PROBABILIDADE E PROCESSOS ESTOCÁSTICOS (CKP7366)

Prof. João Paulo Pordeus Gomes

VARIÁVEIS ALEATÓRIAS CONTÍNUAS (AULA 1)

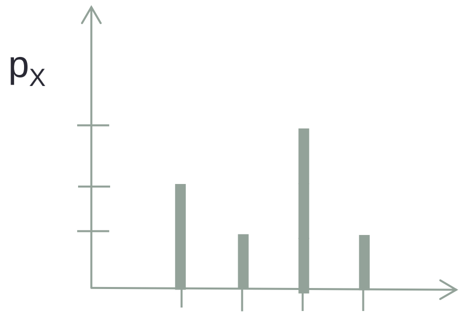
Variáveis aleatórias contínuas

- v.a contínuas
  - Diversas variáveis são naturalmente modeladas como v.a. continuas
  - Cálculo (somatórios -> Integrais)
- Mesma abordagem para o caso discreto
  - Definições, notação
  - Propriedades do valor esperado e da variância
  - Condicionamento e independência
  - Teoremas da probabilidade total e esperança total

v.a. contínuas e Funções Densidade de Probabilidade (PDF)

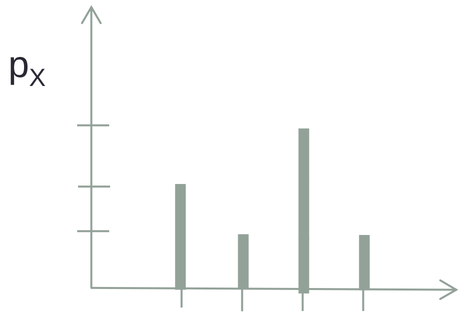
- Função densidade de probabilidade
  - Propriedades
  - Exemplos
- Esperança e suas propriedades
  - Regra do valor esperado
  - Linearidade
- Variância e suas propriedades
- V.a. uniforme e exponencial
- Função distribuição acumulada (CDF)
- V.a. Normal
  - Esperança e variância
  - Linearidade

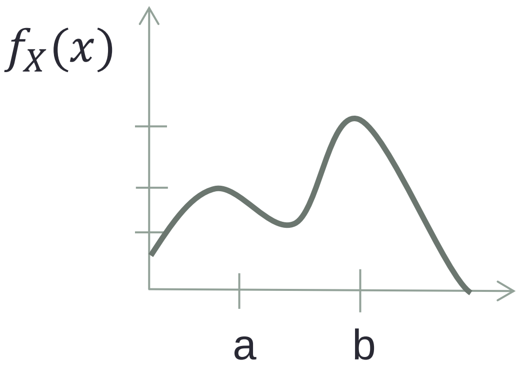
Função densidade de probabilidade (PDF)



$$P(a \leq X \leq b) = \sum_{x: a \leq x \leq b} p_X(x)$$

Função densidade de probabilidade (PDF)

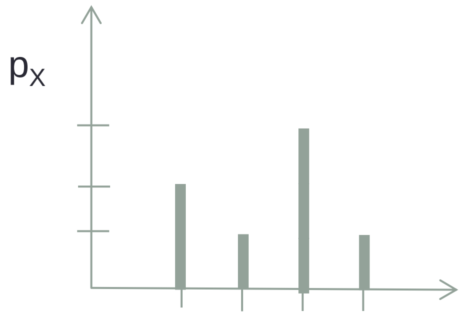


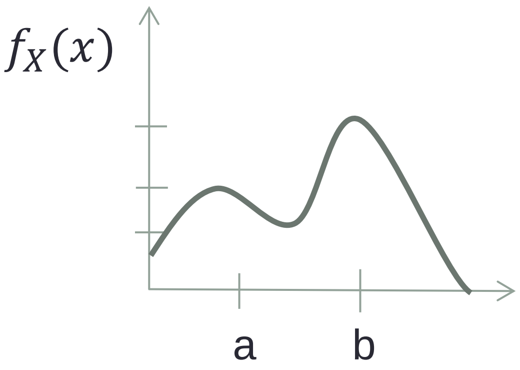


$$P(a \leq X \leq b) = \sum_{x:a\leq x\leq b} p_X(x)$$

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x)dx$$

Função densidade de probabilidade (PDF)





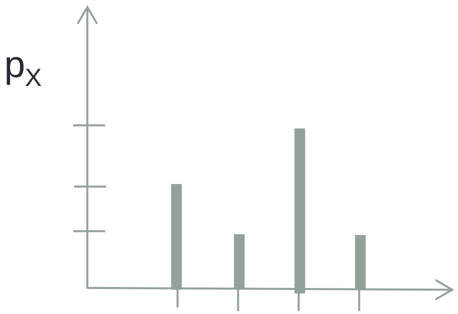
$$P(a \leq X \leq b) = \sum_{x: a \leq x \leq b} p_X(x)$$

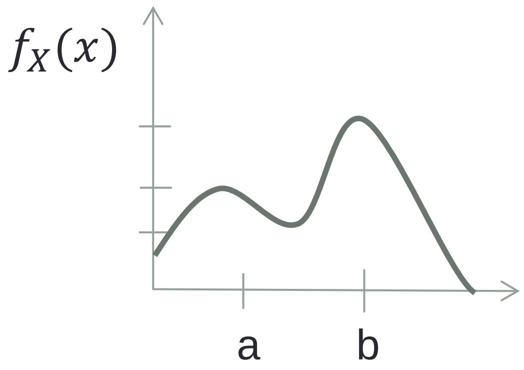
- $p_X(x) \geq 0$
- $\sum_x p_X(x) = 1$

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x)dx$$

- $f_X(x) \geq 0$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$

Função densidade de probabilidade (PDF)





$$P(a \leq X \leq b) = \sum_{x: a \leq x \leq b} p_X(x)$$

- $p_X(x) \geq 0$
- $\sum_x p_X(x) = 1$

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx$$

- $f_X(x) \geq 0$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$

Uma variável aleatória é continua se esta puder ser descrita pela sua PDF

Exercício

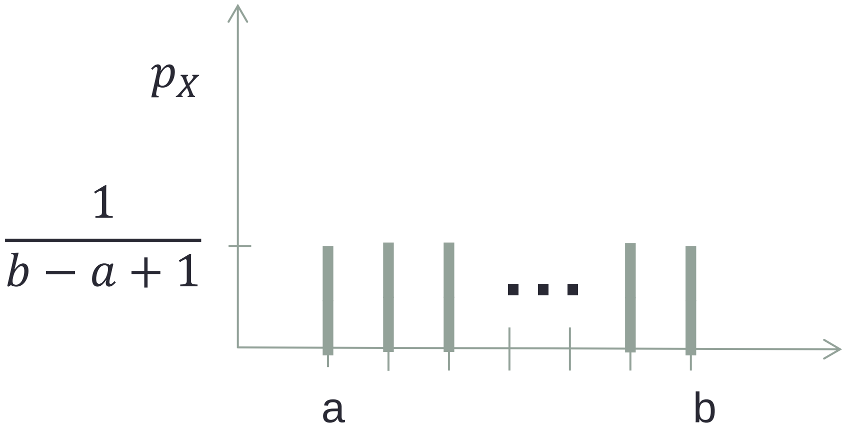
- Seja X uma v.a continua cuja PDF é dada por:
- $f_X(x) = \begin{cases} c(1-x), & se\ x \in [0,1], \\ 0, & caso\ contrário \end{cases}$
- Encontre os valores de:

