PROBABILIDADE E PROCESSOS ESTOCÁSTICOS (CKP7366)

Prof. João Paulo Pordeus Gomes

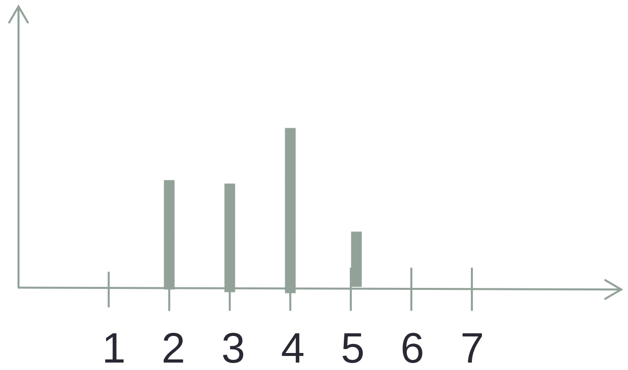
VARIÁVEIS ALEATÓRIAS DISCRETAS (AULA 2)

Variáveis aleatórias discretas

- Variância
- Condicionamento
  - Distribuição, variância e esperança
  - Teorema da esperança total
- Variável aleatória geométrica
  - Valor esperado
- Múltiplas variáveis aleatórias
- Valor esperado de uma variável aleatória Binomial

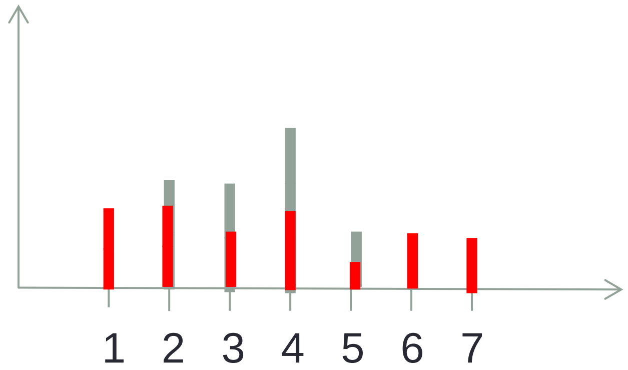
Variância

- Medida de dispersão
- Considere X com média $\mu = E[X]$



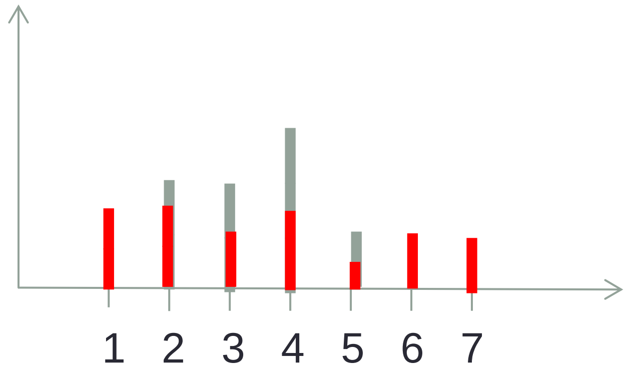
Variância

- Medida de dispersão
- Considere X com média $\mu = E[X]$



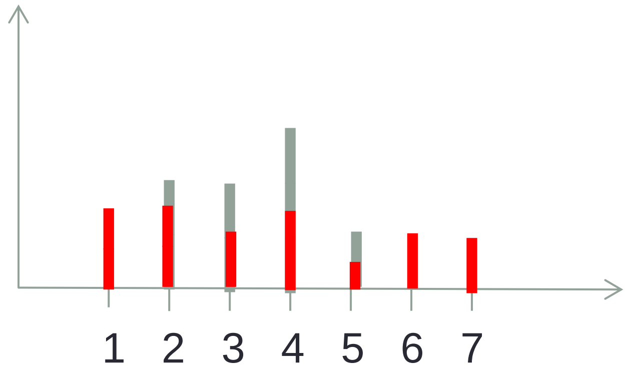
Variância

- Medida de dispersão
- Considere X com média $\mu = E[X]$
- Distância até a média
  - $E[X - \mu]$



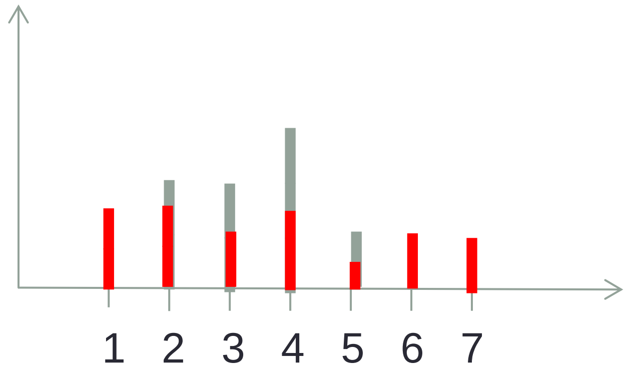
Variância

- Medida de dispersão
- Considere X com média $\mu = E[X]$
- Distância até a média
  - $E[X - \mu] = E[X] - \mu = 0$



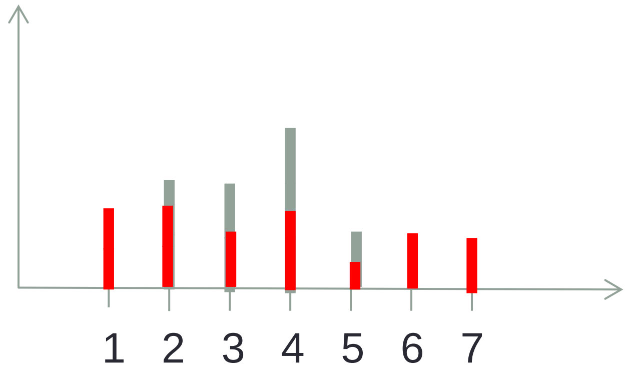
Variância

- Medida de dispersão
- Considere X com média $\mu = E[X]$
- Distância até a média
  - $var(X) = E[(X - \mu)^2]$



