PROBABILIDADE E PROCESSOS ESTOCÁSTICOS (CKP7366)

Prof. João Paulo Pordeus Gomes

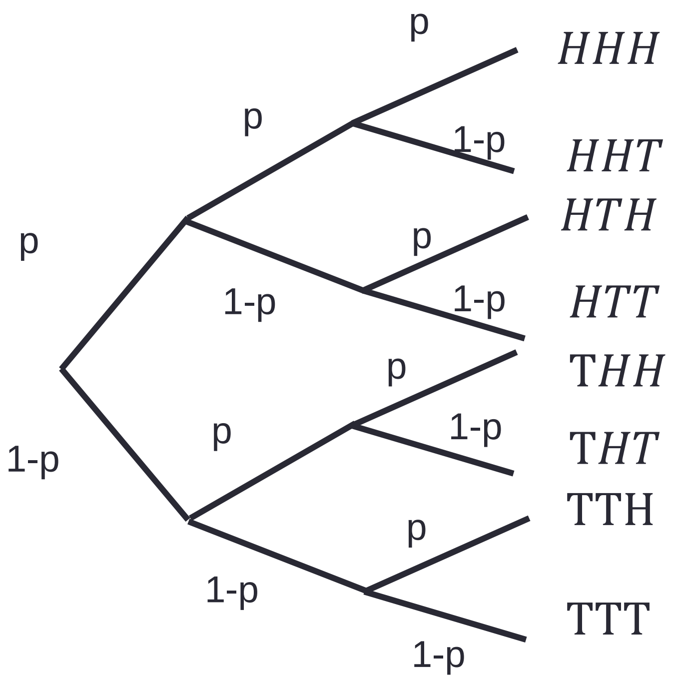
INDEPENDÊNCIA ENTRE EVENTOS

Independência

- O conhecimento de um evento não faz com que a sua crença sobre um outro evento seja modificada.
- Independência condicional
- Independência de um conjunto de eventos
- Independência entre pares de eventos