a) c

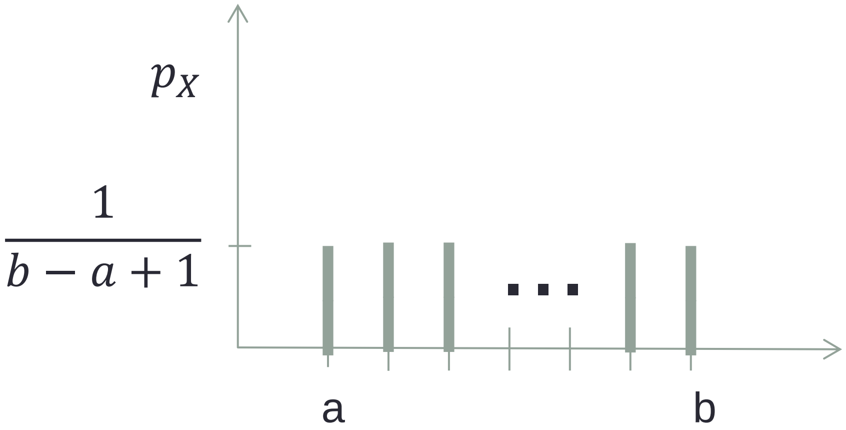
b) P(X=0.5)

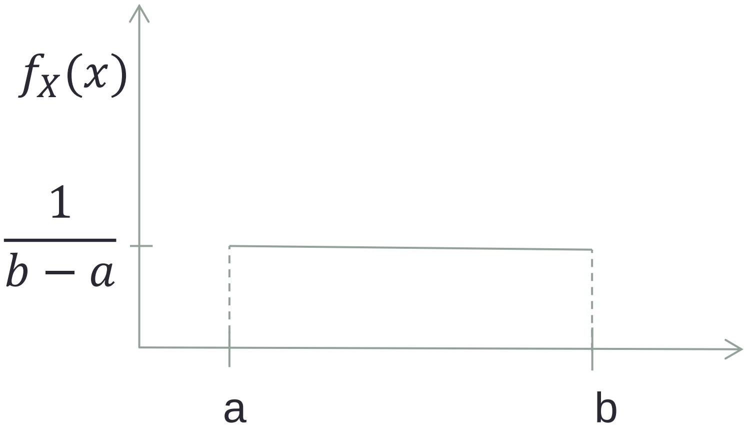
c) P(X<0.5)

Distribuição Uniforme

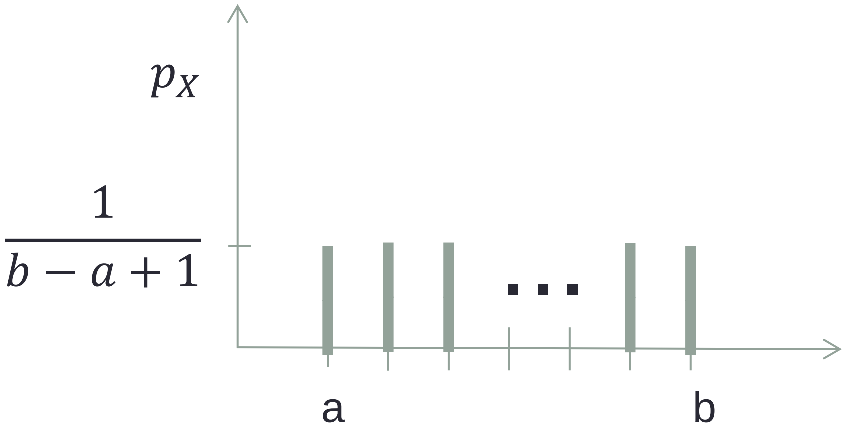


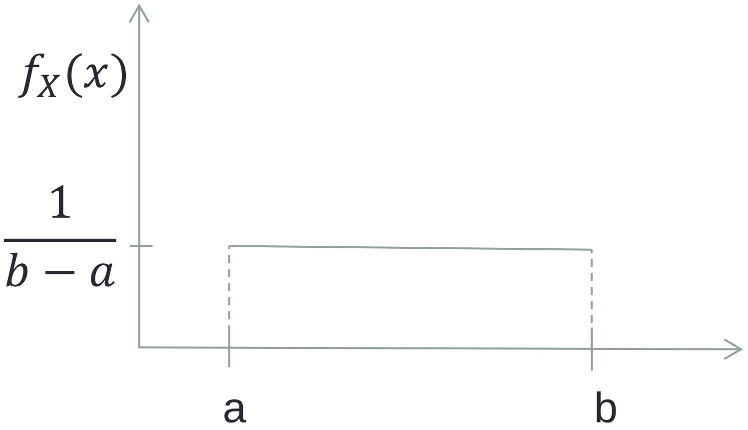
Distribuição Uniforma



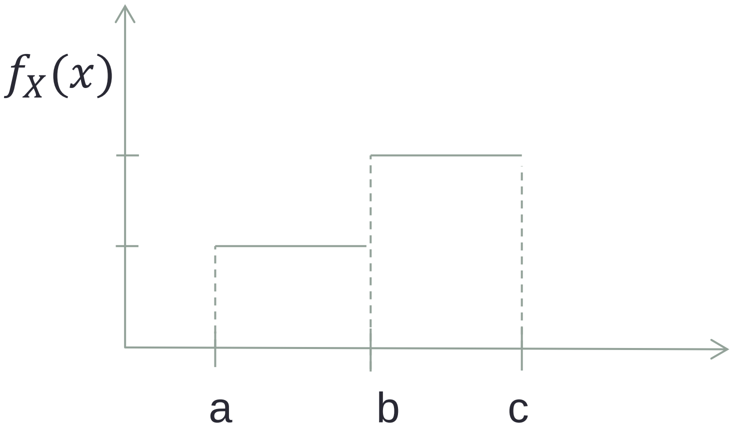


Distribuição Uniforme

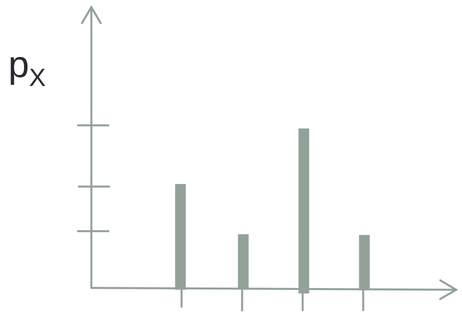




PDF constante por partes

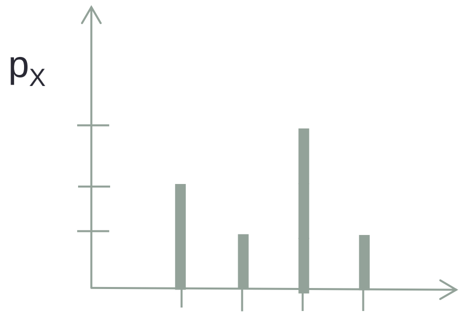


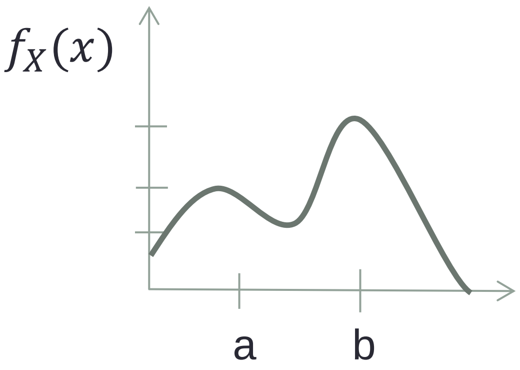
Esperança e Variância de uma v.a. contínua



