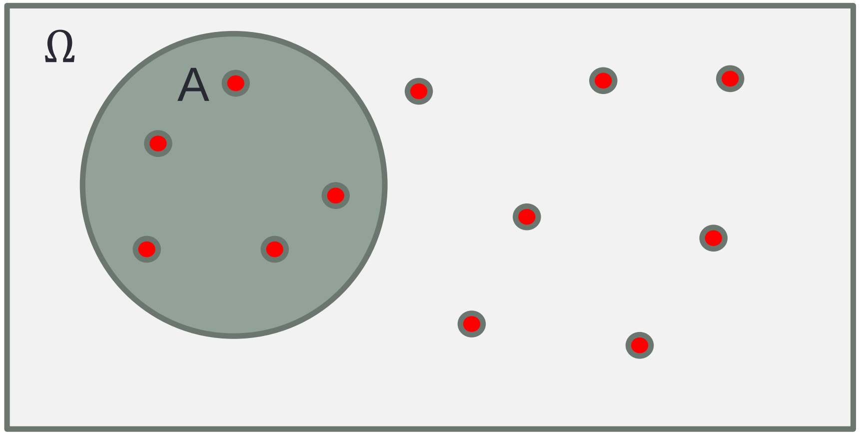
PROBABILIDADE E PROCESSOS ESTOCÁSTICOS (CKP7366)

Prof. João Paulo Pordeus Gomes

CONTAGEM

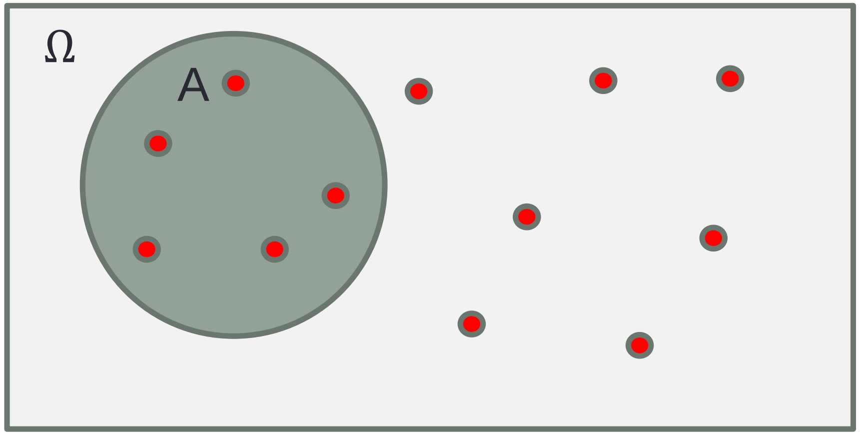
Contagem

- Contagem de eventos -> Probabilidade de ocorrência
  - Eventos discretos e com mesma probabilidade



Contagem

- Contagem de eventos -> Probabilidade de ocorrência
  - Eventos discretos e com mesma probabilidade

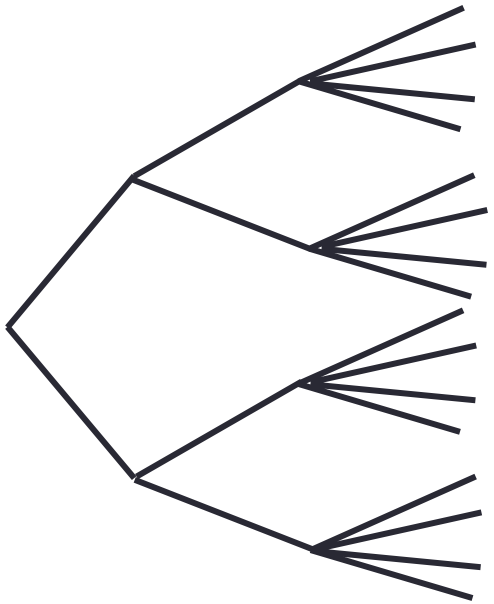


- Lista de Elementos
- Descrição abstrata
- Princípio fundamental da contagem
  - Permutações, combinações, número de subconjuntos ...

Princípio Fundamental da Contagem

- 2 camisas
- 2 sapatos
- 4 calças

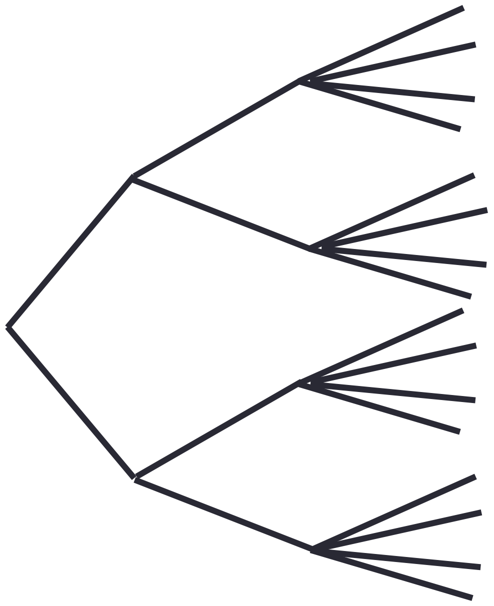
- Numero de combinações ?



