Filter

- Frekvensselektiva filter
  Ändrar frekvensinnehållet i en signal.
- Prediktering.
  Förutsäga kommande värden i en signal.
- glättning (smoothing)
  Minska störningar från brus.

Frekvensselektiva filter

Vi betraktar LP-filter, sådana som dämpar höga frekvenser.

Signaler med frekvens $\omega \leq \omega_c$ skall passera, möjligen fördröjda t_0
Signaler med $\omega > \omega_c$ skall utsläckas

$$y(t) = \begin{cases} C \cdot x(t - t_0) & \omega \leq \omega_c \quad \text{(passband)} \\ 0 & \omega > \omega_c \quad \text{(spärrband)} \end{cases}$$

Fouriertransformering i passbandet ger

$$Y(\omega) = C \cdot X(\omega) \cdot e^{-i\omega t_0}$$

$\Rightarrow$ Frekvensfunktionen blir

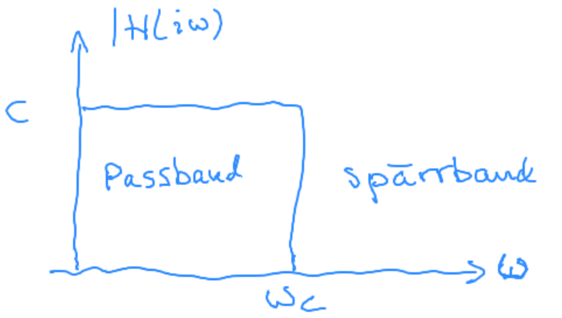
$$H(i\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = C \cdot e^{-i\omega t_0} \Rightarrow$$

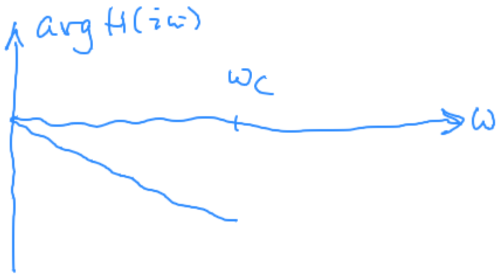
amplitudfunktionen

$$|H(i\omega)| = C$$

fasfunktionen

$$\arg H(i\omega) = -\omega t_0$$





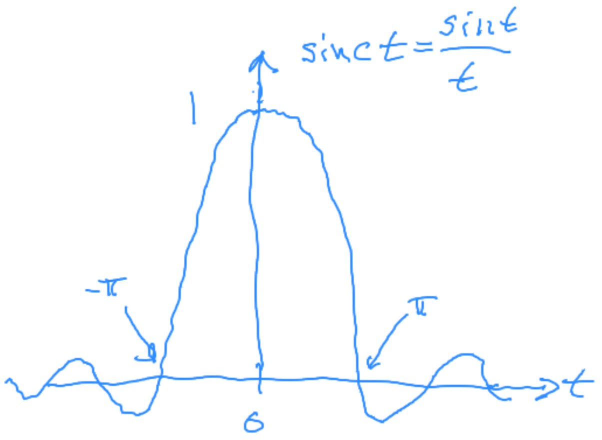
Ex Betrakta ett filter

$$H(i\omega) = \begin{cases} e^{-\omega t_0} & |\omega| \le \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

Bestäm impulssvaret (invers Fouriertransform)

$$h(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{-\omega t_0} \cdot e^{i\omega t}\, d\omega =$$

$$= \frac{\sin(\omega_c(t-t_0))}{\pi(t-t_0)} = \frac{\omega_c}{\pi}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega_c}{\pi}(t-t_0)\right)$$



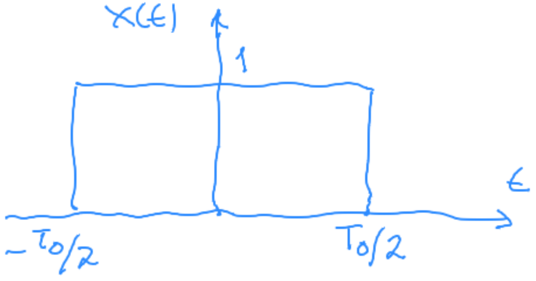
$h(t)$ har värden för $t<0$.

