PROBABILIDADE E PROCESSOS ESTOCÁSTICOS (CKP7366)

Prof. João Paulo Pordeus Gomes

VARIÁVEIS ALEATÓRIAS CONTÍNUAS (AULA 2)

Variáveis aleatórias contínuas

- Condicionando um v.a a um evento
  - PDF condicional
  - Esperança condicional
  - Regra do valor esperado condicional
  - PDF exponencial: ausência de memória
  - Teoremas da probabilidade e esperança total
  - Distribuições mistas

PDF condicional, dado um evento

- $p_{X|A}(x) = P(X = x|A)$
- $P(X \in B) = \sum_{x \in B} p_X(x) \rightarrow P(X \in B) = \int_B \; f_X(x)dx$

PDF condicional, dado um evento

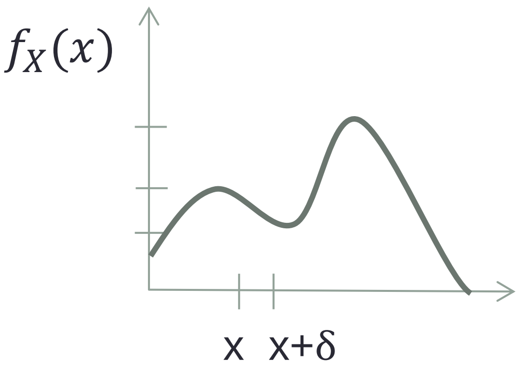
- $p_{X|A}(x) = P(X = x|A)$
- $P(X \in B) = \sum_{x \in B} p_X(x) \rightarrow P(X \in B) = \int_B \; f_X(x)dx$
- $P(X \in B|A) = \sum_{x \in B} p_{X|A}(x) \rightarrow P(X \in B|A) = \int_B \; f_{X|A}(x)dx$

PDF condicional, dado um evento

- $p_{X|A}(x) = P(X = x|A)$
- $P(X \in B) = \sum_{x \in B} p_X(x) \rightarrow P(X \in B) = \int_B f_X(x)dx$
- $P(X \in B|A) = \sum_{x \in B} p_{X|A}(x) \rightarrow P(X \in B|A) = \int_B f_{X|A}(x)dx$
- $\sum_x p_{X|A}(x) = 1 \qquad \rightarrow \qquad \int f_{X|A}(x)dx = 1$

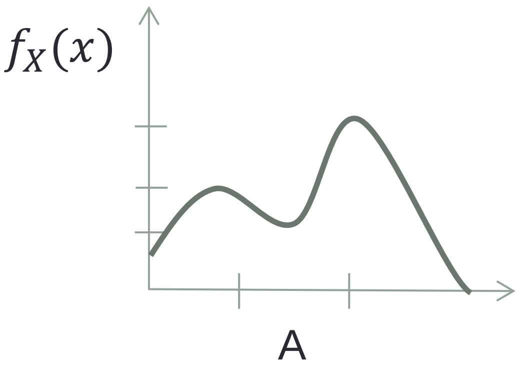
PDF de X, dado que $X \in A$

- $P(x \leq X \leq x + \delta) \approx f_X(x)\delta$



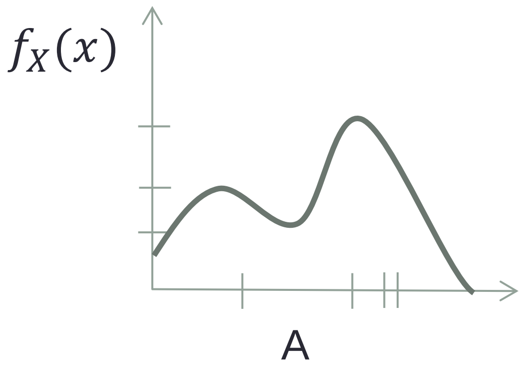
PDF de X, dado que $X \in A$

- $P(x \leq X \leq x + \delta) \approx f_X(x)\delta$
- $P(x \leq X \leq x + \delta | X \in A) \approx f_{X|X \in A}(x)\delta$