Variância

- Medida de dispersão
- Considere X com média $\mu = E[X]$
- Distância até a média
  - $var(X) = E[(X-\mu)^2] = \sum_x g(x)p_X(x) = \sum_x (x-\mu)^2 p_X(x)$



Propriedades da Variância

- $\mu = E[X]$
- Y = X + b

Propriedades da Variância

- $\mu = E[X]$
- Y = X + b
  - $\upsilon = E[Y] = E[X] + b$

Propriedades da Variância

- $\mu = E[X]$
- Y = X + b
  - $\upsilon = E[Y] = E[X] + b$
  - $var(Y) = E[(Y - \upsilon)^2] = E[(X + b - \mu - b)^2] = var(X)$

Propriedades da Variância

- $\mu = E[X]$
- Y = aX

Propriedades da Variância

- $\mu = E[X]$
- Y = aX
  - $\upsilon = E[Y] = E[aX] = a\mu$

Propriedades da Variância

- $\mu = E[X]$
- Y = aX
  - $\upsilon = E[Y] = E[aX] = a\mu$
  - $var(Y) = E[(Y - \upsilon)^2] = E[(aX - a\mu)^2]$

Propriedades da Variância

- $\mu = E[X]$
- Y = aX
  - $v = E[Y] = E[aX] = a\mu$
  - $var(Y) = E[(Y - v)^2] = E[(aX - a\mu)^2] = E[a^2(X - \mu)^2]$
    $= a^2\, E[(X - \mu)^2]$

Propriedades da Variância

- $\mu = E[X]$
- Y = aX
  - $v = E[Y] = E[aX] = a\mu$
  - $var(Y) = E[(Y - v)^2] = E[(aX - a\mu)^2] = E[a^2(X - \mu)^2]$
    $= a^2\, E[(X - \mu)^2]$

$$\boxed{var(aX + b) = a^2 var(X)}$$

Propriedades da Variância

- $var(X) = E[X^2] - E[X]^2$

Propriedades da Variância

- $var(X) = E[X^2] - E[X]^2$
  - $var(X) = E[(X - \mu)^2]$
  - $= E[X^2 + 2X\mu + \mu^2]$
  - $= E[X^2] + E[2X\mu] + \mu^2 = E[X^2] + 2\mu E[X] + \mu^2 = E[X^2] - E[X]^2$

Variância de uma v.a. Bernoulli

- $p_X(1) = p$ e $p_X(0) = 1 - p$

Variância de uma v.a. Bernoulli

- $p_X(1) = p$ e $p_X(0) = 1 - p$
- $E[X] = p$
- $var(X) = E[(X - p)^2] = E[X^2] - p^2 = p - p^2$

Variância de uma v.a. Uniforme

- Parâmetros 0 e n
- $var(X) = E[(X-\mu)^2] = E[X^2] - \left(\frac{n}{2}\right)^2$

Variância de uma v.a. Uniforme

- Parâmetros 0 e n
- $var(X) = E[(X-\mu)^2] = E[X^2] - \left(\frac{n}{2}\right)^2$
  - $E[X^2] = 0\,\frac{1}{n+1} + 1^2\,\frac{1}{n+1} + \cdots n^2\,\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1}\frac{n^2(n+1)}{2} = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

Variância de uma v.a. Uniforme

- Parâmetros 0 e n
- $var(X) = E[(X-\mu)^2] = E[X^2] - \left(\frac{n}{2}\right)^2$
  - $E[X^2] = 0\,\frac{1}{n+1} + 1^2\,\frac{1}{n+1} + \cdots n^2\,\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1}\frac{n^2(n+1)}{2} = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$
- $var(X) = E[(X-\mu)^2] = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - \left(\frac{n}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}n(n+2)$

Variância de uma v.a. Uniforme

- Parâmetros 0 e n
- $var(X) = E[(X-\mu)^2] = E[X^2] - \left(\frac{n}{2}\right)^2$
  - $E[X^2] = 0\,\frac{1}{n+1} + 1^2\,\frac{1}{n+1} + \cdots n^2\,\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1}\frac{n^2(n+1)}{2} = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$
- $var(X) = E[(X-\mu)^2] = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - \left(\frac{n}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}n(n+2)$
- Para o caso geral
  - $var(X) = \frac{1}{12}(b-a)(b-a+2)$

Condicionamento

- Esperança condicional e distribuição condicional

Condicionamento

- $p_X(X) = P(X = x)$

Condicionamento

- $p_X(X) = P(X = x) \rightarrow p_{X|A}(X) = P(X = x|A)$

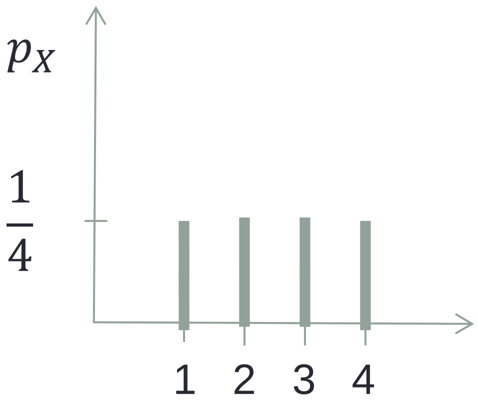
Condicionamento

- $p_X(X) = P(X = x) \rightarrow p_{X|A}(X) = P(X = x|A)$
- $E[X] = \sum_x x p_X(x) \rightarrow E[X|A] = \sum_x x p_{X|A}(x)$