$$E[X] = \sum_{x} x p_X(x)$$

Esperança e Variância de uma v.a. contínua





$$E[X] = \sum_x x p_X(x)$$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$$

Propriedades da Esperança

- Se $X \geq 0$ então $E[X] \geq 0$
- Se $\mathrm{a} \leq X \leq b$ então $\mathrm{a} \leq E[X] \leq b$

Propriedades da Esperança

- Se $X \geq 0$ então $E[X] \geq 0$
- Se $\mathrm{a} \leq X \leq b$ então $\mathrm{a} \leq E[X] \leq b$
- Regra do valor esperado
  - $E[g(X)] = \sum_x g(x) p_X(x)$

Propriedades da Esperança

- Se $X \geq 0$ então $E[X] \geq 0$
- Se $\mathrm{a} \leq X \leq b$ então $\mathrm{a} \leq E[X] \leq b$
- Regra do valor esperado
  - $E[g(X)] = \sum_x g(x)p_X(x)$
  - $E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_X(x)dx$

Propriedades da Esperança

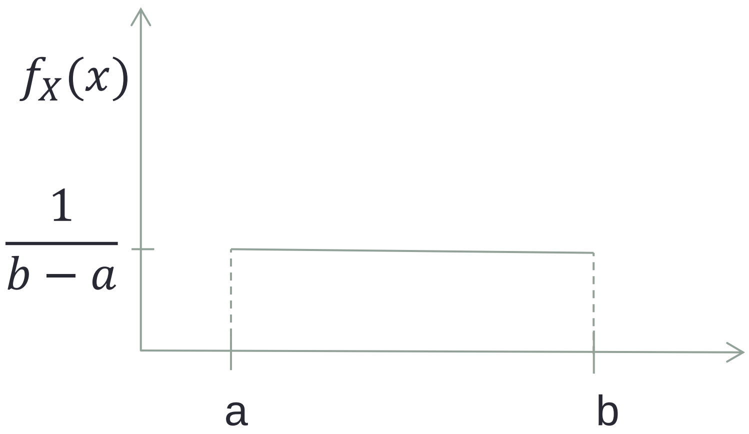
- Se $X \geq 0$ então $E[X] \geq 0$
- Se $\mathrm{a} \leq X \leq b$ então $\mathrm{a} \leq E[X] \leq b$
- Regra do valor esperado
  - $E[g(X)] = \sum_x g(x) p_X(x)$
  - $E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx$
- Linearidade
  - $E[aX + b] = aE[X] + b$

Propriedades da Variância

- Definição
  - $var(X) = E[(X - \mu)^2]$
- Usando a regra do valor esperado
  - $var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f_X(x)$

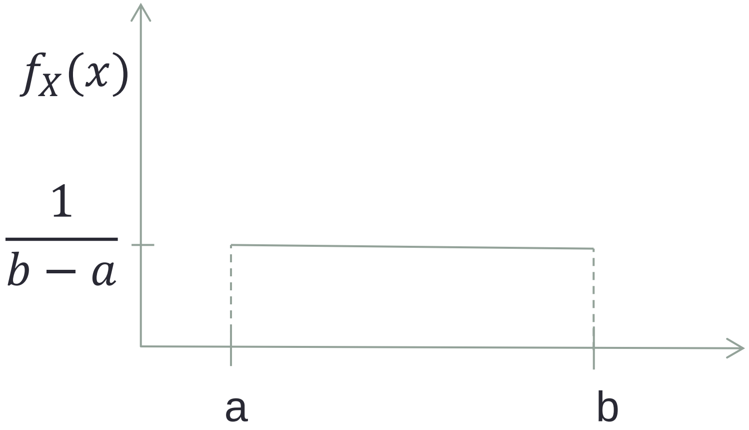
- $var(aX + b) = a^2 var(X)$
- $var(X) = E[X^2] + E[X]^2$

Média e Variância de uma v.a Uniforme



- $E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$

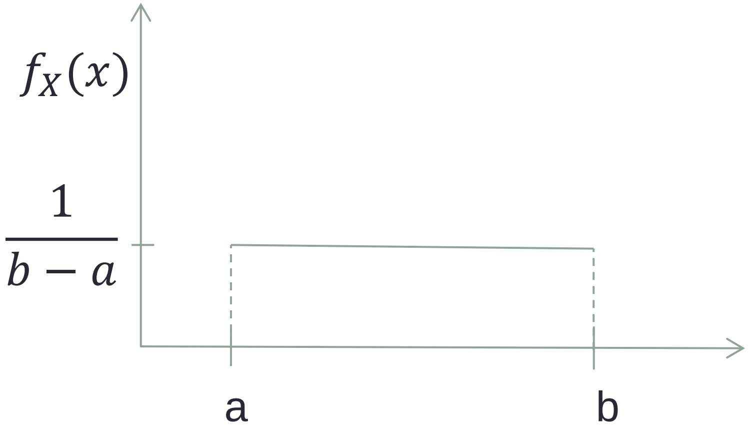
Média e Variância de uma v.a Uniforme



- $E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$

- $E[X] = \int_{a}^{b} x \frac{1}{b-a} dx = \frac{a+b}{2}$

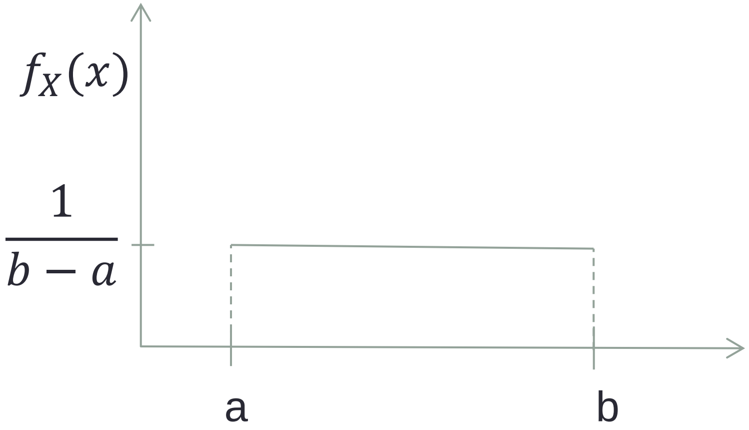
Média e Variância de uma v.a Uniforme



- $E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$
- $E[X] = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{a+b}{2}$

