PROBABILIDADE E PROCESSOS ESTOCÁSTICOS (CKP7366)

Prof. João Paulo Pordeus Gomes

VARIÁVEIS ALEATÓRIAS DISCRETAS (AULA 1)

Variáveis aleatórias discretas

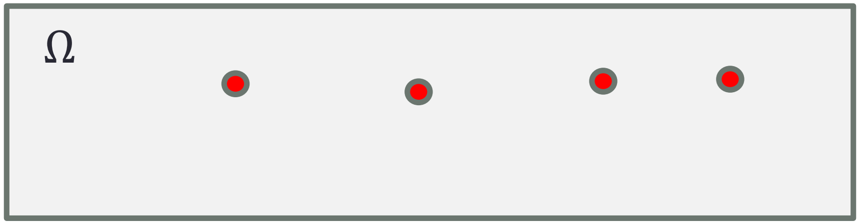
- Variável aleatória
  - Conceito
- Distribuição de probabilidade
- Exemplos
  - Bernoulli
  - Uniforme
  - Binomial
  - Geométrica
- Valor esperado
  - Regra do valor esperado
  - Linearidade

Variável aleatória

- Definição informal
  - Variável numérica que assume valores a depender do resultado de um evento probabilístico.

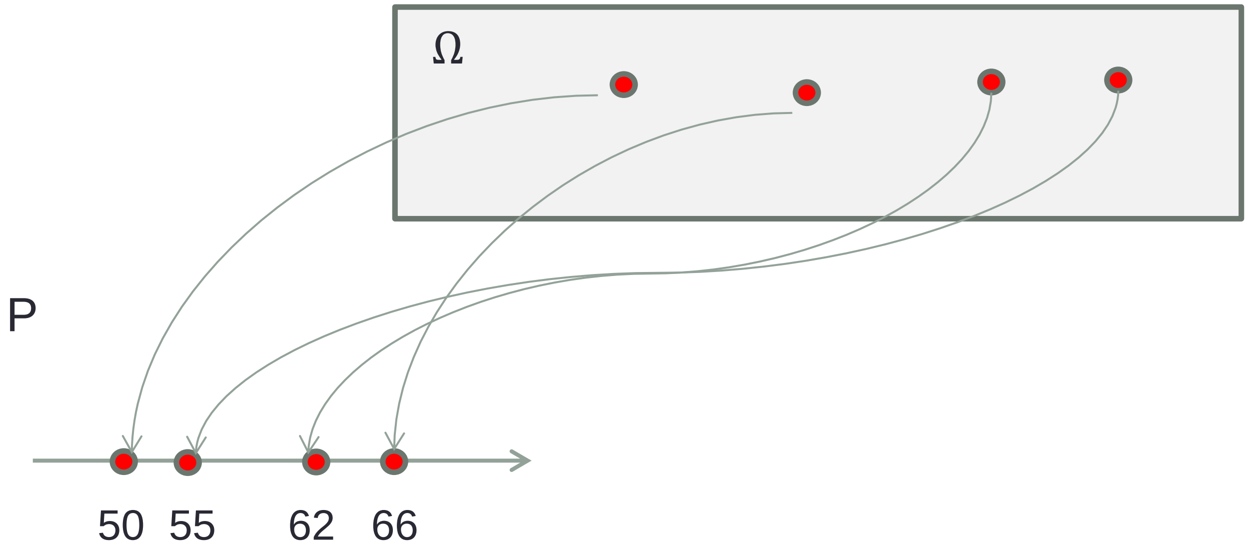
Variável aleatória

- Definição informal
  - Variável numérica que assume valores a depender do resultado de um evento probabilístico.



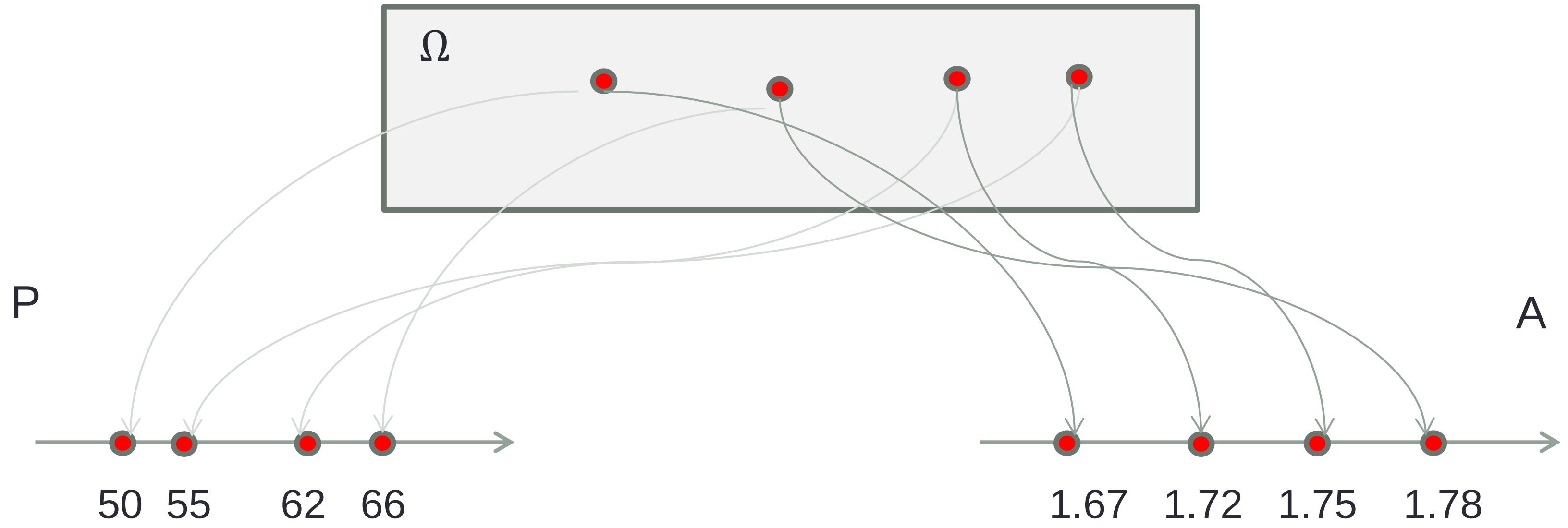
Variável aleatória

- Definição informal
  - Variável numérica que assume valores a depender do resultado de um evento probabilístico.



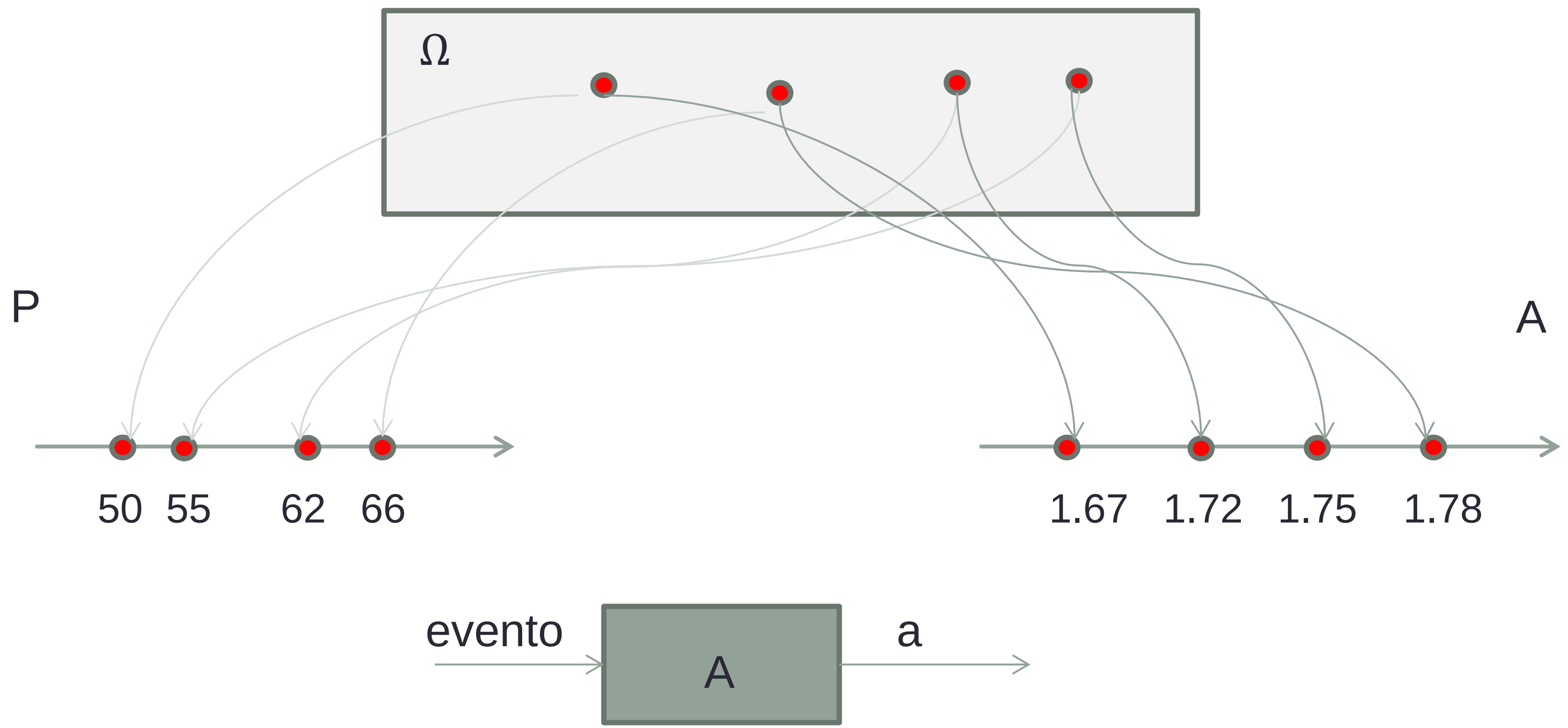
Variável aleatória

- Definição informal
  - Variável numérica que assume valores a depender do resultado de um evento probabilístico.