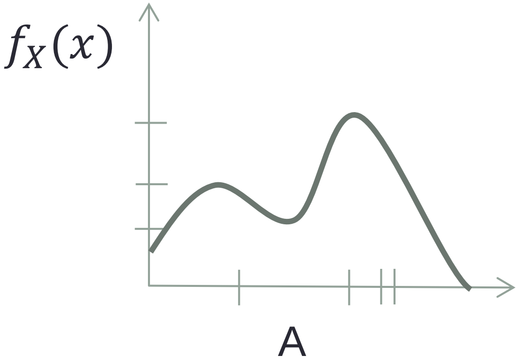
PDF de X, dado que $X \in A$

- $P(x \leq X \leq x + \delta) \approx f_X(x)\delta$
- $P(x \leq X \leq x + \delta | X \in A) \approx f_{X|X \in A}(x)\delta$



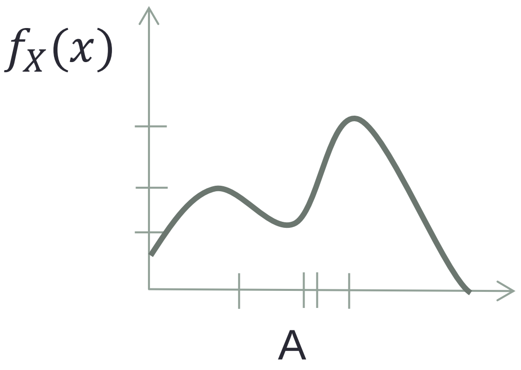
PDF de X, dado que $X \in A$

- $P(x \leq X \leq x + \delta) \approx f_X(x)\delta$
- $P(x \leq X \leq x + \delta | X \in A) \approx f_{X|X \in A}(x)\delta$
- $\frac{P(x \leq X \leq x+\delta \cap X \in A)}{P(A)}$



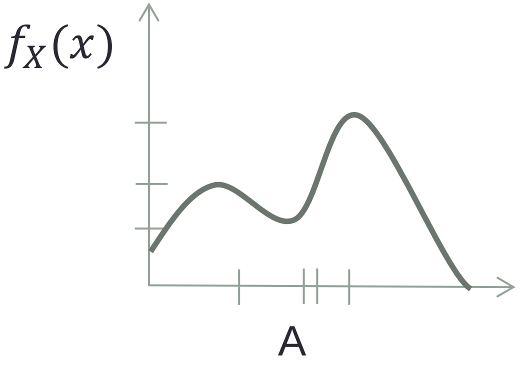
PDF de X, dado que $X \in A$

- $P(x \leq X \leq x + \delta) \approx f_X(x)\delta$
- $P(x \leq X \leq x + \delta | X \in A) \approx f_{X|X \in A}(x)\delta$
- $\frac{P(x \leq X \leq x+\delta \cap X \in A)}{P(A)}$



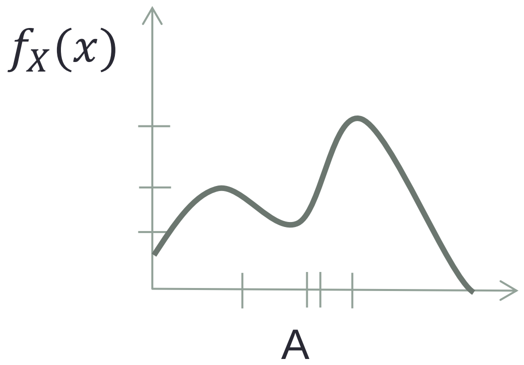
PDF de X, dado que $X \in A$

- $P(x \leq X \leq x + \delta) \approx f_X(x)\delta$
- $P(x \leq X \leq x + \delta | X \in A) \approx f_{X|X \in A}(x)\delta$
- $\frac{P(x \leq X \leq x+\delta \cap X \in A)}{P(A)} = \frac{P(x \leq X \leq x+\delta\,)}{P(A)}$



