PROBABILIDADE E PROCESSOS ESTOCÁSTICOS (CKP7366)

Prof. João Paulo Pordeus Gomes

PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

Processos Estocásticos

- Definição
  - Um fenômeno probabilístico que evolui com o tempo
- Modelos de chegada no decorrer do tempo
  - Sem memória
  - Discreto: Bernoulli
  - Contínuo: Poisson
- Perguntas interessantes
  - Número de chegadas
  - Tempo até a k-ésima chegada

Processo de Bernoulli

- Tempo em slots
- Sem memória
- Distribuição do tempo da k-ésima chagada
- Distribuição do tempo entre chegadas
- Junção e separação de processos estocásticos

Processo de Bernoulli

- Uma sequencia de jogadas independentes de Bernoulli, X_i.
- Em cada jogada i
  - $P(X_i = 1) = P(sucesso\ na\ i - ésina\ jogada) = p$
  - $P(X_i = 0) = P(insucesso\ na\ i - ésina\ jogada) = 1 - p$
- Premissas
  - Independência
  - Homogeneidade no tempo
- Usado para modelar
  - Chegadas em um banco/caixa
  - Requisições a um servidor

Processos Estocásticos

- Sequência (infinita) de variáveis aleatórias
  - Precisamos definir $E[X_i]$, $var(X_i)$ e $p_{X_i}(x)$

Processos Estocásticos

- Sequência (infinita) de variáveis aleatórias
  - Precisamos definir $E[X_i]$, $var(X_i)$ e $p_{X_i}(x)$
  - $E[X_i] = \mathrm{p}$, $var(X_i) = p(1-p)$ e $p_{X_i}(x) = \begin{cases} p & se\ x = 1 \\ 1-p & se\ x = 0 \end{cases}$

Processos Estocásticos

- Sequência (infinita) de variáveis aleatórias
  - Precisamos definir $E[X_i]$, $var(X_i)$ e $p_{X_i}(x)$
  - $E[X_i] = \text{p}$, $var(X_i) = p(1-p)$ e $p_{X_i}(x) = \begin{cases} p & se\ x = 1 \\ 1-p & se\ x = 0 \end{cases}$
  - $p_{X_1 \dots X_n}(x_1 \dots x_n)$

Processos Estocásticos

- Sequência (infinita) de variáveis aleatórias
  - Precisamos definir $E[X_i]$, $var(X_i)$ e $p_{X_i}(x)$
  - $E[X_i] = \mathrm{p}$, $var(X_i) = p(1-p)$ e $p_{X_i}(x) = \begin{cases} p & se\ x = 1 \\ 1-p & se\ x = 0 \end{cases}$
  - $p_{X_1 \dots X_n}(x_1 \dots x_n) = p_{X_1}(x_1) p_{X_2}(x_2) \dots p_{X_n}(x_n)$

Processos Estocásticos

- Sequência (infinita) de variáveis aleatórias
  - Precisamos definir $E[X_i]$, $var(X_i)$ e $p_{X_i}(x)$
  - $E[X_i] = \text{p}$, $var(X_i) = p(1-p)$ e $p_{X_i}(x) = \begin{cases} p & se\ x = 1 \\ 1-p & se\ x = 0 \end{cases}$
  - $p_{X_1 \dots X_n}(x_1 \dots x_n) = p_{X_1}(x_1) p_{X_2}(x_2) \dots p_{X_n}(x_n)$
- Amostra de tamanho infinito

Processos Estocásticos

- Sequência (infinita) de variáveis aleatórias
  - Precisamos definir $E[X_i]$, $var(X_i)$ e $p_{X_i}(x)$
  - $E[X_i] = \text{p}$, $var(X_i) = p(1-p)$ e $p_{X_i}(x) = \begin{cases} p & se\ x = 1 \\ 1-p & se\ x = 0 \end{cases}$
  - $p_{X_1 \dots X_n}(x_1 \dots x_n) = p_{X_1}(x_1) p_{X_2}(x_2) \dots p_{X_n}(x_n)$
- Amostra de tamanho infinito
  - Espaço amostral é o conjunto de infinitas sequencias
  - Ideal para responder perguntas que tratam da evolução em longo prazo do fenômeno
    - $P(X_i = 1\ \ para\ todo\ i) =$