Variável aleatória

- Definição informal
  - Variável numérica que assume valores a depender do resultado de um evento probabilístico.



Variável aleatória

- Definição formal
  - Uma variável aleatória associa um valor numérico a cada possível evento
    - Funções que mapeiam do espaço amostral para os reais
  - Pode assumir valores discretos ou contínuos

Variável aleatória

- Definição formal
  - Uma variável aleatória associa um valor numérico a cada possível evento
    - Funções que mapeiam do espaço amostral para os reais
  - Pode assumir valores discretos ou contínuos

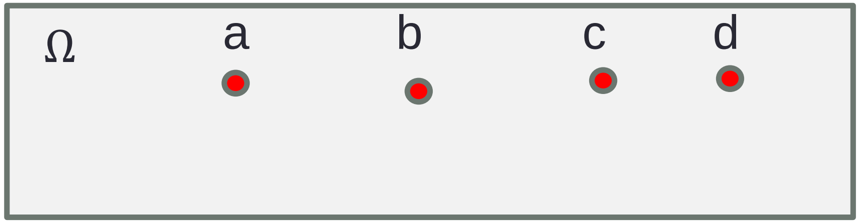
Variável aleatória: X   valor numérico: x

Distribuição de Probabilidade

- Descrição da variável aleatória
- Distribuição de probabilidade ou função massa de probabilidade
- Eventos tem probabilidade diferentes – valores numéricos tem probabilidades diferentes

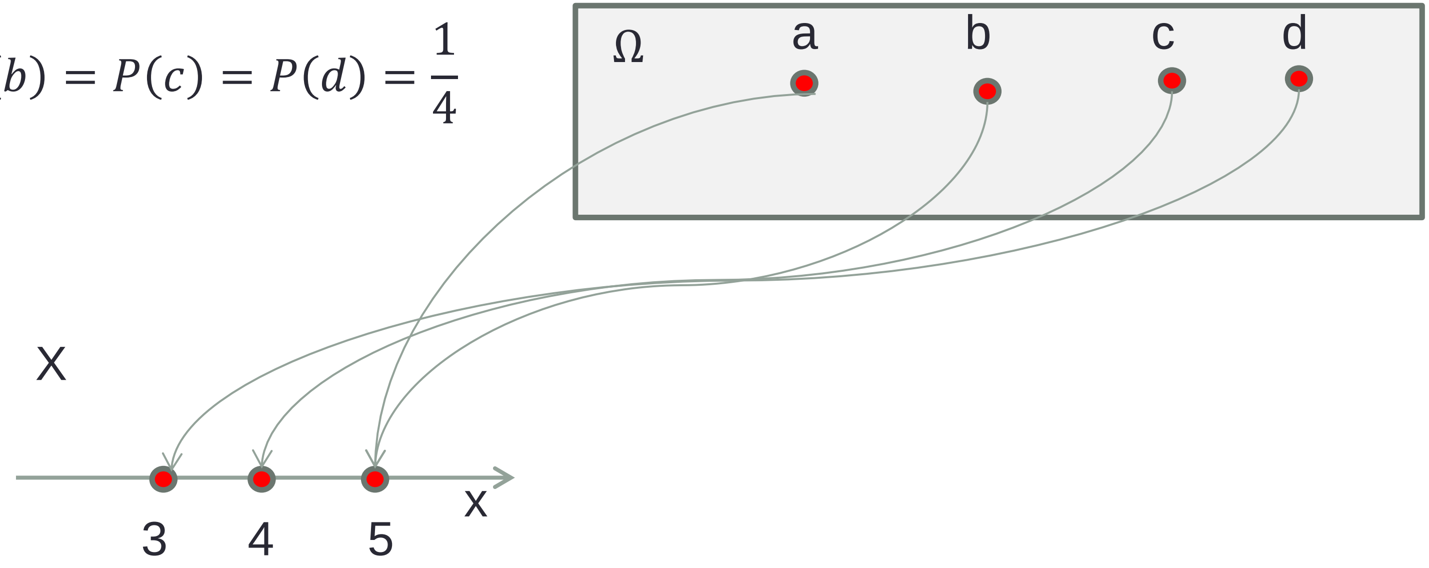
Distribuição de Probabilidade

$$P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = \frac{1}{4}$$



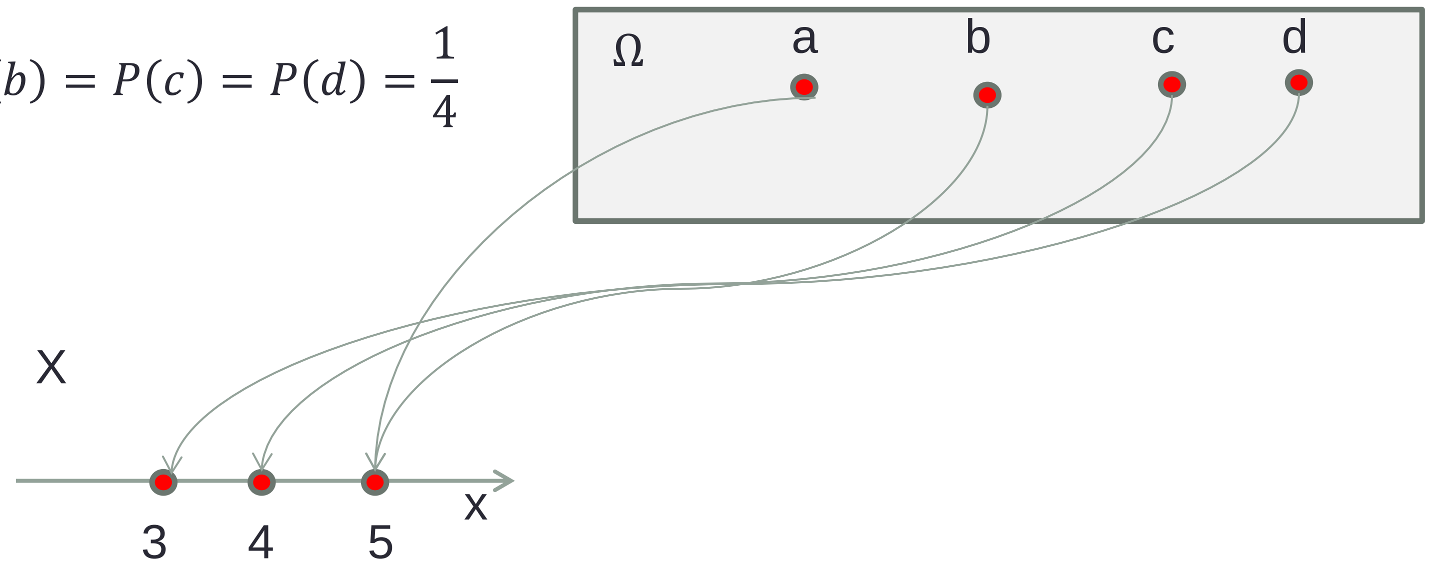
Distribuição de Probabilidade

$$P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = \frac{1}{4}$$



Distribuição de Probabilidade

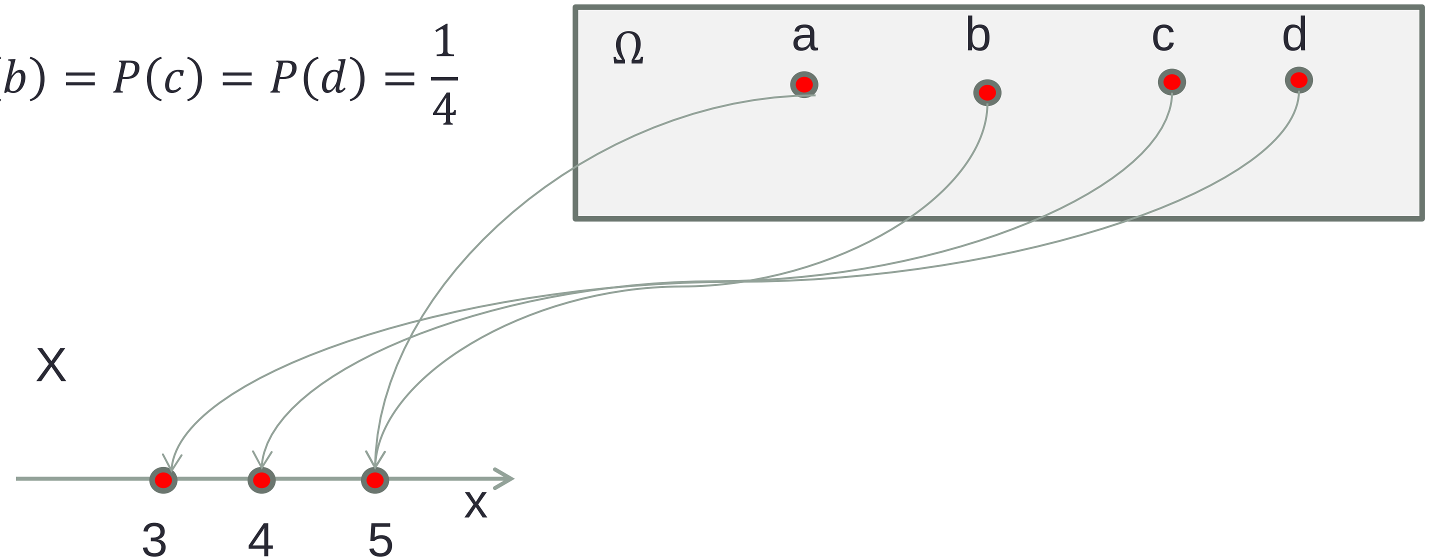
$$P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = \frac{1}{4}$$