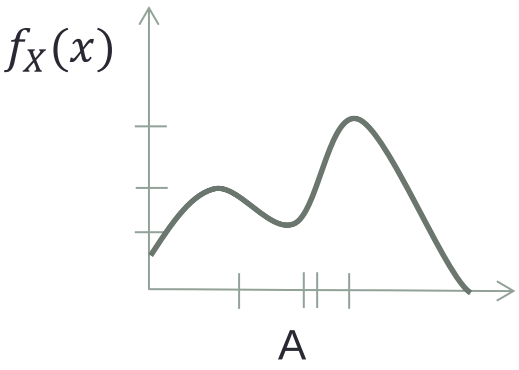
PDF de X, dado que $X \in A$

- $P(x \leq X \leq x + \delta) \approx f_X(x)\delta$
- $P(x \leq X \leq x + \delta | X \in A) \approx f_{X|X \in A}(x)\delta$
- $\frac{P(x \leq X \leq x+\delta \cap X \in A)}{P(A)} = \frac{P(x \leq X \leq x+\delta\ )}{P(A)} = \frac{f_X(x)\delta}{P(A)}$



PDF de X, dado que $X \in A$

- $P(x \leq X \leq x + \delta) \approx f_X(x)\delta$
- $P(x \leq X \leq x + \delta | X \in A) \approx f_{X|X \in A}(x)\delta$
- $\frac{P(x \leq X \leq x+\delta \cap X \in A)}{P(A)} = \frac{P(x \leq X \leq x+\delta)}{P(A)} = \frac{f_X(x)\delta}{P(A)}$



$$f_{X|X \in A}(x) = \begin{cases} 0, & se\ X \notin A \\ \frac{f_X(x)}{P(A)}, & se\ X \in A \end{cases}$$

Esperança condicional dado um evento

- $E[X|A] = \sum_x x p_{X|A}(x)$
- $E[X|A] = \int x f_{X|A}(x) dx$

Esperança condicional dado um evento

- $E[X|A] = \sum_x x p_{X|A}(x)$
- $E[X|A] = \int x f_{X|A}(x) dx$

- Regra do valor esperado
  - $E[g(X)|A] = \sum_x g(x) p_{X|A}(x)$
  - $E[g(X)|A] = \int g(x) f_{X|A}(x)$

Exercício

- Suponha a PDF de X dada por
- $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, se\ x \geq 1 \\ 0, caso\ contrario \end{cases}$
- A PDF condicional de X dado que X>2 é:

Ausência de memória em uma PDF Exponencial

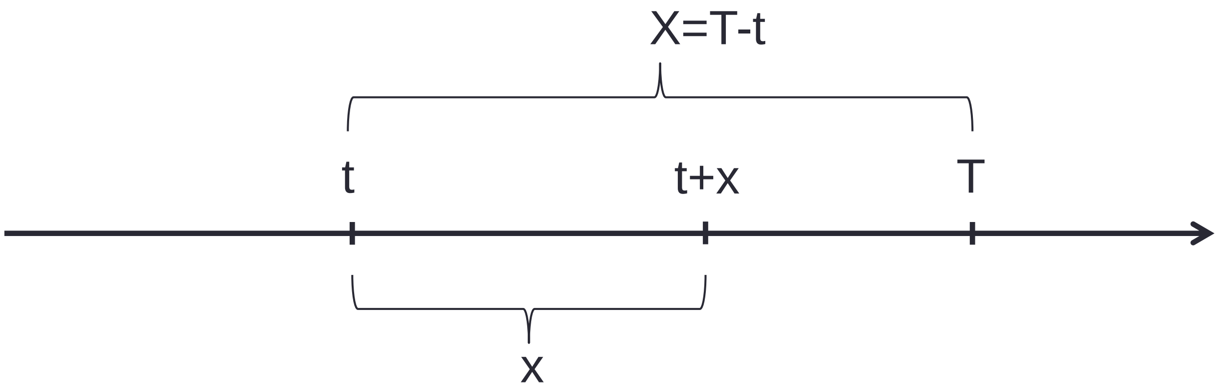
- T – tempo de vida de uma lâmpada (exponencial)
- $P(T > x) = e^{-\lambda x}$ para $x \geq 0$

Ausência de memória em uma PDF Exponencial

- T – tempo de vida de uma lâmpada (exponencial)
- $P(T > x) = e^{-\lambda x}$ para $x \geq 0$

