PROBABILIDADE E PROCESSOS ESTOCÁSTICOS (CKP7366)

Prof. João Paulo Pordeus Gomes

VARIÁVEIS ALEATÓRIAS CONTÍNUAS (AULA 4)

Variáveis aleatórias contínuas

- PDF condicional
  - Teoremas da probabilidade e esperança total
  - Regra do valor esperado
  - Independência

PDF condicional

- $p_{X|Y}(x) = P(X = x|Y = y) = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_Y(y)}$

PDF condicional

- $p_{X|Y}(x) = P(X = x|Y = y) = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_Y(y)}$
- $f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$

PDF condicional

- $p_{X|Y}(x) = P(X = x|Y = y) = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_Y(y)}$
- $f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$
- $P(x \leq X \leq x + \delta | y \leq Y \leq y + \epsilon) \approx \frac{f_{X,Y}(x,y)\delta\epsilon}{f_Y(y)\epsilon}$

PDF condicional

- $p_{X|Y}(x) = P(X = x|Y = y) = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_Y(y)}$
- $f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$
- $P(x \leq X \leq x + \delta|y \leq Y \leq y + \epsilon) \approx \frac{f_{X,Y}(x,y)\delta\epsilon}{f_Y(y)\epsilon}$
- $P(x \leq X \leq x + \delta|y \leq Y \leq y + \epsilon) \approx f_{X|Y}(x|y)\delta$

PDF condicional

- $p_{X|Y}(x) = P(X = x|Y = y) = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_Y(y)}$
- $f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$
- $P(x \leq X \leq x + \delta|y \leq Y \leq y + \epsilon) \approx \frac{f_{X,Y}(x,y)\delta\epsilon}{f_Y(y)\epsilon}$
- $P(x \leq X \leq x + \delta|y \leq Y \leq y + \epsilon) \approx f_{X|Y}(x|y)\delta$

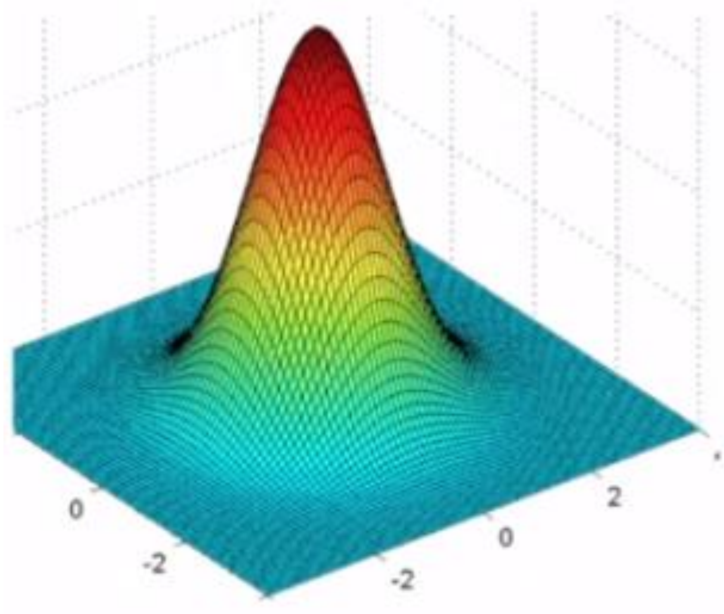
- $P(X \in A|Y = y) = \int_A f_{X|Y}(x|y)dx$

Execício

- Sejam X e Y duas variáveis aleatórias continuas com PDF conjunta dada por:
- $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} cxy, & se\ 0 \leq x \leq y \leq 1 \\ 0, & caso\ contrário \end{cases}$
- Encontre $f_{X|Y}(0.5|0.5)$

PDF condicional

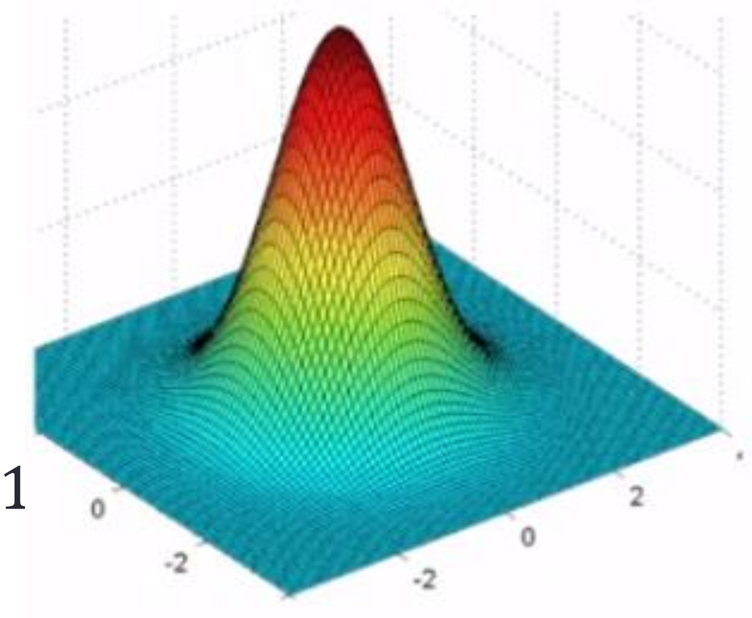
- $f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$