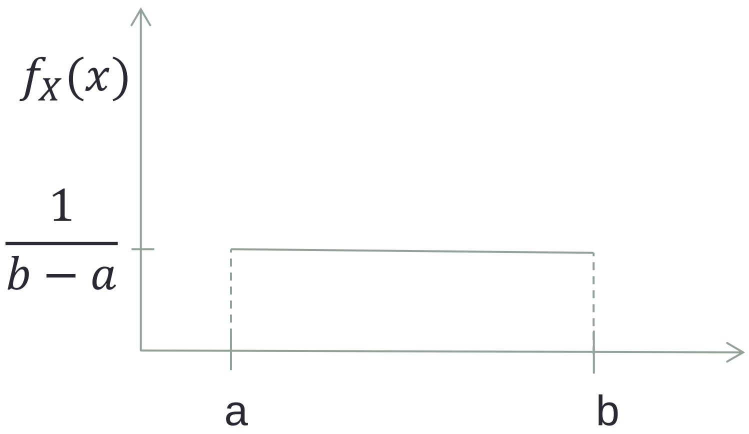
- $var(X) =$

Média e Variância de uma v.a Uniforme



- $E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$
- $E[X] = \int_{a}^{b} x \frac{1}{b-a} dx = \frac{a+b}{2}$
- $var(X) = E[X^2] - E[X]^2$

Média e Variância de uma v.a Uniforme

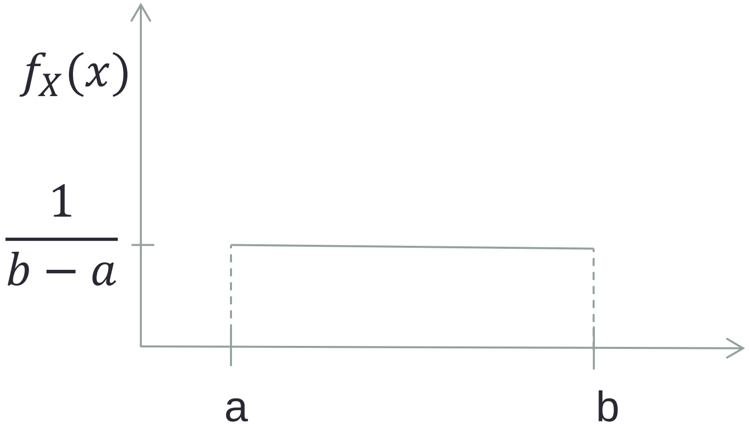


- $E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$

- $E[X] = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{a+b}{2}$

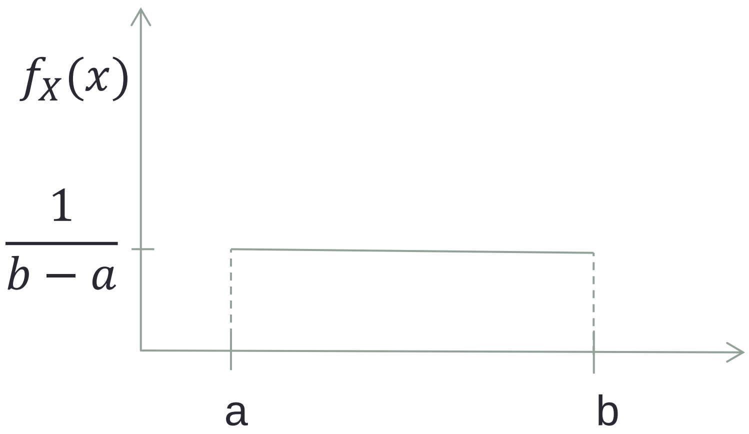
- $var(X) = E[X^2] - E[X]^2$
- $E[X^2] = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx$

Média e Variância de uma v.a Uniforme



- $E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$
- $E[X] = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{a+b}{2}$
- $var(X) = E[X^2] - E[X]^2$
- $E[X^2] = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a}\left(\frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}\right)$

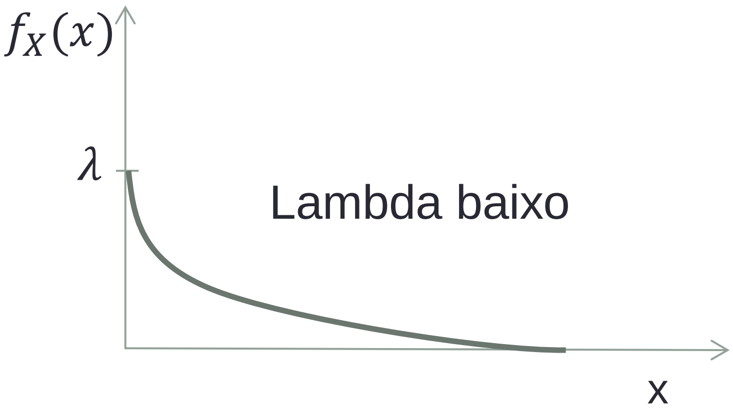
Média e Variância de uma v.a Uniforme

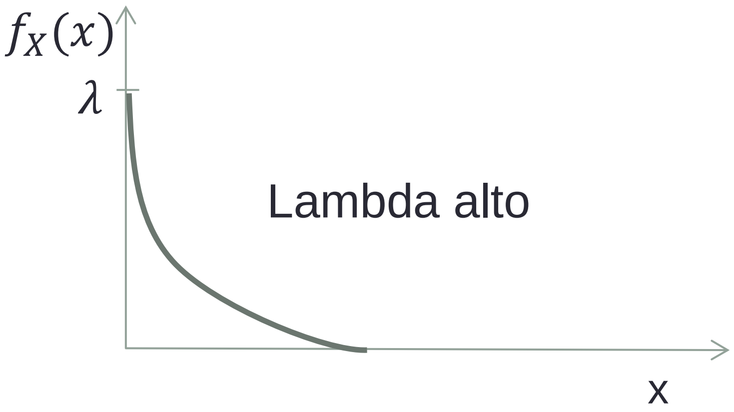


- $E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$
- $E[X] = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{a+b}{2}$
- $var(X) = E[X^2] - E[X]^2$
- $E[X^2] = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a}\left(\frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}\right)$
- $var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

v.a. Exponencial

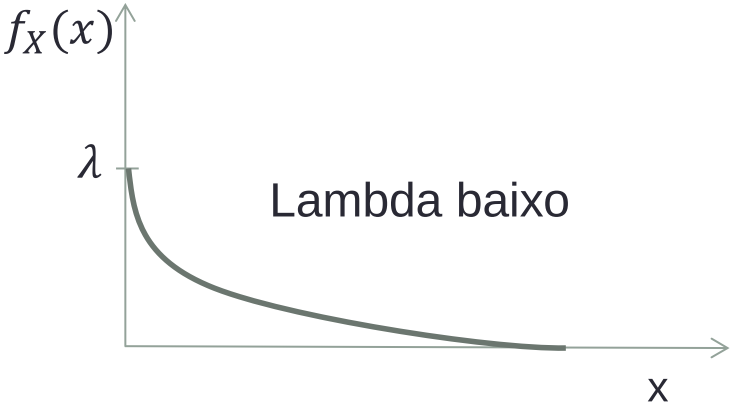
- Parâmetro $\lambda > 0$
- $f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & se \ \ x \geq 0 \\ 0, & se \ x \leq 0 \end{cases}$