- $x = 5$
- $\{\omega : X(\omega) = 5\} = \{a, b\}$
- $p_X(5) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

Distribuição de Probabilidade

$$P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = \frac{1}{4}$$

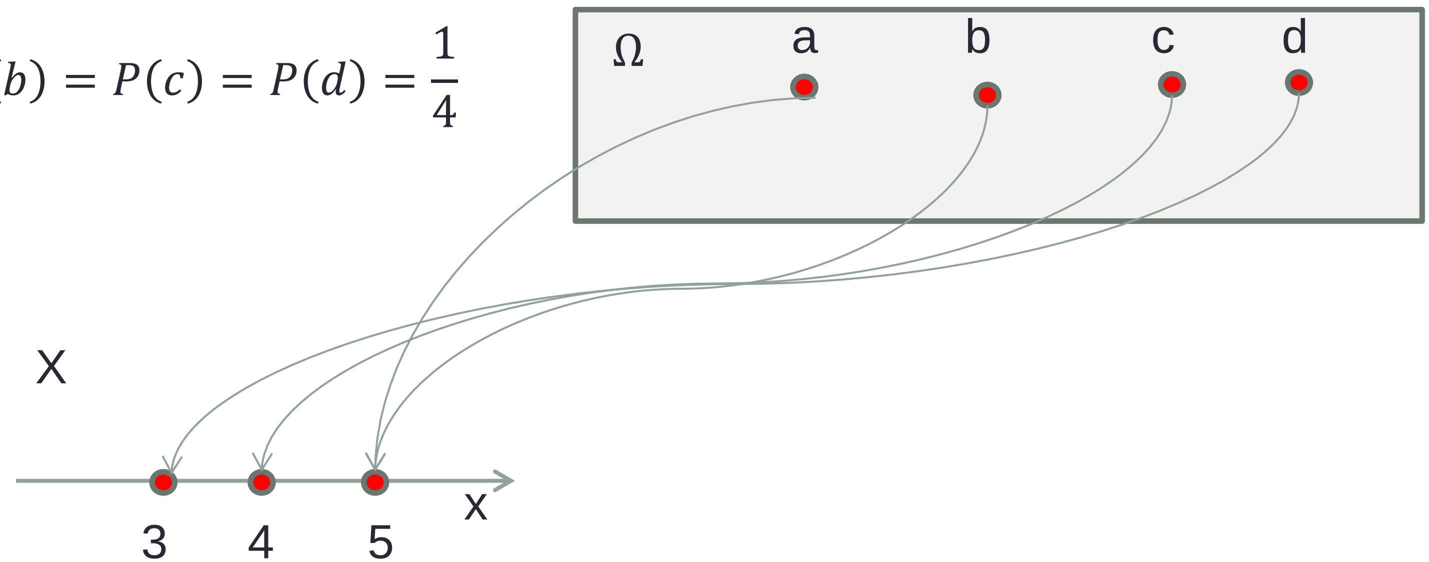


$$p_X(x) = P(X = x) = P(\{\omega \in \Omega \;\; s.t \;\; X(\omega) = x\})$$

- $x = 5$
- $\{\omega : X(\omega) = 5\} = \{a, b\}$
- $p_X(5) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

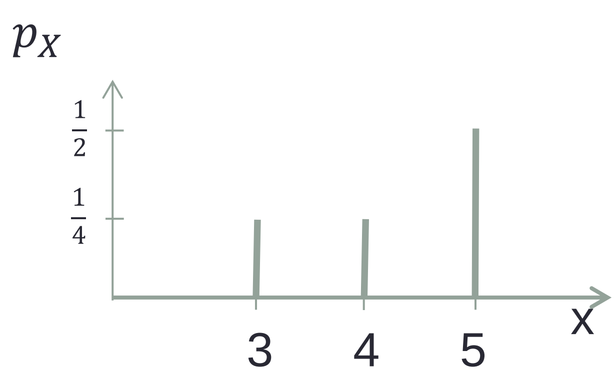
Distribuição de Probabilidade

$$P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = \frac{1}{4}$$



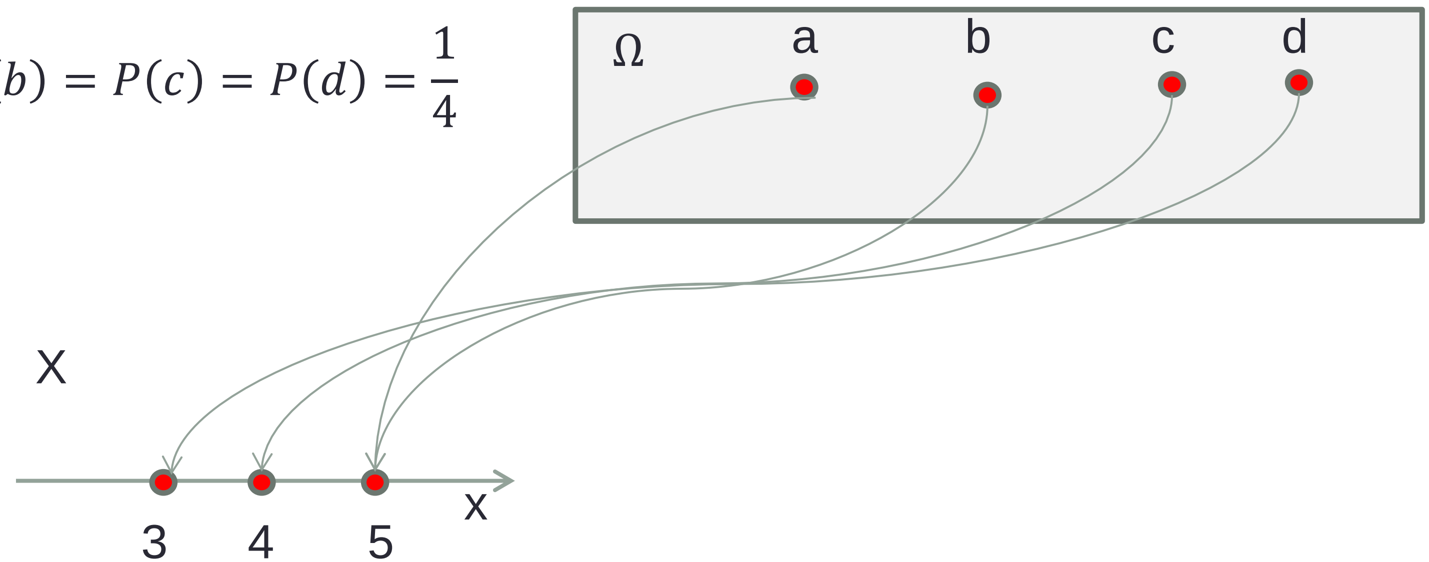
$$p_X(x) = P(X = x) = P(\{\omega \in \Omega \;\; s.t \;\; X(\omega) = x\})$$

- $x = 5$
- $\{\omega: X(\omega) = 5\} = \{a, b\}$
- $p_X(5) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$



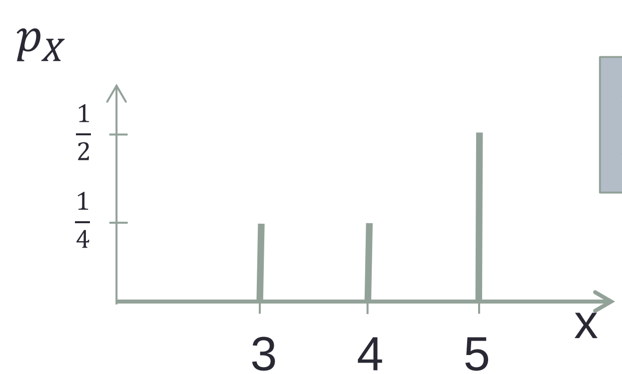
Distribuição de Probabilidade

$$P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = \frac{1}{4}$$



$$p_X(x) = P(X = x) = P(\{\omega \in \Omega \ \ s.t \ \ X(\omega) = x\})$$

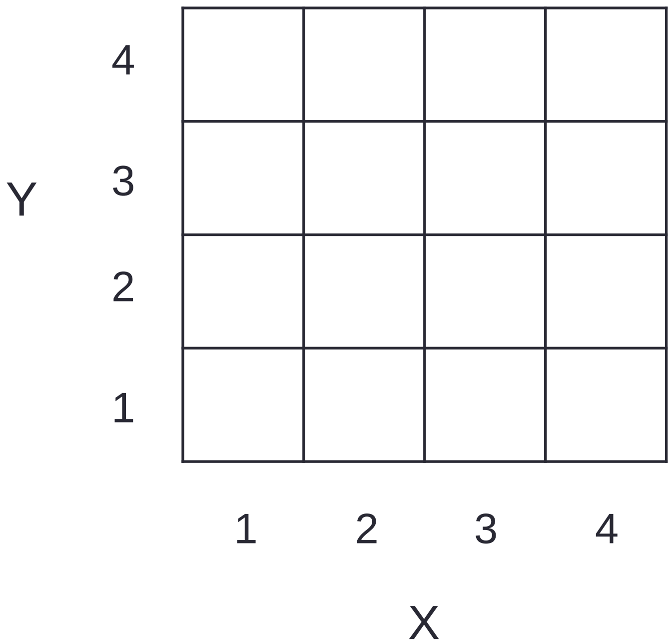
- $x = 5$
- $\{\omega: X(\omega) = 5\} = \{a, b\}$
- $p_X(5) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$