Condicionamento

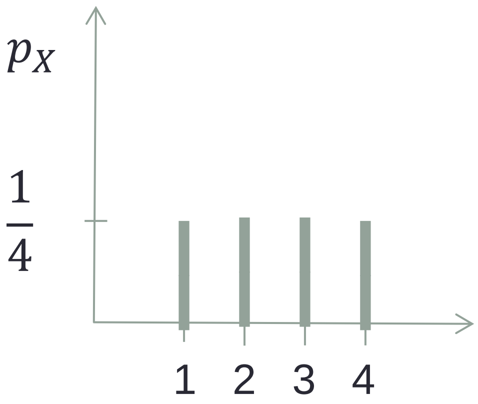
- $p_X(X) = P(X = x) \rightarrow p_{X|A}(X) = P(X = x|A)$
- $E[X] = \sum_x x p_X(x) \rightarrow E[X|A] = \sum_x x p_{X|A}(x)$
- $E[g(X)] = \sum_x g(x) p_X(x) \rightarrow E[X|A] = \sum_x g(x) p_{X|A}(x)$

Exemplo

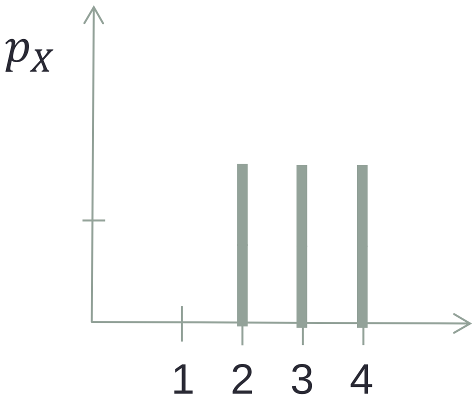


- $E[X] = 2.5$
- $var(X) = \frac{1}{12}(b-a)(b-a+2) = \frac{5}{4}$

Exemplo

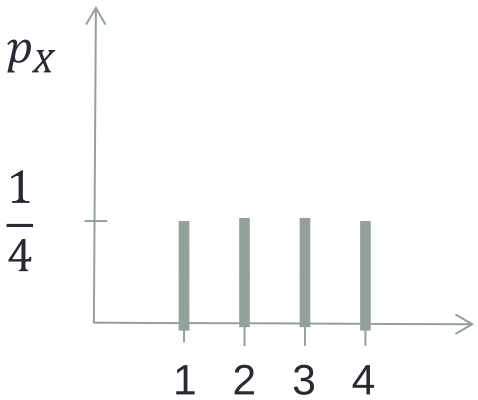


Evento A aconteceu

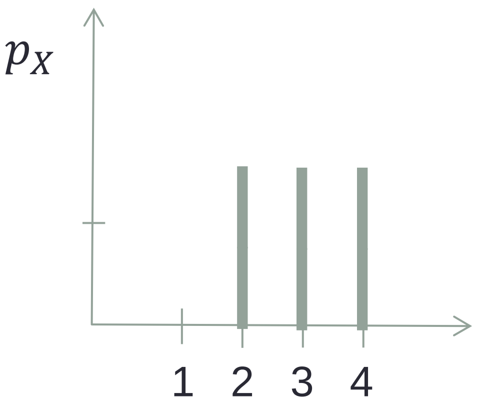


- $E[X] = 2.5$
- $var(X) = \frac{1}{12}(b-a)(b-a+2) = \frac{5}{4}$

Exemplo



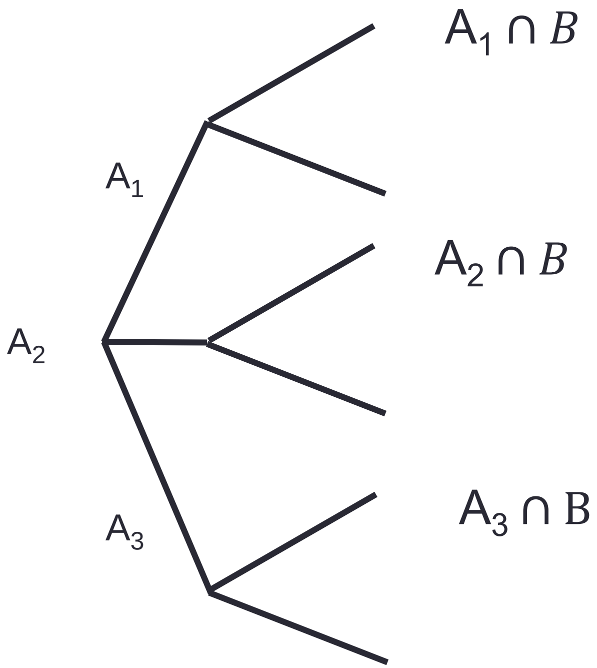
Evento A aconteceu



- $E[X] = 2.5$
- $var(X) = \frac{1}{12}(b-a)(b-a+2) = \frac{5}{4}$

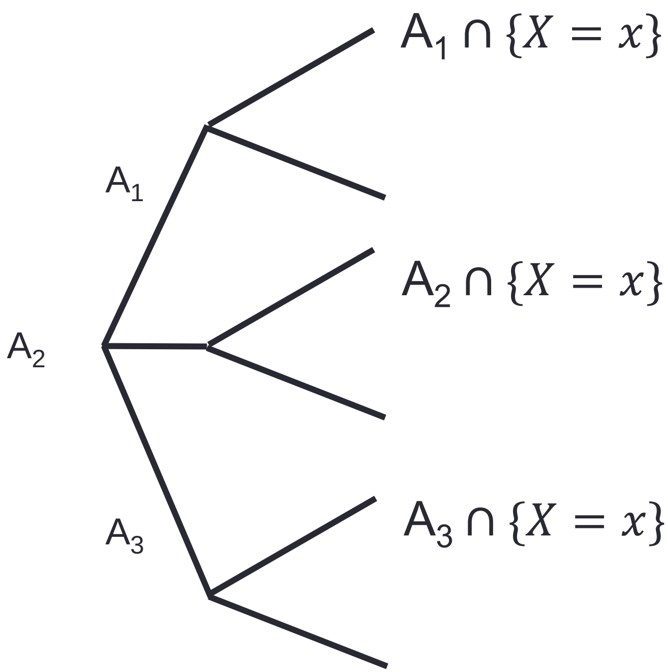