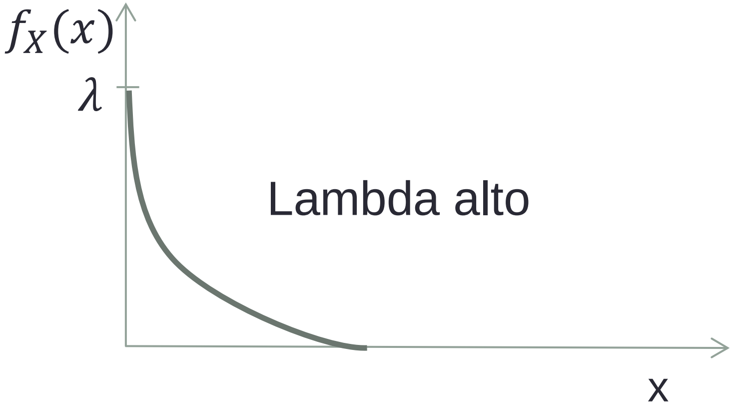




v.a. Exponencial

- Parâmetro $\lambda > 0$
- $f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & se \;\; x \geq 0 \\ 0, & se \; x \leq 0 \end{cases}$

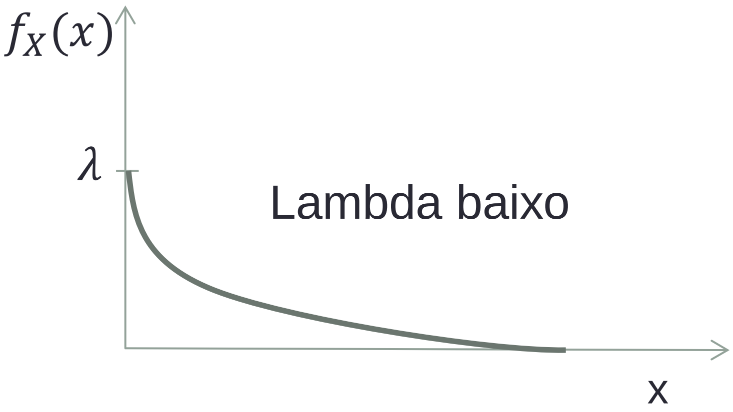


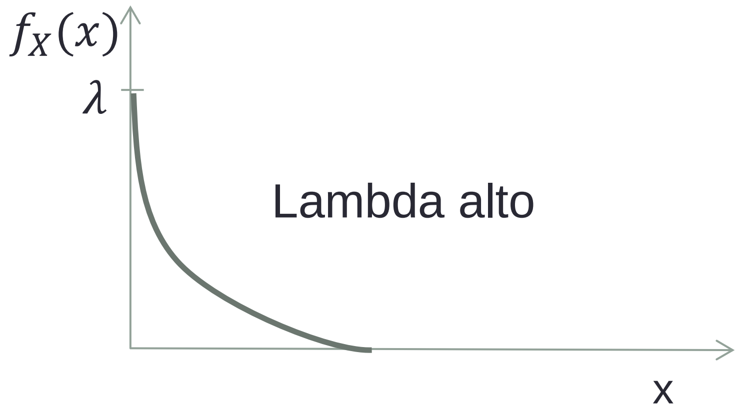


$P(X \geq a) =$

v.a. Exponencial

- Parâmetro $\lambda > 0$
- $f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & se \;\; x \geq 0 \\ 0, & se \; x \leq 0 \end{cases}$

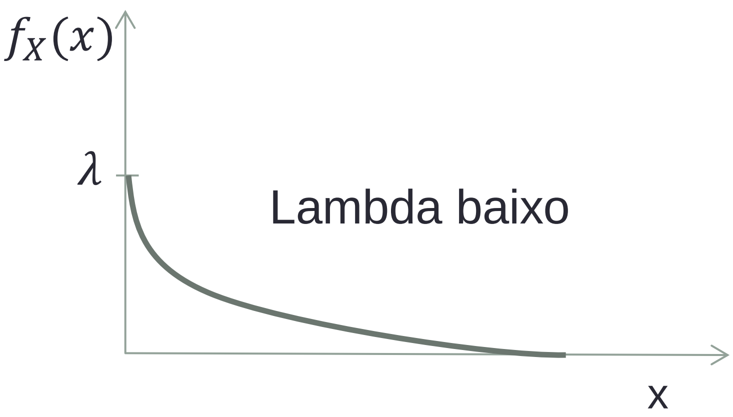


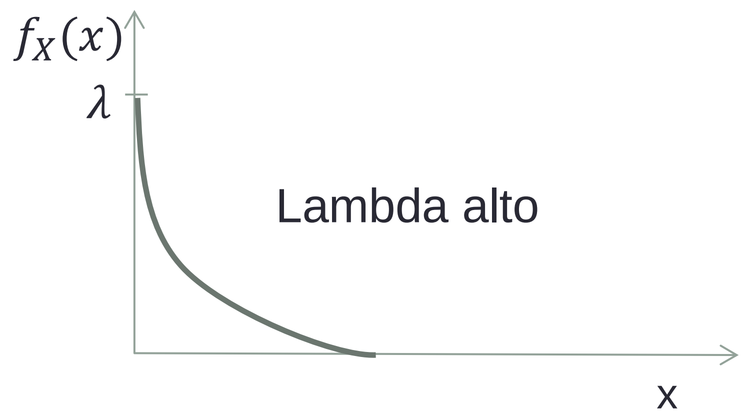


$$P(X \geq a) = \int_a^{\infty} \lambda e^{-\lambda x}\, dx$$

v.a. Exponencial

- Parâmetro $\lambda > 0$
- $f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & se \;\; x \geq 0 \\ 0, & se \; x \leq 0 \end{cases}$