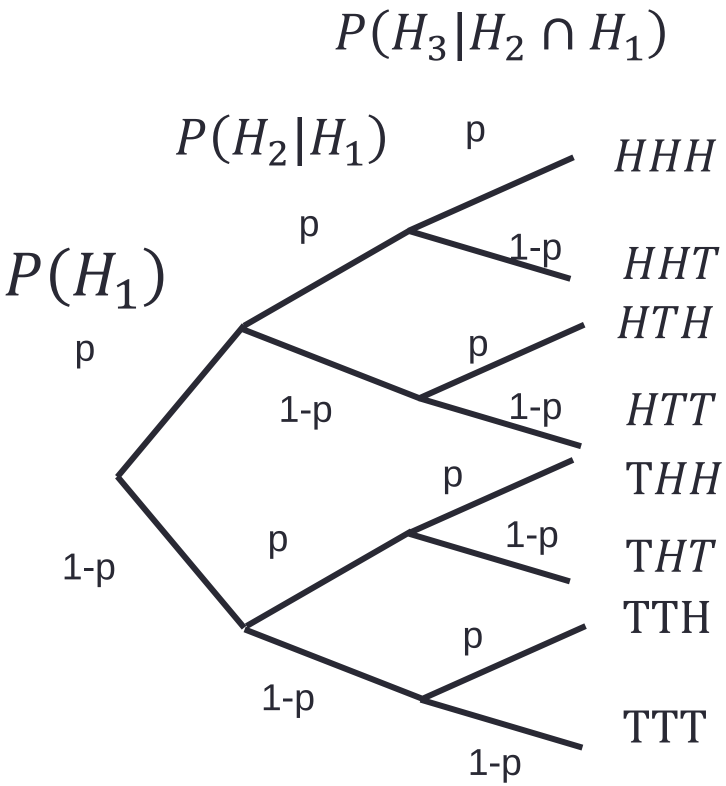
Probabilidades Condicionais

- $P(H) = p \; e \; P(T) = 1 - p$



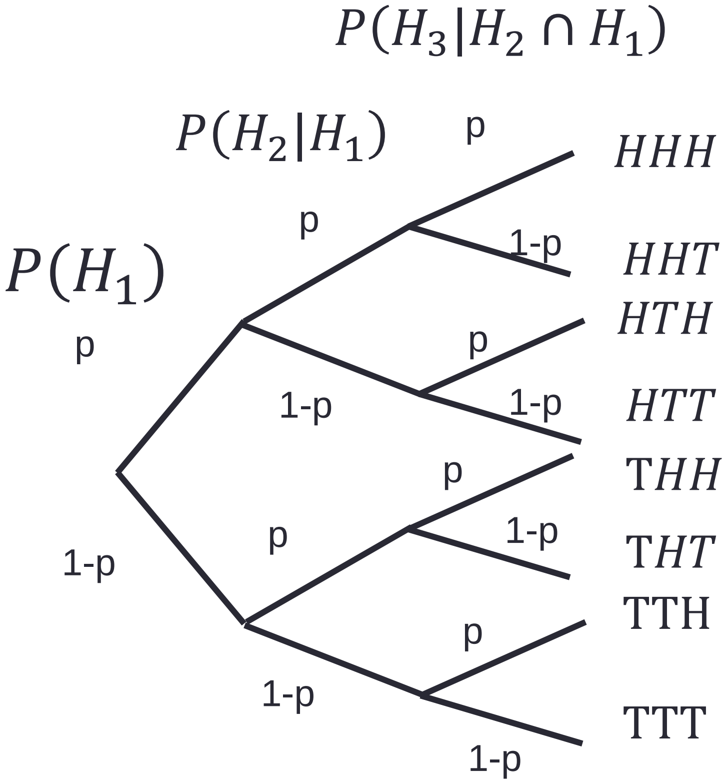
Probabilidades Condicionais

- $P(H) = p \ e \ P(T) = 1 - p$



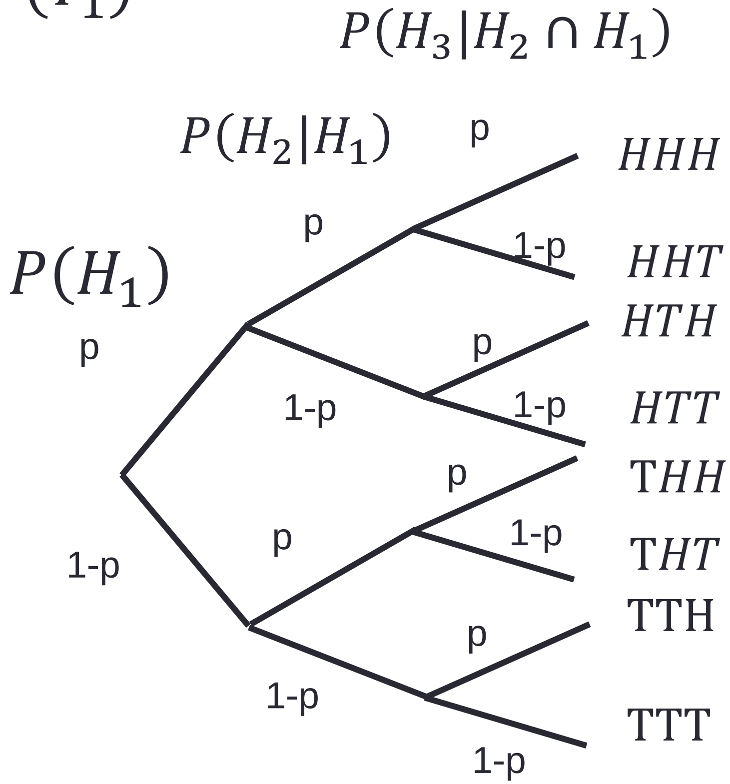
Probabilidades Condicionais

- $P(THT) =$



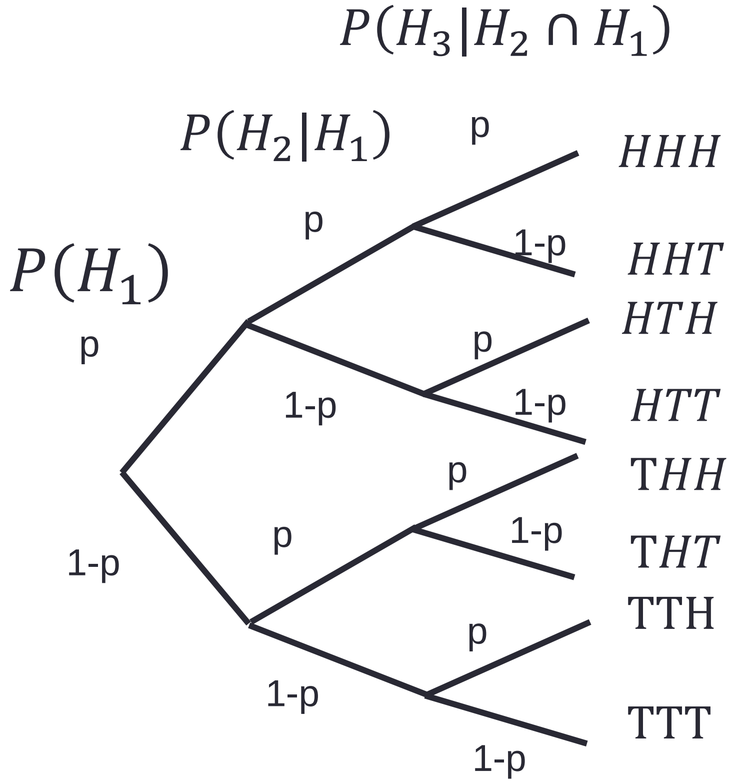
Probabilidades Condicionais

- $P(THT) = P(T_3|H_2T_1)P(H_2|T_1)P(T_1)$



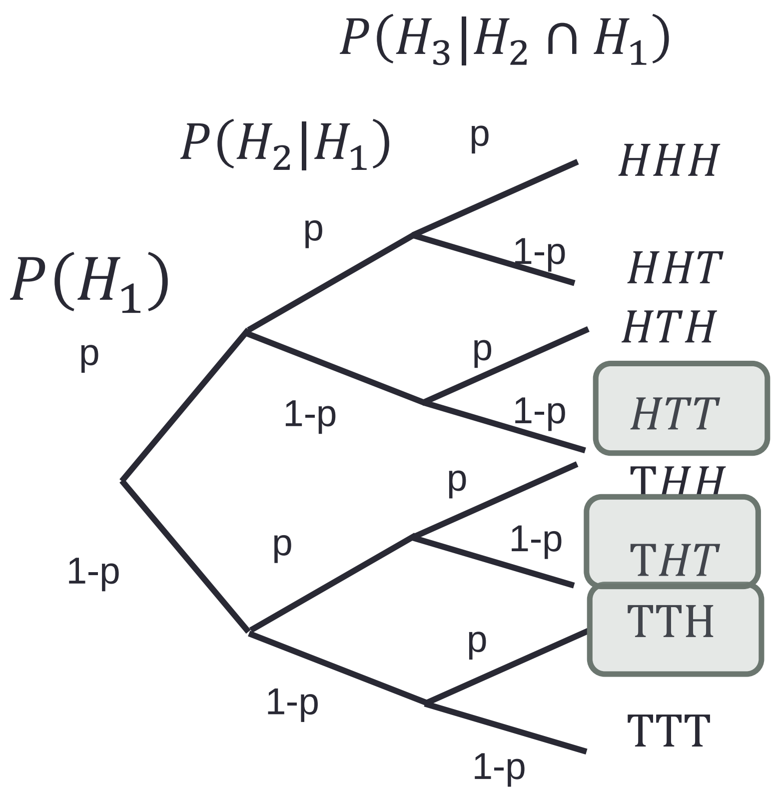
Probabilidades Condicionais

- $P(1\ H) =$



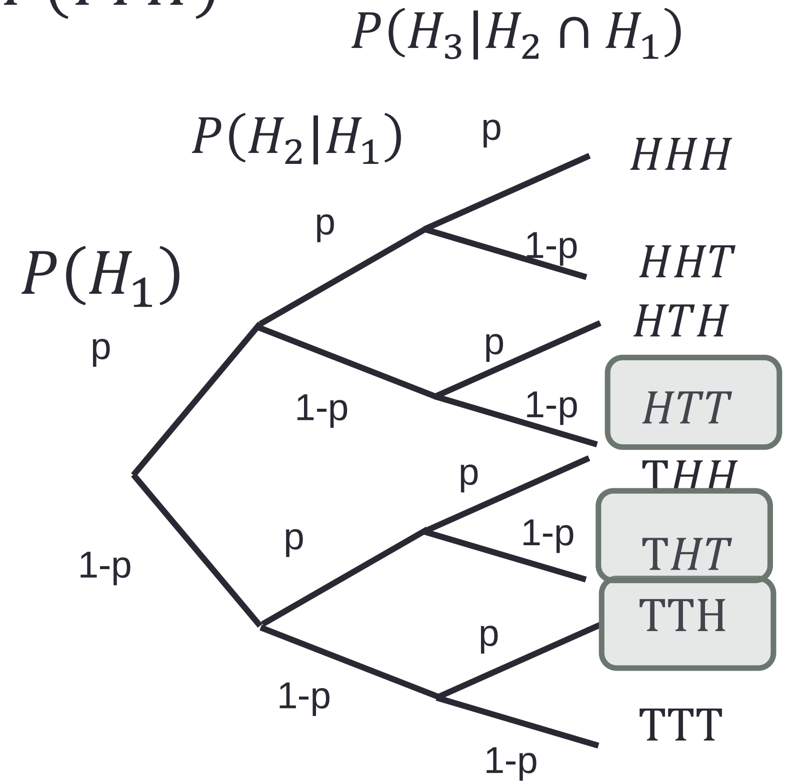
Probabilidades Condicionais

- $P(1\ H) =$



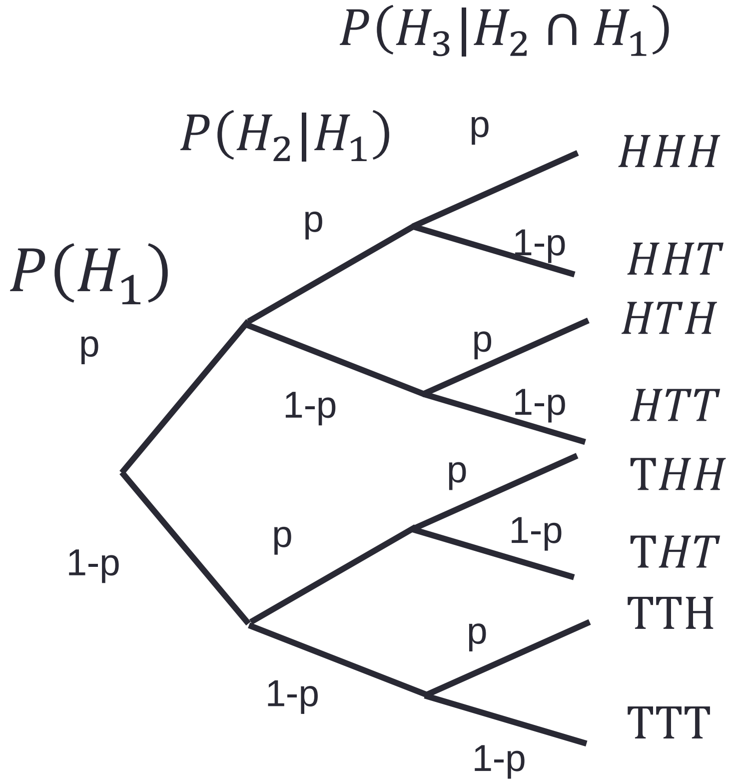