- $p_X(x) \geq 0$
- $\sum_x p_X(x) = 1$

Calculando a distribuição de probabilidade

- $Z = X + Y$



Calculando a distribuição de probabilidade

- $Z = X + Y$

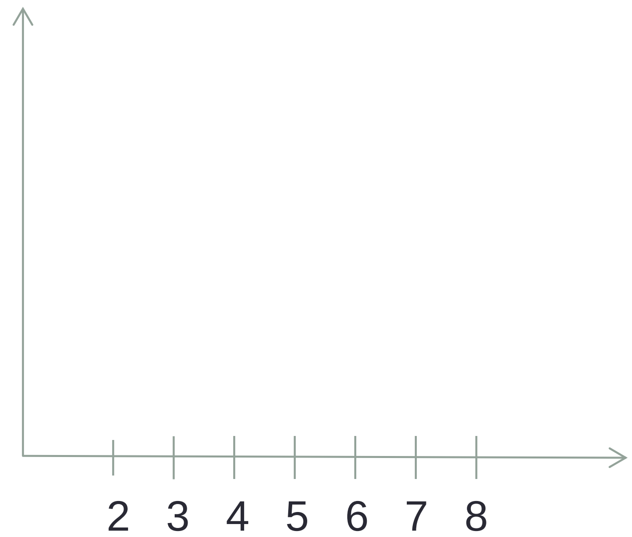
Y		1	2	3	4
	4	5	6	7	8
	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6
	1	2	3	4	5
		1	2	3	4
			X		

Calculando a distribuição de probabilidade

- Z = X + Y

Encontrar $p_Z(z)$

Y		X = 1	X = 2	X = 3	X = 4
	4	5	6	7	8
	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6
	1	2	3	4	5

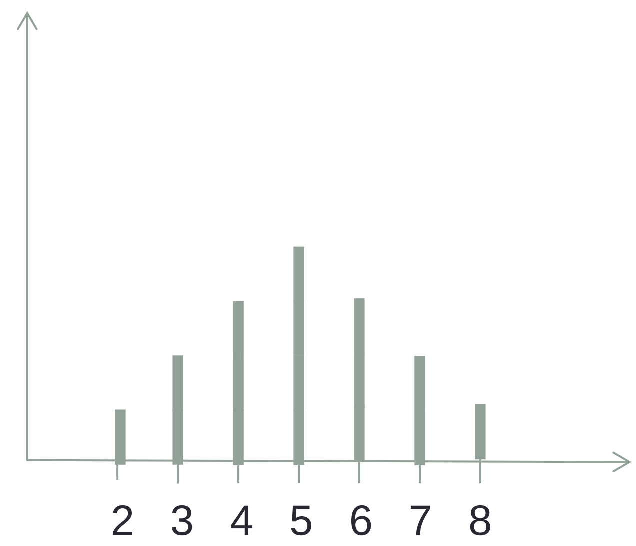


Calculando a distribuição de probabilidade

- Z = X + Y

Y \ X	1	2	3	4
4	5	6	7	8
3	4	5	6	7
2	3	4	5	6
1	2	3	4	5

Encontrar $p_Z(z)$

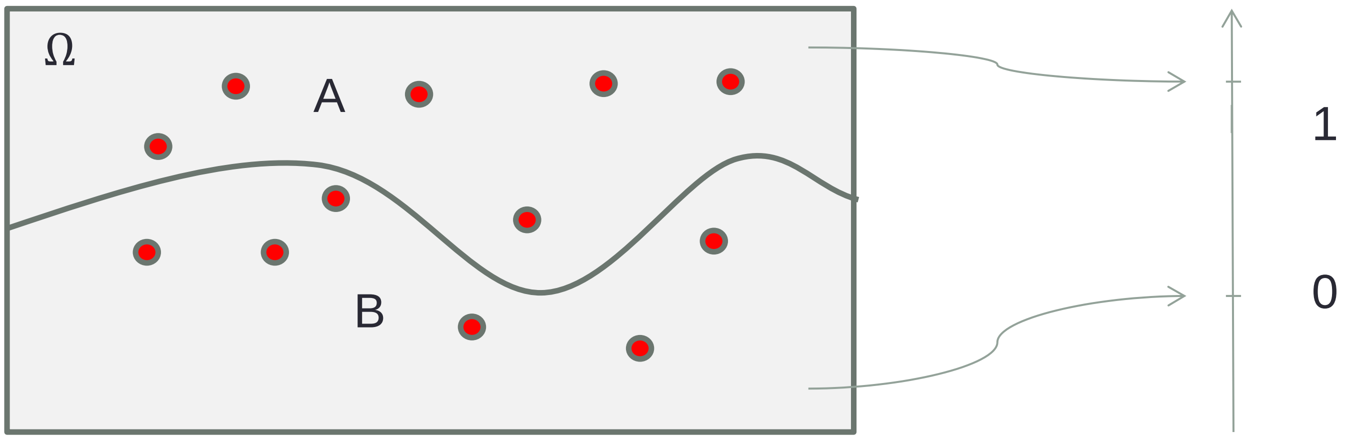


Variável aleatória Bernoulli

- Variável aleatória que assume valores 0 ou 1
  - $p_X(1) = p$ e $p_X(0) = 1 - p$

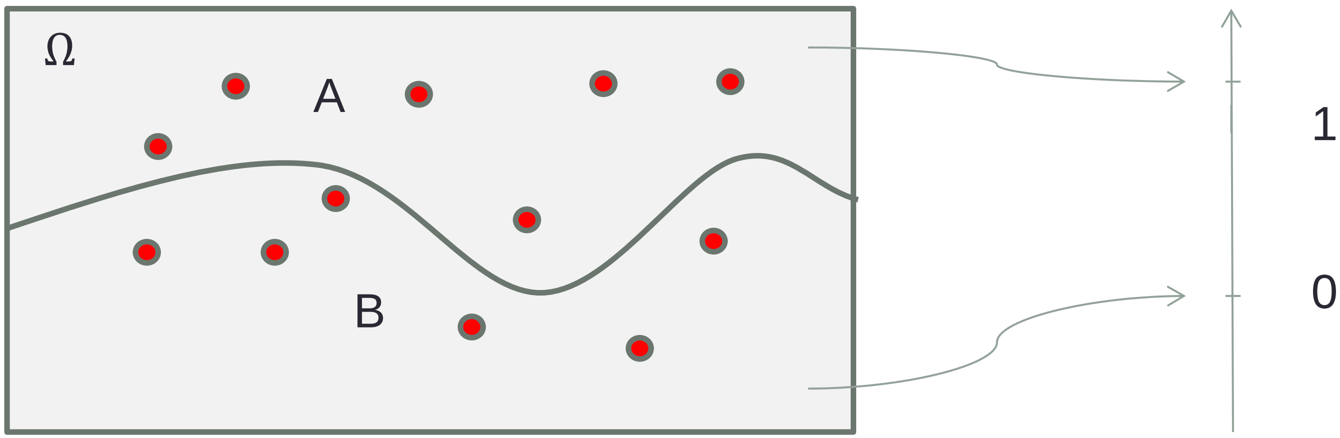
Variável aleatória Bernoulli

- Variável aleatória que assume valores 0 ou 1
  - $p_X(1) = p$ e $p_X(0) = 1 - p$



Variável aleatória Bernoulli

- Variável aleatória que assume valores 0 ou 1
  - $p_X(1) = p$ e $p_X(0) = 1 - p$



