Föreläsning 6, tillståndsmodeller

Tillståndsmodeller för system utnyttjar vektor- och matrisnotation vilket underlättar datorbearbetning. Dessutom är det fördelaktigt vid beskrivning av system med flera in- och utsignaler.

Betrakta det linjära fjäder-massa-systemet som beskrivits tidigare

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = F_d \Rightarrow$$

$$\ddot{y} = -\frac{b}{m}\dot{y} - \frac{k}{m}y + \frac{1}{m}F_d \quad \text{(ODE av ordning 2)}$$

Sätt $\dot{y} = v \Rightarrow \ddot{y} = \dot{v} \Rightarrow$

$$\begin{cases} \dot{y} = v \\ \dot{v} = -\frac{b}{m}v - \frac{k}{m}y + \frac{1}{m}F_d \end{cases} \quad \text{(Två kopplade ODE av ordning 1)}$$

Byt till mer allmänna variabler

$y = x_1$, $v = x_2$, $F_d = u$ (insignal)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{k}{m}\cdot x_1 - \frac{b}{m}x_2 + \frac{1}{m}u \end{cases}$$

Skriv om på matrisform

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u$$

Sätt nu $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$. Det ger

$y = x_1 =$ insignal

$$\dot{x} = Ax + B \cdot u$$
$$y = C \cdot x + D \cdot u \,,$$ där

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D = 0$$

A kallas systemmatris
B, C, D in- och utsignalvektorer

Exempel från tidigare, bil med motordynamik

$m\dot{y} + by = F_d - v \quad (1)$, v = störning p.g.a. vägens lutning.

$$F_d(s) = \frac{K_u}{1 + T_u \cdot s} U(s)$$, u = trottelvinkel (gaspådrag)

$$\Rightarrow F_d(s) + T_u \cdot s F_d(s) = K_u \cdot U(s) \Rightarrow$$
$$F_d + T_u \cdot \dot{F_d} = K_u \cdot u \quad (2)$$

(1) och (2) ger

$$\begin{cases} \dot{y} = -\frac{b}{m} y + \frac{1}{m} F_d - \frac{1}{m} v \\ \dot{F_d} = -\frac{1}{T_u} F_d + \frac{K_u}{T_u} \cdot u \end{cases}$$

y och F_d är tillståndsvariabler
u och v är insignaler
y är utsignal

$\Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{F}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{b}{m} & \frac{1}{m} \\ 0 & -\frac{1}{T_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ F_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{m} \\ \frac{K_m}{m} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ F_d \end{bmatrix}$$

Överföringsfunktion $G(s)$

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du,$$ vi söker $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$

y = utsignal, u = insignal

Laplace ger

$$\begin{cases} s \cdot X(s) = A \cdot X(s) + B \cdot U(s) \\ Y(s) = CX(s) + DU(s) \end{cases}$$

$$(sI - A)X(s) = B \cdot U(s) \Rightarrow X(s) = (sI - A)^{-1} \cdot B \cdot U(s) \Rightarrow$$

$$Y(s) = C \cdot (sI - A)^{-1} B \cdot U(s) \rightarrow$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C \cdot (sI - A)^{-1} \cdot B + D$$

I = enhetsmatris $\begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$,

---

Invers matris

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Ex Fjäder-massa-system

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -b/m \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D = 0$$

$$\Rightarrow$$

$$G(s) = C \cdot (sI - A)^{-1} \cdot B + D = C \cdot (sI - A)^{-1} \cdot B =$$

$$= C \cdot \left(s \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -b/m \end{bmatrix} \right)^{-1} \cdot B =$$

$$= C \cdot \begin{bmatrix} s & -1 \\ k/m & s + b/m \end{bmatrix}^{-1} \cdot B =$$

$$= C \cdot \frac{1}{s^2 + s\frac{b}{m} + \frac{k}{m}} \cdot \begin{bmatrix} s + b/m & 1 \\ -k/m & s \end{bmatrix} \cdot B =$$

$$= \frac{1}{s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s + b/m & 1 \\ -k/m & s \end{bmatrix}} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m}} \begin{bmatrix} s + \frac{b}{m} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} = \frac{\frac{1}{m}}{s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m}}$$

stämmer!

