PROBABILIDADE E PROCESSOS ESTOCÁSTICOS (CKP7366)

Prof. João Paulo Pordeus Gomes

VARIÁVEIS ALEATÓRIAS CONTÍNUAS (AULA 5)

Variáveis aleatórias contínuas

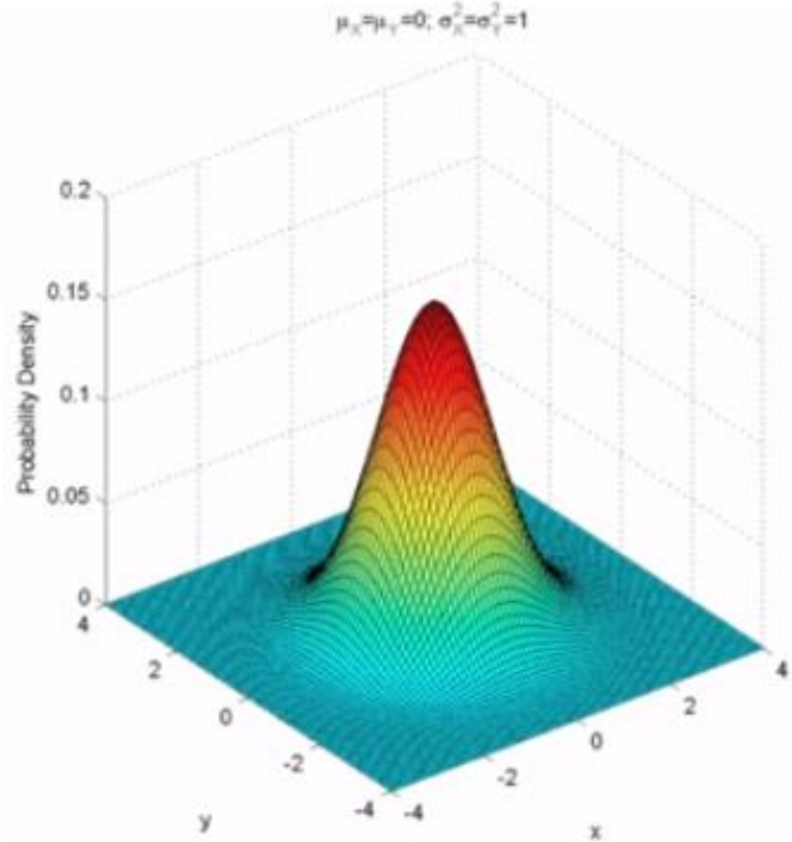
- Independência de normais
- Variações da regra de Bayes

Independência de Normais

- $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$
- $f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$