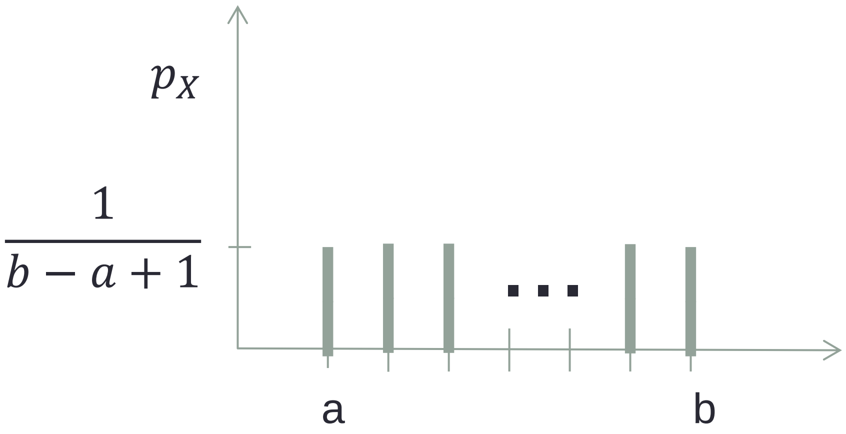
$$p_X(1) = P(A) = p$$

Variável aleatória uniforme

- Parâmetros a e b

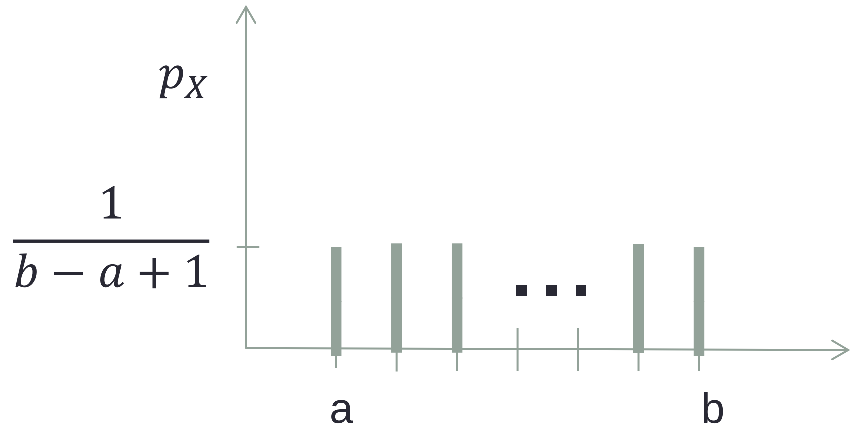
Variável aleatória uniforme

- Parâmetros a e b



Variável aleatória uniforme

- Parâmetros a e b
- $a \leq b$
- Valores equiprováveis
- b-a+1 possíveis valores

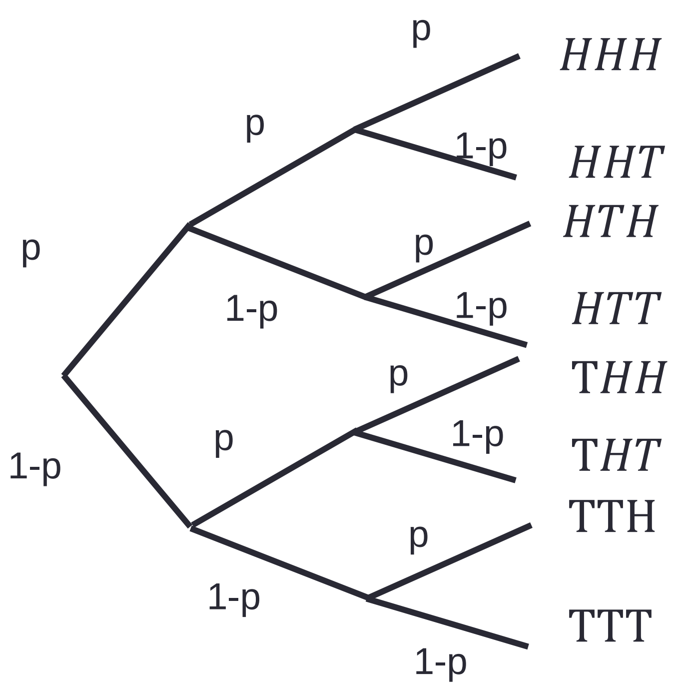


Variável aleatória binomial

- Experimento: n lançamentos de uma moeda $P(H) = p$
- Parâmetros: p e n
- Espaço amostral: sequências de H e T de tamanho n
- Variável aleatória: número de H

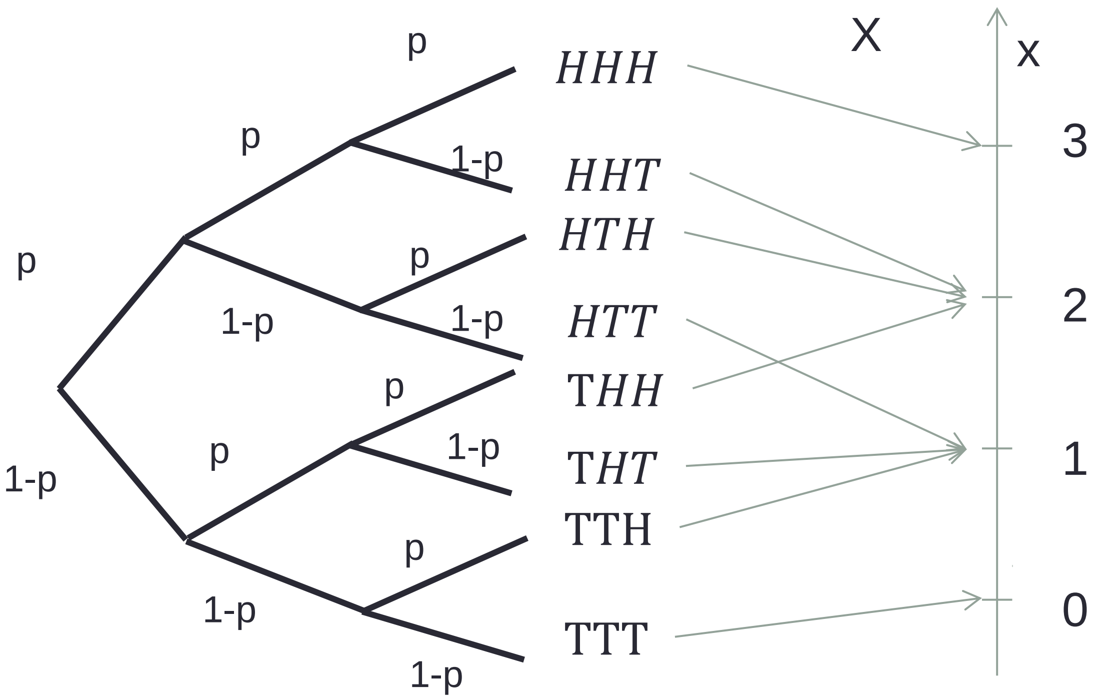
Variável aleatória binomial

- Experimento: n lançamentos de uma moeda P(H) = p
- Parâmetros: p e n
- Espaço amostral: sequências de H e T de tamanho n
- Variável aleatória: número de H



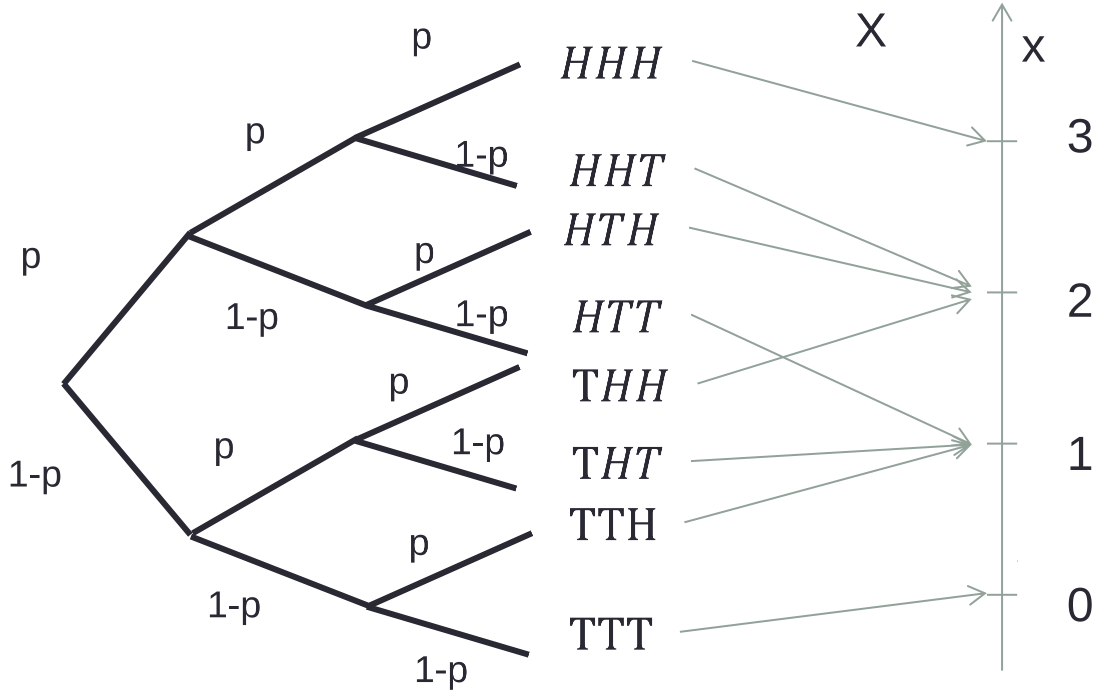
Variável aleatória binomial

- Experimento: n lançamentos de uma moeda P(H) = p
- Parâmetros: p e n
- Espaço amostral: sequências de H e T de tamanho n
- Variável aleatória: número de H



