(r, z, t)$ — импульсное поле нормальной волны номера l будет согласно (38.12'):

$$\Psi_l(r, z, t) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \exp\{-i[\omega t - \xi_l(\omega)r - \pi/4]\} g(\omega) Q_l(\omega, r, z) d\omega + \text{к.с.} \quad (39.4)$$

Мы будем предполагать, что изучается сигнал вида (38.5) так, что для спектральной плотности $g(\omega)$ можно воспользоваться формулой (38.6). В результате имеем

$$\Psi_l(r, z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{Q_l(\omega, r, z)}{\delta - i\omega} \exp\left\{-i\left[\omega t - \xi_l(\omega)r - \frac{\pi}{4}\right]\right\} d\omega + \text{к. с.} \quad (39.5)$$

Для качественного анализа распространения импульса полезно представлять себе зависимость фазовой и групповой скоростей волн от частоты. На рис. 39.1 верхнее семейство кривых дает (по Пекерису [213]) зависимость фазовой скорости $V_l = \omega/\xi_l$ от параметра $\gamma = h/\lambda = fh/c$ для первой нормальной волны ($l = 1$, индекс 1 на рисунке опущен).

Плотность грунта выбрана $\rho_1 = 2 \text{ г}/\text{см}^3$. Разные кривые отличаются значениями c_1/c . Во всех случаях фазовая скорость монотонно убывает с увели-

* Конечно, боковую волну надо учитывать в тех случаях, когда ее приход отделяется по времени от приходов других волн.

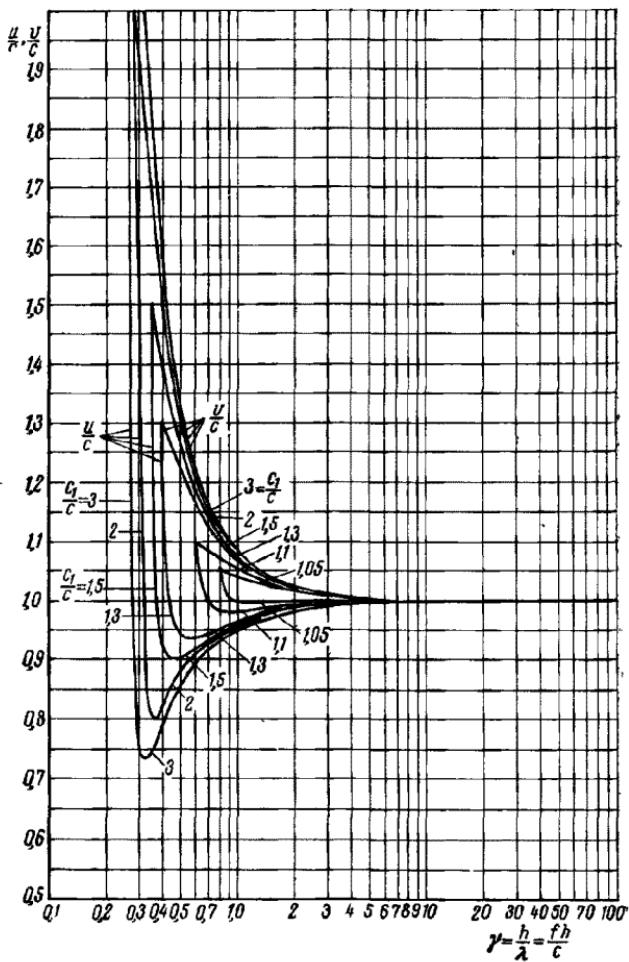


Рис. 39.1. Зависимость фазовой и групповой скоростей первой нормальной волны от частоты для нескольких случаев ($\rho_1/\rho = 2$)

чением частоты. Нижнее семейство кривых изображает групповую скорость для этих же случаев. Мы видим, что последняя во всех случаях проходит через минимум, причем при $U < c$ каждому значению скорости U соответствует две частоты. Эти особенности кривых групповой скорости и определяют качественную картину распространения импульса в слое.

Изобразим схематически кривую для групповой скорости, как на рис. 39.2 (эта кривая передает все основные особенности кривых на рис. 39.1), и будем пока рассматривать только одну (скажем, первую) нормальную волну. Из рис. 39.2 видно, что первой к приемнику придет почти синусоидальная волна частоты f_k , где f_k — критическая частота для первой нормальной волны [см. формулу (37.11)]:

$$f_R = c/4\hbar \sqrt{1-n^2}, \quad n = c/c_1. \quad (39.6)$$

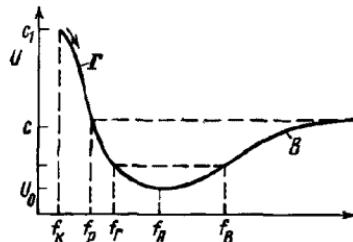
Время прихода этой волны будет $t = r/c_1$ и соответствует скорости распространения волн в грунте. С течением времени частота и амплитуда в этой так называемой грунтовой волне должны возрастать. Возрастание частоты объясняется тем, что в более поздние моменты времени приходят участки волны, имеющие меньшую групповую скорость, что на рис. 39.2. соответствует движению по левой ветви кривой в направлении повышения частоты (направление стрелки). О причинах возрастания амплитуды будет сказано позднее.

В момент $t = r/c$ кроме частоты f_k , соответствующей левой ветви кривой, придут также весьма высокие частоты, соответствующие ее правой ветви.

(ветвь B). Эту новую волну, вступление которой начинается с весьма высоких частот, уместно назвать *водной волной*. Ее начальная фаза распространяется со скоростью, равной скорости распространения звуковых волн в воде.

В водной волне частота с течением времени должна уменьшаться, что соответствует продвижению по ветви B в левую сторону. В произвольный момент времени $r/c < t < r/U_0$, где U_0 — минимальная групповая скорость, первая нормальная волна будет представлять собой суперпозицию двух волн разных частот f_G и f_B , которые мы будем называть частотами грунтовой и водной волн, на что и указывают их индексы. При $t = r/U_0$ частоты этих волн

Рис. 39.2. Схематическая зависимость групповой скорости от частоты



совпадают, и мы будем иметь процесс с единой частотой f_A . Эту часть приходящей волны называют волной Эйри. Ее математическое описание оказывается аналогичным расчету поля вблизи каустики.

На рис. 39.3 изображена вычислена теоретически (см. [213]) зависимость звукового давления от времени для одного конкретного случая. На нем видно вступление грунтовой волны (при $t = 0$), постепенное увеличение ее амплитуды и частоты, вступление водной волны (при $t \approx 0,5$ сек), наложение друг на друга после этого обеих волн, из которых грунтовая продолжает увеличиваться по амплитуде и частоте, в водной же волне амплитуда со временем увеличивается, а частота уменьшается. Конец записи соответствует волне Эйри с амплитудой, убывающей по экспоненциальному закону, и постоянной частотой.

39.2. Лучевые представления. Вид кривых для групповой скорости на рис. 39.1 можно объяснить, исходя из элементарных лучевых представлений. Для этого учтем, что при $c_1 > c$ в точку приема P от источника O приходят звуковые импульсы по лучам двоякого рода:

а) *Водные лучи* — расположенные целиком в слое жидкости, но имеющие различное число отражений от границ слоя. На больших расстояниях g

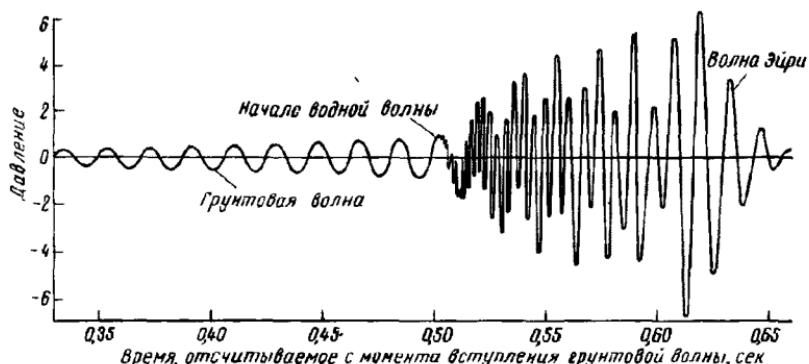


Рис. 39.3. Зависимость звукового давления от времени для конкретного случая

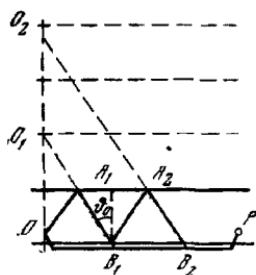


Рис. 39.4. Лучи и мнимые источники, соответствующие грунтовой волне

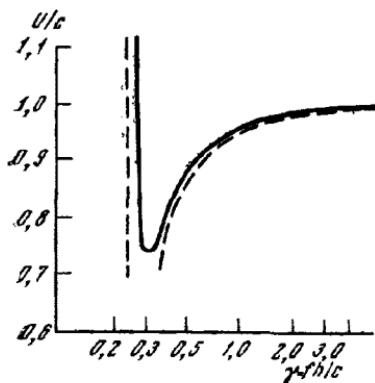


Рис. 39.5. Зависимость групповой скорости от частоты по точной теории (сплошная кривая) и в лучевом приближении (пунктирная)

т. е. $T = 4h/c \cos \vartheta_0 = 4h/c \sqrt{1 - n^2}$ получаем $fh/c = \frac{1}{4} \sqrt{1 - n^2}$ — постоянную величину.

На рис. 39.5 пунктиром изображена зависимость групповой скорости по лучевой теории для $n = \frac{1}{3}$. Левая ветвь ($fh/c = 0,24$) — грунтовая волна, правая ветвь ($fh/c > 0,3$) — водная волна. Сплошная кривая взята из рис. 39.1. Мы видим, что лучевая теория правильно передает тенденцию хода кривой. В случае нормальных волн более высокого порядка совпадение будет еще лучше. Однако лучевая теория неприменима в области частоты Эйри.

39.3. Полная теория распространения импульса. При исследовании интеграла (39.5) учтем, что $Q_1(\omega)/(b - i\omega)$ является сравнительно медленно меняющейся функцией ω , в то время как экспонента — быстро осциллирующая функция. Главная часть интеграла получается за счет областей вблизи точек стационарной фазы $\omega = \omega_0$, определяемых из уравнения $d\phi/d\omega \equiv 0$, причем фаза ϕ дается выражением

$$\phi = \omega t - \xi_1(\omega) r - \pi/4. \quad (39.7)$$

Точка сверху здесь и ниже означает дифференцирование по ω .

В окрестности точки стационарной фазы можно положить $\omega = \omega_0 + u$, где u — малая величина. Раскладывая $\phi(\omega)$ в ряд по степеням u , находим

$$\Phi(\omega) = \Phi(\omega_0) - \frac{r\xi''(\omega_0)}{2!} u^2 - \frac{r\xi'''(\omega_0)}{3!} u^3 \dots \quad (39.8)$$

В интеграле по ω существенны будут лишь малые ω , как положительные, так и отрицательные, поскольку путь интегрирования проходит через точку ω_0 , а не начинается в ней. Чисто формально интегрирование по ω можно производить в пределах от $-\infty$ до $+\infty$, причем по указанным выше соображениям существенный вклад в интеграл будут давать лишь малые ω .

Таким образом,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{Q_l}{\delta - i\omega} e^{-i\varphi(\omega)} d\omega = \frac{1}{2\pi} \frac{Q_l(\omega_0) \exp[-i\varphi(\omega_0)]}{\delta - i\omega_0} \times \\ \times \int_{-\infty}^{+\infty} \exp i \left[\frac{r\xi(\omega_0)}{2} u^2 + \frac{r\xi'(\omega_0)}{6} u^3 + \dots \right] du.$$

Пользуясь формулами § 27, нетрудно показать, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp i \left[\frac{r\xi}{2} u^2 + \frac{r\xi'}{6} u^3 + \dots \right] du \approx \\ \approx \sqrt{\frac{2\pi}{r|\xi|}} \exp \left(\pm i \frac{\pi}{4} \right) \left\{ 1 - \frac{i}{r} \left[-\frac{5(\xi)^2}{24(\xi')^3} + \frac{r\xi''}{8(\xi')^2} \right] + O\left(\frac{1}{r^2}\right) \right\}, \quad (39.9)$$

где в экспоненте берется знак плюс, если $\xi > 0$, и знак минус, если $\xi < 0$.

Таким образом,

при $\xi > 0$

$$\Psi_l = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{Q_l(\omega)}{\delta - i\omega} e^{-i\varphi(\omega)} d\omega = \frac{iQ_l(\omega_0)}{2\pi(\delta - i\omega_0)} \exp i [\xi(\omega_0)r - \omega_0 t] \sqrt{\frac{2\pi}{r|\xi(\omega_0)|}} \{ \}, \quad (39.10)$$

при $\xi < 0$

$$\Psi_l = \frac{Q_l(\omega_0)}{2\pi(\delta - i\omega_0)} \exp i [\xi(\omega_0)r - \omega_0 t] \sqrt{\frac{2\pi}{r|\xi(\omega_0)|}} \{ \}, \quad (39.11)$$

где символ $\{ \}$ означает выражение в фигурных скобках в (39.9). Чтобы получить полные выражения для давления, необходимо, согласно (39.5), в (39.10) и (39.11) добавить еще комплексно-сопряженные им выражения. В результате, если еще принять $\{ \} \approx 1$, т. е. пренебречь вторым и третьим членами в скобке, то получим

$$\xi > 0 \quad \Psi_l(r, z, t) = \frac{2Q_l(\omega_0) \cos \left[\omega_0 t - r\xi(\omega_0) - \operatorname{arctg} \frac{\omega_0}{\delta} - \frac{\pi}{2} \right]}{[2\pi r |\xi(\omega_0)| (\delta^2 + \omega_0^2)^{1/2}]}; \quad (39.12)$$

$$\xi < 0 \quad \Psi_l(r, z, t) = \frac{2Q_l(\omega_0) \cos \left[\omega_0 t - r\xi(\omega_0) - \operatorname{arctg} \frac{\omega_0}{\delta} \right]}{[2\pi r |\xi(\omega_0)| (\delta^2 + \omega_0^2)^{1/2}].} \quad (39.13)$$

Случай $\xi > 0$ реализуется на той ветви дисперсионной кривой, которая соответствует грунтовой волне (слева от минимума на кривой рис. 39.2). Действительно, на ней величина $1/U = dk/d\omega$ увеличивается при увеличении частоты, т. е. $d^2k/d\omega^2 > 0$. Случай $\xi < 0$ реализуется на ветви дисперсионной кривой, соответствующей водной волне. Таким образом, выражение (39.12) дает грунтовую волну, а выражение (39.13) — водную волну. Каждое из них представляет собой цуг волн, модулированных по частоте и амплитуде. В каждый момент времени частота ω_0 находится из уравнения $Ut - r = 0$, $1/U = d\xi/d\omega$. Это уравнение в большинстве случаев удобно решать графическим путем, построив предварительную кривую дисперсии $U(\omega)$.

Оценим теперь границы применимости выражений (39.12) и (39.13). При их выводе мы предполагали, что выполняется условие

$$\frac{1}{r} \left[-\frac{5(\xi)^2}{24(\xi)^3} + \frac{\ddot{\xi}}{8(\xi)^2} \right] \leq 1. \quad (39.14)$$

Это неравенство выполняется всюду, за исключением малых расстояний и области минимума кривой групповой скорости, где $\dot{\xi} = 0$. Вблизи этой точки необходимо провести рассуждения особо, что и будет сделано в следующем разделе.

39.4. Волна Эйри. Вблизи минимума групповой скорости, где $\dot{\xi}(\omega_0) = 0$, в интегrale (39.5) положим $\omega = \omega_0 + u$ и воспользуемся следующим разложением в ряд по степеням u :

$$\varphi(\omega) = \omega t - \xi(\omega)r - \pi/4 = \varphi(\omega_0) + au + bu^3 + \dots, \quad (39.15)$$

где

$$a = t - r\xi_0 = t - r/U_0, \quad b = -r\xi_0/6 > 0. \quad (39.16)$$

Индекс 0 у производных от ξ означает, что они должны быть взяты при $\omega = \omega_0$. Следовательно, в отличие от предыдущего раздела, эти производные являются постоянными величинами, не зависящими ни от t , ни от r .

Учитя, что к (39.5) должно быть добавлено комплексно-сопряженное выражение, получаем

$$\Psi_l = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty Q_l(\omega) \left[\frac{e^{-i\varphi(\omega)}}{\delta - i\omega} + \frac{e^{i\varphi(\omega)}}{\delta + i\omega} \right] d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{Q_l(\omega)}{\sqrt{\delta^2 + \omega^2}} \cos \left[\varphi(\omega) - \arctg \frac{\omega}{\delta} \right] d\omega.$$

После этого имеем приближенно

$$\begin{aligned} \Psi_l \approx \frac{1}{\pi} \frac{Q_l(\omega_0)}{\sqrt{\delta^2 + \omega_0^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos [A + au + bu^3] du, \\ A \equiv [\omega_0 t - \xi(\omega_0)r - \arctg(\omega_0/\delta)] - \pi/4. \end{aligned} \quad (39.17)$$

Далее

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos [A + au + bu^3] du = 2 \cos A \int_0^\infty \cos (au + bu^3) du.$$

Здесь нечетные по отношению к u функции при интегрировании от $-\infty$ до $+\infty$ дали нуль, а интеграл от четных функций заменен на удвоенный интеграл от 0 до ∞ .

Введя обозначения

$$s = (3b)^{1/3}u, \quad \chi = a(3b)^{-1/3}, \quad (39.18)$$

последний интеграл согласно (21.9) сводим к функции Эйри, а именно:

$$\int_0^\infty \cos (au + bu^3) du = (3b)^{-1/3} \int_0^\infty \cos \left(s\chi + \frac{1}{3}s^3 \right) ds = \pi^{1/3}(3b)^{-1/3} v(\chi). \quad (39.19)$$

Согласно (39.18), поскольку $b > 0$, знак χ совпадает со знаком a . Теперь согласно (39.17) получаем, учитывая значение b и A

$$\Psi_l = \frac{2^{1/3}Q_l(\omega_0) \cos [\omega_0 t - \xi(\omega_0)r - \arctg(\omega_0/\delta) - \pi/4] v(\chi)}{\sqrt{\pi} \pi^{1/3} (-\xi_0)^{1/3} (\delta^2 + \omega_0^2)^{1/3}}. \quad (39.20)$$

Последнее выражение представляет собой волну частоты ω_0 с амплитудой, изменяющейся во времени в соответствии с изменением функции

$$v(\chi) = v [(t - r/U_0)/(-2\xi_0 r)^{1/3}]. \quad (39.21)$$

При $t < r/U_0$ функция имеет осциллирующий характер (см. рис. 21.1), при $t > r/U_0$ — экспоненциально спадает с увеличением разности $t - r/U_0$. Максимума амплитуда достигает при $\chi = -1,02$, где $v(\chi) = 0,95$. Поскольку согласно (39.3) $Q_1 \sim 1/r^{1/2}$, то закон спадания максимума «волны Эйри» (39.20) будет $r^{-1/2}$ вместо закона $1/r$, справедливого для остальных частей импульса и, следовательно, все более и более будет подчеркиваться при увеличении расстояния r . Временная протяженность этого участка с повышенной амплитудой ограничена значениями $|\chi| \lesssim 1$ или $|t - r/U_0| \lesssim (-2\xi_0 r)^{1/2}$, т. е. также увеличивается, как $r^{1/2}$.

39.5. Коэффициенты возбуждения различных нормальных волн. До сих пор наши рассуждения относились к одной нормальной волне. Практически часто этим и ограничиваются, считая, что основную роль играет первая нормальная волна, а волны более высоких порядков возбуждаются слабо. Однако эти соображения не всегда справедливы. Теория, изложенная в предыдущих разделах, позволяет определить роль волн различных порядков в разных фазах импульса.

Подставив выражение (39.3) для Q_1 в формулы (39.12) и (39.13) и ограничившись случаем, когда излучатель и приемник находятся на дне ($z = z_0 = 0$), находим амплитуду грунтовой и водной волн

$$|\Psi_l| = \frac{4c}{kr \sqrt{\delta^2 + \omega_0^2}} G_l$$

где

$$G_l = \frac{x_l \sin^2 x_l}{[x_l - \sin x_l \cos x_l - (\sin^2 x_l \operatorname{tg} x_l)/m^2] c \sqrt{\xi |\ddot{\xi}|}}. \quad (39.22)$$

Таким образом, амплитуда нормальной волны при разных частотах определяется функцией G_l . Напомним, что при частотах, где $\xi > 0$, мы имеем грунтовую волну, а при $\xi < 0$ — водную волну. Целесообразно ввести для них различные обозначения $G_l^{\text{р}}$ и $G_l^{\text{в}}$, так что

$$\begin{aligned} \text{при } \xi > 0 \quad G_l &\equiv G_l^{\text{р}}, \\ \text{при } \xi < 0 \quad G_l &\equiv G_l^{\text{в}}. \end{aligned} \quad (39.23)$$

На рис. 39.6 пунктирными линиями изображены (по Пекерису [213]) рассчитанные по формуле (39.22) амплитуды грунтовых и водных волн до третьего порядка включительно в разных стадиях импульса при $m = \rho_1/\rho = 2$, $c_1 = 1950 \text{ м/сек}$. По оси абсцисс откладывается величина $(T - T_0)/T_0$, характеризующая время, протекшее после вступления водной волны. При этом T — время, отсчитываемое от момента взрыва, а $T_0 = r/c$ — время вступления водной волны. Пунктиром даны кривые $G_1^{\text{р}}$, $G_2^{\text{р}}$, $G_3^{\text{р}}$, изображающие в условных единицах амплитуды грунтовых волн трех первых порядков, а также аналогичные кривые $G_1^{\text{в}}$, $G_2^{\text{в}}$, $G_3^{\text{в}}$ для водных волн.

Из рисунка видно, что в грунтовой волне амплитуда первой нормальной волны на протяжении почти всего времени прохождения импульса примерно в три раза больше амплитуды второй нормальной волны и почти в пять раз больше амплитуды третьей нормальной волны. С другой стороны, в водной волне амплитуды волн разных порядков отличаются совсем незначительно. Поэтому надо ожидать, что в приемном тракте с достаточно широкой частотной полосой пропускания будет записываться водная волна, состоящая из нескольких нормальных волн почти одинаковой амплитуды, но разных частот. Такая запись будет иметь весьма сложный вид. Однако, использовав тракт, чувствительный только к достаточно низким частотам, можно выделить только первую нормальную волну. Сплошные кривые на рис. 39.6 дают зависимость частот первых трех нормальных волн, с которыми они приходят в точку приема в заданные моменты времени. По оси ординат откладывается

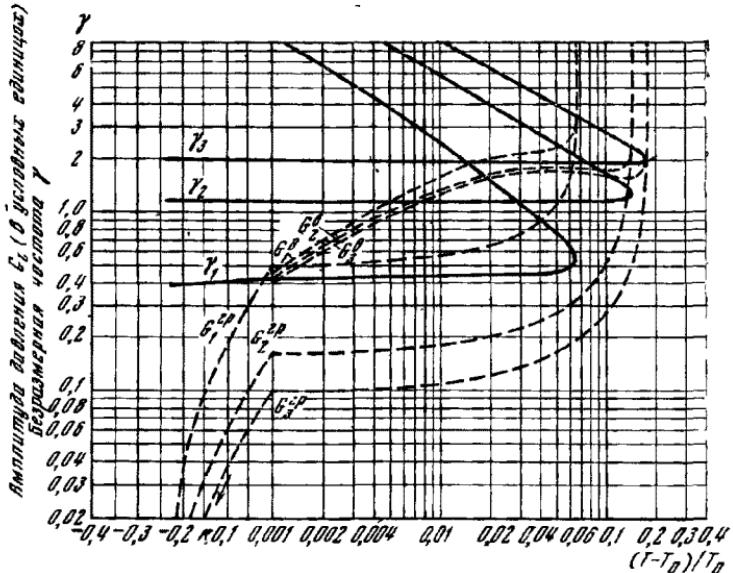


Рис. 39.6. Амплитуды и частоты грунтовых и водных волн до третьего порядка включительно в разных стадиях принимаемого импульса

величина $\gamma_l = h/\lambda_l$, где λ_l — длина волны в воде, связанная с соответствующей частотой соотношением $\lambda_l = c/f_l$. Для каждого T имеются два значения γ , из которых наибольшее соответствует водной волне. С повышением номера нормальной волны l величина γ_l , а значит и частота повышаются.

39.6. Характеристики импульса, из которых можно сделать заключение о параметрах грунта. Посмотрим, как из характеристик импульса, записанного на достаточно большом расстоянии от взрыва, можно получить сведения о параметрах грунта.

Время вступления грунтовой волны. По времени вступления грунтовой волны T_1 определяется скорость звука в грунте $c_1 = r/T_1$. Опыт показывает, что момент вступления грунтовой волны точнее всего фиксируется низкочастотным трактом.

Дисперсия в водной волне. Допустим, что мы фиксируем вступление волны несколькими трактами, обладающими различными верхними граничными частотами. Тогда время вступления в различных трактах будут разными в согласии с дисперсионными кривыми на рис. 39.1 и 39.2. Построив экспериментальную зависимость скорости распространения от частоты и сравнив ее с теоретическими кривыми типа изображенных на рис. 39.1 для различных параметров грунта, можно сделать суждения о последних. Полученные при этом параметры в случае неоднородного грунта будут относиться к верхнему слою грунта порядка длины волны (соответствующей верхней границе пропускания) или меньше, поскольку водные волны на высоких частотах проникают в грунт неглубоко (см., например, рис. 37.3).

Частота грунтовой волны в моменты времени, непосредственно предшествующие вступлению водной волны. Экспериментально нетрудно определить частоту грунтовой волны в момент времени, непосредственно предшествующий вступлению водной волны ($t \approx 0,5$ сек на рис. 39.3). На рис. 39.2 эта частота f_R . Она также непосредственно связана с характеристиками грунта. На рис. 39.7 дана кривая для $\gamma_R = h/\lambda_R = f_R h/c$ в зависимости от отношения c/c при $m = \rho_1/\rho = 2$.

Критическая частота. Обозначим через f_k частоту грунтовой волны в начале ее вступления. Это будет критическая частота, даваемая уравнением (37.11), т. е. наименьшая частота, которая может без большого затухания рас-

пространяться в слое. Графическая зависимость $\gamma_k = h/\lambda_k$ от c_1/c изображена на рис. 39.7.

Частота волны Эйри. Как уже говорилось, частота водной волны в процессе прохождения импульса уменьшается со временем, в то время как частота грунтовой волны непрерывно увеличивается до тех пор, пока обе частоты не станут равны одной и той же частоте f_A , называемой частотой Эйри, которая также зависит от характеристик дна. В момент прихода волны с частотой Эйри амплитуда водной волны достигает максимума и в последующие

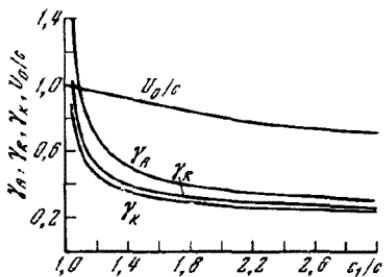


Рис. 39.7. Зависимость различных характеристик принятого импульса от соотношения скоростей звука в воде и грунте при $\rho_1/\rho = 2$

моменты времени начинает уменьшаться, в то время как ее частота остается постоянной. Экспериментально может быть определена как частота Эйри f_A , так и момент ее прихода $t = r/U_0$, связанный с минимальной групповой скоростью. На рис. 39.7 даны кривые, характеризующие зависимость $\gamma_A = h/\lambda_A$ и U_0/c от отношения c_1/c .

Таким образом, при тщательном анализе экспериментальных записей импульсов можно получить достаточно полные сведения о параметрах грунта.

§ 40. Распространение звука в трехслойной жидкой среде

40.1. Интегральное выражение для поля. Предположим теперь, что жидкий слой (толщины h) лежит не непосредственно на бесконечном однородном полупространстве, а отделен от него другим слоем (толщины d). Практически это важно для исследования распространения звуковых волн в жидким слое, когда грунт является слоистым. Все три среды мы будем предполагать жидкими. Обозначения для параметров сред даны на рис. 40.1.

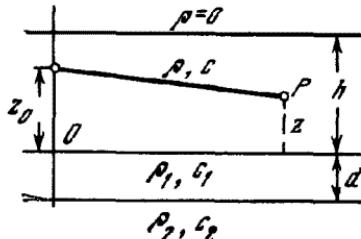


Рис. 40.1. Обозначение параметров сред, а также картина расположения излучателя и приемника в трехслойной среде

Впервые поставленная здесь задача была рассмотрена в [213, 207] при помощи нескольких иных методов по сравнению с применяемым ниже. Аналогичная задача рассматривается в работе [201].

Излучатель и приемник мы предполагаем расположенными в верхнем слое на расстояниях соответственно z_0 и z над его нижней границей. В дальнейшем мы будем пользоваться обозначениями

$$m_1 = \rho_1/\rho, \quad m_2 = \rho_2/\rho, \quad n_1 = c/c_1, \quad n_2 = c/c_2, \quad k = \omega/c, \quad k_1 = \omega/c_1, \quad k_2 = \omega/c_2. \quad (40.1)$$

Поле в любой точке P верхнего слоя будет даваться общими формулами (36.2а) и (36.2б), в которых нужно положить $V_2 = -1$. Для V_1 надо взять значение коэффициента отражения плоской волны от плоскопараллельного слоя согласно (3.10). При этом необходимо учесть разницу в системе обозначений в § 3 и в настоящем параграфе, обусловленную различием нумерации сред. В частности, параметры среды, из которой падает волна, в § 3 отмечались индексом 3, теперь же они вообще не будут иметь индекса.

Обозначим

$$\begin{aligned} Z &= \rho c / \cos \vartheta, & Z_1 &= \rho_1 c_1 / \cos \vartheta_1, & Z_2 &= \rho_2 c_2 / \cos \vartheta_2, \\ \alpha &= k \cos \vartheta, & \alpha_1 &= k_1 \cos \vartheta_1 = k \sqrt{n_1^2 - \sin^2 \vartheta}, \\ \alpha_2 &= k_2 \cos \vartheta_2 = k \sqrt{n_2^2 - \sin^2 \vartheta}. \end{aligned} \quad (40.2)$$

Здесь ϑ_1 и ϑ_2 — углы преломления, связанные с углом падения волны соотношением

$$k \sin \vartheta = k_1 \sin \vartheta_1 = k_2 \sin \vartheta_2. \quad (40.3)$$

Теперь выражение для V_1 может быть получено из формулы (3.10) при следующей замене в ней обозначений $Z_3 \rightarrow Z$, $Z_2 \rightarrow Z_1$, $Z_1 \rightarrow Z_2$, $k_{2z} \rightarrow \alpha_1$. В результате находим

$$V_1 = \frac{(Z_1 + Z_2)(Z_1 - Z) e^{-i\alpha_1 d} + (Z_2 - Z_1)(Z_1 + Z) e^{i\alpha_1 d}}{(Z_1 + Z_2)(Z_1 + Z) e^{-i\alpha_1 d} + (Z_2 - Z_1)(Z_1 - Z) e^{i\alpha_1 d}}. \quad (40.4)$$

Рассматривая для определенности случай $z > z_0$ и подставляя в (36.2а) значения V_1 и V_2 , получаем

$$\begin{aligned} \Psi = k \int_{\Gamma_1} \frac{1}{N} [m_1 \alpha S \cos(\alpha z_0) + \alpha_1 \sin(\alpha z_0)] \sin[\alpha(h - z)] \times \\ \times H_0^{(1)}(kr \sin \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta, \end{aligned} \quad (40.5)$$

где

$$S = \frac{m_1 \alpha_2 \operatorname{tg}(\alpha_1 d) + i m_2 \alpha_1}{m_1 \alpha_2 - i m_2 \alpha_1 \operatorname{tg}(\alpha_1 d)}, \quad N = m_1 \alpha S \cos x + \alpha_1 \sin x. \quad (40.6)$$

Случай $z < z_0$ получается из (40.5) переменой ролей z и z_0 . Предельный случай двухслойной среды из формулы (40.5) можно получить двумя способами:

а) при $m_2 \rightarrow m_1$, $\alpha_2 \rightarrow \alpha_1$, что физически означает выравнивание свойств сред 1 и 2;

б) при $d \rightarrow 0$, что означает исчезновение промежуточного слоя. Читателю предоставляется произвести эти предельные переходы самому.

Анализ интеграла (40.5) производится в точности таким же образом, как в § 36. Путь интегрирования Γ_1 преобразовывается в Γ_3 (рис. 36.2), а последний в свою очередь оттягивается на бесконечность и переходит в путь Γ . В результате интеграл сводится к сумме вычетов подынтегрального выражения в полюсах, определяемых уравнением

$$N = m_1 \alpha S \cos x + \alpha_1 \sin x = 0, \quad (40.7)$$

а также к интегралу по берегам разреза, идущего от точки ветвления подынтегральной функции.

В подынтегральное выражение в (40.5) входят два радикала α_1 и α_2 , однако это выражение является четной функцией по отношению к α_1 и поэтому от выбора знака этого радикала не зависит. В результате остается неоднозначность функции, вызванная возможностью двойного выбора знака корня $\alpha_2 = k \sqrt{n_2^2 - \sin^2 \vartheta}$. Точкой ветвления двулистной поверхности Римана, на которой подынтегральная функция однозначна, является точка

$$\vartheta_2 = \arcsin n_2. \quad (40.8)$$

Интеграл по берегам разреза, идущего из этой точки, вычисляемый в точности так же, как соответствующий интеграл в § 36, даст боковую волну, распро-

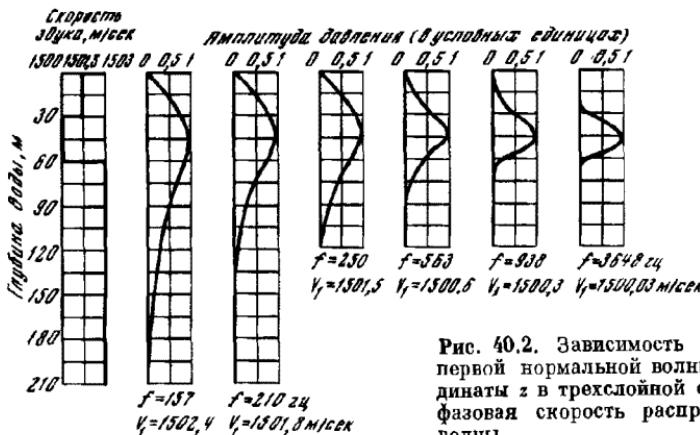


Рис. 40.2. Зависимость амплитуды первой нормальной волны от координаты z в трехслойной среде: V_1 — фазовая скорость распространения волны

страницающейся вдоль слоя со скоростью c_2 и с амплитудой, убывающей по закону $1/r^2$. Амплитуда волны зависит также от параметров всех трех сред.

Интересно остановиться на предельном переходе $d \rightarrow \infty$. При увеличении d амплитуда боковой волны уменьшается и в пределе обращается в нуль. Однако одновременно с этим корни уравнения (40.7) разделяются на два семейства. Одно семейство дает рассмотренные в § 37 корни, соответствующие нормальному волнам в двухслойной среде. В другом семействе корни при $d \rightarrow \infty$ бесконечно сближаются друг с другом, и сумма соответствующих им нормальных волн вырождается в интеграл, дающий боковую волну, распространяющуюся вдоль слоя со скоростью c_1 .

40.2. Нормальные волны в трехслойной среде. Переходим теперь к рассмотрению нормальных волн, даваемых вычетами подынтегрального выражения (40.5).

Положим $\psi = \psi_n + \psi_b$, где ψ_n — часть поля, обусловленная нормальными волнами; ψ_b — боковая волна. Из (40.5) имеем, учитывая правила определения вычетов

$$\psi_n = 2\pi i k \sum_l F(\vartheta_l) \left(\frac{\partial N}{\partial \vartheta} \right)^{-1}_{\vartheta_l} H_0^{(1)}(kr \sin \vartheta_l) \sin \vartheta_l, \quad (40.9)$$

где ϑ_l ($l = 1, 2, \dots$) — корни уравнения (40.7) и $F(\vartheta_l) = [m_1 \alpha S \cos(\alpha z_0) + \alpha \sin(\alpha z_0)] \sin[\alpha(h - z)]$. Можно показать, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{k \sin \vartheta_l} \left(\frac{\partial N}{\partial \vartheta} \right)_{\vartheta_l} &= \left\{ \frac{1}{\alpha z_1 \cos x} \left[(\alpha_1^2 - \alpha^2) \sin x \cos x - \alpha_1^2 x - \right. \right. \\ &- \frac{1}{m_1} \alpha d \cos^2 x (m_1^2 \alpha^2 + \alpha_1^2 \operatorname{tg}^2 x) - \frac{i m_2 \alpha (\alpha_2^2 - \alpha_1^2) \cos^2 x (m_1^2 \alpha^2 + \alpha_1^2 \operatorname{tg}^2 x)}{\alpha^2 (m_1^2 \alpha_2^2 - m_2^2 \alpha_1^2)} \Big] \Big\}_{\vartheta=\vartheta_l}, \quad (40.10) \\ &[m_1 \alpha S \cos(\alpha z_0) + \alpha \sin(\alpha z_0)]_{\vartheta_l} = -\frac{\alpha_1 \sin[\alpha_l(h - z_0)]}{\cos x}. \end{aligned}$$

В результате получаем

$$\psi_n = -2\pi i \sum_l m_1 \left\{ \frac{\alpha_1^2 \alpha}{[1]} \sin[\alpha(h - z)] \sin[\alpha(h - z_0)] \right\}_{\vartheta_l} H_0^{(1)}(kr \sin \vartheta_l). \quad (40.11)$$

Здесь под $[]$ понимается квадратная скобка в (40.10).

Как и в случае двухслойной среды, каждый член в этой сумме представляет собой отдельную нормальную волну, характеризующуюся своей скоростью распространения и зависимостью амплитуды от z .

На рис. 40.2 изображена (по Пекерису [213]) зависимость амплитуды первой нормальной волны для разных частот, начиная с $f = 157$ гц.

Слева изображена зависимость скорости звука от глубины, положенная в основу расчета. Критическая частота для этого случая составляет 103,5 гц. На рисунке указана также фазовая скорость распространения волны V_1 . Мы видим, что чем выше частота, тем больше первая нормальная волна сосредоточивается в промежуточном слое, где скорость звука наименьшая.

40.3. Фазовые и групповые скорости нормальных волн. Будем предполагать, что выполняется условие $c < c_1 < c_2$. При этом имеет место полное внутреннее отражение при углах, превышающих критическое значение. Это значит, что существуют незатухающие нормальные волны, если частота волн превышает критическую частоту. Можно показать, что в рассматриваемом случае фазовая скорость V_1 каждой нормальной волны изменяется от значения c_2 при соответствующей критической частоте до c в пределе при очень высоких частотах.

Фазовая скорость волн определяется из уравнения (40.7), которое можно также записать

$$\operatorname{tg} x = -m_1 \alpha S / \alpha_1, \quad x = \alpha h, \quad (40.12)$$

где S дается выражением (40.6). Входящие в эти соотношения величины α , α_1 и α_2 связаны с фазовой скоростью распространения волны вдоль слоя V уравнениями

$$\begin{aligned} \alpha &= k \sqrt{1 - (c/V)^2}, & \alpha_1 &= k_1 \sqrt{1 - (c_1/V)^2} & \text{при } V > c_1, \\ \alpha_1 &= ik_1 \sqrt{(c_1/V)^2 - 1} \equiv is_1, & \alpha_2 &= ik_2 \sqrt{(c_2/V)^2 - 1} \equiv is_2 & \text{при } V < c_1. \end{aligned} \quad (40.13)$$

При выводе этих выражений учтено, что $\omega/V = k \sin \vartheta$, где $k \sin \vartheta$ — проекция волнового вектора на плоскость $z = \text{const}$. Кроме того, использованы уравнения (40.2) и (40.3).

Уравнение (40.12) для определения фазовой скорости V может быть теперь записано в таких двух видах:

$$\operatorname{tg} x = -\frac{m_1 \alpha}{\alpha_1} \frac{m_1 s_2 \operatorname{tg}(\alpha_1 d) + m_2 s_1}{m_1 s_2 - m_2 \alpha_1 \operatorname{tg}(\alpha_1 d)} \quad \text{при } V > c_1, \quad (40.14)$$

$$\operatorname{tg} x = -\frac{m_1 \alpha}{s_1} \frac{m_1 s_2 \operatorname{th}(s_2 d) + m_2 s_1}{m_1 s_2 + m_2 s_1 \operatorname{th}(s_2 d)} \quad \text{при } V < c_1. \quad (40.15)$$

Эти уравнения могут быть положены в основу численных расчетов.

Рассмотрим некоторые частные случаи.

При критической частоте имеем $V = c_2$ и $s_2 = 0$. При этом уравнение (40.14) приводится к виду

$$\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = m_1 \alpha / \alpha_1, \quad (40.16)$$

где

$$x = \alpha h = kh \sqrt{1 - (c_1/c_2)^2}, \quad y = \sigma_1 d = k_1 d \sqrt{1 - (c_1/c_2)^2}. \quad (40.17)$$

Уравнение (40.16) позволяет найти критическую частоту, если известны толщины слоев и характеристики сред.

В частности, при $d \rightarrow 0$ (переход к двухслойной среде) имеем из (40.16) $\operatorname{tg} x \rightarrow \infty$, откуда получаем связь между критическими частотами ω_l ($l = 1, 2, \dots$) нормальных волн и толщиной слоя для двухслойной среды:

$$\omega_l h = (l - 1/2) \pi = \frac{\omega_l h}{c} \sqrt{1 - (c/c_1)^2}, \quad (40.18)$$

что является другой записью формулы (37.21).

Прекрасный анализ распространения звука в трехслойной среде имеется у И. Толстого и К. Клея ([94], § 4.6). Кривые для групповой скорости для высоких порядков имеют осциллирующий характер с рядом минимумов и

максимумов, что обусловлено взаимодействием колебаний верхнего и промежуточных слоев.

Хорошие экспериментальные исследования распространения низких частот в трехслойной среде были проведены Ф. И. Кряжевым и Н. А. Петровым [48].

§ 41. Волны в жидким слое, лежащем на одиородном упругом полупространстве

Реальное морское дно обладает определенным сопротивлением сдвигу. Если в случае осадочных пород этим сопротивлением можно пренебречь, то в случае твердых пород такое пренебрежение было бы уже несправедливым. Мы ограничимся здесь некоторыми замечаниями, касающимися вида нормальных волн, которые могут распространяться в слое.

В дисперсионном уравнении (36.21) для нормальных волн теперь мы должны положить $V_2 = -1$, а для V_1 воспользоваться выражением (7.7), в котором α , α_1 , β_1 и p_1 даются выражениями (7.3), (7.4) и (5.13). Для незатухающих нормальных волн (поглощением в средах пренебрегаем) α_1 и β_1 — мнимальные величины:

$$\sigma_1 = i \sqrt{\xi^2 - k_1^2}, \quad \beta_1 = i \sqrt{\xi^2 - \kappa_1^2}; \quad (41.1)$$

k_1 и κ_1 — волновые числа соответственно продольных и поперечных волн в упругом полупространстве. Тогда (7.7) можно записать

$$V_1 = - \frac{\kappa_1^4 \sqrt{\xi^2 - k_1^2 + 4im\alpha\xi^2(p_1^2 - \sqrt{\xi^2 - k_1^2} \sqrt{\xi^2 - \kappa_1^2})}}{\kappa_1^4 \sqrt{\xi^2 - k_1^2 - 4im\alpha\xi^2(p_1^2 - \sqrt{\xi^2 - k_1^2} \sqrt{\xi^2 - \kappa_1^2})}} = -e^{i\varphi}, \quad (41.2)$$

$$\begin{aligned} \varphi &= \operatorname{arctg} \frac{4m\alpha\xi^2(p_1^2 - \sqrt{\xi^2 - k_1^2} \sqrt{\xi^2 - \kappa_1^2})}{\kappa_1^4 \sqrt{\xi^2 - k_1^2}} = \\ &= \operatorname{arctg} \frac{mb_1^4 \sqrt{(V/c)^2 - \frac{1}{4} [(2 - V^2/b_1^2)^2 - 4 \sqrt{1 - (V/c_1)^2} \sqrt{1 - (V/b_1)^2}]}}{V^4 \sqrt{1 - (V/c_1)^2}}, \end{aligned} \quad (41.3)$$

где учтено, что $\xi = \omega/V$, $k = \omega/c$, $k_1 = \omega/c_1$, $\kappa_1 = \omega/b_1$, V — фазовая скорость нормальной волны, c — скорость звука в жидкости, c_1 и b_1 — скорости продольных и поперечных волн в упругом полупространстве.

Учитывая, что в (36.21) $b \equiv ix = i\zeta \sqrt{1 - (c/V)^2}$, мы можем записать это уравнение в виде

$$\exp [2i(\varphi + \sigma h)] = 1 \quad (41.4)$$

или

$$\sigma h = l\pi - \varphi, \quad l = 0, 1, 2, \dots, \quad (41.5)$$

или

$$kh = (l\pi - \varphi) [1 - (c/V)^2]^{-1/2}. \quad (41.6)$$

Последнее уравнение позволяет каждому V сопоставить определенное k , т. е. построить дисперсионную кривую. Интересные следствия получаются из этого уравнения для нулевой нормальной волны. Имеем, полагая в (41.6) $l = 0$,

$$kh = -[1 - (c/V)^2]^{-1/2}\varphi. \quad (41.7)$$

Заметим, что квадратная скобка в (41.3) обращается в нуль при $V = V_R$, где V_R — скорость волны Рэлея (см. уравнение (6.21)). При $V < V_R$ — случай, который мы только и будем рассматривать, эта скобка отрицательна. Предположим далее, что $c < V_R$. Тогда возможны два случая:

$$1) c < V < V_R, \quad 2) V < c < V_R. \quad (41.8)$$

В первом случае, как видно из (41.3), ф вещественная отрицательная величина и уравнение (41.7) позволяет получить соответственное k при любом V в пределах условия 1). При $V \rightarrow V_R$ мы имеем $k \rightarrow 0$, т. е. при понижении частоты скорость нормальной волны стремится к скорости волны Рэлея на свободной границе упругого полупространства. В этом случае жидкий слой не играет никакой роли (его толщина пренебрежимо мала по сравнению с длиной волны). В случае 2) согласно (41.3) мы имеем

$$\varphi = -i\eta, \quad \eta = -\operatorname{arcth} \frac{mb_1^4 \sqrt{1-(V/c)^2} [(2-V^2/b_1^2)^2 - 4\sqrt{1-(V/c)^2} \sqrt{1-(V/b_1)^2}]}{V^4 \sqrt{1-(V/c_1)^2}}, \quad (41.9)$$

где η — положительно. Уравнение (41.7) при этом запишется

$$kh = \eta / \sqrt{1 - (c/V)^2}. \quad (41.10)$$

Снова при заданной V мы находим соответственно k (т. е. частоту). Отметим, что если взять за V скорость поверхности волны Стонели, удовлетворяющую

уравнению (7.39), то аргумент arcth в (41.9) будет равен -1 , а следовательно, $\eta = \infty$ и согласно (41.10) $k = \infty$. Таким образом, при высоких частотах нулевая нормальная волна вырождается в волну Стонели, удерживающую границей жидкость — упругое полупространство. Жидкий слой в этом случае эквивалентен жидкому полупространству (поверхностная волна затухает, не доходя до верхней границы слоя).

Таким образом, мы видим, что нулевая нормальная волна существует при любых частотах. В этом существенное отличие рассматриваемого случая от случая двухслойной жидкости, где на частотах, ниже критической, распространяющихся нормальных волн нет.

