PROBABILIDADE E PROCESSOS ESTOCÁSTICOS (CKP7366)

Prof. João Paulo Pordeus Gomes

PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

Processo de Poisson

- Tempo é contínuo
  - Interpretação: Tempo é dividido em um grande numero de slots com probabilidade baixa de acontecer um evento
  - Probabilidade é proporcional ao tamanho do slot
- Distribuição do numero de sucessos
- PDF todo tempo até a k-esima chegada
- Ausência de memória
- Distribuição do tempo entre chegadas

Processo de Poisson

Processo de Poisson

- Número de sucessos em intervalos disjuntos são independentes

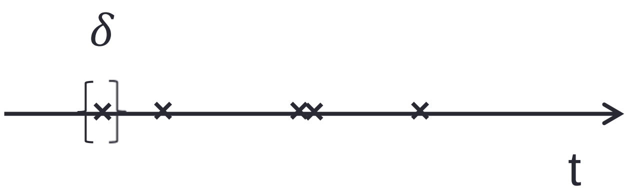
- Independência

Processo de Poisson

- Número de sucessos em intervalos disjuntos são independentes
- $P(k, \tau) =$ Probabilidade de k sucessos em um intervalo de duração τ

- Independência
- Homogeneidade no tempo (mesmo p)

Processo de Poisson



- Número de sucessos em intervalos disjuntos são independentes
- $P(k,\tau) =$ Probabilidade de k sucessos em um intervalo de duração τ
- $P(k,\delta) \approx \begin{cases} 1-\lambda\delta & se\ k=0 \\ \lambda\delta & se\ k=1 \\ 0 & se\ k>1 \end{cases}$
- λ Probabilidade por unidade de tempo

- Independência
- Homogeneidade no tempo (mesmo p)

Processo de Poisson

- Número de sucessos em intervalos disjuntos são independentes
- $P(k,\tau)$ = Probabilidade de k sucessos em um intervalo de duração τ
- $P(k,\delta) = \begin{cases} 1 - \lambda\delta + O(\delta^2) & se\ k = 0 \\ \lambda\delta + O(\delta^2) & se\ k = 1 \\ 0 + O(\delta^2) & se\ k > 1 \end{cases}$
- λ Probabilidade por unidade de tempo (taxa de sucesso ou taxa de chegada)

- Independência
- Homogeneidade no tempo (mesmo p)

Distribuição para numero de chegadas

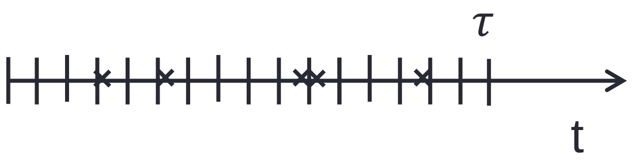
$$P(k, \delta) \rightarrow P(k, \tau)$$

Distribuição para numero de chegadas

$$P(k,\delta) \rightarrow P(k,\tau)$$

- $N_\tau: sucessos\ em\ [0,\tau]$
- $P(k,\tau) = P(N_\tau = k)$

Distribuição para numero de chegadas



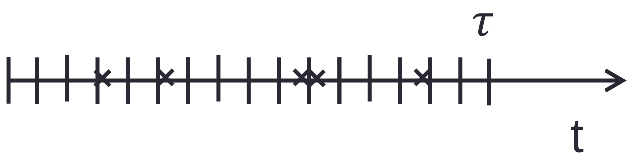
$$P(k,\delta) \to P(k,\tau)$$

- $N_\tau: sucessos\ em\ [0,\tau]$
- $P(k,\tau) = P(N_\tau = k)$
- $n = \tau/\delta$

$$P(S = k) = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} p^k (1-p)^{n-k}$$

- $P(k,\delta) = O(\delta^2)$ para $k > 1$

Distribuição para numero de chegadas



$$P(k, \delta) \rightarrow P(k, \tau)$$

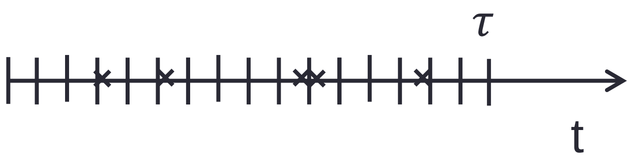
- $N_\tau: sucessos\ em\ [0, \tau]$
- $P(k, \tau) = P(N_\tau = k)$
- $n = \tau/\delta$

