PROBABILIDADE E PROCESSOS ESTOCÁSTICOS (CKP7366)

Prof. João Paulo Pordeus Gomes

VARIÁVEIS ALEATÓRIAS CONTÍNUAS (AULA 3)

Variáveis aleatórias contínuas

- PDF conjunta
  - Conjunta e marginais
  - PDF conjunta uniforme
  - Valor esperado e linearidade das esperanças
  - CDF conjunta

PDF conjunta

- $p_{X,Y}(x, y) = P(X = x \cap Y = y)$

PDF conjunta

- $p_{X,Y}(x, y) = P(X = x \cap Y = y)$
- Calculando probabilidades
  - $P\big((X, Y) \in B\big) = \sum_{x \in B} \sum_{y \in B} p_{X,Y}(x, y)$

PDF conjunta

- $p_{X,Y}(x, y) = P(X = x \cap Y = y)$
- Calculando probabilidades
  - $P\big((X, Y) \in B\big) = \sum_{x \in B} \sum_{y \in B} p_{X,Y}(x, y)$
  - Para o caso contínuo
  - $P\big((X, Y) \in B\big) = \iint_{(x,y) \in B} f_{X,Y}(x, y)dxdy$

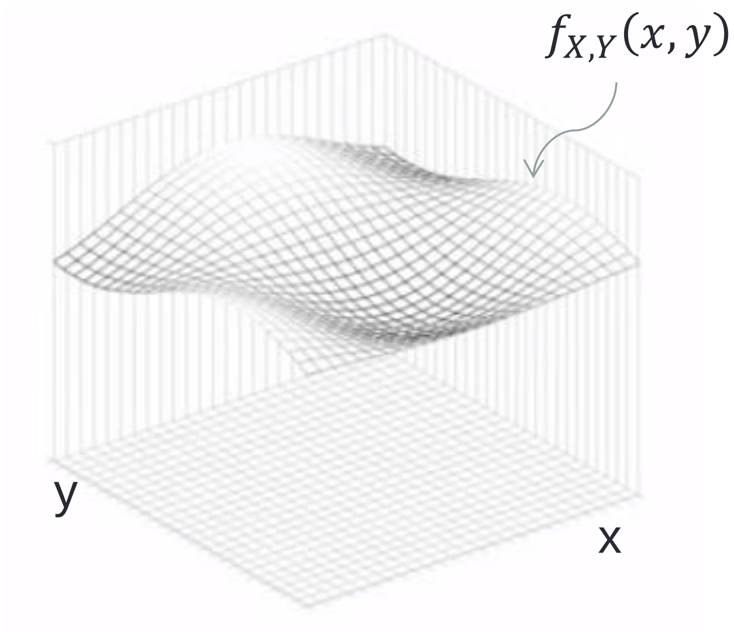
PDF conjunta

- $p_{X,Y}(x, y) = P(X = x \cap Y = y)$
- Calculando probabilidades
  - $P\big((X, Y) \in B\big) = \sum_{x \in B} \sum_{y \in B} p_{X,Y}(x, y)$
  - Para o caso contínuo
  - $P\big((X, Y) \in B\big) = \iint_{(x,y) \in B} f_{X,Y}(x, y)dxdy$

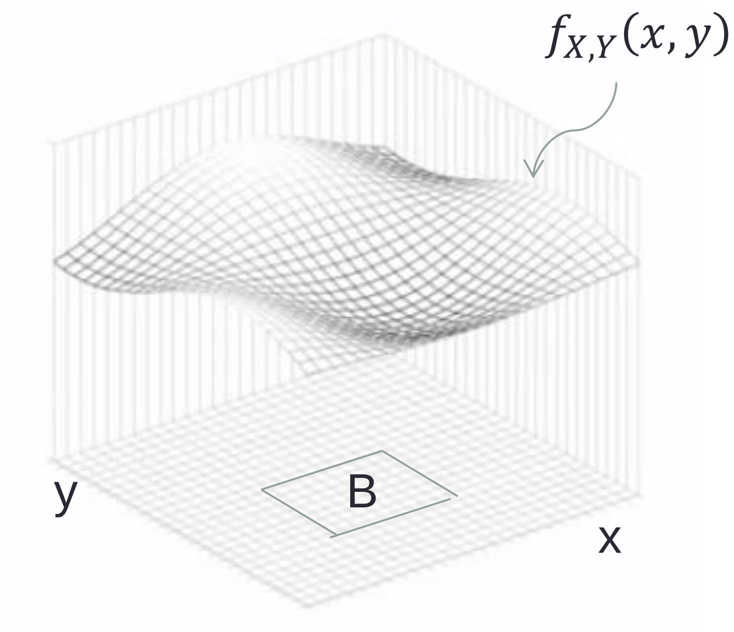
  - $\sum_x \sum_y p_{X,Y}(x, y) = 1$
  - $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)dxdy = 1$