На рис. 41.1 изображены три дисперсионные кривые (взятые из [115]) для волн $l = 0$ при значениях коэффициента Пуассона $\sigma = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$ и $\rho_1 = \rho$. По оси абсцисс отложено λ/h (λ — длина звуковой волны в жидкости), по оси ординат — отношение V/c . При $\lambda \rightarrow 0$ для V получаем скорость волны Стонели, при $\lambda \rightarrow \infty$ скорость волны Рэлея (при $\sigma = 0,5$, например, $V = 1,432 \text{ c} = 0,955 b_1$). На этом же рисунке изображены дисперсионные кривые для волн $l = 1$ и $l = 2$ при $\sigma = \frac{1}{2}$, рассчитанные по формуле (41.6). Для этих кривых мы не имеем ничего принципиально нового по сравнению со случаем двухслойной жидкости. Для каждой кривой имеем $V \geq c$, причем для каждого l существует своя критическая частота, соответствующая $V = b_1$ (предполагается, что $b_1 > c$). Действительно, из (41.6) видно, что вещественные k возможны только при вещественных φ , для чего согласно (41.3) необходимо $V \geq b_1$. При $V = b_1$ имеем

$$\varphi = \varphi_0 = \operatorname{arctg} \{m [(b_1/c)^2 - 1]^{1/2} [1 - (b_1/c_1)^2]^{-1/2}\} \quad (41.11)$$

и волновое число k_m , соответствующее критической частоте, находится из уравнения

$$kh = (l\pi - \varphi_0) [1 - (c/b_1)^2]^{-1}. \quad (41.12)$$

На рис. 41.1 критическим частотам соответствуют $\lambda/h = 3,00$ для $l = 1$ и $\lambda/h = 1,46$ для $l = 2$.

Распространение волн в слое жидкости, лежащем на упругом полупространстве, рассмотрено в книгах И. Толстого и К. Клея [94], В. Юнга, Б. Ярдесского и Ф. Пресса [145] в работах [104, 115, 242, 37, 38]. Расчет характеристик волн типа рэлеевской в системе жидкий слой — упругое полу-

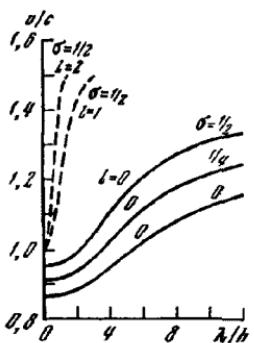


Рис. 41.1. Дисперсионные кривые для волн в слое с учетом сдвиговой упругости грунта ($\rho_1 = \rho$)

пространство см. в работе Дормана [137]. Распространение звукового импульса в слое жидкости, лежащем на упругом полупространстве, рассмотрено в работе Е. Стрика, В. Ровера и Т. Вининга [243], а эта же задача для случая, когда слой жидкости лежит на упругом слое, который в свою очередь покоятся на упругом полупространстве, рассмотрена в работе А. Виктора, Ф. Спицногля и Е. Маклероя [257].

§ 42. Нормальные волны в упругом слое [13]

Из предыдущего ясно, насколько важным является определение таких характеристик нормальных волн, как фазовая и групповая скорости, распределение амплитуды волны по координате, перпендикулярной слоям. В § 36.4 показано, как дисперсионное уравнение для нормальных волн в жидким слое может быть получено простым путем, без анализа интегральных выражений для поля в слое. Этот метод можно распространить и на случай упругого слоя, ограниченного произвольными неоднородными упругими полупространствами, что и будет сделано ниже.

Слой предполагаем однородным, ограниченным плоскостями $z = 0$, h . Волновые числа, как всегда, обозначаем $k = \omega/c$, $\alpha = \omega/b$; c и b — скорости продольных и поперечных волн в слое. Рассматриваем случай волн, поляризованной в плоскости распространения. В случае горизонтальной поляризации (SH-волны) задача вполне аналогична уже рассмотренной в § 36.4.

Потенциалы продольных φ и поперечных ψ волн в слое на больших расстояниях от источника по аналогии с (36.27) можно записать

P -волна

$$\varphi = \varphi_+ + \varphi_-, \quad \varphi_+ \equiv Ae^{i(\xi x + \alpha z)}, \quad \varphi_- \equiv Be^{i(\xi x - \alpha z)};$$

S -волна

$$\psi = \psi_+ + \psi_-, \quad \psi_+ \equiv Ce^{i(\xi x + \beta z)}, \quad \psi_- \equiv De^{i(\xi x - \beta z)}, \quad (42.1)$$

$$\alpha = \sqrt{k^2 - \xi^2}, \quad \beta = \sqrt{\alpha^2 - \xi^2},$$

где $\xi = \omega/V$ — горизонтальное волновое число; V — фазовая скорость волны.

Обратимся к соотношениям на границах слоя. Обозначим, так же как в § 33, через $V_{ll}^{(1)}$, $V_{ll}^{(1)}$, $V_{ll}^{(1)}$ и $V_{ll}^{(1)}$ различные коэффициенты отражения на нижней границе слоя ($z = 0$). При этом $V_{ll}^{(1)}$ дает амплитуду потенциала отраженной P -волны при падающей P -волне; $V_{ll}^{(1)}$ дает амплитуду P -волны при падающей S -волне; $V_{ll}^{(1)}$ дает амплитуду S -волны при падающей P -волне; $V_{ll}^{(1)}$ дает амплитуду S -волны при падающей S -волне.

Коэффициенты $V_{ll}^{(1)}, \dots$ зависят от ξ и найдены в § 8.1.

На нижней границе слоя волны φ_- и ψ_- — падающие, а волны φ_+ и ψ_+ — отраженные. Амплитуда отраженной волны φ_+ будет определяться амплитудами обеих падающих волн φ_- и ψ_- , а также коэффициентами $V_{ll}^{(1)}$ и $V_{ll}^{(1)}$. То же самое нужно сказать и относительно ψ_+ .

Поэтому имеем на нижней границе

$$z = 0 \begin{cases} \varphi_+ = V_{ll}^{(1)}\varphi_- + V_{ll}^{(1)}\psi_-, \\ \psi_+ = V_{ll}^{(1)}\varphi_- + V_{ll}^{(1)}\psi_-. \end{cases} \quad (42.2)$$

На верхней границе, наоборот, φ_+ и ψ_+ будут падающими, а φ_- и ψ_- — отраженными волнами. Поэтому аналогично

$$z = h \begin{cases} \varphi_- = V_{ll}^{(2)}\varphi_+ + V_{ll}^{(2)}\psi_+, \\ \psi_- = V_{ll}^{(2)}\varphi_+ + V_{ll}^{(2)}\psi_+, \end{cases} \quad (42.3)$$

где $V_{ll}^{(2)}, \dots, V_{ll}^{(3)}$ — коэффициенты отражения от верхней границы.

Подставляя в (42.2) и (42.3) выражения (42.1), получаем систему из четырех однородных уравнений относительно A , B , C и D

$$\begin{aligned} A &= V_{ll}^{(1)}B + V_{ll}^{(1)}D, & C &= V_{ll}^{(1)}B + V_{ll}^{(1)}D, \\ Be^{-i\alpha h} &= V_{ll}^{(2)}Ae^{i\alpha h} + V_{ll}^{(2)}Ce^{i\beta h}, & De^{-i\beta h} &= V_{ll}^{(2)}Ae^{i\alpha h} + V_{ll}^{(2)}Ce^{i\beta h}. \end{aligned} \quad (42.4)$$

Система будет иметь отличные от нуля решения только при условии, что детерминант системы будет равен нулю. В результате после сравнительно несложных преобразований получаем

$$\begin{aligned} e^{i(\alpha+\beta)h}[V_{ll}^{(1)}V_{ll}^{(1)} - V_{ll}^{(1)}V_{ll}^{(1)}] &[V_{ll}^{(2)}V_{ll}^{(2)} - V_{ll}^{(2)}V_{ll}^{(2)}] - V_{ll}^{(1)}V_{ll}^{(2)}e^{i(3-\alpha)h} - \\ &- V_{ll}^{(1)}V_{ll}^{(2)}e^{-i(3-\alpha)h} - (V_{ll}^{(1)}V_{ll}^{(2)} + V_{ll}^{(1)}V_{ll}^{(2)}) + e^{-i(\beta+\alpha)h} = 0. \end{aligned} \quad (42.5)$$

Это и будет дисперсионное уравнение для твердого слоя. Решая его, найдем бесконечную совокупность корней ξ_l , $l = 1, 2, 3, \dots$

Фазовая скорость распространения l -й нормальной волны вдоль слоя будет $V_l = \omega/\xi_l$. В общем случае V_l будет комплексной величиной, откуда можно определить и затухание волн.

Групповая скорость нормальных волн, как всегда, будет вычисляться по формуле $U = d\omega/d\xi_l$.

Если в уравнении (42.5) положить $V_{ll}^{(1)} = V_{ll}^{(1)} = V_{ll}^{(2)} = V_{ll}^{(2)} = 0$, что соответствует (чисто гипотетическому) случаю выключения взаимодействия продольных и поперечных волн, то это уравнение принимает вид $[e^{i\alpha h}V_{ll}^{(1)}V_{ll}^{(2)} - e^{-i\alpha h}][e^{i\beta h}V_{ll}^{(1)}V_{ll}^{(2)} - e^{-i\beta h}] = 0$, т. е. разбивается на два совершенно эквивалентных уравнения, одно из которых относится к продольным, а другое к поперечным волнам.

Наконец, заметим, что, решая уравнения (42.4), можно три постоянные выразить через четвертую, например, B , C и D через A . Подставляя найденные таким образом постоянные в выражения (42.1), получаем функции, характеризующие зависимость от z поля любой нормальной волны. Опять для каждой нормальной волны остается неопределенным один коэффициент A , который зависит от местоположения и мощности источника.

**ПОЛЕ ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА
В НЕПРЕРЫВНО СЛОИСТОЙ СРЕДЕ.
ЛУЧЕВАЯ ТРАКТОВКА**

Лучевой метод, несмотря на его приближенность, остается все еще мощным средством для изучения распространения волн в неоднородных средах в случае достаточно высоких частот. В этой главе мы изложим некоторые вопросы лучевой теории волноводного распространения, а также дадим обоснование этой теории, исходя из волновых представлений. Подробно будет рассмотрено поле при наличии каустик. При волноводном распространении лучевой подход применим при неслишком больших расстояниях между излучателем и точкой приема. Этот вопрос рассматривается в § 45.3.

**§ 43. Волноводное распространение
в непрерывно слоистых средах**

Общие вопросы лучевой теории волновых полей рассматривались рядом авторов (см., например, обзор Ю. А. Кравцова [47]). Лучевой подход позволяет сравнительно просто получить ряд важных сведений о распределении звукового поля в пространстве.

Мы ограничимся случаем, когда скорость волн является функцией одной (вертикальной) координаты z^* .

43.1. Лучевая картина в волноводе. Рассмотрим вначале для простоты волновод, уровень минимальной скорости звука в котором совпадает с абсолютно отражающей границей. При удалении же от границы скорость монотонно возрастает. На рис. 43.1 изображен соответственный профиль $c(z)$. Излучатель волн будем вначале предполагать расположенным в плоскости $z = 0$. В точку наблюдения $P(r, z)$ будут приходить различные лучи (на рис. 43.2, *a* изображен один из них). Каждый из этих лучей можно характеризовать или углом выхода из излучателя или числом отражений от границы. Обозначим (см. рис. 43.2) χ_0 — угол наклона луча по отношению к границе при выходе его из излучателя (угол скольжения), $\Delta = \Delta(\chi_0)$ — расстояние, проходимое лучом «по горизонтали» между двумя последовательными отражениями от границы (длина цикла), $g = g(z)$ — отрезок, который надо добавить к r (рис. 43.2, *a*) или вычесть из r (рис. 43.2, *b*), чтобы получить целое число циклов. Очевидно, $g(z) < \Delta(\chi_0)/2$.

Петрудно видеть, что имеет место одно из двух равенств:

$$r = N\Delta + g \quad \text{или} \quad r = (N + 1)\Delta - g, \quad N = 0, 1, 2, \dots \quad (43.1)$$

Первое из них относится к случаю, когда точка P лежит на нисходящей ветви луча (рис. 43.2, *a*), а второе, когда она лежит на восходящей ветви (рис. 43.2, *b*). N — число отражений луча от границы. На рис. 43.2 $N = 3$. Соотношения (43.1) можно рассматривать как уравнения для определения угла выхода χ_0 при заданных r , z и N . Связем Δ и g с профилем $c(z)$. На рис. 43.3 изобра-

* Рассмотрение более общего случая см., например, L. P. Solomon, L. Armijo. J. Acoust. Soc. Amer., 1971, 50, N 3 (P. 2), 960.]

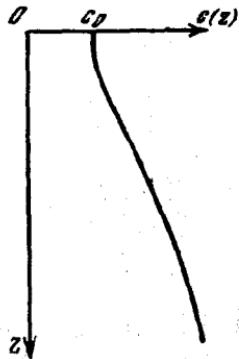
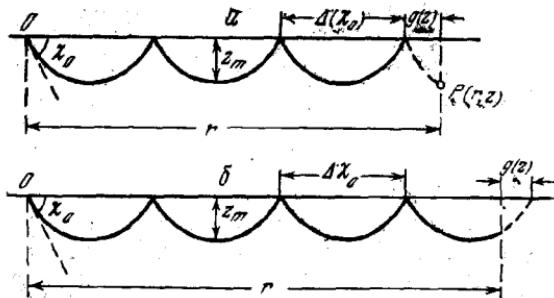


Рис. 43.1. Профиль скорости в приповерхностном волноводе

Рис. 43.2. Лучевая картина для приповерхностного волновода



жен элемент луча. Имеем $dr = dz/\operatorname{tg} \chi$. Поэтому

$$g = \int_0^z dz/\operatorname{tg} \chi. \quad (43.2)$$

Угол наклона луча $\chi(z)$ при произвольном z связан с углом $\chi(0) \equiv \chi_0$ законом Снеллиуса (см. (23.17)) с учетом того, что $\chi = \pi/2 - \vartheta$

$$n \cos \chi = \cos \chi_0, \quad n \equiv c_0/c(z). \quad (43.3)$$

Найдя из последнего уравнения $\operatorname{tg} \chi$, выражение (43.2) запишем

$$g(z) = \cos \chi_0 \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{n^2 - \cos^2 \chi_0}}, \quad \Delta = 2g(z_m). \quad (43.4)$$

Здесь z_m — максимальное удаление луча от границы. Поскольку при $z = z_m$ имеем $\chi = 0$, из (43.3) следует

$$n(z_m) = \cos \chi_0. \quad (43.5)$$

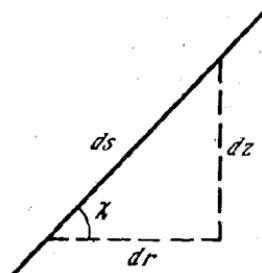
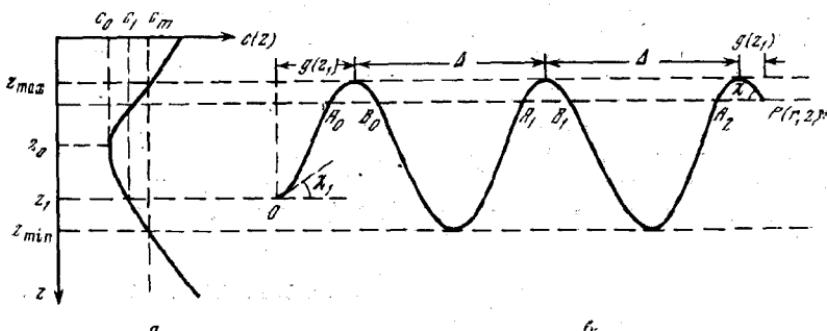


Рис. 43.3. Элемент луча для расчета лучевой картины

Рис. 43.4. Волновод в неоднородной среде
а — профиль скорости; б — один из лучей



Если при $z \rightarrow \infty$ также и $c(z) \rightarrow \infty$, то волноводу будут принадлежать лучи с любым χ_0 в интервале $(0, \pi/2)$. Если же $c(\infty) = c_1$ — конечная величина, то волноводом захватываются только те лучи, для которых

$$\chi_0 < \chi_0^{\max} = \arccos n_1, \quad n_1 \equiv c_0/c_1. \quad (43.6)$$

Лучи, для которых $\chi_0 > \chi_0^{\max}$, уходят на бесконечность и не возвращаются обратно к границе. Они не принадлежат волноводу и уравнение (43.5) не имеет в этом случае решения для z_m . Угол χ_0^{\max} является важной характеристикой волновода.

Рассмотрим теперь общий случай, когда минимум $c(z)$ («ось волновода») не совпадает с отражающей границей. Пусть профиль скорости $c(z)$ изображается графиком слева на рис. 43.4. Здесь z_0 — уровень минимальной скорости, а $c_0 \equiv c(z_0)$. Пусть в точке $r = 0, z = z_1$ расположен излучатель O (рис. 43.4, б). Рассмотрим луч, вышедший из излучателя под углом скольжения χ_1 . Он будет заворачивать на горизонтах z_{\max} и z_{\min} . Обозначим $c(z_{\max}) = c(z_{\min}) = c_m$. Определим значения r , при которых этот луч при дальнейшем

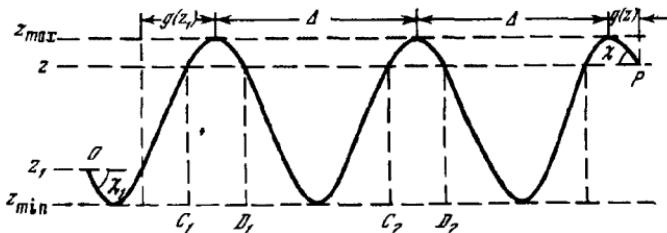


Рис. 43.5. То же, что на рис. 43.4, б, но для луча, вышедшего из излучателя вниз

своем ходе пересечет плоскость с заданным z (точки $A_0, B_0, A_1, B_1, A_2, P$ на рис. 43.4, б). Пусть Δ — длина полного цикла луча, $g(z_i)$ — проекция на горизонтальную плоскость $z = \text{const}$ пути луча от 0 до верхней точки заворота. Совершенно аналогично (43.4) имеем

$$g(z) = \cos \chi_1 \int_z^{z_{\max}} \frac{dz}{\sqrt{n^2(z) - \cos^2 \chi_1}}, \quad n(z) \equiv c_1/c(z); \quad (43.7)$$

$$\Delta = 2 \cos \chi_1 \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} \frac{dz}{\sqrt{n^2(z) - \cos^2 \chi_1}}. \quad (43.8)$$

Как видно из рис. 43.4, б, горизонтальная координата пересечения луча с горизонтом z дается соотношением

$$r_{\text{вв}} = N\Delta + g(z_1) - g(z), \quad r_{\text{ви}} = N\Delta + g(z_1) + g(z), \quad N = 0, 1, 2, \dots \quad (43.9)$$

Здесь $r_{\text{вв}}$ или $r_{\text{ви}}$ означают соответственно координату точек A_0, A_1, \dots или B_0, B_1, \dots Индекс «вв» (верх, верх) означает, что излучатель и приемник оба находятся на восходящих ветвях луча. Индекс «ви» (верх, низ) означает, что излучатель находится на восходящей, а приемник на нисходящей ветвях.

На рис. 43.5 изображен луч, вышедший из O под тем же, что и на рис. 43.4, б, углом χ_1 , но вниз. Он заворачивает на тех же горизонтах z_{\min}, z_{\max} , а горизонтальные координаты точек $C_1, D_1, C_2, D_2, \dots$ его пересечения с горизонтом z будут даваться равенствами:

$$r_{\text{нв}} = (N + 1)\Delta - g(z_1) - g(z), \quad r_{\text{ни}} = (N + 1)\Delta - g(z_1) + g(z). \quad (43.10)$$

Здесь «нв» означает «низ, верх», а «ни» означает «низ, низ». N пробегает те же значения, что и в (43.9). При выборе произвольной точки наблюдения

$P(r, z)$ в заданном положении излучателя может оказаться, что ни одно из этих уравнений не удовлетворяется. Это случай, когда P лежит в области геометрической тени. Если же в P приходит один или несколько лучей, то из всех уравнений (43.9) и (43.10) будет удовлетворяться одно или несколько уравнений, давая при этом в качестве своих решений углы выхода χ_1 соответствующих лучей из излучателя.

Приведем теперь формулы, позволяющие вычислять время, необходимое для пробега звукового импульса до точки приема P по каждому из лучей. Этим определяется и фаза луча в любой точке, знание которой необходимо при расчете интерференции лучей.

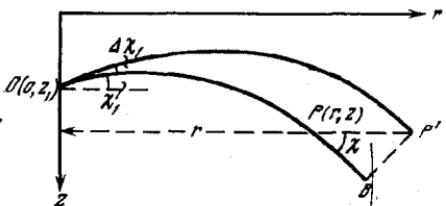


Рис. 43.6. К вычислению фактора фокусировки

Время, необходимое для пробега элемента длины луча ds (рис. 43.3), равно $dt = ds/c$, где $c = c(z)$ — скорость в данной точке, а $ds = dz/\sin \chi$. Аналогично (43.3) имеем $n \cos \chi = \cos \chi_1$. Поэтому

$$dt = \frac{1}{c_1} \frac{n^2 dz}{\sqrt{n^2 - \cos^2 \chi_1}}. \quad (43.11)$$

В результате получаем:

время, необходимое для пробега полного цикла луча,

$$T = \frac{2}{c_1} \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} \frac{n^2 dz}{\sqrt{n^2 - \cos^2 \chi_1}}; \quad (43.12)$$

время, необходимое для пробега отрезка луча от уровня z до вершины,

$$t(z) = \frac{1}{c_1} \int_z^{z_{\max}} \frac{n^2 dz}{\sqrt{n^2 - \cos^2 \chi_1}}. \quad (43.13)$$

В результате полное время пробега, например, по лучу класса «верх, верх», будет: $t_{\text{вв}} = NT + t(z_1) - t(z)$, $N = 0, 1, 2, \dots$

43.2. Поток энергии в лучевом приближении. Фактор фокусировки. Рассмотрим звуковое поле точечного ненаправленного источника. В рамках лучевой теории зависимость интенсивности (силы звука) волн, соответствующей любому из лучей, от расстояния, определяется законом расширения элементарной лучевой трубы.

Находим силу звука I — поток энергии за единицу времени через единичную площадку в произвольной точке $P(r, z)$ (рис. 43.6). Как и выше, обозначаем угол выхода соответствующего луча из источника O через χ_1 . При заданном z расстояние r , проходимое лучом, является функцией угла выхода χ_1 , т. е. $r = r(\chi_1)$. Пусть в точку P' , расположенную на том же горизонте, что и P , приходит луч, вышедший из O под углом $\chi_1 + \Delta \chi_1$. Очевидно*, $PP' = |\partial r / \partial \chi_1| \Delta \chi_1$. Сечение лучевой трубы в плоскости чертежа будет $BP = PP' \sin \chi = |\partial r / \partial \chi_1| \Delta \chi_1 \sin \chi$, где χ — угол скольжения в точке P . Если в плоскости $z = \text{const}$ угловой раствор лучевой трубы $\Delta \phi$, то площадь ее поперечного сечения в P будет

$$ds = |\partial r / \partial \chi_1| \sin \chi \Delta \chi_1 r \Delta \phi.$$

* Величина $|\partial r / \partial \chi_1|$ может быть и отрицательной.

Пусть W — полная мощность, излучаемая источником. В нашу лучевую трубку излучается энергия

$$dW = (1/4 \pi) W \cos \chi_1 \Delta \chi_1 \Delta \varphi.$$

Следовательно, удельный поток энергии или сила звука будет

$$I = \frac{dW}{ds} = \frac{W}{4\pi r} \frac{\cos \chi_1}{\sin \chi_1 |\partial r / \partial \chi_1|}. \quad (43.14)$$

Если в непосредственной близости от точечного излучателя звуковое давление задано в виде $\Psi = (1/R) \exp ikR$, то $W = 2\pi/\rho_1 c_1$. С другой стороны, $I = |\Psi|^2/2$ рс. Тогда для квадрата амплитуды давления в точке приема мы будем иметь из (43.14)

$$|\Psi|^2 = \frac{\rho c}{\rho_1 c_1} \frac{\cos \chi_1}{r \sin \chi_1 |\partial r / \partial \chi_1|}. \quad (43.14')$$

В однородной среде мы имели бы для силы звука

$$I_0 = W/4\pi R^2, \quad R^2 = r^2 + (z - z_1)^2. \quad (43.15)$$

Отношение $f = I/I_0$ мы будем называть фактором фокусировки. Очевидно,

$$f = \frac{|r^2 + (z - z_1)^2| \cos \chi_1}{r |\partial r / \partial \chi_1| \sin \chi_1}. \quad (43.16)$$

Как мы увидим ниже, существенный интерес представляют случаи, когда величина f или $1/f$ много больше единицы.

Существуют геометрические места точек, на которых фактор фокусировки обращается в бесконечность. Таковыми являются огибающие семейства лучей или каустики, а также фокусы.

Уравнение каждого из лучей можно задать в виде

$$r = r(\chi_1, z), \quad (43.17)$$

где χ_1 является параметром семейства лучей, выходящих из O . Как известно, огибающая такого семейства лучей получается путем исключения χ_1 из последнего уравнения и из уравнения

$$\partial r(\chi_1, z) / \partial \chi_1 = 0. \quad (43.18)$$

Отсюда, а также из (43.16) видно, что на огибающей семейства лучей фактор фокусировки действительно обращается в бесконечность. Ширина лучевых трубок здесь обращается в нуль. Еще более сильная фокусировка волн имеет место в фокусах, которые могут быть или изолированными или являться точкой возврата каустик (см. ниже).

43.3. Лучевая картина и каустики в приповерхностном волноводе. В качестве примера рассмотрим лучевую картину в простейшем волноводе, ограниченном при $z = 0$ полностью отражающей границей. Скорость звука в среде пусть возрастает при удалении от границы по линейному закону

$$c = c_0 (1 + az/2). \quad (43.19)$$

Предположим вначале, что излучатель находится на границе. Рассмотрим вышедший из него луч под углом скольжения χ_0 . Горизонтальное расстояние, пробегаемое лучом в пределах первого полуцикла, будет согласно (43.2):

$$r = \int_0^z dz / \operatorname{tg} \chi. \quad \text{Далее, согласно формулам (43.19) и (43.3), имеем}$$

$$\cos \chi = (1 + az/2) \cos \chi_0. \quad (43.20)$$

В результате

$$r = \int_0^z \frac{(1 + az/2) \cos \chi_0 dz}{\sqrt{1 - (1 + az/2)^2 \cos^2 \chi_0}},$$

после интегрирования и элементарных преобразований получаем

$$\left(r - \frac{2}{a} \operatorname{tg} \chi_0\right)^2 + \left(z + \frac{2}{a}\right)^2 = \frac{4}{a^2 \cos^2 \chi_0}. \quad (43.21)$$

Отсюда видно, что луч является дугой окружности с центром в точке $r = (2 \operatorname{tg} \chi_0)/a$, $z = -2/a$. Нетрудно показать, что выражение (43.21) справедливо для всего первого цикла луча. Из него при $z = 0$ получаем:

$$r - \frac{2}{a} \operatorname{tg} \chi_0 = \pm \frac{2 \operatorname{tg} \chi_0}{a},$$

откуда находим точки пересечения лучом границы в пределах первого цикла $r = 0$, $r = (4/a) \operatorname{tg} \chi_0$.

Следовательно, длина цикла (см. рис. 43.2)

$$\Delta = (4/a) \operatorname{tg} \chi_0. \quad (43.22)$$

Максимальное отклонение луча от границы z_m мы получим, положив в (43.21) $r = (2/a) \operatorname{tg} \chi_0$,

$$z_m = 2(1 - \cos \chi_0)/a \cos \chi_0. \quad (43.23)$$

Горизонтальное расстояние, проходимое лучом при переходе с горизонта $z = 0$ на горизонт z , обозначенное на рис. 43.2, a через $g(z)$, будет согласно (43.21)

$$g(z) = (2/a) \operatorname{tg} \chi_0 - \sqrt{4/a^2 \cos^2 \chi_0 - (z + 2/a)^2}. \quad (43.24)$$

Выразив здесь $z + 2/a$ через χ согласно (43.20), получаем

$$g(z) = 2(\sin \chi_0 - \sin \chi)/a \cos \chi_0. \quad (43.25)$$

Пусть теперь излучатель находится на горизонте $z = z_1$. Тогда уравнения для четырех семейств лучей, при приемнике, расположенному на горизонте z , будут даваться формулами (43.9) и (43.10). В них r — горизонтальное расстояние между излучателем и приемником, Δ дается формулой (43.22), формула (43.24) (или (43.25)) определяет $g(z)$ и $g(z_1)$. На рис. 43.7 изображена лучевая картина для этого случая. По оси абсцисс и ординат отложены соответственно безразмерные величины ar и $100 az$. Принято $az_1 = 6 \cdot 10^{-3}$. На этом же рисунке изображены каустики. На рис. 43.8 последние изображены отдельно. Каустики нигде на конечном расстоянии не начинаются и не кончаются. На горизонте $z = z_1$ при расстояниях $ar = 4N\sqrt{az_1}$, $N = 1, 2, \dots$ они имеют точки возврата, где степень фокусировки повышена.

В тех случаях, когда углы скольжения лучей малы, в выражениях (43.22) и (43.25) тангенсы и синусы можно заменить аргументами, а косинус принять за единицу. Тогда четыре семейства лучей (43.9) и (43.10) записутся:

$$ar = 4N\chi_0 \pm 2(\chi_0 - \chi_1) \pm 2(\chi_0 - \chi). \quad (43.26)$$

При этом, согласно закону Снеллиуса, имеем

$$\cos \chi_0/c_0 = \cos \chi_1/c_1 = \cos \chi/c. \quad (43.27)$$

Напоминаем, что здесь и ниже индексы 0 и 1 относятся соответственно к уровню наименьшей скорости звука (ось волновода) и уровню излучателя. Величины без индекса относятся к произвольному горизонту z .

Для определения фактора фокусировки (43.16) надо вычислить $dr/\partial \chi_1$. Дифференцируя (43.27), находим при малых углах:

$$d\chi_0/d\chi_1 = \chi_1/\chi_0, \quad d\chi/d\chi_1 = \chi_1/\chi. \quad (43.28)$$

Теперь, дифференцируя (43.26), находим

$$\frac{a}{\chi_1} \frac{\partial r}{\partial \chi_1} = \frac{4N}{\chi_0} \pm 2\left(\frac{1}{\chi_0} - \frac{1}{\chi_1}\right) \pm 2\left(\frac{1}{\chi_0} - \frac{1}{\chi}\right). \quad (43.29)$$

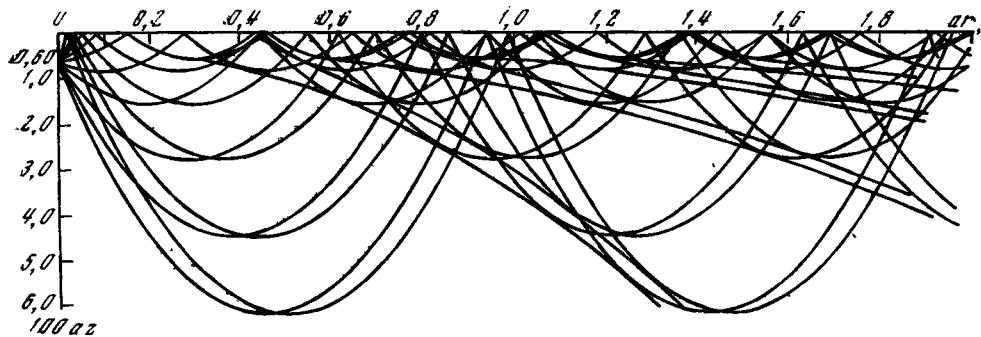


Рис. 43.7. Лучевая картина в приповерхностном звуковом канале

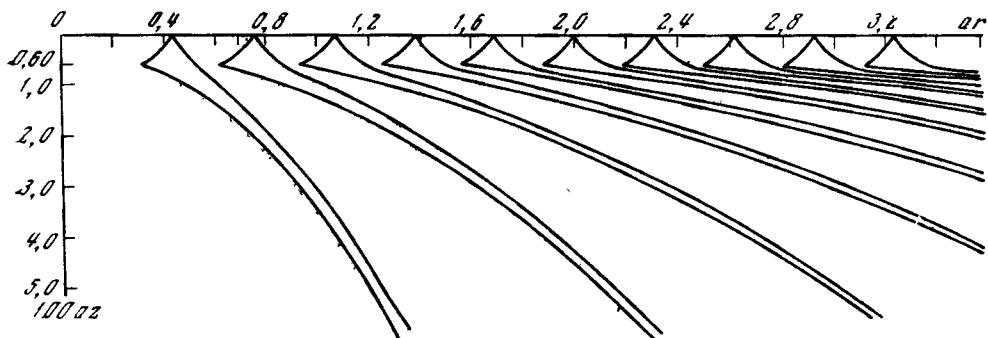


Рис. 43.8. Картина каустик в приповерхностном звуковом канале

Каустики будут определяться уравнением

$$2N/\chi_0 \pm (1/\chi_0 - 1/\chi_1) \pm (1/\chi_0 - 1/\chi) = 0 \quad (43.30)$$

и уравнением (43.26). Практически построение каустики производится следующим образом. Задаем z_1 , χ_1 , N и выбираем соотношение знаков в (43.26) и (43.30) для нужного нам семейства лучей. После этого из (43.27) находится χ_0 , а из (43.30) χ . Зная χ , мы из (43.27) найдем z , а из (43.26) r — координаты одной точки каустики и т. д.

43.4. Фокусировка на оси волновода и вблизи нее. Рассмотрим, следуя И. Толстому и К. Клею [94], симметричный волновод

$$c(z) = c_0 \operatorname{ch} bz, \quad -\infty < z < \infty \quad (43.31)$$

и предположим, что излучатель находится на оси волновода $z = 0$. Поскольку в данном случае $n = 1/\operatorname{ch} bz$, формула (43.4) запишется

$$g(z) = \cos \chi_0 \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1/\operatorname{ch}^2 bz - \cos^2 \chi_0}} = \int_0^z \frac{\operatorname{ch} bz dz}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \chi_0 - \operatorname{sh}^2 bz}} = \frac{1}{b} \arcsin (\operatorname{sh} bz / \operatorname{tg} \chi_0). \quad (43.32)$$

Максимальное отклонение луча от оси z_m определяется из соотношения $n(z_m) = \cos \chi_0$. Отсюда

$$z_m = \operatorname{arcch} (1/\cos \chi_0). \quad (43.33)$$

Длина цикла луча, согласно (43.4), равна

$$\Delta = \pi/b. \quad (43.34)$$

Таким образом, независимо от угла выхода из излучателя, луч возвращается в плоскость $z = 0$, пройдя дистанцию λ/b . На рис. 43.9, *a* изображен

профиль скорости звука, на рис. 43.9, б — лучевая картина. В точках O' , O'' , ... на оси волновода мы имеем изолированные фокусы.

Во всех случаях, когда профиль скорости $c(z)$ имеет вблизи $z = 0$ разложение вида $c = c_0 [1 + b^2 z^2/2 + O(z^3)]$, имеет место фокусировка параксиальных (выходящих под малыми углами χ_0) лучей. Расстояние между фокусами равно π/b .

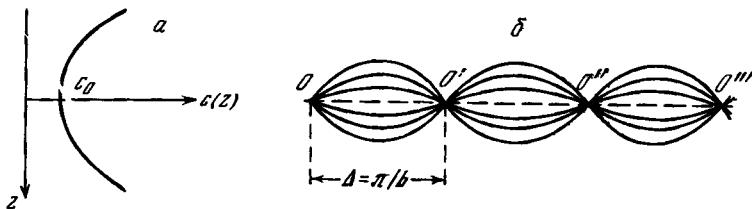


Рис. 43.9. Фокусировка лучей в волноводе с параболическим профилем

Фокусировка в параболическом волноводе ($c_0^2/c^2(z) = 1 - b^2 z^2$) была исследована детально в работах Юбералла и Николаса [204, 254]. Поле в области фокусов и вне их подсчитывалось суммированием достаточного количества нормальных волн. В этих работах имеются хорошие иллюстрации. Теорию параболического волновода см. также в § 52.2.

Исследование лучей, распространяющихся вблизи оси волновода, проведено А. Вильямсон и В. Горном [268] и особенно подробно М. Педерсеном [211] для весьма широкого класса профилей $c(z)$. В. Булдырев [20] показал, что при строгой волновой трактовке задачи лучам, близким к оси, соответствует своеобразная «осевая волна», и исследовал ее вид.

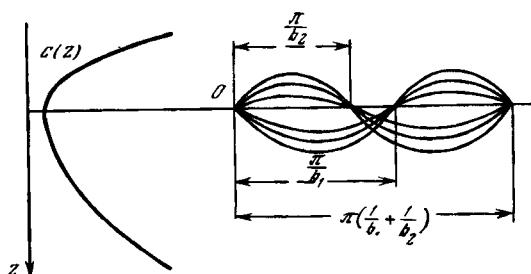


Рис. 43.10. Фокусировка лучей в несимметричном канале

Пусть теперь имеем несимметричный волновод

$$c = c_0 \operatorname{ch} b_1 z, \quad z \geq 0; \quad c = c_0 \operatorname{ch} b_2 z, \quad z \leq 0. \quad (43.35)$$

На рис. 43.10, а изображен профиль $c(z)$, на рис. 43.10, б — лучевая картина. Лучи, вышедшие из O по направлению вниз, фокусируются на расстоянии π/b_1 , лучи, вышедшие вверх, — на расстоянии π/b_2 . В этих точках будут находиться «частичные» фокусы. «Полный» фокус будет находиться на расстоянии $\pi/(1/b_1 + 1/b_2)$, где фокусируются как лучи, вышедшие вниз, так и лучи, вышедшие вверх. Это будет, кстати, и длиной полного цикла лучей при их распространении в волноводе.

Д. Уайт [267] решил задачу о возможных профилях скорости звука $c(z)$, при которых на оси волновода имеются фокусы, т. е. когда все лучи, вышедшие из излучателя вверх, или все лучи, вышедшие вниз, или те и другие собираются затем в точку на оси. Излучатель при этом предполагается расположенным также на оси. Среди найденных им профилей содержится, например, биэкспоненциальный профиль

$$c_0^2/c^2(z) = 2e^{(z_0-z)/p} - e^{2(z_0-z)/p}. \quad (43.36)$$

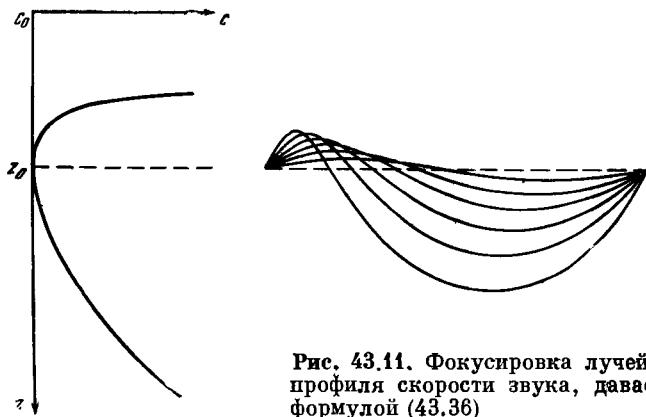


Рис. 43.11. Фокусировка лучей для профиля скорости звука, даваемого формулой (43.36)

На рис. 43.11 слева изображен профиль $c(z)$ для этого случая, справа — лучевая картина. Фокусировка имеет место при каждом *втором* пересечении лучом оси $z = z_0$. Д. Уайт показал, что профиль (43.31) (кстати, на фокусирующие свойства этого профиля впервые указал Л. Слихтер [239]) является единственным, при котором фокусировка имеет место при *каждом* пересечении оси канала.

В заключение параграфа уместно отметить, что при волноводном распространении использование лучевой картины возможно только при ограниченном расстоянии вдоль волновода. Этот вопрос рассмотрен ниже, в § 45.3.

§ 44. Лучевая теория как предельный случай волновой

Чтобы не усложнять картину непринципиальными деталями, рассмотрим снова распространение волн в полупространстве $z > 0$. Предположим, что скорость звука $c(z) = c_0$ в слое $0 \leq z \leq h$ и монотонно возрастает при возрастании ($z - h$). Плотность ρ , как и выше, предполагается постоянной всюду. Поле в слое может быть представлено выражением (36.1), где разные члены бесконечной суммы соответствуют различному числу отражений волн от границ однородного слоя $0 < z < h$. Мы предположили, что коэффициент отражения V_2 от границы $z = 0$ равен единице, и излучатель находится на границе ($z_0 = 0$). Поле вне слоя получится, если мы умножим выражение (36.6) на $\exp i(k_x x + k_y y) \cdot \sin \vartheta d\vartheta d\phi$ и проинтегрируем по ϑ и ϕ в тех же пределах, что и в (36.1). Положив снова $V_2(\vartheta) = 1$, $z_0 = 0$, мы получаем

$$z \geq h, \quad \psi = \frac{ik_0}{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^{+\infty} e^{i(k_x x + k_y y)} \sum_{N=0}^{\infty} (1 + e^{2ik_z h}) V_1^N e^{2iNk_z h} f(z, \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta d\phi. \quad (44.1)$$

Здесь k_0 — волновое число в слое, $f(z, \vartheta)$ — функция, дающая поле в полупространстве $z > h$ при падении на него из однородного полупространства, заполненного той же средой, что и слой под углом ϑ плоской волны единичной амплитуды. Пусть теперь в (44.1) $h \rightarrow 0$. В результате это выражение будет описывать поле во всем полупространстве $z \geq 0$ ^{*}. Кроме того, осуществим интегрирование по φ , как это сделано в § 26. Тогда получаем

$$z \geq 0, \quad \psi = ik_0 \sum_{N=0}^{\infty} \int_{\Gamma_1} V_1^N f(z, \vartheta) H_0^{(1)}(k_0 r \sin \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta. \quad (44.2)$$

* Как читатель, по-видимому, заметил, введение слоя $0 < z < h$ нам было необходимо только для того, чтобы воспользоваться результатами § 36. При других способах вывода формулы (44.2) предположение о наличии такого слоя не требуется.

Здесь $k_0 \equiv k(0)$. Путь интегрирования Γ_1 изображен на рис. 28.1. Обозначим

$$\xi = k_0 \sin \vartheta, \quad \alpha_0 = \sqrt{k_0^2 - \xi^2} = k_0 \cos \vartheta, \quad \operatorname{Im} \alpha_0 > 0. \quad (44.3)$$

Интегрирование по ϑ эквивалентно интегрированию по ξ по вещественной оси от $-\infty$ до $+\infty$. ξ имеет смысл «горизонтального» волнового числа для каждой из цилиндрических волн под интегралом в (44.2). Выражение (44.2) запишется

$$\Psi = i \sum_{N=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} V_1^N f_1(z, \xi) H_0^{(1)}(\xi r) \frac{\xi d\xi}{\alpha_0}. \quad (44.4)$$

Здесь $f_1(z, \xi) \equiv f(z, \vartheta)$; V_1 — коэффициент отражения плоской волны, падающей из однородного полупространства, где $k = k_0$, на границу рассматриваемого неоднородного полупространства $z > 0$.

Осуществим теперь в (44.4) переход к лучевому приближению, считая $k_0 \rightarrow \infty$. Как следует из § 24, $f_1(z, \xi)$ представляется в этом случае в виде суперпозиции волн, распространяющихся в сторону положительных и отрицательных z . Изложение в § 24 ведется для случая нормального падения волны. При переходе к наклонному падению надо $n(z)$ заменить на $\sqrt{n^2 - \sin^2 \vartheta_0} = \alpha/k_0$, $\alpha = \sqrt{k^2 - \xi^2}$. В результате, аналогично (24.24), можем записать

$$f_1(z, \xi) = f^+ + f^-,$$

$$f^+ = A \alpha^{-1/2} \exp\left(i \int_0^z \alpha dz\right), \quad f^- = B \alpha^{-1/2} \exp\left(-i \int_0^z \alpha dz\right). \quad (44.5)$$

Постоянные A и B необходимо выбрать такими, чтобы выполнялись условия:

1) $z = 0$, $f^+ = 1$, поскольку в соответствии с определением функции $f_1(z, \xi)$ падающая волна при $z = 0$ должна иметь единичную амплитуду;

$$2) z = 0, \quad f^-/f^+ = V_1(\xi) = \exp i\varphi,$$

$$\varphi = -\pi/2 + 2 \int_0^{z_m} \alpha dz. \quad (44.6)$$

Здесь $V_1(\xi)$ — коэффициент отражения волны от полупространства $z > 0$ в геометрическом приближении (см. выражение (24.27)). $z_m = z_m(\xi)$ — плоскость поворота волны, определяемая из уравнения *

$$k(z_m) = \xi. \quad (44.7)$$

Из условий 1) и 2) находим

$$A = (k_0^2 - \xi^2)^{1/4} \equiv \alpha_0^{1/2}, \quad B = \alpha_0^{1/2} \exp(i\varphi). \quad (44.8)$$

Подставим теперь $f_1(z, \xi)$ из (44.5) в (44.3), воспользуемся асимптотическим представлением (28.1) функции Ханкеля (удерживая лишь главный член) и обозначим

$$\gamma = \gamma(z, \xi) \equiv \int_0^z \alpha dz. \quad (44.9)$$

* В § 24 в плоскости поворота было принято $z = 0$. Здесь плоскость $z = 0$ совмещена с абсолютно отражающей границей.

Тогда получаем

$$\begin{aligned}\psi &= \sum_{N=0}^{\infty} (\psi_N^+ + \psi_N^-), \\ \psi_N^+ &= \sqrt{\frac{2}{\pi r}} e^{i\pi/4} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\gamma+N\varphi+\xi r)} \sqrt{\frac{\xi}{\alpha_0\alpha}} d\xi, \\ \psi_N^- &= \sqrt{\frac{2}{\pi r}} e^{i\pi/4} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i[-\gamma+(N+1)\varphi+\xi r]} \sqrt{\frac{\xi}{\alpha_0\alpha}} d\xi.\end{aligned}\quad (44.10)$$

Покажем, что ψ_N^+ и ψ_N^- , $N = 0, 1, 2, \dots$ дают в предельном случае высоких частот поле каждого из лучей, рассмотренных в § 43.1. Возьмем для примера ψ_N^+ . Интеграл по ξ будем оценивать методом перевала. Обозначим

$$w(r, z, \xi) = \gamma + N\varphi + \xi r. \quad (44.11)$$

Точка перевала $\xi = \xi_0$ найдется из уравнения $(dw/d\xi)|_{\xi_0} = 0$ или

$$r = -(N\varphi' + \gamma')|_{\xi_0}, \quad (44.12)$$

где штрих означает дифференцирование по ξ . Пользуясь соотношением $\xi_0 = k_0 \cos \chi_0$, точке перевала ξ_0 можно сопоставить угол скольжения χ_0 . Нетрудно доказать, что

$$\Delta(\chi_0) = -(\varphi')|_{\xi_0}, \quad (44.13)$$

где $\Delta(\chi_0)$ — длина цикла луча (см. рис. 43.2), выражающаяся формулой (43.4). Для этого достаточно продифференцировать выражение (44.6) для φ по ξ и положить $\xi = \xi_0 = k_0 \cos \chi_0$. Это же, однако, следует и из формулы (14.25) для смещения луча.

Таким же образом дифференцированием формулы (44.9) и сравнением с (44.3) доказывается, что

$$-(\gamma')|_{\xi_0} = g(\chi_0, z). \quad (44.14)$$

В результате формула (44.12) записывается

$$r = N\Delta(\chi_0) + g(\chi_0, z), \quad (44.15)$$

что совпадает с первым уравнением (43.1).

Если бы мы рассмотрели выражение для ψ_N^- , то получили бы луч из семейства, даваемого вторым из уравнений (43.1). Таким образом, уравнение (44.12) для определения точки перевала является уравнением луча.