Filtret är ej kausalt!

Men vi skall se hur det kanterar en fyrkant-puls

Ex Låt

$$x(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq T_0/2 \\ 0 & |t| > T_0/2 \end{cases}$$



Faltning med impulssvaret ger

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = \ldots\ldots$$

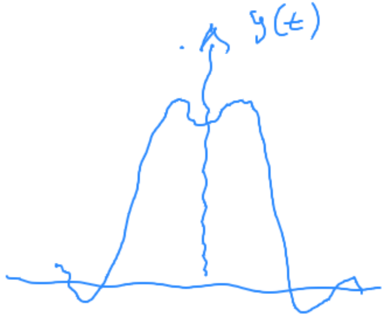
$$\ldots = \frac{1}{\pi}\left(\underbrace{\int_0^a \frac{\sin\lambda}{\lambda}\, d\lambda}_{Si(a)} - \underbrace{\int_0^b \frac{\sin\lambda}{\lambda}\, d\lambda}_{Si(b)} \right)$$

$a = \omega_c(t - t_0 + T_0/2)$

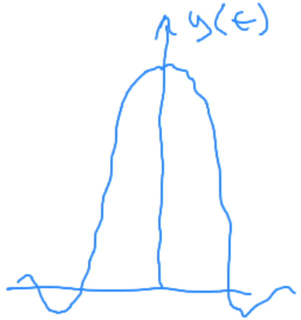
$b = \omega_c(t - t_0 - T_0/2)$

$\lambda = \omega_c(t - t_0 - \tau)$

Utseende hos y(t) för olika ω_c:

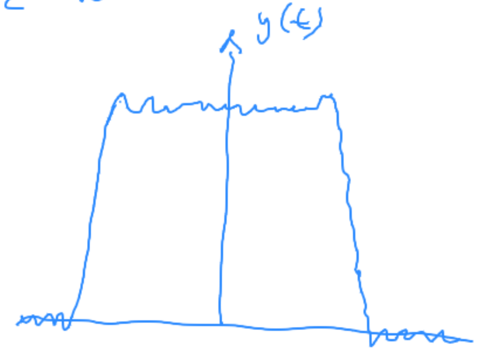


$\omega_c = 4\pi$



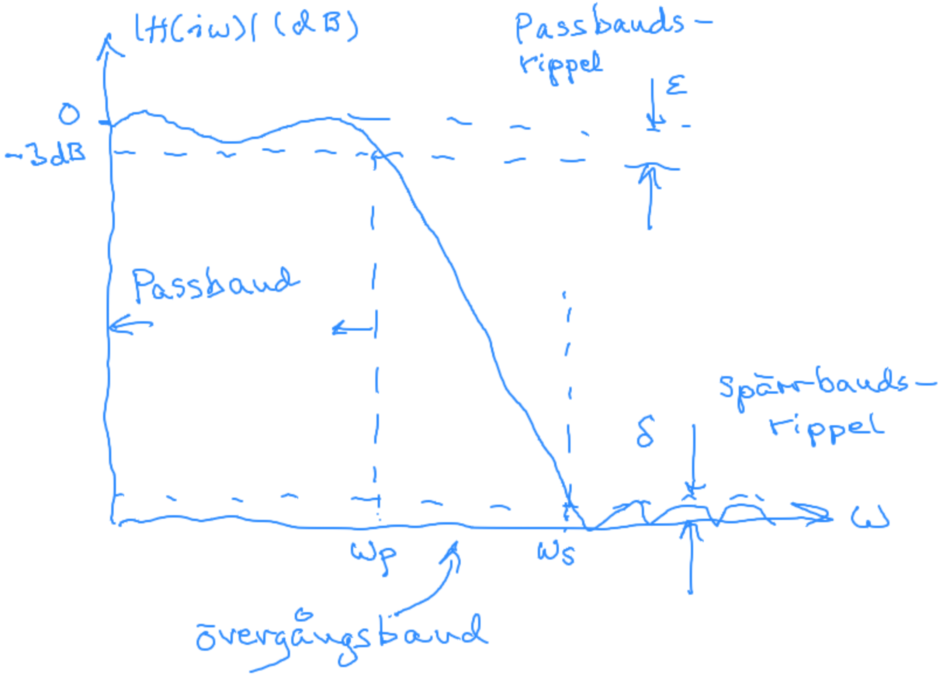
$\omega_c = 2\pi$

$\omega_c = 40\pi$



Vi kan alltså inte realisera ett idealt filter, vi måste också acceptera en viss distorsion.