Duas v.a. são conjuntamente contínuas se estas podem ser descritas por uma PDF conjunta

PDF conjunta

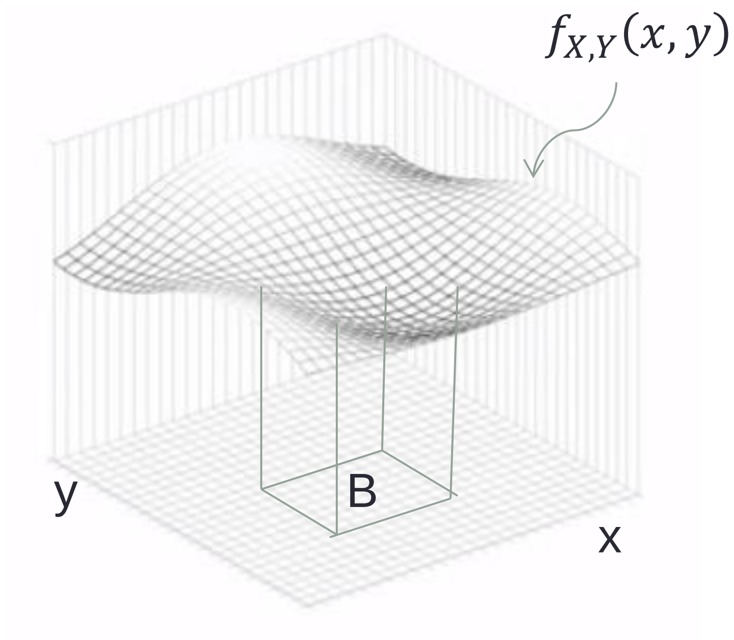


PDF conjunta



$$P\big((X,Y) \in B\big) = \iint_{(x,y)\in B} f_{X,Y}(x,y)dxdy$$

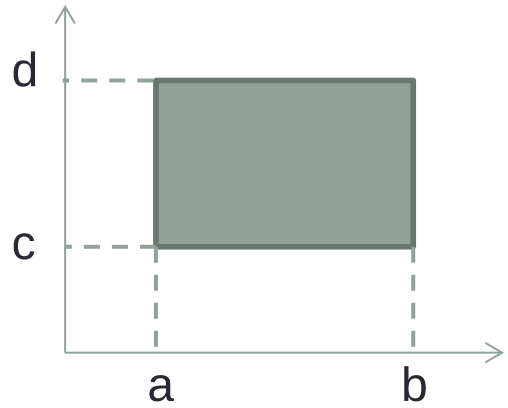
PDF conjunta



$$P\big((X,Y) \in B\big) = \iint_{(x,y)\in B} f_{X,Y}(x,y)dxdy$$

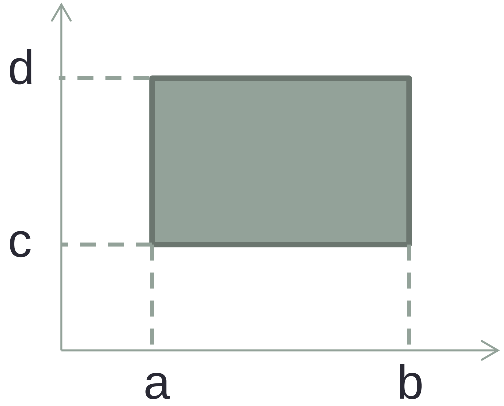
PDF conjunta

- $P\big((X,Y) \in B\big) = \iint_{(x,y)\in B} f_{X,Y}(x,y)dxdy$



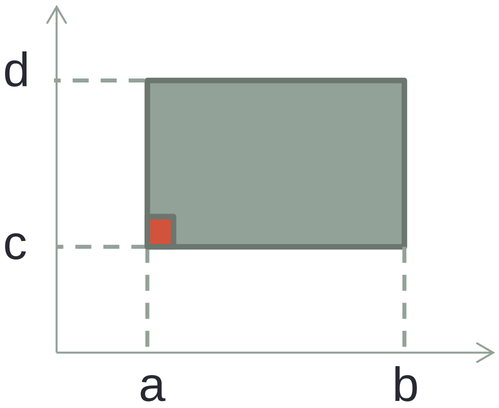
PDF conjunta

- $P\big((X,Y) \in B\big) = \iint_{(x,y)\in B} f_{X,Y}(x,y)dxdy$
- $P(a \le X \le b, c \le Y \le d) = \int_c^d \int_a^b f_{X,Y}(x,y)dxdy$