PDF condicional

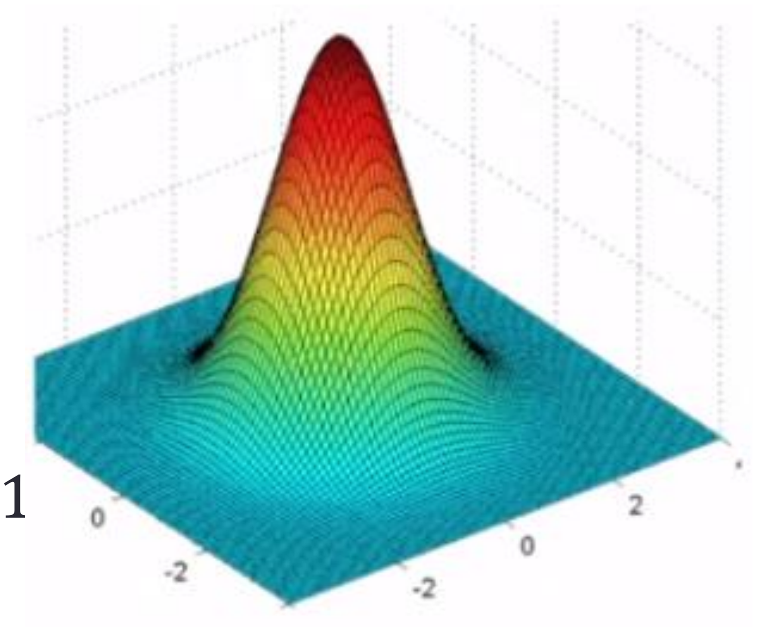
- $f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$

- $\int_{-\infty}^{\infty} f_{X|Y}(x|y)dx = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dx}{f_Y(y)} = 1$



PDF condicional

- $f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$



- $\int_{-\infty}^{\infty} f_{X|Y}(x|y)dx = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dx}{f_Y(y)} = 1$
- Regra de multiplicação
- $f_{X,Y}(x,y) = f_Y(y)f_{X|Y}(x|y)$

Teoremas da probabilidade Total e Esperança Total

- Caso discreto
  - $p_X(x) = \sum_y p_Y(y) p_{X|Y}(x|y)$
  - $E[X|Y = y] = \sum_x x p_{X|Y}(x|y)$
  - $E[X] = \sum_y p_Y(y) E[X|Y = y]$
- Caso contínuo
  - $f_X(x) = \int \ f_Y(y) f_{X|Y}(x|y) dy$
  - $E[X|Y = y] = \int x f_{X|Y}(x|y) dx$
  - $E[X] = \int f_Y(y) E[X|Y = y] dy$

Regra do valor esperado condicional

- $E[g(X)|Y = y] = \sum_x g(x)p_{X|Y}(x)$
- $E[g(X)|Y = y] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_{X|Y}(x|y)dy$

Independência

- $p_{X,Y}(x,y) = p_X(x)p_Y(y)$
- $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$

Independência

- $p_{X,Y}(x, y) = p_X(x)p_Y(y)$
- $f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$
- Dada a definição de PDF condicional
- $f_{X|Y}(\mathrm{x}|\mathrm{y}) = f_X(x)$

Independência

- $p_{X,Y}(x,y) = p_X(x)p_Y(y)$
- $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$
- Dada a definição de PDF condicional
- $f_{X|Y}(\mathrm{x}|\mathrm{y}) = f_X(x)$
- Outras propriedades
- $E[XY] = E[X]E[Y]$
- $var(X+Y) = var(X) + var(Y)$
- $E[g(X)g(Y)] = E[g(X)]E[g(Y)]$

Exercício

- Sejam X e Y duas v.a. independentes. Verifique que $F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$
- Dado que $F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$, mostre que X e Y são independentes

Exercício

- Um palito de tamanho l será quebrado em um ponto x com distribuição uniforme U(0,l). Na sequência será quebrado novamente na posição y segundo uma distribuição uniforme U(0,x).
- Apresente as PDFs marginais e a PDF conjunta
- Calcule E[Y]
- Encontre $f_{X|Y}(x|Y = y)$

DÚVIDAS?