Filterspecifikation

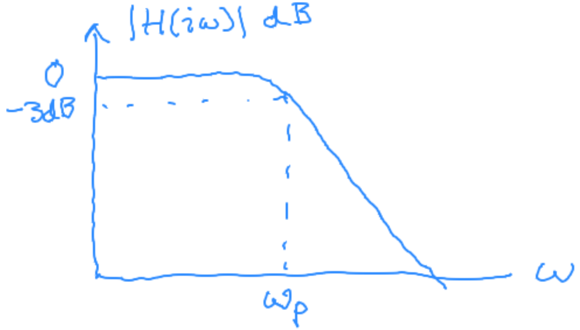


$1-\varepsilon \le |H(i\omega)| \le 1 \quad 0 \le \omega \le \omega_p$ passbandet

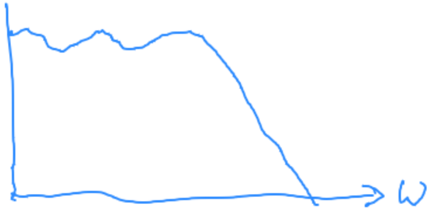
$|H(i\omega)| \le \delta \quad \omega \ge \omega_s$ spärrbandet

Olika typer

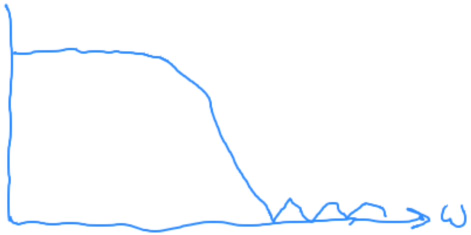
- Butterworth inget rippel, maximalt platt



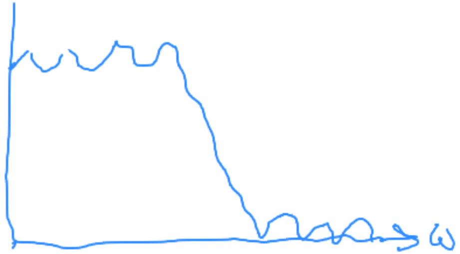
• Chebyshev typ 1
rippel i passbandet



• Chebyshev 2
rippel i spärrbandet

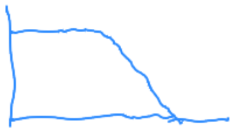


• Cauer-Filter
rippel i både pass- och spärrband

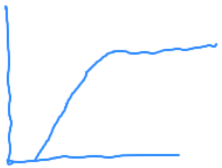


Har brantast övergång till övergångsbandet.

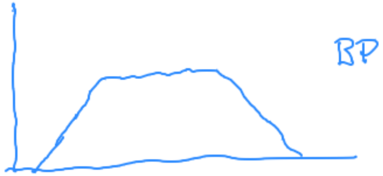
Filtertyper



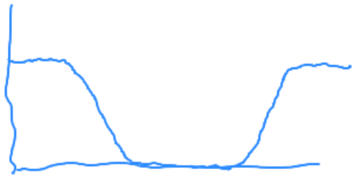
LP (lågpass)



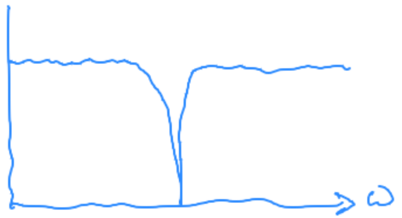
HP (högpass)



BP (Bandpass)



BS (Band-spärr)