PDF conjunta

- $P\big((X,Y) \in B\big) = \iint_{(x,y)\in B} f_{X,Y}(x,y)dxdy$
- $P(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d) = \int_c^d \int_a^b f_{X,Y}(x,y)dxdy$



- $P(a \leq X \leq a + \delta, c \leq Y \leq c + \delta) = f_{X,Y}(x,y)\delta^2$

Exercício

- A probabilidade de um evento em que $0 \leq Y \leq X \leq 1$ é dada na forma $\int_a^b \left(\int_c^d f_{X,Y}(x,y)dx \right) dy$. Encontre os valores de a, b, c e d (o valores possíveis são 0, x, y e 1)

Conjunta e Marginais

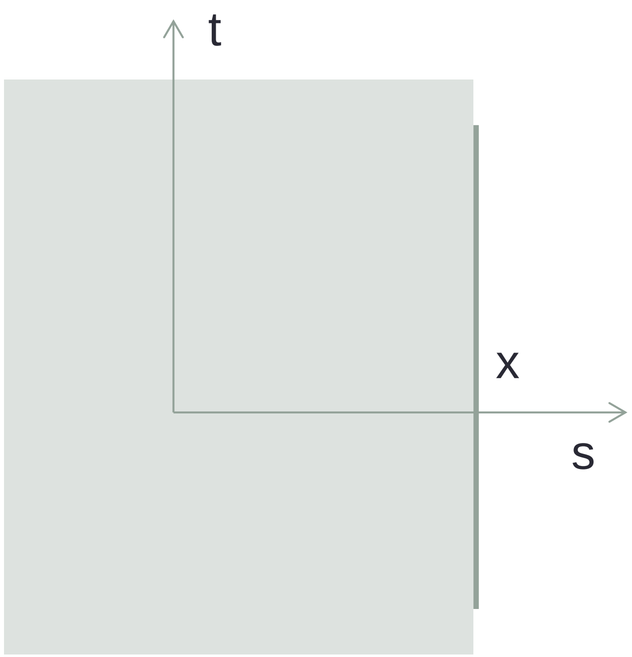
- $p_X(x) = \sum_y p_{X,Y}(x, y)$
- $p_Y(y) = \sum_x p_{X,Y}(x, y)$

Conjunta e Marginais

- $p_X(x) = \sum_y p_{X,Y}(x, y)$
- $p_Y(y) = \sum_x p_{X,Y}(x, y)$
- Caso contínuo
- $f_X(x) = \int f_{X,Y}(x, y)dy$
- $f_Y(y) = \int f_{X,Y}(x, y)dx$

Conjunta e Marginais

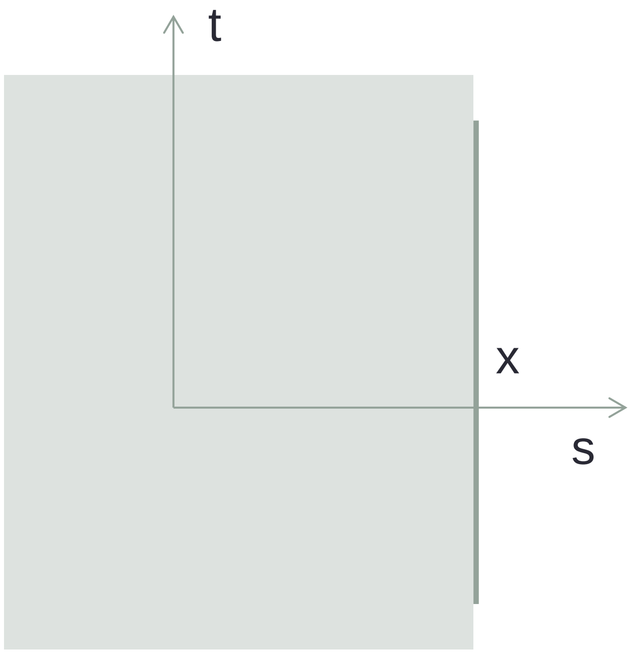
- $p_X(x) = \sum_y p_{X,Y}(x,y)$
- $p_Y(y) = \sum_x p_{X,Y}(x,y)$
- Caso contínuo
- $f_X(x) = \int f_{X,Y}(x,y)dy$
- $f_Y(y) = \int f_{X,Y}(x,y)dx$



- $F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(s,t)dtds$

Conjunta e Marginais

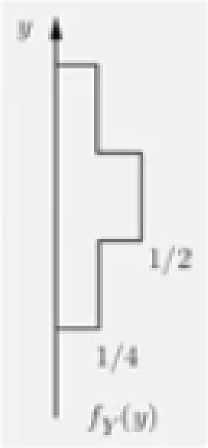
- $p_X(x) = \sum_y p_{X,Y}(x,y)$
- $p_Y(y) = \sum_x p_{X,Y}(x,y)$
- Caso contínuo
- $f_X(x) = \int f_{X,Y}(x,y)dy$
- $f_Y(y) = \int f_{X,Y}(x,y)dx$