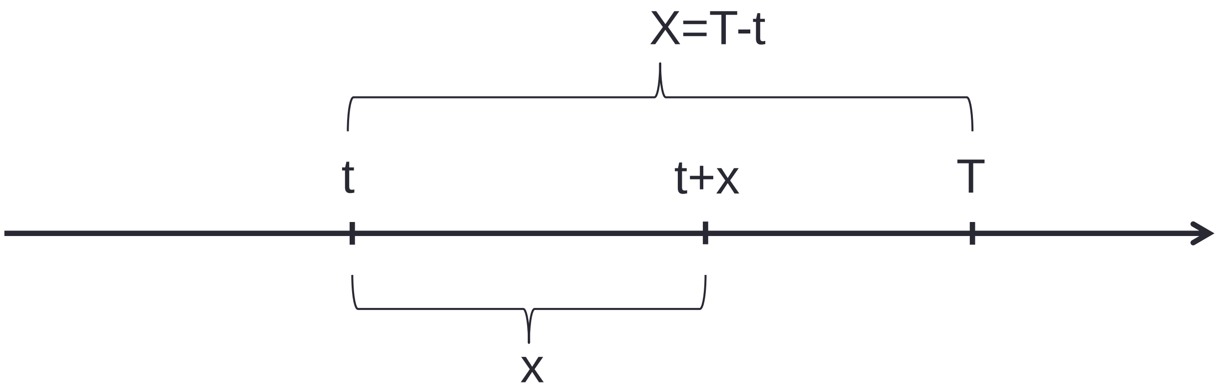
Ausência de memória em uma PDF Exponencial

- T – tempo de vida de uma lâmpada (exponencial)
- $P(T > x) = e^{-\lambda x}$ para $x \geq 0$
- $P(X > x|T > t) =$



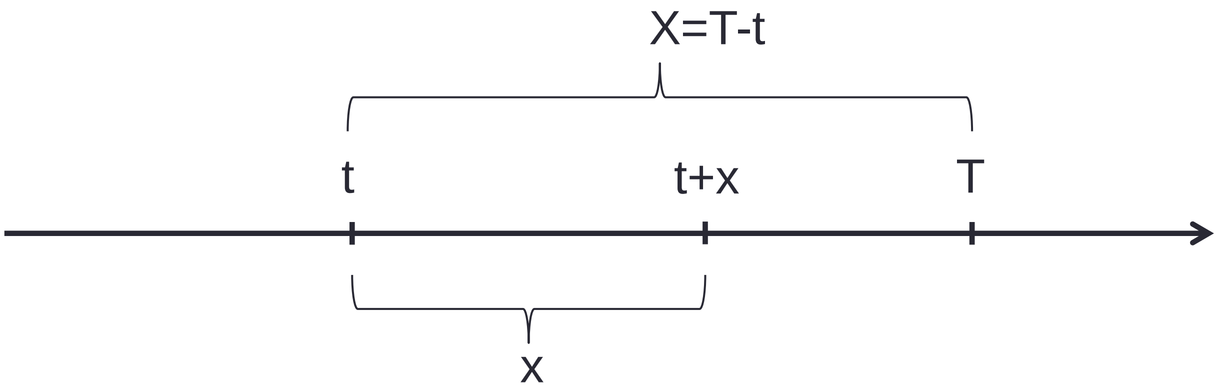
Ausência de memória em uma PDF Exponencial

- T – tempo de vida de uma lâmpada (exponencial)
- $P(T > x) = e^{-\lambda x}$ para $x \geq 0$
- $P(X > x|T > t) = \frac{P(T-t>x, T>t)}{P(T>t)}$