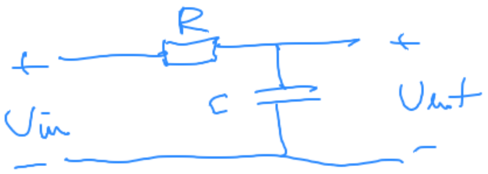


Notch

Butterworthfilter

Ordning 1 $\quad H(s) = \dfrac{\omega_c}{s+\omega_c}$

ω_c = övre gränsfrekvens



$\omega_c = \dfrac{1}{RC}$

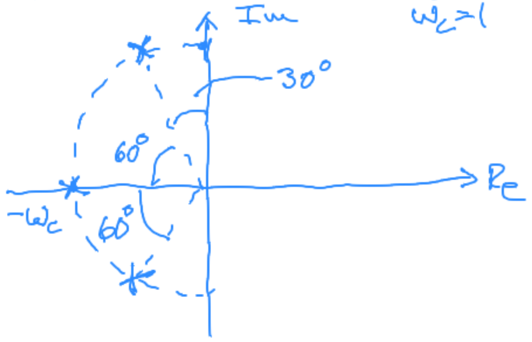
Pol $\quad s = -\omega_c$

Poler hos Butterworth

$$s = p_k = \omega_c \cdot e^{i(\pi/2 + \pi/2n + \pi(k-1)/n)}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

n = filtrets ordning

Ex Butterworth ordning 3 $\quad \omega_c = 1$



poler $\quad s = -\omega_c = 1$

$s = \left(-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$$H(s) = \frac{A}{(s+1)\left(s+\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(s+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} =$$

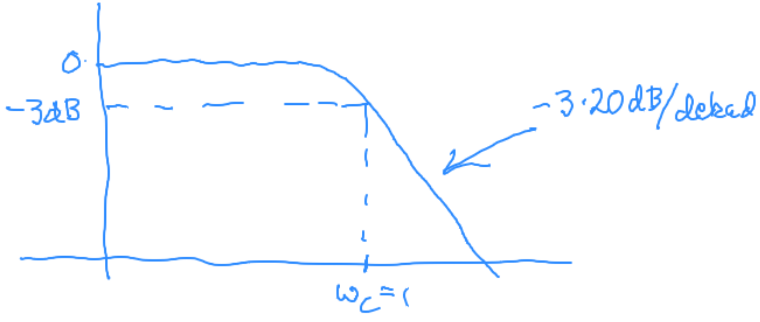
$$= \frac{A}{(s+1)\left(\left(s+\frac{1}{2}\right)^2 - \left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right)} =$$

$$= \frac{A}{(s+1)\left(s^2+s+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)} =$$

$$= \frac{A}{(s+1)(s^2+s+1)}$$

$H(0) = 1 \Rightarrow A = 1$

$$H(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+s+1)}$$

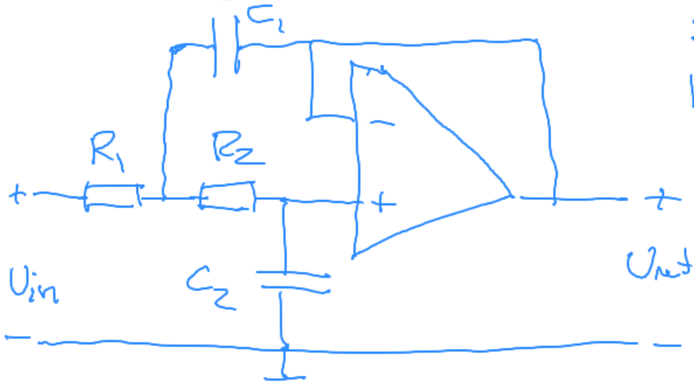


Man kan visa att

$$|H(i\omega)|^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}}$$

för Butterworth av ordning n.

Realisering av Butterworth ordning 2



Sallen-Key-länk

$$H(s) = \frac{\frac{1}{R_1R_2C_1C_2}}{s^2 + \frac{C_2(R_1+R_2)}{R_1R_2C_1C_2}s + \frac{1}{R_1R_2C_1C_2}} =$$

$$= \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n \cdot s + \omega_n^2}$$

