PROBABILIDADE E PROCESSOS ESTOCÁSTICOS (CKP7366)

Prof. João Paulo Pordeus Gomes

DISTRIBUIÇÕES DE FUNÇÕES DE V.A.

Distribuições de funções de v.a.

- Dada a distribuição de X, encontre a distribuição de Y=g(X)
  - Funções monotônicas
  - Funções não-monotônicas (exemplo)

Função linear de uma v.a.

$$\boxed{f_Y(y) = f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)\frac{1}{|a|}}$$

$$\boxed{p_Y(y) = p_X\left(\frac{y-b}{a}\right)}$$

Uma função qualquer $Y=g(X)$ de uma v.a.

- Processo com duas etapas
  - Encontrar a CDF de Y
  - Derivar Y para encontrar a PDF

Exercício

- Seja a v.a. X com PDF dada por:
- $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & para \quad x \geq 1 \\ 0, & c.c \end{cases}$
- Seja $Y = X^2$. Para $y \geq 1$, a PDF de y tem a forma $f_Y(y) = \frac{a}{y^b}$. Encontre os valores de a e b

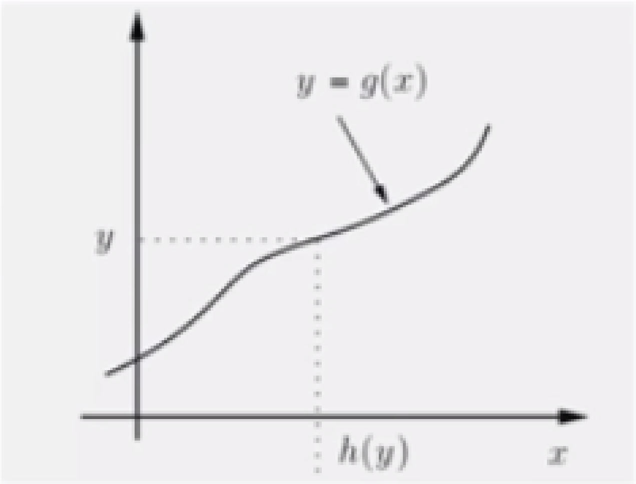
g é uma função monotônica

- Assuma que g é estritamente crescente

g é uma função monotônica

- Assuma que g é estritamente crescente
- Y = g(X)
- X = h(Y)