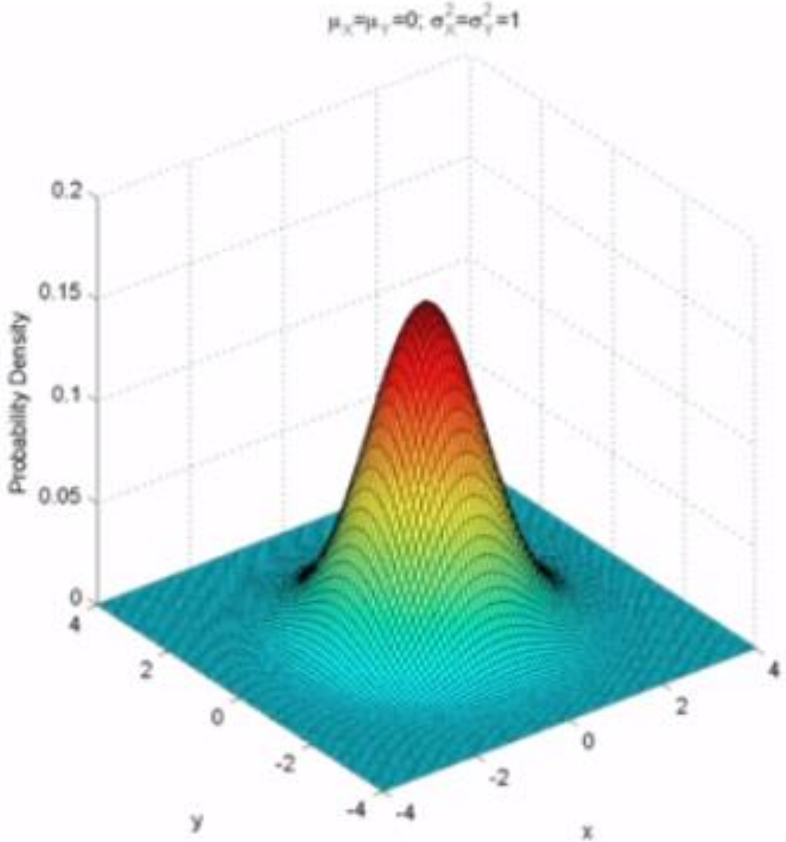
Independência de Normais

- $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$
- $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$
- $f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2}$



Independência de Normais

- $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$
- $f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$
- $f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2}$
- $f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-(x^2+y^2)/2}$

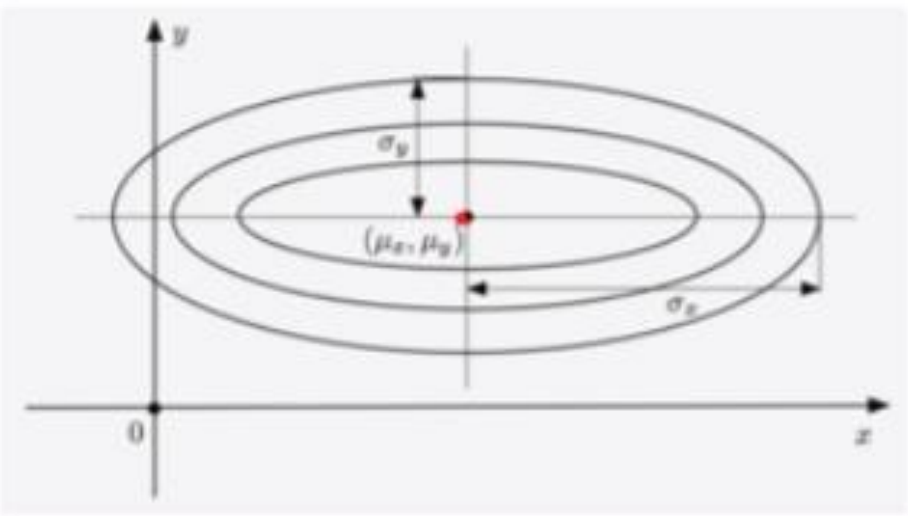


Independência de Normais

- $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$
- $f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} e^{\left\{-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x{}^2} - \frac{(x-\mu_y)^2}{2\sigma_y{}^2}\right\}}$

