PROBABILIDADE E PROCESSOS ESTOCÁSTICOS (CKP7366)

Prof. João Paulo Pordeus Gomes

PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

Processo de Bernoulli

- Junção e separação de processos estocásticos

Processo de Bernoulli

- Uma sequencia de jogadas independentes de Bernoulli, X_i.
- Em cada jogada i
  - $P(X_i = 1) = P(sucesso\ na\ i - ésina\ jogada) = p$
  - $P(X_i = 0) = P(insucesso\ na\ i - ésina\ jogada) = 1 - p$
- Premissas
  - Independência
  - Homogeneidade no tempo
- Usado para modelar
  - Chegadas em um banco/caixa
  - Requisições a um servidor

Variáveis aleatórias

- Bernoulli
  - $E[X_i] = \mathrm{p}$
  - $var(X_i) = p(1-p)$
  - $p_{X_i}(x) = \begin{cases} p & se\ x = 1 \\ 1-p & se\ x = 0 \end{cases}$
- Binomial
  - $P(S = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
  - $E[S] = np$
  - $var(S) = np(1-p)$
- Geométrica
  - $P(T = k) = (1-p)^{k-1} p$
  - $E[T] = \frac{1}{p}$
  - $var(T) = \frac{1-p}{p^2}$

Junção de Processos de Bernoulli

Bernoulli(p)

0	**x**	**0**	**x**	**0**	**0**	**0**	**x**		

x	**0**	**0**	**x**	**x**	**0**	**x**	**0**		

Bernoulli(q)

Junção de Processos de Bernoulli

Bernoulli(p)

0	**x**	**0**	**x**	**0**	**0**	**0**	**x**		

x	**x**	**0**	**x**	**x**	**0**	**x**	**x**		

x	**0**	**0**	**x**	**x**	**0**	**x**	**0**		

Bernoulli(q)

Junção de Processos de Bernoulli

Bernoulli(p)

0	**x**	**0**	**x**	**0**	**0**	**0**	**x**		

x	**x**	**0**	**x**	**x**	**0**	**x**	**x**		

x	**0**	**0**	**x**	**x**	**0**	**x**	**0**		

Bernoulli(q)

- $Z_t = g(X_t, Y_t)$
- $Z_{t+1} = g(X_{t+1}, Y_{t+1})$

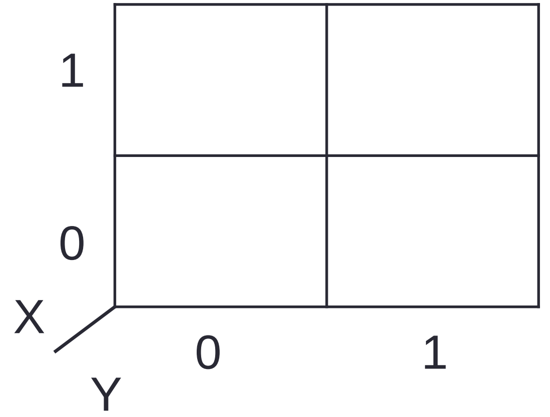
Junção de Processos de Bernoulli

Bernoulli(p)

0	**x**	**0**	**x**	**0**	**0**	**0**	**x**		
x	**x**	**0**	**x**	**x**	**0**	**x**	**x**		
x	**0**	**0**	**x**	**x**	**0**	**x**	**0**		

Bernoulli(q)

- $Z_t = g(X_t, Y_t)$
- $Z_{t+1} = g(X_{t+1}, Y_{t+1})$



Junção de Processos de Bernoulli

Bernoulli(p)

0	**x**	**0**	**x**	**0**	**0**	**0**	**x**		

x	**x**	**0**	**x**	**x**	**0**	**x**	**x**		

x	**0**	**0**	**x**	**x**	**0**	**x**	**0**		

Bernoulli(q)

- $Z_t = g(X_t, Y_t)$
- $Z_{t+1} = g(X_{t+1}, Y_{t+1})$

X \ Y	0	1
1	p(1-q)	pq
0	(1-p)(1-q)	q(1-p)

Junção de Processos de Bernoulli

Bernoulli(p)

0	**x**	**0**	**x**	**0**	**0**	**0**	**x**		

x	**x**	**0**	**x**	**x**	**0**	**x**	**x**		

x	**0**	**0**	**x**	**x**	**0**	**x**	**0**		

Bernoulli(q)

- $Z_t = g(X_t, Y_t)$
- $Z_{t+1} = g(X_{t+1}, Y_{t+1})$

Bernoulli(p+q-pq)

X \ Y	0	1
1	p(1-q)	pq
0	(1-p)(1-q)	q(1-p)

Junção de Processos de Bernoulli

Bernoulli(p)

0	**x**	**0**	**x**	**0**	**0**	**0**	**x**		

x	**x**	**0**	**x**	**x**	**0**	**x**	**x**		

x	**0**	**0**	**x**	**x**	**0**	**x**	**0**		

Bernoulli(q)