Для оценки интеграла ψ_N^+ в (44.10) воспользуемся формулой (27.17). Учтем, что

$$(x_0)|_{\xi_0} = \sqrt{k_0^2 - \xi_0^2} = k_0 \sin \chi_0, \quad (x)|_{\xi_0} = \sqrt{k^2(z) - \xi_0^2} = k_0 \sqrt{n^2(z) - \cos^2 \chi_0}$$

или, поскольку согласно закону Снеллиуса $n(z) \cos \chi = \cos \chi_0$, то

$$(x)|_{\xi_0} = k_0 n(z) \sin \chi, \quad (44.16)$$

где χ — угол скольжения луча на произвольном горизонте z . После этого легко получаем

$$\psi_N^+ = 2(nk_0 r \operatorname{tg} \chi_0 \sin \chi |w''(\xi_0)|)^{-1/2} \exp i(w_0 + \delta), \quad (44.17)$$

где $\delta = \pi/2$, если $w''(\xi_0) > 0$, $\delta = 0$, если $w''(\xi_0) < 0$. Рассмотрим вначале фазу выражения (44.17). Как мы видим, она изменяется скачком на $\pi/2$ при переходе точки $w''(\xi_0) = 0$. В § 45 будет видно, что эта точка лежит на каустике. Таким образом, при продвижении по данному лучу фаза изменяется скачком в точке касания лучом каустики. Естественно, что этот эффект не

мог быть получен в § 43 в рамках чисто лучевых представлений. В остальном же фаза в (44.17) может быть получена простым вычислением времени пробега волны по лучу, характеризуемому параметром ξ_0 . Действительно, если это время равно t , то фаза будет $w = \omega t = k_0 c_0 t$. Учитывая формулу (43.11), для времени пробега получаем

$$w = 2k_0 N \int_0^{z_m} \frac{n^2 dz}{\sqrt{n^2 - \cos^2 \chi_0}} + k_0 \int_0^z \frac{n^2 dz}{\sqrt{n^2 - \cos^2 \chi_0}}. \quad (44.18)$$

Здесь первый интеграл дает время пробега по N полным циклам лучей, а второй — добавку, равную времени пробега по отрезку луча от границы $z = 0$ до уровня z .

В числителе каждого интеграла вычтем и добавим $\cos^2 \chi_0$. Тогда, например, для первого члена получаем

$$2N \int_0^{z_m} \alpha dz + 2k_0 N \cos^2 \chi_0 \int_0^{z_m} \frac{dz}{\sqrt{n^2 - \cos^2 \chi_0}}, \quad (44.19)$$

или, учитывая (44.6) и (43.4),

$$N(\varphi + \pi/2)_{\xi_0} + N\Delta(\chi_0) k_0 \cos \chi_0. \quad (44.20)$$

Преобразуя также и второй член в (44.18) и учитывая значение r , даваемое первым из двух уравнений (43.1), получаем

$$w = (\gamma + N\varphi + \xi r)_{\xi_0} + N\pi/2. \quad (44.21)$$

Сравнение с (44.11), взятым при $\xi = \xi_0$, показывает, что фаза, рассчитанная по времени пробега по лучу, лишь на величину $N\pi/2$ отличается от «точной» фазы w_0 . Эта разница получается из-за того, что в лучевой теории мы не учитываем потери фазы $\pi/2$ при каждом касании каустики, число которых равно N .

Покажем теперь, что и амплитуда волны в (44.17) совпадает с той, которая получается на основе лучевых методов. Учитывая (44.11), имеем

$$w' = \gamma' + N\varphi' + r. \quad (44.22)$$

Введем функцию $r(z, \xi)$ согласно соотношению

$$r(z, \xi) = -(\gamma' + N\varphi') \quad (44.23)$$

и будем отличать ее от фиксированного r (при заданном положении точки наблюдения).

Согласно (44.12) имеем $r(z, \xi_0) = r$. В этих обозначениях (44.22) запишется

$$w' = r - r(z, \xi), \quad (44.24)$$

причем $(w')_{\xi_0} = 0$. Дифференцируя (44.24), находим

$$w'' = -\partial r(z, \xi)/\partial \xi, \quad w''(\xi_0) = -(\partial r/\partial \xi)_{\xi_0}, \quad (44.25)$$

но поскольку $\xi = k_0 \cos \chi$, $\xi_0 = k_0 \cos \chi_0$, то $\partial/\partial \xi = -(1/k_0 \sin \chi) \partial/\partial \chi$, $k_0 \sin \chi_0 w''(\xi_0) = \partial r/\partial \chi_0$. В результате из (44.17) находим

$$|\psi_N^+|^2 = \frac{4 \cos \chi_0}{n r \sin \chi |\partial r/\partial \chi_0|}. \quad (44.26)$$

В рамках лучевой теории мы получили формулу (43.14'). Величина φ в настоящем параграфе вблизи источника дается формулой $(2/R) \exp ikR$, так как источник расположен на абсолютно отражающей границе. Этим объясняется наличие множителя 4 в (44.26). Далее, заметим, что χ_1 и c_1 в (43.14') соответствуют χ_0 и c_0 в (44.26), причем $n = c_0/c$. Кроме того, здесь $\rho = \rho_1$, поскольку плотность предполагалась постоянной. В остальном формулы (43.14') и (44.26) совпадают.

§ 45. Асимптотика поля в окрестности каустики

Вопрос о поле в окрестности каустики мы будем рассматривать, не привязываясь к частному случаю приповерхностного волновода, как это было в предыдущем параграфе. Однако по аналогии с рассмотренным там случаем можно предположить, что и в общем случае полное поле в среде асимптотически при $k \rightarrow \infty$ можно представить в виде интеграла вида

$$\psi = r^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi e^{iw} d\xi, \quad (45.1)$$

где $\Phi = \Phi(z, z_1, \xi)$ — медленно меняющаяся функция,

$$w = w(z, z_1, r, \xi) = f(z, z_1, \xi) + \xi r, \quad (45.2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = -r(z, z_1, \xi). \quad (45.3)$$

Как всегда, координаты точки излучения и приема будут $(0, z_1), (r, z)$ соответственно. Кроме координаты r — постоянной величины при заданном положении точки приема, мы, как и в § 44, вводим функцию $r(z, z_1, \xi)$. Выражение (45.1) соответствует определенному семейству лучей и в частном случае приповерхностного волновода является одним из членов суммы (44.10).

При большом k для вычисления интеграла (45.1) целесообразно применить метод перевала. Точка перевала ξ_0 находится из уравнений $(\partial w / \partial \xi)_{\xi_0} = 0$ или

$$r = r(z, z_1, \xi_0). \quad (45.4)$$

Поступая так же, как и при получении (44.17), и учитывая, что

$$(\partial^2 w / \partial \xi^2)_{\xi_0} = -(\partial r / \partial \xi)_{\xi_0} \equiv -r'_0, \quad (45.5)$$

мы находим в первом приближении метода перевала

$$\psi = \left(\frac{2\pi}{r} \right)^{1/2} e^{i(w_0 \pm \pi/4)} \Phi(\xi_0) |r'_0|^{-1/2}, \quad (45.6)$$

где знак перед $\pi/4$ в экспоненте выбирается тем же, что и знак перед $(-r'_0)$.

Формула (45.6) дает поле, соответствующее лучу, уравнение которого есть (45.4). ξ_0 связано с углами скольжения луча на горизонте излучателя χ_1 и горизонте приема χ соотношением

$$\xi_0 = k_1 \cos \chi_1 = k \cos \chi, \quad (45.7)$$

где k_1 и k — волновые числа на этих горизонтах.

45.1. Поле в окрестности неособой точки каустики. Формула (45.6) теряет смысл, когда

$$r'_0 \equiv (\partial r / \partial \xi)_{\xi_0} = 0. \quad (45.8)$$

Исключая из (45.4) и (45.8) параметр ξ_0 , мы получаем уравнение каустики $s(z, z_1, r) = 0$, т. е. уравнение огибающей нашего семейства лучей. Каждой точке каустики соответствует свое значение ξ_0 , характеризующее в то же время и луч, касающийся каустики в данной точке *.

Перейдем теперь к анализу поля на каустике и вблизи нее. Функция $r(z, z_1, \xi)$ при ξ , близких к ξ_0 , изображена на рис. 45.1. На каустике при $\xi = \xi_0$ имеем $r = r_0$, $(\partial r / \partial \xi)_{\xi_0} = 0$. В любую точку $r > r_0$ на рис. 45.1, *a* и $r < r_0$ на рис. 45.1, *b* приходят два луча, значения параметров которых ξ_1 и ξ_2 . Общим правилом является то, что каустика данного семейства лучей отделяет область, куда лучи этого семейства не попадают, от области, в каждую точку которой приходят два луча — один, уже коснувшийся каустики,

* Мы предполагаем, что каждой точке каустики касается лишь один луч («неособая точка» каустики).

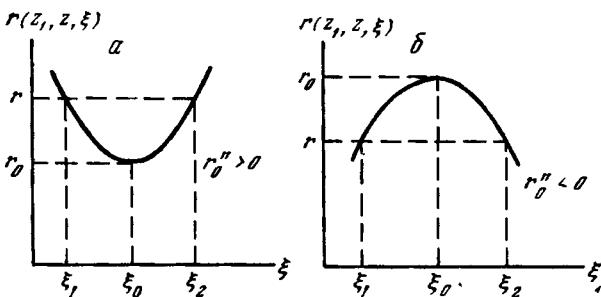


Рис. 45.1. К выводу выражения для поля в окрестности каустики

другой только приближающийся к ней (см., например, рис. 31.3). Рис. 45.1 наталкивает на мысль, что вблизи ξ_0 , соответствующего каустике, целесообразно воспользоваться разложением функции $r(z, z_1, \xi)$ в ряд около ξ_0

$$r(z, z_1, \xi) = r_0 + \frac{1}{2} r''_0 (\xi - \xi_0)^2 + \dots, \quad (45.9)$$

где

$$r''_0 = (\partial^2 r / \partial \xi^2)_{\xi_0} = -(\partial^3 w / \partial \xi^3)_{\xi_0}. \quad (45.9')$$

При отходе от каустики для ξ_1 и ξ_2 получаем из (45.9)

$$\xi_{1,2} = \xi_0 \mp [2(r - r_0)/r''_0]^{1/2}. \quad (45.10)$$

Подставив разложение (45.9) в (45.3), интегрированием по ξ можем найти $f(z, z_1, \xi)$, а затем с помощью (45.2) и w . Получаем

$$w(z, z_1, r, \xi) = w_0 + (r - r_0)(\xi - \xi_0) - \frac{1}{6} r''_0 (\xi - \xi_0)^3 + \dots, \quad (45.11)$$

где обозначено $w_0 \equiv w(z, z_1, r, \xi_0)$. Обратимся снова к интегралу (45.1). Вынося Φ за интеграл при $\xi = \xi_0$, а вместо w подставляя ряд (45.11), ограничившись выписанными членами, получаем

$$\Psi = r^{-1/3} \Phi(\xi_0) e^{iw_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[i(r - r_0)(\xi - \xi_0) - \frac{i}{6} r''_0 (\xi - \xi_0)^3 \right] d\xi. \quad (45.12)$$

Заменим ξ на новую переменную s и $r - r_0$ на безразмерное расстояние до каустики t

$$s = |r_0/2|^{1/3}(\xi - \xi_0) \operatorname{sign}(-r''_0), \quad t = |r_0/2|^{-1/3}(r - r_0) \operatorname{sign}(-r''_0). \quad (45.13)$$

Экспонента под интегралом теперь записывается $\exp i \left(st + \frac{1}{3} s^3 \right)$. Разбив интеграл по s на два: от $-\infty$ до 0 и от 0 до ∞ , интеграл от экспоненты преобразуем в интеграл от косинуса. В результате, учитывая определение функции Эйри (21.9), получаем

$$\Psi = 2^{4/3} \sqrt{\pi/r} |r''_0|^{-1/3} \Phi(\xi_0) e^{iw_0 v(t)}. \quad (45.14)$$

Поведение функции $v(t)$ изучено в § 21. Ее график см. на рис. 21.1. Имеем $v(0) = 0,6293$. При $t < 0$ функция имеет осциллирующий характер. Ее максимальное значение достигается при отрицательных t , а именно: $v(-1) = 0,949$. При $t > 0$ функция $v(t)$ монотонно и быстро спадает.

Надо помнить, что формула (45.14) получена лишь при ограниченном удалении от каустики, а именно таком, при котором можно ограничиться выписанными членами в разложении фазы (45.11). Учтя (45.13), а также потребовав, чтобы в (45.11) первый невыписанный член $r''_0 (\xi - \xi_0)^4$ был мал по сравнению с последним, выписаным, и используя выражение (45.10) для $\xi - \xi_0$,

получаем, что разность $r - r_0$ должна удовлетворять условию

$$r_0'''(r_0)^{-1/2}(r - r_0)^{1/2} \ll 1. \quad (45.15)$$

Введем пространственный масштаб R лучевой картины, за который можно, например, взять радиус кривизны каустики. Тогда имеем по порядку величины $r_0 \sim R/k^2$, $r_0'' \sim R/k^3$ и условие (45.15) перепишется:

$$[(r - r_0)/R]^{1/2} \ll 1. \quad (45.16)$$

Для расчета поля на каустике и в ее окрестности по формуле (45.14) совсем необязательно предварительно иметь интегральное представление поля (45.1). Предположим, что нам известно уравнение лучей (45.4), где ξ_0 связано с углами скольжения луча соотношением (45.7). Тогда могут быть вычислены $r_0 = (\partial^2 r / \partial \xi^2)_{\xi_0}$ и w_0 — фаза луча на каустике. Покажем, как, пользуясь лучевой теорией и формулой (45.14), можно определить амплитуду поля вблизи каустики. Выразим производные по ξ через производные по χ_1 — углу скольжения луча в точке излучения. Учитывая связь (45.7), имеем

$$\partial r / \partial \xi = -(1/k_1 \sin \chi_1) \partial r / \partial \chi_1. \quad (45.17)$$

Далее, учитывая, что на каустике $\partial r / \partial \chi_1 = 0$, имеем

$$(\partial^2 r / \partial \xi^2)_{\xi_0} = (1/k_1^2 \sin^2 \chi_1) \partial^2 r / \partial \chi_1^2. \quad (45.18)$$

Функция $\Phi(\xi_0)$ в (45.14), зависящая от мощности излучателя и не обладающая никакой особенностью на каустике, может быть определена из интенсивности поля (силы звука), в точках, достаточно удаленных от каустики. Взяв $|\psi|^2$ из (45.6) и сравнив ее с выражением (43.14'), найденным из лучевых представлений, получаем, учитывая также (45.17) и (45.18).

$$|\Phi(\xi_0)|^2 = \rho/2 \pi \rho_1 k \operatorname{tg} \chi_1 \sin \chi. \quad (45.19)$$

Теперь, подставляя этот результат в (45.14), можно найти квадрат амплитуды ψ в окрестности каустики.

$$|\psi|^2 = 2^{1/2} \frac{\rho k^{1/2} n^{4/3} \sin^{1/2} \chi_1 \cos \chi_1}{\rho_1 r \sin \chi} \left| \frac{\partial^2 r}{\partial \chi_1^2} \right|^{-1/2} v^2(t). \quad (45.20)$$

Изложенный метод определения поля в окрестности каустики исключительно на основе знания лучевой структуры поля иногда называют «наращиванием дифракционного мяса на лучевой скелете».

Представляет интерес рассмотреть выражение (45.14) при $-t \gg 1$. Воспользовавшись асимптотической формулой (21.13) для $v(t)$, удержав лишь главный член и выразив синус через экспоненты, получаем

$$\psi = \sqrt{\frac{\pi}{r}} [(r - r_0) r_0''/2]^{-1/4} \Phi(\xi_0) e^{i(w_0 + \pi/4)} [e^{-ix} + e^{i(\chi - \pi/2)}], \quad (45.21)$$

где $x = (2/3) a^{1/2}$, $a = -t$.

Покажем, что это же выражение получается, если воспользоваться формулой (45.6) для поля обычного луча и учесть, что в области $t < 0$ имеются два луча с точками перевала ξ_1 и ξ_2 (см. рис. 45.1). Действительно, если воспользоваться представлением фазы в виде ряда (45.11), то уравнение $\partial w / \partial \xi = 0$ для точки перевала дает два решения $\xi_{1,2}$, выражющиеся формулой (45.10). Дифференцируя (45.9), находим

$$\left(\frac{\partial r}{\partial \xi} \right)_{\xi_{1,2}} = r_0''(\xi_{1,2} - \xi_0) = \mp r_0'' [2(r - r_0)/r_0]^{1/2}. \quad (45.22)$$

Фазы $w_{1,2}$ в точках перевала получаются при подстановке $(\xi_{1,2} - \xi_0)$ в (45.11):

$$w_{1,2} = w_0 \mp \operatorname{sign}(r_0)^{2/3} [2(r - r_0)^3/r_0]^{1/2} = w_0 \mp (\operatorname{sign} r_0) x, \quad (45.23)$$

где w_0 — фаза на каустике.

Поле, даваемое двумя точками перевала, будет суммой выражений (45.6) (обозначим их через ψ_1 и ψ_2), в которых ξ_0 заменено последовательно на ξ_1 и ξ_2 . В силу медленности изменения Φ можно положить $\Phi(\xi_1) = \Phi(\xi_2) = \Phi(\xi_0)$. Тогда получаем, например, при $r_0'' < 0$

$$\psi_1 + \psi_2 = \left(\frac{\pi}{r}\right)^{1/2} \Phi(\xi_0) \{(r - r_0) r_0''/2\}^{-1/4} e^{i(w_0 + \pi/4)} [e^{-ix} + e^{i(x - \pi/2)}], \quad (45.24)$$

что совпадает с ψ в (45.21). Этот же результат, как нетрудно проверить, получается и при $r_0'' > 0$.

Как видно из (45.21), разность фаз двух лучей равна $2x - \pi/2$. Как можно показать, $2x$ является чисто геометрической разностью хода лучей, в то время как $-\pi/2$ возникает из-за того, что луч, коснувшийся каустики, дополнительно теряет фазу $\pi/2$.

Выражение (45.14) является асимптотическим (при $k \rightarrow \infty$) представлением поля на каустике и вблизи нее до расстояний, удовлетворяющих условию (45.15). Ю. А. Кравцовым [44, 45], а потом Д. Людвигом [195] была получена более точная асимптотическая формула для поля в окрестности каустики. Мы приведем здесь их результат в форме, изложенной В. А. Боровиковым и Б. Е. Кинбером *.

Пусть имеем какую-то точку $r = (x, y, z)$ в окрестности неособой точки каустики. Обозначим в этой точке эйконал подходящего к каустике луча через s_1 (фаза ks_1) и эйконал луча, который уже коснулся каустики, через s_2 (фаза ks_2). Расстояния от r до точек касания каустики вдоль лучей обозначим соответственно через ρ_1 и ρ_2 . Тогда оказывается, что выражением для поля, аналогичным нашему (45.14), но более точным, является

$$U = \{k^{1/4} E(r, k) v(-k^{2/3} A_1) + k^{-1/4} F(r, k) v'(-k^{2/3} A_1)\} \sqrt{\pi} e^{i(A_0)}, \quad (45.25)$$

где v' — производная от функции Эйри по ее аргументу и

$$A_0 = (s_1 + s_2)/2, \quad A_1 = \left[\frac{3}{4} (s_2 - s_1) \right]^{1/2}. \quad (45.26)$$

E и F — функции, допускающие разложение по степеням $1/k$, начиная с членов E_0 и F_0 , не зависящих от k (которыми мы и ограничимся)

$$E_0 = \left(\frac{2}{i\pi}\right)^{1/2} A_1^{1/4} \left[\frac{C(\xi_1)}{\sqrt{\rho_1}} + \frac{C(\xi_2)}{\sqrt{\rho_2}} \right], \quad F_0 = \left(\frac{2}{i\pi}\right)^{1/2} A_1^{-1/4} \left[\frac{C(\xi_2)}{\sqrt{\rho_2}} - \frac{C(\xi_1)}{\sqrt{\rho_1}} \right]. \quad (45.27)$$

При $r = r_0$, удовлетворяющих условию (45.15), формула (45.25) переходит в нашу формулу (45.14). Действительно, имеем для аргумента функции Эйри в (45.25)

$$-k^{2/3} A_1 = -k^{2/3} \left[\frac{3}{4} (s_2 - s_1) \right]^{1/2} = -\left[\frac{3}{4} (w_2 - w_1) \right]^{1/2}. \quad (45.28)$$

Мы найдем $w_2 - w_1$, подставляя в (45.11) последовательно ξ_1 и ξ_2 и беря затем разность получающихся выражений. В результате имеем

$$-k^{2/3} A_1 = -(3x/2)^{1/2} = -a = t. \quad (45.29)$$

В формуле (45.26) s_2 соответствует лучу, коснувшемуся каустики, что у нас соответствует w_2 , если $r_0'' > 0$. В случае $r_0'' < 0$ мы имеем $ks_1 = w_2$, $ks_2 = w_1$, но, как легко проверить, соотношение (45.29) остается неизменным.

Докажем далее, что при выполнении условия (45.15) член с $v'(-k^{2/3} A_1)$ в (45.25) будет мал по сравнению с первым, что обусловлено близостью ρ_1 и ρ_2 в (45.27) и вследствие этого малостью F_0 . Сопоставляя первый член в

* В. А. Боровиков, Б. Е. Кинбер. Геометрическая теория дифракции. В сб. «Аналитические методы в теории дифракции и распространения волн». М., Науч. совет по акустике АН СССР, Министерство радиотехн. пром. СССР, 1970.

фигурных скобках в (45.25) с (45.14), находим:

$$C(\xi_1) \approx C(\xi_2) \approx C(\xi_0) = 2^{-1/4} k^{-3/4} (i\pi)^{1/4} \Phi(\xi_0), \\ \rho_1 = \rho_2 = \rho, \quad A_1^{1/4} / \sqrt{\rho} = |r''_0|^{-1/4}. \quad (45.30)$$

Кроме того, учитывая (45.13), имеем при $t < 0$

$$A_1 = -k^{-3/4} t = k^{-3/4} |r''_0/2|^{-1/4} (r - r_0). \quad (45.31)$$

Следовательно, из (45.30) и (45.31) получаем

$$s \equiv \frac{1}{\sqrt{\rho}} = 2^{-1/4} k^{1/4} [(r - r_0) r''_0]^{-1/4}. \quad (45.32)$$

Теперь нетрудно установить, что для малости второго члена в фигурных скобках в (45.25) необходимо

$$(s_2 - s_1)/s \ll t^{1/4} v/v', \quad (45.33)$$

но $s_2 - s_1 = (\partial s / \partial \xi)_{\xi_0} (\xi_2 - \xi_1)$. Используя (45.32) и (45.10), неравенство (45.33) теперь перепишем в виде

$$r''_0 (r''_0)^{-1/4} (r - r_0)^{1/2} \ll t^{1/4} v/v'. \quad (45.34)$$

Или, если снова ввести пространственный масштаб лучевой картины R , то

$$[(r - r_0)/R]^{1/4} \ll t^{1/4} v/v'. \quad (45.35)$$

Нетрудно убедиться, что при значениях $(r - r_0)$, удовлетворяющих (45.16), неравенство (45.35) также удовлетворяется. Действительно, это сразу видно при $t \sim 1$, когда $v/v' \sim 1$. При $t \gg 1$ имеем $v/v' \sim t^{-1/4}$. Учитывая значение t согласно (45.13) и оценивая порядки величин, неравенство (45.34) запишем в виде

$$[(r - r_0)/R]^{1/4} (kR)^{-1/4} \ll 1, \quad (45.36)$$

что при выполнении (45.16), безусловно, выполняется, поскольку предполагается, что $kR \gg 1$ **.

Итак, сравнение с более точными формулами также показывает, что наша формула (45.14) является асимптотикой поля в области, удовлетворяющей весьма естественному условию (45.16). Заметим кстати, что в последнее не входит k .

Выражение (45.25) при $k \rightarrow \infty$ переходит в поле в лучевом приближении во всей окрестности каустики без ограничения даже условием (45.16). Действительно, используя асимптотические формулы для $v(t)$ и $v'(t)$, мы получаем для первого члена асимптотики из (45.25):

$$U = \frac{C(\xi_1)}{\sqrt{\rho_1}} e^{ik s_1} + \frac{C(\xi_2)}{\sqrt{\rho_2}} e^{i(k s_2 - \pi/2)},$$

т. е. поле, соответствующее двум лучам.

Отметим также, что фундаментальные исследования поля в окрестности каустики содержатся также в работах [63 и 47]. Поле в окрестности каустики при импульсном излучении (например, взрыв в случае подводной акустики) исследовано в работе Д. Закса и А. Зильбигера **.

45.2. Применение общей формулы к случаю приповерхностного канала. При расположении излучателя на границе приповерхностного канала, как это предполагалось в § 44, асимптотика поля в интегральном виде дается формулами (44.10). Из них ψ_N^+ при переходе к лучевой картине дает нисходя-

* Условие $kR \gg 1$, как нетрудно убедиться, обеспечивает выполнение неравенства (45.35) при t , близких к нулю.

** D. A. Sacks, A. Silbiger. Focusing and refraction of harmonic sound and transient pulses in stratified media. J. Acoust. Soc. Amer., 1971, 49, N 3(2), 824.

ющие участки луча (удаляющиеся от границы), а $\bar{\Psi}_N$ — восходящие (приближающиеся к границе) участки луча. Каустики имеются лишь на нисходящих участках лучей. Вид каустик можно представить из рис. 43.8, мысленно помещая источник на границу. При этом пары каустик сливаются в одну. Сравнивая ψ в (45.1) с ψ^+ в (44.10), мы находим, что в этом случае

$$\Phi = \sqrt{2/\pi} e^{i\pi/4} (\xi/3x_0)^{1/4}, \quad w = \gamma + N\varphi + \xi r + i\pi/4; \quad (45.37)$$

функция $r(z, \xi)$ при этом дается уравнением (44.15), где угол χ_0 заменяется на $\xi = k_0 \cos \chi_0$.

После этого вычисление поля вблизи каустик по формуле (45.14) производится без труда. Исключением являются участки каустики, имеющие горизонтальное или близкое к нему направления, так как при $a, \alpha_0 \rightarrow 0$ функ-

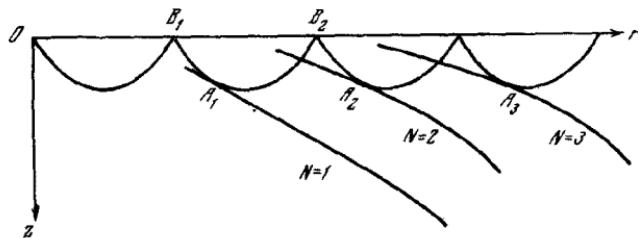


Рис. 45.2. Один из лучей и каустики в приповерхностном волноводе

ция Φ в (45.37) теряет смысл. Это ограничение естественно, так как, получая (44.10), мы пользовались асимптотикой поля плоских волн, которая несправедлива на горизонте поворота волны и вблизи его.

Рассмотрим фазу луча, приближающегося к каустике. Согласно (45.21) она равна $w_0 + \pi/4 - x$. На самой каустике ($x = 0$), если учесть (45.37), получаем для фазы луча $\Psi = (\gamma + N\varphi + \xi r)_{\xi_0} + \pi/2$ или, если учесть (44.6) и (44.9), то

$$\Psi = \Psi_0 - (N - 1)\pi/2, \quad (45.38)$$

где $\Psi_0 = \left[2N \int_0^z adz + \int_0^z az + \xi r \right]_{\xi_0}$ — геометрический набег фазы по лучу, сделавшему N целых циклов и удалившемуся после последнего отражения на расстояние z от границы. На рис. 45.2 изображен один из таких лучей, когда излучатель расположен на границе, а профиль с (z) такой же, как, скажем, для случая, изображенного на рис. 43.8. В точках A_N , $N = 1, 2, \dots$ он касается каустик. Для точки A_N , Ψ_0 представляет собой оптическую длину пути луча от 0 до A_N . Но, как видно из (45.38), чтобы получить фазу луча, подходящего к A_N , надо из Ψ_0 вычесть $(N - 1)\pi/2$. Это и естественно, так как до подхода к A_N он $N - 1$ раз коснется каустик с номерами от 1 до $N - 1$ включительно, теряя при каждом касании фазу $\pi/2$. После прохода A_N он потеряет еще дополнительно фазу $\pi/2$. Некоторое время тому назад имела место [251, 269, 238] оживленная дискуссия на тему о том, где теряет луч фазу $\pi/2$, при завороте его в среде (точки, где на рис. 45.2 касательные к лучу лежат в плоскости $z = \text{const}$) или при касании каустики. Из только что изложенного видно, что при завороте луч фазы не теряет, а эта потеря происходит в точках касания каустик. Действительно, до прихода в A_N луч заворачивает N раз, и если бы потеря фазы происходила при заворотах, то в (45.33) должна бы быть величина $-N\pi/2$ вместо $-(N - 1)\pi/2$. Факт потери лучом фазы $\pi/2$ при касании каустики был отмечен также в § 44.

45.3. Дополнительное ограничение на применение лучевой теории при волноводном распространении. В § 23 мы получили условия применимости геометрической оптики (лучевой теории), выражющиеся в неравенствах (23.8) и ограничивающие величины $n'(z)$ и $n''(z)$. При волноводном распространении, когда луч многократно возвращается на один и тот же горизонт,

имеет место дополнительное требование, ограничивающее расстояние вдоль волновода r . Мы ограничимся его формулировкой для случая приповерхностного волновода с законом $c(z)$ в виде (43.18). В § 43 мы видели (рис. 43.8), что в этом случае возникает система каустик. Лучевая теория применима всюду*, за исключением областей, непосредственно примыкающих к каустикам, где $|t| \leq 1^{**}$. В соответствии с (45.13) ширина этих зон равна по порядку величины

$$\delta \sim (r_0)^{1/3} \equiv (\partial^2 r / \partial \xi^2)_{\xi_0}^{1/3}. \quad (45.39)$$

Совершенно аналогично (45.18) имеем

$$\left(\frac{\partial^2 r}{\partial \xi^2} \right)_{\xi_0} = \frac{1}{k_0^2 \sin^2 \chi_0} \left(\frac{\partial^2 r}{\partial \chi_0^2} \right)_{\text{кауст}}. \quad (45.40)$$

Горизонтальное расстояние r записывается (см. § 43): $r = N\Delta(\chi_0) \pm \pm g(z_1, \chi_0) \pm g(z, \chi_0)$, где Δ — длина полного цикла луча, а $g(z_1, \chi_0)$ и $g(z, \chi_0)$ — добавки к нему, зависящие от положения излучателя и приемника. При N , не меньшем нескольких единиц, для оценок в выражении для r можно ограничиться первым членом. Тогда, учитывая (43.22), получаем

$$r = N\Delta, \quad \Delta = (4/a) \operatorname{tg} \chi_0. \quad (45.41)$$

Используя соотношение (45.40), находим

$$\left(\frac{\partial^2 r}{\partial \xi^2} \right)_{\xi_0} = \frac{8N}{ak_0} \frac{1}{\sin \chi_0 \cos^3 \chi_0}. \quad (45.42)$$

Рассмотрим лучи с малыми χ_0 , когда можно полагать $\sin \chi_0 \approx \chi_0$, $\cos \chi_0 \approx 1$. Тогда приближенно имеем из (45.39) и (45.42)

$$\delta \approx (4N)^{1/3} H / \chi_0, \quad H \equiv (ak_0^2)^{-1/3}. \quad (45.43)$$

Как видно хотя бы из рис. 43.8, наименьшее расстояние между каустиками имеет место для лучей, вышедших из излучателя горизонтально. Для них

$$\chi_0 = \sqrt{az_1}, \quad \Delta = 4\sqrt{z_1/a}. \quad (45.44)$$

Длина полного цикла Δ будет одновременно и расстоянием между каустиками для этих лучей. Представляет интерес найти отношение δ к расстоянию между каустиками: из (45.31) и (45.44) имеем

$$\delta/\Delta \approx 4^{-1/3} N^{1/3} H / z_1. \quad (45.45)$$

Для того чтобы между каустиками нашлись точки, где можно применять лучевую теорию, надо, чтобы это отношение было значительно меньше единицы. Это дает для максимального номера каустики, до которой можно доходить

$$N \ll (z_1/H)^3 \quad (45.46)$$

или для максимального расстояния

$$r = N\Delta \ll (z_1 H)^3 \Delta. \quad (45.47)$$

Кстати, на расстояниях, не удовлетворяющих этому условию, неприменима также и развитая выше теория каустик, так как каустики сближаются друг с другом настолько, что начинают взаимодействовать. Единственным способом вычисления поля в волноводе при этом остается способ нормальных волн. При этом условие применимости приближения ВКБ для нормальных волн оказывается еще более жестким, чем (45.47). Об этом см. подробнее в § 48.5.

45.4. Поле в окрестности точки возврата каустики. Типичной особенностью каустических кривых являются точки возврата. На рис. 46.3, например,

* Условия (23.8) предполагаются выполнеными.

** Лучевая теория в обычном виде неприменима всюду на «теневой» стороне каустики. Однако здесь поле при $|t| > 1$ весьма мало, и мы его не рассматриваем.

Рис. 45.3. Каустики в окрестности точки возврата

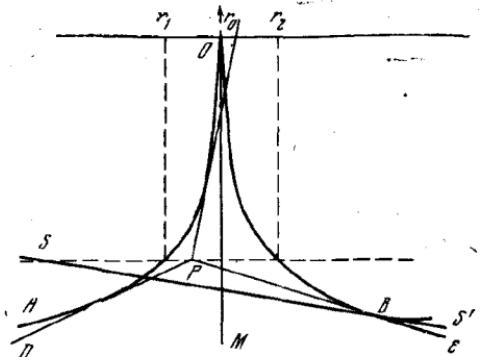
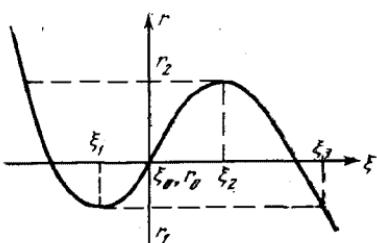


Рис. 45.4. К анализу поля в окрестности точки возврата каустики



это точки A, A' . При волноводном распространении точек возврата может быть сколь угодно много (см., например, рис. 43.8). При приближении к точке возврата каустики $r_0 \rightarrow 0$, и поэтому формула (45.14) для расчета поля в окрестности точки возврата не годится.

Каустика на рис. 45.3 изображена жирными линиями. O — точка возврата каустики. Левее ветви каустики OA через каждую точку проходит один луч (например, SS'), касающийся ветви OB . Аналогично, правее OB через каждую точку проходит луч, касающийся OA . Между ветвями OA и OB через каждую точку P проходят три луча (на рис. 45.3, чтобы не загромождать рисунок, от P они проведены только в одну сторону). Два из них касаются «ближней» ветви каустики (на рис. 45.3, ветви OA), третий — дальней ветви.

Пусть для луча OM , $\xi = \xi_0$ *. Для всех лучей, касающихся каустик вблизи O , ξ близко к ξ_0 . Поэтому целесообразно фазу w в интегральном выражении для поля (45.1) разложить в ряд по $(\xi - \xi_0)$, но теперь уже с учетом $(\xi - \xi_0)^4$ включительно. Как и в разделе 1 настоящего параграфа, вначале весьма поучительно рассмотреть функцию $r(z, \xi)$ вблизи $\xi = \xi_0$ при постоянном z . Рассмотрим, например, r в точках, лежащих на прямой SP на рис. 45.3. Нетрудно показать, что для лучей, пересекающих эту прямую, функция $r(\xi)$ имеет вид, изображенный на рис. 45.4. При $r < r_1$ (например, S на рис. 45.3), каждому r соответствует одно ξ , т. е., один луч. При $r = r_1$ мы имеем экстремум кривой $r(\xi)$ при $\xi = \xi_1$, что означает пересечение каустики и, кроме того, обычный луч $\xi = \xi_3$. При $r_1 < r < r_2$ мы имеем на рис. 45.4 три значения ξ для каждого r , т. е. пересечение трех лучей. При $r \geq r_2$ ситуация аналогична $r \leq r_1$. Разложение $r(z, \xi)$ в окрестности $r_0 \equiv r(z, \xi_0)$ имеет вид

$$r(z, \xi) = r_0(z) + r'_0(z)(\xi - \xi_0) + \frac{1}{6}r''_0(z)(\xi - \xi_0)^3, \quad (45.48)$$

$$r'_0(z) \equiv (\partial r / \partial \xi)|_{\xi_0}, \quad r''_0(z) = (\partial^3 r / \partial \xi^3)|_{\xi_0}.$$

На уровне точки возврата ($z = 0$), $r'_0(0) = 0$ и кривая (45.48) вырождается в кубическую параболу.

Найдем уравнение каустик вблизи точки возврата. Приравнивая нулю производную по ξ от правой части уравнения лучей (45.48), получаем

$$r'_0(z) + \frac{1}{2}r''_0(z)(\xi - \xi_0)^2 = 0. \quad (45.49)$$

Исключая отсюда ξ из уравнения (45.48) разность $(\xi - \xi_0)$ (учитывая, что согласно рис. 45.4 $r'_0 > 0$, $r''_0 < 0$), мы и получаем уравнение каустики

$$[r - r_0(z)]^2 = 8(r'_0(z))^3/9|r''_0(z)|. \quad (45.50)$$

* Луч OM , конечно, может и не совпадать с осью z .

Предположим, что в разложении $r'_0(z)$ по z при $z < 0$ можно ограничиться линейным членом $r'_0(z) = -bz$, $b = \text{const} > 0$. Предположим далее, что $r'''_0(z)$ отлично от нуля при $z = 0$ и имеет в этой точке конечную производную. Тогда при малых z можно положить $-r'''_0(z) = -r'''_0(0) = d = \text{const} > 0$. Уравнение каустики (45.50) при этом запишется

$$[r - r_0(z)]^2 + 8b^3 z^3 / 9d = 0, \quad z < 0. \quad (45.51)$$

На рис. 45.3 изображен частный случай $r_0(z) = r_0 = \text{const}$.

Перейдем теперь к анализу поля в окрестности точки возврата. Подставляя (45.48) в (45.3), интегрированием по ξ найдем $f(z, z_1, \xi)$, после чего из (45.2) получаем для фазы выражение

$$w(z, z_1, r, \xi) = w_0 + (r - r_0)(\xi - \xi_0) - \frac{1}{2} r'_0(\xi - \xi_0)^2 - \frac{1}{24} r'''_0(\xi - \xi_0)^4, \quad (45.52)$$

где $r_0 \equiv r_0(z)$, $r'_0 \equiv r'_0(z) \equiv (\partial r / \partial \xi)|_{\xi_0}$ и аналогично для r'''_0 . Подставим (45.52) в интеграл (45.1), вынесем $\Phi(\xi)$ за интеграл при $\xi = \xi_0$ и введем вместо $(\xi - \xi_0)$ новую переменную интегрирования

$$t = (-r'''_0/24)^{1/4}(\xi - \xi_0). \quad (45.53)$$

Тогда получаем

$$\Psi = r^{-1/2} (-r'''_0/24)^{-1/4} \Phi(\xi_0) e^{i\omega t}, \quad (45.54)$$

где

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(Yt + X^{t+it})} dt, \quad (45.55)$$

$$Y = (-r'''_0/24)^{-1/4}(r - r_0), \quad X = \frac{1}{2} r'_0 (-r'''_0/24)^{-1/2}. \quad (45.56)$$

Всюду берется арифметическое значение корня (помним, что $-r'''_0 > 0$).

В переменных X и Y уравнение каустики (45.50) записывается

$$8X^3 + 27Y^2 = 0. \quad (45.57)$$

При малых z , в соответствии со сказанным выше, можно положить $-r'''_0 = d$, $r'_0 = -bz$. Тогда X и Y выражаются через координаты r и z формулами

$$Y = (24/d)^{1/4}(r - r_0), \quad X = \frac{b}{2} (24/d)^{1/2}z. \quad (45.58)$$

В точке возврата ($X = Y = 0$) интеграл I является табличным и равен

$$I_0 = 1,813 e^{i\pi/3}. \quad (45.59)$$

При конечных X и Y интеграл I может быть получен численно. На рис. 45.5 изображен по Т. Пирси [210] модуль интеграла I , а на рис. 45.6 его фаза. Поскольку картина симметрична относительно оси X , изображен только случай $Y > 0$. Каустика изображена пунктирной линией. Из рис. 45.5 мы видим, что максимум интенсивности расположен не в самой точке возврата, а при $X \approx -2$.

Анализируя изменение фазы вдоль оси X на рис. 45.6, можно проследить известный факт изменения фазы волны на π при проходе через фокус, каковым является точка возврата. Результат интерференции тройки лучей слева от каустики на рис. 45.5 и 45.6 обусловливает неравномерность поля в этой области. Справа от каустики через каждую точку пространства проходит лишь один луч и поэтому поле изменяется в основном монотонно.

Полный анализ асимптотики поля вблизи точки возврата каустик, как, впрочем, и особых точек более высокого порядка, см. у Д. Людвига [195].

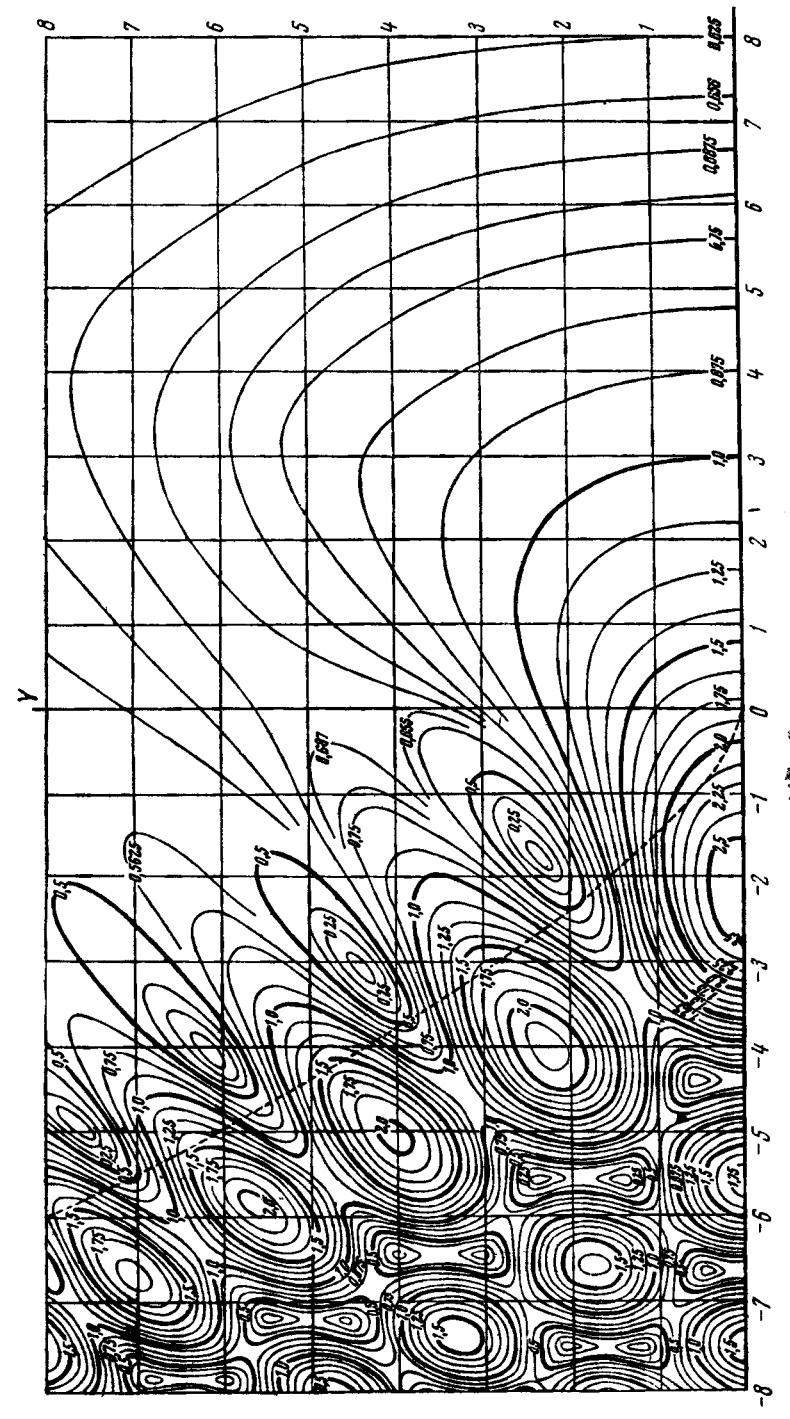


Рис. 45.5. Модуль интервала $I(X, Y)$ в окрестности точки касания каустик

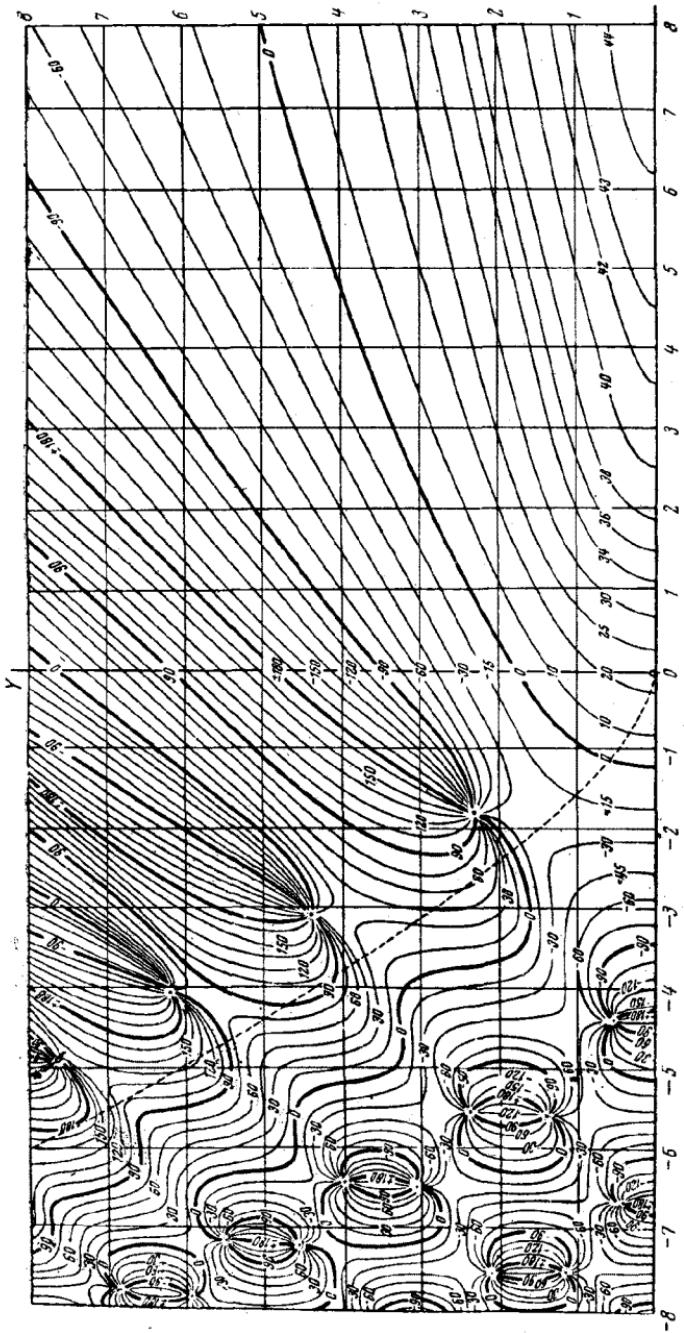


Рис. 45.6. Фаза интеграла $I(X, Y)$

§ 46. Каустика при отражении сферической волны от неоднородного полупространства

Представляет интерес применить полученные выше результаты в случае, когда сферическая волна, излучаемая в точке O ($r = 0, z = z_0$) однородного полупространства $z > 0$, падает на неоднородное полупространство $z < 0$, в котором скорость волны монотонно возрастает при увеличении z . На рис. 46.1 изображен один из лучей для этого случая.