Probabilidades Condicionais

- $P(1\ H) = P(HTT) + P(THT) + P(TTH)$



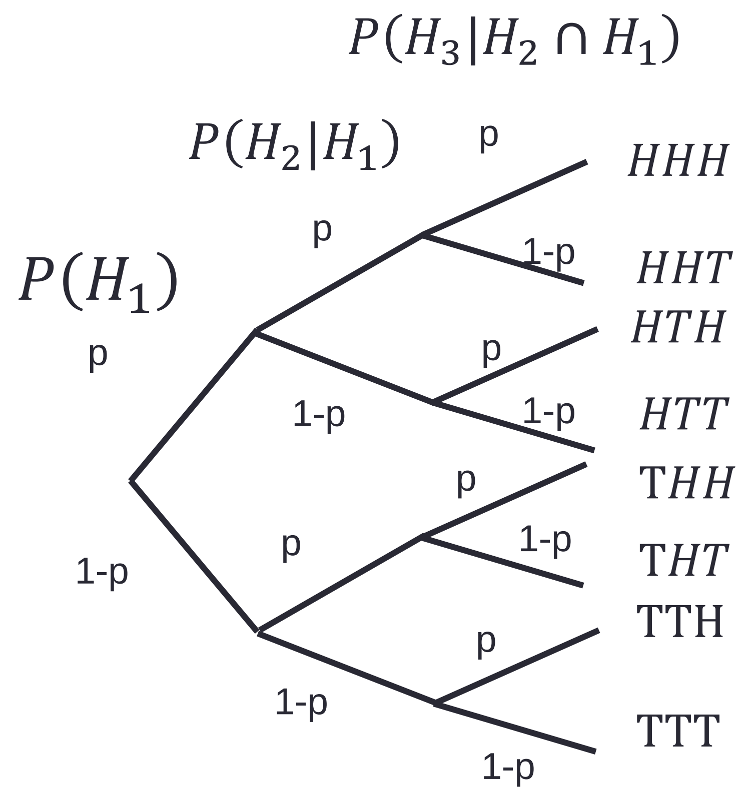
Probabilidades Condicionais

- $P(H_1|1\ H) =$



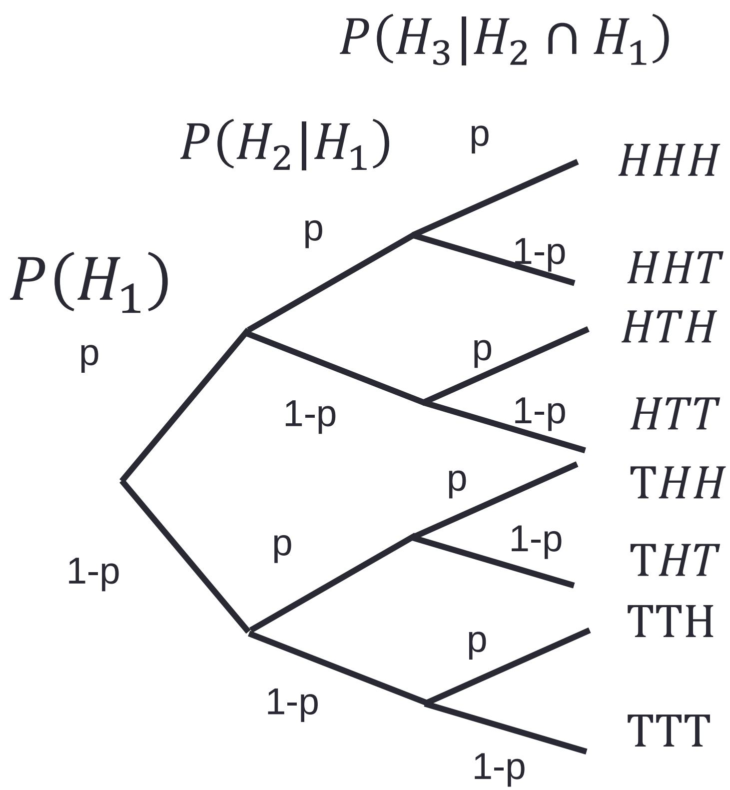
Probabilidades Condicionais

- $P(H_1|1\ H) = \frac{P(H_1 \cap 1\ H)}{P(1\ H)}$



Probabilidades Condicionais

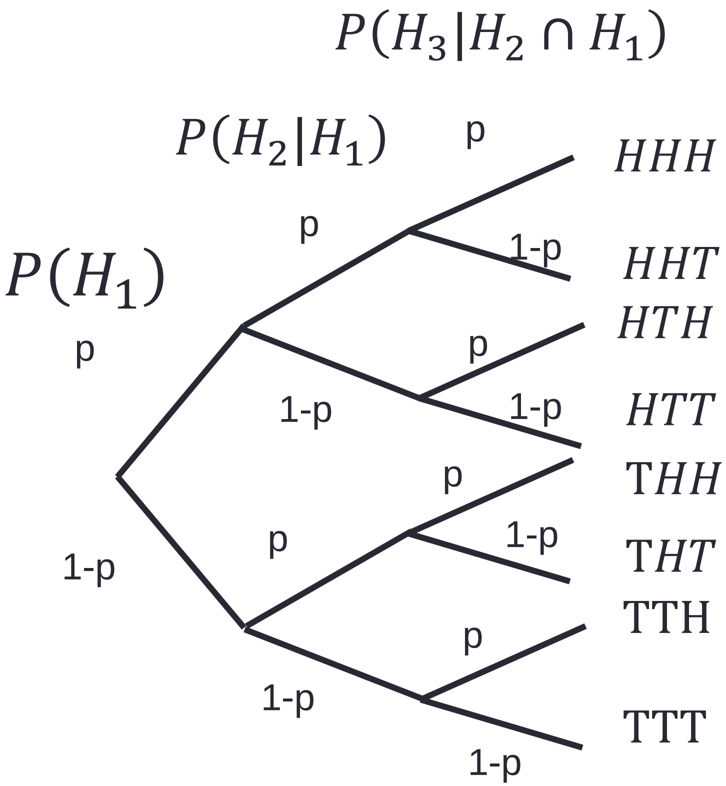
- $P(H_2|H_1) =$
- $P(H_2|T_1) =$



Probabilidades Condicionais

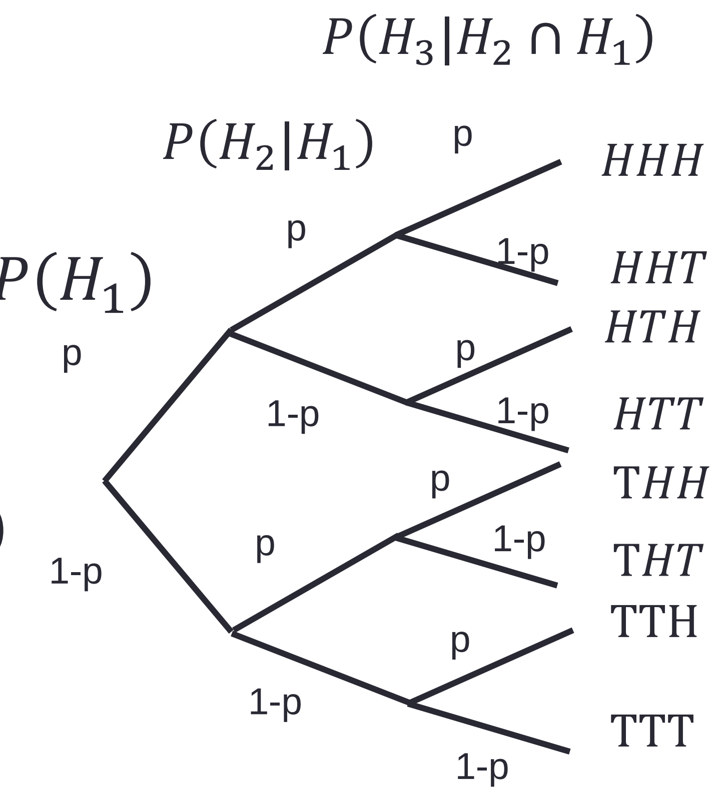
- $P(H_2|H_1) =$
- $P(H_2|T_1) =$

- $P(H_2) =$



Probabilidades Condicionais

- $P(H_2|H_1) =$
- $P(H_2|T_1) =$



- $P(H_2) =$