- $E[X|A] = 3$
- $var(X|A) = \frac{1}{3}(4-3)^2 + \frac{1}{3}(3-3)^2 + \frac{1}{3}(2-3)^2 = \frac{2}{3}$

Teorema da Esperança Total



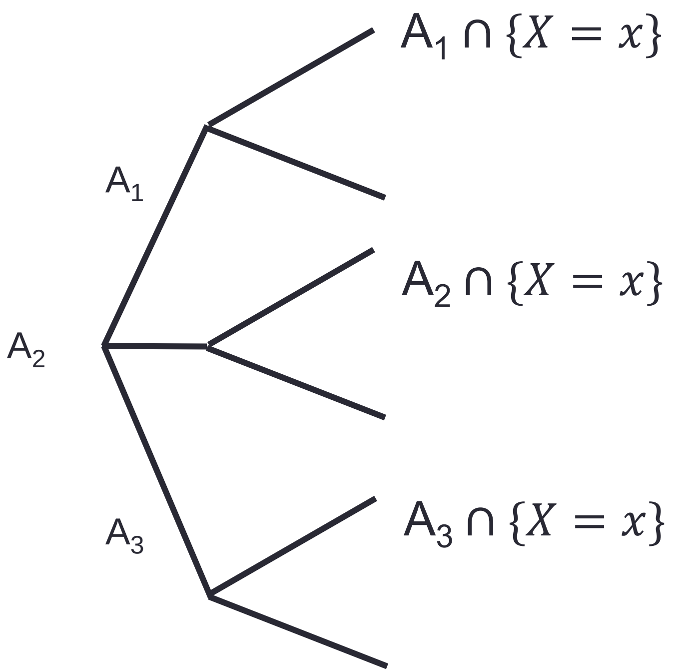
- $P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + \cdots + P(A_n)P(B|A_n)$

Teorema da Esperança Total



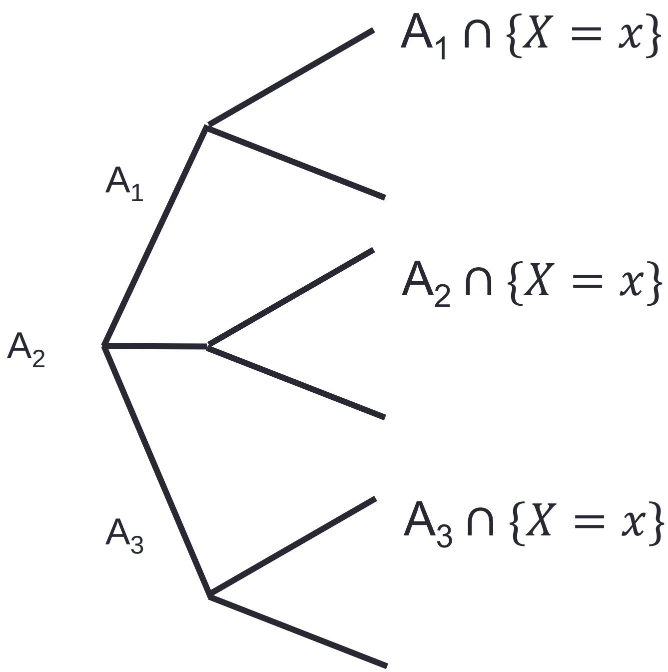
- $P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + \cdots + P(A_n)P(B|A_n)$
- $B = \{X = x\}$
- $p_X(x) = P(A_1)p_{X|A}(x) + \cdots + P(A_n)p_{X|A_n}(x)$

Teorema da Esperança Total



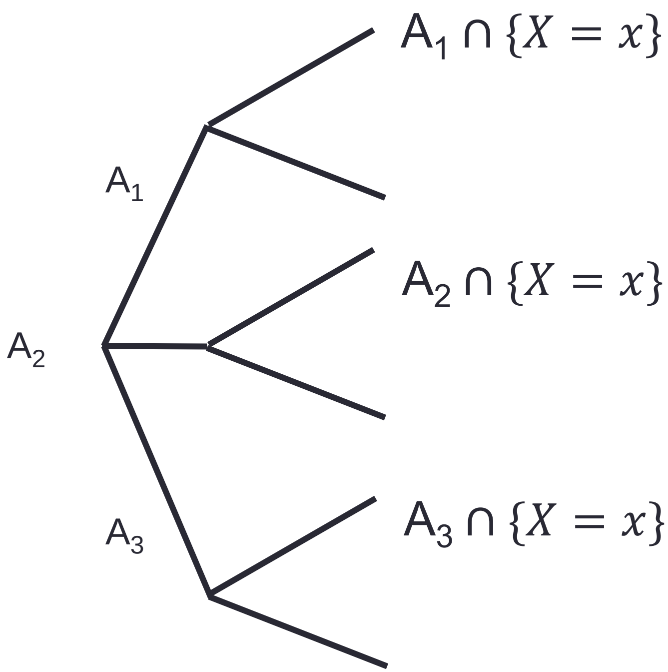
- $P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + \cdots + P(A_n)P(B|A_n)$
- $B = \{X = x\}$
- $p_X(x) = P(A_1)p_{X|A}(x) + \cdots + P(A_n)p_{X|A_n}(x)$
- Para todo x