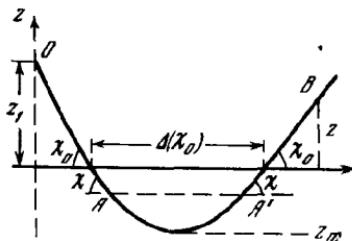


Рис. 46.1. Один из лучей при отражении волны от неоднородного полупространства

Как мы видели в § 45, основой для расчета каустик является функция $r = r(z, z_1, \chi_0)$ — горизонтальное расстояние, проходимое лучом. Согласно рис. 46.1 и формуле (43.2), имеем

$$r = (z_1 + z) \operatorname{ctg} \chi_0 + \Delta(\chi_0), \quad z > 0 \quad (\text{точка } B), \quad (46.1)$$

$$r = z_1 \operatorname{ctg} \chi_0 + \frac{1}{2} \Delta(\chi_0) \pm \int_{z_m}^z (dz/\operatorname{tg} \chi), \quad z < 0 \quad (\text{точки } A' \text{ и } A),$$

где

$$\Delta(\chi_0) = 2 \int_{z_m}^0 dz/\operatorname{tg} \chi. \quad (46.2)$$

§6.1. Скорость линейно возрастает при удалении от границы. Рассмотрим сначала случай

$$z < 0, \quad c = c_0 (1 - az/2), \quad a > 0, \quad (46.3)$$

что означает

$$n(z) = (1 - az/2)^{-1}. \quad (46.3')$$

z_m дается формулой (43.23). Заменяя под интегралом в (46.1) и (46.2) z через χ с помощью соотношения

$$n(z) \cos \chi = \cos \chi_0 \quad (46.4)$$

и осуществляя интегрирование, находим для $\Delta(\chi_0)$ выражение (43.22) и далее

$$z > 0, \quad ar = \zeta \operatorname{ctg} \chi_0 + 4 \operatorname{tg} \chi_0, \quad \zeta \equiv a(z + z_1) \quad (46.5)$$

$$z < 0, \quad ar = \zeta_1 \operatorname{ctg} \chi_0 + 2 \operatorname{tg} \chi_0 \pm 2 \sin \chi / \cos \chi_0, \quad \zeta_1 \equiv az_1 \quad (\text{точки } A', A). \quad (46.6)$$

В дальнейшем мы будем при $z < 0$ интересоваться лишь восходящей ветвью луча (точка A' , знак плюс в (46.6)), так как падающая ветвь не имеет каустики. Получаем из (46.5) и (46.6)

$$z > 0, \quad a\partial r/\partial \chi_0 = -\zeta/\sin^2 \chi_0 + 4/\cos^2 \chi_0, \quad (46.7)$$

$$z < 0, \quad a\partial r/\partial \chi_0 = -\zeta_1/\sin^2 \chi_0 + 2(1 + \sin \chi_0 / \cos \chi_0) / \cos^2 \chi_0. \quad (46.8)$$

При дифференцировании (46.6) мы учили, что из (46.4) при $z = \text{const}$ имеем

$$\partial \chi / \partial \chi_0 = \sin \chi_0 / n \sin \chi = \operatorname{tg} \chi_0 / \operatorname{tg} \chi. \quad (46.9)$$

На каустике правые части выражений (46.7) и (46.8) обращаются в нуль, поэтому имеем на каустике

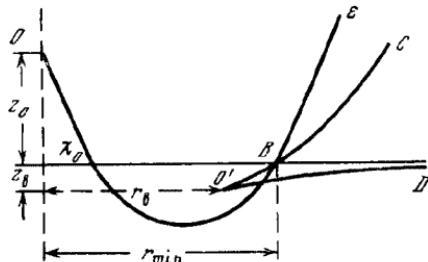
$$z > 0, \quad \operatorname{tg} \chi_0 = \frac{1}{2} \zeta_1^{1/2}, \quad \frac{1}{2} \zeta_1^{1/2} \leq \operatorname{tg} \chi_0 \leq \infty, \quad (46.10)$$

а подставляя $\operatorname{tg} \chi_0$ отсюда в (46.5), получаем уравнение каустики в однородном полупространстве

$$z + z_1 = ar^2/16 \quad (46.11)$$

— ветвь параболы BC на рис. 46.2. На этом рисунке изображен также луч $\chi_0 = \operatorname{arctg}(\frac{1}{2} \zeta_1^{1/2})$, для которого расстояние выхода в верхнюю среду минимально и равно $ar_{\min} = 4\zeta_1^{1/2}$.

Рис. 46.2. Каустика при отражении волн от полупространства с линейным законом для скорости волн



В нижней среде, приравнивая к нулю правую часть (46.8), находим

$$\sin \chi = \sin \chi_0 \left(\frac{\zeta_1}{2} \operatorname{ctg}^2 \chi_0 - 1 \right)^{-1}. \quad (46.12)$$

Поскольку χ связано с z уравнением (46.4), отсюда можно найти z на каустике как функцию χ_0 . Подставив (46.12) в (46.6), мы найдем r на каустике как функцию χ_0

$$ar = \zeta_1^2 (\zeta_1 \operatorname{tg} \chi_0 - 2 \operatorname{tg}^3 \chi_0)^{-1}, \quad (46.13)$$

при $\operatorname{tg} \chi_0 = \zeta_1^{1/2}/2$ имеем из (46.12), (46.4) и (46.13) $z = 0$, $ar = 4\zeta_1^{1/2}$, т. е. каустика в нижней среде смыкается с каустикой (46.11) в верхней среде. Определяя экстремум выражения (46.13), находим, что при $\chi_0 = \operatorname{arctg}(\zeta_1/6)^{1/2}$, r принимает минимальное значение r_b (точка возврата каустики), причем

$$ar_b = 3(3\zeta_1/2)^{1/2}, \quad az_b = 2(1 - \sqrt{1 + \zeta_1/8}), \quad (46.14)$$

при $\chi_0 \rightarrow 0$ согласно (46.13), (46.12) и (46.4), имеем $r \rightarrow \infty$, $z \rightarrow 0$, т. е. каустика уходит на бесконечность, асимптотически приближаясь к границе $z = 0$ (ветвь $O'D$ на рис. 46.2).

Мы видим, что совокупность лучей, падающих на границу под разными углами скольжения χ_0 , образует разные участки каустики, а именно (см. рис. 46.2):

ветвь $CB \quad \frac{1}{2} \zeta_1^{1/2} \leq \operatorname{tg} \chi_0 \leq \pi/2$,

участок $BO' \quad (\zeta_1/6)^{1/2} \leq \operatorname{tg} \chi_0 \leq \frac{1}{2} \zeta_1^{1/2}$, (46.15)

ветвь $O'D \quad 0 \leq \operatorname{tg} \chi_0 \leq (\zeta_1/6)^{1/2}$.

В соответствии с (45.13) и (45.14) ширина зоны каустики (область неприменимости лучевых представлений) по порядку величины равна $\delta = |r'_0|^{1/4}$, в то время как усиление поля по амплитуде на самой каустике пропорционально $1/\delta$. Определим δ для $z > 0$ (ветвь BC каустики). Дифференцируя (46.7), получаем, учитывая что на каустике $\operatorname{tg} \chi_0 = \frac{1}{2} \zeta_1^{1/2}$, а также пользуясь соотношением (45.33),

$$\delta = (ak_0^2)^{-1/4} \zeta^{-1/2} (4 + \zeta), \quad \zeta = a(z_1 + z). \quad (46.16)$$

Ширина зоны каустики увеличивается при удалении от границы, а усиление в каустике при этом падает.

46.2. Квадрат показателя преломления линейно убывает при удалении от границы. Пусть теперь

$$n^2 = c_0^2 / c^2(z) = 1 + az, \quad z \leq 0 \quad (46.17)$$

и по-прежнему $n = 1$ при $z \geq 0$. Вычисляя элементарный интеграл (43.4), находим уравнение луча при $z > 0$

$$ar = \zeta \operatorname{ctg} \chi_0 + 2 \sin 2\chi_0, \quad \zeta = a(z + z_1). \quad (46.18)$$

При малых az , χ_0 закон (46.17) близок к (46.3'), а формула (46.18) к (46.5). Поэтому, когда интересны лучи с малыми χ_0 , законы (46.3') и (46.17) для $n(z)$

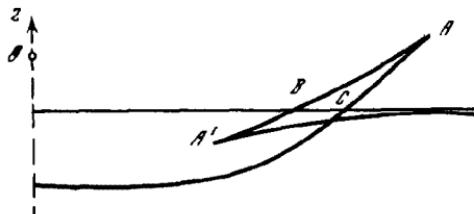


Рис. 46.3. Каустика при линейном законе для квадрата показателя преломления

обычно рассматриваются как эквивалентные. Посмотрим, как различается картина каустик в этих двух случаях.

Приравнивая к нулю производную по χ_0 от правой части (46.18), находим

$$\zeta = 4 \sin^3 \chi_0 \cos 2\chi_0, \quad (46.19)$$

а подставляя это выражение для ζ в (46.18):

$$ar = 4 \cos^2 \chi_0 \sin 2\chi_0. \quad (46.20)$$

Выражения (46.19) и (46.20) являются уравнениями каустики в верхней среде в параметрическом виде. Из (46.19) находим

$$\sin^2 \chi_0 = \frac{1}{2} (1 \pm \sqrt{1 - \zeta/2}), \quad (46.21)$$

при этом предполагается, что $\zeta_1 \equiv az_1 < 1/2$. Отсюда видим, что $\zeta_{\max} = 1/2$, т. е. каустика в верхней среде не уходит на бесконечность, как на рис. 46.2. При

$$\zeta = 1/2, ar = 2, \chi_0 = \pi/4 \quad (46.22)$$

имеем точку возврата каустики (точка A , рис. 46.3). При $\zeta < 1/2$ для каждого ζ имеем два значения χ_0 , а из (46.20) — два значения r , что соответствует двум ветвям каустики, как это видно на рис. 46.3. При этом

на ветви $AB \quad \chi_{01} \leq \chi_0 \leq \pi/4,$

на ветви $AC \quad \pi/4 \leq \chi_0 \leq \chi_{02},$

где

$$\chi_{01,2} = \arcsin (1/2 \mp \sqrt{1/4 - \zeta_1/8}). \quad (46.23)$$

Координата r точек B и C найдется при подстановке в (46.20) соответственно χ_{01} и χ_{02} . Полная картина каустик, включая и полупространство $z < 0$, рассмотрена Ю. И. Орловым [72] и изображена для случая $\zeta_1 < 1/2$ на рис. 46.3.

При $a \rightarrow 0$ из (46.22) имеем для точки возврата A : $z + z_1 = 1/2a \rightarrow \infty$, $r = 2/a \rightarrow \infty$, т. е. эта точка уходит на бесконечность. На ветви BA в точках, недалеко удаленных от B , углы χ_0 при этом можно считать малыми. Тогда, заменяя в (46.19) и (46.20) синусы аргументами, а косинусы единицей и исключая затем χ_0 , мы получим уравнение, совпадающее с (46.11).

При $\zeta_1 > 1/2$ каустическая поверхность в основном имеет такой же вид, но точка возврата A будет лежать уже в нижней среде [72].

**ТОЧНАЯ ТЕОРИЯ ВОЛНОВОДНОГО РАСПРОСТРАНЕНИЯ
В НЕПРЕРЫВНО СЛОИСТЫХ СРЕДАХ.
НОРМАЛЬНЫЕ ВОЛНЫ**

В настоящей главе будет изложена точная теория волноводного распространения. В основном вопрос сведется к исследованию характеристик нормальных волн и коэффициентов их возбуждения. Основное внимание уделяется волноводам в средах, где квадрат волнового числа зависит от координаты z по линейному закону и по закону Эштейна. Заметим, что задача о параболическом волноводе рассматривается в [204, 254] и в § 52.2. В конце настоящей главы рассмотрен также случай волновода в упругом полупространстве.

**§ 47. Общие выражения для поля
в непрерывно слоистых средах
при наличии волновода**

47.1. Интегральное выражение для поля. Рассмотрим непрерывно слоистую среду с показателем преломления $n(z) = c_0/c(z)$ (c_0 — скорость на произвольном горизонте), непрерывным вместе со своей первой производной. Поле источника, расположенного в точке $r = 0, z = z_1$ и имеющего особенность вида $1/R$ при $R = \sqrt{r^2 + (z - z_1)^2} \rightarrow 0$, описывается волновым уравнением [68]

$$\Delta\psi + k^2(z)\psi = 4\pi\delta(z - z_1)\delta_1(r), \quad k(z) = k_0 n(z), \quad (47.1)$$

где $\delta(z)$ — дельта-функция, а $\delta_1(r)$ равна нулю всюду, кроме $r = 0$, и обладает свойством

$$2\pi \int_0^\infty \delta_1(r)f(r)rdr = f(0), \quad (47.2)$$

где $f(r)$ — любая непрерывная в нуле функция. Применим к уравнению (47.1) преобразование Фурье-Бесселя. Обозначим

$$\tilde{\Psi}(\xi, z) = \int_0^\infty \psi(r, z) J_0(\xi r) r dr. \quad (47.3)$$

Имеет место (см., например, [68]) и обратное соотношение

$$\psi(r, z) = \int_0^\infty \tilde{\Psi}(\xi, z) J_0(\xi r) \xi d\xi \quad (47.3')$$

или, если здесь интеграл с функцией $J_0(\xi r)$ преобразовать (как в § 26.4) в интеграл с функцией $H_0^{(1)}(\xi r)$, взятый от $-\infty$ до $+\infty$, то

$$\psi(r, z) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\Psi}(\xi, z) H_0^{(1)}(\xi r) \xi d\xi. \quad (47.3'')$$

Умножив (47.1) на $J_0(\xi r) r dr$ и проинтегрировав по r от 0 до ∞ , получаем

$$\tilde{\Psi}'' + (k^2 - \xi^2)\tilde{\Psi} = 2\delta(z_1 - z). \quad (47.4)$$

Штрих означает дифференцирование по z . Таким образом, $\tilde{\Psi}(\xi, z)$ удовлетворяет уравнению

$$\tilde{\Psi}'' + (k^2 - \xi^2) \tilde{\Psi} = 0 \quad (47.5)$$

при всех z , кроме z_1 . Чтобы установить особенность, которой обладает $\tilde{\Psi}(\xi, z)$ при $z = z_1$, проинтегрируем уравнение (47.4) по z от $z_1 - \Delta$ до $z_1 + \Delta$, а затем положим $\Delta \rightarrow 0$. При этом получаем

$$(\tilde{\Psi}')_{z_1+0} - (\tilde{\Psi}')_{z_1-0} = 2. \quad (47.6)$$

Таким образом, $\tilde{\Psi}'$ имеет при $z = z_1$ разрыв. Сама функция, как нетрудно показать, при z_1 непрерывна

$$(\tilde{\Psi})_{z_1+0} - (\tilde{\Psi})_{z_1-0} = 0. \quad (47.7)$$

Решения уравнения (47.5) должны удовлетворять определенным условиям при $z = \pm\infty$ или на границах, если пространство небезгранично по z . Обозначим через $\tilde{\Psi}_1(z)$ и $\tilde{\Psi}_2(z)$ два линейно независимых решения (47.5), выбрав их так, чтобы $\tilde{\Psi}_1(z)$ удовлетворяло условию при $z \rightarrow -\infty$ (или на границе, расположенной при $z < z_1$), а $\tilde{\Psi}_2(z)$ условию при $z \rightarrow \infty$ (или на границе, расположенной при $z > z_1$). Тогда решением уравнения (47.5), удовлетворяющим всем нашим условиям, будет

$$z \leq z_1, \quad \tilde{\Psi}(\xi, z) = \frac{2\tilde{\Psi}_1(z)\tilde{\Psi}_2(z_1)}{w}; \quad z \geq z_1, \quad \tilde{\Psi}(\xi, z) = \frac{2\tilde{\Psi}_1(z_1)\tilde{\Psi}_2(z)}{w}, \quad (47.8)$$

где

$$w = \tilde{\Psi}_1'(z)\tilde{\Psi}_2(z) - \tilde{\Psi}_2'(z)\tilde{\Psi}_1(z) \quad (47.9)$$

— вронсиан. Действительно, определенная по (47.8) функция $\tilde{\Psi}(\xi, z)$ удовлетворяет условиям при $z = \pm\infty$ (или на границах) и условиям (47.6) и (47.7) при z_1 . Подставляя (47.8) в (47.3'), получаем интегральное выражение для поля в общем случае

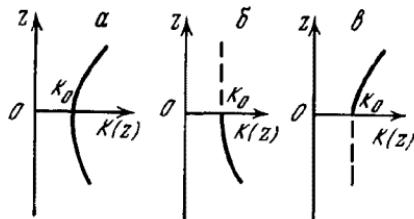
$$\begin{aligned} z \leq z_1, \quad \psi &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{\Psi}_1(z)\tilde{\Psi}_2(z_1)}{w} H_0^{(1)}(\xi r) \xi d\xi, \\ z \geq z_1, \quad \psi &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{\Psi}_1(z_1)\tilde{\Psi}_2(z)}{w} H_0^{(1)}(\xi r) \xi d\xi. \end{aligned} \quad (47.10)$$

47.2. Другая форма интегрального выражения для поля. Представляется интерес получить интегральное выражение для поля совершенно другим путем и в другом виде. Выражение (36.7) дает интегральное представление поля в среде за пределами одной из границ однородного слоя произвольной толщины h , в котором расположен излучатель. Аналогичное выражение можно получить и для поля по другую сторону слоя. Устремляя толщину h к нулю, мы получим случай излучателя, расположенного в непрерывно слоистой среде. Если, кроме того, плоскость $z = 0$ совместить с горизонтом излучателя, а вместо переменной интегрирования ϑ возьмем $\xi = k_0 \sin \vartheta$, $k_0 \equiv k(0)$, то получаем

$$\begin{aligned} z \leq 0, \quad \psi &= \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 + V_2}{1 - V_1 V_2} f_1(\xi, z) H_0^{(1)}(\xi r) \xi d\xi / \alpha \\ z \geq 0, \quad \psi &= \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 + V_1}{1 - V_1 V_2} f_2(\xi, z) H_0^{(1)}(\xi r) \xi d\xi / \alpha, \\ \alpha &= \sqrt{k_0^2 - \xi^2}. \end{aligned} \quad (47.11)$$

Чтобы пояснить смысл $V_1 = V_1(\xi)$, $V_2 = V_2(\xi)$, $f_1(\xi, z)$ и $f_2(\xi, z)$, представим себе среду, в которой волновое число $k(z)$ изменяется по какому-то закону, изображеному на рис. 47.1, а. Представим себе мысленно, что неоднородное полупространство $z > 0$ удалено и заменено однородным полупространством, в котором $k(z) = k_0 = \text{const}$. Получим график $k(z)$, изображенный на рис. 47.1, б. Аналогично, можно заменить однородным нижнее полупространство (рис. 47.1, в). Представим теперь, что в случае рис. 47.1, б из верхнего однородного полупространства на границу $z = 0$ падает плоская волна единичной амплитуды $\exp i(\xi x - \alpha z)$. Направление x в прямоугольной системе координат совпадает с направлением r . $V_1(\xi)$.

Рис. 47.1. К определению коэффициента отражения от нижнего и верхнего неоднородных полупространств



в (47.11) является коэффициентом отражения этой волны, так что суммарное поле падающей и отраженной волн в верхней среде запишется

$$(e^{-i\alpha z} + V_1 e^{i\alpha z}) e^{i\xi x}. \quad (47.12)$$

Функция $f_1(\xi, z)$ является полем, которое возбуждается такой падающей волной в неоднородном полупространстве $z < 0$. Очевидно,

$$f_1(\xi, z) = W(\xi) \tilde{\psi}_1(\xi, z), \quad (47.13)$$

где $\tilde{\psi}_1(\xi, z)$ имеет тот же смысл, что и в предыдущем разделе, а $W(\xi)$ — коэффициент прозрачности границы. Аналогичным образом определяются $V_2(\xi)$ и $f_2(\xi, z)$ для верхнего полупространства (рис. 47.1, в).

Покажем теперь, что выражения (47.10) и (47.11) эквивалентны. Действительно, из условия равенства выражений (47.12) и (47.13) и их первых производных по z при $z = 0$ находим

$$V_1 = \frac{\alpha \tilde{\psi}_1(0) - i \tilde{\psi}'_1(0)}{\alpha \tilde{\psi}_1(0) + i \tilde{\psi}'_1(0)}, \quad W_1 = \frac{2\alpha}{\alpha \tilde{\psi}_1(0) + i \tilde{\psi}'_1(0)}, \quad (47.14)$$

где

$$\tilde{\psi}_1(0) \equiv \tilde{\psi}_1(\xi, 0), \quad \tilde{\psi}'_1(0) \equiv (\partial \tilde{\psi}_1(\xi, z)/\partial z)_{z=0}. \quad (47.15)$$

Выражения для V_2 и W_2 получатся из (47.15) с заменой индекса 1 на 2 и α на $-\alpha$. Теперь, скажем, при $z \leq 0$ в (47.11) имеем

$$\frac{(1 + V_2) W_1}{\alpha (1 - V_1 V_2)} = - \frac{2i \tilde{\psi}_2(0)}{\tilde{\psi}_2(0) \tilde{\psi}'_1(0) - \tilde{\psi}_1(0) \tilde{\psi}''_2(0)}. \quad (47.16)$$

Теперь, если учесть, что у нас временно было принято $z_1 = 0$, мы и найдем, что первые интегралы в (47.10) и (47.11) тождественно совпадают. То же, конечно, можно доказать и для вторых интегралов.

47.3. Приповерхностный волновод. Нормальные волны. Рассмотрим формулы (47.10) для полупространства $0 < z < \infty$, ограниченного при $z = 0$ абсолютно отражающей границей, причем могут быть два случая:

$$\text{а) } \psi(0) = 0, \quad \text{б) } (\partial \psi / \partial z)_{z=0} = 0. \quad (47.17)$$

Случай а) важен в гидроакустике. Извлучатель пусть будет расположен при произвольном $z = z_1$. Обозначим два линейно независимых решения уравнения (47.5) через $u(z)$ и $v(z)$ *, из них последнее пусть обращается в нуль при

* Вернее, надо было бы писать $u(\xi, z)$ и $v(\xi, z)$, но для краткости записи ξ в аргументе мы опускаем.

$z \rightarrow \infty$. Тогда, в качестве $\tilde{\psi}_1(z)$ и $\tilde{\psi}_2(z)$, удовлетворяющим необходимым условиям при $z = 0, \infty$ можно взять

$$\begin{aligned} 0 \leq z \leq z_1 & \quad \text{а) } \tilde{\psi}_1(z) = u(z) - u(0)v(z)/v(0), \\ & \quad \text{б) } \tilde{\psi}_1(z) = u(z) - u'(0)v(z)/v'(0); \\ z_1 \leq z < \infty & \quad \text{а, б) } \tilde{\psi}_2(z) = v(z). \end{aligned} \quad (47.18)$$

Подставляя (47.18) в (47.8), получаем

$$\begin{aligned} z \leq z_1 & \quad \text{а) } \tilde{\psi}(\xi, z) = \frac{2}{wv(0)} [u(z)v(0) - u(0)v(z)]v(z_1), \\ & \quad \text{б) } \tilde{\psi}(\xi, z) = \frac{2}{wv(0)} [u(z)v'(0) - v(z)u'(0)]v(z_1). \end{aligned} \quad (47.19)$$

Формулы для $z \geq z_1$ получатся из (47.19) взаимной заменой мест z и z_1 . Вронскиан (47.9) при этом будет

$$w = u'(z)v(z) - v'(z)u(z). \quad (47.20)$$

Подставляя (47.19) в (47.3''), мы и получаем интегральное представление поля в данном случае. Предположим, что интеграл, взятый по полуокружности бесконечного радиуса в верхней полуплоскости ξ , исчезает. Тогда значение интеграла (47.3'') будет даваться обходом особенностей подынтегрального выражения в верхней полуплоскости. Таковыми являются точки ветвления и полюсы. Можно показать [10], что если при $z \rightarrow -\infty$, $n(z) \rightarrow \rightarrow n_1 = \text{const}$, то функция $V_1(\xi)$ имеет точки ветвления $\xi_1 = \pm k_0 n_1$. Аналогичное справедливо и для $V_2(\xi)$. Интегралы по берегам разрезов, идущих от точек ветвления, дадут боковые волны (сплошной спектр). Мы рассмотрим здесь нормальные волны или вклад от полюсов ξ_l , $l = 1, 2, \dots$, местоположение которых дается уравнениями *

$$\text{а) } v(0) = 0, \quad \text{б) } v'(0) = 0. \quad (47.21)$$

При вычислении вычета в полюсе полезно учесть, что согласно (47.20) имеем, полагая $z = 0$, $\xi = \xi_l$,

$$\text{а) } u(0) = -w/v'(0), \quad \text{б) } u'(0) = w/v(0). \quad (47.22)$$

После этого получаем для суммы вычетов интеграла (47.3''), предполагая, что полюсы простые:

$$\text{а) } \psi(r, z) = 2\pi i \sum_l \left[\frac{v(\xi_l, z_1)v(\xi_l, z)H_0^{(1)}(\xi_l r)\xi_l}{\frac{\partial v(\xi_l, z)}{\partial \xi} \frac{\partial v(\xi_l, z)}{\partial z}} \right]_{z=0, \xi=\xi_l}, \quad (47.23)$$

$$\text{б) } \psi(r, z) = -2\pi i \sum_l \frac{v(\xi_l, z_1)v(\xi_l, z)H_0^{(1)}(\xi_l r)\xi_l}{v(\xi_l, 0) \left[\frac{\partial^2 v(\xi_l, z)}{\partial \xi \partial z} \right]_{z=0, \xi=\xi_l}}. \quad (47.24)$$

Здесь мы для ясности выписали полностью аргументы функций. Суммирование ведется по ξ_l , лежащим в верхней полуплоскости ξ . Ниже мы увидим в конкретных случаях, что ξ_l не лежат во втором квадранте. Выражения (47.23) и (47.24) не изменяются при замене z на z_1 и обратно и справедливы при всех z в интервале $0 \leq z < \infty$.

47.4. Приближение ВКБ. Фазовый интеграл. Если воспользоваться интегральным выражением для поля (47.11), то уравнение для полюсов будет

$$1 - V_1(\xi_l)V_2(\xi_l) = 0. \quad (47.25)$$

* Вронскиан w в силу предположения о линейной независимости решений $u(z)$ и $v(z)$ в нуль обращаться не может.

Это уравнение справедливо в самом общем случае. Рассмотрим его в приближении ВКБ, предполагая, что $n(z)$ изменяется достаточно медленно. Имеем, согласно (24.27), для коэффициента отражения:

$$V_1(\xi) = e^{i\varphi_1}, \quad \varphi_1 = -\frac{\pi}{2} + \int_{z_m}^0 \alpha dz,$$

$$\alpha = \sqrt{k^2(z) - \xi^2}, \quad k(z_m) = \xi, \quad z_m' < 0. \quad (47.26)$$

Аналогично

$$V_2(\xi) = e^{i\varphi_2}, \quad \varphi_2 = -\frac{\pi}{2} + \int_0^{z_m''} \alpha dz,$$

$$k(z_m'') = \xi, \quad z_m'' > 0. \quad (47.27)$$

Решением уравнения (47.25) является

$$\varphi_1 + \varphi_2 = 2\pi l, \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (47.28)$$

или, учитывая значения φ_1 и φ_2 ,

$$\int_{z_m'}^{z_m''} \alpha dz = 2\pi \left(l + \frac{1}{2} \right). \quad (47.29)$$

Корни этого уравнения ξ_l являются волновыми числами нормальных волн. Фазовая скорость нормальной волны $V_l = \omega/\xi_l$, групповая $U_l = \partial\omega/\partial\xi_l$. Метод нахождения ξ_l , с использованием уравнения (47.29), иногда называют методом фазового интеграла.

Уравнение (47.29) справедливо для безграничного пространства или во всяком случае, когда границы расположены достаточно далеко от интервала (z_m, z_m') , ограниченного горизонтами поворота волны. Нетрудно получить модификации этого уравнения для случаев, когда волновод с одной или обеих сторон имеет границы.

§ 48. Волновод с линейным законом для квадрата показателя преломления

Принято различать приповерхностный и внутренний волноводы. В первом случае минимум скорости лежит на границе полупространства, а во втором — внутри среды. Ниже будет показано, что если решена задача для приповерхностного волновода с граничными условиями двух родов $\psi = 0$ и $\partial\psi/\partial z = 0$, то тем самым оказывается решенной и задача о симметричном внутреннем волноводе. Поэтому мы начинаем рассмотрение с приповерхностного волновода. В этом параграфе будет рассмотрено также явление шепчуших галерей, имеющее ту же природу, что и приповерхностный волновод. Кроме того, мы на примере приповерхностного «линейного» волновода рассмотрим ограничения на применимость метода ВКБ при анализе волноводного распространения.

48.1. Приповерхностный волновод с абсолютно мягкой границей. Предположим, что квадрат показателя преломления дается законом *

$$n^2(z) = 1 - az, \quad (48.1)$$

что совпадает с (43.19), если $az \ll 1$.

* Заметим, что формула (48.1) не имеет смысла при $z \geq 1/a$. Однако эта область значений z для нас несущественна. Мы будем ограничиваться волнами, которые концентрируются вблизи границы.

Уравнение (47.5) при этом записывается

$$\tilde{\Psi}'' + [k_0^2(1 - az) - \xi^2] \tilde{\Psi} = 0. \quad (48.2)$$

Введем обозначения:

$$H = (ak_0^2)^{-1/3}, \quad t_0 = H^2 (\xi^2 - k_0^2), \quad t = t_0 + z/H. \quad (48.3)$$

Тогда уравнение (48.2) будет

$$d^2\tilde{\Psi}(t)/dt^2 = t\tilde{\Psi}(t). \quad (48.4)$$

Частными решениями этого уравнения будут функции Эйри $\psi(t)$ и $v(t)$ (см. § 21). Из них нам в дальнейшем понадобится лишь $v(t)$, удовлетворяющая условию $t \rightarrow \infty, v \rightarrow 0$.

Предположим теперь, что на границе $z = 0$ выполняется условие $\psi = 0$. В акустике ψ может быть звуковым потенциалом или давлением и тогда рассматриваемый случай соответствует, например, приповерхностному подводному звуковому каналу в океане. Решение в виде суммы нормальных волн для этого случая дается выражением (47.23), где ξ_l находится из уравнения (47.21a) или в данном случае

$$v(t_0) = 0. \quad (48.5)$$

Обозначим решение этого уравнения $t_0 = -y_l$. Из таблиц корней функций Эйри имеем $y_1 = 2,338, y_2 = 4,088, \dots$ Учитывая (48.3), находим теперь

$$\xi_l^2 = k_0^2 - y_l/H^2. \quad (48.6)$$

При вещественном k_0 корни ξ_l лежат на вещественной оси. Легко показать, придавая k_0 малую мнимую часть, что при комплексном k_0 они лежат в первом и третьем квадрантах.

Обозначим

$$t_l = z/H - y_l, \quad t_{1l} = z_1/H - y_l, \quad (48.7)$$

где, как всегда, z_1 — координата излучателя. Учтем, кроме того, что согласно (48.3)

$$\partial/\partial z = 1/H \partial/\partial t, \quad \partial/\partial \xi = 2H^2 \xi \partial/\partial t. \quad (48.8)$$

Тогда решение (47.23) в рассматриваемом здесь случае записывается

$$\begin{aligned} \psi(r, z) &= \frac{\pi i}{H^2} \sum_l v(t_l) v(t_{1l}) H_0^{(1)}(\xi_l r) / [v'(-y_l)]^2, \\ v'(-y_l) &\equiv (\partial v/\partial t)_{t=-y_l}. \end{aligned} \quad (48.9)$$

На рис. 48.1 изображена зависимость амплитуды нескольких первых нормальных волн от z , т. е. графики функций $v(t_l)$. По оси ординат отложена безразмерная координата z/H . Мы видим, таким образом, что H по порядку величины определяет ширину волновода.

Фазовая скорость l -й нормальной волны равна

$$V_l = \omega/\xi_l = c_0 [1 - y_l/(k_0 H)^2]^{-1/2}, \quad (48.10)$$

где $c_0 = \omega/k_0$ — скорость волн в среде при $z = 0$. Групповая скорость

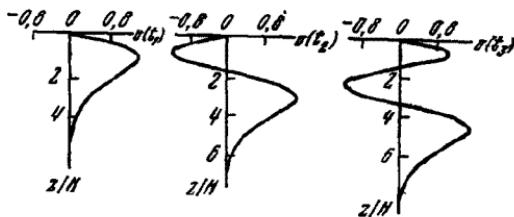
$$U_l = c_0 (dk_0/d\xi_l) = (1 - y_l/k_0^2 H^2)^{1/2} (1 - 2y_l/3k_0^2 H^2)^{-1}. \quad (48.11)$$

В наиболее интересном для нас случае $1/(k_0 H)^2 = (a/k_0)^{2/3} \ll 1$ имеем

$$V_l \approx c_0 (1 + y_l/2k_0^2 H^2), \quad U_l = c_0 (1 + y_l/6k_0^2 H^2). \quad (48.12)$$

В гидроакустике в приповерхностном канале закон (48.1) сохраняется лишь до некоторой глубины z , после чего уменьшение $n(z)$ при увеличении z замедляется, а затем и сменяется на возрастание. Расчет характеристик

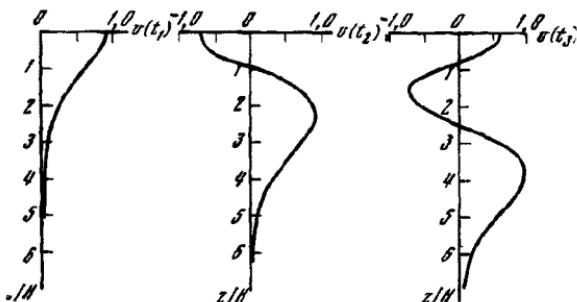
Рис. 48.1. Зависимость амплитуд нескольких первых нормальных волн от безразмерной координаты z/H в случае абсолютно податливой границы $z = 0$



распространения для билинейного профиля $n^2(z)$, когда линейный закон уменьшения $n^2(z)$ на некоторой глубине сменяется также линейным законом возрастания $n^2(z)$, рассмотрен в работе А. Киблевайта и Р. Денхама [181]. Теоретические результаты сравниены с результатами подводного эксперимента.

48.2. Приповерхностный волновод с абсолютно неподатливой границей. Пусть теперь на границе полупространства выполнено условие $(\partial\phi/\partial z)_{z=0} = 0$. В акустике это твердая стена.

Рис. 48.2. Зависимость амплитуд нескольких первых нормальных волн от безразмерной координаты z/H в случае абсолютно неподатливой границы $z = 0$



Поле в виде суперпозиции нормальных волн дается выражением (47.24), где ξ_l — корни уравнения $[\partial v(\xi_l, z)/\partial z] = 0$ или $v'(t_0) = 0$. Из таблиц функций Эйри находим $t_0 = -x_l$, $x_1 = 1,019$, $x_2 = 3,248$, $x_3 = 4,820$. Теперь из (48.3) получаем

$$\xi_l^3 = k_0^2 - x_l/H^2. \quad (48.13)$$

Далее, в выражении (47.24) имеем с учетом (48.3)

$$\left(\frac{\partial^3 v}{\partial z^3} \right)_{z=0, \xi_l} = \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \frac{\partial t}{\partial z} \right)_{z=0, \xi_l} = 2H^2 \xi_l (t_0 v(t_0))_{\xi_l} = -2Hx_l \xi_l v(-x_l).$$

В результате выражение (47.24) в рассматриваемом случае записывается:

$$\psi(r, z) = \frac{\pi i}{H} \sum_l v(t_l) v(t_{1l}) H_0^{(1)}(\xi_l r) / x_l v^2(-x_l). \quad (48.14)$$

Здесь

$$t_l = z/H - x_l, \quad t_{1l} = z_1/H - x_l. \quad (48.15)$$

Зависимость амплитуды нормальной волны от z , определяемая функцией $v(t_l)$, изображена для $l = 1, 2, 3$ на рис. 48.2. Для фазовой и групповой скорости нормальных волн будут справедливы формулы (48.10) — (48.12), если вместо y_l подставить x_l .

48.3. Внутренний симметричный волновод. Допустим, что отражающая граница отсутствует и имеется волновод, заданный симметричной функцией

$$n^2(z) = 1 - a(z), \quad -\infty < z < \infty, \quad a(-z) = a(z) \quad (48.16)$$

Требуется найти поле при источнике, расположеннном в точке $r = 0, z = z_1$. Этую задачу мы будем называть *основной задачей*. Назовем *симметричной задачей* случай, когда определяется поле двух источников $O(z_1)$ и $O'(-z_1)$, имеющих одинаковые мощности и работающих в фазе друг с другом (рис. 48.3, а). Вследствие симметрии задачи выполняется условие $(\partial\psi/\partial z)_{z=0} = 0$. Это значит, что в плоскости $z = 0$ можно поместить неподатливую границу, не изменяя поля в каждом из полупространств. Но для этого случая мы уже имеем решение (48.14), которое и будет, следовательно, решением симметричной задачи.

Назовем *антисимметричной задачей* задачу о поле источников $O(z_1)$ и $O'(-z_1)$, работающих в противофазе друг с другом (рис. 48.3, б). Поскольку

$$\begin{array}{c} \text{а} \\ + \bullet O' \\ \hline + \bullet O \end{array} \qquad \begin{array}{c} \text{б} \\ - \bullet O' \\ \hline + \bullet O \end{array}$$

Рис. 48.3. К вычислению поля в симметричном волноводе

здесь $(\psi)_{z=0} = 0$, то при $z = 0$ можно представить абсолютно податливую границу. Следовательно, решением антисимметричной задачи является выражение (48.9). Теперь, пользуясь принципом суперпозиции, мы можем наложить эти две задачи. При этом источники O' компенсируют друг друга, а амплитуда источника O удвоится. Отсюда следует, что решение основной задачи в симметричном волноводе является полусуммой решений симметричной (48.14) и антисимметричной (48.9) задач.

48.4. Шелчущие галереи. Полученные в 48.2 и 48.3 результаты для приповерхностного волновода могут быть использованы в теории так называемых шелчущих галерей — явления, возникающего при распространении волн вдоль

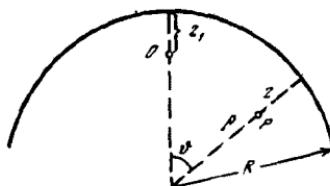


Рис. 48.4. Геометрия задачи при распространении волны вдоль криволинейной границы

искривленных границ. Типичной задачей о шелчущих галереях можно считать двумерную задачу о звуковом поле внутри кругового цилиндра с абсолютно неподатливой границей создаваемого источником O в виде пульсирующей нити, параллельной оси цилиндра и расположенной вблизи границы (рис. 48.4).

Уравнение для звукового давления или звукового потенциала ψ в полярных координатах ρ, θ записывается

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + k_0^2 \psi = 0 \quad (48.17)$$

с граничным условием

$$(\partial \psi / \partial \rho)_{\rho=R} = 0, \quad (48.18)$$

$k_0 = \omega/c$ здесь постоянно.

Будем искать решение уравнения (48.17) в виде

$$\psi = \rho^{-1/2} \tilde{\psi}(\rho) e^{\pm i \xi R \theta}. \quad (48.19)$$

Тогда для $\tilde{\psi}(\rho)$ получаем из (48.17) и (48.18):

$$\tilde{\psi}'' + (1/4\rho^2 + k_0^2 - \xi^2 R^2/\rho^2) \tilde{\psi} = 0, \quad \tilde{\psi}'(R) - \tilde{\psi}/2R = 0. \quad (48.20)$$

Пусть H будет по порядку величины толщина пристеночного слоя, в котором в основном сконцентрировано поле. Мы предположим, что

$$H \ll R, \quad k_0 R \gg 1. \quad (48.21)$$

Введем, кроме того, координату $z = R - \rho \ll R$. Тогда

$$(R/\rho)^2 \approx 1 + az, \quad a \equiv 2/R. \quad (48.22)$$

Пренебрегая $1/\rho^2$ по сравнению с k^2 , мы можем переписать (48.20) в виде

$$\tilde{\Psi}' + [k_0^2 - \xi^2(1 + az)] \tilde{\Psi} = 0, \quad (\tilde{\Psi}')_{z=0} = 0. \quad (48.23)$$

Здесь штрих означает производную по z . Обозначим

$$H \equiv (a\xi^2)^{-1/2}, \quad t_0 = H^2(\xi^2 - k_0^2), \quad t = t_0 + z/H. \quad (48.24)$$

Тогда уравнение (48.23) для $\tilde{\Psi}(t)$ совпадает с (48.4). Дальнейшие выкладки будут просто повторять выкладки § 48.2. Местоположение полюсов будет даваться формулой (48.13). Единственная разница будет в том, что в определении H в (48.3) стоит k_0^2 , а в (48.24) ξ^2 . Однако эта разница кажущаяся. Действительно, при сделанных нами предположениях, второй член в (48.13) мал и в нем, т. е. в H , ξ^2 вполне можно заменить на k_0^2 и пользоваться выражением (48.3) для H . Множитель в (48.19), зависящий от ϑ , при введении координаты $x = \vartheta R$, записывается $\exp(i\xi x)$ и описывает распространение волны вдоль стенки.

Таким образом, в рамках сделанных предположений нормальные волны, распространяющиеся вдоль плоской границы неоднородной среды при законе (48.1), имеют те же характеристики, что и нормальные волны, распространяющиеся вдоль внутренней стенки цилиндра, если положить $a = 2/R$. Можно показать, что и коэффициенты возбуждения соответственных нормальных волн в этих двух случаях будут одинаковыми. Впрочем, такая эквивалентность кривизны границы и градиента n^2 в среде известна в теории распространения волн уже давно. Эта эквивалентность легко иллюстрируется на лучевом языке. Действительно, в обоих случаях путь Δ , проходимый лучом вдоль границы от одного отражения до другого, и максимальное отклонение z_m от границы будут одинаковыми и равными

$$\Delta \approx 4\chi_0/a, \quad z_m \approx \chi_0^2/2a, \quad (48.25)$$

где χ_0 — угол скольжения луча при отражении от границы.

В сущности здесь важна относительная кривизна лучей и границы, которая в этих случаях является одинаковой.

Явление шипчущих галерей, заключающееся в повышенной слышимости, если корреспондирующие пункты находятся вблизи искривленной поверхности, впервые, по-видимому, наблюдалось на галерее под куполом в соборе св. Петра в Риме и было объяснено Рэлеем. С точки зрения лучевой картины такая концентрация естественна. Действительно, при уменьшении угла χ_0 энергия, излучаемая в интервал углов 0, χ_0 уменьшается как χ_0 . Толщина же слоя, на который распределяется эта энергия, как видно из (48.25), уменьшается, как χ_0^2 , т. е. быстрее. Поэтому при приближении к стенке плотность энергии растет. Исследование эффекта шипчущих галерей в электромагнитном случае см. в работе [67].

В заключение стоит отметить, что случаи распространения вдоль плоской границы в среде с градиентом и вдоль цилиндрической границы в однородной среде перестают, естественно, быть эквивалентны, если распространение вдоль цилиндрической границы осуществляется на расстояния, сравнимые с радиусом цилиндра. В этом случае, например, будет наблюдаться «антиподный» эффект, когда амплитуда будет резко возрастать при приближении угла ϑ к π .

48.5. О границах применимости метода ВКБ при волноводном распространении [16]. Рассмотрим на примере приповерхностного волновода границы применимости приближения ВКБ. Условия (23.8) предполагаем выполненными. Покажем, что кроме этого в волноводе имеет место ограничение на расстояние вдоль границы r . Частично дискуссия этого вопроса уже проводена в § 45.3. Здесь мы ее продолжим с несколько иной точки зрения.

Будем рассматривать волновод с мягкой границей (раздел 1 см. выше). Волновое число ξ_l дается формулой (48.6), где y_l находится из уравнения $v(-y_l) = 0$.

Имеет место разложение (см. [97]):

$$y_l = \left(\frac{3}{2}\right)^{1/4} \left[\left(l - \frac{1}{4}\right)\pi + \frac{0.088}{4l-1} - \dots \right]^{1/4}. \quad (48.26)$$

Нетрудно убедиться в том, что в приближении ВКБ функцией, описывающей поле в волноводе, будет первый член асимптотического ряда (21.13) для функции Эйри. ξ_l^2 в приближении ВКБ будет снова даваться формулой (48.6), в которой вместо y_l будет

$$y_{l, \text{ВКБ}} = \left[\frac{3\pi}{2} \left(l - \frac{1}{4}\right)\right]^{1/4}, \quad (48.27)$$

получающийся из (48.26), если в квадратных скобках удерживать лишь первый член ряда. В результате получаем приближенно при $l \gg 1$

$$\xi_l - \xi_{l, \text{ВКБ}} \approx \frac{1}{2k_0} (\xi_l^2 - \xi_{l, \text{ВКБ}}^2) = \frac{1}{2k_0 H^2} (y_{l, \text{ВКБ}} - y_l) \approx \frac{0.011}{k_0 H^2} \left(\frac{2}{3\pi}\right)^{1/4} \left(l - \frac{1}{4}\right)^{-1/4}. \quad (48.28)$$

Для применимости приближения ВКБ естественно потребовать, чтобы

$$(\xi_l - \xi_{l, \text{ВКБ}}) r \ll 1, \quad (48.29)$$

т. е. чтобы ошибка в фазе на расстоянии r была мала по сравнению с единицей. Эта ошибка уменьшается при увеличении l и возникает вопрос, какие l подставлять в (48.29). При немалых глубинах излучателя z_1 и приемника z нормальные волны с малыми l возбуждаются слабо и их можно не учитывать. Пусть z_l — горизонт заворота нормальной волны l в приближении ВКБ, определяемый из условия $\xi_l = k_0 n(z_l) = k_0 (1 - az_l)$. Воспользовавшись выражением (48.6) для ξ_l , куда вместо y_l подставим $y_{l, \text{ВКБ}}$ из (48.27), найдем

$$z_l = (3\pi/2)^{1/4} (l - 1/4)^{1/4} H. \quad (48.30)$$

Очевидно, эффективно будут возбуждаться и восприниматься приемником лишь те нормальные волны, для которых $z_l > z_1, z$. Рассмотрим для определенности случай $z_1 > z$. Тогда из (48.30) находим минимальный порядок эффективно возбуждающейся волны:

$$l_{\min} = \frac{1}{4} + \frac{2}{3\pi} \left(\frac{z_1}{H}\right)^{1/4}. \quad (48.31)$$

Подставляя l_{\min} вместо l в (48.28), получаем из (48.29)

$$r \ll (3\pi/2) \cdot 10^2 k_0 z_1^2. \quad (48.32)$$

Полученное нами ранее условие (45.47) применимости лучевой теории при учете (45.44) может быть записано

$$r \ll 4 k_0 z_1^2 (z_1/H)^{1/4}. \quad (48.33)$$

При больших k_0 последнее условие при заданном r выполняется лучше, чем (48.32). Это и понятно, так как требование точного воспроизведения фазы поля является, как правило, весьма жестким. При выводе (48.33) такого требования не ставилось.

Однако обычно знание фазы поля не так уж существенно. Как правило, можно ограничиться знанием интенсивности поля как функции координат. Для этого необходимо с достаточной точностью вычислить не ξ_l , а разницу $\xi_l - \xi_m$ (l и m — номера волн), которая определяет интерференционную структуру поля. Если $l, m \gg 1$, то, пользуясь (48.26), находим

$$\begin{aligned}\xi_l - \xi_m &\approx \frac{1}{2k_0} (\xi_l^2 - \xi_m^2) = \frac{1}{2k_0 H^2} (y_m - y_l) \approx (\xi_l - \xi_m)_{\text{ВКБ}} + \varepsilon, \\ \varepsilon &= \frac{0,011}{k_0 H^2} \left(\frac{2}{3\pi} \right)^{1/2} \left[\left(m - \frac{1}{4} \right)^{-1/2} - \left(l - \frac{1}{4} \right)^{-1/2} \right].\end{aligned}\quad (48.34)$$

Величину ε можно считать ошибкой в определении разности фаз волн l и m и поэтому потребуем, чтобы $\varepsilon r \ll 1$. Из сказанного выше ясно, что $l, m \geq l_{\min}$, однако в остальном в выборе l и m есть свобода. Пусть $l = l_{\min}$. Тогда, если считать, что m может быть произвольным $m > l$, то условие $\varepsilon r \ll 1$ сводится снова к (48.32). Это и естественно, поскольку при произвольных l и m требование на точность в разности фаз это то же самое, что требование на точность каждой из фаз. Предположим, однако, теперь, что $l = l_{\min} \gg 1$, $m = l_{\min} + \Delta l$, Δl имеет порядок единиц. Из (48.34) получаем

$$\varepsilon = \frac{0,011 \Delta l}{k_0 H^2} \frac{4}{3} \left(\frac{2}{3\pi} \right)^{1/2} \left(l_{\min} - \frac{1}{4} \right)^{-1/2}. \quad (48.35)$$

При учете теперь (48.31) условие $\varepsilon r \ll 1$ сводится к (48.33).

Физический смысл этих условий станет ясен, если мы заметим, что сложение нормальных волн l_{\min} и $l_{\min+1}$ дает интерференционную структуру с пространственным периодом $\Lambda = 2\pi/(\xi_{l_{\min}} - \xi_{l_{\min+1}})$, равным (как нетрудно показать, пользуясь значением ξ_l в приближении ВКБ и выражением (48.31) для l_{\min}), длине цикла луча $\Delta = 4(z_1/a)^{1/2}$ *. Требование, чтобы правильно передавалась взаимная фаза этих волн, означает требование правильного описания деталей звукового поля, пространственный масштаб изменения которых имеет порядок Λ .