$P(H_2|H_1)P(H_1) + P(H_2|T_1)P(T_1)$

Independência entre dois eventos

- Temos um evento B que pode ocorrer com uma probabilidade P(B) e somos informados que um evento A aconteceu.

Independência entre dois eventos

- Temos um evento B que pode ocorrer com uma probabilidade $P(B)$ e somos informados que um evento A aconteceu.
  - $P(B|A) = P(B)$

Independência entre dois eventos

- Temos um evento B que pode ocorrer com uma probabilidade P(B) e somos informados que um evento A aconteceu.
  - P(B|A) = P(B)
  - $P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$

Independência entre dois eventos

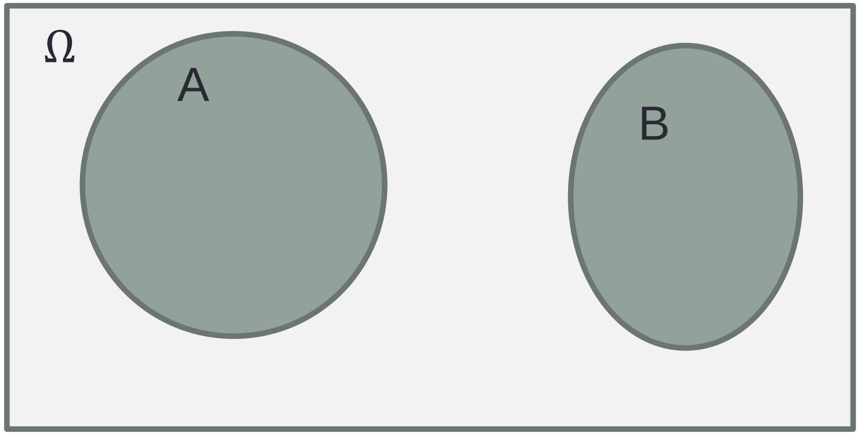
- Temos um evento B que pode ocorrer com uma probabilidade P(B) e somos informados que um evento A aconteceu.
  - P(B|A) = P(B)
  - $P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = \boxed{P(A)P(B)}$

Independência entre dois eventos

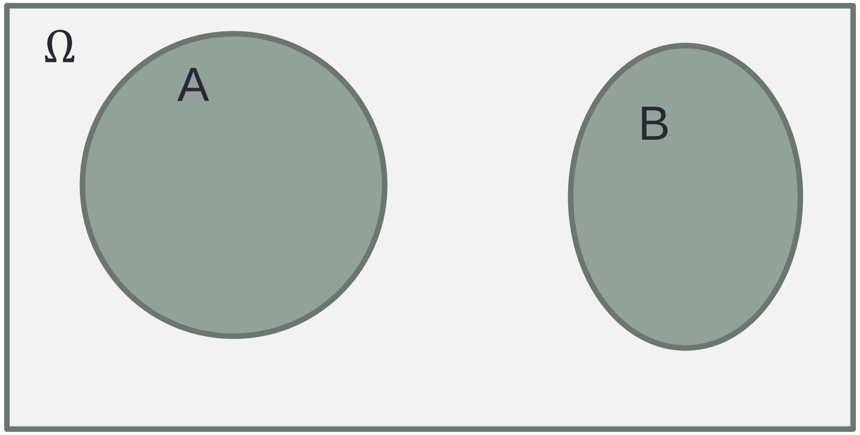
- Temos um evento B que pode ocorrer com uma probabilidade P(B) e somos informados que um evento A aconteceu.
  - P(B|A) = P(B)
  - $P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = \boxed{P(A)P(B)}$

- Definição de independência
  - Simétrica
  - $P(A|B) = P(A)$
  - Valida mesmo quando $P(A) = 0$

