PROBABILIDDE E PROCESSOS ESTOCÁSTICOS (CKP7366)

Prof. João Paulo Pordeus Gomes

Modelo Probabilístico e axiomas

- Definição
  - Descrição quantitativa de um fenômeno cujo resultado é incerto
- Dois principais passos
  - Descrever todas as possíveis saídas (espaço amostral)
  - Definir uma lei de probabilidade
    - Axiomas
    - Propriedades dos axiomas

Espaço amostral

- Lista (conjunto) de possíveis saídas
- Elementos devem ser:
  - Mutuamente exclusivos
  - Conjuntamente devem exaurir todas as possibilidades
  - Descrever o experimento de acordo com o nível de detalhes necessário

Espaço amostral discreto e finito

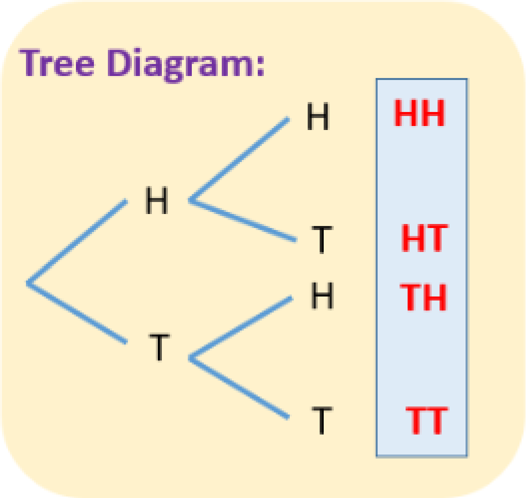
- Dois lançamentos de uma moeda

List:

HH HT TH TT

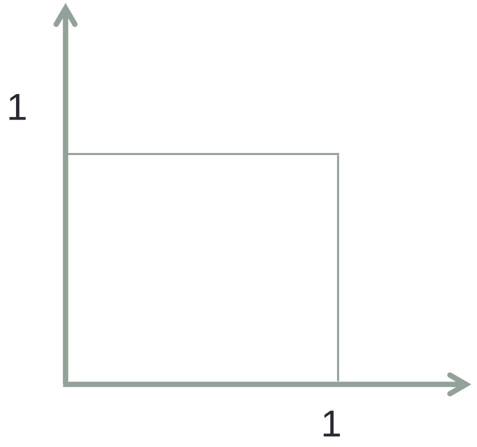
Table:

	H	T
H	HH	HT
T	TH	TT



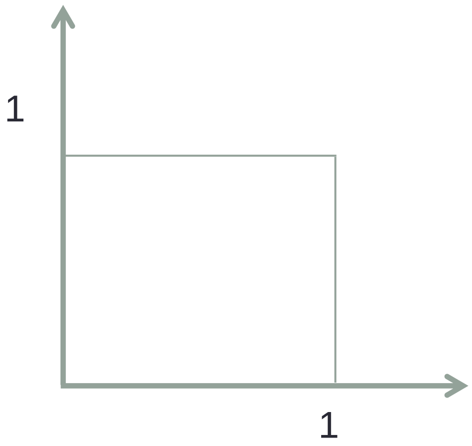
Espaço amostral contínuo e infinito

- $(x, y)\ dado\ que\ 0 \leq x, y \leq 1$



Axiomas de probabilidade

- Evento
  - Sub-conjunto do espaço amostral
  - Probabilidade é atribuída a eventos



Axiomas de probabilidade

- Evento
  - Sub-conjunto do espaço amostral
  - Probabilidade é atribuída a eventos
- Axiomas
  - $P(E) \geq 0$
  - $P(\Omega) = 1$
  - $P(E_1 \cup E_2 \cup E_2 \ldots) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$
    - (se eventos não possuem interseção)

