

# **Redimensionnement d'images**

## **par Seam Carving**

Projet réalisé dans le cadre du cours de  
**Complexité et Théorie des graphes**

**Omar Belhaj**

Université Paris-Dauphine Tunis

Année universitaire 2025–2026

# 1 Introduction

Le redimensionnement d'images est un problème fondamental en traitement d'images et en vision par ordinateur. Les méthodes traditionnelles, telles que le redimensionnement par interpolation ou le recadrage, peuvent entraîner une perte importante d'informations visuelles.

Le seam carving, introduit par Avidan et Shamir en 2007, propose une alternative intelligente basée sur le contenu de l'image.

Dans ce projet, nous formulons le problème du seam carving comme un problème de plus court chemin dans un graphe orienté acyclique (DAG). Chaque pixel est modélisé comme un nœud du graphe, et les transitions possibles entre pixels correspondent à des arêtes orientées pondérées par une mesure d'énergie. Cette modélisation permet d'appliquer efficacement des algorithmes classiques de théorie des graphes, notamment le tri topologique et le calcul du plus court chemin.

## 2 Calcul de la carte d'énergie

La première étape de notre implémentation consiste à attribuer une mesure d'importance à chaque pixel de l'image. Cette mesure, appelée *énergie*, permet d'identifier les zones visuellement significatives qui doivent être préservées lors du redimensionnement.

L'énergie d'un pixel est définie à partir du gradient de l'image, qui mesure les variations locales d'intensité.

### Conversion en niveaux de gris

Dans le notebook, l'image d'entrée est d'abord convertie en niveaux de gris lorsque celle-ci est en couleur. Cette conversion est réalisée en prenant la moyenne des canaux RGB.

### Calcul du gradient avec l'opérateur de Sobel

Pour estimer les variations d'intensité, nous utilisons l'opérateur de Sobel, appliqué horizontalement pour obtenir le gradient  $G_x$  puis verticalement pour obtenir le gradient  $G_y$ . Ces gradients sont calculés pour chaque pixel de l'image.

### Définition de l'énergie

L'énergie finale d'un pixel  $(x, y)$  est définie comme la norme euclidienne du gradient :

$$E(x, y) = \sqrt{G_x(x, y)^2 + G_y(x, y)^2}$$

Cette définition attribue une énergie élevée aux contours, textures et zones à fort contraste, et une énergie faible aux régions homogènes telles que le ciel ou les murs uniformes.

La carte d'énergie obtenue constitue l'entrée principale de l'algorithme de seam carving.



FIGURE 1 – Image originale



FIGURE 2 – Carte d'énergie

### 3 Formulation du problème en graphe

Afin d'appliquer les outils de la théorie des graphes, l'image est modélisée comme un graphe orienté acyclique (DAG). Cette modélisation est implémentée explicitement dans le notebook à l'aide d'une classe dédiée.

#### Nœuds

Chaque pixel de coordonnées  $(x, y)$  est représenté par un nœud unique du graphe. Les pixels sont indexés par une transformation linéaire permettant de passer d'une position bidimensionnelle à un identifiant de nœud.

#### Arêtes

À partir de chaque pixel  $(x, y)$ , des arêtes orientées sont créées vers les pixels de la ligne inférieure accessibles :

- $(x - 1, y + 1)$  : bas-gauche
- $(x, y + 1)$  : bas
- $(x + 1, y + 1)$  : bas-droite

Ces connexions correspondent exactement aux transitions autorisées pour un seam vertical.

### Poids des arêtes

Le poids d'une arête est égal à l'énergie du pixel de destination. Ainsi, traverser un pixel de forte énergie est pénalisé dans le calcul du chemin.