§ 49. Волновод с законом Эпштейна

В предыдущем параграфе было показано, что задача о внутреннем симметричном волноводе будет решена, если решить задачу о приповерхностном волноводе с двумя разными граничными условиями. Поэтому в этом параграфе мы рассматриваем только приповерхностный волновод.

49.1. Основные уравнения. Пусть в полупространстве $z > 0$ $k^2(z)$ задано законом Эпштейна **:

$$k^2(z) = k_1^2 \left(1 + M/\cosh^2 \frac{mz}{2} \right), \quad M > 0. \quad (49.1)$$

Схематически этот закон изображен на рис. 49.1. Волновое число на границе $k^2(0) = k_1^2(1 + M)$, на бесконечности $k^2(\infty) = k_1^2$. Существенной особенностью этого закона по сравнению с рассмотренным в § 48 является то, что на границе $dk^2/dz = 0$.

Уравнение (47.5) записывается

$$\tilde{\Psi}'' + \left[k_1^2 \left(1 + M/\cosh^2 \frac{mz}{2} \right) - \xi^2 \right] \tilde{\Psi} = 0. \quad (49.2)$$

* Равенство пространственного периода интерференции нормальных волн соседних (достаточно высоких) порядков и длины цикла луча справедливо для любых волноводов (см. [94], § 5.3).

** Рассмотрение этого случая впервые было осуществлено Ю. Л. Газаряном [25, 26]. Дальнейшее развитие вопроса см. также в работе Блока [117].

Здесь целесообразно ввести безразмерную координату $\xi = mz/2$, а также обозначить

$$(2k_1/m)^2 M = (2\omega/mc_1)^2 M = v(v-1), \quad v = \sqrt{1/4 + (2k_1/m)^2 M}, \quad (49.3)$$

причем берется арифметическое значение корня. Величина v является аналогом частоты и при изменении ω от 0 до ∞ возрастает от 1 до ∞ .

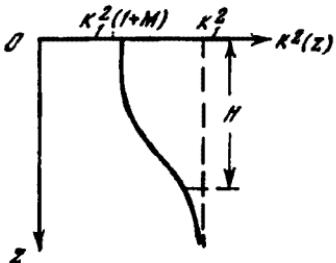


Рис. 49.1. Зависимость $k^2(z)$ для волновода Эйштейна

Положим далее

$$\mu^2 = (2/m)^2 (\xi^2 - k_1^2) \quad (49.4)$$

и условимся при вещественных ξ считать

$$\operatorname{Re} \mu \geq 0, \text{ если } \xi > k_1$$

и

$$\operatorname{Im} \mu < 0, \text{ если } \xi < k_1.$$

Уравнение (49.2) при этом записывается

$$\frac{d^2 \tilde{\Phi}}{d\xi^2} + \left[\frac{v(v-1)}{\operatorname{ch}^2 \xi} - \mu^2 \right] \tilde{\Phi} = 0. \quad (49.5)$$

Решением этого уравнения, представляющим собой при $z \rightarrow \infty$ уходящую или экспоненциально затухающую волну, будет (см. [143])

$$v = e^{-\mu \xi} (1 + e^{-\xi}) F(v + \mu, v, 1 + \mu, -e^{-\xi}). \quad (49.6)$$

При $\xi \rightarrow \infty$ имеем $v \approx e^{-\mu \xi}$. Используя известное выражение сферических функций через гипергеометрические (см. [29]), выражение (49.6) можно записать

$$v = \Gamma(1 + \mu) P_{v-1}^{-\mu}(\operatorname{th} \xi). \quad (49.7)$$

49.2. Абсолютно мягкая граница. Воспользовавшись формулой, дающей значение сферической функции от нулевого аргумента (см. [29]), уравнение для полюсов (47.21а) запишем

$$\frac{\Gamma(1 + \mu)}{\Gamma\left(\frac{1 + \mu + v}{2}\right) \Gamma\left(1 + \frac{\mu - v}{2}\right)} = 0. \quad (49.8)$$

Нас интересуют лишь те полюсы, для которых

$$\operatorname{Re} \mu > 0.$$

Только такие полюсы соответствуют нормальным волнам, затухающим (а не возрастающим) по амплитуде при $z \rightarrow \infty$. При этом условии, поскольку также и $\operatorname{Re} v > 0$, аргументы у всех гамма-функций в уравнении (49.8), кроме $\Gamma(1 + (\mu - v)/2)$, лежат в правой полуплоскости, т. е. эти функции имеют значения, отличные от нуля и бесконечности. Следовательно, интересующие нас корни уравнения (49.8) найдутся из условия:

$$\Gamma[1 + (\mu - v)/2] = \infty \quad (49.10)$$

и будут

$$1 + (\mu_l - v)/2 = -l, \quad \mu_l = v - 2l - 2, \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (49.11)$$

Подстановка этих корней в (47.23) и даст нам поле нормальных волн. При этом

$$\xi_l = \sqrt{k_1^2 + (m/2)^2 \mu_l^2}, \quad \operatorname{Im} \xi_l \geq 0. \quad (49.12)$$

Вычислим производные в знаменателе в (47.23).

Пользуясь выражением для сферической функции в нуле (см. [29]) и формулой

$$1/\Gamma(p) = \sin \pi p / \pi \Gamma(1-p), \quad (49.13)$$

а также формулой (49.16), ниже получим

$$\left[\frac{\partial v(z, \xi_l)}{\partial z} \right]_{z=0} = -2^{v-1} m \frac{\Gamma(1+\mu_l) \Gamma\left(\frac{\mu_l+v+1}{2}\right)}{\Gamma(v+\mu_l) \Gamma\left(\frac{\mu_l-v+1}{2}\right)}. \quad (49.14)$$

Далее, в выражении (47.23) имеем, если воспользоваться формулами (49.6) и (49.11),

$$\left[\frac{\partial v(0, \xi)}{\partial \xi} \right]_{\xi=\xi_l} = \left[\frac{2^{v-1} \Gamma(1+\mu) \Gamma\left(\frac{v+\mu}{2}\right)}{\Gamma(v+\mu)} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{\Gamma\left(1+\frac{\mu-v}{2}\right)} \right]_{\xi_l}. \quad (49.15)$$

Обозначим $1 + (\mu - v)/2 = p$, $p(\xi_l) = -l$. Воспользовавшись формулой (49.13), получаем

$$\left(\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{\Gamma(p)} \right)_{\xi_l} = \left[\frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\sin \pi p}{\pi} \Gamma(1-p) \right) \right]_{p=-l} \left(\frac{\partial p}{\partial \xi} \right)_{\xi_l} = (-1)^l \frac{2\xi_l}{m^2 \mu_l} \Gamma(1+l).$$

В результате находим

$$\left[\frac{\partial v(0, \xi)}{\partial \xi} \right]_{\xi=\xi_l} = (-1)^l \frac{2^v \xi_l}{m^2 \mu_l} \frac{\Gamma(1+\mu_l) \Gamma\left(\frac{v+\mu_l}{2}\right) \Gamma(1+l)}{\Gamma(v+\mu_l)}. \quad (49.15)$$

Подставим теперь выражения (49.14) и (49.15) в формулу для поля нормальных волн (47.23). Учтем при этом известные соотношения для гамма-функций (см. [95], гл. 12)

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad 2^{2z} \Gamma(z) \Gamma(z+1/2) = 2\sqrt{\pi} \Gamma(2z). \quad (49.16)$$

Тогда получаем

$$\psi = i\pi m \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\Gamma(v+\mu_l) v_l(z_1) v_l(z)}{\mu_l \Gamma^2(\mu_l) \Gamma(2l+2)} H_0^{(1)}(\xi_l r), \quad (49.17)$$

где μ_l и ξ_l находятся из формул (49.11) и (49.12) и для удобства записи мы обозначили

$$v(z_1, \xi_l) = v_l(z_1), \quad v(z, \xi_l) = v_l(z). \quad (49.18)$$

Функцию v , даваемую формулой (49.6), можно записать также в виде (см. [29])

$$v = e^{-\mu_l \xi} F\left(v, 1-v, 1+\mu, \frac{e^{-\xi}}{e^\xi + e^{-\xi}}\right), \quad (49.19)$$

а при подстановке $\xi = \xi_l$ также в виде [25]

$$v_l = -2\sqrt{\pi} \Gamma(1+\mu_l) 2^{2l+2-v} \frac{F_2}{\Gamma\left(-\frac{1}{2}-l\right) \Gamma(v-l-1)}, \quad (49.20)$$

где F_2 — другое решение гипергеометрического уравнения

$$F_2 = \operatorname{sh} \xi \operatorname{ch}^{-1} \xi \cdot F\left(1 + \frac{\mu-v}{2}, \frac{1+\mu+v}{2}, \frac{3}{2}, \operatorname{th}^2 \xi\right),$$

которое можно выразить также через полиномы Якоби. При $\xi = \xi_l$ имеем

$$F_2 = \frac{\operatorname{th} \xi}{\operatorname{ch}^{v-z-2l} \xi} G_l \left(v - 2l - \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \operatorname{th}^2 \xi \right). \quad (49.21)$$

Здесь

$$\xi = mz/2 = z/H. \quad (49.22)$$

Величина H может быть условно названа шириной волновода (см. рис. 49.1). При этом v , согласно (49.3), запишется

$$v = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + (k_1 H)^2 M}, \quad (49.23)$$

а μ_l в (49.20) будет

$$\mu_l = v - 2(l+1). \quad (49.24)$$

Величина

$$N = (k_1 H)^2 M, \quad (49.25)$$

которую мы условно назовем «волновым параметром», является важной характеристикой волновода.

Функция $v_l(z)$ в (49.17) характеризует зависимость амплитуды нормальных волн от координаты z . На рис. 49.2 сплошными линиями изображены графически несколько первых функций v_l при $N = 63,75$ ($v = 8,5$), когда существуют четыре незатухающие нормальные волны. По оси абсцисс откладываются v_l в линейном масштабе; значения l указаны внизу.

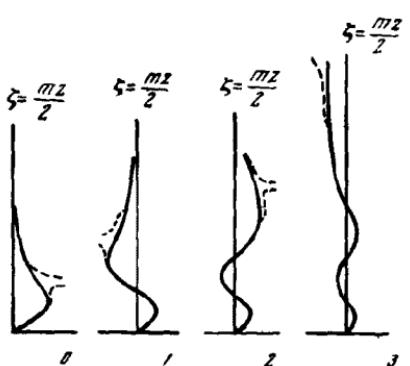


Рис. 49.2. Четыре первые нормальные волны при $v = 8,5$

Фазовая скорость каждой нормальной волны равна $V_l = \omega/\xi_l$, или при учете соотношений (49.11), (49.12) и (49.22):

$$V_l = \frac{\omega}{k_1 \sqrt{1 + (m\mu_l/2k_1)^2}} = \\ = \frac{c_1}{\sqrt{1 + [v - 2(l+1)]^2/(k_1 H)^2}}. \quad (49.26)$$

49.3. Критическая частота волновода. Как уже указывалось выше, нас интересуют только те решения уравнения (49.10), для которых выполнено условие $\operatorname{Re} \mu_l > 0$. Из формулы (49.24) мы видим, что для каждого номера l существует минимальное значение величины v , а следовательно, и минимальное значение частоты, при котором это условие может выполняться. Другими словами, для нормальной волны любого номера существует критическая частота. Наиболее низкая критическая частота, соответствующая нормальной волне нулевого порядка ($l=0$), может быть названа критической частотой волновода. Как видно из (49.24), она может быть найдена из условия $v=2$ или $\sqrt{\frac{1}{4} + (k_1 H)^2 M} = \frac{3}{2}$. Отсюда по-

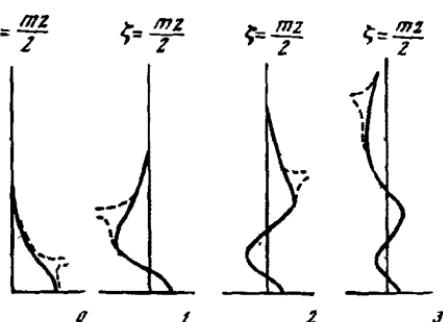


Рис. 49.3

То же, что и на рис. 49.2, при другом граничном условии на границе волновода

лучаем для критической (максимальной, «удерживаемой волноводом») длины волны

$$(\lambda_1)_{\max} = \pi \sqrt{2M} H. \quad (49.27)$$

49.4. Сплошной спектр. Чтобы получить полное выражение для поля в рассматриваемом нами волноводе, к полученной выше сумме нормальных волн необходимо добавить интеграл по берегам разреза, исходящего из точки ветвления $\xi = k_1$. Этот интеграл представляет собой боковую волну, амплитуда которой убывает с расстоянием, как правило, по закону $1/r^2$.

В частном случае при $\nu - v = -l$ (l — целое число или нуль) сплошной спектр представляется интегралом, абсолютное значение которого убывает как $1/r$. В частности, при исчезновении неоднородности среды, когда $v \rightarrow 1$, $l \rightarrow 0$, этот интеграл вырождается в выражение для прямой волны e^{ikR}/R .

49.5. Волновод, ограниченный неподатливой стенкой. Поле нормальных волн в этом случае будет даваться выражением (47.24), а ξ_l находится из уравнения

$$[\partial v(\xi_l, z)/\partial z]_{z=0} = 0. \quad (49.28)$$

Из (49.6) получаем, как и выше, после некоторых преобразований

$$(\partial v/\partial z)_0 = - \frac{2^{-\mu_l} m \sqrt{\pi} \Gamma(1+\mu_l)}{\Gamma\left(\frac{\mu_l+v}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1+\mu_l-v}{2}\right)}. \quad (49.29)$$

Отсюда видно, что уравнение (49.28) может быть удовлетворено при $\mu = \mu_l$, где μ_l находится из равенства

$$\mu_l = v - 2l - 1, \quad l = 0, 1, 2 \dots \quad (49.30)$$

Путем выкладок, аналогичных изложенным выше, из формулы (47.24) получаем для поля нормальных волн

$$\Psi = i\pi m \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\Gamma(v + \mu_l) v_l(z_1) v_l(z)}{\mu_l \Gamma^2(\mu_l) \Gamma(2l+1)} H_0^{(1)}(\xi_l r), \quad (49.31)$$

где ξ_l получаются при подстановке (49.30) в (49.12). Несколько первых функций $v_l(z)$ для $N = (k_1 H)^2 M = 63,75$ изображены сплошными линиями на рис. 49.3.

В рассматриваемом случае нормальная волна нулевого порядка не имеет критической частоты (или, вернее, она равна нулю). Действительно, при $l = 0$ имеем $\mu_0 = v - 1$ — уравнение, имеющее решение для любой, в том числе и как угодно, низкой частоты.

Отметим также, что полученные в разделах 3 и 5 результаты позволяют без труда получить выражение для поля нормальных волн в случае, когда граница волновода отсутствует, а закон (49.1) распространен и на отрицательные значения z . В этом случае мы имеем дело с распространением волн в симметричном волноводе. Поле нормальных волн в этом случае будет выражаться в виде полусуммы «антисимметричной» части (49.17) и «симметричной» части (49.31) (см. § 48.3).

49.6. Сравнение с результатами, полученными в приближении ВКБ. Функция $v(\xi, z)$, фигурирующая в формулах (47.23) и (47.24), может быть получена в приближении ВКБ в соответствии с изложенным в § 24.3, если там $n(z)$ заменить на $(n^2(z) - \xi^2/k_0^2)^{1/2}$, причем $n(z) = c(0)/c(z)$, $k_0 \equiv k(0)$. Тогда поле нормальных волн для «мягкой» границы будет, как показал Ю. Л. Газарян [26],

$$\Psi = \frac{1}{H} \sum_{l=0}^{\infty} Z_l(\xi_1) Z_l(\xi) H_0(\xi_l r). \quad (49.32)$$

Обозначим

$$n_1 = k_1/k_0, \quad \eta = \operatorname{arch} [1 - (2l + \frac{3}{2})/Hk_0 \sqrt{1 - n_1^2}]^{-1}. \quad (49.33)$$

Тогда имеем

$\zeta < \eta$:

$$Z_l(\zeta) = -\frac{\sqrt{2} \exp i(\pi/4 + l\pi)}{(\operatorname{ch}^2 \eta / \operatorname{ch}^2 \zeta - 1)^{1/4}} \times \\ \times \sin \left\{ Hk_0 \sqrt{1 - n_1^2} \left[\frac{1}{\operatorname{ch} \eta} \arcsin (\operatorname{sh} \zeta / \operatorname{sh} \eta) - \arcsin (\operatorname{th} \zeta / \operatorname{tg} \eta) \right] \right\}, \quad (49.34)$$

$\zeta > \eta$:

$$Z_l(\zeta) = \frac{\exp(i\pi/4)}{\sqrt{2(1 - \operatorname{ch}^2 \eta / \operatorname{ch}^2 \zeta)^{1/4}}} \times \\ \times \exp \left\{ Hk_0 \sqrt{1 - n_1^2} \left[\operatorname{arch}(\operatorname{th} \zeta / \operatorname{th} \eta) - \frac{1}{\operatorname{ch} \eta} \operatorname{arch}(\operatorname{sh} \zeta / \operatorname{sh} \eta) \right] \right\}. \quad (49.35)$$

Для ξ_l получаем

$$\xi_l \approx k_0 \sqrt{n_1^2 + (V \sqrt{1 - n_1^2} - (2l + 3/2)/k_0 H)^2}. \quad (49.36)$$

Значения функций $v_l(\xi)$ в приближении ВКБ изображены на рис. 49.2 пунктирными линиями.

В случае, когда волновод ограничен с одной стороны «твердой стенкой», Z_l снова дается выражениями (49.34) и (49.35) с заменой в первом символа \sin на $-\cos$. В (49.33) и (49.36) $2l + \frac{3}{2}$ заменяется на $2l + \frac{1}{2}$. В остальном результаты остаются неизменными. Соответственные значения v_l для этого случая изображены пунктирными линиями на рис. 49.3.

Существенно отметить, что метод фазового интеграла дает решение, неограниченно приближающееся к точному при увеличении l . Однако при заданном номере нормальной волны и при увеличении частоты расхождение между точным и приближенным решениями не стремится к нулю [26]. Так, для $l = 0$ в случае симметричного решения оказывается, что главный член асимптотического разложения Z_0 по $1/k_0 H$ отличается для точного и приближенного решений на 4 %. Это нетрудно понять, если учесть, что при увеличении частоты мы получаем правильное решение в приближении геометрической оптики только в том случае, если рассматривается поле плоской волны, падающей на неоднородную среду под определенным, фиксированным углом падения. Между тем, если считать заданным номер нормальной волны и увеличивать частоту волны, то углы скольжения соответственных нормальных волн будут уменьшаться. Таким образом рассматриваемый метод (метод ВКБ), вообще говоря, не дает асимптотического значения нормальной волны фиксированного номера, однако, можно ожидать асимптотичности одновременно по частоте и по номеру.

Соображения об ограничении по расстоянию на применимость результатов, полученных по методу ВКБ, изложенные в конце § 49, применимы и здесь.

§ 50. Приповерхностный волновод в твердом теле

Представляет интерес исследование распространения упругих волн в земной коре, когда их скорость возрастает с глубиной, т. е. имеет место приповерхностный волновод. Совершенно аналогичной является задача о распространении упругих волн типа волн шепчущих галерей вдоль криволинейной границы твердого тела. Этим вопросам и посвящен данный параграф, основанный на работах [15 и 17] *.

* После сдачи книги в печать появилась работа H. K. Acharava (J. Acoust. Soc. Amer., 1971, 50, N 1 (P.2)), в которой несколько другим методом и при других предположениях также рассматривается задача о приповерхностном волноводе в твердом теле.

50.1. Постановка задачи. Мы предполагаем, что плотность среды $\rho(z)$ и параметры Ляме $\lambda(z)$ и $\mu(z)$ являются достаточно медленными функциями z , чтобы в уравнениях упругости производными от ρ , λ и μ по z можно было пренебречь (критерий см. ниже). Это обеспечит нам отсутствие взаимодействия объемных и сдвиговых волн в среде. Такое взаимодействие будет иметь место лишь на границе $z = 0$ упругого полупространства с вакуумом.

Предположим, что при ограниченных z , лежащих в пределах приповерхностного волновода, зависимость волновых чисел объемных ($k = \omega/c$) и сдвиговых ($\kappa = \omega/b$) волн от z дается выражениями

$$k^2(z) = k_0^2(1 - a_k z), \quad \kappa^2(z) = \kappa_0^2(1 - a_\kappa z). \quad (50.1)$$

Эти формулы можно рассматривать как первые члены разложения $k^2(z)$ и $\kappa^2(z)$ в ряд по z с ограничением линейными членами. Мы будем предполагать, что

$$a_k D \ll 1, \quad a_\kappa H \ll 1, \quad (50.2)$$

где D и H определены ниже (см. (50.11) и (50.12)) и имеют порядок величин толщины волновода для объемных и сдвиговых волн. Выполнение последних условий вполне обеспечивает упомянутую выше необходимую медленность изменения $\rho(z)$, $\lambda(z)$ и $\mu(z)$.

Предположим, что в точке $r = 0$, $z = z_1$ цилиндрической системы координат расположен точечный источник сферических упругих волн типа, рассмотренного в § 33. Поле деформаций и напряжений будут иметь цилиндрическую симметрию и описываться тремя потенциалами $\varphi(r, z)$, $\psi(r, z)$ и $\chi(r, z)$, через которые компоненты смещений u , v , w в цилиндрической системе координат r , θ , z записываются при помощи формул, аналогичных (33.2),

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z}, \quad v = \frac{\partial \chi}{\partial r}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right). \quad (50.3)$$

φ является потенциалом объемной волны (P -волна), ψ — потенциалом сдвиговой волны, поляризованной в плоскости rz (SV -волна), χ — потенциалом сдвиговой волны, поляризованной перпендикулярно плоскости rz (SH -волна). Во всех точках, за исключением области, занятой излучателем, функция $\varphi(r, z)$ удовлетворяет волновому уравнению $\Delta \varphi + k^2(z) \varphi = 0$. Функции $\psi(r, z)$ и $\chi(r, z)$ удовлетворяют такому же уравнению, где вместо $k^2(z)$ стоит $\kappa^2(z)$.

Компоненты тензора напряжений \hat{zz} , $\hat{z\theta}$, $\hat{z\theta}$, являющиеся компонентами силы, действующей на границе $z = 0$, выражаются формулами (33.3), если там опустить индекс 0 у потенциалов. Условия обращения их в нуль (свободная граница) дают, с учетом также волновых уравнений для потенциалов:

$$z = 0 \left\{ \begin{array}{l} \kappa_0^2 \varphi + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z} \right), \\ -2 \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \kappa_0^2 \psi + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right), \\ \frac{\partial \chi}{\partial z} = 0. \end{array} \right\} \quad (50.4)$$

Допустим, что источник излучает P -волну, тогда надо потребовать, чтобы при $R \rightarrow 0$

$$\varphi = e^{ikR}/R, \quad R = \sqrt{r^2 + (z - z_1)^2}. \quad (50.5)$$

Аналогичные особенности будут иметь SV -волна (SV -источник) или SH -волна (SH -источник) в зависимости от того, какая волна излучается в качестве первичной. Мы будем требовать, чтобы при $z \rightarrow \infty$ функции φ , ψ и χ исчезали.

Как показано в [15], решение так поставленной задачи описывает также волны шепчущих галерей в твердой среде, ограниченной сферической или

цилиндрической границами радиуса ρ . В этом случае надо положить $a_k = a_x = 2/\rho$. Координата r при этом будет отсчитываться вдоль границы, а z нормально к ней. Если же кроме неоднородности среды, характеризуемой формулами (50.1), имеется также кривизна границы, то к a_k и a_x надо прибавить величину $2/\rho$. Величина ρ считается положительной, если направление от поверхности к центру кривизны совпадает с направлением от поверхности внутрь твердой среды и отрицательной в обратном случае.

Заметим, что в случае горизонтальной поляризации (SH -волна) задача определения потенциала $\chi(r, z)$ полностью эквивалентна задаче о приповерхностном акустическом волноводе с абсолютно неподатливой границей. Последняя была достаточно подробно рассмотрена в §§ 47, 48, поэтому на случае SH -поляризации ниже мы останавливаемся мало, рассматривая главным образом случаи P - и SV -источников, дающих соответственно P - и SV -волны, поляризованные в вертикальной плоскости.

50.2. Интегральные представления для потенциалов. Введем, как и в § 47, трансформанты Фурье — Бесселя от $\varphi(r, z)$ и $\psi(r, z)$, обозначив их через $\tilde{\varphi}(\xi, z)$ и $\tilde{\psi}(\xi, z)$. Так, например,

$$\varphi(r, z) = \int_0^\infty \tilde{\varphi}(\xi, z) J_0(\xi r) \xi d\xi, \quad \tilde{\varphi}(\xi, z) = \int_0^\infty \varphi(r, z) J_0(\xi r) r dr, \quad (50.6)$$

и то же для $\psi(r, z)$ и $\tilde{\psi}(\xi, z)$.

Границные условия при $z = 0$ получатся при подстановке в (50.4) вместо φ и ψ их выражений через $\tilde{\varphi}$ и $\tilde{\psi}$

$$z = 0, \quad p\tilde{\varphi} = \xi\tilde{\psi}', \quad \tilde{\varphi}' = p\xi\tilde{\psi}, \quad (50.7)$$

где

$$p \equiv \frac{1}{\xi} (\xi^2 - \kappa_0^2/2), \quad (50.8)$$

а штрих означает дифференцирование по z .

Рассмотрим теперь:

а) SV -источник. В этом случае $\varphi(r, z)$ и $\psi(r, z)$ удовлетворяют уравнениям (ср. § 47.1)

$$\Delta\varphi + k^2(z)\varphi = 0, \quad \Delta\psi + \kappa^2(z)\psi = 4\pi\delta(z - z_1)\delta_1(r). \quad (50.9)$$

Из (50.6) получаем, как и в § 47.1, уравнения

$$\tilde{\varphi}'' + (k^2 - \xi^2)\tilde{\varphi} = 0, \quad \tilde{\psi}'' + (\kappa^2 - \xi^2)\tilde{\psi} = 2\delta(z - z_1). \quad (50.10)$$

Отсюда следует, что $\tilde{\varphi}$ удовлетворяет при $z = z_1$ условиям (47.6) и (47.7), т. е. имеет разрыв в производной.

Как и в § 47, мы можем заменить правую часть второго из уравнений (50.10) нулем, потребовав, чтобы $\tilde{\psi}$ удовлетворяло при $z = z_1$ условиям (47.6) и (47.7). Учитывая теперь (50.1), эти уравнения можно записать

$$\partial^2\tilde{\varphi}/\partial q^2 = q\varphi(q), \quad q = q_0 + z/D, \quad q_0^2 = D^2(\xi^2 - k_0^2), \quad D = (a_k k_0^2)^{-1/2}; \quad (50.11)$$

$$\partial^2\tilde{\psi}/\partial t^2 = t\tilde{\psi}(t), \quad t = t_0 + z/H, \quad t_0^2 = H^2(\xi^2 - \kappa_0^2), \quad H = (a_x \kappa_0^2)^{-1/2}. \quad (50.12)$$

Решениями этих уравнений являются функции Эйри (см. § 21). Учитывая требование $\tilde{\varphi} \rightarrow 0$, $\tilde{\psi} \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$, положим

$$\tilde{\varphi} = Av(q), \quad 0 \leq z < \infty, \quad (50.13)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\psi} &= Bu(t) + Cv(t), & 0 \leq z \leq z_1, \\ \tilde{\psi} &= Ev(t), & z_1 \leq z < \infty. \end{aligned} \quad (50.14)$$

Постоянные A, \dots, E найдем из граничных условий (50.7) и условий (47.6), (47.7) при $z = z_1$. В результате получаем

$$0 \leq z < \infty, \quad \tilde{\Psi} = \frac{2DHp\xi v(t_1)v(q)}{DHp^2v(q_0)v(t_0) - v'(q_0)v'(t_0)}, \quad (50.15)$$

$$0 \leq z \leq z_1, \quad \tilde{\Psi} = 2Hv(t_1) \left[u(t) - \frac{v'(q_0)u'(t_0) - DHp^2v(q_0)u(t_0)}{v'(q_0)v'(t_0) - DHp^2v(q_0)v(t_0)} v(t) \right], \quad (50.16)$$

где $t_1 = t_0 + z_1/H$. Штрихи означают дифференцирование по аргументам функций Эйри (q и t). Выражение для $\tilde{\Psi}$ при $z_1 \leq z < \infty$ получается из (50.16) заменой местами t и t_1 .

б) P -источник. Совершенно аналогично имеем для этого случая

$$0 \leq z \leq z_1 \quad \tilde{\Phi} = 2Dv(q_1) \left[u(q) - \frac{v'(t_0)u'(q_0) - DHp^2v(t_0)u(q_0)}{v'(t_0)v'(q_0) - DHp^2v(t_0)v(q_0)} v(q) \right], \quad (50.17)$$

$$q_1 = q_0 + z_1/D.$$

Значение $\tilde{\Phi}$ для $z_1 \leq z < \infty$ получается из (50.17) переменой мест z и z_1

$$0 \leq z < \infty, \quad \tilde{\Phi} = \frac{2DHpv(q_1)v(t)}{\xi [DHp^2v(t_0)v(q_0) - v'(t_0)v'(q_0)]}. \quad (50.18)$$

Интегральное представление для $\varphi(r, z)$ получается подстановкой $\tilde{\Psi}(\xi, z)$ из (50.15) и (50.17) в первый интеграл (50.6) и совершенно аналогично для $\psi(r, z)$.

50.3. Нормальные волны. Первый интеграл в (50.6) и аналогичный ему для $\psi(r, z)$ целесообразно преобразовать так, чтобы интегрирование по ξ осуществлялось по всей вещественной оси. Это делается, как и в § 26.4, заменой функции Бесселя полусуммой функций Ханкеля и использованием соотношения обхода $H_0^{(2)}(e^{-ix}) = -H_0^{(1)}(x)$. В результате имеем

$$\varphi(r, z) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\Psi}(\xi, z) H_0^{(1)}(\xi r) \xi d\xi \quad (50.19)$$

и аналогично для $\psi(r, z)$. После этого интеграл по вещественной оси заменяется интегралом по бесконечной полуокружности в верхней полуплоскости (который равен нулю) плюс интегралы по контурам, охватывающим особенности (в данном случае полюсы) в верхней полуплоскости. В результате потенциалы будут представлены в виде сумм

$$\varphi(r, z) = \sum_l \varphi_l(r, z), \quad \psi(r, z) = \sum_l \psi_l(r, z), \quad (50.20)$$

где φ_l и ψ_l получаются как вычеты соответственных подынтегральных выражений в l -м полюсе $\xi = \xi_l$, и дают поле нормальной волны номера l .

Как видно из выражений (50.15) — (50.18), полюсы ξ_l являются решениями уравнения

$$DHp^2v(t_0)v(q_0) - v'(t_0)v'(q_0) = 0. \quad (50.21)$$

Используя это уравнение, а также уравнение для функций Эйри и значение аронскиана $u'(t)v(t) - u(t)v'(t) = 1$, можно показать, что

$$[v'(q_0)u'(t_0) - DHp^2v(q_0)u(t_0)]_{\xi_l} = [v'(q_0)/v(t_0)]_{\xi_l} \quad (50.22)$$

и аналогично с заменой $t_0 \leftrightarrow q_0$.

После этого находим, выписывая значение вычетов в полосах в предположении, что последние являются простыми,

SV-источник:

$$0 \leq z < \infty, \quad \Phi_l = \frac{2\pi i D H}{Q_l} [p \xi^2 v(t_1) v(q)]_{\xi_l} H_0^{(1)}(\xi_l r), \\ \Psi_l = \frac{2\pi i H}{Q_l} \left[\frac{\xi v(q_1) v'(t_0)}{v(q_0)} v(q) \right]_{\xi_l} H_0^{(1)}(\xi_l r); \quad (50.23)$$

P-источник:

$$0 \leq z < \infty, \quad \Phi_l = \frac{2\pi i D}{Q_l} \left[\frac{\xi v(q_1) v'(t_0)}{v(q_0)} v(q) \right]_{\xi_l} H_0^{(1)}(\xi_l r), \\ \Psi_l = \frac{2\pi i D H}{Q_l} [p v(q_1) v(t)]_{\xi_l} H_0^{(1)}(\xi_l r); \quad (50.24)$$

где

$$Q_l = \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} [D H p^2 v(q_0) v(t_0) - v'(q_0) v'(t_0)] \right\}_{\xi_l} = \\ = \left\{ D H \partial p^2 / \partial \xi - 2\xi D^2 [q - (v'(q_0)/v(q))^2] \right\} \frac{v'(t_0)}{v(t_0)} - \\ - 2\xi H^2 [t_0 - (v'(t_0)/v(t_0))^2] \frac{v'(q_0)}{v(q_0)} \Big|_{\xi_l} [v(q_0) v(t_0)]_{\xi_l}, \quad (50.25)$$

и аналогичным образом для *SH*-источника (ср. (48.14)):

$$0 \leq z < \infty, \quad \chi(r, z) = \sum_l \chi_l(r, z), \quad (50.26)$$

$$\chi_l = \frac{\pi i}{H} \frac{v(t_{1l}) v(t_l)}{x_l v^2(-x_l)} H_0^{(1)}(\xi_l r), \quad (50.27)$$

где

$$t_l = z/H - x_l, \quad t_{1l} = z_1/H - x_l, \quad (50.28)$$

x_l — нули производной функции Эйри ($v'(-x_l) = 0$, см. § 48.2)).

Предполагая $\xi_l r \gg 1$ и воспользовавшись первым членом асимптотики функции Ханкеля, получаем для смещения в случае *SH*-источника

$$v = \partial \chi / \partial r = \sum_{l=1}^{\infty} A_l v(t_l) e^{i \xi_l r}, \\ A_l = -\frac{1}{x_l H} \sqrt{\frac{2\pi \xi_l}{r}} \frac{v(t_{1l})}{v^2(-x_l)} e^{-i \pi/4}. \quad (50.29)$$

Зависимость амплитуды нормальной волны номера l от z дается функцией $v(t_l)$. Эта функция при $l = 1, 2, 3$ изображена на рис. 48.2.

Фазовая и групповая скорости каждой нормальной волны будут даваться формулами (48.10) — (48.12), где вместо y_l необходимо подставить x_l .

Заметим, что распространение *SH*-волны в приповерхностном волноводе в двумерном случае исследовалось В. М. Бабичем и И. А. Молотковым [3], правда, без рассмотрения излучателя, а следовательно, без получения A_l . Зато решение ими было обобщено на случай, когда величина a_x может меняться в направлении распространения волны.

50.4. Анализ нормальных волн в случае вертикальной поляризации. Пронализируем уравнение полюсов (50.21) и выражения для Φ_l и Ψ_l в случае, когда ξ_l близко к x_0 , но $\xi_l < x_0$, а следовательно, фазовая скорость нормальных волн близка к скорости поперечных волн на границе полупространства, но больше ее. В силу предположения (50.2) имеем, учитывая (50.11) $q_0 \approx D^2(x_0^2 - k_0^2) \gg 1$. Это позволяет воспользоваться асимптотическими формулами для $v(q)$ и $v'(q)$ (см. § 21). При пренебрежении величинами $(Dx_0)^{-2}$ по сравнению с единицей, уравнение (50.21) записывается

$$v(t_0) = sv'(t_0), \quad s \equiv -\frac{\xi^2}{H} (\xi^2 - k_0^2)^{1/2} \left(\xi^2 - \frac{1}{2} x_0^2 \right)^{-2}. \quad (50.30)$$

Нетрудно показать, что его решением будет

$$\xi_l^2 = \kappa_0^2 - y_l/H^2 + 0(1/\kappa^3 H^3). \quad (50.31)$$

Здесь y_l — корни уравнения $v(-y) = 0$ (см. § 48.1). Два первых члена в правой части (50.31) получаются, если в силу малости s уравнение (50.30) заменить на $v(t_0) = 0$.

В выражении (50.25) главным членом в фигурных скобках является последний. Нетрудно получить, пренебрегая малыми $(\kappa_0 H)^{-2}$ и $(\kappa_0 D)^{-2}$ по сравнению с единицей, следующее выражение:

$$Q_l = \frac{1}{2} D (\kappa_0 H)^3 [v'(t_0) v(q_0)]_{\xi_l}. \quad (50.32)$$

Подставляя последнее в формулы (50.24), а также учитывая, что

$$v(q)/v(q_0) = e^{-mz} [1 + 0(1/\kappa_0^3 D^2)], \quad m \equiv \sqrt{\kappa_0^2 - k_0^2},$$

мы получаем для случая P -источника во всем полупространстве $0 \leq z < \infty$

$$\varphi_l = 4\pi i a e^{-m(z+z_0)} H_0^{(1)}(\xi_l r) \left[1 + 0\left(\frac{1}{\kappa_0^2 D^2}\right) + 0\left(\frac{1}{\kappa_0^2 H^2}\right) \right], \quad (50.33)$$

$$\psi_l = 2\pi i a H e^{-mz} v(t_0) H_0^{(1)}(\xi_l r) \left[1 + 0\left(\frac{1}{\kappa_0^2 D^2}\right) + 0\left(\frac{1}{\kappa_0^2 H^2}\right) \right], \quad (50.34)$$

где теперь

$$t_l \equiv z/H - y_l. \quad (50.35)$$

Величина a_k , характеризующая вертикальный градиент скорости продольных волн, из окончательных результатов выпала. Это и естественно, поскольку мы интересуемся волнами, фазовая скорость которых близка к скорости поперечных волн. При этом продольные волны будут неоднородными волнами, экспоненциально затухающими при удалении от границы (это видно из (50.33)) и проникающими в среду лишь на глубину порядка длины волны. В силу предполагаемой малости a_k изменение характеристик среды на этой глубине еще не скажется.

Подставив выражения (50.33) и (50.34) вместо φ и ψ в формулы (50.3), а также воспользовавшись асимптотикой для функции Ханкеля в предположении $\xi_l r \gg 1$, мы получаем для компонент смещения в нормальной волне номера l

$$u_l = \frac{P_l}{H} [v'(t_l) - 2e^{-mz} v'(-y_l)] e^{i\xi_l r},$$

$$w_l = -i\kappa_0 P_l \left[v(t_l) + \frac{2m}{H\kappa_0^2} v'(-y_l) e^{-mz} \right] e^{i\xi_l r}, \quad (50.36)$$

где

$$P_l = \frac{2\pi H}{v'(-y_l)} \sqrt{\frac{2\pi\kappa_0}{r}} e^{-mz_l - i\pi/4}. \quad (50.37)$$

Как видно из (50.36), w_l смещено по фазе относительно u_l на $-\pi/2$. Следовательно, движение частиц происходит по эллипсу. Однако, так как $\kappa_0 H \gg 1$, то $|u_l| \ll |w_l|$, и эллипс оказывается сильно вытянутым, а волна практически сдвиговой.

Для фазовой и групповой скоростей получаем на основе решения (50.31) формулы, аналогичные (48.12),

$$V_l = b_0 (1 + y_l/2\kappa_0^2 H^2), \quad U_l = b_0 (1 + y_l/6\kappa_0^2 H^2). \quad (50.38)$$

Для случая SV -источника, обращаясь к формулам (50.23), находим с той же точностью, что и выше

$$\Psi_l = \frac{2\pi i}{H^2} \frac{v(t_{1l})}{v'(-y_l)} e^{-\pi z} H_0^{(1)}(\xi_l r), \quad t_{1l} = \frac{z_1}{H} - y_l, \quad (50.39)$$

$$\Psi_l = \frac{\pi i}{H [v'(-y_l)]^2} v(t_{1l}) v(t_l) H_0^{(1)}(\xi_l r). \quad (50.40)$$

Для смещений мы снова получаем формулы (50.36), в которых теперь

$$P_l = \frac{v(t_{1l}) e^{-i\pi/4}}{H [v'(-y_l)]^2} \sqrt{\frac{2\pi q_0}{r}}. \quad (50.41)$$

Рассмотрим теперь уравнение полюсов в случае $\xi > \kappa_0$ ($t_0 > 0$). Учитывая характер поведения функции $v(t)$ при $t > 0$, нетрудно показать, что уравнение (50.30) будет иметь в этой области единственный корень. Предполагая, что этот корень ξ_R не слишком близок к κ_0 так, что t_0 достаточно велико, мы получаем из уравнения (50.30), воспользовавшись асимптотическими формулами для $v(t_0)$ и $v'(t_0)$,

$$\left(\xi^2 - \frac{1}{2} \kappa_0^2 \right)^2 = \xi^2 \sqrt{\xi^2 - \kappa_0^2} \sqrt{\xi^2 - k_0^2}. \quad (50.42)$$

Это известное уравнение для скорости поверхности волны Рэлея. Потенциалы Φ_R и Ψ_R для этой волны могут быть получены из формул (50.23) — (50.25) с заменой индекса l на R . Пользуясь асимптотикой для функции Эйри, можно показать, что в формуле (50.25)

$$q_0 - \left(\frac{v'(q_0)}{v(q_0)} \right)^2 = - \frac{1}{2D \sqrt{\xi^2 - k_0^2}}$$

и аналогично для $v(t_0)$ с заменой $q_0 \rightarrow t_0$, $k_0 \rightarrow \kappa_0$, $D \rightarrow H$. После этого получаем аналогично формулам (50.33) и (50.34) выражения для потенциалов рэлеевской волны в случае P -источника

$$\begin{aligned} \Phi_R &= (\pi \gamma_2 / iL) e^{-\gamma_1(z+z_1)} H_0^{(1)}(\xi_R r), \\ \Psi_R &= \left[i\pi \left(\xi_R^2 - \frac{1}{2} \kappa_0^2 \right) / \xi_R^2 L \right] e^{-\gamma_1 z_1 - \gamma_2 z} H_0^{(1)}(\xi_R r), \end{aligned} \quad (50.43)$$

$$\begin{aligned} \gamma_1 &\equiv \sqrt{\xi_R^2 - k_0^2}, \quad \gamma_2 \equiv \sqrt{\xi_R^2 - \kappa_0^2}, \\ L &= 1 - \frac{1}{4} \left(\frac{\kappa_0}{\xi_R} \right)^4 - \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2} + \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \right), \end{aligned} \quad (50.44)$$

где ξ_R — корень уравнения (50.42).

Аналогично для SV -источника

$$\begin{aligned} \Phi_R &= \frac{i\pi}{L} \left(\xi_R^2 - \frac{1}{2} \kappa_0^2 \right) e^{-\gamma_1 z - \gamma_2 z_1} H_0^{(1)}(\xi_R r), \\ \Psi_R &= \frac{\pi \gamma_1}{iL} e^{-\gamma_1(z+z_1)} H_0^{(1)}(\xi_R r). \end{aligned} \quad (50.45)$$

Смещения в рэлеевской волне получаются путем подстановки Φ_R и Ψ_R в формулы (50.3). Воспользовавшись также асимптотикой для функции Ханкеля в предположении $\xi_R r \gg 1$, получаем

$$\begin{aligned} u_R &= \frac{B}{\sqrt{r}} [e^{-\gamma_1 z} - (1 - \kappa_0^2/2\xi_R^2) e^{-\gamma_2 z}] e^{i\xi_R r}, \\ w_R &= \frac{iB}{\xi_R \gamma_2 \sqrt{r}} [(1 - \kappa_0^2/2\xi_R^2) e^{-\gamma_1 z} - e^{-\gamma_2 z}] e^{i\xi_R r}, \end{aligned} \quad (50.46)$$

где для P -источника

$$B = \frac{\gamma_2}{L} \sqrt{2\pi\xi_R} e^{-\gamma_1 z_1 - i\pi/4}, \quad (50.47)$$

для SV -источника

$$B = -\frac{\sqrt{2\pi\xi_R}}{L} \left(\xi^2 - \frac{1}{2} \kappa_0^2 \right) e^{-\gamma_1 z_1 - i\pi/4}. \quad (50.48)$$

Последние формулы не содержат величин a_k и a_s . Они получены при пренебрежении величинами порядка $(\kappa_0 H)^{-2}$ и $k_0 D$ по сравнению с единицей в амплитудных множителях, и величинами порядка $(\kappa_0 H)^{-3}$ и $(k_0 D)^{-3}$ при получении уравнения (50.42) для ξ_R . Таким образом, в этом приближении все характеристики релеевской волны оказываются такими же, как и в случае однородного полупространства, характеризуемого величинами k_0 и κ_0 . При применении полученных в настоящем параграфе формул надо помнить, что источники всех трех видов (P , SV и SH -источники) нормированы так, что при $R \rightarrow 0$ соответственный потенциал для первичной волны описывается выражением e^{ikR}/R .

**РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН
В НЕОДНОРОДНОМ ПО ТРАССЕ ВОЛНОВОДЕ**

В геофизических приложениях нередко приходится сталкиваться со случаями, когда свойства волновода изменяются вдоль направления распространения волн. Это случай так называемого неоднородного волновода. Параметры среды здесь являются функциями не одной, а двух или трех координат. Ниже мы рассмотрим вначале случай, когда задача допускает точное решение. Затем рассмотрим два приближенных метода, применимых к широкому классу волноводов. Один из них состоит в отыскании высокочастотной асимптотики задачи, а другой (метод поперечных сечений), наоборот, применим на низких частотах. Во всех случаях мы будем ограничиваться плоской задачей, когда скорость волн $c = c(x, z)$ является функцией двух прямоугольных координат. Будут рассматриваться нормальные волны, распространяющиеся в такого рода среде.

Лучевой формализм для случая $c = c(x, y, z)$ рассмотрен в работе [255]. Лучевая теория подводного звукового канала, неоднородного по трассе, рассмотрена в работе Ворфилда и Якобсона [262].

§ 51. Неоднородный волновод. Частный случай

В настоящем параграфе мы рассмотрим случай, допускающий точные решения и позволяющий проиллюстрировать некоторые особенности неоднородных волноводов [14]. Для примера будем рассматривать случай звуковых волн. Пусть квадрат волнового числа в среде зависит от двух координат x, z и дается выражением

$$k^2(x, z) = k_0^2 \left(\frac{1-a}{\operatorname{ch}^2(z/H)} + b \operatorname{th} \frac{x}{L} + a \right), \quad 0 < a < 1, \quad L > 0. \quad (51.1)$$

При любом фиксированном x , $k^2(x, z)$ имеет максимум при $z = 0$. Этот горизонт является, следовательно, осью волновода. При $|x| \gg L$ волновод может считаться однородным ($k^2 \approx k^2(z)$). Значения $|x| \lesssim L$ соответствуют переходной зоне, в которой однородный волновод со свойствами, соответствующими $x \rightarrow -\infty$, переходит в другой со свойствами, соответствующими $x \rightarrow \infty$. Постоянная H характеризует ширину волновода, $k_0 = \omega/c_0$ — волновое число в точке $x = z = 0$. При заданном значении x скорость звука возрастает со значения $c_{\min} = c_0 / \sqrt{1 + b \operatorname{th}(x/L)}$ на оси волновода (при $z = 0$) до $c_{\max} = c_0 / \sqrt{a + b \operatorname{th}(x/L)}$ при $|z| \rightarrow \infty$. Отношение

$$c_{\max}/c_{\min} = [1 + b \operatorname{th}(x/L)]^{1/2} [a + b \operatorname{th}(x/L)]^{-1}, \quad (51.2)$$

является важной характеристикой волновода при данном x . Чем больше это отношение, тем сильнее выражен волновод.

Из выражения (51.1) следует уравнение для семейства линий равных склонностей звука в плоскости xz

$$z = H \operatorname{arccosh} \sqrt{1 - [c_0^2/c^2 - a - b \operatorname{th}(x/L)]/(1-a)}.$$

Изолинии равных значений показателя преломления $n = c_0/c$ для одного из конкретных случаев изображены на рис. 51.1 пунктиром.

Рассмотрим звуковое поле в плоскости xz при источнике волны, настолько удаленном от неоднородного участка волновода, что кривизной фронта волны на этом участке можно пренебречь. Тогда задача сводится к плоской.