Teorema da Esperança Total



- $P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + \cdots + P(A_n)P(B|A_n)$
- $B = \{X = x\}$
- $p_X(x) = P(A_1)p_{X|A}(x) + \cdots + P(A_n)p_{X|A_n}(x)$
- Para todo x
- $\sum_x x p_X(x) =$
  $P(A_1)\sum_x x p_{X|A}(x) + \cdots + P(A_n)\sum_x x p_{X|A_n}(x)$

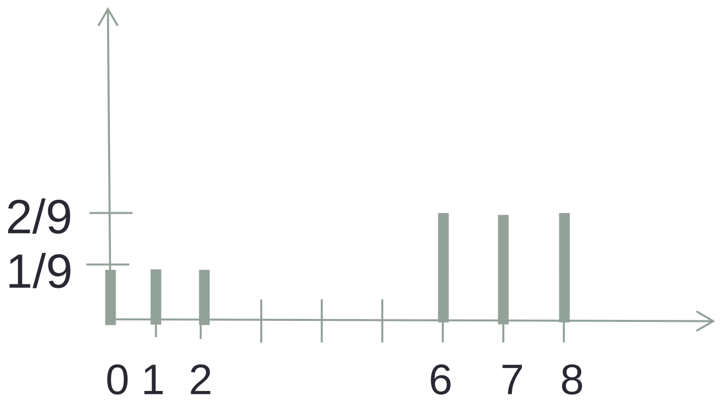
Teorema da Esperança Total



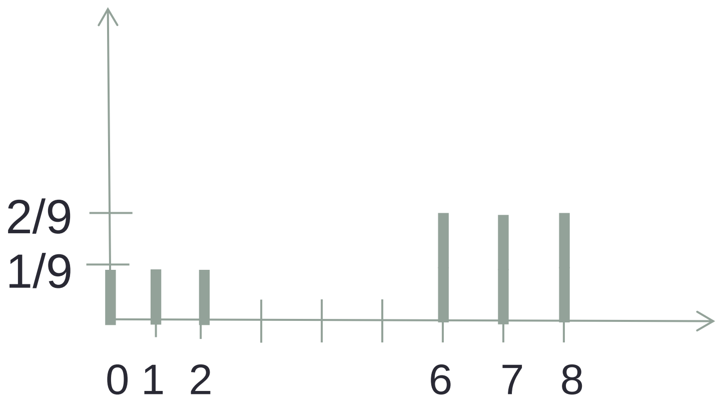
- $P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + \cdots + P(A_n)P(B|A_n)$
- $B = \{X = x\}$
- $p_X(x) = P(A_1)p_{X|A}(x) + \cdots + P(A_n)p_{X|A_n}(x)$
- Para todo x
- $\sum_x x p_X(x) = P(A_1)\sum_x x p_{X|A}(x) + \cdots + P(A_n)\sum_x x p_{X|A_n}(x)$

- $E[x] = P(A_1)E[X|A_1] + \cdots + P(A_n)E[X|A_n]$

Exemplo

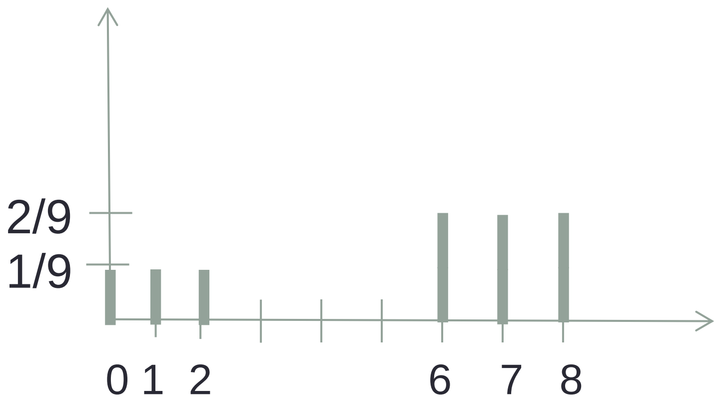


Exemplo



- $P(A_1) = \frac{1}{3}$
- $P(A_2) = \frac{2}{3}$

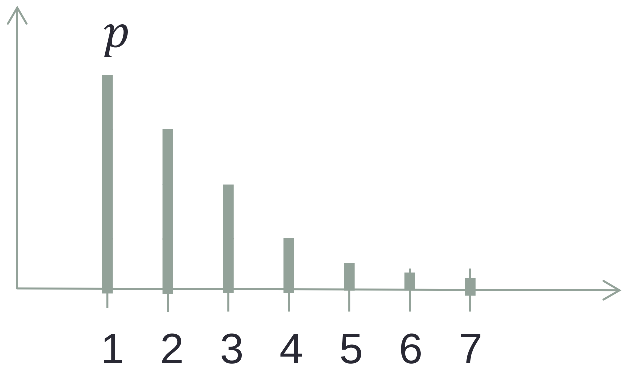
Exemplo



- $P(A_1) = \frac{1}{3}$
- $P(A_2) = \frac{2}{3}$
- $E[X|A_1] = 1$
- $E[X|A_2] = 7$
- $E[X] = \frac{1}{3}1 + \frac{2}{3}7$