Variável aleatória binomial

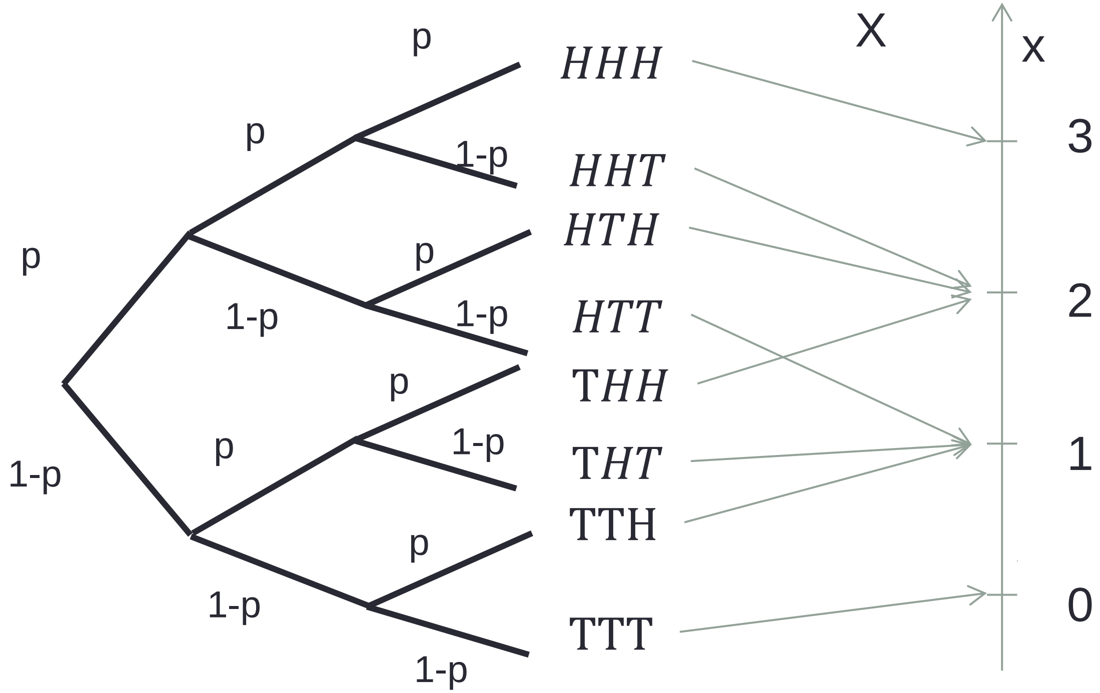
- Experimento: n lançamentos de uma moeda P(H) = p
- Parâmetros: p e n
- Espaço amostral: sequências de H e T de tamanho n
- Variável aleatória: número de H



Utilizada para modelar o número de sucessos em jogadas independentes

Variável aleatória binomial

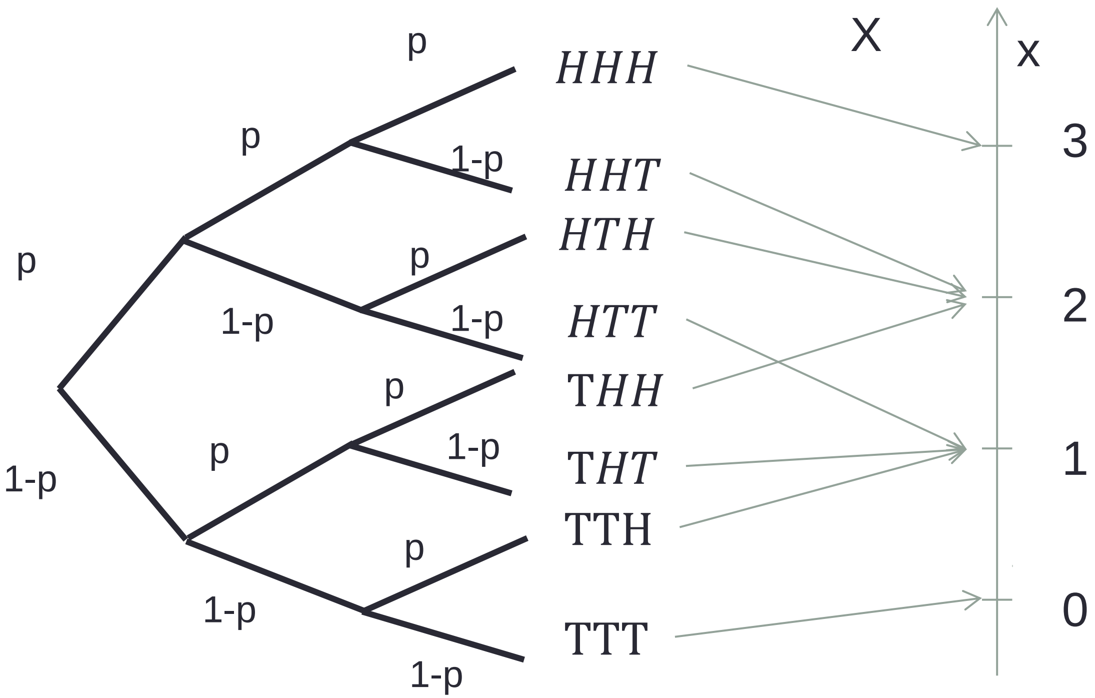
- Experimento: n lançamentos de uma moeda P(H) = p
- Parâmetros: p e n
- Espaço amostral: sequências de H e T de tamanho n
- Variável aleatória: número de H



$p_X(2) =$

Variável aleatória binomial

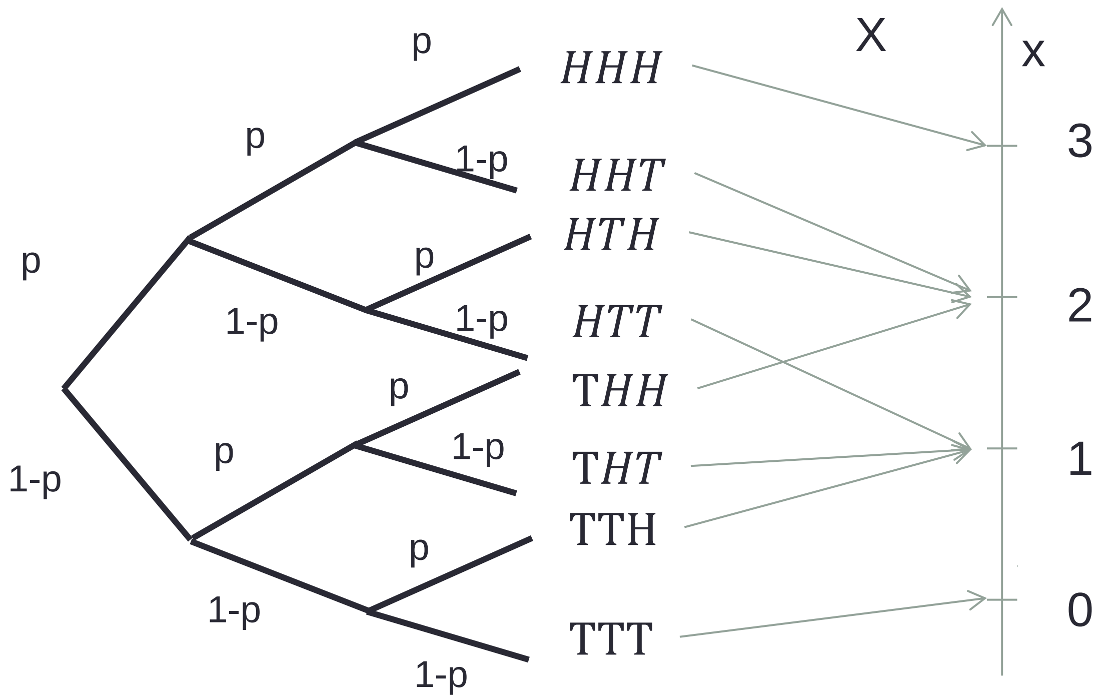
- Experimento: n lançamentos de uma moeda P(H) = p
- Parâmetros: p e n
- Espaço amostral: sequências de H e T de tamanho n
- Variável aleatória: número de H



$$p_X(2) = P(HHT) + P(HTH) + P(THH)$$

Variável aleatória binomial

- Experimento: n lançamentos de uma moeda P(H) = p
- Parâmetros: p e n
- Espaço amostral: sequências de H e T de tamanho n
- Variável aleatória: número de H