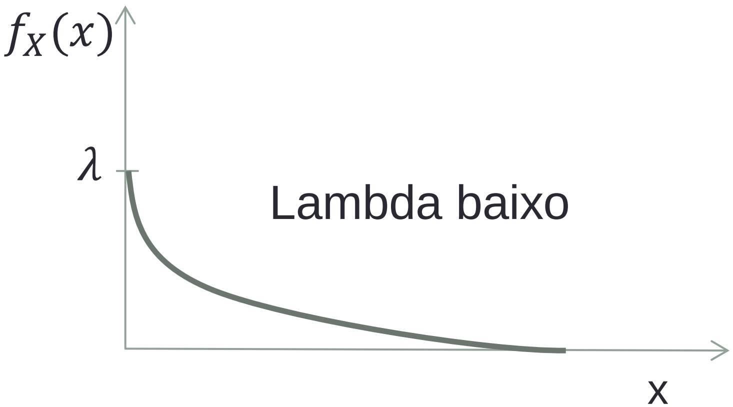


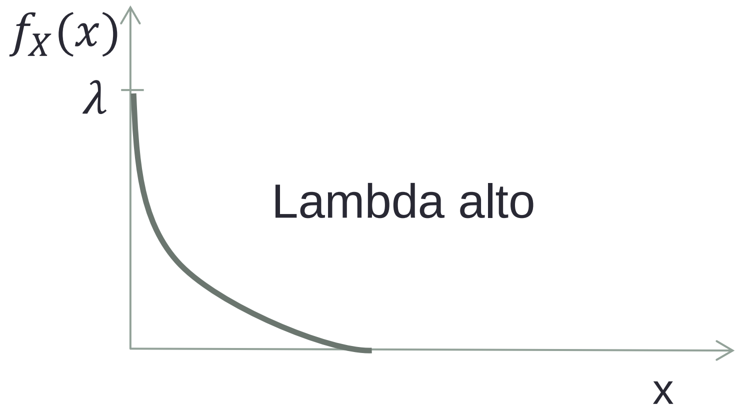
$$P(X \geq a) = \int_a^{\infty} \lambda e^{-\lambda x}\, dx$$

$$\boxed{\int e^{ax}\, dx = \frac{1}{a} e^{ax}}$$

v.a. Exponencial

- Parâmetro $\lambda > 0$
- $f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & se \;\; x \geq 0 \\ 0, & se \; x \leq 0 \end{cases}$





$$P(X \geq a) = \int_a^{\infty} \lambda e^{-\lambda x}\, dx = -e^{-\lambda x} \,|_a^{\infty}$$

$$P(X \geq a) = e^{-\lambda a}$$

$$\int e^{ax}\, dx = \frac{1}{a} e^{ax}$$

Valor Esperado da Exponencial

- $f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & se \;\; x \geq 0 \\ 0, & se \; x \leq 0 \end{cases}$
- $E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$

Valor Esperado da Exponencial

- $f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & se \;\; x \geq 0 \\ 0, & se \; x \leq 0 \end{cases}$
- $E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$
- $E[X] = \int_{0}^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx$

Valor Esperado da Exponencial

- $f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & se \ \ x \geq 0 \\ 0, & se \ x \leq 0 \end{cases}$
- $E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$
- $E[X] = \int_{0}^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}$

Variância da Exponencial

- $f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & se \;\; x \geq 0 \\ 0, & se \; x \leq 0 \end{cases}$
- $var(X) = E[X^2] - E[X]^2$
- $E[X] = \frac{1}{\lambda}$
- $E[X^2] =$

Variância da Exponencial

- $f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & se \ \ x \geq 0 \\ 0, & se \ x \leq 0 \end{cases}$
- $var(X) = E[X^2] - E[X]^2$
- $E[X] = \frac{1}{\lambda}$
- $E[X^2] = \int_0^{\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx$

Variância da Exponencial

- $f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & se \;\; x \geq 0 \\ 0, & se\; x \leq 0 \end{cases}$
- $var(X) = E[X^2] - E[X]^2$
- $E[X] = \frac{1}{\lambda}$
- $E[X^2] = \int_0^{\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda^2}$
- $var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

Função Distribuição Acumulada (CDF)

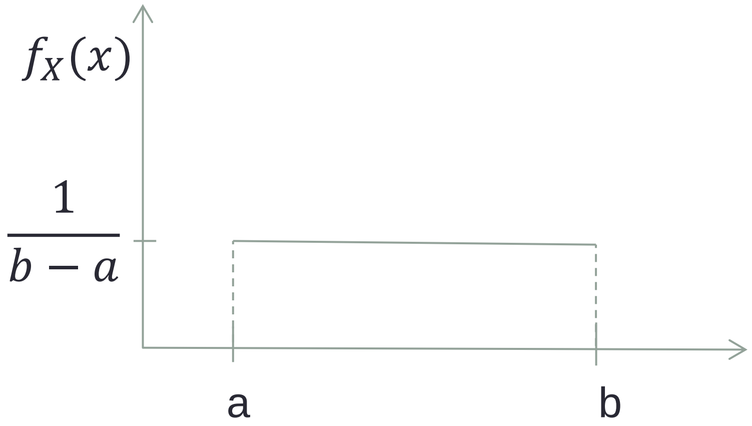
- Definição
  - $F_X(x) = P(X \leq x)$

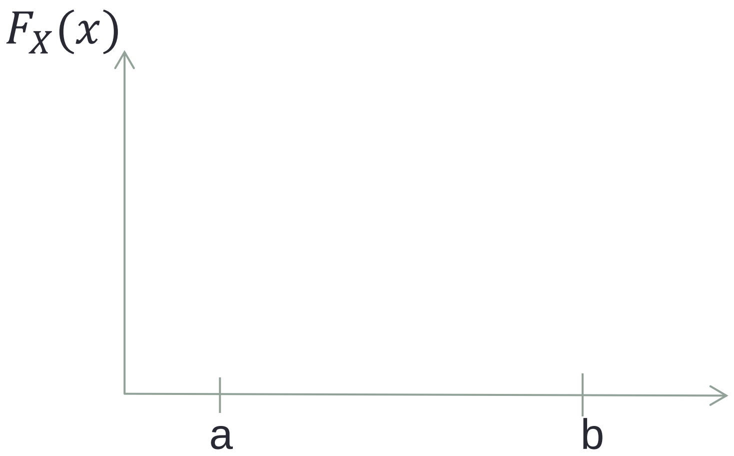
Função Distribuição Acumulada (CDF)

- Definição
  - $F_X(x) = P(X \leq x)$
- v.a. contínua
  - $F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(k)dk$

Função Distribuição Acumulada (CDF)

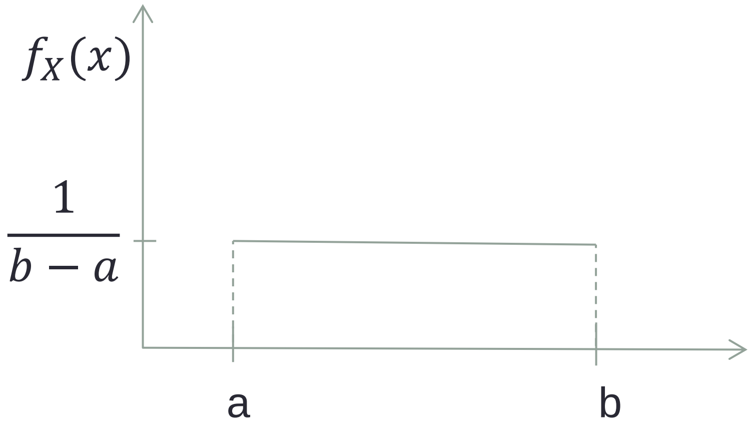
- Definição
  - $F_X(x) = P(X \leq x)$
- v.a. contínua
  - $F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(k)dk$