Independência



Independência



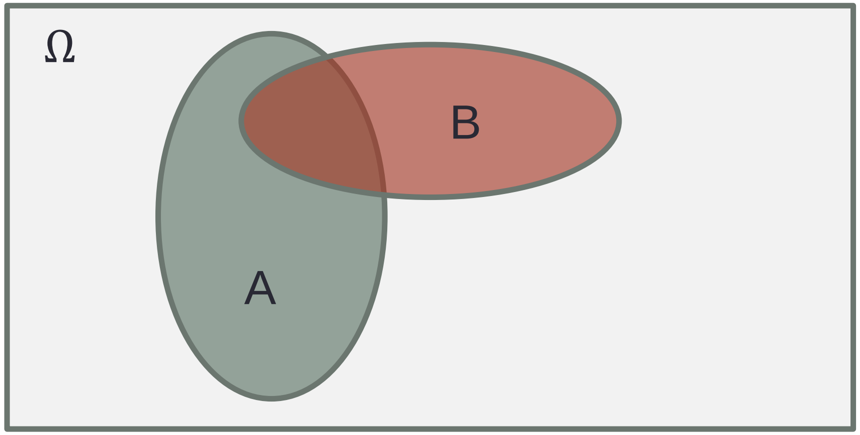
$P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Independência de complementos de eventos

- $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
- Se A e B são independentes, então A e B^c são independentes

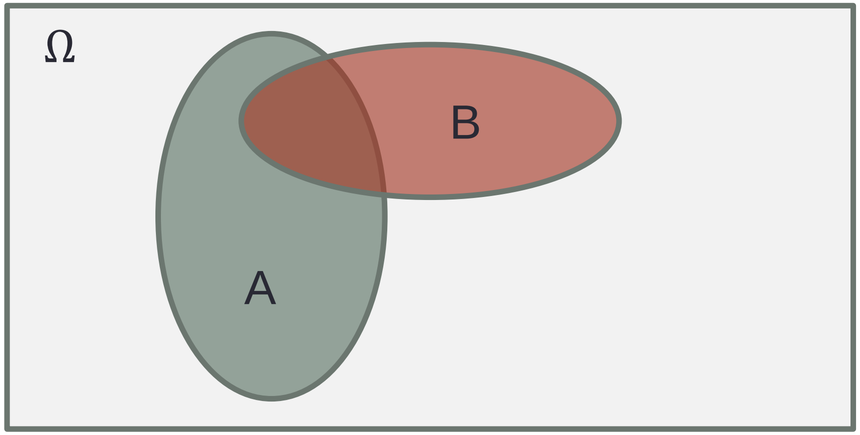
Independência de complementos de eventos

- $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
- Se A e B são independentes, então A e B^c são independentes



Independência de complementos de eventos

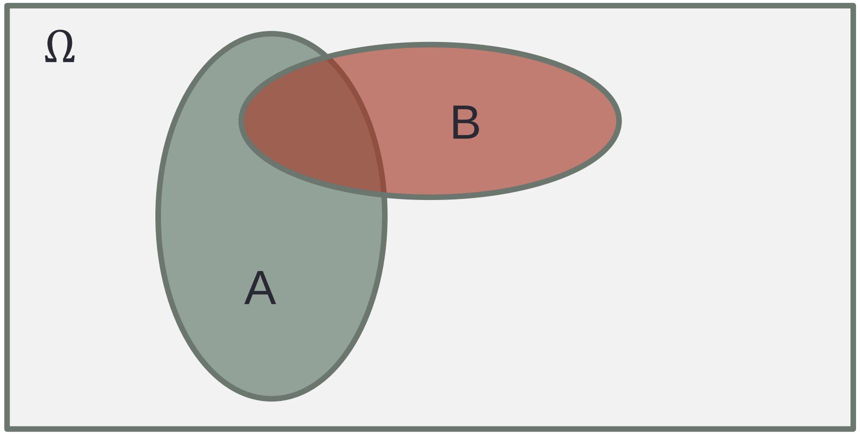
- $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
- Se A e B são independentes, então A e B^c são independentes



- $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$
- $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$

Independência de complementos de eventos

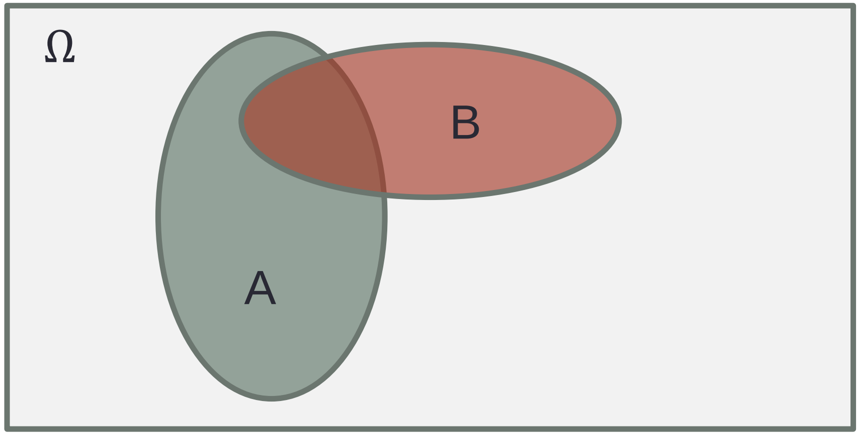
- $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
- Se A e B são independentes, então A e B^c são independentes



- $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$
- $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$
- $P(A) = P(A)P(B) + P(A \cap B^c)$
- $P(A) - P(A)P(B) = P(A \cap B^c)$

Independência de complementos de eventos

- $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
- Se A e B são independentes, então A e B^c são independentes