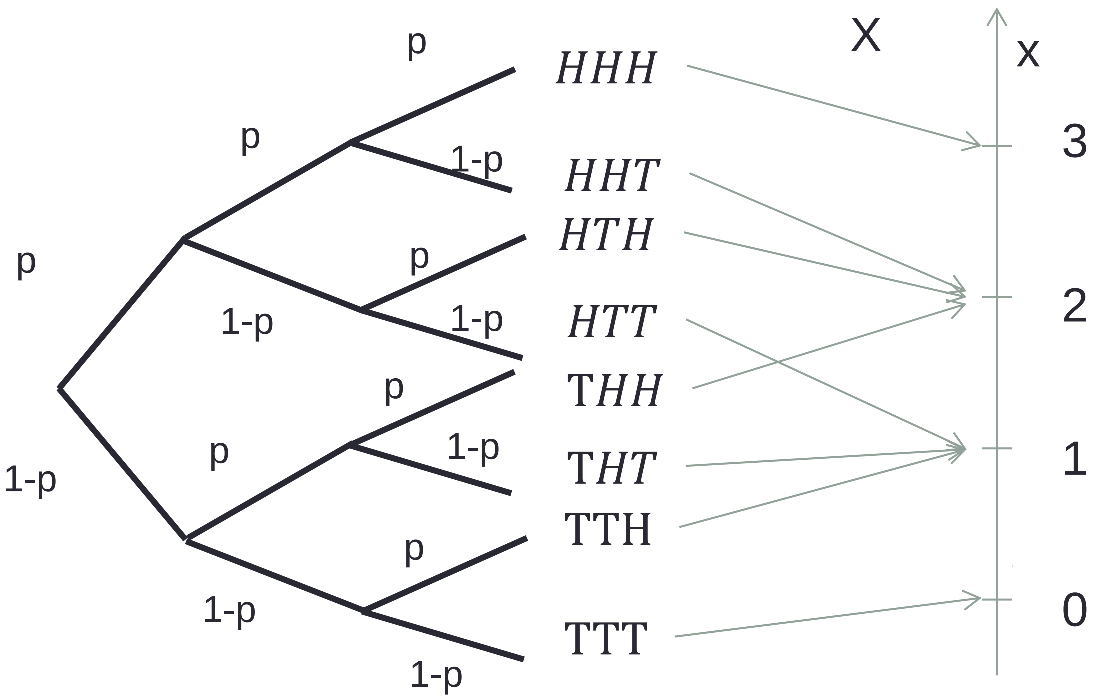


$$p_X(2) = P(HHT) + P(HTH) + P(THH)$$

$$p_X(2) = 3p^2(1-p) = \binom{3}{2} p^2(1-p)$$

Variável aleatória binomial

- Experimento: n lançamentos de uma moeda P(H) = p
- Parâmetros: p e n
- Espaço amostral: sequências de H e T de tamanho n
- Variável aleatória: número de H



$$p_X(2) = P(HHT) + P(HTH) + P(THH)$$

$$p_X(2) = 3p^2(1-p) = \binom{3}{2} p^2(1-p)$$

$$\boxed{p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}$$

Variável aleatória geométrica

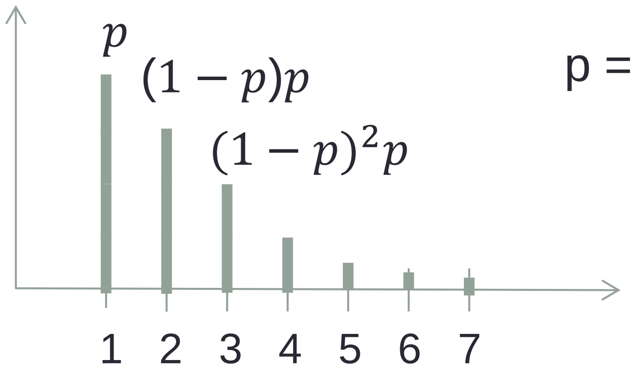
- Experimento: lançamento (independentes) de uma moeda infinitas vezes $P(H) = p$
- Espaço amostral: Sequencias de H e T de tamanho infinito
- Variável aleatória: numero de jogadas até a primeira H
- Utilizado para modelar: tempo de espera, numero de tentativas até o sucesso ...

Variável aleatória geométrica

- Experimento: lançamento (independentes) de uma moeda infinitas vezes P(H) = p
- Espaço amostral: Sequencias de H e T de tamanho infinito
- Variável aleatória: numero de jogadas até a primeira H
- Utilizado para modelar: tempo de espera, numero de tentativas até o sucesso ...
- $p_X(k) = P(X = k) = P(TT \ldots TH) = (1-p)^{k-1}p$

Variável aleatória geométrica

- Experimento: lançamento (independentes) de uma moeda infinitas vezes P(H) = p
- Espaço amostral: Sequencias de H e T de tamanho infinito
- Variável aleatória: numero de jogadas até a primeira H
- Utilizado para modelar: tempo de espera, numero de tentativas até o sucesso ...
- $p_X(k) = P(X = k) = P(TT \ldots TH) = (1-p)^{k-1}p$



p = 1/3

Valor Esperado

- Descrição de uma variável aleatória
- Exemplo
  - Cada rodada de um jogo
    - $X = 1 \quad P(X=1) = 0.2$
    - $X = 2 \quad P(X=2) = 0.5$
    - $X = 4 \quad P(X=4) = 0.3$
- Quantos pontos você espera ter ao final do jogo?

Valor Esperado

- Descrição de uma variável aleatória
- Exemplo
    - Cada rodada de um jogo
        - X = 1   P(X=1) = 0.2
        - X = 2   P(X=2) = 0.5
        - X = 4   P(X=4) = 0.3
- Quantos pontos você espera ter ao final do jogo?
- Pontuação média
    - $\frac{1x200+2x500+4x300}{1000} = 1x0.2 + 2x0.5 + 4x0.3$

Valor Esperado

- Descrição de uma variável aleatória
- Exemplo
  - Cada rodada de um jogo
    - X = 1   P(X=1) = 0.2
    - X = 2   P(X=2) = 0.5
    - X = 4   P(X=4) = 0.3
- Quantos pontos você espera ter ao final do jogo?
- Pontuação média
  - $\frac{1x200+2x500+4x300}{1000} = 1x0.2 + 2x0.5 + 4x0.3$

$$E[X] = \sum_{x} x \, p_X(x)$$

Valor Esperado de uma v.a. Bernoulli

- $P(X=1) = p$ e $P(X=0) = 1-p$

Valor Esperado de uma v.a. Bernoulli

- P(X=1) = p e P(X=0) = 1-p
- $E[X] = 1\,p + 0(1 - p) = p$

Valor Esperado de uma v.a. uniforme

- Uniforme em 0,1, ... ,n

Valor Esperado de uma v.a. uniforme

- Uniforme em 0,1, ... ,n
- $E[X] = 0\,\frac{1}{n+1} + 1\,\frac{1}{n+1} + \cdots n\,\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n}{2}$

Propriedades do valor esperado

- Se $X \geq 0$ então $E[X] \geq 0$

$$E[X] = \sum_{x} x\, p_X(x)$$

Propriedades do valor esperado

$$E[X] = \sum_x x\, p_X(x)$$

- Se $X \geq 0$ então $E[X] \geq 0$
- Se $\mathrm{a} \leq X \leq b$ então $\mathrm{a} \leq E[X] \leq b$

Propriedades do valor esperado

- Se $X \geq 0$ então $E[X] \geq 0$
- Se $a \leq X \leq b$ então $a \leq E[X] \leq b$
- $E[c] = c$

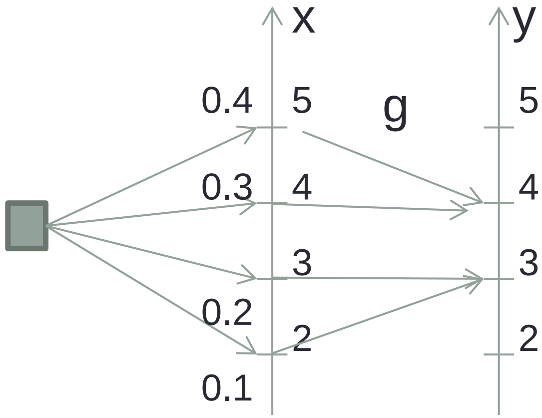
$$E[X] = \sum_x x \, p_X(x)$$

Valor esperado de uma função de uma v.a.

- Seja X uma v.a e seja $\mathrm{Y} = g(X)$

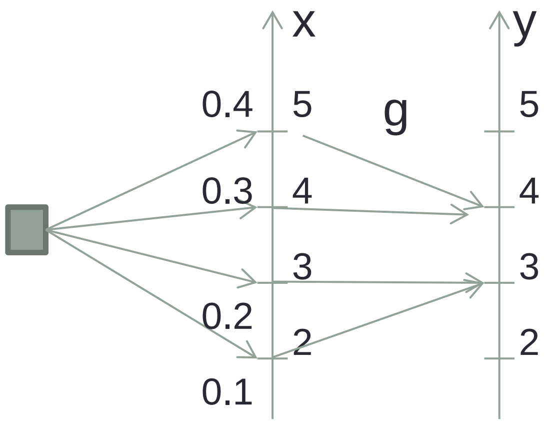
Valor esperado de uma função de uma v.a.

- Seja X uma v.a e seja $Y = g(X)$
- Como calcular E[Y]



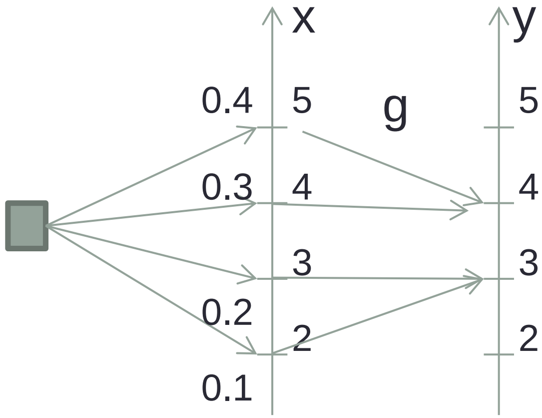
Valor esperado de uma função de uma v.a.