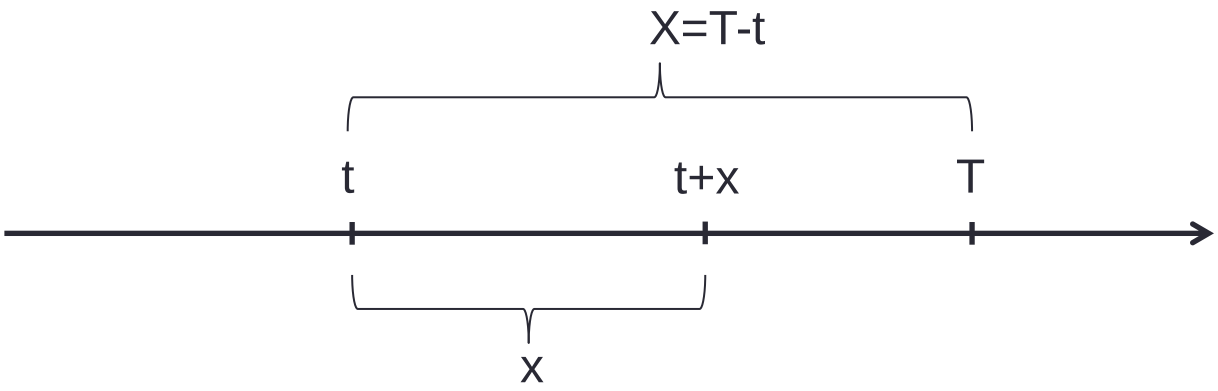
Ausência de memória em uma PDF Exponencial

- T – tempo de vida de uma lâmpada (exponencial)
- $P(T > x) = e^{-\lambda x}$ para $x \geq 0$
- $P(X > x | T > t) = \dfrac{P(T-t>x, T>t)}{P(T>t)} = \dfrac{P(T>x+t, T>t)}{P(T>t)}$



Ausência de memória em uma PDF Exponencial

- T – tempo de vida de uma lâmpada (exponencial)
- $P(T > x) = e^{-\lambda x}$ para $x \geq 0$
- $P(X > x|T > t) = \frac{P(T-t>x, T>t)}{P(T>t)} = \frac{P(T>x+t, T>t)}{P(T>t)} = \frac{P(T>x+t)}{P(T>t)}$
- $= \frac{e^{-\lambda(x+t)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda x}$



Exercícios

- Dado que X segue uma distribuição exponencial com parâmetro λ, calcule:
  - A probabilidade de X>5
  - A probabilidade de X>5 dado que X>2
  - Dado que X>2 e para um $\delta > 0$ pequeno, a probabilidade (aproximadamente) de $4 \leq X \leq 4 + 2\delta$

Exercícios

- Dado que X segue uma distribuição exponencial com parâmetro λ, calcule:
  - A probabilidade de X>5 ($e^{-5\lambda}$)
  - A probabilidade de X>5 dado que X>2 ($e^{-3\lambda}$)
  - Dado que X>2 e para um $\delta > 0$ pequeno, a probabilidade (aproximadamente) de $4 \leq X \leq 4 + 2\delta$ ($2\lambda\delta e^{-2\lambda}$)

Probabilidade e Esperança total

- $P(B) = P(\mathrm{A}_1)P(B|\mathrm{A}_1) + P(\mathrm{A}_2)P(B|\mathrm{A}_2) + \cdots + P(\mathrm{A}_n)P(B|\mathrm{A}_n)$
- $B \to X \leq x$
- $\mathrm{F}(x) = P(\mathrm{A}_1)\, F_{x|A_1}(x) + P(\mathrm{A}_2)\, F_{x|A_2}(x) + \cdots + P(\mathrm{A}_n)\, F_{x|A_n}(x)$

Probabilidade e Esperança total

- $P(B) = P(\mathrm{A}_1)P(B|\mathrm{A}_1) + P(\mathrm{A}_2)P(B|\mathrm{A}_2) + \cdots + P(\mathrm{A}_n)P(B|\mathrm{A}_n)$
- $B \rightarrow X \leq x$
- $\mathrm{F}(x) = P(\mathrm{A}_1)\, F_{x|A_1}(x) + P(\mathrm{A}_2)\, F_{x|A_2}(x) + \cdots + P(\mathrm{A}_n)\, F_{x|A_n}(x)$
- Derivando temos:
- $f_X(x) = P(\mathrm{A}_1)\, f_{x|A_1}(x) + P(\mathrm{A}_2)\, f_{x|A_2}(x) + \cdots + P(\mathrm{A}_n)\, f_{x|A_n}(x)$