Princípio Fundamental da Contagem

- 2 camisas
- 2 sapatos
- 4 calças

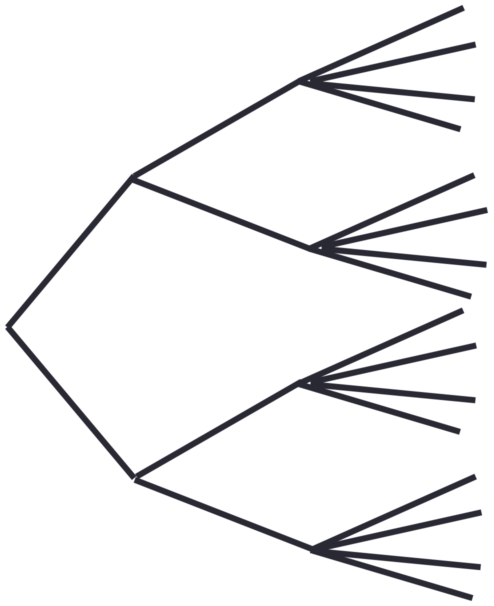
- Numero de combinações ?
  - $N_1 * N_2 * N_3$



Princípio Fundamental da Contagem

- 2 camisas
- 2 sapatos
- 4 calças

- Numero de combinações ?
  - $N_1 * N_2 * N_3$
- Placa de carros
  - 3 letras e 4 números



Exemplo

- Placa de carros
  - 3 letras e 4 números

Exemplo

- Placa de carros
  - 3 letras e 4 números
  - $26 \times 26 \times 26 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$

Exemplo

- Placa de carros
  - 3 letras e 4 números
  - $26 \times 26 \times 26 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$
- Sem repetição

Exemplo

- Placa de carros
  - 3 letras e 4 números
  - $26 \times 26 \times 26 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$
- Sem repetição
  - $26 \times 25 \times 24 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7$

Exemplo

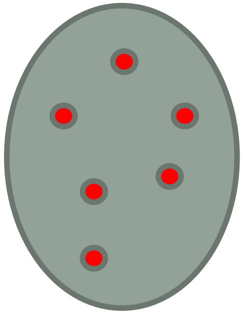
- Considere um conjunto de n elementos. Deseja-se ordenar estes elementos

Exemplo

- Considere um conjunto de n elementos. Deseja-se ordenar estes elementos
  - Permutação

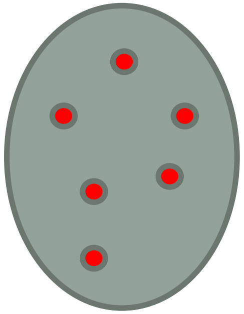
Exemplo

- Considere um conjunto de n elementos. Deseja-se ordenar estes elementos
  - Permutação



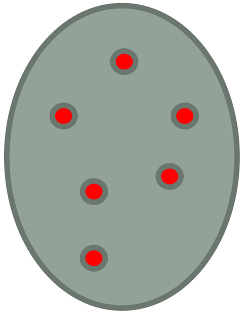
Exemplo

- Considere um conjunto de n elementos. Deseja-se ordenar estes elementos
  - Permutação



Exemplo

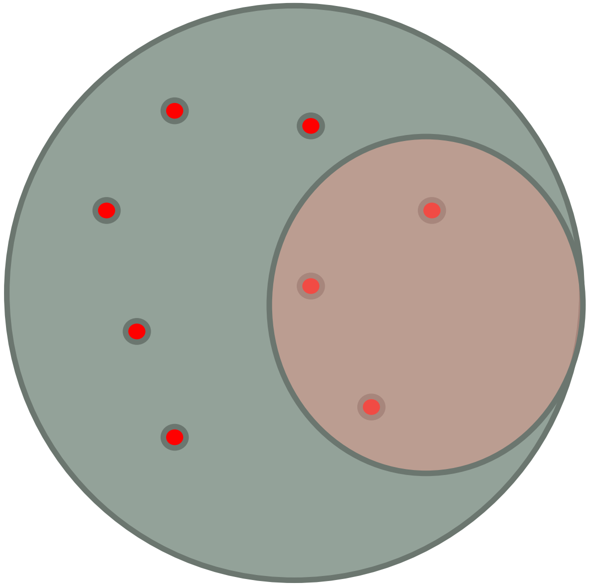
- Considere um conjunto de n elementos. Deseja-se ordenar estes elementos
  - Permutação



$$n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots 1 = n!$$

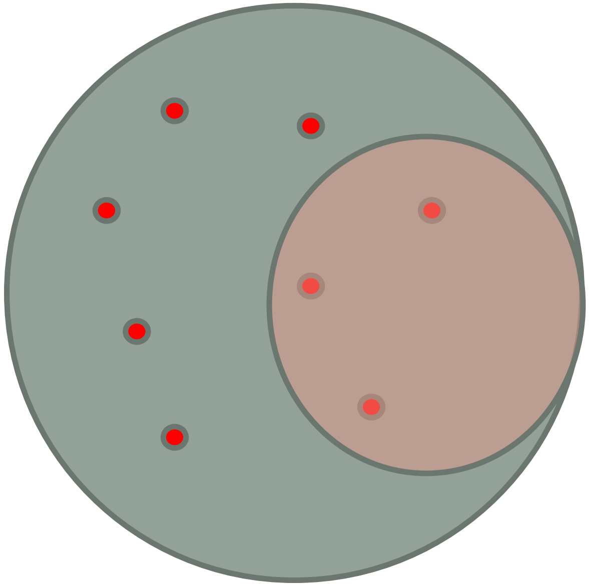
Exemplo

- Número de subconjuntos de um conjunto de tamanho n



Exemplo

- Número de subconjuntos de um conjunto de tamanho n



$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times \cdots \times 2 = 2^n$$