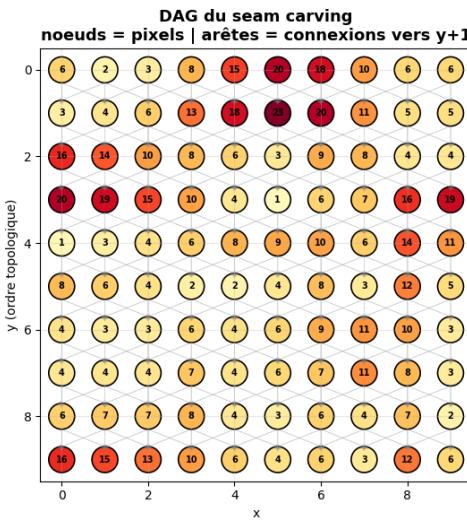


FIGURE 3 – DAG (lignes 332-342, colonnes 737-747)

## 4 Recherche du seam optimal par plus court chemin sur DAG

Un seam vertical est défini comme un chemin reliant la première ligne de l'image à la dernière ligne, en passant par exactement un pixel par ligne. À chaque étape, le chemin peut se déplacer vers l'un des trois pixels adjacents de la ligne inférieure.

Dans la modélisation proposée, ce problème revient à rechercher un chemin de coût minimal dans un graphe orienté acyclique (DAG), où le coût total correspond à la somme des énergies des pixels traversés.

### Sources et destinations

Tous les pixels de la première ligne sont considérés comme des nœuds sources, tandis que les pixels de la dernière ligne sont des nœuds de destination potentiels. Le seam optimal est donc le plus court chemin reliant l'une des sources à l'une des destinations.

## Initialisation des distances

Dans le notebook, les distances sont initialisées à l'infini pour l'ensemble des noeuds du graphe. Pour les noeuds correspondant à la première ligne de l'image, la distance initiale est égale à l'énergie du pixel, ce qui revient à initialiser le coût de départ de chaque seam possible.

## Tri topologique du DAG

Le calcul du plus court chemin est rendu possible par la nature acyclique du graphe. En effet, les arêtes étant orientées uniquement de la ligne  $y$  vers la ligne  $y + 1$ , aucun cycle ne peut apparaître.

Un tri topologique du graphe est donc effectué à l'aide d'un parcours en profondeur (DFS). Cet ordre topologique correspond implicitement à un parcours de l'image du haut vers le bas, ligne par ligne.

## Relaxation des arêtes

Une fois l'ordre topologique obtenu, les arêtes du graphe sont relaxées dans cet ordre afin de propager les distances minimales vers les lignes inférieures. Pour chaque pixel, on conserve également le parent associé à la meilleure transition, ce qui permet de reconstruire le chemin optimal.

Ce processus est équivalent à une approche de programmation dynamique, où l'on calcule pour chaque pixel le coût cumulatif minimal pour l'atteindre.

## Relation de récurrence et matrice des coûts

Le calcul des distances cumulées repose sur la relation de récurrence suivante :

$$M(x, y) = E(x, y) + \min \begin{cases} M(x - 1, y - 1), \\ M(x, y - 1), \\ M(x + 1, y - 1) \end{cases}$$

Dans le notebook, la matrice  $M$  est construite à partir des distances calculées pour tous les noeuds. Elle permet de visualiser les coûts cumulés associés à chaque pixel et facilite l'interprétation du seam sélectionné.



FIGURE 4 – Matrice M après relaxation

### Backtracking et extraction du seam

Une fois la dernière ligne atteinte, le pixel de coût minimal est sélectionné. Le seam optimal est alors reconstruit par backtracking en remontant les parents depuis ce pixel jusqu'à la première ligne.

Cette étape finale fournit la liste des positions horizontales constituant le seam vertical de plus faible énergie.

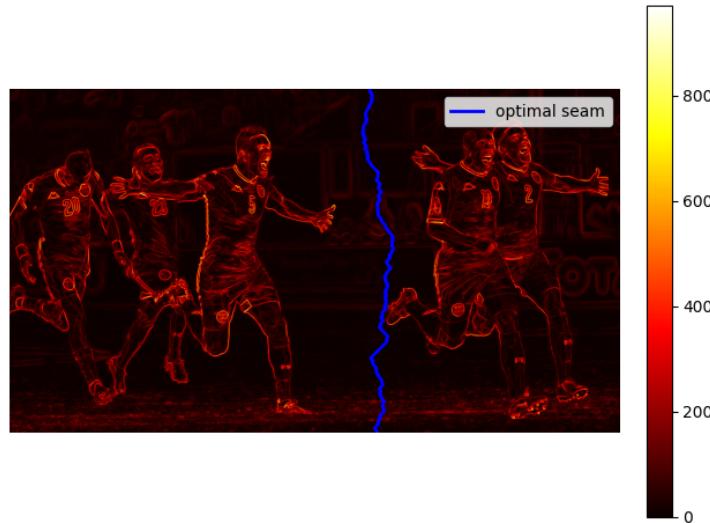


FIGURE 5 – Carte d'énergie avec seam optimal (K=1)

## 5 Suppression itérative des seams

Pour réduire la largeur de l'image de plusieurs pixels, l'algorithme est appliqué de manière itérative.