- $P(k, \delta) = O(\delta^2)$ para $k > 1$

- $\lambda_* = pn$
- $\lambda_* = \lambda\delta n$
- $\lambda_* = \lambda\delta\tau/\delta$
- $\lambda_* = \lambda\tau$

$$P(S = k) = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} p^k (1-p)^{n-k}$$

Distribuição para numero de chegadas



$$P(k,\delta) \rightarrow P(k,\tau)$$

- $N_\tau: sucessos\ em\ [0,\tau]$
- $P(k,\tau) = P(N_\tau = k)$
- $n = \tau/\delta$

$$P(S=k) = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}p^k(1-p)^{n-k}$$

- $P(k,\delta) = O(\delta^2)$ para $k > 1$

- $\lambda_* = pn$
- $\lambda_* = \lambda\delta n$
- $\lambda_* = \lambda\delta\tau/\delta$
- $\lambda_* = \lambda\tau$

$$P(k,\tau) = \frac{(\lambda\tau)^k}{k!}e^{-\lambda\tau}$$

Média e variância do número de sucessos

- $P(k, \tau) = \frac{(\lambda\tau)^k}{k!} e^{-\lambda\tau}$
- $E[N_\tau] = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{(\lambda\tau)^k}{k!} e^{-\lambda\tau}$

Média e variância do número de sucessos

- $P(k,\tau) = \frac{(\lambda\tau)^k}{k!} e^{-\lambda\tau}$
- $E[N_\tau] = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{(\lambda\tau)^k}{k!} e^{-\lambda\tau} = \lambda\tau$
- $var(N_\tau) = \lambda\tau$

Exemplo

- Você recebe emails segundo uma distribuição de Poisson a uma taxa de $\lambda=5$ mensagens por hora
- Média e variância do numero de emails recebido em um dia ?

Exemplo

- Você recebe emails segundo uma distribuição de Poisson a uma taxa de λ=5 mensagens por hora
- Média e variância do numero de emails recebido em um dia ?
  - $E[N_\tau] = var(N_\tau) = 120$

Exemplo

- Você recebe emails segundo uma distribuição de Poisson a uma taxa de λ=5 mensagens por hora
- Média e variância do numero de emails recebido em um dia ?
  - $E[N_\tau] = var(N_\tau) = 120$
- $P(1\ nova\ mensagem\ na\ proxima\ hora)$

Exemplo

- Você recebe emails segundo uma distribuição de Poisson a uma taxa de λ=5 mensagens por hora
- Média e variância do numero de emails recebido em um dia ?
  - $E[N_\tau] = var(N_\tau) = 120$
- $P(1\ nova\ mensagem\ na\ proxima\ hora)$

$$P(k,\tau) = \frac{(\lambda\tau)^k}{k!} e^{-\lambda\tau}$$

Exemplo

- Você recebe emails segundo uma distribuição de Poisson a uma taxa de λ=5 mensagens por hora
- Média e variância do numero de emails recebido em um dia ?
  - $E[N_\tau] = var(N_\tau) = 120$
- $P(1\ nova\ mensagem\ na\ proxima\ hora) = \mathrm{P}(1,1) = 5e^{-5}$

$$P(k,\tau) = \frac{(\lambda\tau)^k}{k!} e^{-\lambda\tau}$$

Exemplo

- Você recebe emails segundo uma distribuição de Poisson a uma taxa de λ=5 mensagens por hora
- Média e variância do numero de emails recebido em um dia ?
  - $E[N_\tau] = var(N_\tau) = 120$
- $P(1\ nova\ mensagem\ na\ proxima\ hora) = \mathrm{P}(1{,}1) = 5e^{-5}$
- $P(2\ mensagens\ durante\ cada\ uma\ das\ proximas\ 3\ horas)$

Exemplo

- Você recebe emails segundo uma distribuição de Poisson a uma taxa de λ=5 mensagens por hora
- Média e variância do numero de emails recebido em um dia ?
  - $E[N_\tau] = var(N_\tau) = 120$
- $P(1\ nova\ mensagem\ na\ proxima\ hora) = \mathrm{P}(1,1) = 5e^{-5}$
- $P(2\ mensagens\ durante\ cada\ uma\ das\ proximas\ 3\ horas)$
  - $(P(2,1))^3 = \left(\frac{5^2 e^{-5}}{2}\right)^3$