Exercício

- Dado um conjunto c = {A,B,C,D,E}
  - Quantas strings de três letras podemos construir a partir deste conjunto? (sem repetição)
  - Quantos são os subconjuntos de c?
  - Quantas strings de 5 letras podem ser construídas de forma que A e B sejam vizinhos?

Exemplo

- Encontre a probabilidade de seis lançamentos de um dados resultarem em números diferentes

Exemplo

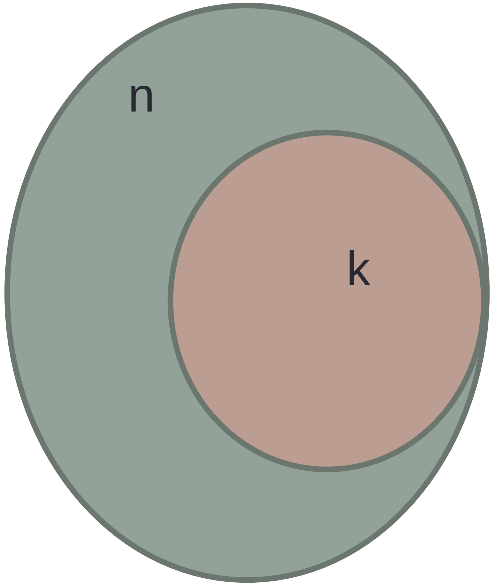
- Encontre a probabilidade de seis lançamentos de um dados resultarem em números diferentes
  - $P(A) = \frac{numero\ de\ elementos\ de\ A}{Todas\ as\ possibilidades}$

Exemplo

- Encontre a probabilidade de seis lançamentos de um dados resultarem em números diferentes
  - $P(A) = \frac{numero\ de\ elementos\ de\ A}{Todas\ as\ possibilidades}$
  - $P(A) = \frac{6!}{6^6}$

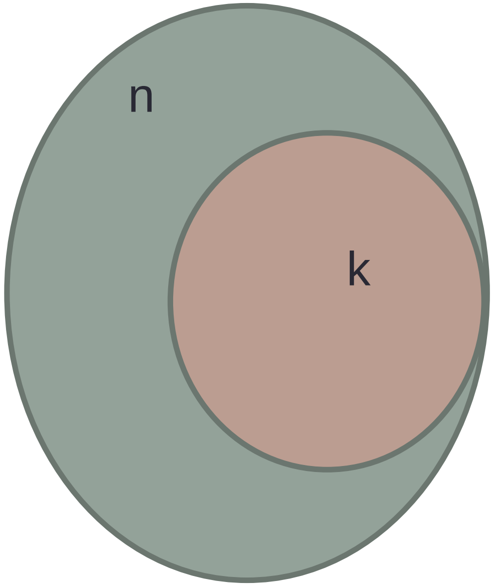
Combinações

- Considere um conjunto de tamanho n. Nós gostaríamos de construir um subconjunto de tamanho k
  - Duas formas de construir uma sequencia ordenada de k itens



