PROBABILIDADE E PROCESSOS ESTOCÁSTICOS (CKP7366)

Prof. João Paulo Pordeus Gomes

VARIÁVEIS ALEATÓRIAS DISCRETAS (AULA 3)

Variáveis aleatórias discretas

- Distribuições condicionais
  - Esperança condicional
  - Teorema da esperança total
- Independência de v.a.
  - Propriedades da esperança e da variância
- Variância de uma v.a. Binomial

Distribuições Condicionais

- $p_{X|A}(x) = P(X = x|A) \rightarrow p_{X|Y}(x|y) = P(X = x|Y = y)$

Distribuições Condicionais

- $p_{X|A}(x) = P(X = x|A) \rightarrow p_{X|Y}(x|y) = P(X = x|Y = y)$
- $p_{X|Y}(x|y) = P(X = x|Y = y) = \frac{P(X=x,Y=y)}{P(Y=y)}$

Distribuições Condicionais

- $p_{X|A}(x) = P(X = x|A) \rightarrow p_{X|Y}(x|y) = P(X = x|Y = y)$
- $p_{X|Y}(x|y) = P(X = x|Y = y) = \frac{P(X=x, Y=y)}{P(Y=y)}$
- $p_{X|Y}(x|y) = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_Y(y)}$

Distribuições Condicionais

- $p_{X|A}(x) = P(X = x|A) \rightarrow p_{X|Y}(x|y) = P(X = x|Y = y)$
- $p_{X|Y}(x|y) = P(X = x|Y = y) = \frac{P(X=x,Y=y)}{P(Y=y)}$
- $p_{X|Y}(x|y) = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_Y(y)}$

y \ x	1	2	3	4
4	1/20	2/20	2/20	
3	2/20	4/20	1/20	2/20
2		1/20	3/20	1/20
1		1/20		

Distribuições Condicionais

- $p_{X|A}(x) = P(X = x|A) \rightarrow p_{X|Y}(x|y) = P(X = x|Y = y)$
- $p_{X|Y}(x|y) = P(X = x|Y = y) = \frac{P(X=x,Y=y)}{P(Y=y)}$
- $p_{X|Y}(x|y) = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_Y(y)}$

y \ x	1	2	3	4
4	1/20	2/20	2/20	
3	2/20	4/20	1/20	2/20
2		1/20	3/20	1/20
1		1/20		

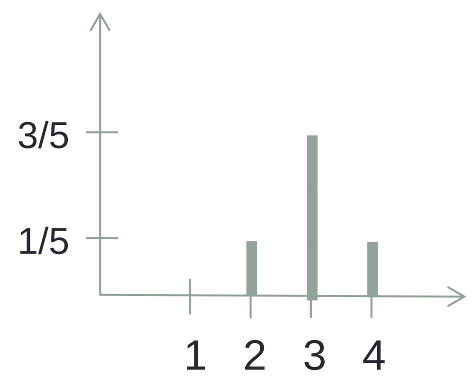
- $p_Y(2) = ?$

Distribuições Condicionais

- $p_{X|A}(x) = P(X = x|A) \rightarrow p_{X|Y}(x|y) = P(X = x|Y = y)$
- $p_{X|Y}(x|y) = P(X = x|Y = y) = \frac{P(X=x, Y=y)}{P(Y=y)}$
- $p_{X|Y}(x|y) = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_Y(y)}$

y \ x	1	2	3	4
4	1/20	2/20	2/20	
3	2/20	4/20	1/20	2/20
2		1/20	3/20	1/20
1		1/20		

- $p_Y(2) = ?$



Distribuições Condicionais para múltiplas v.a.

- $p_{X|Y,Z}(x|y,z) = \frac{p_{X,Y,Z}(x,y,z)}{p_{Y,Z}(y,z)}$

Distribuições Condicionais para múltiplas v.a.

- $p_{X|Y,Z}(x|y,z) = \frac{p_{X,Y,Z}(x,y,z)}{p_{Y,Z}(y,z)}$
- $p_{X,Y|Z}(x,y|z) = \frac{p_{X,Y,Z}(x,y,z)}{p_Z(z)}$

Distribuições Condicionais para múltiplas v.a.

- $p_{X|Y,Z}(x|y,z) = \frac{p_{X,Y,Z}(x,y,z)}{p_{Y,Z}(y,z)}$
- $p_{X,Y|Z}(x,y|z) = \frac{p_{X,Y,Z}(x,y,z)}{p_Z(z)}$

- Regra da multiplicação
  - $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B|A)P(C|B,A)$

Distribuições Condicionais para múltiplas v.a.