- $Z_t = g(X_t, Y_t)$
- $Z_{t+1} = g(X_{t+1}, Y_{t+1})$

Bernoulli(p+q-pq)

X \ Y	0	1
1	p(1-q)	pq
0	(1-p)(1-q)	q(1-p)

$P(Chegada\ em\ X | chegada\ em\ Z) =$

Junção de Processos de Bernoulli

Bernoulli(p)

0	x	0	x	0	0	0	x		

x	x	0	x	x	0	x	x		

x	0	0	x	x	0	x	0		

Bernoulli(q)

- $Z_t = g(X_t, Y_t)$
- $Z_{t+1} = g(X_{t+1}, Y_{t+1})$

Bernoulli(p+q-pq)

X \ Y	0	1
1	p(1-q)	pq
0	(1-p)(1-q)	q(1-p)

$$P(Chegada\ em\ X | chegada\ em\ Z) = \frac{p}{p + q - pq}$$

Exercício

- Suponha dois processos estocásticos de Bernoulli com parâmetros p e q. Será formado um novo processo Z pela junção de X e Y e este realização deste processo será marcada como sucesso se X e Y forem igual 1 (sucesso). O novo processo é Bernoulli com qual parâmetro ?

Separação de Processos de Bernoulli

- Separação entre dois caminhos com probabilidade q
- A decisão é independente do processo estocástico

0	**x**	**0**	**x**	**0**	**x**	**0**	**x**	Bern(p)

Separação de Processos de Bernoulli

- Separação entre dois caminhos com probabilidade q
- A decisão é independente do processo estocástico

	x						**x**

0	**x**	**0**	**x**	**0**	**x**	**0**	**x**	Bern(p)

			x		**x**		

Separação de Processos de Bernoulli

- Separação entre dois caminhos com probabilidade q
- A decisão é independente do processo estocástico

	x						**x**	Bern(pq)
0	**x**	**0**	**x**	**0**	**x**	**0**	**x**	Bern(p)
			x		**x**			Bern(p(1-q))

Separação de Processos de Bernoulli

- Separação entre dois caminhos com probabilidade q
- A decisão é independente do processo estocástico

	x						**x**	Bern(pq)
0	**x**	**0**	**x**	**0**	**x**	**0**	**x**	Bern(p)
			x		**x**			Bern(p(1-q))

Os dois processos são independentes ?

Exercício

- Um aluno estuda para as suas provas com probabilidade 0.5. E cada prova existe uma probabilidade de 0.2 de ele ser aprovado mesmo não tendo estudado. Qual o valor esperado do numero de provas que ele deverá fazer, sem estudar, até obter 3 aprovações ?

Exercício

- Ao visitar uma floresta, um mosquito pode pousar em você com uma probabilidade 0.5 a cada segundo. Caso pouse, existe uma probabilidade 0.2 de que você seja picado.
  - Qual o valor esperado do tempo entre picadas?
  - Qual a variância do tempo entre picadas?
- Adicionalmente, a cada segundo, um besouro poderá pousar em você com probabilidade 0.1. Caso pouse, irá picar com probabilidade 0.7.
  - Qual o valor esperado do tempo entre picadas ?(mosquito ou besouro)
  - Qual a variância do tempo entre picadas?

Exercício

- Um computador processa tarefas vindas de dois usuários. O tempo é dividido em slots. Um slot pode estar ocupado com probabilidade p=5/6. Para um slot ocupado, existe uma probabilidade de 2/5 desta tarefa ter vindo do usuário 1 e 3/5 do usuário 2.
  - Encontre a probabilidade de uma tarefa do usuário 1 ser executada pela primeira vez durante o slot 4.
  - Dado que 5 dos 10 primeiros slots são vazios, qual a probabilidade do sexto slot vazio ser o 12?
  - Encontre o numero esperado de slots (do usuário 1) até o 5 processo do usuário 1

Exercício

- Maria distribui brinquedos para crianças. Ela visita casas e entrega um brinquedo sempre que a porta é atendida e existe uma criança na casa. Sabe-se que a probabilidade de uma porta ser atendida é ¾ e de uma criança morar na casa é 1/3. Sabendo que os dois eventos são independentes responda:
  - Qual a probabilidade dela não ter distribuído nenhum brinquedo até a segunda casa visitada?
  - Qual a probabilidade dela entregar o primeiro brinquedo somente na quarta visita?
  - Qual a probabilidade dela entregar o segundo brinquedo na quarta visita?
  - Dado que ela não entregou o segundo brinquedo até a visita 3, qual a probabilidade dela entregar o segundo brinquedo na visita 5?