Probabilidade e Esperança total

- $P(B) = P(\mathrm{A}_1)P(B|\mathrm{A}_1) + P(\mathrm{A}_2)P(B|\mathrm{A}_2) + \cdots + P(\mathrm{A}_n)P(B|\mathrm{A}_n)$
- $B \to X \leq x$
- $\mathrm{F}(x) = P(\mathrm{A}_1)\, F_{x|A_1}(x) + P(\mathrm{A}_2)\, F_{x|A_2}(x) + \cdots + P(\mathrm{A}_n)\, F_{x|A_n}(x)$
- Derivando temos:
- $f_X(x) = P(\mathrm{A}_1)\, f_{x|A_1}(x) + P(\mathrm{A}_2)\, f_{x|A_2}(x) + \cdots + P(\mathrm{A}_n)\, f_{x|A_n}(x)$
- Multiplicando por x e integrando temos:
- $E[X] = P(A_1)E[X|A_1] + \cdots + P(A_n)E[X|A_n]$

Exemplo

- Uma pessoa sairá de casa para o trabalho e pode tomar dois caminhos. Com probabilidade 1/3 ela tomará o caminho onde leva entre 10 e 15 min (distribuição uniforme). Com 2/3 de probabilidade ela tomar o caminho onde leva entre 20 e 25 min (distribuição uniforme).
- Apresente as PDFs condicionais
- A PDF de X, onde X é o tempo até o trabalho
- O valor esperado de X

Exercício

- Em um determinado dia, as cartas podem ser entregues por Alice ou Bob. Se Alice entregar, o que acontece com probabilidade ¼, o tempo de entrega é entre 9 e 11 min. Se Bob entregar, o que acontece com probabilidade ¾, ele leva entre 10 e 12 min. Calcule o valor de:
- $f_X(9.5)$
- $f_X(10.5)$

Exercício

- Em um determinado dia, as cartas podem ser entregues por Alice ou Bob. Se Alice entregar, o que acontece com probabilidade ¼, o tempo de entrega é entre 9 e 11 min. Se Bob entregar, o que acontece com probabilidade ¾, ele leva entre 10 e 12 min. Calcule o valor de:
- $f_X(9.5)$ (1/8)
- $f_X(10.5)$ (1/2)

Distribuições Mistas

- $X = \begin{cases} U(0,2), & com\ p = 1/2 \\ 1, & com\ p = 1/2 \end{cases}$
- X é contínua ou discreta?

Distribuições Mistas

- $X = \begin{cases} U(0{,}2), & com\, p = 1/2 \\ 1, & com\, p = 1/2 \end{cases}$
- X é contínua ou discreta?
- $X = \begin{cases} Y(continua), & com\, probabilidade\ \ p \\ Z(discreta), & com\, probabilidade\ \ (1-p) \end{cases}$

Distribuições Mistas

- $X = \begin{cases} U(0,2), & com\, p = 1/2 \\ 1, & com\, p = 1/2 \end{cases}$
- X é contínua ou discreta?
- $X = \begin{cases} Y(continua), & com\, probabilidade\ \ p \\ Z(discreta), & com\, probabilidade\ \ (1-p) \end{cases}$
- $F_X(x) = pP(Y \leq x) + (1-p)P(Z \leq x)$
- $= pF_X(x) + (1-p)F_Z(x)$

