

Variáveis Aleatórias Discretas

Questão 1

Considere duas variáveis aleatórias X e Y respectivamente o resultado da primeira e da segunda jogada de um mesmo dado justo de 4 lados. Considere a variável aleatória $Z = XY$, Calcule:

- a) $p_Z(4)$
- b) $p_Z(5)$
- c) $\sum_{i=0}^{16} p_Z(i)$

Nas questões seguinte considere o evento de 4 jogadas seguidas de um dado justo de 6 lados e W uma variável aleatória que conta a quantidade de vezes que o dado resultou em 3 ou 5. Calcule:

- d) $p_W(3.5)$
- e) $p_W(1)$
- f) Qual a probabilidade que a primeira ocorrência de um número ímpar seja depois da décima jogada?

Questão 2

Considere 10 jogadas de uma moeda com probabilidade p de cara, onde $0 \leq p \leq 1$. Responda as questões abaixo em função de p .

- a) Seja **A** o evento em que a moeda resultou em 6 caras nas primeiras 8 jogadas. Qual a probabilidade da moeda dar cara na nona jogada?
- b) Qual a probabilidade de ter 3 caras nas primeiras 4 jogadas e 2 caras nas últimas 3 jogadas?
- c) Dado que ocorreram 4 caras nas primeiras 7 jogadas, Calcule a probabilidade que a segunda cara ocorreu na 4ª jogada. A resposta não deve estar em função de p .
- d) Qual a probabilidade das 6 primeiras jogadas resultarem em 5 caras e 3 caras resultarem das 5 últimas?

Questão 3

Seja A e B as variáveis aleatórias correspondentes a primeira e a segunda jogada de um dado justo de 3 lados. Seja $X = B - A$, calcule as seguintes probabilidades:

- a) $p_X(0)$
- b) $p_X(1)$

- c) $p_X(-2)$
- d) $p_X(3)$
- e) Qual a esperança $\mathbf{E}[X]$?
- f) Qual a variância $\text{Var}(X)$

Dado que $Y = X^2$, calcule:

- a) $p_Y(0)$
- b) $p_Y(1)$
- c) $p_Y(2)$

Questão 4

As variáveis aleatórias X e Y tem a seguinte função de probabilidade conjunta:

$$p_{X,Y}(x, y) \begin{cases} c \cdot (x + y)^2, & \text{se } x \in \{1, 2, 4\} \text{ e } y \in \{1, 3\} \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

- a) Qual o valor da constante c .

Calcule as probabilidades abaixo:

- b) $\mathbf{P}(Y < X)$
- c) $\mathbf{P}(Y = X)$
- d) $\mathbf{P}(X = 1)$
- e) $\mathbf{P}(X = 2)$
- f) $\mathbf{P}(X = 3)$
- g) $\mathbf{P}(X = 4)$
- h) Qual a esperança $\mathbf{E}[X]$ e a $\mathbf{E}[XY]$?
- i) Qual a $\text{Var}(X)$?

Questão 5

A função de massa de probabilidade (fmp) conjunta de duas variáveis aleatórias X e Y é dado na tabela abaixo:

y=1	4c	0	2c	8c
y=0	3c	2c	0	2c
y=-1	2c	0	c	4c
	x=-2	x=-1	x=0	x=1

- a) Calcule a constante c .

- b) Calcule $p_X(1)$.
- c) Suponha que $Z = X^2 Y^3$. Calcule $\mathbf{E}[Z | Y = -1]$.
- d) Condiicionado a $Y \neq 0$. X e Y são independentes?
- e) Calcule $\text{Var}(Y | X = 0)$

Questão 6

Seja A uma moeda justa e B uma moeda com probabilidade de cara $1/3$. Seja C o evento onde escolhemos a moeda A com probabilidade de $1/4$ e escolhemos B com probabilidade de $3/4$ e jogamos a moeda escolhida até resultar em cara pela primeira vez. Qual o valor esperado do número de jogadas antes da primeira cara?

Questão 7

Seja X uma variável aleatória geométrica tal que $\text{Var}(X) = 5$. Calcule:

- a) $\text{Var}(X - 4 | X > 4)$
- b) $\text{Var}(X - 8 | X > 4)$