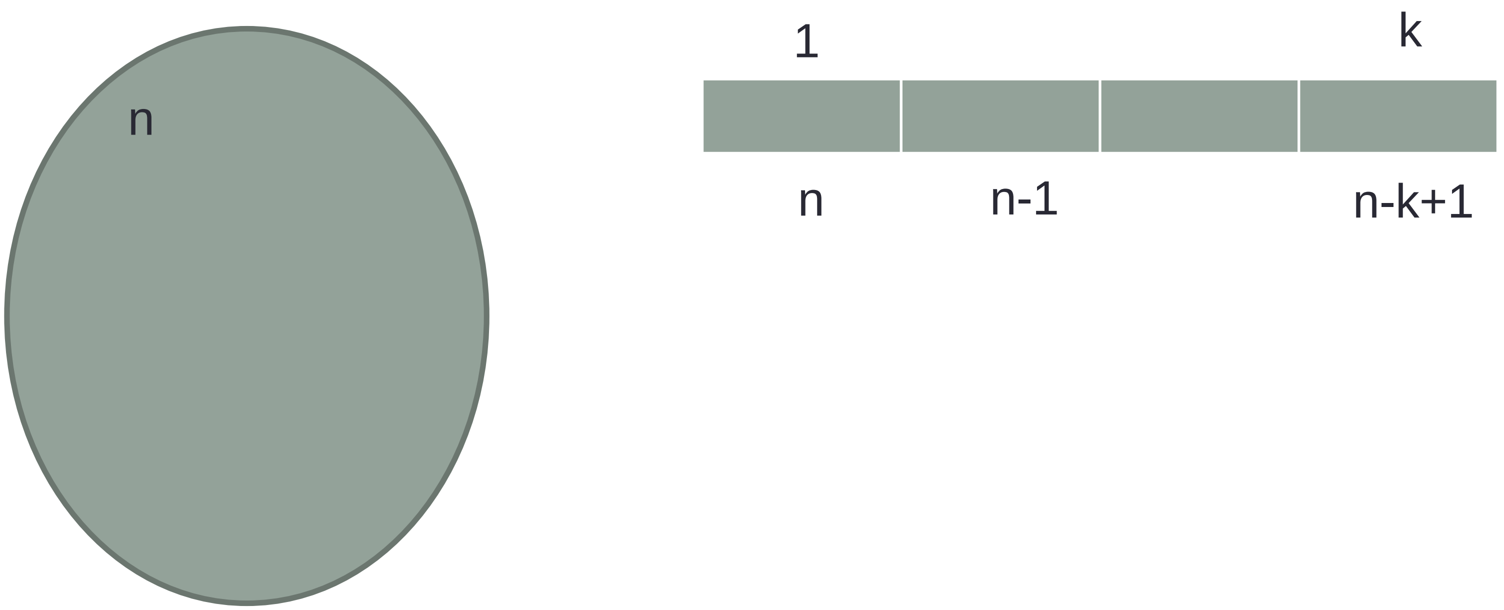
Combinações

- Considere um conjunto de tamanho n. Nós gostaríamos de construir um subconjunto de tamanho k
  - Duas formas de construir uma sequencia ordenada de k itens
    - $\binom{n}{k}$



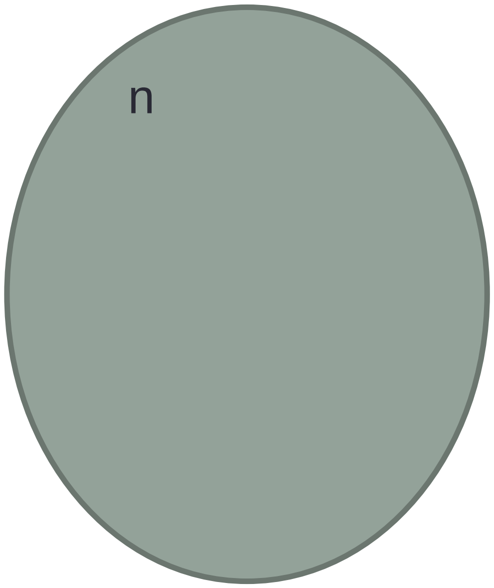
Combinações

- Considere um conjunto de tamanho n. Nós gostaríamos de construir um subconjunto de tamanho k



Combinações

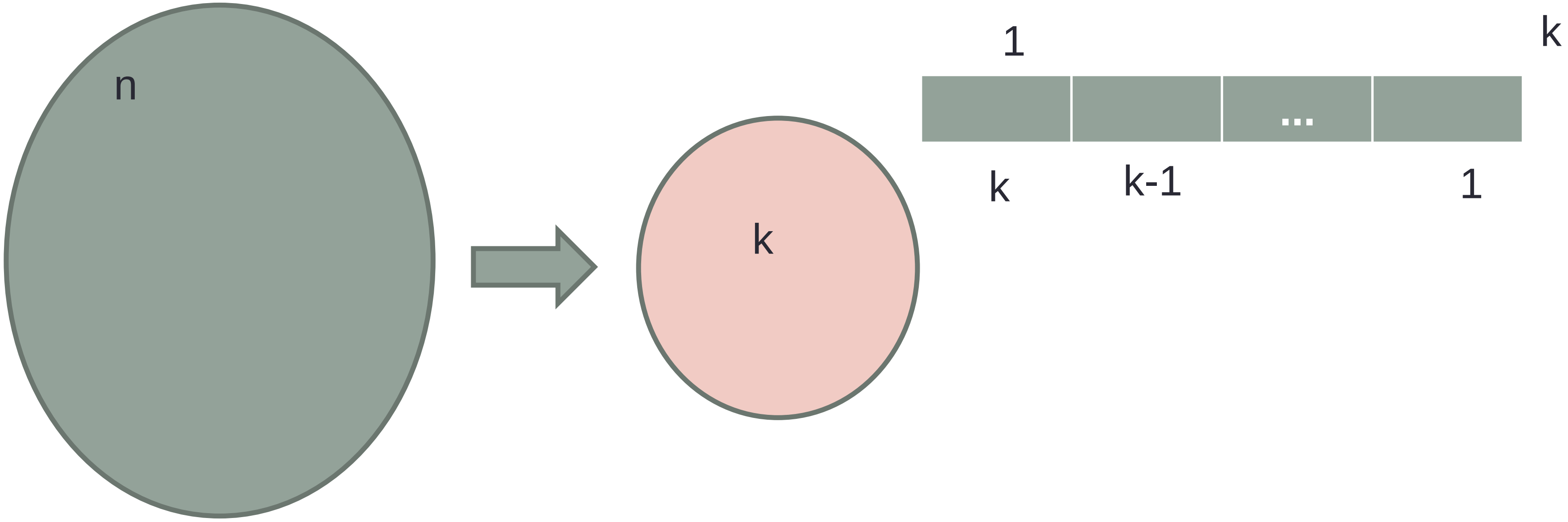
- Considere um conjunto de tamanho n. Nós gostaríamos de construir um subconjunto de tamanho k