Axiomas de probabilidade

- Evento
  - Sub-conjunto do espaço amostral
  - Probabilidade é atribuída a eventos
- Axiomas
  - $P(E) \geq 0$
  - $P(\Omega) = 1$
  - $P(E_1 \cup E_2 \cup E_2 \ldots) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$
    - (se eventos não possuem interseção)
- Consequências
  - $P(E) \leq 1$
  - $P(\emptyset) = 0$
  - $P(E) + P(\neg E) = 1$

Consequências

- $P(E) + P(\neg E) = 1$

Consequências

- $P(E) + P(\neg E) = 1$
  - $P(E \cup \neg E) = P(E) + P(\neg E)$
  - $P(\Omega) = P(E) + P(\neg E)$
  - $P(E) + P(\neg E) = 1$

Consequências

- $P(E) + P(\neg E) = 1$
  - $P(E \cup \neg E) = P(E) + P(\neg E)$
  - $P(\Omega) = P(E) + P(\neg E)$
  - $P(E) + P(\neg E) = 1$
- $P(E) \leq 1$

Consequências

- $P(E) + P(\neg E) = 1$
  - $P(E \cup \neg E) = P(E) + P(\neg E)$
  - $P(\Omega) = P(E) + P(\neg E)$
  - $P(E) + P(\neg E) = 1$
- $P(E) \leq 1$
  - $P(E) + P(\neg E) = 1$
  - $P(E) = 1 - P(\neg E)$

Consequências

- $P(E) + P(\neg E) = 1$
  - $P(E \cup \neg E) = P(E) + P(\neg E)$
  - $P(\Omega) = P(E) + P(\neg E)$
  - $P(E) + P(\neg E) = 1$
- $P(E) \leq 1$
  - $P(E) + P(\neg E) = 1$
  - $P(E) = 1 - P(\neg E)$
- $P(\emptyset) = 0$

Consequências

- $P(E) + P(\neg E) = 1$
  - $P(E \cup \neg E) = P(E) + P(\neg E)$
  - $P(\Omega) = P(E) + P(\neg E)$
  - $P(E) + P(\neg E) = 1$
- $P(E) \leq 1$
  - $P(E) + P(\neg E) = 1$
  - $P(E) = 1 - P(\neg E)$
- $P(\emptyset) = 0$
  - $P(\Omega) + P(\neg\Omega) = 1$
  - $P(\neg\Omega) = 1 - P(\Omega)$
  - $P(\emptyset) = 1 - P(\Omega)$

Exercícios

- Se A, B e C são três subconjuntos do espaço amostral, mostre que:
- $P(A) + P(B) \leq 1$
- $P(A \cup B \cup C) = P(A \cup B)$

Consequências

- se $A \subset B$, então $P(A) \leq P(B)$

Consequências

- se $A \subset B$, então $P(A) \leq P(B)$
  - $B = A + (B \cap \neg A)$
  - $P(B) = P(A) + P(B \cap \neg A)$
  - $P(B) = P(A) + P(B \cap \neg A) \geq P(A)$

Consequências

- se $A \subset B$, então $P(A) \leq P(B)$
  - $B = A + (B \cap \neg A)$
  - $P(B) = P(A) + P(B \cap \neg A)$
  - $P(B) = P(A) + P(B \cap \neg A) \geq P(A)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Consequências

- se $A \subset B$, então $P(A) \leq P(B)$
  - $B = A + (B \cap \neg A)$
  - $P(B) = P(A) + P(B \cap \neg A)$
  - $P(B) = P(A) + P(B \cap \neg A) \geq P(A)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
  - $a = P(A \cap \neg B) \quad b = P(A \cap B) \quad c = P(\neg A \cap B)$
  - $P(A \cup B) = a + b + c$
  - $P(A) + P(B) - P(A \cap B) = a + b + b + c - b = a + b + c$

Consequências

- se $A \subset B$, então $P(A) \leq P(B)$
  - $B = A + (B \cap \neg A)$
  - $P(B) = P(A) + P(B \cap \neg A)$
  - $P(B) = P(A) + P(B \cap \neg A) \geq P(A)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
  - $a = P(A \cap \neg B) \quad b = P(A \cap B) \quad c = P(\neg A \cap B)$
  - $P(A \cup B) = a + b + c$
  - $P(A) + P(B) - P(A \cap B) = a + b + b + c - b = a + b + c$
- $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$