Для звукового потенциала $\psi(x, z)$ мы имеем обычное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k_0^2 \left(\frac{1-a}{\operatorname{ch}^2(z/H)} + b \operatorname{th} \frac{z}{L} + a \right) \psi = 0. \quad (51.3)$$

Последнее мы будем решать методом разделения переменных, для чего положим $\psi(x, z) = X(x)Z(z)$. Для функций $X(x)$ и $Z(z)$ получаем два уравнения

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \left(k_0^2 b \operatorname{th} \frac{x}{L} + \xi^2 \right) X = 0, \quad (51.4)$$

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} + \left[k_0^2 \left(\frac{1-a}{\operatorname{ch}^2(z/H)} + a \right) - \xi^2 \right] Z = 0, \quad (51.5)$$

где ξ^2 — параметр разделения. Введя новый параметр v , характеризующий волновод, путем соотношения

$$v = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + (k_0 H)^2 (1-a)}, \quad (51.6)$$

а также введя обозначения

$$\zeta = z/H, \quad \mu = H \sqrt{\xi^2 - k_0^2 a}, \quad (51.7)$$

уравнение (51.5) можно переписать в более простом виде

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} + \left[\frac{v(v-1)}{\operatorname{ch}^2 \zeta} - \mu^2 \right] Z = 0. \quad (51.8)$$

Это уравнение было исследовано в § 49. Его решения, удовлетворяющие всем необходимым условиям, даются сферическими функциями

$$Z(z) = P_{v-1}^{-\mu} (\operatorname{th} \zeta). \quad (51.9)$$

Эти же решения можно выразить через полиномы Якоби.

Собственные значения уравнения определяются соотношением

$$\mu = v - l - 1, \quad l = 0, 1, 2, \dots, \quad (51.10)$$

откуда при помощи (51.7) находятся соответствующие значения ξ_l . Целое число l является в то же время номером нормальной волны.

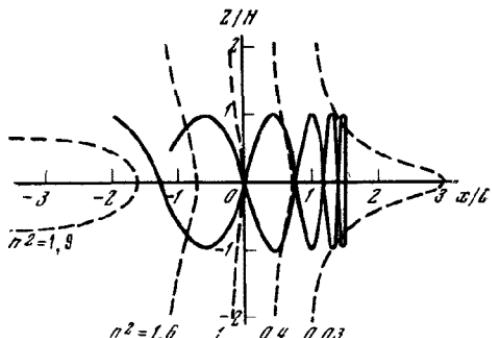


Рис. 51.1. Изолинии показателя преломления и лучи для неоднородного волновода частного вида

Уравнение (51.4) достаточно полно исследовалось в связи с задачей об отражении плоских волн от неоднородного слоя. Путем соответствующей подстановки оно сводится к гипергеометрическому уравнению.

Введем обозначения

$$\delta = iL \sqrt{\xi_l^2 - k_0^2 b} = i\delta_1, \quad \lambda = iL \sqrt{k_0^2 b + \xi_l^2}. \quad (51.11)$$

Одно из частных решений уравнения (51.4), остающееся конечным при $x \rightarrow \infty$, записывается так:

$$X_l = e^{-\lambda n} (1 + e^{-2n}) F \left(1 + \frac{\lambda + \delta}{2}, 1 + \frac{\lambda - \delta}{2}, 1 + \lambda, -e^{-2n} \right), \quad (51.12)$$

где $\eta = x/L$. При $x \rightarrow +\infty$ мы имеем $X_l \rightarrow e^{-\lambda\eta}$. При выполнении условия

$$k_0^2 b + \xi_l^2 > 0, \quad (51.13)$$

величина λ может быть выбрана отрицательно мнимой ($\lambda = -i\lambda_1$). В результате решение (51.12) при достаточно больших положительных x (справа от переходной зоны) будет представлять собой бегущую в сторону положительных x волну вида $\exp i(\lambda_1 x/L - \omega t)$. Наоборот, при

$$k_0^2 b + \xi_l^2 < 0, \quad (51.14)$$

когда величина λ может быть выбрана положительно вещественной, это же решение будет соответствовать экспоненциально затухающей при увеличении x волне.

Продолжая аналитически решение (51.12) в область $x < 0$, получаем выражение:

$$\begin{aligned} X_l = & (1 + e^{2\eta}) \left[\frac{\Gamma(-\delta) \Gamma(1+\lambda)}{\Gamma\left(\frac{\lambda-\delta}{2}\right) \Gamma\left(1 + \frac{\lambda-\delta}{2}\right)} \times \right. \\ & \times e^{\delta\eta} F\left(1 + \frac{\delta+\lambda}{2}, 1 + \frac{\delta-\lambda}{2}, 1 + \delta, -e^{2\eta}\right) + \\ & + \left. \frac{\Gamma(\delta) \Gamma(1+\lambda)}{\Gamma\left(\frac{\lambda+\delta}{2}\right) \Gamma\left(1 + \frac{\lambda+\delta}{2}\right)} e^{-\delta\eta} F\left(1 + \frac{\lambda-\delta}{2}, 1 - \frac{\lambda+\delta}{2}, 1 - \delta, -e^{2\eta}\right) \right], \end{aligned} \quad (51.15)$$

Здесь Γ — гамма-функция.

При положительно мнимом δ (51.15) соответствует комбинации двух волн, из которых одна распространяется в сторону положительных x (первый член в квадратных скобках), а другая — в обратном направлении (второй член). При $x \rightarrow -\infty$ асимптотическим выражением для решения (51.15) будет

$$X_l = \frac{\Gamma(-\delta) \Gamma(1+\lambda)}{\Gamma\left(\frac{\lambda-\delta}{2}\right) \Gamma\left(1 + \frac{\lambda-\delta}{2}\right)} e^{\delta\eta} + \frac{\Gamma(\delta) \Gamma(1+\lambda)}{\Gamma\left(\frac{\lambda+\delta}{2}\right) \Gamma\left(1 + \frac{\lambda+\delta}{2}\right)} e^{-\delta\eta}. \quad (51.16)$$

Таким образом, решение X_l , даваемое в разных областях выражениями (51.12) и (51.15), будет представлять собой суперпозицию падающей и отраженной нормальных волн номера l слева от переходной зоны и прошедшей волну (уходящую или экспоненциально затухающую) справа от переходной зоны. Условие (51.14), при котором справа от переходной зоны отсутствует уходящая волна, соответствует полному отражению в пределах переходной зоны.

Полное выражение для нормальной волны номера l будет

$$\psi_l = X_l(x) Z_l(z), \quad (51.17)$$

а полное решение задачи будет состоять из суперпозиции нормальных волн разных номеров:

$$\psi(x, z) = \sum_l C_l X_l(x) Z_l(z), \quad (51.18)$$

где C_l — коэффициент возбуждения соответственной нормальной волны. Поскольку предполагается, что излучатель расположен в пределах однородной части волновода, коэффициент C_l может быть найден из решения задачи об однородном волноводе.

Существенно отметить, что зависимость амплитуды звукового потенциала, а следовательно, и звукового давления от координаты z , определяемая для нормальной волны номера l функцией $Z_l(z)$, остается неизменной по всей длине волновода. По мере продвижения вдоль волновода, из-за изменения функции $X_l(x)$, изменяется величина звукового давления, но относительное распределение звуковой энергии по z не изменяется.

Нетрудно видеть, что это будет иметь место во всех тех случаях, когда квадрат волнового числа $k^2(x, z)$ задается в виде суммы двух функций, одна из которых зависит только от x , а другая — только от z и, следовательно, переменные в волновом уравнении разделяются.

Из выражения (51.15) нетрудно определить коэффициент отражения данной нормальной волны от переходной зоны. При $x \rightarrow -\infty$ гипергеометрические функции F в этом выражении обращаются в единицу. При мнимом положительном δ первый член в квадратных скобках будет давать падающую волну, а второй — отраженную. Отношение коэффициентов перед этими экспонентами и дает коэффициент отражения

$$V_l = \frac{\Gamma(\delta) \Gamma\left(\frac{\lambda-\delta}{2}\right) \Gamma\left(1 + \frac{\lambda-\delta}{2}\right)}{\Gamma(-\delta) \Gamma\left(\frac{\lambda+\delta}{2}\right) \Gamma\left(1 + \frac{\lambda+\delta}{2}\right)}. \quad (51.19)$$

При выполнении условия (51.13), когда можно положить $\lambda = -i\lambda_1$, используя известное соотношение $\Gamma(x) \Gamma(1-x) = \pi/\sin \pi x$, мы получаем выражение для модуля коэффициента отражения

$$\rho_l = |V_l| = \sqrt{V_l V_l^*} = \frac{\operatorname{sh} \frac{1}{2}(\lambda_1 - \delta_1)}{\operatorname{sh} \frac{1}{2}(\lambda_1 + \delta_1)}. \quad (51.20)$$

Если выполняется условие (51.14), т. е. λ вещественно, то, как нетрудно показать, модуль коэффициента отражения будет равен единице. Это соответствует случаю полного отражения нормальной волны от неоднородной части волновода.

Найдем теперь фазовую и групповую скорости каждой из нормальных волн и зависимость этих скоростей от координаты x . Предположим, что свойства волновода на длине волны изменяются мало и приближенно может быть применена геометрическая акустика. Тогда для фазовой скорости мы будем иметь выражение (см. уравнение (51.4)): $v_l = \omega/\kappa_l$, где $\kappa_l^2 = k_0^2 b \operatorname{th}(x/L) + \xi_l^2$, а ξ_l^2 определяется из выражения (51.7) и равно $\xi_l^2 = k_0^2 a + (v - l - 1)^2/H^2$.

Тогда фазовая скорость будет иметь вид:

$$v_l = c_0 [a + b \operatorname{th}(x/L) + (v - l - 1)^2/k_0^2 H^2]^{-1/2}. \quad (51.21)$$

На рис. 51.2 изображена фазовая скорость первой нормальной волны в зависимости от x/L в случае полного отражения для значений $k_0 H = 5, 10, 15, 20$ (параметры среды $a = 0,797$, $b = -0,975$). Номера кривых увеличиваются при увеличении $k_0 H$.

Групповая скорость нормальной волны будет

$$u_l = (d\kappa_l/d\omega)^{-1} = (c_0^2/v) [1 + b \operatorname{th}(x/L) - (1-a)(2l+1)/(2v-1)]^{-1}. \quad (51.22)$$

На рис. 51.3 изображена зависимость групповой скорости первой нормальной волны от x/L для тех же значений $k_0 H$ и параметров среды a и b .

Рассмотрим теперь задачу с точки зрения лучевой теории.

Уравнение эйконала $(\partial L/\partial x)^2 + (\partial L/\partial y)^2 + (\partial L/\partial z)^2 = n^2(x, y, z)$, где L — эйконал, а $n(x, y, z)$ — показатель преломления, в нашем случае будет иметь вид

$$(\partial L/\partial x)^2 + (\partial L/\partial z)^2 = (1-a) \operatorname{ch}^{-2}(z/H) + b \operatorname{th}(x/L) + a. \quad (51.23)$$

Допустим, что эйконал $L(x, z)$ может быть представлен в виде суммы двух функций, одна из которых зависит от x , а другая — от z ; $L(x, z) = L_x(x) +$

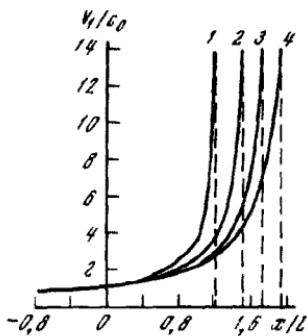


Рис. 51.2. Фазовые скорости нормальных волн для неоднородного волновода частного вида

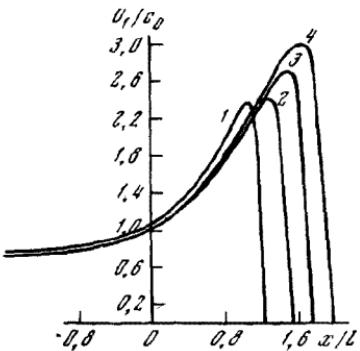


Рис. 51.3. Групповые скорости нормальных волн для неоднородного волновода частного вида

$+ L_z(z)$. Решая уравнение (51.23) методом разделения переменных, получаем

$$dL_x/dx = \sqrt{b \operatorname{th}(x/L) + m^2}, \quad dL_z/dz = \sqrt{(1-a) \operatorname{ch}^{-2}(z/H) + a - m^2},$$

где m^2 — параметр разделения. Направляющие косинусы луча будут

$$\frac{1}{n} \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{1}{n} \frac{\partial L_x}{\partial x} = \cos \chi = \frac{1}{n} \sqrt{b \operatorname{th}(x/L) + m^2},$$

$$\frac{1}{n} \frac{\partial L}{\partial z} = \frac{1}{n} \frac{\partial L_z}{\partial z} = \sin \chi = \frac{1}{n} \sqrt{(1-a) \operatorname{ch}^{-2}(z/H) + a - m^2},$$

где χ — угол наклона луча по отношению к плоскости $z=0$. Тогда

$$\frac{dz}{dx} = \operatorname{tg} \chi = \sqrt{\frac{(1-a) \operatorname{ch}^{-2}(z/H) + a - m^2}{b \operatorname{th}(x/L) + m^2}}. \quad (51.24)$$

Параметр m может быть выражен через угол χ_0 выхода луча из источника. Предположим, что последний расположен в плоскости $z=0$. Выше уже было предположено, что он находится на достаточно большом расстоянии от неоднородной части волновода, слева от нее, в месте, где волновод можно считать однородным. Тогда, подставляя в последнее выражение $z=0$, $x=-\infty$, $\chi=\chi_0$, получаем

$$m^2 = \cos^2 \chi_0 + b \sin^2 \chi_0. \quad (51.25)$$

Найдем теперь выражение для луча в явном виде. Из (51.24) имеем

$$\frac{dz}{\sqrt{(1-a) \operatorname{ch}^{-2}(z/H) + a - m^2}} = \frac{dx}{\sqrt{b \operatorname{th}(x/L) + m^2}}. \quad (51.26)$$

Используя значение табличных интегралов, получаем уравнение луча

$$\operatorname{ch} \frac{z}{H} = \frac{1}{p_1} \left\{ (1-m^2) \operatorname{ch}^2 \left[\frac{L p_1}{H q_1} \operatorname{arth} \frac{(F-m) q_1}{q_1^2 - m F} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{L p_1}{H q_2} \operatorname{arth} \frac{(F-m) q_2}{q_2^2 - m F} + C \right] + a - 1 \right\}^{1/2}. \quad (51.27)$$

где $p_1 = \sqrt{a - m^2}$, $q_1 = \sqrt{b + m^2}$, $q_2 = \sqrt{m^2 - b}$, $F = \sqrt{b \operatorname{th}(x/L) + m^2}$, и

C — постоянная интегрирования, которая может быть определена, если задаться точкой, через которую проходит рассматриваемый луч. Так, для луча, проходящего через точку $x=z=0$, имеем $C=0$.

При p_1 вещественном, когда $a > m^2$, что согласно (51.25) выполняется для лучей, вышедших из источника под углами $\chi_0 > \operatorname{arctg} V(1-a)/(a-b)$, z является монотонной функцией x . Это означает, что такие лучи не захватываются волноводом и уходят из него.

Когда $a < m^2$, т. е. $\chi_0 < \operatorname{arctg} V(1-a)/(a-b)$, уравнение луча имеет вид

$$z = H \operatorname{arch} \frac{1}{p_2} \left\{ 1 - a - (1 - m^2) \cos^2 \left[\frac{L p_2}{H q_1} \operatorname{arth} \frac{(F - m) q_1}{q_1^2 - m F} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{L p_2}{H q_2} \operatorname{arth} \frac{(F - m) q_2}{q_2^2 - m F} + C \right] \right\}^{1/2}, \quad (51.28)$$

где $p_2 = \sqrt{m^2 - a}$. Из этого уравнения видно, что z является осциллирующей функцией x , т. е. такие лучи захватываются волноводом и распространяются вдоль него.

В вершинах луча угол наклона луча к горизонту обращается в нуль. Так как знаменатель в выражении (51.24) является конечной величиной при любых значениях x , то приравнивая числитель этого выражения нулю и разрешая полученное уравнение относительно z , получаем выражение для максимального отклонения луча от плоскости $z = 0$:

$$z_{\max} = H \operatorname{arch} V(1-a)/(m^2 - a). \quad (51.29)$$

Следовательно, звуковой луч, вышедший из источника под углом χ_0 , при своем движении вдоль оси x будет отклоняться на одно и то же максимальное расстояние, определяемое выражением (51.29).

Из последнего выражения видно, в частности, в согласии со сказанным выше, что при $a = m^2$ точка заворота луча уходит на бесконечность, а при $a > m^2$ не может быть вещественных z , при которых луч имеет горизонтальное направление.

Из уравнения (51.24) вытекает еще одно интересное следствие. Положив в нем $z = 0$, будем следить за изменением угла наклона χ луча при последовательных пересечениях им оси волновода, т. е. при изменении x . При этом мы увидим, что с уменьшением скорости звука на оси волновода при увеличении x ($b > 0$) углы наклона луча к горизонту в точках пересечения им оси волновода уменьшаются, а расстояние между двумя соседними точками пересечения лучом оси волновода увеличивается. Наоборот, при увеличении скорости звука при продвижении вдоль оси волновода ($b < 0$) увеличиваются углы наклона луча к горизонту и уменьшается расстояние между двумя соседними точками пересечения лучом оси волновода. В последнем случае при определенных условиях угол наклона луча к горизонту может достичь 90° , после чего луч завернет и начнет распространяться вдоль волновода в обратном направлении.

Как видно из выражения (51.24), случай $\chi_0 = \pi/2$ может реализоваться только, если знаменатель правой части может обратиться в нуль. Отсюда мы получаем выражения для x_{\max} , т. е. максимального расстояния по оси x , на которое распространяется звуковой луч, если он испытывает полное отражение

$$x_{\max} = L \operatorname{arth} |m^2/b|. \quad (51.30)$$

Из выражений (51.28) и (51.30) следует, что условием заворота луча назад к источнику является выполнение неравенства

$$a < m^2 < |b|, \quad b < 0. \quad (51.31)$$

На рис. 51.1 сплошной линией изображен луч для одного из таких случаев при $a = 0,797$, $b = -0,975$, $L/H = 9,7$. Угол наклона луча к горизонту в начале координат был принят равным 20° .

Обобщение теории на электромагнитный случай не представляет особого труда. Вместо звукового потенциала будет фигурировать соответствующая компонента вектора Герца.

Нетрудно также видеть, что аналогично вышеизложенному может быть построена теория неоднородного волновода во всех тех случаях, когда $k^2(x, z)$ является аддитивной функцией своих переменных. Во всех этих случаях любая нормальная волна при падении ее на переходную зону в волноводе будет лишь испытывать частичное или полное отражение, но никогда не будет рождать волны других порядков. Более того, используя соответствующий результат из теории слоистых сред (см. § 25.9), можно всегда так сконструировать переходную зону, чтобы она была полностью прозрачной для волны данного номера.

§ 52. Высокочастотная асимптотика поля в неоднородном волноводе

52.1. Приповерхностный волновод. Пусть в полупространстве $z > 0$ скорость звука является произвольной функцией $c = c(x, z)$, но такой, что $(dc/dz)_{z=0} > 0$. Тогда вблизи границы $z = 0$ для волн достаточно высоких частот будет существовать волновод. Изменение $c(x, z)$ в направлении x считается медленным по сравнению с изменением по z . Высокочастотная асимптотика нормальных волн для такого рода задачи была рассмотрена на примере волн Лява в упругой среде Бабичем и Молотковым [3]. В дальнейшем аналогичную задачу для волн Рэлея рассмотрели И. В. Мухина и И. А. Молотков [69]. Ниже мы будем излагать задачу об акустическом приповерхностном волноводе с граничным условием $z = 0, \psi = 0^*$.

Предположим, что квадрат волнового числа задается законом

$$k^2(x, z) = k_0^2 [1 - a(x)z], \quad (52.1)$$

т. е. мы имеем линейную зависимость $k^2(x, z)$ от z . Ниже будет показано, как решение такой задачи переносится на общий случай, если $(dk^2/dz)_{z=0} \neq 0$.

Будем искать решения уравнения

$$\Delta\psi + k_0^2 [1 - a(x)z] \psi = 0 \quad (52.2)$$

при условиях

$$\psi_{z=0} = 0, \quad \psi_{z \rightarrow \infty} \rightarrow 0. \quad (52.3)$$

В § 48.1 мы видели, что в случае однородного волновода ($a = \text{const}$) ширина волновода H пропорциональна $k_0^{-1/2}$. Поэтому целесообразно вместо z ввести переменную

$$\zeta = k_0^{1/2} z. \quad (52.4)$$

Уравнение (52.2) при этом запишется

$$\partial^2\psi/\partial x^2 + k_0^{1/2}\partial^2\psi/\partial\zeta^2 + k_0^2\psi - k_0^{1/2}a(x)\zeta\psi = 0. \quad (52.5)$$

При $a = \text{const}$ ему будет удовлетворять такое выражение для нормальной волны номера l (с точностью до постоянного коэффициента)

$$\psi = v(t_l) e^{i\xi_l x}, \quad \xi_l = k_0 \sqrt{1 - y_l/(k_0 H)^2}, \quad t_l = z/H - y_l, \quad (52.6)$$

в чем можно убедиться, взяв отдельный член в (48.9) и заменив $H_0^{(1)}(\xi_l r)$ на $\exp(i\xi_l x)$ (переход к плоской задаче). Учитывая, что согласно (48.3), $k_0 H = a^{-1/2} k_0^{1/2}$, ξ_l можно разложить по степеням $\bar{k}_0^{1/2}$. Тогда

$$\psi = \exp \left[ik_0 x - \frac{i}{2} y_l a^{1/2} k_0^{1/2} x - \frac{i}{8} y_l^2 a^{1/2} k_0^{-1/2} x - \dots \right] v(a^{1/2} \zeta - y_l). \quad (52.7)$$

* В этом изложении автор пользуется материалами, любезно предоставленными ему И. А. Молотковым.

В случае $a = a(x)$ будем искать решение (52.2) в виде

$$\psi = e^{\Lambda} v(L), \quad (52.8)$$

где Λ и L ряды по степеням $k_0^{-1/2}$:

$$\Lambda = ik_0\tau(x) + ik_0^{1/3}\varphi(x) + \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m(x, \zeta) k_0^{-m/3}, \quad L = \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m(x, \zeta) k_0^{-m/3}, \quad (52.9)$$

а α_m и β_m имеют вид полиномов по ζ с коэффициентами, зависящими от x . Учитывая уравнение для функции Эйри $v''(L) = Lv(L)$, мы имеем

$$\psi_{xx} = e^{\Lambda} [(\Lambda_{xx} + \Lambda_x^2 + LL_x^2) v(L) + (2\Lambda_x L_x + L_{xx}) v'(L)] \quad (52.10)$$

и совершенно аналогично для Φ_{cc} . Подставляя значения вторых производных в (52.5) и приравнивая к нулю по отдельности коэффициенты при $e^\Lambda v(L)$ и $e^\Lambda v'(L)$, получаем два уравнения:

$$\begin{aligned} \Lambda_{xx} + \Lambda_x^2 + LL_x^2 + k_0^2 + k_0^{4/3}(\Lambda_{\zeta\zeta} + \Lambda_{\zeta}^2 + LL_{\zeta}^2) - k_0^{4/3}a(x)\zeta &= 0, \\ 2\Lambda_{xx}L_x + L_{xx} + k_0^{4/3}(2\Lambda_{\zeta}\Lambda_{\zeta} + L_{\zeta\zeta}) &= 0. \end{aligned} \quad (52.11)$$

Подставляя сюда Λ и L из (52.9) и приравнивая к нулю коэффициенты при разных степенях k_0 , получаем из первого уравнения (52.11):

$$k_0^2) - 1 - (\tau')^2 = 0, \quad (52.12)$$

$$k_0^{4/3}) - 2\tau' \varphi' + \frac{\partial^2 \alpha_0}{\partial \tau^2} + \left(\frac{\partial \alpha_0}{\partial \tau} \right)^2 + \beta_0 \left(\frac{\partial \beta_0}{\partial \tau} \right)^2 - a(x) \zeta = 0, \quad (52.13)$$

$$k_0) \quad i\tau'' + 2i\tau'x'_0 + \frac{\partial^2 x_1}{\partial \tau^2} + 2 \frac{\partial x_0}{\partial \xi} \frac{\partial x_1}{\partial \xi} + 2\beta_0 \frac{\partial \beta_0}{\partial \xi} \frac{\partial \beta_1}{\partial \xi} + \beta_1 \left(\frac{\partial \beta_0}{\partial \xi} \right)^2 = 0; \quad (52.14)$$

из второго уравнения (52.11):

$$k_0^{4/3}) \quad 2 \frac{\partial \alpha_0}{\partial \xi} \frac{\partial \beta_0}{\partial \zeta} + \frac{\partial^2 \beta_0}{\partial \zeta^2} = 0, \quad (52.15)$$

$$k_0) \quad 2i\tau'\beta_0' + 2\frac{\partial\alpha_0}{\partial\xi}\frac{\partial\beta_1}{\partial\xi} + 2\frac{\partial\alpha_1}{\partial\xi}\frac{\partial\beta_0}{\partial\xi} + \frac{\partial^2\beta_1}{\partial\xi^2} = 0, \quad (52.16)$$

где штрих означает дифференцирование по x . Для того, чтобы невязка в уравнении (52.5) не содержала положительных степеней k_0 (и, следовательно, исчезала при $k_0 \rightarrow \infty$), мы должны были бы выписать еще коэффициенты при $k_0^{1/6}$ и $k_0^{5/6}$, чего мы не делаем, чтобы изложение не было очень громоздким.

Из (52.12) имеем $\tau = \pm x$. В дальнейшем, мы рассматриваем случай $\tau = x$. Из (52.15) получаем

$$\frac{\partial \alpha_0}{\partial \xi} = - \frac{\partial^2 \beta_0}{\partial \xi^2} / 2 \frac{\partial \beta_0}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial^2 \alpha_0}{\partial \xi^2} = - \frac{\partial^3 \beta_0}{\partial \xi^3} / 2 \frac{\partial \beta_0}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \beta_0}{\partial \xi^2} / \frac{\partial \beta_0}{\partial \xi} \right)^2. \quad (52.17)$$

Подстановка в (52.13) дает

$$-2\varphi'(x)\left(\frac{\partial\beta_0}{\partial\xi}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{\partial^2\beta_0}{\partial\xi^2}\frac{\partial\beta_0}{\partial\xi} + \frac{3}{4}\left(\frac{\partial^2\beta_0}{\partial\xi^2}\right)^2 + \beta_0\left(\frac{\partial\beta_0}{\partial\xi}\right)^4 - a(x)\zeta\left(\frac{\partial\beta_0}{\partial\xi}\right)^2 = 0. \quad (52.18)$$

Отсюда следует, что $\beta_0(x, \zeta)$ — полином 1-й степени по ζ . Действительно, пусть $\beta_0(x, \zeta) = \beta_{0q}(x) \zeta^q + \dots + \beta_{00}(x)$, $\beta_{0q}(x) \not\equiv 0$, и предположим, что $q \geq 2$. Тогда левая часть (52.18) представляет собой полином степени $5q - 4$ со старшим членом $q^4 \beta_{0q}(x) \zeta^{5q-4}$. Так как (52.18) должно выполняться тождественно относительно ζ , то $\beta_{0q} \equiv 0$. Следовательно, условие $q \geq 2$

невозможно. Таким образом,

$$\beta_0(x, \zeta) = \beta_{01}(x)\zeta + \beta_{00}(x). \quad (52.19)$$

Из первого уравнения (52.17) следует, что $\alpha_0 = \alpha_{00}(x)$ — полином нулевой степени по ζ . Из (52.18) имеем теперь

$$-2\varphi' + (\beta_{01}\zeta + \beta_{00})\beta_{01}^2 = a(x)\zeta, \quad (52.20)$$

откуда

$$\beta_{01} = a^{1/4}(x), \quad \varphi' = \frac{1}{2}\beta_{00}a^{3/4}(x). \quad (52.21)$$

Из граничного условия (при $\zeta = 0$) следует

$$v[L(x, 0)] = 0, \quad L(x, 0) = -y_l, \quad (52.22)$$

где, как и в § 48, y_l — корень уравнения $v(-y) = 0$. (52.22) дает при учете значения L из (52.9)

$$\beta_0(x, 0) = \beta_{00}(x) = -y_l, \quad \beta_m(x, 0) = 0, \quad m = 1, 2, \dots \quad (52.23)$$

Теперь из (52.21) находим

$$\varphi(x) = -\frac{1}{2}y_l \int_0^x a^{3/4}(x) dx, \quad (52.24)$$

а из (52.19) с учетом (52.21) и (52.23)

$$\beta_0(x, \zeta) = a^{1/4}(x)\zeta - y_l = (z/H) - y_l, \quad H = [a(x)k_0^4]^{-1/4} \quad (52.25)$$

Обращаясь к уравнениям (52.14) и (52.16), замечаем, что их можно переписать теперь в виде

$$2iz_{00} + \partial^2 x_1 / \partial \zeta^2 + 2[a^{1/4}(x)\zeta - y_l]a^{1/4}(x)\partial \beta_1 / \partial \zeta + a^{3/4}(x)\beta_1 = 0, \quad (52.14')$$

$$(2i/3)a^{-1/4}(x)a'(x)\zeta + 2a^{1/4}(x)\partial x_1 / \partial \zeta + \partial^2 \beta_1 / \partial \zeta^2 = 0. \quad (52.16')$$

Таким же образом, как и выше можно показать, что α_1 является полиномом второй, а β_1 нулевой степеней по ζ

$$\alpha_1 = \alpha_{12}(x)\zeta^2 + \alpha_{11}(x)\zeta + \alpha_{10}(x), \quad (52.26)$$

$$\beta_1 = \beta_{10}(x) = 0 \quad (52.27)$$

(согласно (52.23)). Теперь из (52.14') имеем

$$\alpha_{00}'(x) = i\alpha_{12}(x)$$

и из (52.16')

$$\alpha_{11} = 0, \quad \alpha_{12} = -ia'(x)/6a(x). \quad (52.28)$$

Таким образом,

$$\alpha_0 = \alpha_{00}(x) = \frac{1}{6}\ln a(x), \quad (52.29)$$

$$\alpha_1(x, \zeta) = -\frac{i}{6}\frac{a'(x)}{a(x)}\zeta^2 + \alpha_{10}(x). \quad (52.30)$$

$\alpha_{10}(x)$, $\alpha_{21}(x)$, $\beta_{21}(x)$, $\beta_{22}(x)$ определяются на следующем этапе при рассмотрении первых невыписанных уравнений после (52.14) и (52.16) и т. д.

В результате получаем

$$\begin{aligned} \beta_{22}(x) &= \frac{1}{15a^{1/4}} \left[\frac{1}{3} \left(\frac{a'}{a} \right)^2 - \left(\frac{a'}{a} \right)' \right], \quad \beta_{21}(x) = \frac{4y_l\beta_{22}}{3a^{1/4}}, \\ \alpha_{10}(x) &= -iy_l^2 \int_0^x a^{1/4} \left\{ \frac{1}{8} + \frac{4}{45a^2} \left[\frac{1}{3} \left(\frac{a'}{a} \right)^2 - \left(\frac{a'}{a} \right)' \right] \right\} dx, \\ \alpha_{20}(x) &= \frac{1}{4}y_la^{3/4} + y_l \int_0^x (a'/24a^{3/4} + 7a'\alpha_{21}/9a^{1/4} - 4x_{21}'/3a^{1/4}) dx. \end{aligned} \quad (52.31)$$

Теперь решение (52.7) запишется (с точностью до постоянного множителя)

$$\Psi = a^{\frac{1}{k_0}}(x) \exp \left[ik_0 x - \frac{i y_l}{2} \int_0^x a^{\frac{1}{k_0}} dx + \alpha_1(x, \zeta)/k_0^{\frac{1}{k_0}} + \alpha_2(x, \zeta)/k_0^{\frac{1}{k_0}} + O\left(\frac{1}{k_0}\right) \right] v \left[z/H - y_l + \beta_2(x, \zeta)/k_0^{\frac{1}{k_0}} + O\left(\frac{1}{k_0}\right) \right]. \quad (52.32)$$

Для того, чтобы невязка при подстановке Φ в уравнение (52.5) не содержала положительных степеней k_0 , мы должны были бы под экспонентой и в аргументе функции Эйри выписать еще члены $\alpha_3(x, \zeta)/k_0$ и $\beta_3(x, \zeta)/k_0$, причем α_3 и β_3 могут быть найдены и имеют конечные значения, но мы их не выписываем для экономии места.

Выражение (52.32) может быть записано в виде

$$\Psi = \frac{C}{\sqrt{\xi_l}} a^{\frac{1}{k_0}}(x) \exp \left\{ i \int_0^x \xi_l(x) dx - \frac{ia'}{6a} \frac{\xi_l^2}{k_0^{\frac{1}{k_0}}} - \frac{4iy_l^2}{45k_0^{\frac{1}{k_0}}} \int_0^x \left[\frac{1}{3} \left(\frac{a'}{a} \right)^2 - \left(\frac{a'}{a} \right)' \right] \frac{dx}{a^{\frac{1}{k_0}}} + \frac{\tilde{\alpha}_2(x, \zeta)}{k_0^{\frac{1}{k_0}}} + O\left(\frac{1}{k_0}\right) \right\} v \left[\frac{z}{H} - y_l + \frac{\beta_2(x, \zeta)}{k_0^{\frac{1}{k_0}}} + O\left(\frac{1}{k_0}\right) \right]. \quad (52.33)$$

Это выражение отличается от (52.32) только тем, что учтено значение $\alpha_1(x, \zeta)$ и по аналогии с § 48.1 введена величина

$$\xi_l(x) = k_0 \sqrt{1 - y_l/(k_0 H)^2}, \quad H(x) = k_0^{-\frac{1}{k_0}} a^{-\frac{1}{k_0}}(x). \quad (52.34)$$

В тождественности (52.32) и (52.33) легко убедиться, подставив в $\int \xi_x(x) dx$ вместо ξ_x ее разложение в ряд по степеням $y_l/(k_0 H)^2$, а также утвя, что

$$\exp \left[\frac{y_l a^{\frac{1}{k_0}}}{4k_0^{\frac{1}{k_0}}} + O\left(\frac{1}{k_0^{\frac{1}{k_0}}}\right) \right] = \frac{k_0^{\frac{1}{k_0}}}{\xi_l^{\frac{1}{k_0}}}. \quad (52.35)$$

Здесь всюду предполагается, что толщина волновода велика по сравнению с длиной волны, т. е. $k_0 H \gg 1$.

Выражение (52.33) становится особенно простым, если пренебречь всеми членами под экспонентой, кроме первого интегрального и всеми членами, кроме первых двух в аргументе функции v . Рассмотрим этот случай подробнее. Для оценок порядка величин будем принимать, что $y_l \sim O(1)$, $a'/a \sim O\left(\frac{1}{M}\right)$, M — горизонтальный масштаб изменения свойств среды, $Z \sim O(H)$ и следовательно, $\zeta \sim O(a^{-\frac{1}{k_0}})$. Требование малости второго члена в экспоненте по сравнению с единицей дает условие

$$\epsilon \equiv (H/M) k_0 H \ll 1. \quad (52.36)$$

Его выполнение обеспечит также малость по сравнению с единицей третьего члена (и тем более всех последующих) в аргументе у функции Эйри. При оценке третьего члена в экспоненте значение интеграла принимаем равным интервалу интегрирования, умноженному на некоторое среднее значение подынтегрального выражения, порядок величины которого примем $M^{-2} a^{-\frac{1}{k_0}}$. Условие малости этого члена по сравнению с единицей будет

$$s(x/M) \ll 1. \quad (52.37)$$

Рассмотрим приповерхностный звуковой канал в гидроакустике, взяв $a = 10^{-4} \text{ м}$ (перепад температуры около 2° на 100 м глубины) и $M = 10^8 \text{ км}$. Получаем даже для такой сравнительно низкой частоты, как 15 Гц ($k_0 = 2\pi \cdot 10^{-2}$), $H = 136 \text{ м}$, $\epsilon \approx 10^{-3}$. Таким образом, условия (52.36) и (52.37) оказываются выполненными с большим запасом. В этом случае ограничение на частоту скорее возникает из того обстоятельства, чтобы $\partial k^2 / \partial z$ должно быть постоянным при изменении z в пределах, содержащих много H .

Итак, предполагая условия (52.36) и (52.37) выполненными, запишем выражение (52.33) для отдельной нормальной волны в неоднородном приповерхностном волноводе в таком простом виде:

$$\psi = \frac{C}{V\xi_l} a^{\prime *}(x) \exp\left(i \int_0^x \xi_l(x) dx\right) v\left(\frac{z}{H} - y_l\right). \quad (52.38)$$

Нетрудно показать, что последнее выражение удовлетворяет закону сохранения энергии, т. е. условию постоянства потока энергии в направлении x , проинтегрированному по всему сечению волновода. Действительно, имеем в акустике для интегрального потока энергии в направлении x

$$I_x = \int_0^\infty \left(|\psi|^2 / 2\rho c(x, z) \right) \cos \chi_l(x, z) dz = \frac{\xi_l(x)}{2\rho\omega} \int_0^\infty |\psi|^2 dz.$$

ρ , как всегда, для простоты считаем постоянным. Мы учли, что $\cos \chi_l(x, z) = \xi_l(x)/k(x, z)$. Подставим ψ из (52.38), а интеграл по z заменим интегралом по $t = z/H - y_l$. Учитывая, что $\int_{-y_l}^\infty v^2(t) dt$ при заданном l является константой, мы убеждаемся в независимости I_x от x . Выражение (52.38) для ψ допускает простое обобщение на общий случай $k^2 = k^2(x, z)$ при $(\partial k^2/\partial z)_{z=0} < 0$. Именно этот общий случай рассмотрен в работах [3, 69]. Оказывается, что для этого надо в качестве $a(x)$ в (52.38) брать

$$a(x) = -\frac{1}{k^2(x, 0)} \left[\frac{\partial k^2(x, z)}{\partial z} \right]_{z=0} \quad (52.39)$$

и в выражениях (52.34) для ξ_l и H полагать $k_0 = k(x, 0)$ — функция от x .

В этом параграфе мы рассматриваем случай, когда *отдельная нормальная волна* удовлетворяет волновому уравнению и граничным условиям независимо от нормальных волн других порядков l . Мы видим, что при достаточно высоких частотах и не слишком больших расстояниях, представление о неизважающими нормальными волнах законно. Условия, которые при этом налагаются на частоту и расстояние, вытекают из требования, чтобы асимптотические ряды (52.9) позволяли получить правильный результат. На этих условиях мы не останавливаемся, но ясно, что они более слабые, чем условия (52.36) и (52.37), при выполнении которых мы могли ограничиться лишь некоторыми первыми членами. Нетрудно показать также, что в эти условия также войдет ограничение на горизонтальное расстояние x^* .

52.2. Внутренний волновод. Пусть имеем снова волновое уравнение

$$\Delta\psi + k^2(x, z)\psi = 0, \quad k(x, z) = \omega/c(x, z). \quad (52.40)$$

Предположим, что в среде существует некоторая бесконечная кривая L (ось волновода), обладающая тем свойством, что луч, выпущенный из любой точки этой кривой под достаточно малым углом, пересекает затем ее неограниченное число раз. Введем координаты x и z , отсчитываемые соответственно вдоль кривой L и по нормали к ней. Мы будем предполагать, что вдоль x $k(x, z)$ изменяется существенно медленнее, чем вдоль z . Тогда условие, чтобы L было осью волновода, записывается

$$|\partial c/\partial z|_L = 0, \quad (\partial^2 c/\partial z^2)_L > 0. \quad (52.41)$$

Мы будем искать «волноводные» решения уравнения (52.40), т. е. решения, осциллирующие в некоторой полосе, содержащей в себе L , и экспоненциально затухающие вне этой полосы. Ширина этой полосы различна для «нор-

* Это следует из того, что $\alpha_m(x, \zeta)$ и $\beta_m(x, \zeta)$ содержит интегралы по x , оценка которых с помощью теоремы о средних значениях приводит к появлению x .

мальных волн» разных порядков l , но стремится к нулю при $\omega \rightarrow \infty$ и конечном l .

Рассмотрим вначале частный случай, когда кривая L совпадает с осью x и

$$k^2(x, z) = k_0^2 \left[1 - \frac{1}{4} \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right], \quad k_0 = \frac{\omega}{c_0} = \text{const.} \quad (52.42)$$

Решение уравнения (52.40) ищем в виде $\psi = \exp(i\xi x) Z(z)$. Для $Z(z)$ получаем уравнение

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} + \left[k_0^2 - \xi^2 - \frac{k_0^2}{4} \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right] Z = 0. \quad (52.43)$$

Сравнивая последнее с уравнением для параболического цилиндра (24.34), обозначая вместо n номер функции через l , получаем

$$Z(z) = D_l \left(\sqrt{\frac{k_0}{h}} z \right), \quad l + \frac{1}{2} = (k_0^2 - \xi^2) \frac{h}{k_0}. \quad (52.44)$$

Известно, что функция параболического цилиндра $D_l \left(\sqrt{\frac{k_0}{h}} z \right) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \pm \infty$ только, если l нуль или целое число. Таким образом, получаем для нормальной волны номера l с точностью до постоянного коэффициента *

$$\psi = e^{i\xi_l x} D_l \left(\sqrt{\frac{k_0}{h}} z \right), \quad \xi_l = k_0 \sqrt{1 - \left(l + \frac{1}{2} \right) \frac{1}{k_0 h}}, \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (52.45)$$

Из условия $\xi_l = 0$ получаем выражение для критической частоты l -й нормальной волны

$$\omega_k = (l + 1/2)(c_0/h). \quad (52.46)$$

При $\omega < \omega_k$ горизонтальное волновое число l мнимо, и волна не распространяется вдоль x .

Из свойств функций параболического цилиндра известно, что $D_l \left(\sqrt{\frac{k_0}{h}} z \right)$ осциллирует, если $\left| \sqrt{\frac{k_0}{h}} z \right| < 2\sqrt{l + 1/2}$ и экспоненциально убывает в обратном случае. Таким образом, для волны номера l волновод заключен в пределах

$$|z| \leq \sqrt{2(2l + 1)(h/k_0)} \equiv z_m. \quad (52.47)$$

Переходим теперь к случаю, когда L не прямая, а $k^2 = k^2(x, z)$ — функция обеих координат. При достаточно высоких частотах волновод будет захватывать достаточно узкую полосу вблизи L , в пределах которой можно пользоваться разложением (52.42), где $h = h(x)$. Напомним, что координата x отсчитывается вдоль кривой L , а z нормально к ней.

По аналогии со случаем, рассмотренным в предыдущем разделе и учитывая (52.45), высокочастотную асимптотику для неоднородного волновода естественно искать в виде

$$\psi = B(x) \exp \left(i \int_0^x \xi_l(x) dx \right) D_l \left(\sqrt{\frac{k_0}{h(x)}} z \right), \quad \xi_l = k_0 \sqrt{1 - \left(l + \frac{1}{2} \right) / k_0 h(x)}, \quad (52.48)$$

где неизвестную пока функцию $B(x)$ определим из условия сохранения интегрального по z потока энергии, т. е. условия (см. предыдущий раздел)

$$I_x = (\xi_l / 2\omega) \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi|^2 dz = \text{const.} \quad (52.49)$$

* Заметим, что при целых l функция $D_l(z)$ выражается через полиномы Эрмита $D_l(z) = 2^{-l/2} e^{-z^2/4} H_l(z/\sqrt{2})$.

Подставляя сюда ψ из (52.48), вводя новую переменную $\zeta = (k_0/h)^{1/4} z$ и учитывая нормировку

$$\int_{-\infty}^{+\infty} D_l^2(\zeta) d\zeta = (2\pi)^{1/4} l!, \quad (52.50)$$

получаем

$$B(x) = C \xi_l^{-1/4} h^{-1/4}, \quad (52.51)$$

где C не зависит от x и z .

Таким образом, имеем окончательно для высокочастотной асимптотики поля с точностью до постоянного множителя

$$\psi = h^{-1/4}(x) \xi_l^{-1/4}(x) \exp \left(i \int_0^x \xi_l(x) dx' \right) D_l \left(\sqrt{\frac{k_0}{h(x)}} z \right). \quad (52.52)$$

Строгое обоснование этого решения с определением последующих членов асимптотического разложения содержится в работе В. С. Булдырева [18]. Поскольку мы здесь этих членов не рассматриваем, мы не можем получить критерий применимости выражения (52.52). Однако по аналогии с изложенным в разделе 1 можно думать, что в случае подводного звукового канала они будут хорошо выполняться. Нижайшая частота скорее будет определяться тем, чтобы в пределах волновода $(-z_m, z_m)$ квадрат волнового числа мог быть аппроксимирован квадратичным законом.

§ 53. Низкочастотная асимптотика поля в волноводе. Метод поперечных сечений

Этот метод подробно изложен и обоснован в монографии Б. З. Каценеленбаума [42]. Там же содержится и литература по данному вопросу. Дальнейшее развитие метода содержится в работе Н. Е. Мальцева [62].

Допустим снова, что мы имеем двумерную задачу об отыскании решений уравнения (52.40) с условиями $\psi \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \pm\infty$ или соответственными условиями на границах, если среда ограничена. Мы предполагаем, что при любом фиксированном $x = x'$, $k^2(x', z)$ имеет максимум при некотором z , обеспечивая вблизи этого уровня наличие волноводного распространения. Однородный волновод, для которого $k^2(z) = k^2(x', z)$, называют волноводом сравнения, соответствующим координате x' . В общем случае при изменении x' изменяется и волновод сравнения. Мы будем предполагать, что это изменение происходит достаточно медленно (критерий см. ниже).

Для каждого волновода сравнения существует свой набор собственных функций $\exp(i\xi_x x) \psi_l(x', z)$ и собственных значений ξ_l , удовлетворяющих уравнению

$$\partial^2 \psi_l / \partial z^2 + [k^2(x', z) - \xi_l^2(x')] \psi_l = 0. \quad (53.1)$$

Мы предполагаем, что ψ_l образуют полную систему ортонормированных функций. Будем теперь искать решения уравнения (52.40) в виде

$$\psi = \sum_l A_l(x) \psi_l(x, z), \quad (53.2)$$

где $\psi_l(x, z)$ — собственные функции волноводов сравнения (штрих у x' в дальнейшем мы будем опускать), а $A_l(x)$ — неизвестные функции, которые мы должны определить. Имеем, опуская аргументы у функций,

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \sum_l \left(\frac{\partial^2 A_l}{\partial x^2} \psi_l + 2 \frac{\partial A_l}{\partial x} \frac{\partial \psi_l}{\partial x} + A_l \frac{\partial^2 \psi_l}{\partial x^2} \right),$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \sum_l A_l \frac{\partial^2 \psi_l}{\partial z^2}.$$

Подставляя эти производные в (52.40) и учитывая уравнение (53.1) для ψ_l , получаем

$$\sum_l \left(\frac{\partial^2 A_l}{\partial x^2} + \xi_l^2 A_l \right) \psi_l = - \sum_l \left(2 \frac{\partial A_l}{\partial x} \frac{\partial \psi_l}{\partial x} + A_l \frac{\partial^2 \psi_l}{\partial x^2} \right).$$

Умножая последнее равенство на ψ_m и интегрируя по z , получаем

$$\frac{\partial^2 A_m}{\partial x^2} + \xi_m^2 A_m = \sum_l \left[2 \frac{\partial A_l}{\partial x} \int \frac{\partial \psi_l}{\partial x} \psi_m dz + A_l \int \frac{\partial^2 \psi_l}{\partial x^2} \psi_m dz \right]. \quad (53.3)$$

Предположим, что свойства волновода с изменением x изменяются настолько медленно, что правую часть в последнем равенстве можно заменить нулем. Получающееся уравнение для A_m будет иметь решение, с точностью до постоянного множителя

$$A_m(x) = \xi_m^{-1/2}(x) \exp \left(i \int \xi_m(x) dx \right). \quad (53.4)$$

Общее же решение (53.2) будет

$$\psi = \sum_l C_l \xi_l^{-1/2} \exp \left(i \int \xi_l dx \right) \psi_l(x, z), \quad (53.5)$$

где C_l — постоянные, определяющиеся условием у источника, которое мы не рассматриваем. Аргумент у $\xi_l(x)$ опускаем.