- Seja X uma v.a e seja $\mathrm{Y} = g(X)$
- Como calcular E[Y]
  - $E[Y] = \sum_y y\, p_Y(y)$



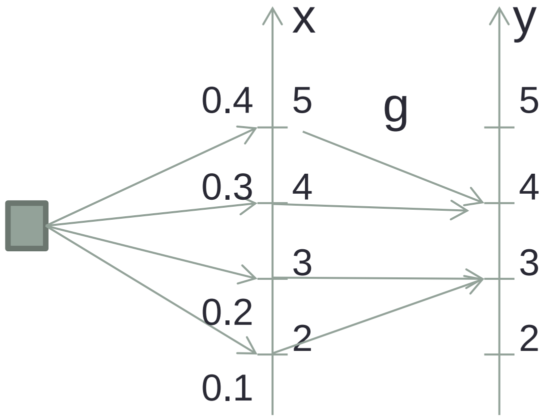
Valor esperado de uma função de uma v.a.

- Seja X uma v.a e seja $\mathrm{Y} = g(X)$
- Como calcular E[Y]
  - $E[Y] = \sum_y y\, p_Y(y)$
  - $E[Y] = 3x0.3 + 4x0.7$



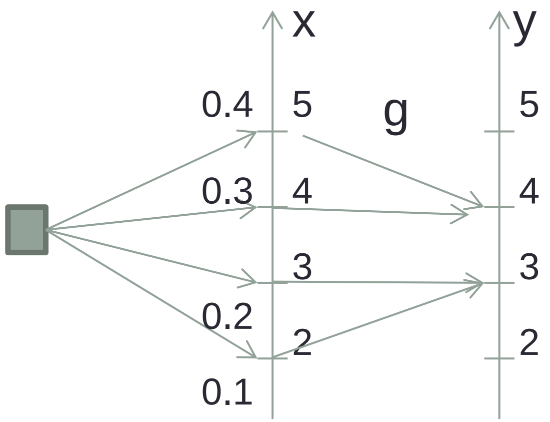
Valor esperado de uma função de uma v.a.

- Seja X uma v.a e seja $\mathrm{Y} = g(X)$
- Como calcular E[Y]
  - $E[Y] = \sum_y y\, p_Y(y)$
  - $E[Y] = 3x0.3 + 4x0.7$
    - Calculando os valores em y



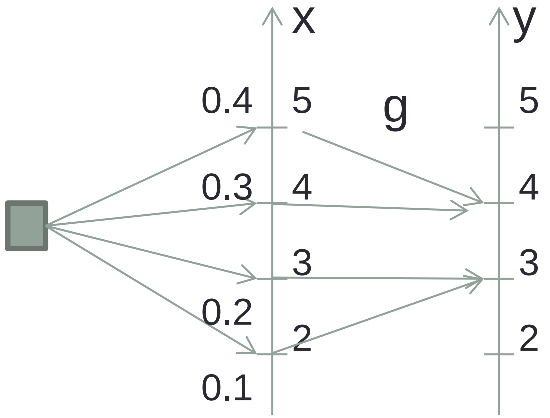
Valor esperado de uma função de uma v.a.

- Seja X uma v.a e seja $\mathrm{Y} = g(X)$
- Como calcular E[Y]
  - $E[Y] = \sum_y y\, p_Y(y)$
  - $E[Y] = 3x0.3 + 4x0.7$
    - Calculando os valores em y
  - Calculando os valores em x
    - $E[Y] = 3x0.1 + 3x0.2 + 4x0.3 + 4x0.4$



Valor esperado de uma função de uma v.a.

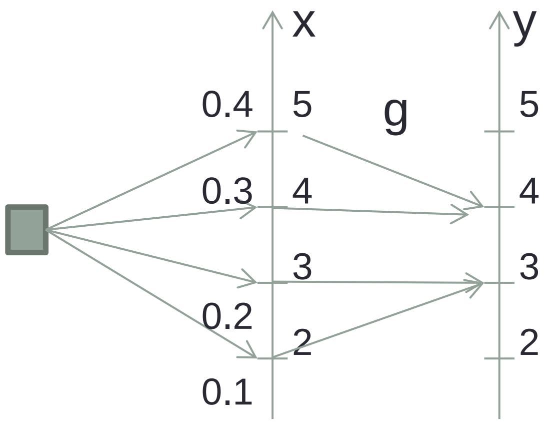
- Seja X uma v.a e seja $\mathrm{Y} = g(X)$
- Como calcular E[Y]
  - $E[Y] = \sum_y y\, p_Y(y)$
  - $E[Y] = 3x0.3 + 4x0.7$
    - Calculando os valores em y
  - Calculando os valores em x
    - $E[Y] = 3x0.1 + 3x0.2 + 4x0.3 + 4x0.4$



$$E[Y] = E[g(X)] = \sum_x g(x)\, p_X(x)$$

Prova

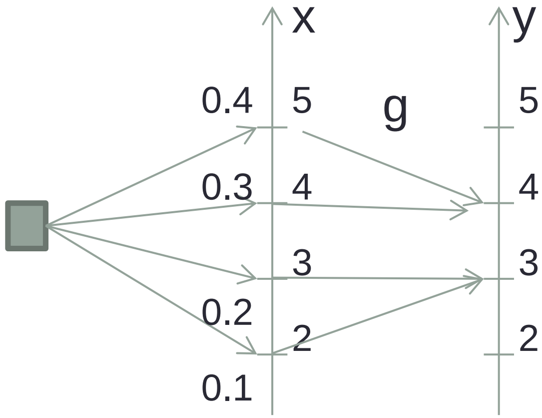
- $E[Y] = E[g(X)] = \sum_x g(x)\, p_X(x)$



Prova

- $E[Y] = E[g(X)] = \sum_x g(x)\, p_X(x)$

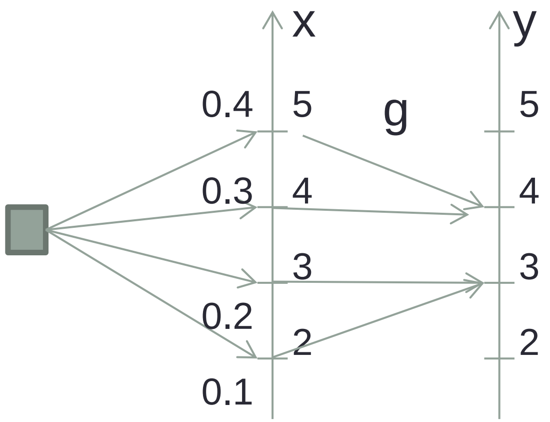
- $\sum_y \sum_{x:g(x)=y} g(x)\, p_X(x)$



Prova

- $E[Y] = E[g(X)] = \sum_x g(x)\, p_X(x)$

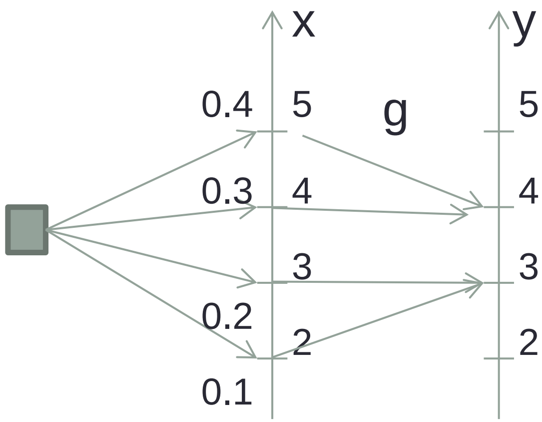
- $\sum_y \sum_{x:g(x)=y} g(x)\, p_X(x)$
- $\sum_y \sum_{x:g(x)=y} y\, p_X(x)$



Prova

- $E[Y] = E[g(X)] = \sum_x g(x)\, p_X(x)$

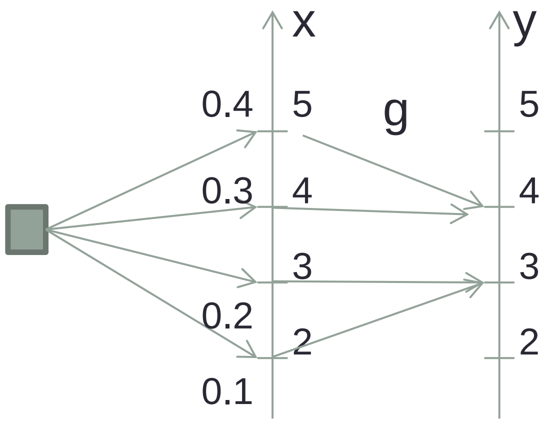
- $\sum_y \sum_{x:g(x)=y} g(x)\, p_X(x)$
- $\sum_y \sum_{x:g(x)=y} y\, p_X(x)$
- $\sum_y y \sum_{x:g(x)=y} p_X(x)$



Prova

- $E[Y] = E[g(X)] = \sum_x g(x)\, p_X(x)$

- $\sum_y \sum_{x:g(x)=y} g(x)\, p_X(x)$
- $\sum_y \sum_{x:g(x)=y} y\, p_X(x)$
- $\sum_y y \sum_{x:g(x)=y} p_X(x)$
- $\sum_y y\, p_Y(y)$



Linearidade de Esperanças

- $E[aX + b] = a\,E[X] + b$

Linearidade de Esperanças

- $E[aX + b] = a\,E[X] + b$
- Prova
  - $E[g(X)] = \sum_x g(x)\, p_X(x)$
  - $E[g(X)] = \sum_x (ax + b) p_X(x)$
  - $E[g(X)] = a \sum_x x p_X(x) + b \sum_x p_X(x)$
  - $E[g(X)] = aE[X] + b\ 1$

DÚVIDAS?