- $p_{X|Y,Z}(x|y,z) = \dfrac{p_{X,Y,Z}(x,y,z)}{p_{Y,Z}(y,z)}$
- $p_{X,Y|Z}(x,y|z) = \dfrac{p_{X,Y,Z}(x,y,z)}{p_Z(z)}$

- Regra da multiplicação
  - $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B|A)P(C|B,A)$
  - $A = \{X = x\}, B = \{Y = y\}\ e\ C = \{Z = z\}$
  - $p_{X,Y,Z}(x,y,z) = p_X(x)p_{Y|X}(y|x)p_{Z|X,Y}(z|x,y)$

Esperança Condicional

- $E[X] = \sum_x x p_X(x) \rightarrow E[X|A] = \sum_x x p_{X|A}(x)$
- $A = \{Y = y\}$

Esperança Condicional

- $E[X] = \sum_x x p_X(x) \rightarrow E[X|A] = \sum_x x p_{X|A}(x)$
- $A = \{Y = y\}$
- $E[X|Y = y] = \sum_x x p_{X|Y}(x|y)$

Esperança Condicional

- $E[X] = \sum_x x p_X(x) \rightarrow E[X|A] = \sum_x x p_{X|A}(x)$
- $A = \{Y = y\}$
- $E[X|Y = y] = \sum_x x p_{X|Y}(x|y)$
- Regra do valor esperado
  - $E[g(X)] = \sum_x g(x) p_X(x) \rightarrow E[g(X)|A] = \sum_x g(x) p_{X|A}(x)$

Esperança Condicional

- $E[X] = \sum_x x p_X(x) \rightarrow E[X|A] = \sum_x x p_{X|A}(x)$
- $A = \{Y = y\}$
- $E[X|Y = y] = \sum_x x p_{X|Y}(x|y)$
- Regra do valor esperado
  - $E[g(X)] = \sum_x g(x) p_X(x) \rightarrow E[g(X)|A] = \sum_x g(x) p_{X|A}(x)$
  - $E[g(X)|Y = y] = \sum_x g(x) p_{X|Y}(x|y)$

Teorema da Probabilidade Total

- $p_X(x) = P(A_1)p_{X|A_1}(x) + \cdots + P(A_n)p_{X|A_n}(x)$
  - $A = \{Y = y\}$

Teorema da Probabilidade Total

- $p_X(x) = P(A_1)p_{X|A_1}(x) + \cdots + P(A_n)p_{X|A_n}(x)$
  - $A = \{Y = y\}$
  - $p_X(x) = \sum_y p_Y(y)\, p_{X|Y}(x|y)$

Teorema da Esperança Total

- $E[x] = P(A_1)E[X|A_1] + \cdots + P(A_n)E[X|A_n]$
  - $A = \{Y = y\}$

Teorema da Esperança Total

- $E[x] = P(A_1)E[X|A_1] + \cdots + P(A_n)E[X|A_n]$
  - $A = \{Y = y\}$
  - $E[x] = \sum_y p_Y(y)\, E[X|y = Y]$

Independência de v.a.

- Dois eventos
  - $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
  - $P(A|B) = P(A)$

Independência de v.a.

- Dois eventos
  - $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
  - $P(A|B) = P(A)$
- Uma v.a. e um evento
  - $P(X = x \cap A) = P(X = x)P(A)$
  - $P(X = x|A) = P(X = x) \rightarrow p_{X|A}(x|A) = p_X(x)$

Independência de v.a.

- Dois eventos
  - $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
  - $P(A|B) = P(A)$
- Uma v.a. e um evento
  - $P(X = x \cap A) = P(X = x)P(A)$
  - $P(X = x|A) = P(X = x) \rightarrow p_{X|A}(x|A) = p_X(x)$
- Duas v.a.
  - $P(X = x \cap Y = y) = P(X = x)P(Y = y) \rightarrow p_{X,Y}(x, y) = p_X(x)p_Y(y)$
  - $P(X = x|Y = y) = P(X = x) \rightarrow p_{X|Y}(x|y) = p_X(x)$

Exercícios

- Suponha que X, Y e Z são independentes. Mostre que X e Y são independentes.
- Suponha que X, Y e Z são independentes. Mostre que o par (X Y) é independente de Z.