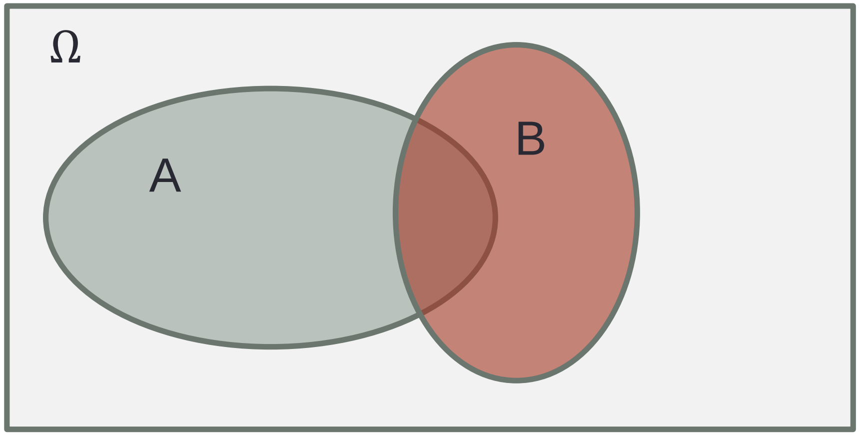
- $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$
- $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$
- $P(A) = P(A)P(B) + P(A \cap B^c)$
- $P(A) - P(A)P(B) = P(A \cap B^c)$
- $P(A)\big(1 - P(B)\big) = P(A \cap B^c)$
- $P(A)P(B^c) = P(A \cap B^c)$

Independência condicional

- Independência condicional é a independência entre eventos (A e B) dada a ocorrência de um terceiro evento (C)
  - P(. |C)

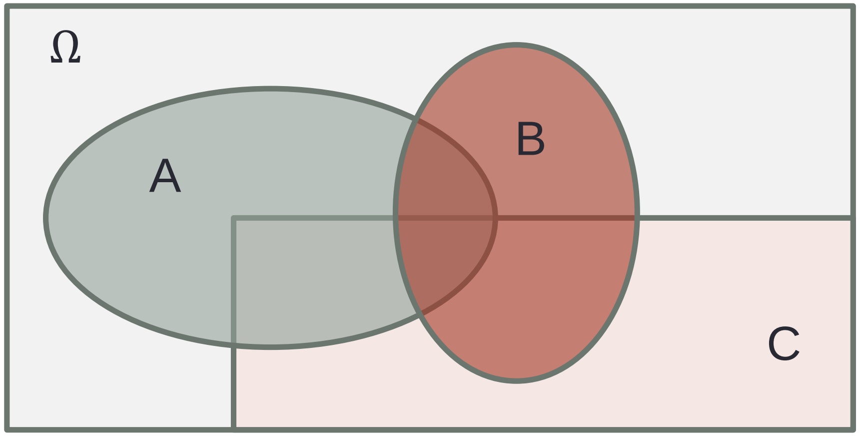
Independência condicional

- Independência condicional é a independência entre eventos (A e B) dada a ocorrência de um terceiro evento (C)
  - P(. |C)



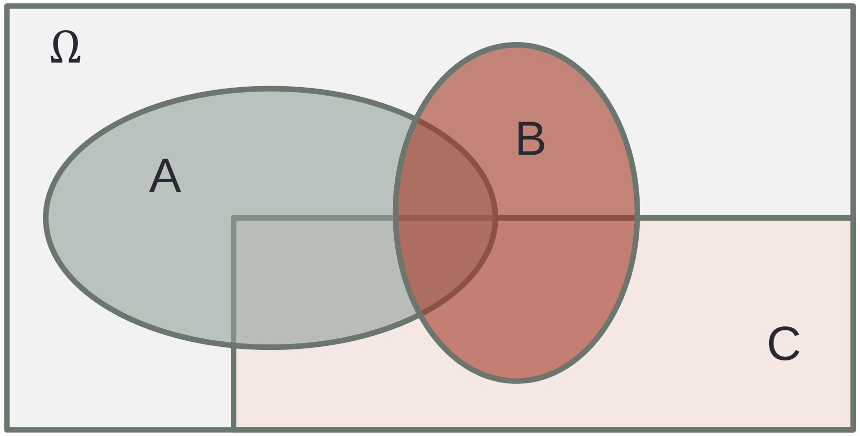
Independência condicional

- Independência condicional é a independência entre eventos (A e B) dada a ocorrência de um terceiro evento (C)
  - P(. |C)



Independência condicional

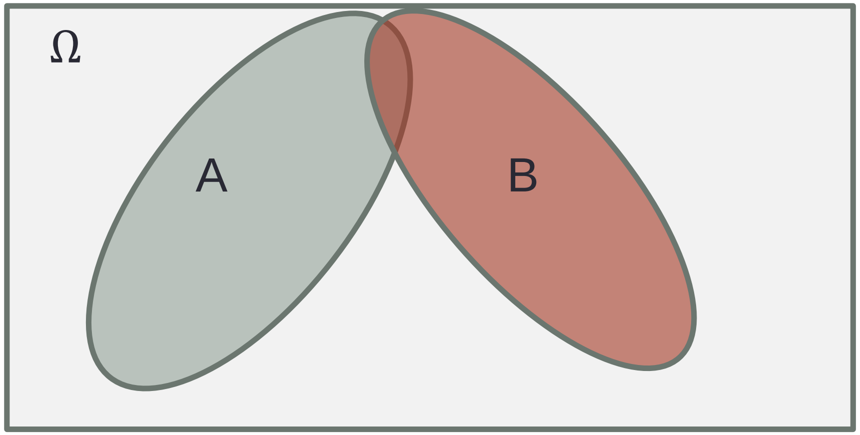
- Independência condicional é a independência entre eventos (A e B) dada a ocorrência de um terceiro evento (C)
  - P(. |C)