Consequências

- se $A \subset B$, então $P(A) \leq P(B)$
  - $B = A + (B \cap \neg A)$
  - $P(B) = P(A) + P(B \cap \neg A)$
  - $P(B) = P(A) + P(B \cap \neg A) \geq P(A)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
  - $a = P(A \cap \neg B) \quad b = P(A \cap B) \quad c = P(\neg A \cap B)$
  - $P(A \cup B) = a + b + c$
  - $P(A) + P(B) - P(A \cap B) = a + b + b + c - b = a + b + c$
- $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$
  - “union bound”

Consequências

- $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(\neg A \cap B) + P(\neg A \cap \neg B \cap C)$

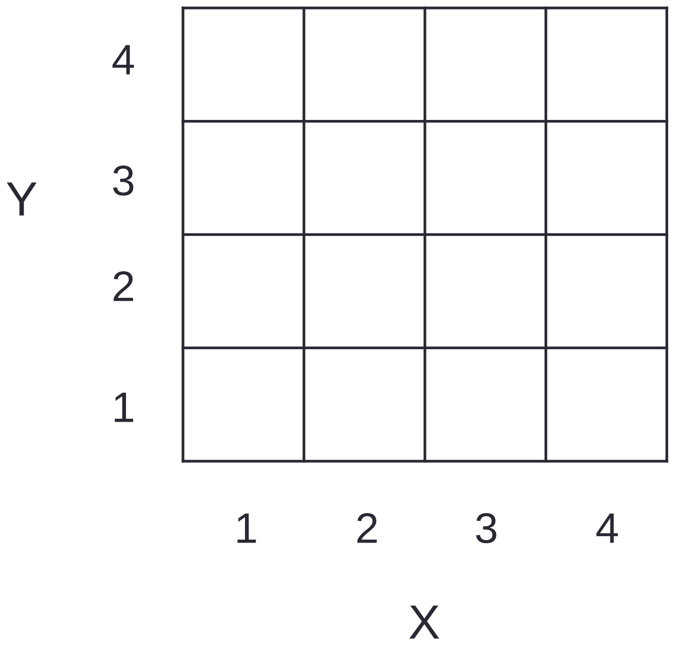
Consequências

- $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(\neg A \cap B) + P(\neg A \cap \neg B \cap C)$
  - $A \cup B \cup C = A \cup (\neg A \cap B) \cup (\neg A \cap \neg B \cap C)$

Exercício

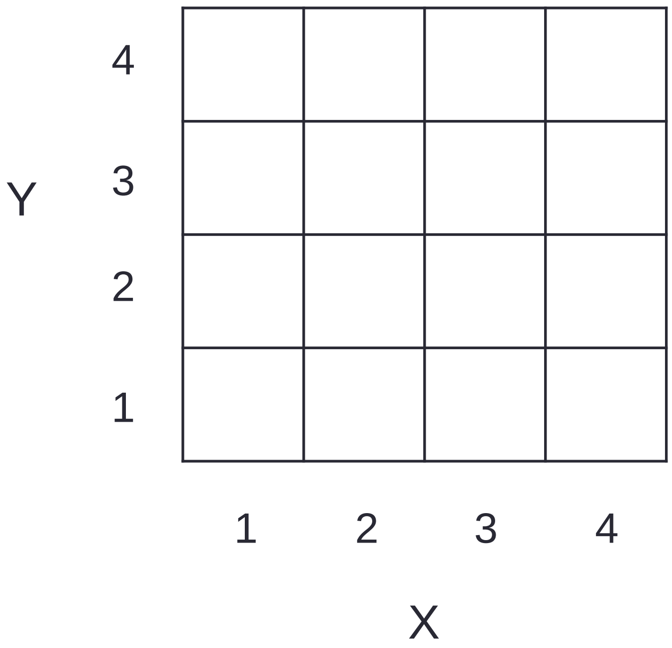
- Mostre que:
  - $P((A \cap B) \cup (C \cap \neg A)) \leq P(A \cup B \cup C)$