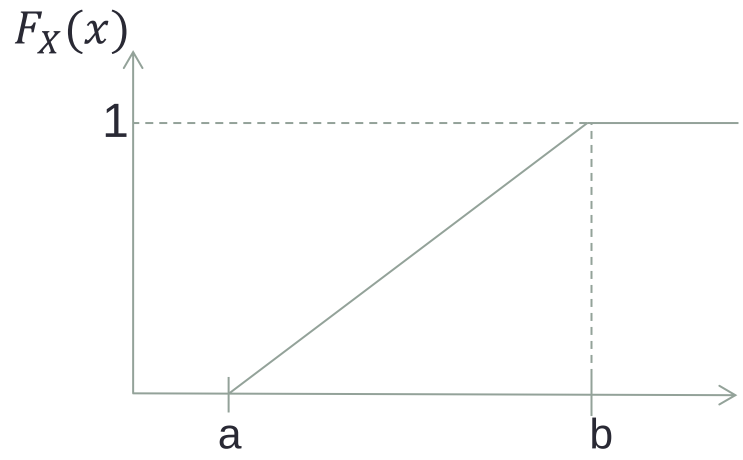


Função Distribuição Acumulada (CDF)

- Definição
  - $F_X(x) = P(X \leq x)$
- v.a. contínua
  - $F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(k)dk$



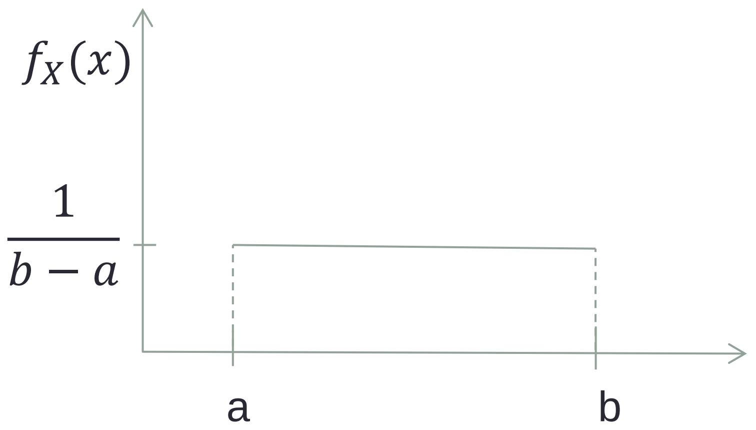
$$\frac{x-a}{b-a}$$



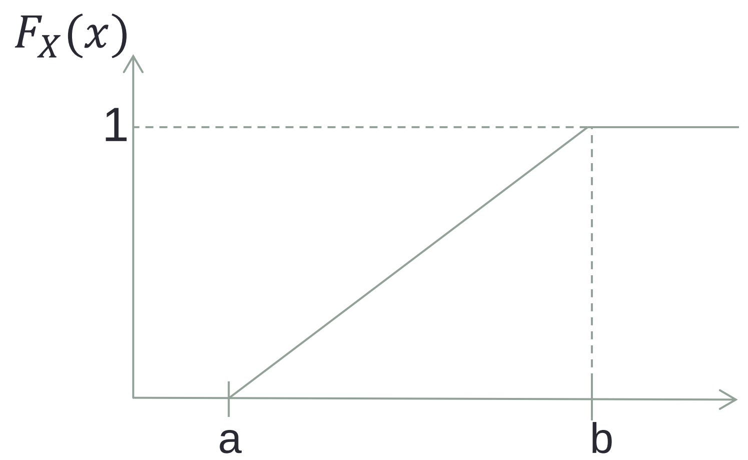
Função Distribuição Acumulada (CDF)

- Definição
  - $F_X(x) = P(X \leq x)$
- v.a. contínua
  - $F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X\,(k)dk$

$$P(X \leq 3) = P(X \leq 2) + P(2 \leq X \leq 3)$$

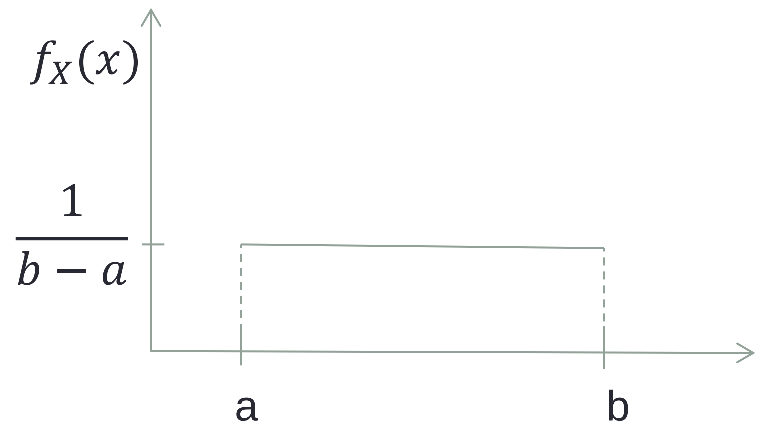


$$\frac{x-a}{b-a}$$



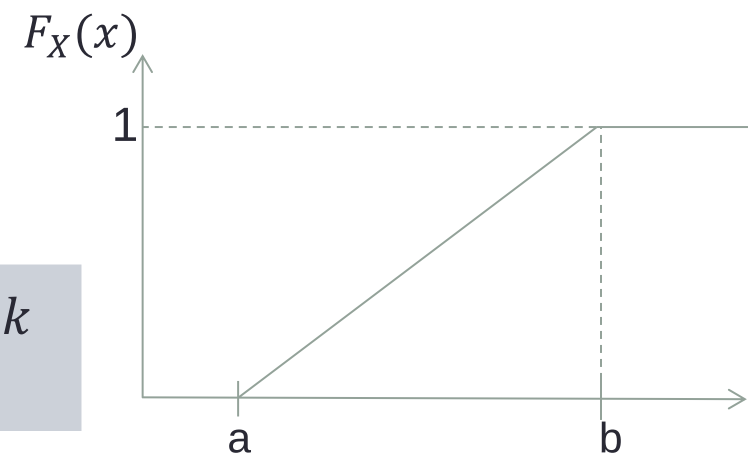
Função Distribuição Acumulada (CDF)

- Definição
  - $F_X(x) = P(X \leq x)$
- v.a. contínua
  - $F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(k)dk$



$$\frac{x-a}{b-a}$$

$$P(X \leq 3) = P(X \leq 2) + P(2 \leq X \leq 3)$$

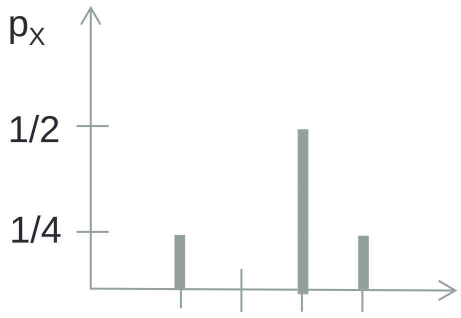


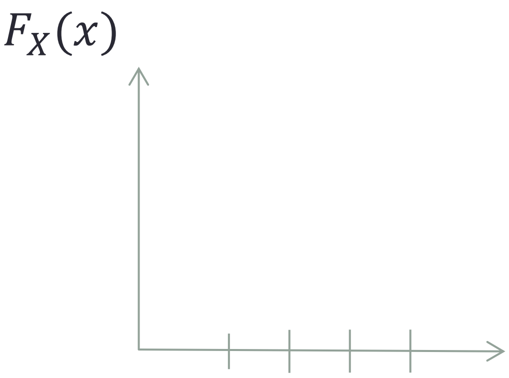
$$\frac{dF_X(x)}{dx} = f_X(x)$$

- $g(x) = \int_{a}^{x} h(k)dk$
- $g'(x) = h(x)$

Função Distribuição Acumulada (CDF)