Condicionamento em um v.a. Geométrica

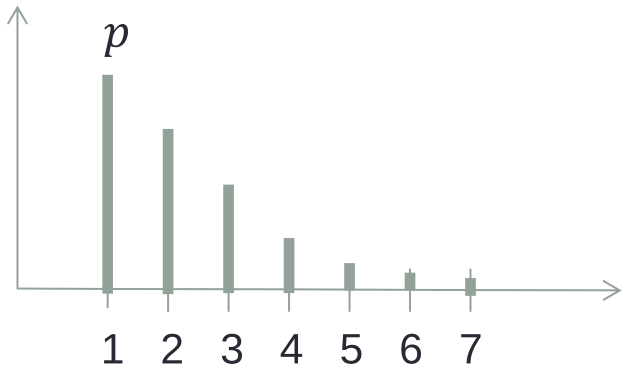
- Número de jogadas independentes até a primeira H
- $p_X(k) = (1-p)^{k-1}p$



Condicionamento em um v.a. Geométrica

- Número de jogadas independentes até a primeira H
- $p_X(k) = (1-p)^{k-1}p$

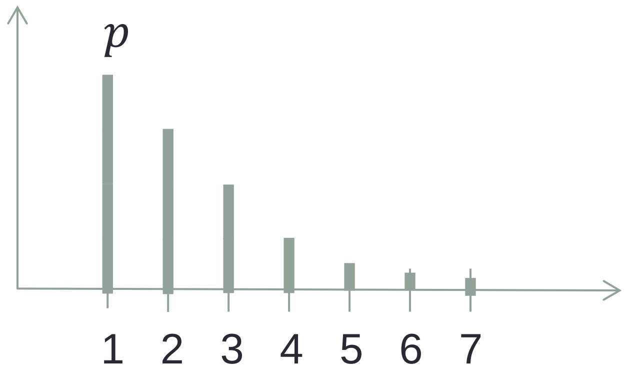
X = numero de jogadas até H



Condicionamento em um v.a. Geométrica

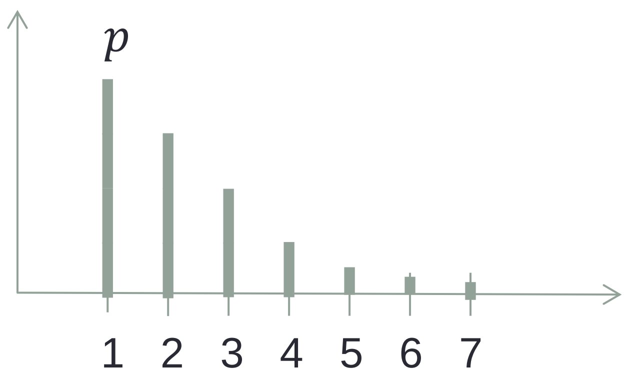
- Número de jogadas independentes até a primeira H
- $p_X(k) = (1-p)^{k-1}p$

X = numero de jogadas até H

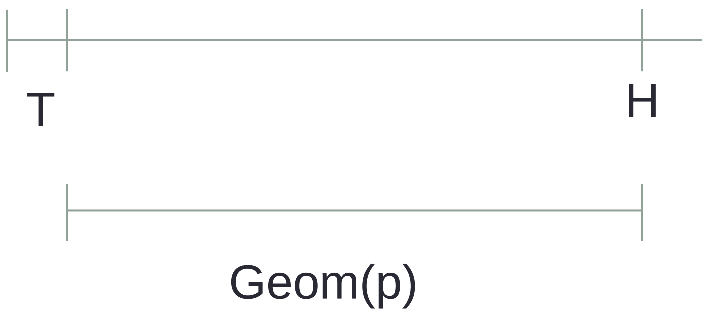


Condicionamento em um v.a. Geométrica

- Número de jogadas independentes até a primeira H
- $p_X(k) = (1-p)^{k-1}p$



X = numero de jogadas até H



A v.a. X-1 condicionada a X>1 é geométrica com parâmetro p

Exemplo

- $P(X - 1 = 3 | X > 1)$

Exemplo

- $P(X-1=3|X>1) = P(T_2T_3H_4) = (1-p)^2p = p_X(3)$

Exemplo

- $P(X - 1 = 3 | X > 1) = P(T_2 T_3 H_4) = (1 - p)^2 p = p_X(3)$
- $p_{X-1|X>1}(3) = p_X(3)$