$$= \frac{n!}{(n-k)!}$$

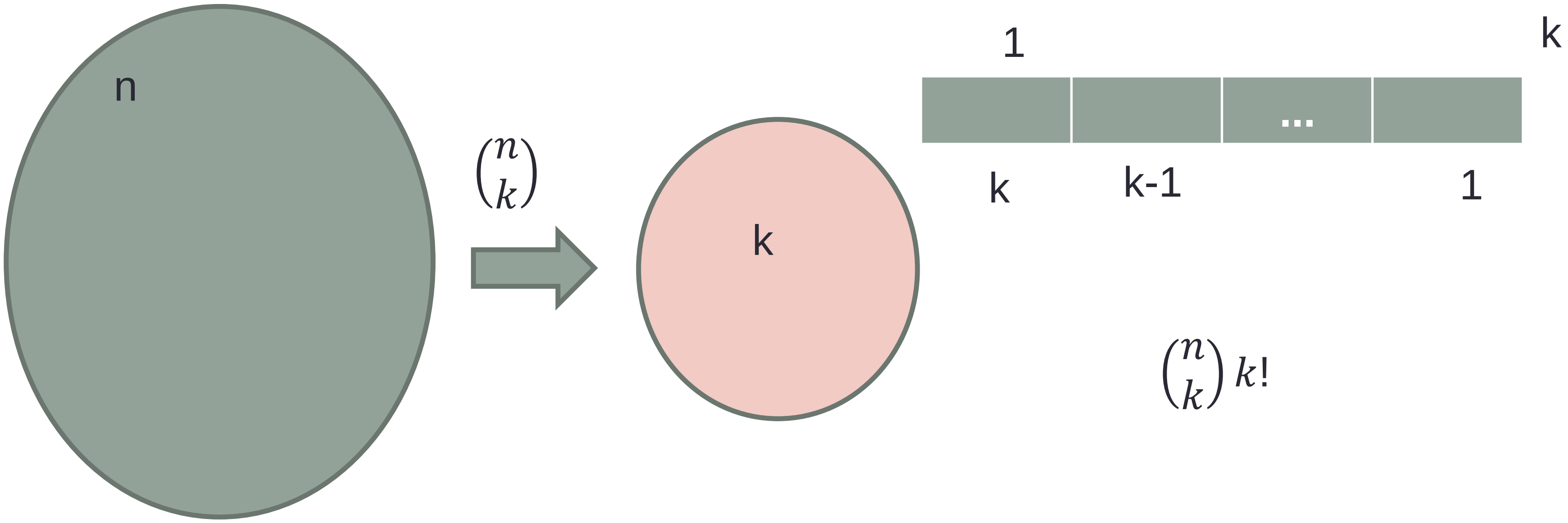
Combinações

- Considere um conjunto de tamanho n. Nós gostaríamos de construir um subconjunto de tamanho k
  - Escolher k itens de n e depois calcular a quantidade de ordenações possíveis