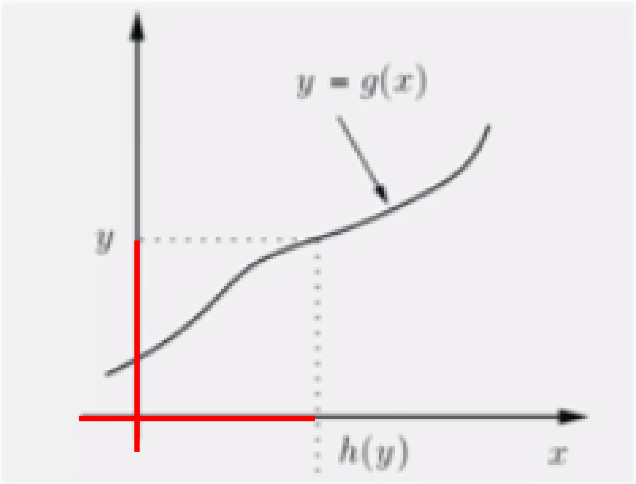
- $F_Y(y) = P(Y \leq y)$



g é uma função monotônica

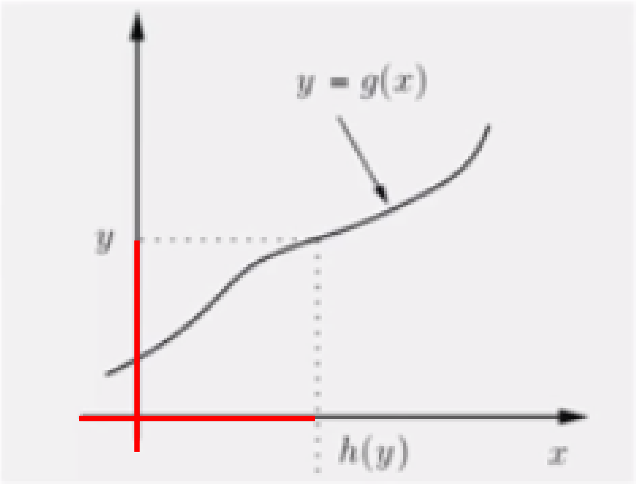
- Assuma que g é estritamente crescente
- Y = g(X)
- X = h(Y)

- $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X \leq h(y))$



g é uma função monotônica

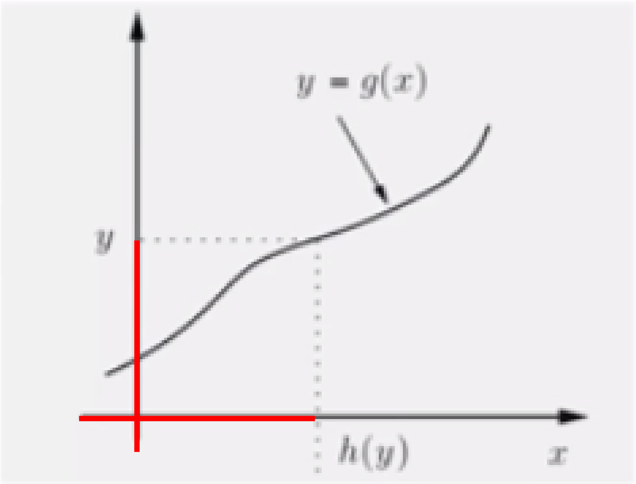
- Assuma que g é estritamente crescente
- Y = g(X)
- X = h(Y)



- $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X \leq h(y))$
- $= F_X(h(y))$

g é uma função monotônica

- Assuma que g é estritamente crescente
- Y = g(X)
- X = h(Y)



- $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X \leq h(y))$
- $= F_X(h(y))$
- $f_Y(y) = f_X(h(y))\frac{dh}{dy}(y)$

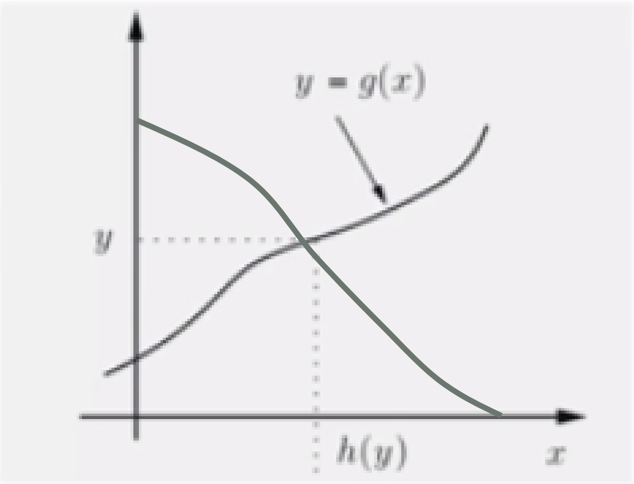
g é uma função monotônica

- Assuma que g é estritamente decrescente
- Y = g(X)
- X = h(Y)

- $F_Y(y) = P(Y \leq y)$

g é uma função monotônica

- Assuma que g é estritamente decrescente
- Y = g(X)
- X = h(Y)