Exemplo



- $P(X = 2)$
- $P(Z = 2)$
  - $Z = \min(X, Y)$
- $P(W = 1)$
  - $W = 1 \quad se\ X > Y$

Exemplo

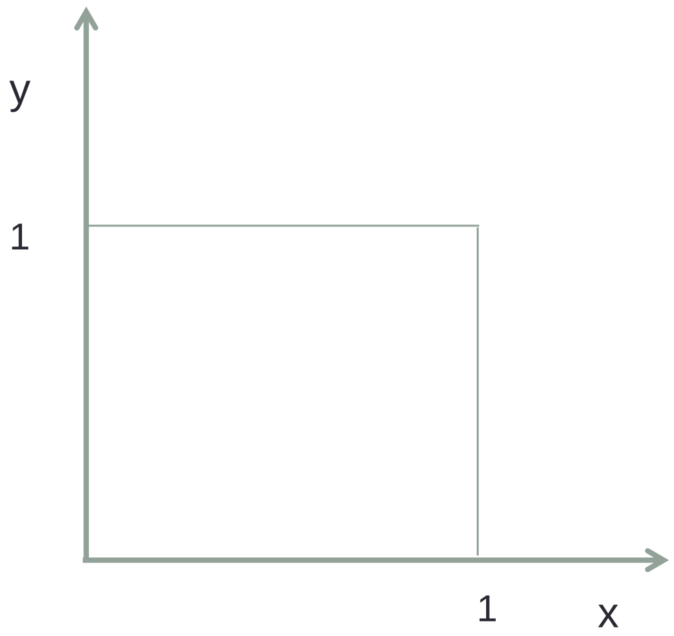


- $P(X = 2)$
- $P(Z = 2)$
  - $Z = \min(X, Y)$
- $P(W = 1)$
  - $W = 1 \quad se\ X > Y$