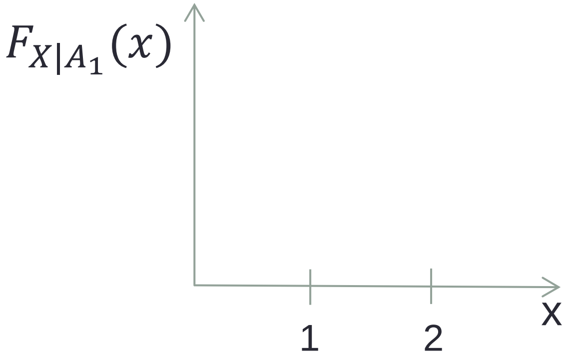
Distribuições Mistas

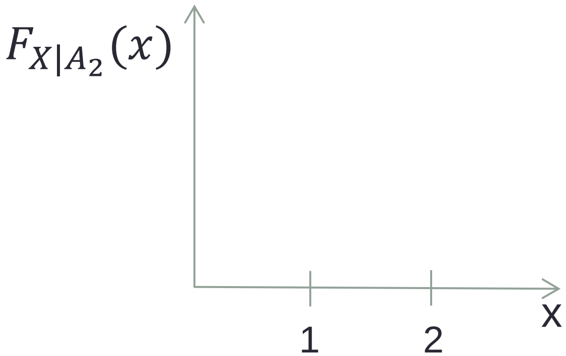
- $X = \begin{cases} U(0{,}2), & com\, p = 1/2 \\ 1, & com\, p = 1/2 \end{cases}$
- X é contínua ou discreta?
- $X = \begin{cases} Y(continua), & com\, probabilidade\ \ p \\ Z(discreta), & com\, probabilidade\ \ (1-p) \end{cases}$

- $F_X(x) = pP(Y \leq x) + (1-p)P(Z \leq x)$
- $= pF_X(x) + (1-p)F_Z(x)$
- $E[X] = pE[Y] + (1-p)E[Z]$

Distribuições Mistas

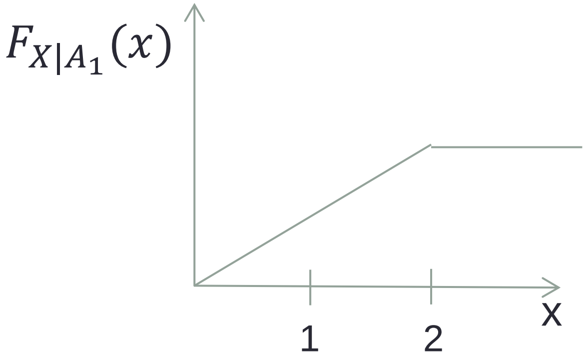
- $X = \begin{cases} U(0{,}2), & com\ p = 1/2 \\ 1, & com\ p = 1/2 \end{cases}$

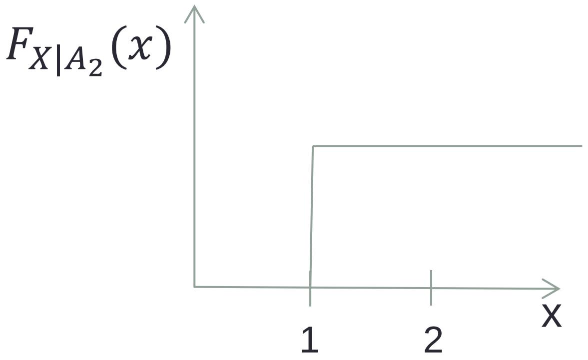




Distribuições Mistas

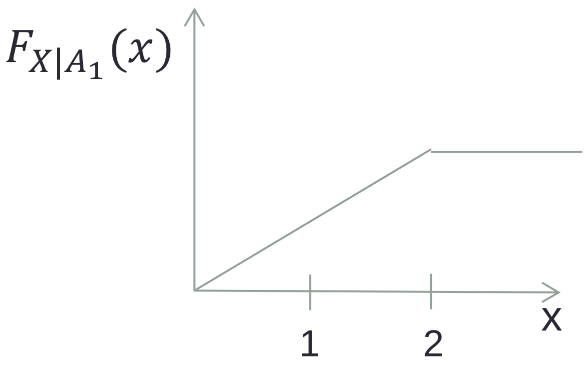
- $X = \begin{cases} U(0,2), & com\, p = 1/2 \\ 1, & com\, p = 1/2 \end{cases}$