Processos Estocásticos

- Sequência (infinita) de variáveis aleatórias
  - Precisamos definir $E[X_i]$, $var(X_i)$ e $p_{X_i}(x)$
  - $E[X_i] = \text{p}$, $var(X_i) = p(1-p)$ e $p_{X_i}(x) = \begin{cases} p & se\ x = 1 \\ 1-p & se\ x = 0 \end{cases}$
  - $p_{X_1 \dots X_n}(x_1 \dots x_n) = p_{X_1}(x_1) p_{X_2}(x_2) \dots p_{X_n}(x_n)$
- Amostra de tamanho infinito
  - Espaço amostral é o conjunto de infinitas sequencias
  - Ideal para responder perguntas que tratam da evolução em longo prazo do fenômeno
    - $P(X_i = 1\ \ para\ todo\ i) = 0$

Número de sucessos em n slots

- Numero de sucessos
  - $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$

Número de sucessos em n slots

- Numero de sucessos
  - $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$
  - $P(S = k) =$

Número de sucessos em n slots

- Numero de sucessos
  - $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$
  - $P(S = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$

Número de sucessos em n slots

- Numero de sucessos
  - $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$
  - $P(S = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
  - $E[S] = np$

Número de sucessos em n slots

- Numero de sucessos
  - $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$
  - $P(S = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
  - $E[S] = np$
  - $var(S) = np(1-p)$

Tempo até o primeiro sucesso

- $T = \min\{i \;:\; X_i = 1\}$

Tempo até o primeiro sucesso

- $T = \min\{i \ : \ X_i = 1\}$
- $P(T = k) =$

Tempo até o primeiro sucesso

- $T = \min\{i \ : \ X_i = 1\}$
- $P(T = k) = (1 - p)^{k-1}p^k$

Tempo até o primeiro sucesso

- $T = \min\{i \ : \ X_i = 1\}$
- $P(T = k) = (1 - p)^{k-1} p^k$
- $E[T] = \frac{1}{p}$
- $var(T) = \frac{1-p}{p^2}$

Propriedade Fresh-start

- $X \sim Ber\{p\}$

Propriedade Fresh-start

- $X \sim Ber\{p\}$

1	**0**	**1**	**0**						

Propriedade Fresh-start

- $X \sim Ber\{p\}$

0	**0**	**0**	**1**						

Propriedade Fresh-start

- $X \sim Ber\{p\}$

0	**0**	**0**	**1**	**1**					

Exercício

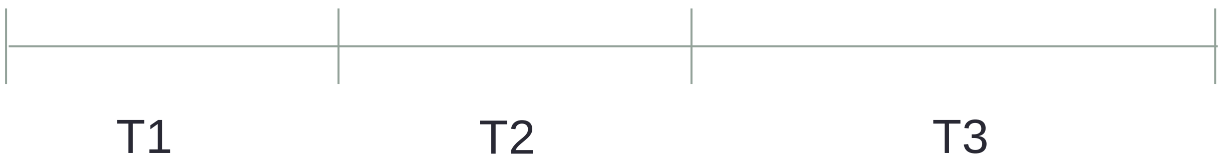
- Considere um processo de Bernoulli com p=1/3. Seja T_1 o tempo até o primeiro sucesso e $T_1 + T_2$ o tempo até o segundo sucesso. Sabe-se que o resultado dos 2 slots que sucedem o primeiro sucesso são falhas. Qual a esperança condicional de T_2 dada essa informação?

Exercício

- Distribuição de um período ocupado
  - Servidor está Busy(B) ou Idle(I)
  - Qual a distribuição da duração do primeiro período Busy

Tempo do k-ésimo sucesso

0	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**			



Y=T1+T2+T3

Tempo do k-ésimo sucesso

0	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**			

Y=T1+T2+T3

- $E[Y] =$
- $var(Y) =$

Tempo do k-ésimo sucesso

0	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**			

Y=T1+T2+T3

- $E[Y] = \frac{k}{p}$
- $var(Y) = \frac{k(1-p)}{p^2}$

Tempo do k-ésimo sucesso

0	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**			

- $p_{Y_k(t)} =$

Tempo do k-ésimo sucesso

0	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**			

T1 T2 T3

- $p_{Y_k(t)} = P(Y_k = t)$

K-ésimo sucesso

0	**1**	**0**	**...**	**0**	**0**	**1**			

X1 X2

Tempo do k-ésimo sucesso

0	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**			

T1 T2 T3

- $p_{Y_k(t)} = P(Y_k = t) = \binom{t-1}{k-1} p^k (1-p)^{t-k}$

K-ésimo sucesso

0	**1**	**0**	**...**	**0**	**0**	**1**			

X1 X2

DÚVIDAS?