Distribuição uniforme discreta

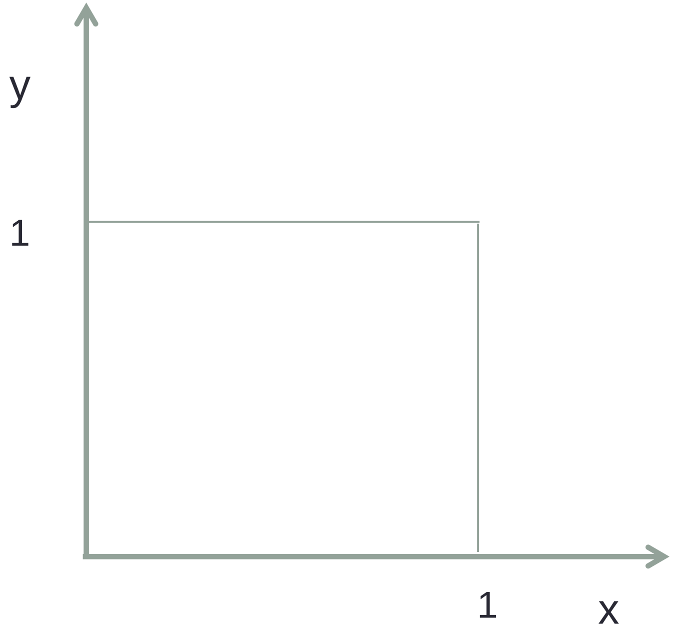
Exemplo - Contínuo

- $(x, y)\ dado\ que\ 0 \leq x, y \leq 1$



Exemplo - Contínuo

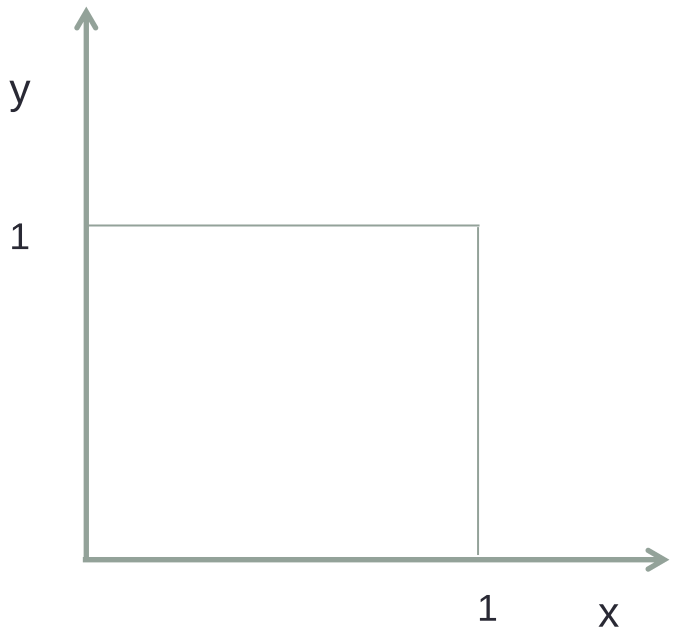
- $(x, y)\ dado\ que\ 0 \leq x, y \leq 1$



- Distribuição uniforme
  - Probabilidade = ?

Exemplo - Contínuo

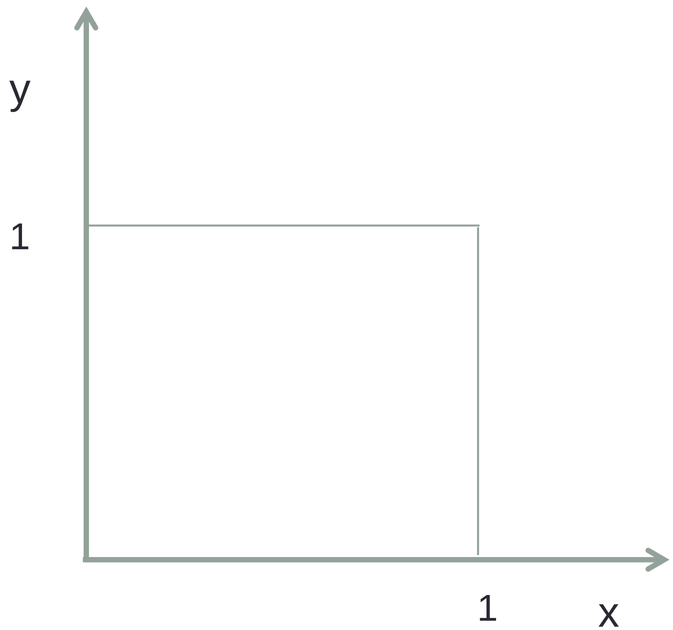
- $(x, y)\ dado\ que\ 0 \leq x, y \leq 1$



- Distribuição uniforme
  - Probabilidade = Área

Exemplo - Contínuo

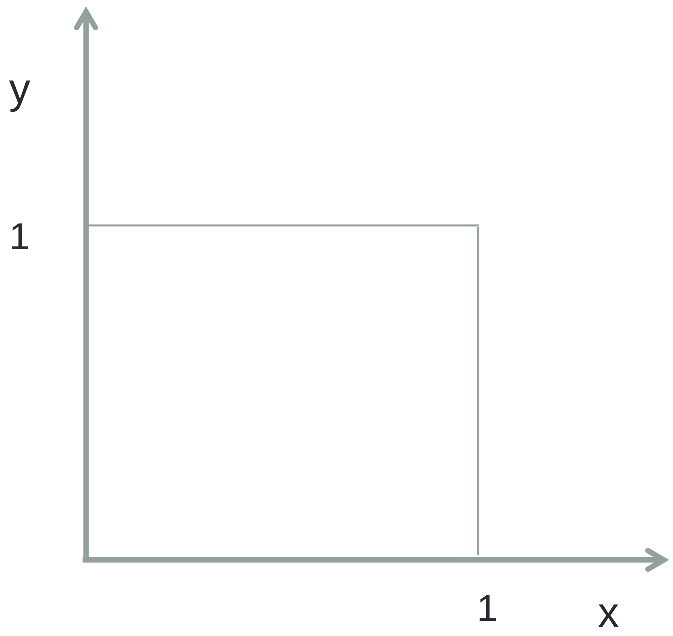
- $(x, y)\ dado\ que\ 0 \leq x, y \leq 1$