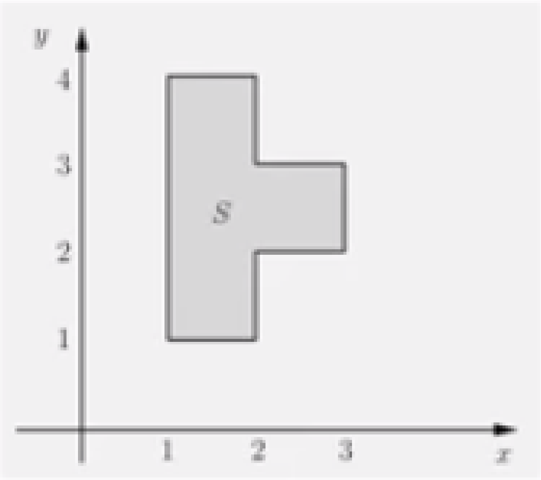


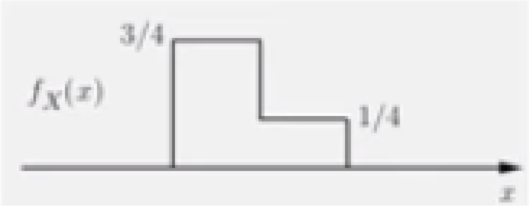
- $F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(s,t)dtds$
- $f_X(x) = \frac{dF_X}{dx}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy$

PDF conjunta Uniforme

- $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{Area\ de\ S}, & se\ (x,y) \in S \\ 0, & caso\ contrário \end{cases}$







Exercício

- As v.a. X e Y são descritas por uma CDF uniforme da forma $f_{X,Y}(x, y) = 3$ no conjunto $\{(x, y)|0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1,\ \ y \leq x^2\}$
- Encontre $f_X(0.5)$

Mais de duas v.a.

- $\sum_{x,yz} p_{X,Y,Z}(x,y,z) = 1$
- $p_X(x) = \sum_y \sum_z p_{X,Y,Z}(x,y,z)$
- $p_{X,Y}(x,y) = \sum_z p_{X,Y,Z}(x,y,z)$

Mais de duas v.a.

- $\sum_{x,yz} p_{X,Y,Z}(x,y,z) = 1$
- $p_X(x) = \sum_y \sum_z p_{X,Y,Z}(x,y,z)$
- $p_{X,Y}(x,y) = \sum_z p_{X,Y,Z}(x,y,z)$
- Para o caso contínuo
- $\int_{x,y,z} f_{X,Y,Z}(x,y,z)dxdydz = 1$
- $f_X(x) = \int_{y,z} f_{X,Y,Z}(x,y,z)dyd$
- $f_{X,Y}(x,y) = \int_z \ f_{X,Y,Z}(x,y,z)dz$

Funções de múltiplas v.a

- $Z = g(X, Y)$
- Regra do valor esperado
- $E[g(X, Y)] = \sum_y \sum_x g(x, y) p_{X,Y}(x, y)$

Funções de múltiplas v.a

- $Z = g(X, Y)$
- Regra do valor esperado
- $E[g(X,Y)] = \sum_y \sum_x g(x,y) p_{X,Y}(x,y)$
- $E[g(X,Y)] = \int \int g(x,y) f_{X,Y}(x,y) dxdy$

Funções de múltiplas v.a

- $Z = g(X, Y)$
- Regra do valor esperado
- $E[g(X,Y)] = \sum_y \sum_x g(x,y) p_{X,Y}(x,y)$
- $E[g(X,Y)] = \int \int g(x,y) f_{X,Y}(x,y) dxdy$
- Linearidade das esperanças
- $E[aX + b] = a\, E[X] + b$
- $E[X + Y] = E[X] + E[Y]$

Exercício

- Sejam duas variáveis aleatórioa X e Y que possuem distribuição conjunta uniforme definida sob os vertices de um triangulo em (0,0), (0,1) e (1,0)
- Encontre a PDF conjunta de X e Y
- Encontre a PDF marginal de Y
- Encontre a PDF condicional de X dado Y
- Encontre $E[X|Y=y]$

CDF conjunta

- $F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X\,(k)dk$
- $\frac{dF_X(x)}{dx} = f_X(x)$

CDF conjunta

- $F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X\,(k)dk$
- $\frac{dF_X(x)}{dx} = f_X(x)$

- $F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f_{X,Y}(s,t)dsdt$
- $\frac{\partial F_{X,Y}(x,y)}{\partial x \partial y} = f_{X,Y}(x,y)$

DÚVIDAS?