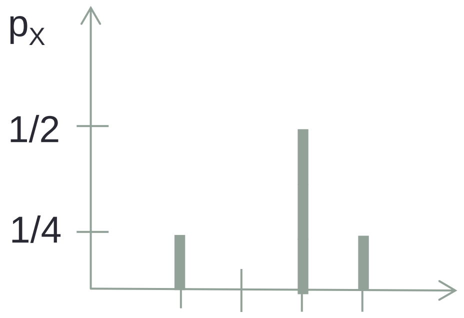
- Definição
  - $F_X(x) = P(X \leq x)$
- v.a. discreta
  - $F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{k \leq x} p_X(k)$

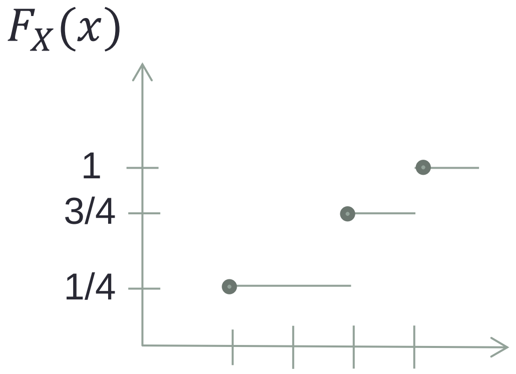




Função Distribuição Acumulada (CDF)

- Definição
  - $F_X(x) = P(X \leq x)$
- v.a. discreta
  - $F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{k \leq x} p_X(k)$





Propriedades da CDF

- $F_X(x) = P(X \leq x)$
  - Não decrescente
    - $se\ y \geq x\ \ então\ F_X(y) \geq F_X(x)$
  - $F_X(x) \to 1, quando\ x \to \infty$
  - $F_X(x) \to 0\ quando\ x \to -\infty$

v.a. Normal (Gaussiana)

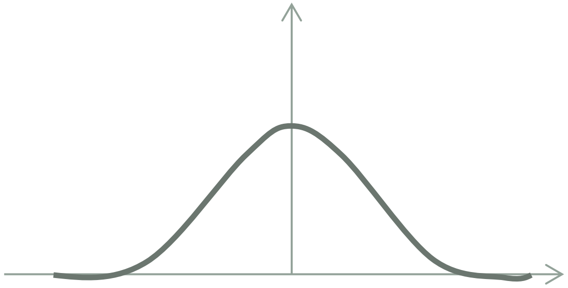
- Importante para teoria de probabilidade
  - Teorema central do limite
- Muitas aplicações
  - Modela diversos fenômenos
  - Propriedades matemáticas interessantes

Normal Padrão

- $N(0,1)$: $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

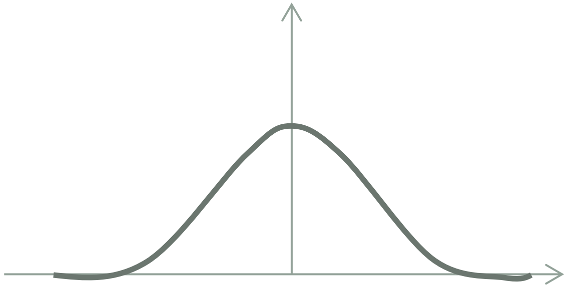
Normal Padrão

- $N(0,1)$: $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$



Normal Padrão

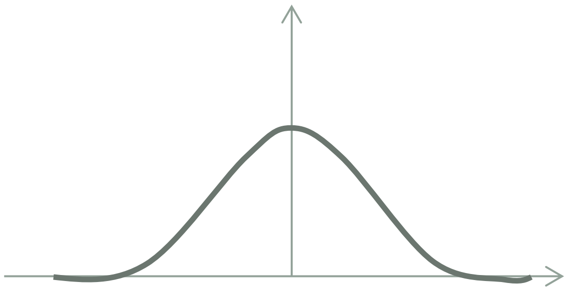
- $N(0,1)$: $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$



$E[X] =$

Normal Padrão

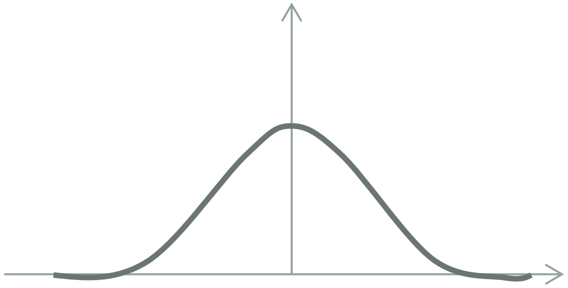
- $N(0,1)$: $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$



$$E[X] = 0$$

Normal Padrão

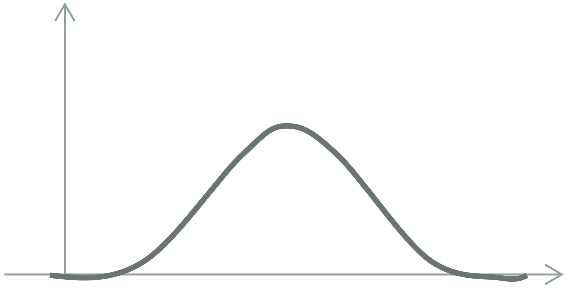
- $N(0,1)$: $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$



$$E[X] = 0$$
$$var(X) = 1$$

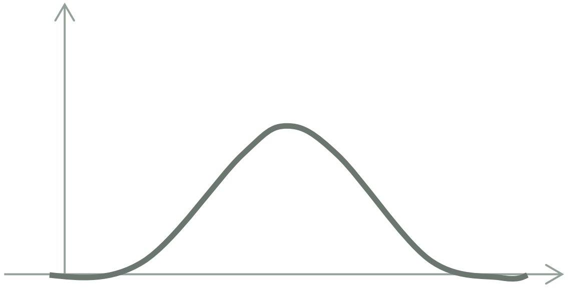
Normal (caso geral)

- $N(\mu, \sigma^2)$: $f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$



Normal (caso geral)

- $N(\mu, \sigma^2)$: $f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$



$$E[X] = \mu$$
$$var(X) = \sigma^2$$

Funções lineares de uma v.a. Normal

- Seja $Y = aX + b$ $\quad X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Funções lineares de uma v.a. Normal

- Seja $Y = aX + b \qquad X \sim N(\mu, \sigma^2)$
- $E[Y] = a\mu + b$
- $var(Y) = a^2\sigma^2$

Funções lineares de uma v.a. Normal

- Seja $Y = aX + b \qquad X \sim N(\mu, \sigma^2)$
- $E[Y] = a\mu + b$
- $var(Y) = a^2\sigma^2$

- Nova propriedade
  - $Y \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$

DÚVIDAS?