Таким образом, в этом приближении решением задачи является совокупность не взаимодействующих друг с другом нормальных волн. Каждая из них самостоятельно приспосабливается к изменяющимся условиям в волноводе, без помощи волн других порядков. Обобщение выражения (53.5) на трехмерный случай имеется в работе А. Пирса [217].

Интересно отметить, что для случая линейной и квадратичной зависимости $k^2(x, z)$ от z , l -тый член в (53.5) будет совпадать с полученными в предыдущем параграфе выражениями (52.38) и (52.51) соответственно. Действительно, для случая, например, квадратичного закона, учитывая (52.49), находим нормированную функцию

$$\psi_l = \left(\frac{k_0}{2\pi h} \right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{\pi}} D_l \left(\sqrt{\frac{k_0}{h}} z \right).$$

Подстановка ее в (53.5) и сравнение получающегося выражения с (52.51) и доказывает сказанное.

Оденим теперь правую часть в (53.3) и найдем условие применимости приближения невзаимодействующих нормальных волн (см. [199]). Введем несколько произвольно величину $k_0 = k_0(x)$, за которую можно взять волновое число на оси волновода, и обозначим

$$U(x, z) = k_0^2 - k^2(x, z), \quad E_l = k_0^2 - \xi_l^2. \quad (53.6)$$

Тогда уравнение (53.1) запишется

$$\frac{\partial^2 \psi_l}{\partial z^2} + (E_l - U) \psi_l = 0. \quad (53.7)$$

Путем несложных преобразований можно показать, что

$$S_{ml}(x) = \int \frac{\partial \psi_l}{\partial x} \psi_m dz = \frac{1}{(E_l - E_m)} \int \psi_l \frac{\partial U}{\partial x} \psi_m dz, \quad (53.8)$$

$$Q_{ml}(x) = \int \frac{\partial^2 \psi_l}{\partial x^2} \psi_m dz = \frac{1}{(E_l - E_m)} \int \psi_l \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \psi_m dz + 2 \sum_{n \neq l, m} \frac{1}{(E_l - E_m)(E_l - E_n)} \times \\ \times \int \psi_m \frac{\partial U}{\partial x^2} \psi_n dz \int \psi_l \frac{\partial U}{\partial x} \psi_n dz. \quad (53.9)$$

$Q_{m,l}$ имеет второй порядок малости по отношению к малым производным по x и поэтому достаточно оценить влияние члена $S_{1,l}$.

Уравнение (53.3) теперь записывается

$$\frac{\partial^2 A_m}{\partial x^2} + \xi_m^2 A_m = 2 \sum_{l \neq m} S_{ml} \frac{\partial A_l}{\partial x}. \quad (53.10)$$

Здесь в правой части для A_l можно взять выражение (53.4) и положить приближенно

$$\frac{\partial A_l}{\partial x} \approx \xi_l^{1/2} \exp \left(i \int_0^{x_1} \xi_l dx \right). \quad (53.11)$$

Предположим, что при $x < 0$, $A_m = 0$. Будем считать для грубой оценки, что S_{ml} отлично от нуля и постоянно в интервале $0 < x < x_0$ и равно нулю вне этого интервала. Согласно (53.10) волна l всюду на участке $0, x_0$ генерирует волну m . Учитывая, что функция Грина для уравнения (53.10) есть

$$g(x_1, x) = \frac{1}{2i\xi_m} \exp \left(i \left| \int_x^{x_1} \xi_m dx \right| \right), \quad (53.12)$$

получаем

$$A_m(x_1) = 2 \sum_{l \neq m} S_{ml} \int_0^{x_0} g_m(x_1, x) \frac{\partial A_m}{\partial x} dx \approx \frac{1}{2i} e^{i\xi_m x_1} \sum_{l \neq m} S_{ml} \int_0^{x_0} \xi_l^{1/2} \xi_m^{-1} e^{i(\xi_l - \xi_m)dx} dx. \quad (53.13)$$

Здесь из всех членов суммы наибольшими будут члены при $l = m \pm 1$. Один из них мы и возьмем для оценки. Тогда $\xi_l \approx \xi_m$ можно вынести за знак интеграла при некотором среднем значении. Предполагая также, что $\xi_l - \xi_m$ остается постоянной на отрезке $(0, x_0)$, получаем условие малости A_m на всем отрезке $0 < x_1 < x_0$ по сравнению с A_l

$$S_{ml}/(\xi_l - \xi_m) \ll 1. \quad (53.14)$$

Как видно из (53.6) и (53.8) по порядку величины

$$S_{ml} \sim \frac{1}{\xi_m^2 - \xi_l^2} \left(\frac{k^2}{M} \right) \sim \frac{k}{(\xi_m - \xi_l) M}, \quad (53.15)$$

где M , как и выше, характерный масштаб изменения k^2 в направлении x . Подставляя (53.15) в (53.14) и учитывая, что при $m = l \pm 1$ согласно сказанному в § 48.5 $\xi_l - \xi_m = 2\pi/\Lambda$, Λ — длина цикла луча в волноводе, получаем условие:

$$\frac{\Lambda \Lambda}{k M} \ll 2\pi, \quad (53.16)$$

выполняющееся тем лучше, чем ниже частота, т. е. чем больше длина волны $\lambda = 2\pi/k$.

В противоположность случаю, рассмотренному в § 52.1, последнее условие в случае подводной акустики оказывается весьма жестким. Так, для приповерхностного канала, рассмотренного в § 52.5, имеем для минимальной длины цикла (см. § 43.3) $\Lambda = 4(z_1/a)^{1/2}$ или при глубине источника $z_1 = 100 \text{ м}$, $\Lambda = 4 \cdot 10^3 \text{ м}$. Теперь условие (53.15) запишется $\lambda \gg 2,5 \text{ м}$.

Уже из рассмотренного примера приповерхностного канала видно, что в конкретных случаях может существовать область значений k , для которых будут выполняться одновременно как условия (52.36), (52.37), так и условие (53.16). Наличие такой области может быть доказано и простым сравнением неравенств (52.36) и (53.16).

АНТИВОЛНОВОДНОЕ РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В НЕПРЕРЫВНО СЛОИСТЫХ СРЕДАХ

Противоположным волноводному является так называемое антиволноводное распространение, когда лучи уже никогда более не возвращаются на горизонт источника. Пример антиволноводного распространения, реализующийся в подводной акустике, изображен на рис. 54.1. Здесь слева изображен профиль скорости звука, справа лучевая картина. Заштрихована область геометрической тени, куда не проникает ни один из лучей. Аналогичный случай имеет место при распространении радиоволн над поверхностью земли в условиях нормальной рефракции. Разница только в том, что в последнем случае граница является не плоскостью, а сферой. Для теории эта разница не яв-

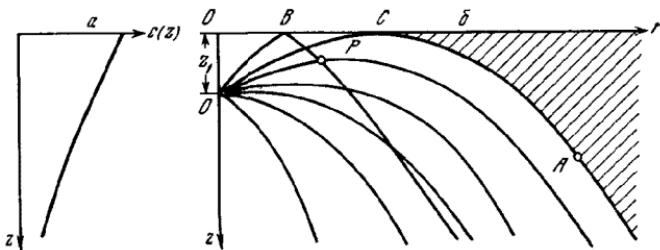


Рис. 54.1. Профиль скорости звука (1) и соответствующая лучевая картина (2). Заштрихована зона геометрической тени

ляется существенной, поскольку в нее входит лишь относительная кривизна лучей и границы (см. § 48.4). Точная теория поля для случая профиля $c(z)$ рис. 54.1 рассматривается в § 54. Там же рассматривается асимптотика поля в области тени на высоких частотах и вводится понятие о дифракционных лучах Келлера.

Совершенно по иному выглядит картина поля для другого случая антиволноводного распространения, когда скорость звука также убывает при удалении от границы $z = 0$, но $(dc/dz)_{z=0} = 0$. Здесь при $k \rightarrow \infty$ (т. е. при переходе к обычной лучевой теории) лучи засвечивают все полупространство $z > 0$. Поэтому в обычном смысле слова геометрической зоны тени нет. Однако здесь существует «эффективная» зона тени, граница которой изменяется с частотой. Теория этого случая рассматривается в § 55.

§ 54. Поле при наличии геометрической тени

54.1. Интегральные выражения для поля. Предположим, что в полупространстве $z > 0$ квадрат показателя преломления задан законом

$$n^2(z) = 1 + az. \quad (54.1)$$

Требуется найти решение волнового уравнения

$$\Delta\psi + k_0^2 n^2(z) \psi = 0 \quad (54.2)$$

в предположении, что в точке $r = 0$, $z = z_1$ расположена излучатель сферической волны

$$\psi_0 = \frac{e^{ikR}}{R}, \quad R = \sqrt{r^2 + (z - z_1)^2}, \quad (54.3)$$

а на границе $z = 0$ выполняются условия (абсолютно-отражающая граница)

$$a) \psi = 0 \quad \text{или} \quad b) \partial\psi/\partial z = 0. \quad (54.4)$$

На рис. 54.1, а изображена зависимость скорости волн $c(z) = c(0)/n(z)$ от z , а на рис. 54.1, б соответствующая лучевая картина. Очевидно, что мы должны ожидать совершенно различный характер поля в заштрихованной области (зона тени), куда не проникают лучи, и в остальной (освещенной) области, в каждую точку P которой приходят два луча — прямой OP и отраженный от границы OBP . Зона тени отделена от освещенной области граничным лучом OA .

Возьмем решение уравнения (54.2) в виде (47.3''), где $\tilde{\psi}(\xi, z)$ дается формулами (47.8). В них $\tilde{\psi}_1$ и $\tilde{\psi}_2$ два линейно независимых решения уравнения (47.5), в котором $k^2 = k_0^2(1 + az)$. Последнее уравнение совпадает с (48.4), если положить

$$H = (ak_0^2)^{-1/2}, \quad t_0 = H^2(\xi^2 - k_0^2), \quad t = t_0 - z/H. \quad (54.5)$$

Решениями (48.4) являются функции Эйри. Из них $\tilde{\psi}_2(z)$ должно оставаться ограниченным при $z \rightarrow \infty$ и поэтому мы должны положить (ср. § 21.3):

$$\tilde{\psi}_2(z) = Z(t). \quad (54.6)$$

Согласно определению (21.7') и асимптотическим формулам (21.13), имеем

$$z \rightarrow \infty, \quad t \rightarrow -\infty, \quad Z(t) \rightarrow (-t)^{-1/4} \exp i(w + \pi/4), \quad w = \frac{2}{3}(-t)^{3/2}. \quad (54.7)$$

Другое решение $\tilde{\psi}_1(z)$ должно удовлетворять условию (54.4) при $z = 0$ и поэтому мы возьмем

$$a) \tilde{\psi}_1(z) = v(t_0)Z(t) - Z(t_0)v(t), \quad b) \tilde{\psi}_1(z) = v'(t_0)Z(t) - Z'(t_0)v(t), \quad (54.8)$$

где撇 означает производную по аргументу.

Теперь имеем для вронесциана $w = \tilde{\psi}_1'\tilde{\psi}_2 - \tilde{\psi}_2'\tilde{\psi}_1$, учитывая (21.7') и (21.8), а также, что $\partial/\partial z = -1/H \partial/\partial t$

$$a) w = -Z(t_0)/H, \quad b) w = -Z'(t_0)/H. \quad (54.9)$$

В результате, согласно (47.3''), получаем интегральные выражения для поля:

$$z \leq z_1$$

$$a) \psi(r, z) = H \int_{-\infty}^{+\infty} [Z(t_0)v(t) - v'(t_0)Z(t)] [Z(t_1)/Z(t_0)] H_0^{(1)}(\xi r) \xi d\xi,$$

$$b) \psi(r, z) = H \int_{-\infty}^{+\infty} [Z'(t_0)v(t) - v'(t_0)Z(t)] [Z(t_1)/Z'(t_0)] H_0^{(1)}(\xi r) \xi d\xi. \quad (54.10)$$

Соответствующие выражения для $z \geq z_1$ получаются, как всегда, заменой мест z и z_1 , т. е. мест $t = t_0 - z/H$ и $t_1 = t_0 - z_1/H$.

54.2. Поле в освещенной зоне. Лучи. При достаточно высоких частотах в освещенной зоне, как мы покажем ниже, интегралы (54.10) могут быть оценены методом перевала. Пока же мы предположим, что точка перевала $\xi = \xi_1$ лежит достаточно далеко от точки $\xi = k_0$, так что

$$-t_0 = H^2(k_0^2 - \xi_1^2) \gg 1. \quad (54.11)$$

Последнее условие, как будет видно ниже, означает, что мы исключаем из рассмотрения точки, близкие к граничному лучу OA . Предполагая, кроме того, что $\xi r \gg 1$, мы можем воспользоваться асимптотическими представлениями всех входящих под интегралы (54.10) функций (см. формулы (21.13) и (28.1)). В результате получаем

$$a, b) \quad \psi(r, z) \approx \frac{He^{i\pi/4}}{\sqrt{2\pi r}} \int_{-\infty}^{+\infty} [e^{i(w_1 - w)} - e^{i(w_1 + w - 2w_0)}] e^{i\xi r} (tt_1)^{-1/4} \sqrt{\xi} d\xi \quad (54.12)$$

$$w = \frac{2}{3}(-t)^{1/2}, \quad w_0 = \frac{2}{3}(-t_0)^{1/2}, \quad w_1 = \frac{2}{3}(-t_1)^{1/2}.$$

Интеграл в (54.12) разобьем на сумму двух интегралов, каждый из которых будет содержать одну экспоненту из квадратной скобки. Проанализируем вначале интеграл, содержащий первую экспоненту. В нем мы имеем множитель $\exp(i\varphi)$, $\varphi \equiv w_1 - w + \xi r$. Точка перевала ξ_1 найдется из уравнения $d\varphi/d\xi = 0$ или

$$r = [\partial(w - w_1)/\partial\xi]_{\xi_1} \quad (54.13)$$

или, учитывая значение w , w_1 , а также (54.5)

$$r = 2H^2\xi_1 [(-t_1)^{1/2} - (-t)^{1/2}]_{\xi_1}. \quad (54.14)$$

В дальнейшем, кроме заданного расстояния r , мы будем использовать функцию (ср. § 44)

$$r(\xi) \equiv \partial(w - w_1)/\partial\xi \quad (54.15)$$

так, что $r(\xi_1) = r$. Обозначим

$$\xi_1 = k_1 \cos \chi_1 = k \cos \chi \quad (54.16)$$

и покажем, что (54.14) является уравнением «прямого» луча OP на рис. 54.1, в то время как χ_1 , χ и k_1 , k — углы скольжения луча и волновые числа соответственно в O и P . Действительно, из (54.5) имеем при $\xi = \xi_1$

$$-t = z/H - H^2 k^2 \cos^2 \chi + k_0^2 H^2,$$

но $z/H + k_0^2 H^2 = (z + k_0^2 H^3)/H = (1 + az)/aH = k^2 H^2$.

Поэтому

$$-t = k_1^2 H^2 \sin^2 \chi \quad (54.17)$$

и аналогично

$$-t_1 k_1^2 H^2 \sin^2 \chi_1.$$

В результате (54.14) записывается

$$r = 2H^3 (k_1^2 \cos \chi_1 \sin \chi_1 - k^2 \cos \chi \sin \chi) = \frac{1}{a} (n_1^2 \sin 2\chi_1 - n^2 \sin 2\chi), \quad (54.18)$$

где $n^2 = k^2/k_0^2$, $n_1^2 = k_1^2/k_0^2$. Это же уравнение луча можно получить и непосредственно из лучевой теории, вычисляя интеграл (см. рис. 43.3 и формулу (43.2))

$$r = \int_z^{z_1} dz / \operatorname{tg} \chi, \quad (54.19)$$

учитывая при этом, что χ и z связаны формулой (см. (54.16))

$$(1 + az) \cos^2 \chi = n_1^2 \cos^2 \chi_1. \quad (54.20)$$

Таким образом, мы видим, что интеграл, содержащий первый член в квадратных скобках в (54.12), соответствует прямому лучу. Обозначим его $\psi_{\text{пр}}$. Тогда в соответствии с формулой (27.17) получаем из (54.12)

$$\psi_{\text{пр}} = H_1 e^{i(\varphi - \xi_1 + \pi/4)} (\xi_1/r)^{1/2} (tt_1)^{-1/4} |r'|_{\xi_1}^{-1/4} e^{\pm i\pi/4}, \quad (54.21)$$

где \pm -знак $[-r'(\xi_1)]$. Согласно (54.16) $\partial/\partial\xi = -(1/k_1 \sin \chi_1) \partial/\partial\chi_1$. Можно показать, пользуясь формулой (54.18) (но это видно и из рис. 54.1), что при заданных z и z_1 $\partial r/\partial\chi_1 < 0$, откуда следует, что нам нужно взять нижний знак в (54.21). Учитя также (54.17), находим

$$\Psi_{\text{пр}} = \left(\frac{k_1 \cos \chi_1}{kr \sin \chi_1 \partial r / \partial \chi_1} \right)^{1/2} e^{i\varphi(\xi_1)} \quad (54.22)$$

Мы получили поле прямого луча *.

Совершенно аналогичным образом доказывается, что интеграл с учетом второго члена в квадратной скобке в (54.12) дает поле отраженного луча (луч OBP на рис. 54.1). Фаза волны при отражении остается неизменной в случае б) (знак плюс в (54.12) и меняется на обратную в случае а) (знак минус в (54.12)).

Для граничного луча OA имеем $\chi = 0$ при $z = 0$, т. е. $k = k_0$. Это соответствует согласно (54.16) $\xi_1 = k_0$. Но как раз изложенный выше метод неприменим при ξ_1 , близких к k_0 . Следовательно, формулы (54.10) асимптотически приводят к сумме полей прямого и отраженного лучей всюду в освещенной зоне, кроме области, близкой к граничному лучу **.

54.3. Поле в зоне тени. Нормальные волны. В зоне тени подынтегральные выражения в (54.10) не имеют перевальной точки и вычислять интегралы удобнее другим методом. Учитывая, что при больших r асимптотическое выражение функций Ханкеля содержит экспоненту $\exp(i\xi_1 r)$, оттянем путь интегрирования с вещественной оси на бесконечную полуокружность, охватывающую верхнюю полуплоскость ξ . Интеграл по этой полуокружности обращается в нуль и поэтому значение интегралов (54.10) сводится к интегралам по путям обхода особых точек подынтегральных выражений. Таковыми являются полюсы, местоположение которых определяется уравнениями:

$$\text{а) } Z(t_0) = 0, \quad \text{б) } Z'(t_0) = 0. \quad (54.23)$$

Решения этих уравнений даются формулами (21.17') и (21.17''), а именно:

$$\text{а) } t_{0l} = y_l e^{i\pi/3}, \quad \text{б) } t_{0l} = x_l e^{i\pi/3}. \quad (54.24)$$

Интегралы (54.10) сводятся к суммам вычетов в этих полюсах. Обозначим

$$t_l^* = t_{0l} - z/H, \quad t_{1l} = t_{0l}^* - z_1/H, \quad \xi_l^2 = k_0^2 + t_{0l}^* H^2 \quad (54.25)$$

и рассмотрим сначала случай а). Имеем при учете (21.17') и (21.18) для якобиана $Z'v - v'Z = 1$. Следовательно, при $t = t_{0l}$, поскольку $Z(t_{0l}) = 0$, имеем $v(t_{0l}) = (\partial Z / \partial t)_{0l}$. Теперь, определяя стандартным образом вычеты с учетом, что согласно (54.5), имеем $\partial/\partial\xi = 2\xi H^2 \partial/\partial t_0$, получаем

$$\text{а) } \Psi(r, z) = -\frac{r\pi l}{H} \sum_l Z(t_l) Z(t_{1l}) (\partial Z / \partial t)_{0l}^{-2} t_{0l} H_0^{(1)}(\xi_l r), \quad . \quad (54.26)$$

где t_{0l} дается выражением (54.24) случай а). Выражение (54.26) не изменяется при переносе мест z и z_1 (t и t_{1l}) и поэтому справедливо во всей области $0 \leq z < \infty$. Оно справедливо как в области тени, так и в освещенной области. Однако в последнем случае, если точка наблюдения находится далеко от граничного луча, в сумме (54.26) надо учитывать много членов и удобнее пользоваться представлениями лучевой оптики (см. предыдущий раздел). Анало-

* Сравните, например, с (43.14'), где надо положить $\rho = p_1$.

** Разность $\xi_1 - k_0$ должна удовлетворять условию $|r'(\xi_1)| (\xi_1 - k_0)^2 \geq 1$, $\Delta\xi \equiv \xi_1 - k_0 \geq [r'(\xi_1)]^{-1/2}$. Отсюда получаем для ширины переходной зоны $\Delta r = (\partial r / \partial \xi) \times \Delta\xi \geq [r'(\xi_1)]^{1/2} = (\partial(w - w_1) / \partial \xi)_{\xi_1}^{1/2}$, но $\partial w / \partial \xi \sim (\partial w / \partial t)(\partial t / \partial \xi) \sim H^2 k_0$. Поэтому $\Delta r \geq k_0 H^2 = (k_0 a^2)^{-1/2}$.

гично имеем

$$6) \psi(r, z) = \frac{\pi i}{H} \sum_l t_{0l}^{-1} Z^{-2}(t_{0l}) Z(t_l) Z(t_{1l}) H_0^{(1)}(\xi_l r), \quad (54.27)$$

где t_{0l} дается выражением (54.24) случай б). При этом учтено уравнение (21.5) для функций Эйри. Выражение (54.27) также справедливо во всем полупространстве $0 \leq z < \infty$.

Учитывая второе из соотношений (21.10), а также, что $\arg t_{0l} = \pi/3$, перепишем (54.26) и (54.27) в виде

$$\begin{aligned} a) \psi(r, z) &= (\pi/H) \exp(-i\pi/6) \sum_l Z(t_l) Z(t_{1l}) (\partial v/\partial t)|_{t=-y_l} H_0^{(1)}(\xi_l r), \\ b) \psi(r, z) &= (\pi/H) \exp(i\pi/6) \sum_l Z(t_l) Z(t_{1l}) v^{-2}(-x_l) H_0^{(1)}(\xi_l r)/x_l. \end{aligned} \quad (54.28)$$

Рассмотрим асимптотику выражений (54.28), предположив, что

$$z/H \gg y_l, x_l, \quad z_1/H \gg y_l, x_l, \quad (54.29)$$

где l — наибольший номер всех существенных членов в суммах. В этом случае t_l и t_{1l} будут велики по модулю, а их аргумент близок к π . Тогда, пользуясь четвертым соотношением в (21.10) и асимптотикой (21.13) для $u(t)$ и $v(t)$, а также асимптотикой для функции Ханкеля, получаем

$$Z(t_l) Z(t_{1l}) H_0^{(1)}(\xi_l r) = \sqrt{\frac{2}{\pi \xi_l r}} (t_l t_{1l})^{-1/4} e^{i(w_l + w_{1l} + \xi_l r + \pi/4)}, \quad (54.30)$$

где

$$\begin{aligned} w_l &= \frac{2}{3} (-t_l)^{3/2} \approx \frac{2}{3} (z/H)^{3/2} - (z/H)^{1/2} t_{0l}, \\ w_{1l} &= \frac{2}{3} (-t_{1l})^{3/2} \approx \frac{2}{3} (z_1/H)^{3/2} - (z_1/H)^{1/2} t_{0l}, \\ \xi_l &= \sqrt{k_0^2 + t_{0l}/H^2} \approx k_0 + t_{0l}/2k_0 H^2. \end{aligned} \quad (54.31)$$

Теперь имеем в экспоненте в (54.30)

$$\begin{aligned} w_l + w_{1l} + \xi_l r &= k_0 r + \frac{2}{3} [(z/H)^{3/2} + (z_1/H)^{3/2}] + \\ &\quad + (t_{0l}/2k_0 H^2) [r - 2(\sqrt{z} + \sqrt{z_1})/\sqrt{a}]. \end{aligned} \quad (54.32)$$

Однако нетрудно показать, что

$$r_m = 2(\sqrt{z} + \sqrt{z_1})/\sqrt{a} \quad (54.33)$$

является горизонтальным расстоянием, проходимым граничным лучом OSA (рис. 54.1) при заданных горизонтах приема z и излучения z_1 . Действительно, $r_m = r_{OC} + r_{CA}$, где r_{OC} и r_{CA} — горизонтальные расстояния, проходимые лучом соответственно на участках OC и CA . Первое получится из (54.18), если там положить $\chi = 0$, $n_1 \cos \chi_1 = 1$ и учесть, что $n_1^2 = 1 + az_1$. В результате $r_{OC} = 2(z_1/a)^{1/2}$. Совершенно аналогично $r_{CA} = 2(z/a)^{1/2}$, после чего и получается (54.33). Теперь, учитывая значение H согласно (54.5) и условия (54.29), асимптотику выражений (54.28) запишем в виде

$$\psi(r, z) = \left(\frac{2\pi}{r}\right)^{1/4} \left(\frac{a}{k_0}\right)^{1/4} (zz_1)^{-1/4} \exp[i(k_0 r + (2/3)k_0 a^{1/2}(z^{3/2} + z_1^{3/2}))] F(r), \quad (54.34)$$

где

$$a) F(r) = e^{4\pi i/12} \sum_l \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{t=-y_l}^{-2} \exp[(y_l/4)(i - \sqrt{3})(k_0 a^{1/2})(r - r_m)], \quad (54.35)$$

$$b) F(r) = e^{5\pi i/12} \sum_l [v^{-2}(-x_l)/x_l] \exp[(x_l/4)(i - \sqrt{3})(k_0 a^{1/2})(r - r_m)]. \quad (54.36)$$

Мы видим, что при увеличении расстояния r , начиная от границы освещенной зоны, каждая нормальная волна затухает по закону $\exp \beta_l (r_m - r)$, где

$$a) \beta_l = (\sqrt{3}/4)(k_0 a^2)^{1/4} y_l, \quad [b] \beta_l = (\sqrt{3}/4)(k_0 a^2)^{1/4} x_l. \quad (54.37)$$

Следовательно, к этой границе примыкает переходная зона, ширина которой по порядку величины равна $\Delta r \approx (k_0 a^2)^{-1/4}$ и в которой существенно значительное число нормальных волн. За пределами этой зоны можно ограничиваться учетом в (54.35) и (54.36) только первых членов. Подставив из таблиц значения $x_l, y_l, v(-x_l), (\partial v/\partial t)_{-y_l}$ при $l = 1$ получаем

$$a) F(r) = 1,545 \exp [0,576(i - \sqrt{3})(k_0 a^2)^{1/4}(r - r_m) + \pi i/12], \quad (54.38)$$

$$b) F(r) = 1,0897 \exp [0,250(i - \sqrt{3})(k_0 a^2)^{1/4}(r - r_m) + 5\pi i/12].$$

Отметим, что весьма полная и строгая теория антиволноводного распространения при наличии зоны тени дана в работе Д. Джонса [177].

54.4. Дифракционные лучи. Поле в области геометрической тени можно получить и на основе лучевых представлений, если, как это впервые сделал

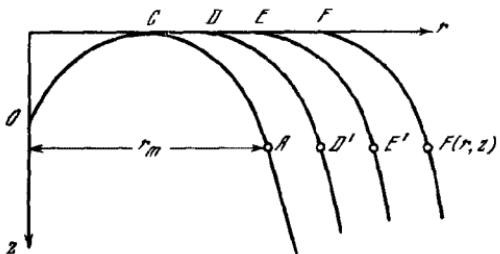


Рис. 54.2. Границный луч ОСА и дифракционные лучи DD', EE', \dots

Келлер с сотрудниками (см., например, [235]) ввести понятие о дифракционных лучах. С одним видом дифракционных лучей мы встречались в § 30 при рассмотрении боковой волны. Последнюю можно было сопоставить лучу $OABC$ (рис. 30.8), падающему на границу под углом полного внутреннего отражения, затем распространяющемуся вдоль границы и дающему в каждой точке границы начало

«лучам боковой волны» BB', CC', EE' и т. д. Для произвольной точки C луч $OACC$ удовлетворяет принципу Ферма, т. е. время пробега возмущения по этому лучу минимально по сравнению с временем пробега по всем другим возможным путям.

Таким же образом в области геометрической тени (правее граничного луча CA на рис. 54.2) можно представить себе лучи $OCDD', OCCE'$ и т. д. Чтобы получить их, надо представить себе, что в точке C граничный луч расщепляется на луч CA и луч $CDEF$, следующий вдоль границы, давая начало непрерывной совокупности «дифракционных» лучей DD', EE' и т. д. Каждый из этих лучей распространяется в среде по обычным законам лучевой теории. Луч $OCFF'$, попадающий в произвольную точку F' , удовлетворяет принципу Ферма в том смысле, что его оптическая длина, наименьшая по сравнению со всеми возможными путями, включая частично и путь вдоль границы.

Рассмотрим теперь, каким образом может быть вычислено поле, соответствующее дифракционным лучам. Потеря энергии лучом $CDEF$ на излучение дифракционных лучей DD', EE' и т. д. пропорциональна в каждой точке имеющейся энергии. Из этого следует, что при прохождении участка CF его амплитуда умножается на фактор ослабления $\exp [-\alpha (r_F - r_C)]$, где α — коэффициент, зависящий от характера граничных условий, кривизны лучей у границы и длины волны звука. Вдоль FF' сохраняется поток энергии в элементарной лучевой трубке, т. е. $A^2(r, z) n(z) d\sigma(z) = \text{const}$, где $A(r, z)$ — амплитуда поля, соответствующего данному лучу, а $d\sigma(z)$ — ширина лучевой трубы на уровне z . Нетрудно показать, что $d\sigma = \text{const} \sin \chi$, где $\sin \chi = (1/n)\sqrt{n^2 - 1}$ — угол скольжения дифракционного луча на горизонте z . Таким образом, амплитуда поля меняется вдоль FF' по закону $\text{const} [n^2(z) - 1]^{-1/4}$. Следовательно, поле в произвольной точке r, z в области

тени должно выражаться формулой

$$\Psi(r, z) = \frac{B [n^2(z) - 1]^{-1/4}}{\sqrt{r}} e^{\alpha(r_m - r)} e^{i[\Phi_{OC} + \Phi_{FF'} + k_0(r - r_m)]}, \quad (54.39)$$

где r_m — горизонтальное расстояние от источника O , на котором граничный луч CA пересекает горизонт z (см. рис. 54.2). B — коэффициент, не зависящий от координат точки наблюдения, но зависящий от координат излучателя O . Экспонента в (54.39) учитывает затухание луча $CDEF$ на участке CF , длина которого $r - r_m$. Последняя экспонента учитывает набег фазы на всем пути $OCFF'$, где Φ_{OC} и $\Phi_{FF'}$ — набеги фазы на участках OC и FF' , вычисляемые по обычным законам лучевой теории, $k_0 = k(0)$. Фактор $1/\sqrt{r}$ учитывает расширение лучевой трубки в горизонтальной плоскости, которое происходит равномерно на всех участках луча $OCFF'$. В соответствии с принципом взаимности поле не должно изменяться при замене мест излучателя и точки наблюдения, т. е. в выражение для поля z и z_1 должны входить равноправно. Поэтому (54.39) может быть записано в виде

$$\Psi(r, z) = D^2 [n^2(z_1) - 1]^{-1/4} [n^2(z)^{-1} - 1]^{-1/4} r^{-1/2} \times \\ \times \exp[i(\alpha(r_m - r))] \exp[i(\Phi_{OC} + \Phi_{FF'} + k_0(r - r_m))], \quad (54.40)$$

где D — «коэффициент дифракции», характеризующий степень перехода энергии в точке C из луча OC в луч CF и в точке F из луча CF в луч FF' . D , очевидно, зависит от тех же величин, что и α .

Коэффициенты α и D не могут быть определены из лучевых построений. Они определяются процессами, разыгрывающимися в тонком слое, прилегающим к границе $z = 0$, которая для дифракционных лучей FF' и т. д. является каустикой. Поэтому в этом слое геометрическая оптика несправедлива. Более того, надо допустить, что вообще говоря, в этом слое поле может описываться совокупностью нормальных волн. Для каждой из них будут свои коэффициенты D и α , и поэтому вместо формулы (54.40) надо писать

$$\Psi(r, z) = [n^2(z_1) - 1]^{-1/4} [n^2(z)^{-1} - 1]^{-1/4} r^{-1/2} \exp[i(\Phi_{OC} + \Phi_{FF'} + \\ + k_0(r - r_m))] \sum_l D_l \exp[i\alpha_l(r_m - r)]. \quad (54.41)$$

Так как для каждой нормальной волны фазовая скорость распространения вдоль границы будет в общем случае отлична от c_0 , то набег фазы на участке CF будет отличен от $k_0(r - r_m)$, и это значит, что коэффициенты α_l в общем случае должны быть комплексны.

Коэффициенты D_l и α_l могут быть найдены из найденного выше точного решения эталонной задачи, когда $n^2(z) = 1 + az$. Действительно, в этом случае имеем в (54.41)

$$[n^2(z_1) - 1]^{-1/4} [n^2(z)^{-1} - 1]^{-1/4} = a^{-1/2} (zz_1)^{-1/2} \\ \Phi_{FF'} = k_0 \int_0^z \frac{n dz}{\sin \chi} = k_0 a^{-1/2} \int_0^z (1 + az) z^{-1/2} dz = 2k_0 \left[(z/a)^{1/2} + \frac{1}{3} a^{1/2} z^{3/2} \right].$$

Здесь было учтено, что на FF' имеем $n \cos \chi = 1$, $n / \sin \chi = n^2 / \sqrt{n^2 - 1} = = (1 + az) (az)^{-1/2}$. Φ_{OC} получится заменой z на z_1 . В результате, учитя (54.33), получаем в (54.41)

$$\Phi_{OC} + \Phi_{FF'} - k_0 r_m = (2/3) k_0 a^{1/2} (z^{1/2} + z_1^{1/2}).$$

Сравнивая (54.41) и (54.34) — (54.36), находим

$$a) D_l = (2\pi)^{1/4} a^{1/2} k_0^{-1/2} \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)_{t=-y_l}^{-1} e^{iy_l/24}, \quad \alpha_l = (y_l/4)(\sqrt{3} - i)(k_0 a^2)^{1/2}; \quad (54.42)$$

$$b) D_l = (2\pi)^{1/4} a^{1/2} k_0^{-1/2} x_l^{-1/2} v^{-1} (-x_l) e^{5\pi i/24}, \quad \alpha_l = (x_l/4)(\sqrt{3} - i)(k_0 a^2)^{1/2}. \quad (54.43)$$

Нетрудно получить D_l и α_l и в случае импедансных граничных условий при $z = 0$ [235, 236].

Сформулированные выше принципы построения дифракционных лучей остаются справедливыми и для криволинейных границ. При этом формулы (54.42) и (54.43) будут снова годны, но только вместо кривизны луча $a/2$ в точке касания границы должна быть взята относительная кривизна границы и луча $a/2 - 1/\rho$, где ρ — радиус кривизны границы, считающейся положительным, если центр кривизны лежит в среде, в которой исследуется распространение волн. Другими словами, величина a в этих формулах должна быть в общем случае заменена на $a^* = a - 2/\rho$.

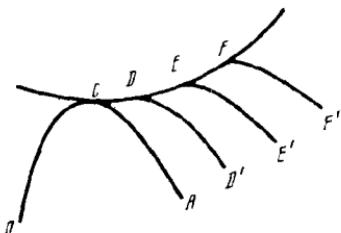


Рис. 54.3. Дифракционные лучи в общем случае

Эти формулы легко модифицируются и для случая, когда скорость волны является функцией всех трех координат $c = c(x, y, z)$, монотонно убывающей при удалении от границы так, что имеется зона тени исследованного выше типа [235]. Снова каждый дифракционный луч $OCFF'$ будет состоять из трех участков (рис. 54.3). Участок OC от излучателя до границы и участок FF' от границы до точки наблюдения строятся по обычным законам лучевой теории с учетом того, что эти лучи должны касаться границы в точках C и F . На участке CF луч скользит вдоль границы. В формуле (54.41), предэкспоненциальный множитель должен быть заменен на множитель, учитывающий фактический закон расширения лучевых трубок; множитель D_l^2 заменяется на $D_l(C) D_l(F)$, где $D_l(C)$ и $D_l(F)$ вычисляются по формулам (54.42) и (54.43), в которых используются значения $a^*(C)$ и $a^*(F)$ — относительные кривизны лучей в C и F ; величины $\alpha_l(r - r_m)$ заменяются на $\int_{r_m}^r \alpha_l(s) ds$,

где s — длина дуги вдоль CF . $\alpha_l(s)$ рассчитывается также по формулам (54.42) и (54.43), в которых вместо a подставляется местное $a^*(s)$, изменяющееся в общем случае вдоль CF .

§ 55. Градиент скорости у границы равен нулю*

Пусть снова скорость звука монотонно убывает при удалении от границы полупространства $z = 0$, однако $(dc/dz)_{z=0} = 0$ (см. рис. 55.1, а). В этом случае картина распространения волн будет существенно иная, чем в предыдущем параграфе. Это видно хотя бы уже из того, что граничный луч и зона тени в обычном смысле геометрической оптики отсутствуют.

Лучевая картина изображена на рис. 55.1, б. Луч, имеющий у поверхности $z = 0$ кувейт угол наклона, асимптотически (при $r \rightarrow \infty$) приближается к этой поверхности. Это видно, например, из формулы (43.4). Положив там $\cos \chi_0 = 1$ и воспользовавшись разложением $n^2(z)$ в ряде по z (начиная с z^2), мы получаем, что $g \rightarrow \infty$ как $\ln z$ при $z \rightarrow 0$.

* Параграф излагается по материалам, любезно предоставленным автору В. М. Кудряшовым (см. также его работу [49]).

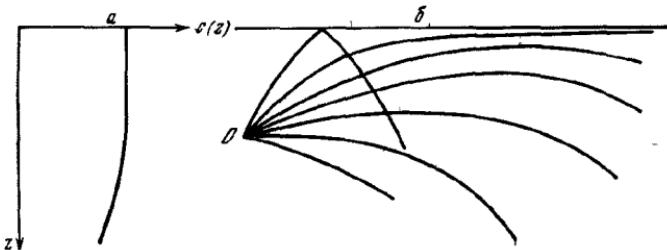


Рис. 55.1. Профиль скорости звука $c(z)$ и лучевая картина для случая $(dc/dz)_{z=0} = 0$

Мы рассмотрим сначала случай параболического профиля для квадрата показателя преломления

$$n^2(z) = 1 + a^2 z^2, \quad (55.1)$$

а потом, используя метод эталонного уравнения, вышишем результаты для общего случая.

Как видно из предыдущих параграфов, нам прежде всего надо найти решение уравнения

$$d^2v/dz^2 + [k_0^2 n^2(z) - \xi^2] v = 0. \quad (55.2)$$

Последнее при учете (55.1) и при введении обозначений

$$\xi = \sqrt{2ak_0} z, \quad \alpha = (\xi^2 - k_0^2)/2ak_0 \quad (55.3)$$

преобразуется к виду

$$d^2v/d\xi^2 + (\xi^2/4 - \alpha) v = 0. \quad (55.4)$$

Линейно независимыми решениями этого уравнения будут

$$u(z), v(z) = D_{\pm i\alpha-1/2}(\xi e^{\pm i\pi/4}), \quad (55.5)$$

где D — функция параболического цилиндра (см. [95]). При $\xi \gg \alpha$ имеем асимптотику

$$u(z), v(z) \sim \xi^{-1/2} \exp[\mp i\xi^2/4 \pm ix \ln \xi - ix/4 \mp i\pi/8]. \quad (55.6)$$

Мы видим, что $v(z)$ удовлетворяет требуемому нами условию при $z \rightarrow \infty$, т. е. имеет вид уходящей волны. Предположим, что граничное условие при $z = 0$ имеет вид $\psi(0) = 0$. Тогда интегральное выражение для поля будет даваться формулами (47.3") и (47.19а). Учтя значение вронсиана (47.20)

$$w = -\sqrt{2ak_0} \exp(ix\pi/2), \quad (55.7)$$

а также, что

$$D_{\pm i\alpha-1/2}(0) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) 2^{(\pm i\alpha/2-1/4)}}{\Gamma\left(\frac{3}{4} \mp \frac{i\alpha}{2}\right)}, \quad (55.8)$$

получаем

$$0 \leq z \leq z_1, \quad \psi(r, z) = -\frac{1}{\sqrt{2ak_0}} \int_{-\infty}^{+\infty} D_{-i\alpha-1/2}(\xi_1 e^{-ix/4}) \times \\ \times \left[D_{-i\alpha-1/2}(\xi_1 e^{ix/4}) - e^{ix} \frac{\Gamma(3/4 + i\alpha/2)}{\Gamma(3/4 - i\alpha/2)} D_{-i\alpha-1/2}(\xi_1 e^{-ix/4}) \right] e^{-ax/2} H_0^{(1)}(\xi r) \xi d\xi. \quad (55.9)$$

Здесь $\xi_1 = \sqrt{2ak_0} z_1$. Как всегда, выражение при $z \geq z_1$ получается из (55.9) заменой $z \rightarrow z_1$. Полюсы подынтегральной функции даются уравнением (47.21а). В данном случае это полюсы функции $\Gamma(3/4 + i\alpha/2)$ и следователь-

но,

$$\frac{3}{4} + ix_l/2 = -l + 1, \quad l = 1, 2, \dots$$

или

$$\alpha_l = 2i(l - 1/4). \quad (55.10)$$

Вычисляя вычеты в полюсах, находим

$$0 \leq z < \infty, \quad \psi(r, z) = \sum_{l=1}^{\infty} \psi_l(r, z), \quad (55.11)$$

$$\psi_l(r, z) = \pi \sqrt{\frac{ak_0}{2}} \frac{2^{-2l+3/2} e^{iz/4}}{(l-1)! \Gamma(l+1/2)} D_{2l-1}(\xi_1 e^{-iz/4}) D_{2l-1}(\xi_1 e^{iz/4}) H_0^{(1)}(\xi_1 r), \quad (55.12)$$

где

$$\xi_1^2 = k_0^2 + 4k_0 a i (l - 1/4). \quad (55.13)$$

При $ak_0 \ll 1$ и небольших l

$$\xi_1 \approx k_0 + 2ia(l - 1/4). \quad (55.14)$$

Отсюда видим, что при больших r , $\psi_l(r, z)$ будет содержать фактор $\exp(-2alr)$, т. е. чем выше номер волны l , тем быстрее затухает ее амплитуда при увеличении r . При $ar > 1$ можно учитывать только первую нормальную волну $l = 1$. Для нее имеем, учитывая связь между функциями параболического цилиндра и полиномами Эрмита (см. сноску к стр. 317):

$$\psi_1(r, z) = \sqrt{\pi a k_0} \zeta \zeta_1 \exp[(i/4)(\zeta^2 + \zeta_1^2 - \pi)] H_0^{(1)}(\xi_1 r). \quad (55.15)$$

Это выражение может быть обобщено на произвольный случай $n(z)$, монотонно возрастающего при увеличении z (при условии, что $n'(0) = 0$), а также записано в виде (54.40), соответствующем концепции дифракционных лучей. Не приводя вывода, укажем, что выражение для первой нормальной волны в этом случае записывается (при $\xi_1 r \gg 1$)

$$\psi_1(r, z) = 2a [n^2(z_1) - 1]^{-1/4} [n^2(z) - 1]^{-1/4} (\xi_1 r)^{-1/2} \exp\left[-\frac{3}{2}a(r - r_m)\right] \times \exp[ik_0 r + i\zeta^2(z_1)/4 + i\zeta^2(z)/4 - i\pi/2], \quad (55.16)$$

где

$$a = \left(\frac{1}{2} n''(0)\right)^{1/2}, \quad a/k_0 \ll 1, \quad r_m = \frac{1}{a} \ln[\zeta(z_1) \zeta(z)]. \quad (55.17)$$

Функция $\zeta(z)$ определяется соотношением

$$\zeta^2(z) = 4k_0 \int_0^z \sqrt{n^2(z) - 1} dz, \quad (55.18)$$

а ξ_1 определяется из дисперсионного уравнения

$$\int_0^{z'} \sqrt{k^2(z) - \xi_1^2} dz = \pi(l - 1/4), \quad k(z') = \xi_1. \quad (55.19)$$

Нетрудно прямой подстановкой (55.1) в (55.16–55.18) и использованием асимптотики для $H_0^{(1)}(\xi_1 r)$ в (55.15) показать, тождественность (55.15) и (55.16) для параболического профиля. В частности, функция $\zeta(z)$ превращается в $\zeta = \sqrt{2ak_0} z$ в соответствии с (55.3). Мы видим, что при удалении от излучающей поле экспоненциально убывает. Однако, поскольку в рассматриваемом случае зона геометрической тени отсутствует, $r = r_m$ надо трактовать как границу некоторой «эффективной» тени. В отличие от случая, рассмотренного

в § 54, r_m зависит от частоты. Так, для параболического профиля:

$$r_m = \frac{1}{a} \ln (2a k_0 z z_1). \quad (55.20)$$

Чем выше частота, тем дальше от излучателя расположена граница эффективной зоны тени.

Как видно из (55.16), коэффициент затухания волны в зоне эффективной тени (в отличие от случая § 54) не зависит от частоты.

Представляет интерес вопрос, как связано уравнение $r = r_m$ границы эффективной зоны тени с уравнением реального луча?

Луч вышедший из излучателя под углом скольжения χ_1 и заворачивающий на горизонте z' , возвращается на уровень z , пройдя расстояние по горизонтали (см. § 47):

$$r = \int_{z_1}^{z'} \frac{k_0 dz}{\sqrt{k^2 - \xi^2}} + \int_z^{z'} \frac{k_0 dz}{\sqrt{k^2 - \xi^2}}, \quad \xi = k_1 \cos \chi_1. \quad (55.21)$$

Для параболического профиля ($k^2 = k_0^2 (1 + a^2 z^2)$) имеем после вычисления интегралов

$$r = \frac{\xi}{k_0 a} \ln \frac{(\zeta_1 + \sqrt{\zeta_1^2 - 4\alpha})(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 4\alpha})}{4\alpha}, \quad (55.22)$$

где α и ζ по-прежнему даются соотношениями (55.3). Для луча, касающегося границы ($z' = 0$), имеем $\xi = k_0$, $\alpha = 0$, $r = \infty$. Однако, если вместо r рассматривать

$$R = r - \frac{\xi}{k_0 a} \ln \frac{1}{\alpha},$$

т. е. вычесть из r постоянную, независимую от z и z_1 величину, обращающуюся при $\xi \rightarrow k_0$ в бесконечность, мы получаем

$$R = \frac{\xi}{k_0 a} \ln \frac{(\zeta_1 + \sqrt{\zeta_1^2 - 4\alpha})(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 4\alpha})}{4}.$$

Эта величина уже не обращается в бесконечность и для граничного луча ($\xi = k_0$, $\alpha = 0$) равна

$$R_m = \frac{1}{a} \ln (\zeta \zeta_1),$$

т. е. совпадает с (55.20).