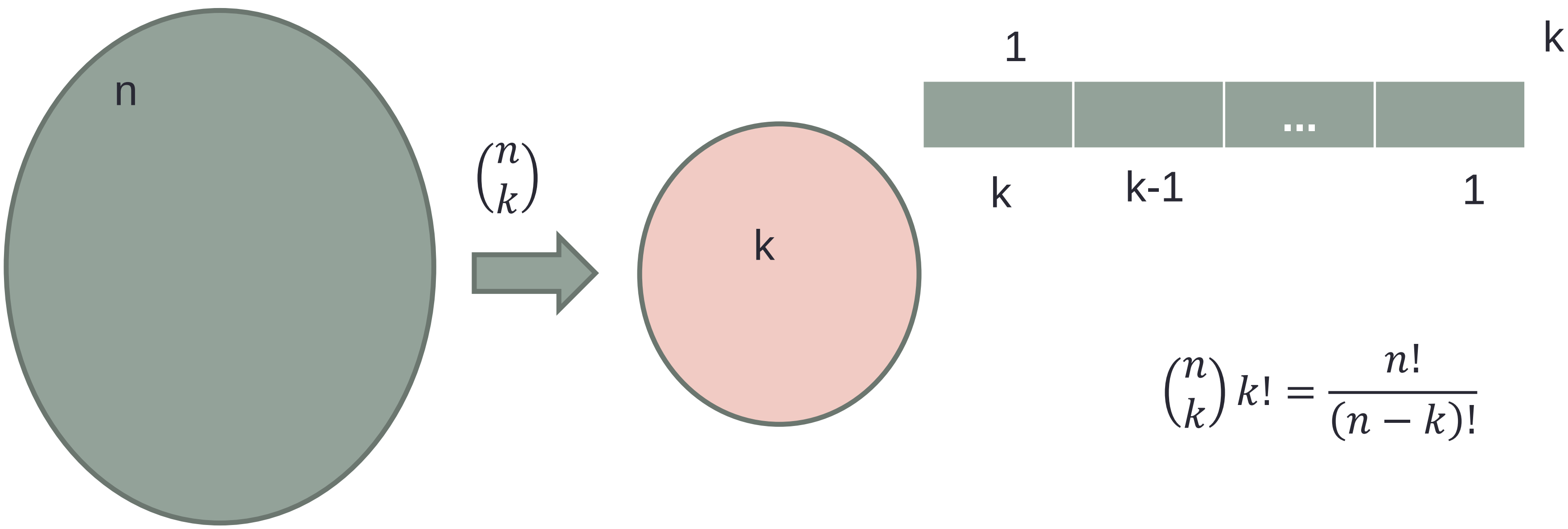
Combinações

- Considere um conjunto de tamanho n. Nós gostaríamos de construir um subconjunto de tamanho k
    - Escolher k itens de n e depois calcular a quantidade de ordenações possíveis



Combinações

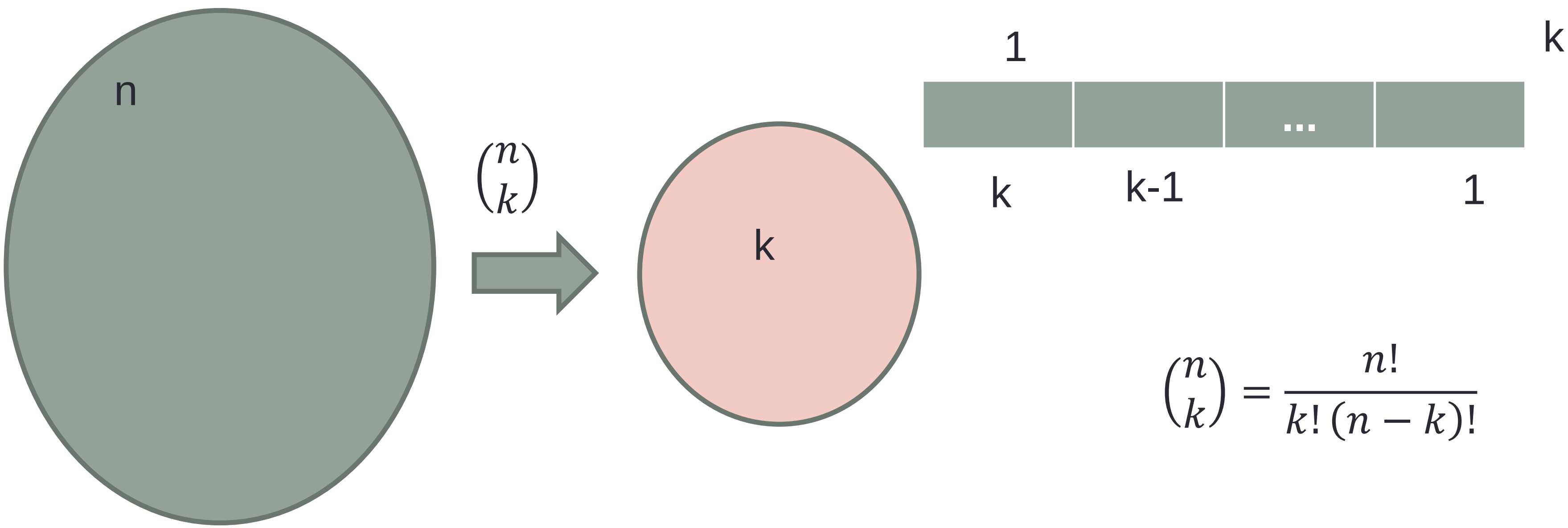
- Considere um conjunto de tamanho n. Nós gostaríamos de construir um subconjunto de tamanho k
  - Escolher k itens de n e depois calcular a quantidade de ordenações possíveis



$$\binom{n}{k} k! = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Combinações

- Considere um conjunto de tamanho n. Nós gostaríamos de construir um subconjunto de tamanho k
  - Escolher k itens de n e depois calcular a quantidade de ordenações possíveis



$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Alguns testes

- $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
- $\binom{n}{0} =$
- $\binom{n}{n} =$
- $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} =$

Exercício

- Considere um conjunto de n pessoas. Deseja-se escolher uma comissão composta por k pessoas e dentre estas escolher o chefe da comissão. O numero de possíveis comitês de tamanho k é dado por $\binom{n}{k}k$. E o numero total de comitês é dado por $\mathrm{c} = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k$.
- Encontre o valor de c (encontre α, β, γ e δ)dado que devemos escolher inicialmente o chefe e depois o restante da comissão. A resposta deve estar na seguinte forma:
- $c = (\alpha + n^{\beta})2^{\gamma n+\delta})$

Probabilidade Binomial

- Coeficiente binomial – modelo de probabilidade binominal

Probabilidade Binomial

- Coeficiente binomial – modelo de probabilidade binominal
- Considere n lançamentos de uma moeda justa
  - P(H) = p

Probabilidade Binomial

- Coeficiente binomial – modelo de probabilidade binominal
- Considere n lançamentos de uma moeda justa
  - P(H) = p
  - P(k=3 H) =