Eventos raros em tempo longos

- n grande, p pequeno, $\lambda = pn$ moderado
- $P(S = k) = \frac{n!}{(n-k)!k!} p^k (1-p)^{n-k}$

Eventos raros em tempo longos

- n grande, p pequeno, $\lambda = pn$ moderado
- $P(S = k) = \frac{n!}{(n-k)!k!} p^k (1 - p)^{n-k}$
- $P(S = k) = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} \frac{\lambda^k}{n^k} (1 - \frac{\lambda}{n})^{n-k}$

Eventos raros em tempo longos

- n grande, p pequeno, $\lambda = pn$ moderado
- $P(S = k) = \frac{n!}{(n-k)!k!} p^k (1-p)^{n-k}$
- $P(S = k) = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} \frac{\lambda^k}{n^k} (1 - \frac{\lambda}{n})^{n-k}$
- $P(S = k) = \frac{n}{n} \frac{(n-1)}{n} \ldots \frac{(n-k+1)}{n} \frac{\lambda^k}{k!} (1 - \frac{\lambda}{n})^n (1 - \frac{\lambda}{n})^{-k}$

Eventos raros em tempo longos

- n grande, p pequeno, $\lambda = pn$ moderado
- $P(S=k) = \frac{n!}{(n-k)!k!} p^k (1-p)^{n-k}$
- $P(S=k) = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} \frac{\lambda^k}{n^k} (1-\frac{\lambda}{n})^{n-k}$
- $P(S=k) = \frac{n}{n} \frac{(n-1)}{n} \ldots \frac{(n-k+1)}{n} \frac{\lambda^k}{k!} (1-\frac{\lambda}{n})^{n} (1-\frac{\lambda}{n})^{-k}$

$n \to \infty$

Eventos raros em tempo longos

- n grande, p pequeno, $\lambda = pn$ moderado
- $P(S = k) = \frac{n!}{(n-k)!k!} p^k (1-p)^{n-k}$
- $P(S = k) = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \frac{\lambda^k}{n^k} (1 - \frac{\lambda}{n})^{n-k}$
- $P(S = k) = \frac{n}{n} \frac{(n-1)}{n} \dots \frac{(n-k+1)}{n} \frac{\lambda^k}{k!} (1 - \frac{\lambda}{n})^n (1 - \frac{\lambda}{n})^{-k}$
- $P(S = k) = 1 \,.\, 1 \dots \,.1 \frac{\lambda^k}{k!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k}$ $\qquad n \to \infty$

Eventos raros em tempo longos

- n grande, p pequeno, $\lambda = pn$ moderado
- $P(S=k) = \frac{n!}{(n-k)!k!} p^k (1-p)^{n-k}$
- $P(S=k) = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} \frac{\lambda^k}{n^k} (1-\frac{\lambda}{n})^{n-k}$
- $P(S=k) = \frac{n}{n} \frac{(n-1)}{n} \ldots \frac{(n-k+1)}{n} \frac{\lambda^k}{k!} (1-\frac{\lambda}{n})^{n} (1-\frac{\lambda}{n})^{-k}$
- $P(S=k) = 1\,.\,1 \ldots \;.1 \frac{\lambda^k}{k!} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}$

$n \to \infty$

$\lim_{n\to\infty} (1-\lambda n)^n = e^{-\lambda}$

Eventos raros em tempo longos

- n grande, p pequeno, $\lambda = pn$ moderado
- $P(S=k) = \frac{n!}{(n-k)!k!} p^k (1-p)^{n-k}$
- $P(S=k) = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} \frac{\lambda^k}{n^k} (1-\frac{\lambda}{n})^{n-k}$
- $P(S=k) = \frac{n}{n} \frac{(n-1)}{n} \ldots \frac{(n-k+1)}{n} \frac{\lambda^k}{k!} (1-\frac{\lambda}{n})^n (1-\frac{\lambda}{n})^{-k}$
- $P(S=k) = 1\,.\,1 \ldots\ .1 \frac{\lambda^k}{k!} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}$ $\quad n \to \infty$
- $P(S=k) = 1\,.\,1 \ldots\ .1 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}$ $\quad \lim_{n\to\infty} (1-\lambda n)^n = e^{-\lambda}$

Eventos raros em tempo longos

- n grande, p pequeno, $\lambda = pn$ moderado
- $P(S=k) = \frac{n!}{(n-k)!k!} p^k (1-p)^{n-k}$
- $P(S=k) = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} \frac{\lambda^k}{n^k} (1-\frac{\lambda}{n})^{n-k}$
- $P(S=k) = \frac{n}{n} \frac{(n-1)}{n} \ldots \frac{(n-k+1)}{n} \frac{\lambda^k}{k!} (1-\frac{\lambda}{n})^{n} (1-\frac{\lambda}{n})^{-k}$
- $P(S=k) = 1\,.\,1 \ldots\ .1 \frac{\lambda^k}{k!} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}$ $\qquad n \to \infty$
- $P(S=k) = 1\,.\,1 \ldots\ .1 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}$ $\qquad \lim_{n\to\infty} (1-\lambda n)^n = e^{-\lambda}$
- $P(S=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

Distribuição de Poisson

DÚVIDAS?