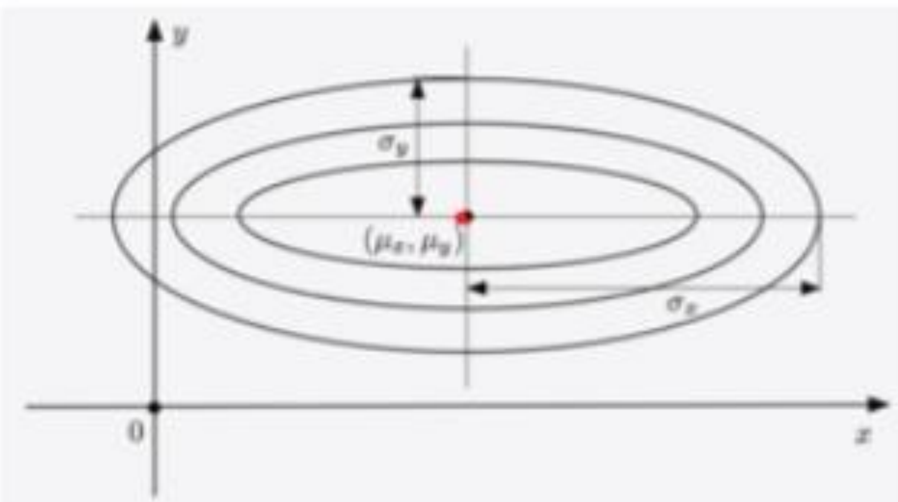
Independência de Normais

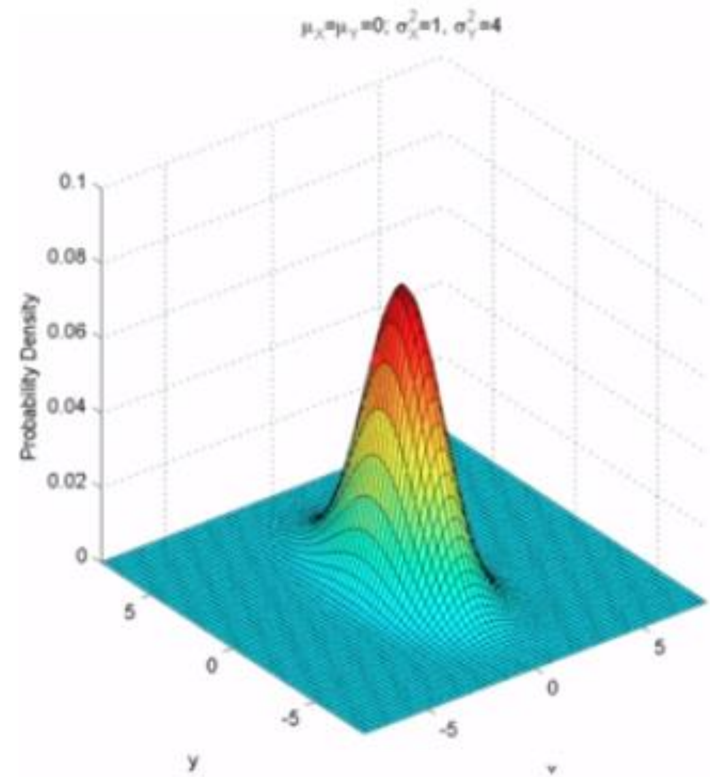
- $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$
- $f_{X,Y}(x,y) = \dfrac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y}e^{\left\{-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x{}^2}-\frac{(x-\mu_y)^2}{2\sigma_y{}^2}\right\}}$



Independência de Normais

- $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$
- $f_{X,Y}(x,y) = \dfrac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} e^{\left\{-\frac{(x-\mu_X)^2}{2\sigma_X{}^2}-\frac{(x-\mu_y)^2}{2\sigma_y{}^2}\right\}}$





Exercício

- Duas v.a. tem distribuição conjunta Normal dada por $f_{X,Y}(x,y) = ce^{-\frac{1}{2}(4x^2-8x+y^2-6y+13)}$.
- Determine os valores esperados e as variâncias de X e Y

Variações da regra de Bayes

- $p_{X|Y}(x|y) = \dfrac{p_{Y|X}(y|x)p_X(x)}{p_Y(y)}$
- $f_{X|Y}(x|y) = \dfrac{f_{Y|X}(y|x)f_X(x)}{f_Y(y)}$

Variações da regra de Bayes

- $p_{X|Y}(x|y) = \frac{p_{Y|X}(y|x)p_X(x)}{p_Y(y)}$
- $f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{Y|X}(y|x)f_X(x)}{f_Y(y)}$

- $p_{X|Y}(x|y) = \frac{p_{Y|X}(y|x)p_X(x)}{\sum_x p_{Y|X}(y|x)p_X(x)}$
- $f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{Y|X}(y|x)f_X(x)}{\int f_{Y|X}(y|x)f_X(x)dx}$