- $P(\{(x, y) | x + y \leq 1/2\}) =$

Exemplo - Contínuo

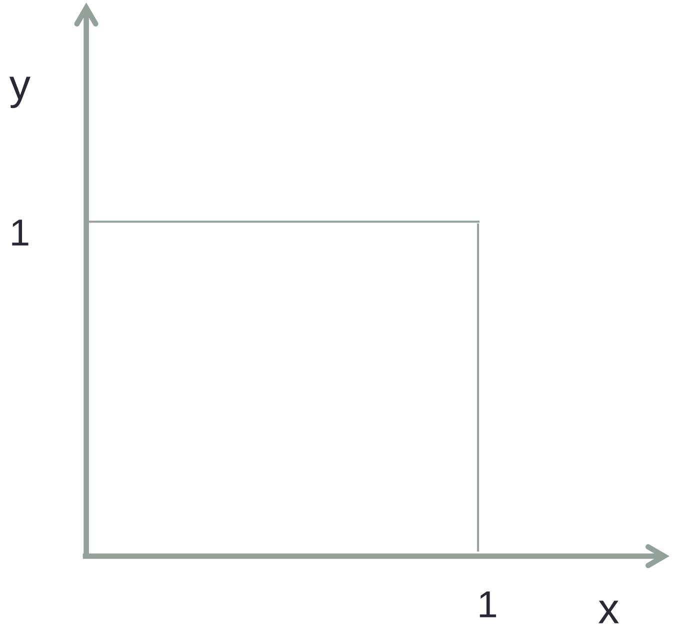
- $(x, y)\ dado\ que\ 0 \leq x, y \leq 1$



- $P(\{(x, y) | x + y \leq 1/2\}) = \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

Exemplo - Contínuo

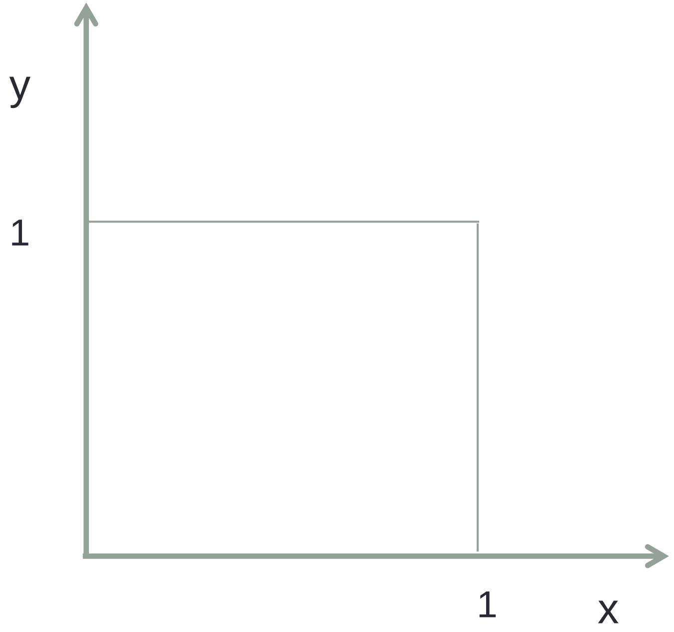
- $(x, y)\ dado\ que\ 0 \leq x, y \leq 1$