Poler och nollställen

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C \cdot (sI - A)^{-1} \cdot B + D$$

$$(sI-A)^{-1} = \frac{\text{adj}(sI-A)}{\det(sI-A)} \Rightarrow$$

adj$(sI-A)$ = den adjungerade matrisen till $(sI-A)$

$$G(s) = \frac{C \cdot \text{adj}(sI-A) \cdot B + \det(sI-A) \cdot D}{\det(sI-A)}$$

Nollställena ges av $C \cdot \text{adj}(sI-A) + \det(sI-A) \cdot D = 0$

polerna ges av $\det(sI-A) = 0$ (karakteristiska ekvationen)

Linjarisering av olinjär tillståndsmodell

$\dot{x} = f(x, u)$

$y = g(x, u)$

f, g olinjära funktioner av x och u.

Vi skall linjarisera kring en vald vilopunkt (x_0, u_0) som kallas p_0.

Den ges av $\dot{x} = 0$, alltså $\begin{cases} 0 = f(x_0, u_0) \\ y_0 = g(x_0, u_0) \end{cases}$

Vi söker alltså variationerna $\Delta\dot{x}$ och Δy kring denna punkt.

Taylor ger

$$f(x,u) \approx f(x_0,y_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0}\Delta x + \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{P_0}\Delta u$$

$$\underbrace{g(x,u) \approx g(x_0,y_0) + \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{P_0}\Delta x + \left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{P_0}\Delta u}_{\text{variationer kring vilopunkt.}}$$

$\Rightarrow$

$$\Delta\dot{x} = A\cdot\Delta x + B\Delta u$$

$$\Delta y = B\cdot\Delta x + C\cdot\Delta u \quad , \text{där}$$

$$A = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0} \quad B = \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{P_0} \quad C = \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{P_0} \quad D = \left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{P_0}$$

Ex. 3.8

$$\dot{x} = \begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\sqrt{x_1} + x_2\\ x_1\cdot u - x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}f_1(x_1,x_2)\\ f_2(x_1,x_2)\end{bmatrix} = f(x_1,x_2)$$

$$y = \left[x_1^2 + u\cdot\sin x_2\right] = g(x_1,x_2) \quad \Rightarrow$$

Vi väljer en allmän vilopunkt $(x_{10}, x_{20}, u_0) = P_0 \Rightarrow$

$$\Delta\dot{x} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0}\Delta x + \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{P_0}\cdot\Delta u \qquad \Delta x = \begin{bmatrix}\Delta x_1\\ \Delta x_2\end{bmatrix}$$

$$\Delta y = \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{P_0}\cdot\Delta x + \left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{P_0}\cdot\Delta u$$

Skrivsätt $\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \Rightarrow$

$$\left.\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right|_{P_0} = -\frac{1}{2\sqrt{x_{10}}} \qquad \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right|_{P_0} = 1 \qquad \Rightarrow$$

$$\left.\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right|_{P_0} = u_0 \qquad \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right|_{P_0} = -1 \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{P_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ x_{10} \end{bmatrix}$$

$$\left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{P_0} = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} \end{bmatrix}\right|_{P_0} = \begin{bmatrix} 2x_{10} & u_0 \cos x_{20} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Delta\dot{x} = \begin{bmatrix} \Delta\dot{x}_1 \\ \Delta\dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2\sqrt{x_{10}}} & 1 \\ u_0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ x_{10} \end{bmatrix} \cdot \Delta u$$

$$\left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{P_0} = \sin x_{20} \qquad \Rightarrow$$

$$\Delta y = \begin{bmatrix} 2x_{10} & u_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} + \sin x_{20} \cdot \Delta u$$

För insignalen $u_0 = 0{,}5$ fås vilopunkten x_{10}, x_{20} ur $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, dvs $\begin{bmatrix} -\sqrt{x_{10}} + x_{20} \\ x_{10} \cdot 0{,}5 - x_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ som ger

$x_{10} = 4$ och $x_{20} = 2$

$\longrightarrow$

Detta ger systemmatrisen

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2\sqrt{x_{10}}} & 1 \\ \mu_0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}25 & 1 \\ 0{,}5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad sI - A = \begin{bmatrix} s+0{,}25 & -1 \\ -0{,}5 & s+1 \end{bmatrix}$$

Polerna ges av

$$\det(sI-A) = \det \begin{bmatrix} s+0{,}25 & -1 \\ -0{,}5 & s+1 \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$(s+0{,}25)(s+1) - 0{,}5 = 0$$

$$s^2 + 1{,}25s - 0{,}25 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$s = -0{,}625 \pm 0{,}800 = \begin{cases} -1{,}425 & \text{stabil} \\ 0{,}175 & \text{instabil} \end{cases}$$