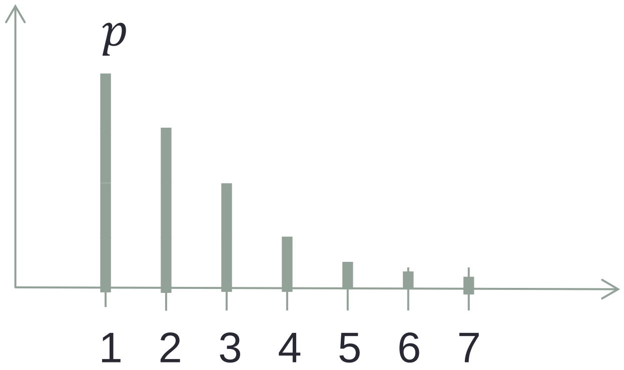
Exemplo

- $P(X-1=3|X>1)=P(T_2T_3H_4)=(1-p)^2p=p_X(3)$
- $p_{X-1|X>1}(3)=p_X(3)$

A v.a. X-n condicionada a X>n é geométrica com parâmetro p

Esperança de um v.a. Geométrica

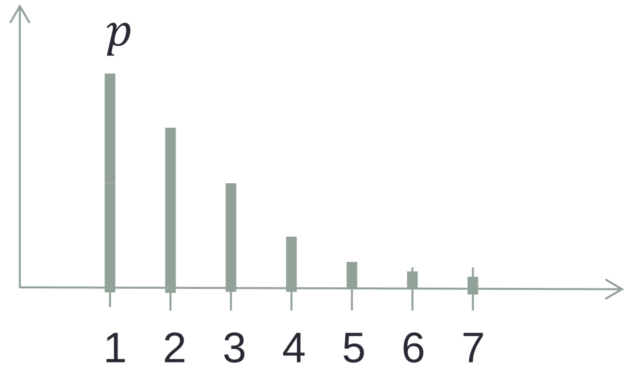
- $p_X(k) = (1-p)^{k-1}p$

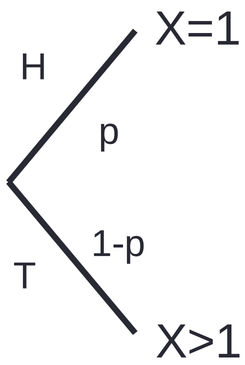


- $E[X] = \sum_{k=1}^{\infty} k\,(1-p)^{k-1}p$

Esperança de um v.a. Geométrica

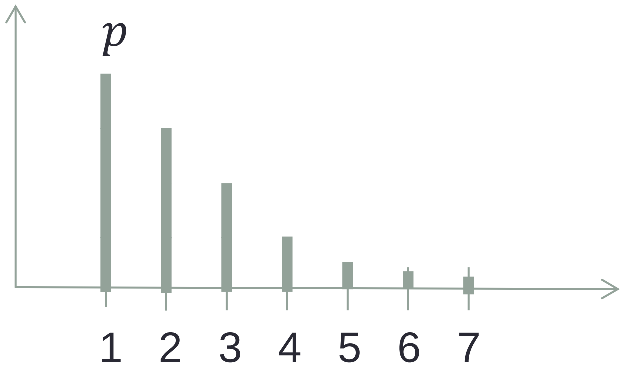
- $p_X(k) = (1-p)^{k-1}p$
- $E[X] = \sum_{k=1}^{\infty} k\,(1-p)^{k-1}p$

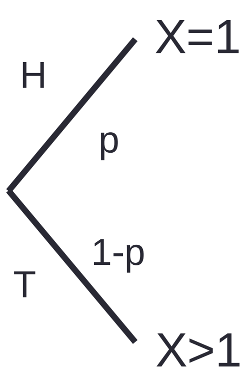




Esperança de um v.a. Geométrica

- $p_X(k) = (1-p)^{k-1}p$
- $E[X] = \sum_{k=1}^{\infty} k\,(1-p)^{k-1}p$

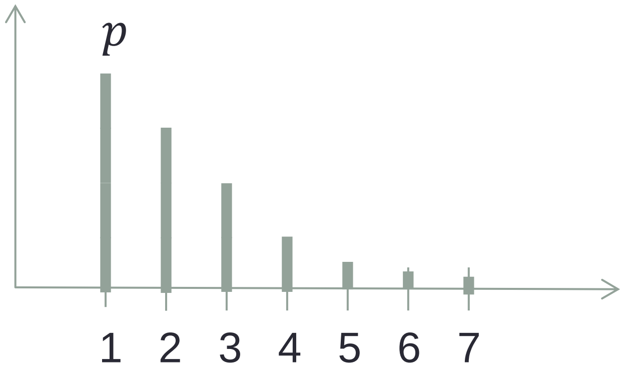


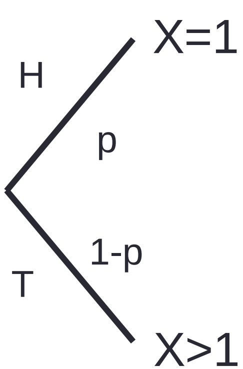


- $E[X] = 1 + E[X-1]$
- $E[X] = 1 + pE[X-1|X=1] + (1-p)E[X-1|X>1]$

Esperança de um v.a. Geométrica

- $p_X(k) = (1-p)^{k-1}p$
- $E[X] = \sum_{k=1}^{\infty} k\,(1-p)^{k-1}p$

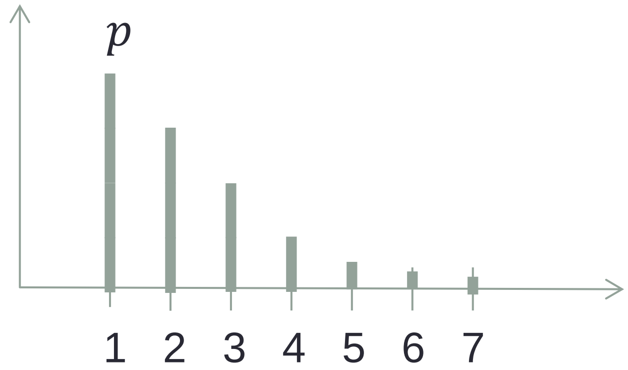


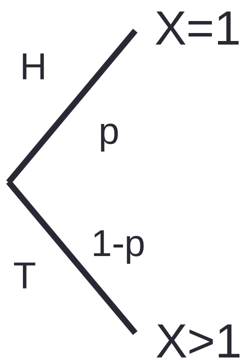


- $E[X] = 1 + E[X-1]$
- $E[X] = 1 + pE[X-1|X=1] + (1-p)E[X-1|X>1]$
- $E[X] = 1 + (1-p)E[X-1|X>1]$

Esperança de um v.a. Geométrica

- $p_X(k) = (1-p)^{k-1}p$
- $E[X] = \sum_{k=1}^{\infty} k\,(1-p)^{k-1}p$





- $E[X] = 1 + E[X-1]$
- $E[X] = 1 + pE[X-1|X=1] + (1-p)E[X-1|X>1]$
- $E[X] = 1 + (1-p)E[X-1|X>1]$
- $E[X] = 1 + (1-p)E[X]$
- $E[X] = \frac{1}{p}$