Exemplo: Independência e independência condicional

y					
4	1/20	2/20	2/20		
3	2/20	4/20	1/20	2/20	
2		1/20	3/20	1/20	
1		1/20			
	1	2	3	4	x

Exemplo: Independência e independência condicional

- X e Y são independentes ?

y \ x	1	2	3	4
4	1/20	2/20	2/20	
3	2/20	4/20	1/20	2/20
2		1/20	3/20	1/20
1		1/20		

Exemplo: Independência e independência condicional

- X e Y são independentes ?
  - $p_{X|Y}(x|y) = p_X(x)$

y \ x	1	2	3	4
4	1/20	2/20	2/20	
3	2/20	4/20	1/20	2/20
2		1/20	3/20	1/20
1		1/20		

Exemplo: Independência e independência condicional

- Condicionando a $X \leq 2 \; e \; Y \geq 3$
  - X e Y são independentes?

y \ x	1	2	3	4
4	1/20	2/20	2/20	
3	2/20	4/20	1/20	2/20
2		1/20	3/20	1/20
1		1/20		

Exemplo: Independência e independência condicional

- Condicionando a $X \leq 2 \; e \; Y \geq 3$
  - X e Y são independentes?

y \ x	1	2	3	4
4	1/20	2/20	2/20	
3	2/20	4/20	1/20	2/20
2		1/20	3/20	1/20
1		1/20		

Exemplo: Independência e independência condicional

- Condicionando a $X \leq 2$ e $Y \geq 3$
  - X e Y são independentes?

1/9	2/9
2/9	4/9

y					
4	1/20	2/20	2/20		
3	2/20	4/20	1/20	2/20	
2		1/20	3/20	1/20	
1		1/20			
	1	2	3	4	x

Exemplo: Independência e independência condicional

- Condicionando a $X \leq 2\ e\ Y \geq 3$
  - X e Y são independentes?

1/3	1/9	2/9
2/3	2/9	4/9
	1/3	2/3

y				
4	1/20	2/20	2/20	
3	2/20	4/20	1/20	2/20
2		1/20	3/20	1/20
1		1/20		
	1	2	3	4

x

Independência e Esperanças

- $E[X + Y] = E[X] + E[Y]$
- $E[aX + b] = a\,E[X] + b$

Independência e Esperanças

- $E[X+Y] = E[X] + E[Y]$
- $E[aX+b] = a\,E[X] + b$
- Quando X e Y são independentes
  - $E[XY] = E[X]E[Y]$

Independência e Esperanças

- $E[X + Y] = E[X] + E[Y]$
- $E[aX + b] = a\,E[X] + b$
- Quando X e Y são independentes
  - $E[XY] = E[X]E[Y]$
    - $E[XY] = \sum_x \sum_y xy\; p_{X,Y}(x, y)$
    - $E[XY] = \sum_x \sum_y xy\; p_X(x)\; p_Y(y)$
    - $E[XY] = E[X]E[Y]$

Independência e Esperanças

- $E[X + Y] = E[X] + E[Y]$
- $E[aX + b] = a\,E[X] + b$
- Quando X e Y são independentes
  - $E[XY] = E[X]E[Y]$
    - $E[XY] = \sum_x \sum_y xy\, p_{X,Y}(x, y)$
    - $E[XY] = \sum_x \sum_y xy\, p_X(x)\, p_Y(y)$
    - $E[XY] = E[X]E[Y]$
- g(X) e h(Y) também são independentes

Independência e Variâncias

- $var(aX) = a^2 var(X)$
- $var(X + b) = var(X)$
- Quando X e Y são independentes
  - $var(X + Y) = var(X) + var(Y)$
    - $var(X + Y) = E[(X - \mu + Y - \upsilon)^2]$

  - Exemplos
    - Se X=Y : var(X+Y)
    - Se X = -Y: var(X+Y)
    - Se X e Y são independentes: var(X-3Y)

Variância de uma v.a. Binomial

- X: Binomial com parâmetros n,p
  - Número de sucessos em n jogadas

Variância de uma v.a. Binomial

- X: Binomial com parâmetros n,p
  - Número de sucessos em n jogadas
- Usando uma variável indicadora
  - $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$
  - $E[X_1] = E[(X - p)^2]$
  - $E[X_1] = E[X^2 - 2Xp + p^2]$
  - $E[X_1] = E[X^2] - 2E[X]p + p^2$
  - $E[X_1] = p - 2p^2 + p^2 = p(1 - p)$
  - $E[X] = np(1 - p)$

Problema dos chapéus

- N pessoas colocam o seu chapéu em uma caixa e cada um pega um chapéu aleatoriamente
- X: número de pessoal que pegam o seu próprio chapéu
  - Encontre E[X]
  - Encontre var[X]

DÚVIDAS?