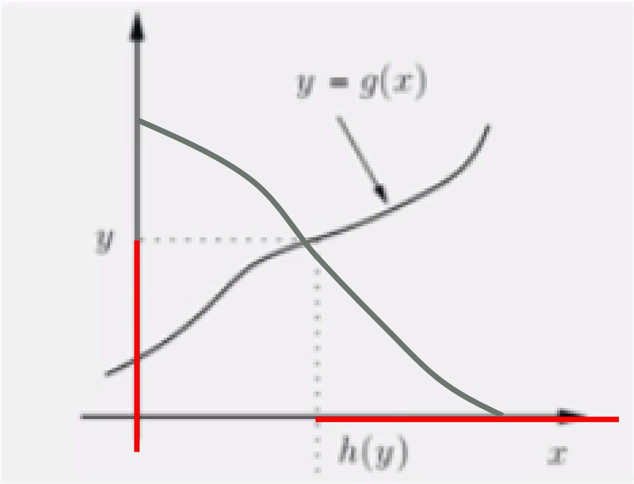


- $F_Y(y) = P(Y \leq y)$

g é uma função monotônica

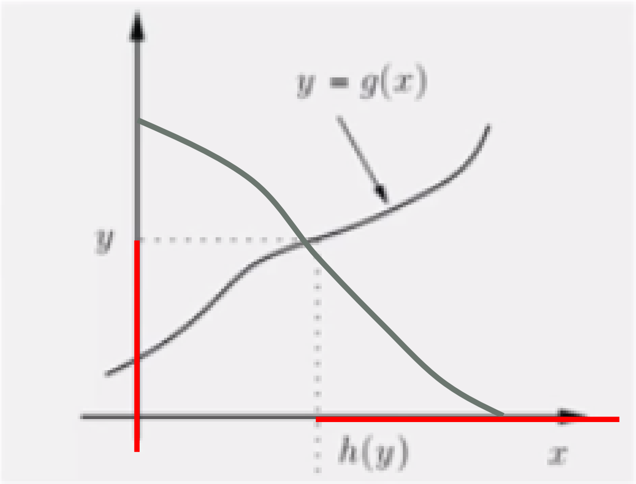
- Assuma que g é estritamente decrescente
- Y = g(X)
- X = h(Y)

- $F_Y(y) = P(Y \leq y)$



g é uma função monotônica

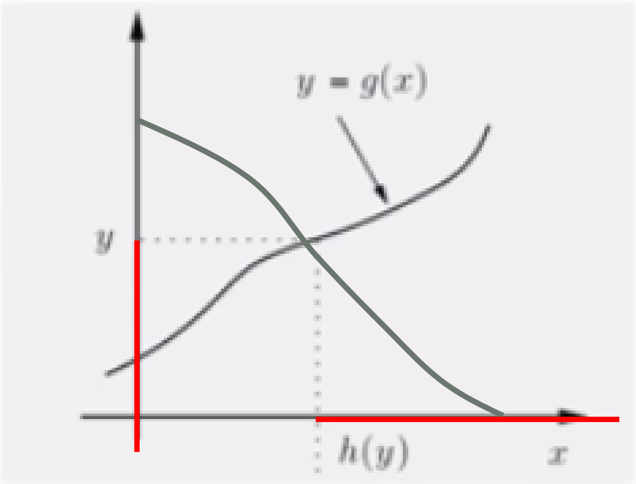
- Assuma que g é estritamente decrescente
- Y = g(X)
- X = h(Y)



- $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X \geq h(y))$

g é uma função monotônica

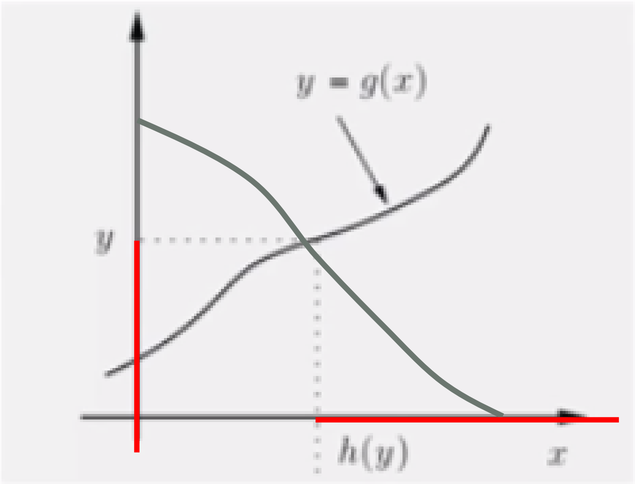
- Assuma que g é estritamente decrescente
- Y = g(X)
- X = h(Y)