$$P(A \cap B|C) = P(A|C)P(B|C)$$

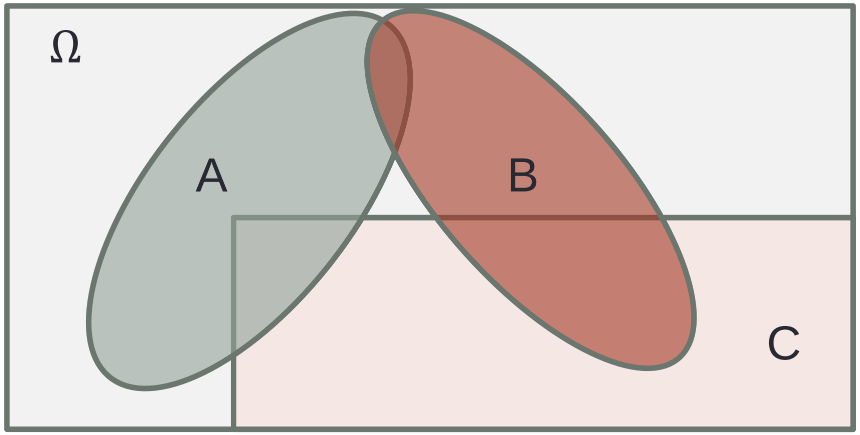
Independência condicional

Suponha que A e B são independentes



Independência condicional

Suponha que A e B são independentes



Condicionamento afeta dependência

- Duas moedas
  - Moeda 1 -> $P(H) = 0.9$ $P(T) = 0.1$
  - Moeda 2 -> $P(H) = 0.1$ $P(T) = 0.9$
  - Cada uma tem probabilidade 0.5 de ser escolhida
- Qual o valor de $P(H)$?

Condicionamento afeta dependência

- Duas moedas
  - Moeda 1 -> $P(H) = 0.9$ $P(T) = 0.1$
  - Moeda 2 -> $P(H) = 0.1$ $P(T) = 0.9$
  - Cada uma tem probabilidade 0.5 de ser escolhida
- Qual o valor de $P(H)$?
- O fato da 10 jogadas consecutivas terem dado H afeta o seu conhecimento sobre $P(H)$

Independência de um conjunto de eventos

- O conhecimento sobre um conjunto de eventos não afeta a crença sobre os demais eventos
  - Ex: $P(A \cap B \cap C) = P(A \cap B \cap C | D \cap E \cap F)$

Independência de um conjunto de eventos

- O conhecimento sobre um conjunto de eventos não afeta a crença sobre os demais eventos
  - Ex: $P(A \cap B \cap C) = P(A \cap B \cap C | D \cap E \cap F)$
- Definição formal
  - $P\left(A_i \cap A_j \cap \cdots \cap A_n\right) = P(A_i)P\left(A_j\right) \ldots P(A_n)$
    - Para quaisquer índices i, j ... N

Independência de um conjunto de eventos

- O conhecimento sobre um conjunto de eventos não afeta a crença sobre os demais eventos
  - Ex: $P(A \cap B \cap C) = P(A \cap B \cap C | D \cap E \cap F)$
- Definição formal
  - $P\left(A_i \cap A_j \cap \cdots \cap A_n\right) = P(A_i)P\left(A_j\right) \ldots P(A_n)$
    - Para quaisquer índices i, j ... N
- Logo
  - $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$
  - $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$

Independência x Independência entre pares

- Duas moedas justas

HH	**HT**
TH	**TT**

Independência x Independência entre pares

- Duas moedas justas
- C : duas moedas tem o mesmo resultado

HH	**HT**
TH	**TT**

Independência x Independência entre pares

- Duas moedas justas
- C : duas moedas tem o mesmo resultado
- $P(H_1 \cap C) = ?$

HH	**HT**
TH	**TT**

Independência x Independência entre pares

- Duas moedas justas
- C : duas moedas tem o mesmo resultado
- $P(H_1 \cap C) = \frac{1}{4}$
- $P(H_1 \cap H_2 \cap C) =?$

HH	**HT**
TH	**TT**

Independência x Independência entre pares

- Duas moedas justas
- C : duas moedas tem o mesmo resultado
- $P(H_1 \cap C) = \frac{1}{4}$
- $P(H_1 \cap H_2 \cap C) = \frac{1}{4}$
- $P(H_1)P(H_2)P(C) = \frac{1}{8}$

HH	**HT**
TH	**TT**

Independência x Independência entre pares

- Duas moedas justas
- C : duas moedas tem o mesmo resultado
- $P(H_1 \cap C) = \frac{1}{4}$
- $P(H_1 \cap H_2 \cap C) = \frac{1}{4}$
- $P(H_1)P(H_2)P(C) = \frac{1}{8}$
- Intuição
  - $P(C|H_1) = P(H_2|H_1) = P(H_2) = P(C)$
  - $P(C|H_1 \cap H_2) = 1 \neq P(C)$

HH	**HT**
TH	**TT**

Exemplo

- $P(S) = 0.7 \quad P(A) = 0.01$
- $P(F|S,A) = 1 \quad P(F|\neg S,A) = 0.9$
- $P(F|S,\neg A) = 0.7 \quad P(F|\neg S,\neg A) = 0.1$
- $P(A|S) = ?$
- $P(A|F,S) = ?$

Exemplo

- $P(S) = 0.7 \quad P(A) = 0.01$
- $P(F|S,A) = 1 \quad P(F|\neg S,A) = 0.9$
- $P(F|S,\neg A) = 0.7 \quad P(F|\neg S,\neg A) = 0.1$
- $P(A|S) = 0.01$
- $P(A|F,S) = 0.0142$

DÚVIDAS?