- $P(0.5, 0.3) =$

Exemplo - Contínuo

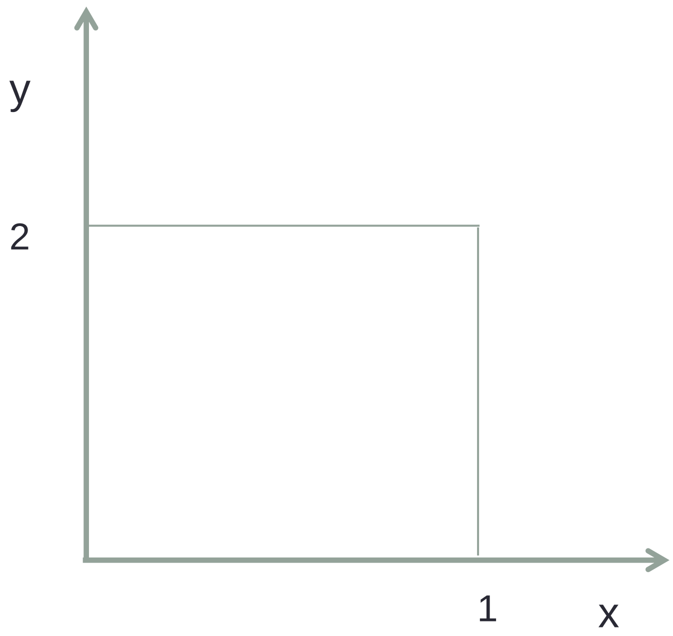
- $(x, y)\ dado\ que\ 0 \leq x, y \leq 1$



- $P(0.5,0.3) = 0$

Exercício

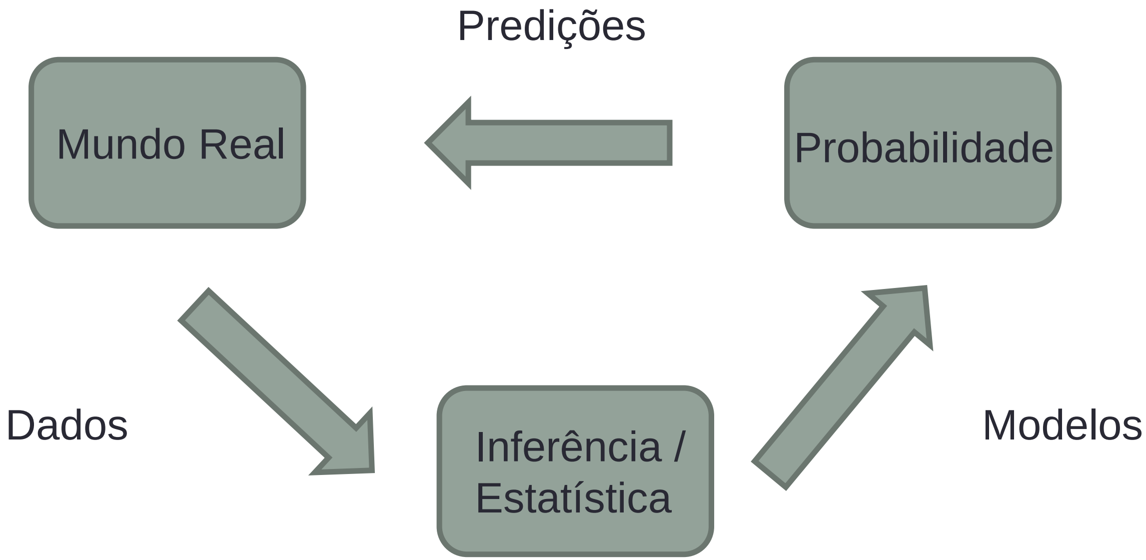
- (x, y) *dado que* $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq 2$



- $P(x \geq y) =$
- $P(x^2 \geq y) =$

Interpretação de probabilidade

- Frequência de eventos
- Incerteza



DÚVIDAS?