Variações da regra de Bayes

- K – discreta e Y – contínua
- $P(K = k, y \leq Y \leq y + \delta)$

Variações da regra de Bayes

- K – discreta e Y – contínua
- $P(K = k, y \leq Y \leq y + \delta)$
- $P(K = k)P(y \leq Y \leq y + \delta | K = k) = p_K(k) f_{Y|k}(y|k)\ \delta$
- $P(y \leq Y \leq y + \delta)P(K = k | y \leq Y \leq y + \delta) = p_{K|Y}(k|y) f_Y(y)\ \delta$

Variações da regra de Bayes

- K – discreta e Y – contínua
- $P(K = k, y \leq Y \leq y + \delta)$
- $P(K = k)P(y \leq Y \leq y + \delta | K = k) = p_K(k) f_{Y|k}(y|k)\ \delta$
- $P(y \leq Y \leq y + \delta)P(K = k | y \leq Y \leq y + \delta) = p_{K|Y}(k|y) f_Y(y)\ \delta$

- $p_{K|Y}(k|y) = \dfrac{p_K(k) f_{Y|k}(y|k)}{f_Y(y)}$
- $f_{Y|k}(y|k) = \dfrac{f_Y(y) p_{K|Y}(k|y)}{p_K(k)}$

Exemplo

- Um sinal a ser transmitido: K = 1 ou -1
- Uma medida corrompida por ruido: Y = K+W - W~N(0,1)
- Qual a probabilidade de K=1 dado Y=y ?

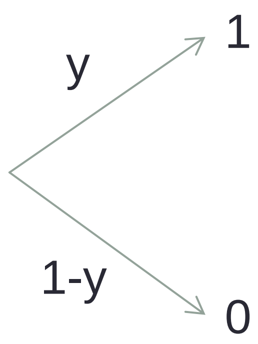
$$p_{K|Y}(k|y) = \frac{p_K(k) f_{Y|k}(y|k)}{f_Y(y)}$$

Exercício

- Seja K v.a. discreta que pode assumir os valores 1, 2 e 3 com igual probabilidade. Suponha que X possua valores em [0,1] e que para x tenhamos:
- $f_{X|K}(x|k) = \begin{cases} 1, & se\ k = 1 \\ 2x, & se\ k = 2 \\ 3x^2, & se\ k = 3 \end{cases}$
- Encontre a probabilidade de K=1 dado que X=1/2

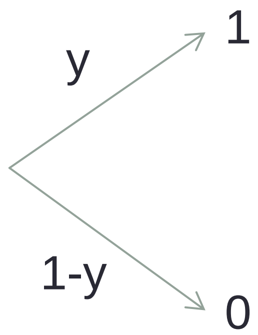
Exemplo

- K – Bernoulli com parâmetro Y



Exemplo

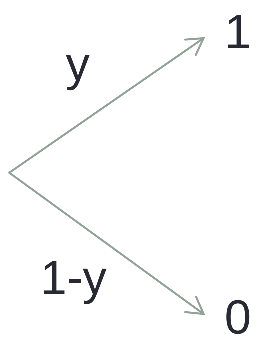
- K – Bernoulli com parâmetro Y



- Y = U(0,1)
- Distribuição de Y dado que K=1

Exemplo

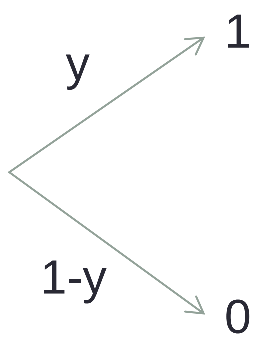
- K – Bernoulli com parâmetro Y



- Y = U(0,1)
- Distribuição de Y dado que K=1
- $f_{Y|k}(y|k) = \dfrac{f_Y(y)p_{K|Y}(k|y)}{p_K(k)}$

Exemplo

- K – Bernoulli com parâmetro Y



- Y = U(0,1)
- Distribuição de Y dado que K=1
- $f_{Y|k}(y|k) = \dfrac{f_Y(y)p_{K|Y}(k|y)}{p_K(k)} = 2y$

DÚVIDAS?