À chaque itération :

1. La carte d'énergie est recalculée sur l'image courante

2. Le seam de coût minimal est identifié
3. Les pixels appartenant au seam sont supprimés

Cette approche garantit que chaque seam est calculé sur l'image mise à jour, ce qui permet de préserver au mieux la structure visuelle globale.

## 6 Résultats et visualisations

Les résultats montrent que les seams supprimés traversent principalement les zones de faible énergie, ce qui permet de préserver les structures importantes de l'image. Voici l'image originale à traiter :



FIGURE 6 – Image originale

L'image chargée est de dimension  $1200 \times 675$  pixels.



100 seams à supprimer (en rouge)



Image après suppression de 100 seams

FIGURE 7 –  $K = 100$  seams



200 seams à supprimer (en rouge)



Image après suppression de 200 seams

FIGURE 8 –  $K = 200$  seams



300 seams à supprimer (en rouge)



Image après suppression de 300 seams

FIGURE 9 –  $K = 300$  seams

Après 300 itérations, la dimension de la nouvelle image est de 900 x 675 pixels. Malgré une réduction de 25% de la largeur, les éléments visuellement importants, notamment les visages et les corps des cinq joueurs de l'équipe nationale tunisienne, restent clairement visibles et n'ont subi aucune perte d'information perceptible.

## 7 Limites de la méthode

Bien que la méthode du seam carving basée sur la recherche de plus courts chemins dans un graphe orienté acyclique soit efficace pour le redimensionnement d'images en préservant le contenu visuellement important, elle présente néanmoins plusieurs limites.

### Coût computationnel

Le principal inconvénient de l'algorithme réside dans son coût computationnel lorsque le nombre de seams à supprimer devient élevé. En effet, pour chaque seam supprimé, l'ensemble des étapes suivantes doit être réexécuté :

- recalcul de la carte d'énergie,
- reconstruction du graphe DAG,
- calcul du plus court chemin par tri topologique,
- suppression du seam identifié.

Ainsi, pour une image de dimensions  $H \times W$ , le calcul d'un seam nécessite un parcours de l'ensemble des pixels, ce qui conduit à une complexité temporelle de l'ordre de  $\mathcal{O}(H \times W)$ . La suppression de  $K$  seams successifs entraîne donc une complexité globale de l'ordre de  $\mathcal{O}(K \times H \times W)$ , ce qui peut devenir prohibitif pour des images de grande taille ou pour des réductions importantes.

### **Distorsions cumulées**

Une seconde limite concerne les distorsions visuelles pouvant apparaître lors de la suppression successive de plusieurs seams. En effet, chaque seam est calculé sur l'image résultante de la suppression du seam précédent. Cette modification progressive de la structure de l'image peut conduire à une déformation excessive de certaines structures fines ou une perte de symétrie.

### **Limites liées à la modélisation de l'énergie**

Enfin, la définition de l'énergie basée uniquement sur le gradient (comme le filtre de Sobel utilisé dans ce projet) permet de capturer efficacement les contours et les variations locales d'intensité, mais ne prend pas en compte la sémantique de l'image. Ainsi, certaines régions importantes d'un point de vue perceptuel peuvent être considérées comme peu énergétiques et donc supprimées par l'algorithme.

## **8 Conclusion**

En conclusion, le seam carving basé sur une modélisation en graphe orienté acyclique permet un redimensionnement de l'image efficace et respectueux du contenu. Les résultats expérimentaux montrent que, même après un nombre important d'itérations, les éléments visuellement importants sont préservés, ce qui valide la pertinence de l'approche fondée sur le plus court chemin dans un DAG.