Probabilidade Binomial

- Coeficiente binomial – modelo de probabilidade binominal
- Considere n lançamentos de uma moeda justa
  - P(H) = p
  - P(k=3 H) =
  - P(HTTHHH) =

Probabilidade Binomial

- Coeficiente binomial – modelo de probabilidade binominal
- Considere n lançamentos de uma moeda justa
  - $P(H) = p$
  - $P(k=3\ H) =$
  - $P(HTTHHH) = p(1-p)(1-p)ppp = p^4(1-p)^2$

Probabilidade Binomial

- Coeficiente binomial – modelo de probabilidade binominal
- Considere n lançamentos de uma moeda justa
  - $P(H) = p$
  - $P(k=3\ H) =$
  - $P(HTTHHH) = p(1-p)(1-p)ppp = p^4(1-p)^2$
  - $P(\text{qualquer sequencia}) = p^{\#H}(1-p)^{\#T}$

Probabilidade Binomial

- Coeficiente binomial – modelo de probabilidade binominal
- Considere n lançamentos de uma moeda justa
  - $P(H) = p$
  - $P(k=3\ H) =$
  - $P(HTTHHH) = p(1-p)(1-p)ppp = p^4(1-p)^2$
  - $P(\text{qualquer sequencia}) = p^{\#H}(1-p)^{\#T}$
  - $P(\text{sequencia com } k\ H) = p^k(1-p)^{n-k}$

Probabilidade Binomial

- Coeficiente binomial – modelo de probabilidade binominal
- Considere n lançamentos de uma moeda justa
  - $P(H) = p$
  - $P(k=3\ H) = p^k(1-p)^{n-k}$ (# sequências com k H)
  - $P(HTTHHH) = p(1-p)(1-p)ppp = p^4(1-p)^2$
  - $P(\text{qualquer sequencia}) = p^{\#H}(1-p)^{\#T}$
  - $P(\text{sequencia com } k\ H) = p^k(1-p)^{n-k}$

Probabilidade Binomial

- Coeficiente binomial – modelo de probabilidade binominal
- Considere n lançamentos de uma moeda justa
  - P(H) = p
  - P(k=3 H) = $p^k(1-p)^{n-k} \binom{n}{k}$
  - P(HTTHHH) = p(1-p)(1-p)ppp = $p^4(1-p)^2$
  - P(qualquer sequencia) = $p^{\#H}(1-p)^{\#T}$
  - P(sequencia com k H) = $p^k(1-p)^{n-k}$

Exemplo

- Dado que houve 3 H em um total de 10 lançamentos, qual a probabilidade dos dois primeiros lançamentos serem H?

Exemplo

- Dado que houve 3 H em um total de 10 lançamentos, qual a probabilidade dos dois primeiros lançamentos serem H?
  - A – dois primeiro lançamentos são H
  - B – 3 dos 10 lançamentos foram H

Exemplo

- Dado que houve 3 H em um total de 10 lançamentos, qual a probabilidade dos dois primeiros lançamentos serem H?
  - A – dois primeiro lançamentos são H
  - B – 3 dos 10 lançamentos foram H
  - O que nós sabemos
    - Lançamentos são independentes
    - P(H) = p
    - $p(k\ Heads) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
  - $P(A|B) = ?$

Exemplo

- Dado que houve 3 H em um total de 10 lançamentos, qual a probabilidade dos dois primeiros lançamentos serem H?
  - A – dois primeiro lançamentos são H
  - B – 3 dos 10 lançamentos foram H
  - O que nós sabemos
    - Lançamentos são independentes
    - P(H) = p
    - $p(k\ Heads) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
  - $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Exemplo