- $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X \geq h(y))$
- $= 1 - F_X\,(h(y))$

g é uma função monotônica

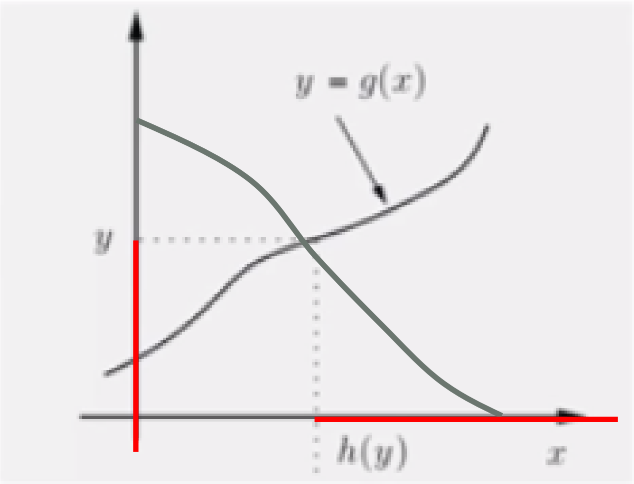
- Assuma que g é estritamente decrescente
- Y = g(X)
- X = h(Y)



- $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X \geq h(y))$
- $= 1 - F_X\ (h(y))$
- $f_Y(y) = -f_X(h(y))\dfrac{dh}{dy}(y)$

g é uma função monotônica

- Assuma que g é estritamente decrescente
- Y = g(X)
- X = h(Y)



- $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X \geq h(y))$
- $= 1 - F_X\,(h(y))$
- $f_Y(y) = -f_X(h(y))\dfrac{dh}{dy}(y)$

- $f_Y(y) = f_X(h(y))\left|\dfrac{dh}{dy}(y)\right|$

Forma geral

Exemplo

- $Y = X^2$ em que $X \sim U(0,1)$
- $f_Y(y) = f_X(h(y)) \left| \frac{dh}{dy}(y) \right|$

Exemplo

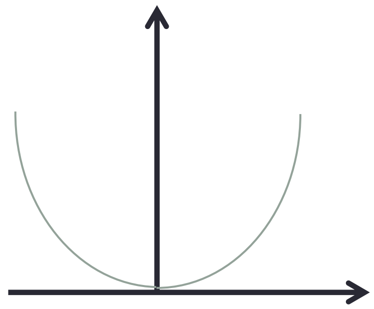
- $Y = X^2$ em que $X \sim U(0,1)$
- $f_Y(y) = f_X(h(y)) \left| \frac{dh}{dy}(y) \right|$
- $f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$

Exercício

- A v.a. X é exponencial com $\lambda = 1$. A v.a Y é definida como $Y = g(X) = \frac{1}{1+X}$
- A função inversa h é dada na forma $ay^b + c$. Encontre a, b e c
- Para $y \in (0,1]$, a PDF de Y é dada na forma $f_Y(y) = y^a e^{\left(\frac{b}{y}\right)+c}$. Encontre a, b e c