Multiplas v.a. e distribuição conjunta

- $X: p_X$ e $Y: p_Y$
- $P(X = Y) = ?$

Multiplas v.a. e distribuição conjunta

- $X: p_X$ e $Y: p_Y$
- $P(X = Y) = ?$
- Distribuição conjunta $p_{X,Y}(x, y) = P(X = x \cap Y = y)$

Multiplas v.a. e distribuição conjunta

- $X: p_X$ e $Y: p_Y$
- $P(X = Y) = ?$
- Distribuição conjunta $p_{X,Y}(x, y) = P(X = x \cap Y = y)$

y \ x	1	2	3	4
4	1/20	2/20	2/20	
3	2/20	4/20	1/20	2/20
2		1/20	3/20	1/20
1		1/20		

- P(1,3) = 2/20
- $\sum_x \sum_y p_{X,Y}(x, y) = 1$

Multiplas v.a. e distribuição conjunta

- $X: p_X$ e $Y: p_Y$
- $P(X = Y) = ?$
- Distribuição conjunta $p_{X,Y}(x, y) = P(X = x \cap Y = y)$

y \ x	1	2	3	4
4	1/20	2/20	2/20	
3	2/20	4/20	1/20	2/20
2		1/20	3/20	1/20
1		1/20		

- P(1,3) = 2/20
- $\sum_x \sum_y p_{X,Y}(x, y) = 1$

- $p_X(4) =$

Multiplas v.a. e distribuição conjunta

- $X: p_X$ e $Y: p_Y$
- $P(X = Y) = ?$
- Distribuição conjunta $p_{X,Y}(x, y) = P(X = x \cap Y = y)$

y \ x	1	2	3	4
4	1/20	2/20	2/20	
3	2/20	4/20	1/20	2/20
2		1/20	3/20	1/20
1		1/20		

- P(1,3) = 2/20
- $\sum_x \sum_y p_{X,Y}(x, y) = 1$
- $p_X(4) = \frac{2}{20} + \frac{1}{20}$

Multiplas v.a. e distribuição conjunta

- $X: p_X$ e $Y: p_Y$
- $P(X = Y) = ?$
- Distribuição conjunta $p_{X,Y}(x, y) = P(X = x \cap Y = y)$

y \ x	1	2	3	4
4	1/20	2/20	2/20	
3	2/20	4/20	1/20	2/20
2		1/20	3/20	1/20
1		1/20		

- P(1,3) = 2/20
- $\sum_x \sum_y p_{X,Y}(x, y) = 1$

- $p_X(4) = \frac{2}{20} + \frac{1}{20}$

- $p_X(x) = \sum_y p_{X,Y}(x, y)$
- $p_Y(y) = \sum_x p_{X,Y}(x, y)$

Mais de duas v.a.

- $p_{X,Y,Z}(x, y, z) = P(X = x \cap Y = y \cap Z = z)$
- $p_X(x) = \sum_y \sum_z p_{X,Y,Z}(x, y, z)$
- $p_{X,Y}(x, y) = \sum_z p_{X,Y,Z}(x, y, z)$

Funções de múltiplas v.a.

- $Z = g(X,Y)$
- $p_Z(z) = P(g(X,Y) = z) = \sum_{(x,y):g(x,y)=z} p_{X,Y}(x,y)$

- Regra do valor esperado
- $E[g(X,Y)] = \sum_y \sum_x g(x,y) p_{X,Y}(x,y)$

Linearidade de Esperanças

- $E[aX + b] = a\,E[X] + b$
- $E[X + Y] = E[X] + E[Y]$

Linearidade de Esperanças

- $E[aX + b] = a\,E[X] + b$
- $E[X + Y] = E[X] + E[Y]$
  - $E[X + Y] = E[g(X, Y)] = \sum_x \sum_y (x + y) p_{X,Y}(x, y)$

Linearidade de Esperanças

- $E[aX + b] = a\,E[X] + b$
- $E[X + Y] = E[X] + E[Y]$
  - $E[X + Y] = E[g(X, Y)] = \sum_x \sum_y (x + y) p_{X,Y}(x, y)$
  - $= \sum_x \sum_y x p_{X,Y}(x, y) + \sum_x \sum_y y p_{X,Y}(x, y)$
  - $= \sum_x x \sum_y p_{X,Y}(x, y) + \sum_y y \sum_x p_{X,Y}(x, y)$
  - $\sum_x x p_X(x) + \sum_y y p_Y(y)$

Esperança de uma v.a. Binomial

- X: binomial com parâmetros n,p
  - Número de sucessos em n tentativas

Esperança de uma v.a. Binomial

- X: binomial com parâmetros n,p
  - Número de sucessos em n tentativas
- $E[X] = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Esperança de uma v.a. Binomial

- X: binomial com parâmetros n,p
  - Número de sucessos em n tentativas
- $E[X] = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
- Variável indicadora (X=1 se sucesso e X=0 senão)
  - $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$

Esperança de uma v.a. Binomial

- X: binomial com parâmetros n,p
  - Número de sucessos em n tentativas
- $E[X] = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
- Variável indicadora (X=1 se sucesso e X=0 senão)
  - $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$
  - $E[X] = E[X_1] + E[X_2] + \cdots + E[X_n] = np$

DÚVIDAS?