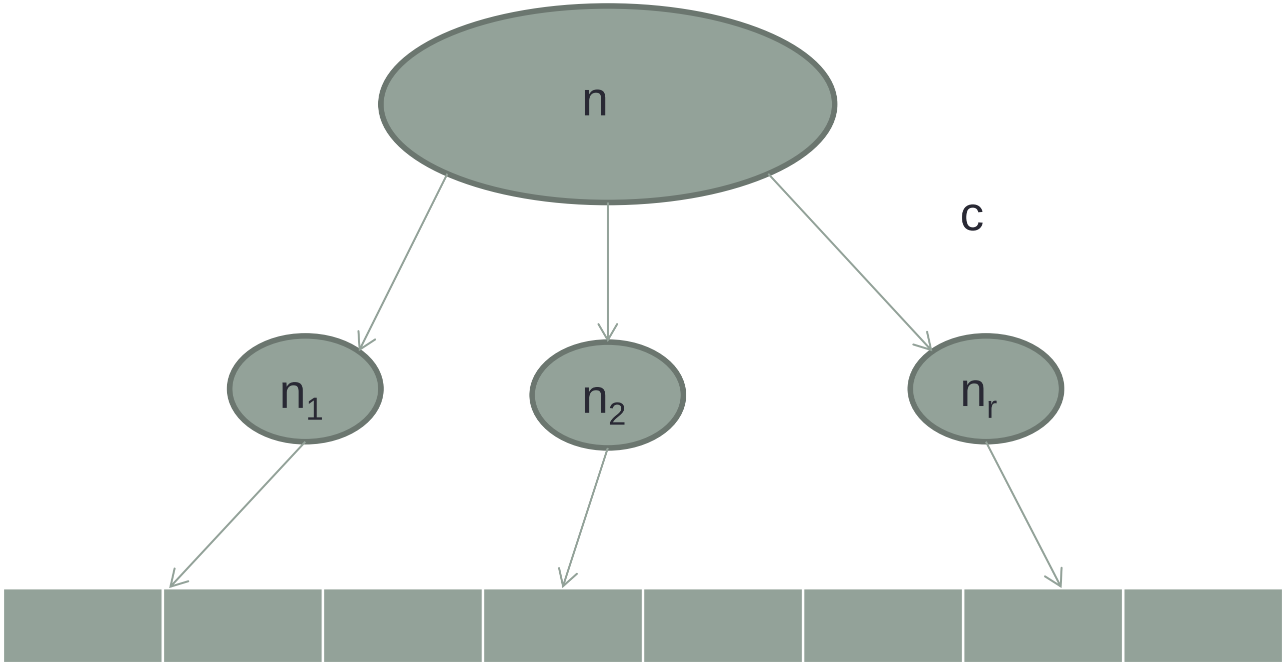
- Dado que houve 3 H em um total de 10 lançamentos, qual a probabilidade dos dois primeiros lançamentos serem H?
  - A – dois primeiro lançamentos são H
  - B – 3 dos 10 lançamentos foram H
  - O que nós sabemos
    - Lançamentos são independentes
    - P(H) = p
    - $p(k\ Heads) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
  - $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{p^2 \binom{8}{1} p^1 (1-p)^{8-1}}{\binom{10}{3} p^3 (1-p)^{10-3}}$

Partições

- Dividir n item em r subconjuntos
  - $n_1, n_2, \ldots, n_r$
  - $n_1 + n_2, + \cdots + n_r = n$

Partições

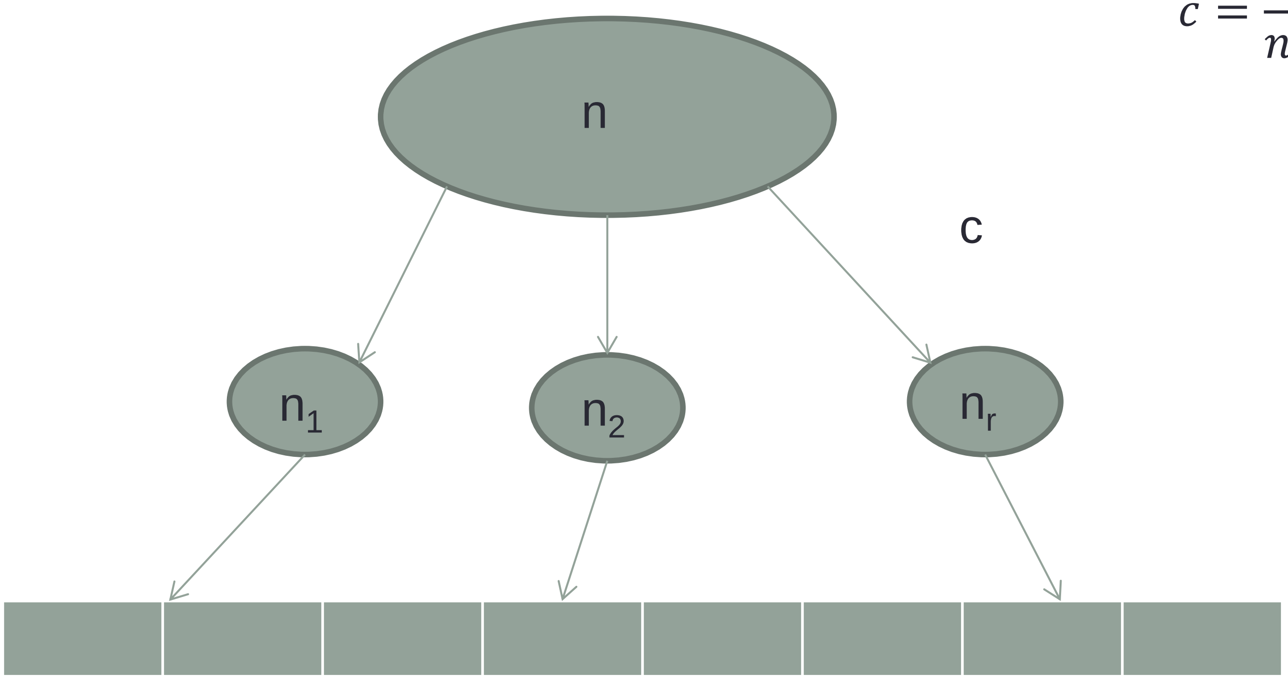
- Dividir n item em r subconjuntos
  - $n_1, n_2, \ldots, n_r$
  - $n_1 + n_2, + \cdots + n_r = n$



Partições

- Dividir n item em r subconjuntos
  - $n_1, n_2, \dots, n_r$
  - $n_1 + n_2, + \cdots + n_r = n$

$$c = \frac{n!}{n_1!\, n_1! \dots n_r!}$$



DÚVIDAS?