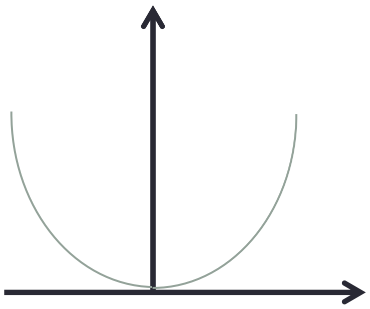
Uma função não-monotônica

- $Y = X^2$



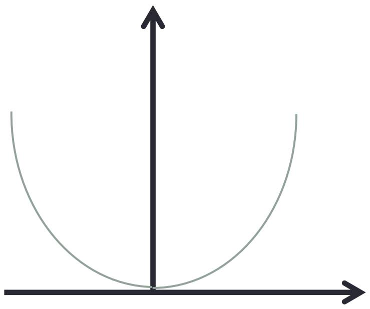
Uma função não-monotônica

- $Y = X^2$
- Caso discreto
- $p_Y(9) = P(X = 3) + P(X = -3)$



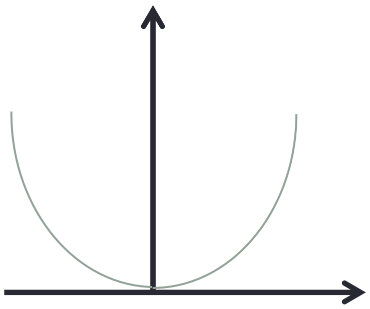
Uma função não-monotônica

- $Y = X^2$
- Caso discreto
- $p_Y(9) = P(X = 3) + P(X = -3)$
- $p_Y(y) = p_X(\sqrt{y}) + p_X(-\sqrt{y})$



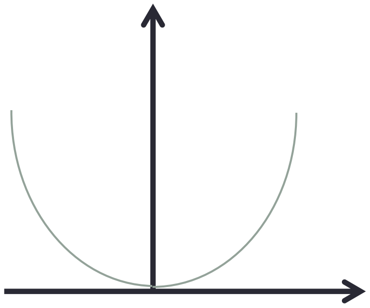
Uma função não-monotônica

- $Y = X^2$
- Caso discreto
- $p_Y(9) = P(X = 3) + P(X = -3)$
- $p_Y(y) = p_X(\sqrt{y}) + p_X(-\sqrt{y})$
- Caso contínuo
- $F_Y(y) = P(Y = y) = P(X^2 \leq y) = P\left(|X| \leq \sqrt{y}\right)$

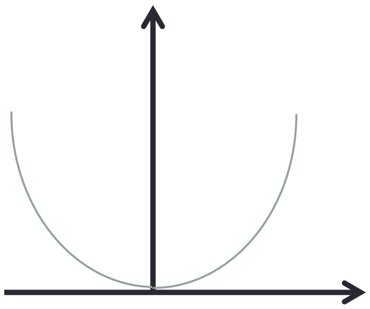


Uma função não-monotônica

- $Y = X^2$
- Caso discreto
- $p_Y(9) = P(X = 3) + P(X = -3)$
- $p_Y(y) = p_X(\sqrt{y}) + p_X(-\sqrt{y})$
- Caso contínuo
- $F_Y(y) = P(Y = y) = P(X^2 \leq y) = P\left(|X| \leq \sqrt{y}\right)$
- $= P\left(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}\right) = F_X\left(\sqrt{y}\right) - F_X(-\sqrt{y})$



Uma função não-monotônica



- $Y = X^2$
- Caso discreto
- $p_Y(9) = P(X = 3) + P(X = -3)$
- $p_Y(y) = p_X(\sqrt{y}) + p_X(-\sqrt{y})$
- Caso contínuo
- $F_Y(y) = P(Y = y) = P(X^2 \leq y) = P\left(|X| \leq \sqrt{y}\right)$
- $= P\left(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}\right) = F_X\left(\sqrt{y}\right) - F_X(-\sqrt{y})$
- $f_Y(y) = f_X\left(\sqrt{y}\right)\frac{1}{2\sqrt{y}} - f_X\left(-\sqrt{y}\right)\frac{(-1)}{2\sqrt{y}}$

Exercício

- Suponha que X é uma v.a continua e que $Y = X^4$. Então, para $y \geq 0$, temos que :
- $f_Y(y) = ay^b f_X\left(-cy^d\right) + ay^b f_X\left(cy^d\right)$
- Para $c > 0$, encontre a, b, c e d

DÚVIDAS?