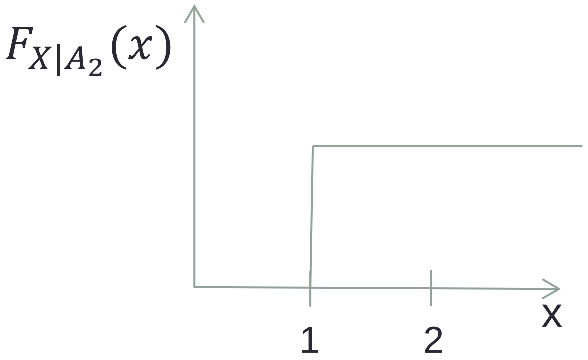


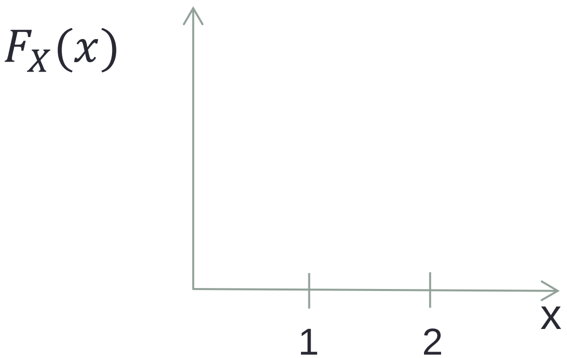


Distribuições Mistas

- $X = \begin{cases} U(0,2), & com\, p = 1/2 \\ 1, & com\, p = 1/2 \end{cases}$

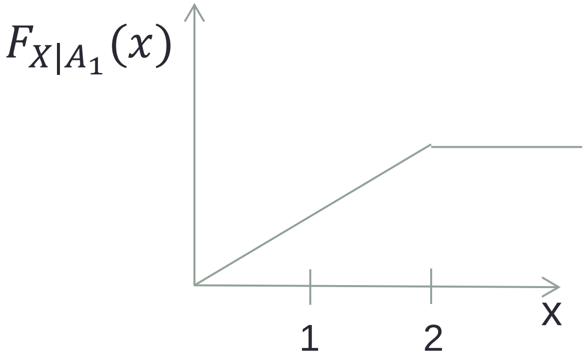


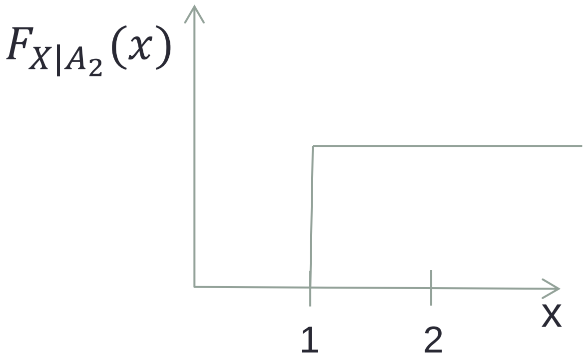


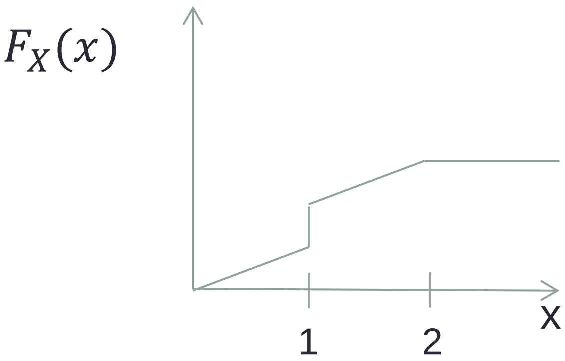


Distribuições Mistas

- $X = \begin{cases} U(0{,}2), & com\ p = 1/2 \\ 1, & com\ p = 1/2 \end{cases}$







Exercício

- Uma pessoa pega um taxi ou um ônibus para o trabalho. Se houver um taxi no ponto, o que ocorre com probabilidade 2/3, esta pessoa toma o taxi. Caso contrário pegará um taxi ou o ônibus que chegar primeiro. O próximo taxi chega em um tempo que segue uma distribuição uniforme U(0,10) min e o próximo ônibus chega em 5 min.
  - Encontre a CDF e o valor esperado para o tempo de espera

Exercício

- Uma pessoa pega um taxi ou um ônibus para o trabalho. Se houver um taxi no ponto, o que ocorre com probabilidade 2/3, esta pessoa toma o taxi. Caso contrário pegará um taxi ou o ônibus que chegar primeiro. O próximo taxi chega em um tempo que segue uma distribuição uniforme U(0,10) min e o próximo ônibus chega em 10 min.
  - Encontre a CDF e o valor esperado para o tempo de espera
  - CDF = 2/3 + 1/30x
  - E[X]=15/12

DÚVIDAS?