Exercício

- Considere um processo de Poisson com uma taxa de sucesso por hora dada por λ. Seja $P(0,1)=a$, $P(1,1)=b$ e $P(2,1) = c$, onde $P(k,1)$ é a probabilidade de exatamente k chegadas em uma hora.
- Qual a probabilidade de termos pelo menos uma chegada entre 10:00 e 11:00 e exatamente duas chegadas entre 10:00 e 12:00?

Tempo até a primeira chegada

- Encontrar a PDF

Tempo até a primeira chegada

- Encontrar a PDF
  - Encontrar a CDF $\rightarrow P(T \leq t)$

Tempo até a primeira chegada

- Encontrar a PDF
  - Encontrar a CDF $\rightarrow P(T \leq t) = 1 - P(0, t) = 1 - e^{-\lambda t}$

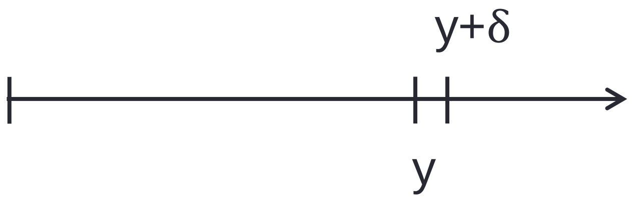
Tempo até a primeira chegada

- Encontrar a PDF
  - Encontrar a CDF $\rightarrow P(T \leq t) = 1 - P(0, t) = 1 - e^{-\lambda t}$
- $f_T(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ PDF da exponencial

Tempo até a k-ésima chegada

$P(Y_k \leq y)$

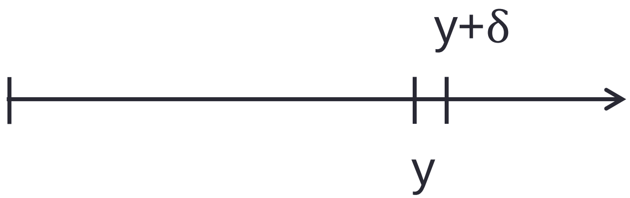
Tempo até a k-ésima chegada



$P(Y_k \leq y)$

- $f_{Y_k}(y)\delta \approx P(y \leq Y_k \leq y + \delta) = P(k-1, y)\lambda\delta$

Tempo até a k-ésima chegada

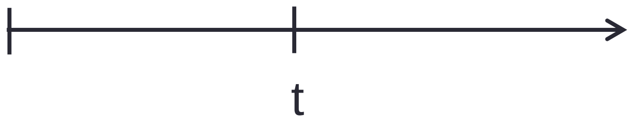


$P(Y_k \leq y)$

- $f_{Y_k}(y)\delta \approx P(y \leq Y_k \leq y + \delta) = P(k-1, y)\lambda\delta$
- $f_{Y_k}(y) = \frac{(\lambda\tau)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda\tau}\lambda$

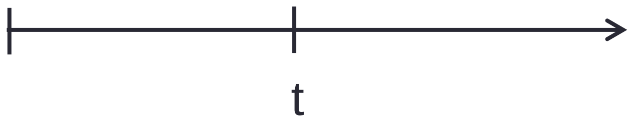
Distribuição de Erlang

Ausência de memória e Fresh start



- Se a observação se inicia em t, temos um novo processo idêntico
    - Tempo até próxima chegada (exponencial com parâmetro λ)
- Tempo entre chegadas
    - $T = Y_2 - Y_1$ (exponencial com parâmetro λ)

Ausência de memória e Fresh start



- Se a observação se inicia em t, temos um novo processo idêntico
  - Tempo até próxima chegada (exponencial com parâmetro λ)
- Tempo entre chegadas
  - $T = Y_2 - Y_1$ (exponencial com parâmetro λ)
- Tempo até a k-ésima chegada
  - $Y_k = T_1 + T_2 + \cdots + T_k$
  - $E[Y_k] = k/\lambda$
  - $var(Y_k) = k/\lambda^2$

DÚVIDAS?