ЛИТЕРАТУРА

1. Альперт Я. Л., Гинзбург В. Л., Фейнберг Е. Л. Распространение радиоволн. Гостехиздат, 1953.
2. Андрианова З. С., Кейлис Борок В. И., Левшин А. Л., Нейгауз М. Г. Поверхностные волны Лява. М., «Наука», 1965.
3. Бабич В. М., Молотков И. А. О распространении волн Лява в упругом полупространстве, неоднородном по двум координатам.— Изв. АН СССР, сер. Физика земли, 1966, 6, 34.
4. Бреховских Л. М. Пределы применимости некоторых приближенных методов, употребляемых в архитектурной акустике.— УФН, 1947, 32, в. 4, 464.
5. Бреховских Л. М. Отражение сферических волн от «слабых» границ раздела.— ЖТФ, 1948, 18, в. 4, 473.
6. Бреховских Л. М. Поле преломленных электромагнитных волн в задаче о точечном излучателе.— Изв. АН СССР, сер. физич., 1948, 12, № 3, 322.
7. Бреховских Л. М. Отражение сферических волн от плоской границы раздела двух сред.— ЖТФ, 1948, 18, в. 4, 455.
8. Бреховских Л. М. Отражение и преломление сферических волн.— УФН, 1949, 38, 1.
9. Бреховских Л. М. Отражение плоских волн от слоисто-неоднородных сред.— ЖТФ, 1949, 19, № 10, 1126.
10. Бреховских Л. М. О поле точечного источника в слоисто-неоднородной среде.— Изв. АН СССР, сер. физич., 1949, 13, № 5, 505.
11. Бреховских Л. М., Иванов И. Д. О расширении границ применимости луцевой теории при исследовании распространения волн в слоистых средах.— ДАН СССР, 1952, 83, № 4, 545.
12. Бреховских Л. М. Отражение ограниченных волновых пучков и импульсов.— УФН, 1953, 50, вып. 4, 539.
13. Бреховских Л. М. О дисперсионном уравнении для нормальных волн в слоистых средах.— Акуст. ж., 1956, 2, вып. 4, 341.
14. Бреховских Л. М., Елисеевник В. А. О распространении волн в неоднородном волноводе.— Акуст. ж., 1960, 6, вып. 3, 284.
15. Бреховских Л. М. О поверхностных волнах в твердом теле, удерживающих кривизной границы.— Акуст. ж., 1967, 13, вып. 4, 541.
16. Бреховских Л. М. О некоторых проблемах акустики океана.— Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, 1968, 4, вып. 12, 1291.
17. Бреховских Л. М. О волноводных явлениях в твердых слоистых средах с непрерывно изменяющимися параметрами.— Акуст. ж., 1968, 14, вып. 2, 194.
18. Булдырев В. С. Асимптотика решений волнового уравнения, сосредоточенных вблизи оси плоского волновода в неоднородной среде.— Проблемы матем. физики, вып. 3. Изд. ЛГУ, 1968.
19. Булдырев В. С., Славянов С. Ю. Равномерные асимптотические разложения для решений уравнения типа Шредингера с двумя точками перехода. I.— Вестник ЛГУ, 1968, № 22, вып. 4, 70.
20. Булдырев В. С. Поле точечного источника в акустическом волноводе.— Реф.: РЖ Физ., 1968, 9Ж 519.
21. Ватсон Г. Н. Теория бесследовых функций. ИЛ, 1949.
22. Викторов И. А. Физические основы применения ультразвуковых волн Рэлея и Лэмба в технике. М., «Наука», 1966.
23. Войт С. С. Отражение и преломление сферических звуковых волн при переходе из неподвижной среды в движущуюся.— Прикл. математ. и мех., 1953, 17, 157.
24. Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. Сборник, выпуск 1—8, Изд-во АН СССР, 1957.
25. Газарян Ю. Л. К вопросу о волноводном распространении звука в неоднородных средах.— Акуст. ж., 1956, 2, вып. 2, 133.
26. Газарян Ю. Л. Волноводное распространение звука для одного класса слоисто-неоднородных сред.— Акуст. ж., 1957, 3, вып. 2, 127.
27. Газарян Ю. Л. О поле точечного излучателя в слое, лежащем на полупространстве.— Акуст. ж., 1958, 4, вып. 3, 233.
28. Гинзбург В. Л. Теория распространения радиоволн в ионосфере. Гостехиздат, 1949.
29. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.

30. Гребенников Н. В., Власов А. Г., Непорент Б. С., Суйковская Н. В. Просвещение оптики. Гостехиздат, 1946.
31. Губанов А. Волны Рэлея на границе твердого тела и жидкости.— ЖЭТФ, 1945, 15, 497.
32. Дородницын А. А. Асимптотические законы распределения собственных значений для некоторых особых видов дифференциальных уравнений второго порядка.— Успехи мат. наук, 1952, 7, вып. 6.
33. Жарков К. В., Меркулов Л. Г., Пигулевский Е. Д. Затухание нормальных волн в пластинке со свободными границами.— Акуст. ж., 1964, 10, вып. 2, 163.
34. Завадский В. Ю. Критические частоты при распространении звука в жидком слоисто-неоднородном полупространстве с тонкой упругой пластинкой на границе.— Акуст. ж., 1964, 10, № 2, 167.
35. Завадский В. Ю., Кручин В. Д. Поле нормальных волн точечного излучателя в волноводе с поглощающими границами.— Акуст. ж., 1967, 13, № 2, 199.
36. Зайцев Л. П., Зволинский Н. В. Исследование головной волны, возникающей на границе раздела двух жидкостей.— Изв. АН СССР, сер. геофиз. и географ., 1951, 15, 20.
37. Зволинский Н. В. Плоские волны в упругом полупространстве и покрывающем его слое жидкости.— ДАН СССР, 1947, 56, 21.
38. Зволинский Н. В. Поверхностные плоские волны в упругом полупространстве и покрывающем его слое жидкости.— ДАН СССР, 1947, 56, 363.
39. Зельдович Я. Б., Мышикис А. Д. Элементы прикладной математики. М., «Наука», 1965.
40. Иогансен Л. В. Теория резонансных электромагнитных систем с полным внутренним отражением.— ЖТФ, 1962, 32, № 4, 406.
41. Иогансен Л. В. Теория резонансных электромагнитных систем с полным внутренним отражением. II.— ЖТФ, 1963, 33, № 11, 1323.
42. Каценеленбаум Б. З. Теория нерегулярных волноводов с медленно меняющимися параметрами. М., Изд-во АН СССР, 1961.
43. Кейлис-Боров В. И. Интерферционные поверхностные волны. М., Изд-во АН СССР, 1960.
44. Кравцов Ю. А. Об одной модификации метода геометрической оптики.— Изв. высш. уч. завед., Радиофизика, 1964, 7, 664.
45. Кравцов Ю. А. Асимптотическое решение уравнений Максвелла вблизи каустики.— Изв. высш. учебн. завед., Радиофизика, 1964, 7, 1049.
46. Кравцов Ю. А. Модификация метода геометрической оптики для волны, просачивающейся через каустику.— Изв. высш. учебн. завед., Радиофизика, 1965, 8, № 4, 659.
47. Кравцов Ю. А. О двух новых асимптотических методах в теории распространения волн в неоднородных средах.— Акуст. ж., 1968, 14, № 1, 1.
48. Кряжев Ф. И. и Петров Н. А. Нормальные волны в трехслойной среде.— Акуст. ж., 1960, 6, № 2, 229.
49. Кудряшов В. М. О звуковом поле в одном классе слоисто-неоднородных сред. Сб. «Математические проблемы геофизики». Новосибирск, СО АН СССР, 1971.
50. Купрадзе В. Д., Соболев С. Л. Упругие волны на границах двух сред.— Тр. Сейсмического ин-та АН СССР, 1930, № 10.
51. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. ГТТИ, 1933.
52. Куртепов В. М. Дифракция сферической звуковой волны от гармонического источника на тонкой бесконечной пластинке. М., Канд. диссерт., 1970.
53. Куртепов В. М. Звуковое поле точечного источника при наличии в среде тонкой бесконечной пластины (дискретный спектр).— Акуст. ж., 1969, 15, № 4, 560.
54. Куртепов В. М. Звуковое поле точечного источника при наличии в однородной среде тонкой бесконечной пластины (непрерывный спектр).— Акуст. ж., 1970, 16, № 1, 96.
55. Ландай Л. Д., Либшиц Е. М. Механика сплошных сред. Гостехиздат, 1944.
56. Ландай Л. Д., Либшиц Е. М. Теория упругости. М., «Наука», 1965.
57. Левин М. Л. Распространение плоской электромагнитной волны в периодической слоистой среде.— ЖТФ, 1948, 18, 1399.
58. Леонович М. А. Об одном методе решения задач о распространении электромагнитных волн вдоль поверхности земли.— Изв. АН СССР, сер. физическая, 1944, 8, 16.
59. Леонович М. А., Фок В. А. Решение задачи о распространении электромагнитных волн вдоль поверхности земли по методу параболического уравнения.— ЖЭТФ, 1946, 16, 557.
60. Ляя А. Математическая теория упругости. М.—Л., ОНТИ, 1935.
61. Ляшев Л. М. Отражение звука тонкими пластинками и оболочками в жидкости. М., Изд-во АН СССР, 1955.
62. Мальцев Н. Е. Некоторые модификации метода поперечных сечений.— Акуст. ж., 1970, 16, № 1, 102.
63. Маслов В. П. Теория возмущений и асимптотические методы. Изд. МГУ, 1965.
64. Мастеров Е. П. К вопросу о волноводном распространении звука в слоисто-неоднородных средах.— Акуст. ж., 1959, 5, № 3, 332.
65. Мастеров Е. П., Муромцева В. Н. Об одном случае антиволноводного

- распространения звука в слоисто-неоднородных средах.— Акуст. ж., 1960, 6, № 3, 335.
66. Меркулов Л. Г. Затухание нормальных волн в пластинах, находящихся в жидкости.— Акуст. ж., 1964, 10, № 2, 206.
67. Миллер М. А. и Таланов В. И. Поверхностные электромагнитные волны, направляемые границей с малой кривизной.— ЖТФ, 1956, 26, вып. 12, 2755.
68. Морс Ф. М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. М., ИИЛ, 1960.
69. Мухина И. В., Молотков И. А. О распространении волн Рэлея в упругом полупространстве, неоднородном по двум координатам.— Изв. АН СССР, Физика земли, 1967, 4, 3.
70. Наймарк М. А. О корнях уравнения частот упругого слоя, лежащего на упругом полуупространстве.— Труды Геофиз. ин-та, АН СССР, 1949, № 1.
71. Орлов Ю. И. К вопросу о просачивании волн через акустику в параболическом плазменном слое.— Радиофизика, 1966, 9, 1036.
72. Орлов Ю. И. О некоторых особенностях лучевой теории распространения цилиндрических и сферических волн в слабонеоднородной плазме. I.— Радиофизика, 1966, 9, № 3, 498.
73. Петрашев Г. И. Распространение упругих волн в слоисто-изотропных средах, разделенных параллельными плоскостями.— Ученые записки ЛГУ (серия матем. наук), 1952, № 162, вып. 26.
74. Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Гостехиздат, 1947.
75. Подводная акустика. I. Перевод с с англ. М., «Мир», 1965.
76. Полянская В. А. О поле импульсного излучателя в подводном звуковом канале.— Акуст. ж., 1959, 5, № 1, 91.
77. Пресняков Л. П., Собельман И. И. О распространении электромагнитных волн в среде с переменным показателем преломления.— Радиофизика, 1965, 8, 57.
78. Распространение звука в океане. Сборник, пер. с англ. М., ИИЛ, 1951.
79. Рызниченко Ю. В. О распространении сейсмических волн в дискретных и гетерогенных средах.— Изв. АН СССР, серия геофиз. и географ., 1949, 13, 115.
80. Розенберг Г. В. Многолучевая интерферометрия и интерференционные светофильтры.— УФН. I, 1952, 47, 3; II, 1952, 47, 173.
81. Рытов С. М. Электромагнитные свойства мелкослоистой среды.— ЖЭТФ, 1955, 29, вып. 5 (11).
82. Рытов С. М. Акустические свойства мелкослоистой среды.— Акуст. ж., 1956, 2, вып. 1.
83. Рытов С. М., Юдович Ф. С. Об отражении электромагнитных волн от слоя с отрицательной диэлектриче-
- ской постоянной.— ЖЭТФ, 1946, 10, 285.
84. Рэлей. Теория звука. Гостехиздат, 1940.
85. Рязин П. А., Бреховских Л. М. О поле радиоволн между двумя полупроводящими средами.— Изв. АН СССР, серия физич., 1946, 10, 285.
86. Саваренский Е. Ф. Сейсмические волны. М., «Недра», 1972.
87. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Для мех.-матем. и физ.-матем. фактов ун-тов. (Том 3). М., «Наука», 1969.
88. Смирнов В. И., Соболев С. Л. Новый метод решения плоской задачи об упругих колебаниях. Труды Сейсмического ин-та АН СССР, 1932, № 20.
89. Тамм И. Е. Основы теории электричества. Гостехиздат, 1946.
90. Тартаковский Б. Д. Звуковые переходные слои.— ДАН СССР, 1950, 75, 29.
91. Тартаковский Б. Д. О переходе звуковых волн через границы твердых и жидких сред.— ЖТФ, 1951, 21, 1194.
92. Тархов А. Г. К вопросу об анизотропии упругих свойств в горных породах. Матер. Всес. н.-и. геол. ин-та. Общая серия. Сб. 5, 1940, 209.
93. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье, §§ 2,8. Гостехиздат, 1948.
94. Толстой И., Клей К. С. Акустика океана. М., «Мир», 1969.
95. Уиттекер Е. Т., Ватсон Д. Н. Курс современного анализа. М., Физматгиз, 1963.
96. Фельзен Л. Квазиоптические методы в дифракции. «Квазиоптика», Труды симпозиума. М., «Мир», 1966.
97. Фок В. А. Таблицы функций Эйри. М., Г. Т.Т.И., 1946.
98. Фок В. А. Приближенная формула для дальности горизонта при наличии сверхрефракции.— Радиотехника и электроника, 1956, 1, № 5, 560.
99. Франк Ф., Мизес Р. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. ОНТИ, 1937.
100. Фреман Н., Фреман П. У. ВКБ—приближение. М., «Мир», 1967.
101. Фурдаев В. В. Электроакустика. Гостехиздат, 1948.
102. Хидин Д. Введение в метод фазовых интегралов (метод ВКБ). М., «Мир», 1965.
103. Цвиккер К., Костен К. Звуконаглощающие материалы. ИИЛ, 1952.
104. Шерман Д. И. О распространении волн в жидком слое, лежащем на упругом основании.— Труды Сейсмол. ин-та АН СССР, 1945, № 115.
105. Arenberg D. L. Ultrasonic solid delay lines.— J. Acoust. Soc. America, 1948, 20, I.
106. Arons A., Yenni D.— J. Acoust. Soc. America, 1950, 22, N 2, 231. Русский перевод: Сб. «Распространение звука в океане». М., ИЛ, 1951, стр. 7.

107. *Bahar E.* Generalized WKB method with applications to problems of propagation in nonhomogeneous media.— *J. Math. Phys.*, 1967, 8, N 9, 1735.
108. *Bailey V. A.* Reflection of waves by an inhomogeneous medium.— *Phys. Rev.*, 1954, 96, 865.
109. *Baños A., Jr.* Dipole radiation in the presence of a conducting half-space. *Pergamon Press*, 1966.
110. *Barnard G. R., Bardin J. L., Hempkins W. B.* Underwater sound reflection from layered media.— *J. Acoust. Soc. America*, 1964, 36, N 11, 2119.
111. *Behrens E.* Sound propagation in lamellar composite materials and averaged elastic constants.— *J. Acoust. Soc. America*, 1967, 42, N 2, 378.
112. *Bellman R., Kalaba R.* Invariant imbedding wave propagation and the WKB approximation.— *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 1958, 44, N 4, 317.
113. *Beranek L. L.* Acoustical properties of homogeneous, isotropic rigid tiles and flexible blankets.— *J. Acoust. Soc. America*, 1947, 19, 556.
114. *Beranek L. L., Work G. A.* Sound transmission multiple structures containing flexible blankets.— *J. Acoust. Soc. America*, 1949, 21, 419.
115. *Biot M. A.* The interaction of Rayleigh and Stonely waves in the ocean bottom.— *Bull. Seismol. Soc. America*, 1952, 42, 81.
116. *Biot M. A., Pohle F. V.* Validity of thin-plate theory in dynamic viscoelasticity.— *J. Acoust. Soc. America*, 1964, 36, N 6, 1110.
117. *Blok H.* The electromagnetic field generated by a dipole in an Epstein medium.— *Internat. Series of Monographs in Electromagnetic Waves*, v. 2. *Proc. Sympos. Delft*, Pt. I, 1967, *Electromagnetic Wave Theory*, 135.
118. *Bremmer H.* Terrestrial radio waves. Theory of propagation. 1949, Elsevier Publ. Co.
119. *Bremmer H.* The propagation of electromagnetic waves through a stratified medium and its WKB approximation for oblique incidence.— *Physica*, 1949, 15, 593.
120. *Bremmer H.* The WKB approximation as the first term of a geometric — optical series.— *Commun. Pure and Appl. Math.*, 1951, 4, 105.
121. *Brillouin L.* Sur une méthode de calcul approchée de certaines intégrales, dite méthode de col.— *Ann. l'école normal. super.*, 1916, 33, 17.
122. *Brillouin L.* Wave propagation in periodic structures. 1946, McGraw — Hill.
123. *Bruggeman D. A. G.* Berechnung verschiedener physikalischer Konstanten von heterogenen Substanzen.— *Ann. Phys.*, 1935, 24, 636.
124. *Bucker H. P.* Normal-mode sound propagation in shallow water.— *J. Acoust. Soc. America*, 1964, 36, N 2, 251.
125. *Budden K. G.* The wave-guide mode theory of wave propagation. 1961. Bristol, Logos Press — Acad. Press.
126. *Burman R., Gould R. N.* The reflection of waves in a generalized Epstein profile.— *Canad. J. Phys.*, 1965, 43, 921.
127. *Cafferata H.* The calculation of input or sending end impedance of feeders and cables terminated by complex loads.— *Marcony Rev.*, 1937, 6, N 64.
128. *Cagniard L.* Réflexion et réfraction des ondes séismiques progressives. 1939, Paris. Gauthies — Villars et Cie.
129. *Cervený V.* The reflection of spherical elastic waves at a plane boundary.— *Geophys. sborn.*, 1956, N 44, 343.
130. *Cochran M. D., Woerner A. F., De Breamecker J. C.* Bode waves as normal and leaking modes.— *Rev. Geophys. and Space Phys.*, 1970, 8, N 2, 321.
131. *Constable J. E. R.* Acoustical insulation afforded by double partitions constructed from similar components.— *Philos. Mag.*, 1934, 18, 321.
132. *Constable J. E. R.* Acoustical insulation afforded by double partitions constructed from a dissimilar components.— *Philos. Mag.*, 1938, 26, 253.
133. *Cooper H. F., Jr.* Reflection and transmission of oblique plane waves at a plane interface between viscoelastic media.— *J. Acoust. Soc. America*, 1967, 42, N 5, 1064.
134. *Cremer L.* Über die Analogie zwischen Einfallswinkel und Frequenzproblemen.— *Arch. elektr. Übertragung*, 1947, I, 28.
135. *Cron B. F., Nuttal A. H.* Phase distortion of a plane caused by bottom reflection.— *J. Acoust. Soc. America*, 1965, 37, N 3, 486.
136. *Doak P. E.* The reflexion of a spherical acoustic pulse by an absorbent infinite plane and related problems.— *Proc. Roy. Soc. A*, 1952, 215, 233.
137. *Dorman J.* Period equation for waves of Rayleigh type on a layered liquid — solid half space.— *Bull. Seismol. Soc. America*, 1962, 52, 389.
138. *Dunkin J. W.* A study of two-dimensional head waves in fluid and solid systems.— *Geophysics*, 1963, N 4, 563.
139. *Dunkin J. W.* Computation of modal solutions in layered, elastic media at high frequencies.— *Bull. Seismol. Soc. America*, 1965, 55, N 2, 335.
140. *Duykers L. R. B.* Deformation of an exponential pulse with a finite rise time in the region of total reflection.— *J. Acoust. Soc. America*, 1965, 37, N 6, 1052.
141. *Eckart G.* Etude des échos des ondes acoustiques dans le milieu stratifié de la troposphère.— *Acustica*, 1952, 2, 256.
142. *Elias G. I.* Das Verhalten elektromagnetischer Wellen bei räumlich veränderlichen elektrischen Eigenschaften.— *ENT*, 1931, 8, 4.
143. *Epstein P.* Reflection of waves in an inhomogeneous absorbing medium.—

- Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1930, 16, 627.
144. Ergin K. Energy ratio of the seismic waves reflected and refracted at a rock-water boundary.— Bull. Seismol. Soc. America, 1952, 42, 349.
145. Ewing W. M., Jardetzky W. S., Press F. Elastic waves in layered media. N. Y., McGraw — Hill, 1957.
146. Fatou M. P. Sur le mouvement d'un système soumis à l'action des forces à courte période. Bull. Soc. Math. France, 1928, 56, 98.
147. Fay R. D. Notes on the transmission of sound through plates. — J. Acoust. Soc. America, 1953, 25, N 2, 229.
148. Felsen L. Lateral waves. International Series of Monographs in Electromagnetic Waves. Vol. 2. Electromagnetic Wave Theory Proc. of a Symposium held at Delft, The Netherlands, P. I., 1967, 11.
149. Fischer F. A. Über die Totalreflexion von ebenen Impulswellen.— Ann. Phys. 1948, 2, 113.
150. Floquet G. Ann. Ecole normal. super., 1883, 12, 47.
151. Focke I. Asymptotik Entwicklungsmittels der Methode der stationären Phase. Ber. Verhandl. Sächs. Akad. Wiss. Math.— Naturwiss. Klasse, 101, H. 3, 1954.
152. Försterling K. Über die Ausbreitung des Lichtes in inhomogenen Medien.— Ann. Phys., 1931, 11, 1
153. Försterling K. and Wüster H. O. On reflection in inhomogeneous media.— Ann. Phys., 1950, 8, 129.
154. Fragstein C. V. Zur Seitenversetzung des totalreflektierten Lichtstrahles.— Ann. Phys., 1949, 4, 271.
155. Franceschetti G. Scattering from plane layered media.— IEEE Trans. Ant. and Propagat., 1964, AP — 12, № 6, 754.
156. Friedlander F. G. On the total reflection of plane waves.— Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1948, I, pt 4, 376.
157. Friedrichs K. O., Keller J. B. Geometrical acoustics. 2. Diffraction, reflection, and refraction of a weak spherical or cylindrical shock at a plane interface.— J. Appl. Phys., 1955, 26, N 8, 961.
158. Gans R. Fortpflanzung des Lichtes durch ein inhomogenes Medium.— Ann. Phys., 1915, 47, 709.
159. Gerjuoy E. Refraction of waves from a point source into a medium of a higher velocity.— Phys. Rev., 1948, 73, 1442.
160. Ginzburg A. S., Strick E. Stonely-wave velocities for a solid-solid interface. Bull. Seismol. Soc. Amer., 1958, 48, N 1, 51.
161. Goos F., Hänenchen H. Ein neuer und fundamentaler Versuch zur Totalreflexion.— Ann. Phys., 1947, I, 333.
162. Goos F., Lindberg-Hänenchen H. Neu-messung des Strahlversetzungseffektes bei Totalreflexion.— Ann. Phys., 1949, 5, 251.
163. Greenland K. M. Interference filters in optics.— Endeavour, 1952, 11, 143.
164. Gupta R. N. Reflection of sound waves from transition layers.— J. Acoust. Soc. America, 1966, 39, N 2, 255.
165. Haddenhorst H. G. Durchgang von elektromagnetischen Wellen durch inhomogene Schichten— Z. angew. Phys., 1955, 8, 487.
166. Hadley L. W., Dennison D. M. Reflection and transmission interference filters.— J. Opt. Soc. America, 1947, 37, 51.
167. Harkrider D. G. Surface waves in multilayered elastic media I. Rayleigh and Love waves from buried sources in a multilayered elastic half-space.— Bull. Seismol. Soc. America, 1964, 54, 627.
168. Heelan P. A. Radiation from a cylindrical source of finite length.— Geophysics, 1953, 18, 685.
169. Heelan P. A. On the theory of head waves.— Geophysics, 1953, 18, 871.
170. Heller G. S. Reflection of acoustic waves from in homogeneous fluid medium.— J. Acoust. Soc. America, 1953, 25, 1104.
171. Hines C. O. Reflection of waves from varying media.— Quart. Appl. Math., 1953, 11.
172. Hudimak A. A. Ray theory solution for the sound intensity in water due to a point source above it.— J. Acoust. Soc. America, 1957, 29, N 8, 916.
173. Hufford G. A. A note on the wave propagation through an inhomogeneous medium.— J. Appl. Phys., 1953, 24, 268.
174. Hurst D. The transmission of sound by a series of equidistant partitions.— Canad. J. Res., 1935, 12, 398.
175. Iamada R. On the radio wave propagation in a stratified atmosphere.— J. Phys. Soc. Japan, 1955, 10, 71.
176. Ingard U. On the reflection of a spherical sound wave from an infinite plane.— J. Acoust. Soc. America, 1951, 23, 329.
177. Jones D. S. High-frequency refraction and diffraction in general media.— Philos. Trans., Ser. A., 1963, 255, N 1058, 341.
178. Kahan T., Eckart G. A general account of asymptotic expansions in wave propagation.— Rev. sci. Paris, 1949, 87, 3.
179. Karbowiak A. E. Solution of the exact excitation problem on tubular waveguides. Electromagnetic theory and antennas, Proc. Sympos. Copenhagen, 1963, Pergamon Press, 2, 857.
180. Karbowiak A. E. Review of guided waves — an appraisal of quasimodes.— Proc. IEE, 1964, 111, 1781.
181. Kiblewhite A. C., Denham R. N. Experiment on propagation in surface sound channels.— J. Acoust. Soc. America, 1965, 38, № 1, 63.
182. King P., Lockhart L. B. Two-layered reflection-reducing coatings.— J. Opt. Soc. America, 1946, 36, 513.

183. Knopoff L. On Rayleigh wave velocities.—Bull. Seismol. Soc. America, 1952, 42, 307–308.
184. Kofink W. Reflexion elektromagnetischer Wellen an einer inhomogenen Schicht.—Ann. Phys., 1947, I, 119.
185. Kronig R., Blaissé B. S., Sande J. J. Optical impedance and surface coating.—Appl. Sci. Res., 1947, B1, 63.
186. Lamb H. On waves in an elastic plate.—Proc. Roy. Soc., A, 1917, 93, 114.
187. Lang R. H., Shmoys J. Lateral waves on diffuse interfaces of finite thickness.—J. Acoust. Soc. America, 1970, 48, N 1(2), 242.
188. Laue M. Spiegelung und Brechung des Lichtes an der Grenze zweier isotroper Körper.—Handbuch für exper. Physik, 1928, 18, 149.
189. Lawhead R. B., Rudnick I. Acoustic wave propagation along a constant normal impedance boundary.—J. Acoust. Soc. America, 1951, 53, 546.
190. Lesser M. B. Uniformly valid perturbation series for wave propagation in an inhomogeneous medium.—J. Acoust. Soc. America, 1970, 47, N 5 (2), 1297.
191. Lindh G. The transmission and reflection of an exponential shock wave impinging on a homogeneous elastic plate immersed in a liquid.—Acustica, 1955, 5, N 5, 257.
192. Lockhart L. B., King P. Three-layered reflection-reducing coatings.—J. Opt. Soc. America, 1947, 37, 689.
193. London A. Transmission of reverberant sound through single wall.—J. Res. Nat. Bur. Stand., 1949, 42, 605.
194. London A. Transmission of reverberant sound through double walls.—J. Acoust. Soc. America, 1950, 22, 270.
195. Ludwig D. Uniform asymptotic expansions at a caustic.—Commun Pure and Appl. Math., 1966, 19, 215.
196. Maecker H. Die Grenze der Total-reflexion strahlenoptischen Näherung mit der Wolterschen Strahldefinition.—Ann. Phys., 1952, 10, 115.
197. Makinson K. R. Transmission of ultrasonic waves through a thin solid plate at the critical angle for the dilatational wave.—J. Acoust. Soc. America, 1952, 24, 202.
198. Makinson K. R. Transmission of sound through plates.—J. Acoust. Soc. America, 1953, 25, N 6, 1202.
199. Milder D. M. Ray and wave invariants for SOFAR channel propagation.—J. Acoust. Soc. America, 1969, 46, N 5, pt 2, 1259.
200. Mindlin R. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motion at isotropic elastic plates.—J. Appl. Mech., 1951, 18, 31.
201. Mitra M. Propagation of explosive sound in a layered liquid.—J. Acoust. Soc. America, 1964, 36, N 6, 1145.
202. Murphy E. L. Ray representation of diffraction effects in the split -beam sound field.—J. Acoust. Soc. America, 1968, 43, N 3, 610.
203. Muskat M., Meres M. W. Reflection and transmission coefficients for plane waves in elastic media.—Geophysics, 1940, 5, 115.
204. Nicholas N. C., Überall H. Normal-mode propagation calculations for a parabolic velocity profile.—J. Acoust. Soc. America, 1970, 48, 744.
205. Niessen K. F. Über die entfernten Raumwellen eines vertikalen Dipolsenders.—Ann. Phys., 1933, 18, 893.
206. Nuttal A. H., Cron B. F. Signal-waveform distortion caused by reflection off lossy-layered bottoms.—J. Acoust. Soc. America, 1966, 40, № 5, 1094.
207. Officer C. B. Normal mode propagation in three layered liquid half-space by ray theory.—Geophysics, 1951, 16, 207.
208. Ott H. Reflexion und Brechung von Kugelwellen. 1. Effekte. 2. Ordnung. Ann. Phys., 1942, 41, 443.
209. Ott H. Die Bodenwelle eines Senders. Z. angew. Phys., 1951, 3, 123.
210. Pearcey T. The structure of an electromagnetic field in the neighbourhood of a cusp of a caustic.—Philos. Mag., 1946, 37, 311.
211. Pedersen M. A. Theory of the axial ray.—J. Acoust. Soc. America, 1969, 45, N 1, 157.
212. Pedersen M. A., White De Wayne. Ray theory for sources and receivers on a axis of minimum velocity.—J. Acoust. Soc. America, 1970, 48, N 5 (2), 1219.
213. Pekeris C. L. Mem. Geol. Soc. America, 1948, N 27. Русский перевод: Сб. «Распространение звука в океане», М., ИЛ, 1951, 48.
214. Pekeris C. L. Ray theory vs. normal mode theory in wave propagation problems.—Proc. Sympos. Appl. Math., 1950, 2.
215. Phynney R. A. Propagation of leaking interface waves. Bull. Seismol. Soc. America, 1961, 51, N 4, 527.
216. Pierce J. R. A note on the transmission line equation in terms of impedance.—Bell. System Techn. J., 1943, 32, 263.
217. Pierce A. D. Extension of the method of normal modes to sound propagation in an almost-stratified medium. J. Acoust. Soc. America, 1965, 37, N 1, 19.
218. Pierce A. D. Parametric solution of the dispersion relation for guided sound propagation in shallow water.—J. Acoust. Soc. America, 1966, 39, N 6, 1139.
219. Pierce A. D. Relation of the exact transient solution for a linear source near an interface between two fluids to geometrical acoustics.—J. Acoust. Soc. America, 1968, 44, N 1, 33.
220. Polster H. D. Reflection from a multi-layer filter.—J. Opt. Soc. America, 1949, 39, 1033

221. *Poritsky H.* Extension of Weyl's integral for harmonic spherical waves to arbitrary wave shapes.—*Commun. Pure and Appl. Math.*, 1951, 4, 33.
222. *Postma G. W.* Wave propagation in a stratified medium.—*Geophysics*, 1955, 20, N 4, 780.
223. *Press F., Ewing M.* Propagation of elastic waves in a floating ice sheet.—*Trans. Amer. Geophys. Union*, 1951, 32, 673.
224. *Rauer K.* Elektrische Wellen in einem geschichteten Medium.—*Ann. Phys.*, 1939, 35, 385.
225. *Rayleigh, Lord (Strutt J. W.).* On waves propagated along the plane surface of an elastic solid.—*Scient Papers*, 1886, II, 441.
226. *Redwood M. R.* Mechanical waveguides. Pergamon Press, 1960.
227. *Rudnick I.* The propagation of an acoustic wave along a boundary.—*J. Acoust. Soc. America*, 1947, 19, 348.
228. *Salzberg B.* Propagation of electromagnetic waves through a stratified medium.—*J. Opt. Soc. America*, 1950, 40, N 7, 465.
229. *Schelkunoff S. A.* Remarks concerning wave propagation in stratified media.—*Commun. Pure and Appl. Math.*, 1951, 4, 117.
230. *Schoch A.* Schallreflexion, Schallbrechung und Schallbeugung.—*Ergebn. exact. Naturwiss.*, 1950, 23, 127.
231. *Schoch A.* Seitiche Versetzung eines total reflektierten Strahles bei Ultraschallwellen.—*Acustica*, 1952, 2, 17.
232. *Schoch A.* Der Schalldurchgang durch Platten.—*Acustica*, 1952, 2, 1.
233. *Scholte J. G.* The range of existence of Rayleigh and Stonely waves.—*Monthly Notices Roy. Astron. Soc. Geophys. Suppl.*, 1947, 5, 120.
234. *Schuster K.* Anwendung der Vierpoltheorie auf der Probleme der optische Reflexionsminderung, Reflexions, Verstärkung und der Interferenzfilter.—*Ann. Phys.*, 1949, 4, 352.
235. *Seckler B. D. and Keller J. B.* Geometrical theory of diffraction in inhomogeneous media.—*J. Acoust. Soc. America*, 1959, 31, № 2, 192.
236. *Seckler B. D., Keller J. B.* Asymptotic theory of diffraction in inhomogeneous media.—*J. Acoust. Soc. America*, 1959, 31, № 2, 206.
237. *Sezawa K., Kanai K.* The range of possible existence of Stonely waves and some related problems.—*Bull. Earthquake Res. Inst. (Tokyo)*, 1939, 17, 1.
238. *Silbiger A.* Phase shift at caustics and turning points.—*J. Acoust. Soc. America*, 1968, 44, N 2, 653.
239. *Slichter L. B.* The theory of the interpretation of seismic travel-time curves in horizontal structures.—*Physica*, 1932, 3, 273.
240. *Sommerfeld A.* Über die Ausbreitung der Wellen in der drahtlosen Telegraphie.—*Ann. Phys.*, 1909, 28, 665; 1926, 81, 1135.
241. *Stonely R.* Elastic waves at the surface of separation of two solids.—*Proc. Roy. Soc. London*, A, 1924, 106, 416.
242. *Stonely R.* The effect of the ocean on Rayleigh waves.—*Monthly Notices Roy. Astron. Soc. Geophys. Suppl.*, 1926, 1, 349.
243. *Strick E., Roever W. L. and Vining T. F.* Propagation of elastic wave motion from an impulsive source along a fluid solid interface.—*Philos. Trans. Roy. Soc. London*, A, 1959, 251, N 1000, 455.
244. *Thompson W. T.* Transmission of elastic waves through a stratified solid material.—*J. Appl. Phys.*, 1950, 21, N 2.
245. *Thompson W. T.* The equivalent circuit for the transmission of plane elastic waves through a plate at oblique incidence.—*J. Appl. Phys.*, 1950, 21, 1215.
246. *Thrower E. N.* The computation of the dispersion of elastic waves in layered media.—*J. Sound Vibration*, 1965, 2, 210.
247. *Tolstoy I.* Note on the propagation of normal modes in inhomogeneous media.—*J. Acoust. Soc. America*, 1955, 27, 274.
248. *Tolstoy I. and Usdin E.* Wave propagation in elastic plates: low and high mode dispersion.—*J. Acoust. Soc. America*, 1957, 29, 37.
249. *Tolstoy I.* Modes, rays and travel times.—*J. Geophys. Res.*, 1959, 64, N 7, 815.
250. *Tolstoy I.* Total internal reflection of pulses in stratified media.—*J. Acoust. Soc. America*, 1965, 37, N 6, 1153.
251. *Tolstoy I.* Phase changes and pulse deformation in acoustics.—*J. Acoust. Soc. America*, 1968, 44, N 3, 675.
252. *Town D. N.* Pulse shapes of spherical waves reflected and refracted at a plane interface separating two homogeneous fluids.—*J. Acoust. Soc. America*, 1968, 44, N 1, 67.
253. *Town D. N.* Pulse shape of totally reflected plane waves as a limiting case of the Cagniard solution for spherical waves.—*J. Acoust. Soc. America*, 1969, 44, N 1, 77.
254. *Uberall H., Nicholas N. C.* Range focusing in deep-ocean sound channel with parabolic profils.—*J. Acoust. Soc. America*, 1968, 44, N 5, 1259.
255. *Ugincius P.* Intensity equations in ray acoustics. I, II. *J. Acoust. Soc. America*, 1969, 45, N 1, 193, 206.
256. *Ulter K.* Elastische Oberflächen Planwellen.—*Ann. Phys.*, 1918, 56, 463.
257. *Victor A. S., Spitznogle F. R., McLeroy F. G.* Propagation at short ranges of elastic waves from an impulsive source in a shallow fluid overlying a layered elastic solid.—*J. Acoust. Soc. Amer.*, 1965, 37, N 5, 894.
258. *Wait J. R.* Electromagnetic waves in stratified media. Pergamon Press, 1962.

259. *Wallot J.* Der senkrechte Durchgang elektromagnetischer Wellen durch eine Schicht räumlich veränderlicher Dielektrizitätskonstante.— *Ann. Phys.*, 1919, **60**, 734.
260. *Walther K.* Polarisations- und Winkelabhängigkeit des Reflexionsfaktors von Absorbern für elektromagnetische Zentimeterwellen.— *Z. angew Phys.*, 1958, **10**, 6, 285.
261. *Ware J. A., Aki K.* Continuous and discrete inverse-scattering problems in a stratified elastic medium. I. Plane waves in normal incidence.— *J. Acoust. Soc. America*, 1969, **45**, N 4, 941.
262. *Warfield J. T., Jacobson M. J.* Acoustic propagation in a channel with range-dependent sound speed.— *J. Acoust. Soc. America*, 1969, **45**, N 5, 1145.
263. *Weil H.* Ausbreitung elektromagnetischer Wellen über einem ebenen Leiter.— *Ann. Phys.*, 1919, **60**, 481.
264. *Weinstein M. S.* Wave solution for air-to-water sound transmission.— *J. Acoust. Soc. America*, 1965, **37**, N 5, 899.
265. *Weston D. E.* Sound focusing and beaming in the interference field due to several shallow-water modes.— *J. Acoust. Soc. America*, 1968, **44**, N 6, 1706.
266. *White J. E.* Seismic waves. McGraw-Hill, 1965.
267. *White D.* Velocity profiles that produce acoustic focal points on an axis of minimum velocity.— *J. Acoust. Soc. America*, 1969, **46**, N 5 (2), 1318.
268. *Williams A. O., Jr., Horne W.* Axial focusing of sound in the SOFAR channel.— *J. Acoust. Soc. America*, 1967, **41**, N 1, 189.
269. *Wood D. H.* No phase change in a constant gradient medium.— *J. Acoust. Soc. America*, 1968, **44**, 1154.
270. *Vamaguchi S., Sato Y.* Stonely wave—its velocity, orbit, and the distribution of amplitude.— *Bull. Earthquake Res. Inst.*, 1955, **33**, 549.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Антиволноводное распространение 321
Антисимметрическая волна в пластинке 45, 46
Асимптотика поля в окрестности каустики 269

Боковая волна 176, 203
Брюстера угол 24

Вейля Ван-дер-Поля формула 174
Вектор Герца 156
ВКБ приближение 132, 286, 297
Волна боковая 176 203
— водная 243
— головная 181, 203
— Лява 44
— плоская 5
— Рэлея 30, 304
— Стонели 37
— сферическая 155
— Эйри 243, 246
Волновод приповерхностный 257, 261, 285, 287
— — в твердом теле 298
— — Эпштейна 293
— — симметричный 289
Волновое уравнение 5
— число 7
Волновой вектор 7
Волны в двухслойной жидкости 224
— — в пластинках 44
— — трехслойной жидкости 251
— — — упругих средах 26
— — нормальные 210, 220, 224, 285
Входной импеданс слоя 15
Вытекающие волны 36

Геометрическая оптика 132, 134
— тень 321
Герца вектор 156
Гипергеометрическое уравнение 114
Головная волна 181, 203
Границочное условие третьего рода 24
Групповая скорость 45, 48, 235, 241, 252

Двухслойное покрытие 93
Дискретный спектр поля 221
Дисперсионное уравнение для нормальных волн 222
Дифракционные лучи 326
Длина цикла 257

Закон Снеллиуса 134
Замедленные волны 14
Звукоизоляция слоистая 104
Зона тени 324

Изгибная волна 47, 54
Импеданс слоя входной 15
Импедансное граничное условие 24
Импульса отражение 82
— распространение в слое 233
Импульсное поле нормальных волн 234
Интерференционные светофильтры 99

Каустика 261, 269, 280
Квазимоды 220
Коэффициент отражения волны от пластиинки 51, 57
— — от слоя 16, 17
— — прозрачности пластиинки 50, 57
— — слоя 16
Критерий применимости геометрической оптики 133, 274
Критическая частота 45, 48, 213, 227, 296

Лучевая картина в приповерхностном волноводе 257
Лучи дифракционные 326
Лява волна 44

Магнитный диполь 156
Мелкослоистая среда 57, 66
Метод перенала 161
— стационарной фазы 165
Мнимые источники 206, 219
— — и нормальные волны 214

Неоднородные плоские волны 7
Непрерывно-слоистые среды 111
Нормальные волны 210, 220, 224, 285
— — и мнимые источники 214

Ограничение на применение лучевой теории 274
Ограниченнных пучков отражение 71
Однослоистое покрытие 91
Оптика геометрическая 132, 134
Отражение вертикально-поляризованной упругой волны 28
— волны от произвольного слоя 143
— — — неоднородного полупространства 151
— — — полупространства 124
— горизонтально-поляризованной упругой волны 26
— звуковой волны 33
— — — от пластиинки 50
— импульса 82
— ограниченных пучков 71
— от границы раздела 8
— — переходного слоя 118
— — — симметричного слоя 121

- — слоя 15
- плоской волны 8
- полное внутреннее 10
- сферической волны 160, 166, 196
- упругих волн 35
- электромагнитных волн 22
- Отражения коэффициент 10
- Перевала метод 161
 - точка 163
- Пластинка тонкая 54
- Плоская волна 6
 - гармоническая волна 6
- Плоские волны неоднородные 7
- Поверхностная волна 14, 36
- Поворота точка 137, 138
- Поле в зоне тени 324
- Полное внутреннее отражение 183
 - — пучка 75
- Полуволновой слой 18
- Преломление плоской волны 8
 - сферической волны 190, 196
 - электромагнитных волн 22
- Преломления закон 9, 24
- Приближение ВКБ 132, 286, 297
- Приповерхностный волновод 257, 261, 285, 287
 - — в твердом теле 298
- Продольная волна в пластинке 47, 54
- Просветление оптики 91
- Распространение волны в слое 206
 - импульса в слое 233
- Рикатти уравнение 144
- Рэлея волна 30, 304
- Свободные волны в пластинке 51
- Седловая точка 163
- Симметричная волна в пластинке 45, 48
- Скорость групповая 235
- Слоистая звукоизоляция 104
- Слой с линейным законом для скорости 120
 - Эштейна 113
- Смещение пучка при отражении 73
- Снеллиуса закон 134
- Среда мелкослоистая 57, 66
- Стационарной фазы метод 165
 - — точка 164
- Стонели волна 37
- Сферическая волна 155
- Сферической волны преломление 190, 196
- Тень геометрическая 321
- Точка возврата каустики 275, 282
 - перевала 163
 - поворота 137, 138
 - стационарной фазы 164
- Трехслойное покрытие 96
- Угол Брюстера 25
 - обмена поляризацией упругой волны 29
 - падения 160
 - скольжения 160, 257
- Упругая волна вертикальной поляризации 26
 - — горизонтальной поляризации 26
- Уравнение волновое 5
 - Рикатти 144
 - — для импеданса 145
- Уравнения эталонные 137
- Фазовая скорость 227, 241, 252
 - — волны в пластинке 45, 48
- Фазового интеграла метод 286, 298
- Фактор фокусировки 261
- Фокусировка в неоднородной среде 263
- Функция Эйри 124
- Частота критическая 45, 48, 213, 227, 296
- Четвертьволновой слой 18
- Численное расстояние 175
- Шепчушие галереи 290
- Эйри волна 243, 246
 - функция 124
- Электрический диполь 156
- Эштейна волновод 293
 - слой 113
- Эталонный интеграл 165
- Эталонные уравнения 137

ОГЛАВЛЕНИЕ

| | |
|--|------------|
| Предисловие к первому изданию | 3 |
| Предисловие ко второму изданию | 4 |
| Глава I. Плоские волны в дискретно-слоистых средах | 5 |
| § 1. Плоские волны в однородных безграничных средах | 5 |
| § 2. Отражение плоской звуковой волны от границы раздела сред | 8 |
| § 3. Отражение от плоского слоя и системы слоев | 15 |
| § 4. Отражение и преломление электромагнитных волн | 22 |
| § 5. Волны в упругих средах. Общие соотношения | 25 |
| § 6. Волны в упругом полупространстве со свободной границей | 27 |
| § 7. Граница упругого и жидкого полупространств | 32 |
| § 8. Отражение от границы упругих полупространств и от системы упругих слоев | 38 |
| § 9. Свободные волны в пластинках | 44 |
| § 10. Отражение звуковой волны от пластиинки и прохождение ее через пластинку | 50 |
| § 11. Приближение тонкой пластиинки | 54 |
| § 12. Упругие свойства мелкослоистых сред | 57 |
| § 13. Электромагнитные волны в мелкослоистых средах | 66 |
| § 14. Отражение ограниченных пучков | 71 |
| § 15. Отражение импульсов | 82 |
| Глава II. Некоторые применения теории распространения волн в дискретно-слоистых средах | 91 |
| § 16. Просветление оптики | 91 |
| § 17. Интерференционные светофильтры | 99 |
| § 18. Слоистая звукоизоляция | 104 |
| Глава III. Волны в непрерывно-слоистых средах | 111 |
| § 19. Уравнения звукового и электромагнитного полей в неоднородной среде | 111 |
| § 20. Отражение волны от слоя Эпштейна | 113 |
| § 21. Отражение волны от полупространства с линейным законом для квадрата показателя преломления | 124 |
| § 22. Обзор существующих решений | 129 |
| § 23. Геометрическая оптика. Приближение ВКБ | 132 |
| § 24. Понятие об эталонных уравнениях. Поле при наличии точек поворота | 137 |
| § 25. Отражение волны от слоя с произвольным законом изменения параметров | 143 |
| Глава IV. Отражение и преломление сферических волн | 155 |
| § 26. Сферические волны | 155 |
| § 27. Метод перевала. Этalonные интегралы | 161 |
| § 28. Анализ поля отраженной волны | 166 |
| § 29. Вертикальный диполь. Формулы Вейля-Ван-дер-Поля | 174 |
| § 30. Боковая волна | 176 |
| § 31. Поле в области, близкой к углу полного внутреннего отражения | 183 |
| § 32. Преломление сферических волн | 190 |
| § 33. Отражение и преломление сферической волны на границе раздела двух упругих сред | 196 |
| Глава V. Поле точечного источника волн в дискретно-слоистых средах | 206 |
| § 34. Слой с абсолютно отражающими границами. Картина мнимых источников и лучей | 206 |
| § 35. Слой с абсолютно отражающими границами. Нормальные волны | 210 |
| § 36. Слой с произвольными границами | 216 |
| § 37. Звуковые волны в двухслойной жидкости | 224 |

| | |
|---|------------|
| § 38. Распространение импульса в слое с абсолютно отражающими границами | 233 |
| § 39. Распространение импульса в двухслойной жидкости | 241 |
| § 40. Распространение звука в трехслойной жидкой среде | 249 |
| § 41. Волны в жидком слое, лежащем на однородном упругом полу- пространстве | 253 |
| § 42. Нормальные волны в упругом слое | 255 |
| Глава VI. Поле точечного источника в непрерывно-слоистой среде. Лу- чевая трактовка | 257 |
| § 43. Волноводное распространение в непрерывно-слоистых средах | 257 |
| § 44. Лучевая теория как предельный случай волновой | 265 |
| § 45. Асимптотика поля в окрестности каустики | 269 |
| § 46. Каустика при отражении сферической волны от неоднородного полупространства. | 280 |
| Глава VII. Точная теория волноводного распространения в непрерыв- но-слоистых средах. Нормальные волны | 283 |
| § 47. Общие выражения для поля в непрерывно-слоистых средах при наличии волновода | 283 |
| § 48. Волновод с линейным законом для квадрата показателя прелом- ления | 287 |
| § 49. Волновод с законом Эпштейна | 293 |
| § 50. Приповерхностный волновод в твердом теле | 298 |
| Глава VIII. Распространение волн в неоднородном по трассе волноводе | 306 |
| § 51. Неоднородный волновод. Частный случай | 306 |
| § 52. Высокочастотная асимптотика поля в неоднородном волноводе | 312 |
| § 53. Низкочастотная асимптотика поля в волноводе. Метод попе- речных сечений | 318 |
| Глава IX. Антиволноводное распространение волн в непрерывно-слоистых средах | 321 |
| § 54. Поле при наличии геометрической тени | 321 |
| § 55. Градиент скорости у границы равен нулю | 328 |
| Литература | 332 |
| Предметный указатель | 340 |