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{R_1R_2C_1C_2}}$$

$$\zeta = \frac{C_2(R_1+R_2)}{2\sqrt{R_1R_2C_1C_2}}$$

$\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ger Butterworth

Transformering av Filter

- Byte av gränsfrekvens ω_c

$$s \rightarrow \frac{s}{\omega_c}$$

Ex Utgå från LP-filtret

$$H(s) = \frac{1}{s+1} \Rightarrow$$

$$H_{ny}(s) = \frac{1}{\frac{s}{\omega_c}+1} = \frac{\omega_c}{s+\omega_c}$$

- Transformering av Filter-typ

LP → HP med gränsfrekvens ω_c

$$s \rightarrow \frac{\omega_c}{s}$$

Ex Utgå från

$H(s) = \frac{1}{s+1}$ och

bestäm $H_{HP}(s)$ med gränsfrekvens $\omega_c = 50$ rad/s

Lösning

$$s \rightarrow \frac{50}{s} \Rightarrow$$

$$H_{HP}(s) = \frac{1}{\frac{50}{s}+1} = \underline{\underline{\frac{s}{s+50}}}$$

Ex Ett Butterworth-filter av ordning 2 har

$$H(s) = \frac{1}{s^2+\sqrt{2}\,s+1}$$

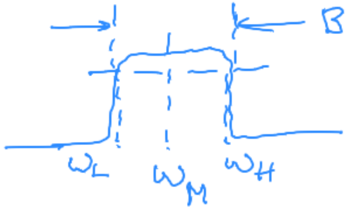
Bestäm ett Butterworth HP-filter med gräns-frekvens $\omega_c = 100$ rad/s

$$s \to \frac{100}{s} \Rightarrow$$

$$H_{HP}(s) = \frac{1}{\left(\frac{100}{s}\right)^2+\sqrt{2}\cdot\frac{100}{s}+1} = \frac{s^2}{10^4+\sqrt{2}\cdot 100s+s^2} = \underline{\underline{\frac{s^2}{s^2+\sqrt{2}\cdot 100\cdot s+10^4}}}$$

Ex Utgå från $H(s) = \frac{1}{s+1}$ och bestäm ett BP-filter med

$\omega_M = 1$, $B = 0{,}1$



$$B = \omega_H - \omega_L$$

$$\omega_M = \sqrt{\omega_L\cdot\omega_H}$$

Lösning:

LP → BP

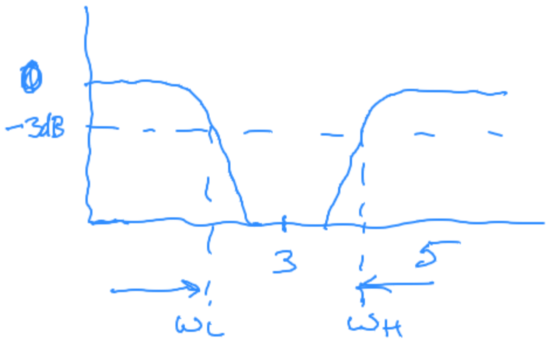
$$s \to \frac{s^2+\omega_M^2}{B\cdot s} = \frac{s^2+1}{0{,}1s} \Rightarrow$$

$$H_{BP}(s) = \frac{1}{\frac{s^2+1}{0{,}1s}+1} = \underline{\underline{\frac{0{,}1s}{s^2+0{,}1s+1}}}$$

Ex LP → BS

Bestäm $H_{BS}(s)$ med

$\omega_M = 3$, $B = 5$



Lösning: Utgå från

$$H(s) = \frac{1}{s+1}$$

$$s \rightarrow \frac{B \cdot s}{s^2 + \omega_M^2} \implies$$

$$H_{BS}(s) = \frac{1}{\frac{Bs}{s^2+\omega_M^2} + 1} =$$

$$= \frac{s^2 + \omega_M^2}{s^2 + Bs + \omega_M^2} =$$

$$= \frac{s^2 + 9}{s^2 + 5s + 9}$$

Kommentar

$$H(j\omega) = \frac{-\omega^2 + 9}{-\omega^2 + j5\omega + 9}$$

$H(j3) = 0$ Notch-filter!

Beräkning ger

$\omega_L = 1{,}405$

$\omega_H = 6{,}405$

$\implies$

$\omega_M = \sqrt{\omega_L \cdot \omega_H} \approx 3$ rad/s

stämmer!

Från analog till diskret överföringsfunktion

Tustins metod

Vi vet att $z = e^{s \cdot h}$

h = samplingsintervallet.

$z = e^{sh}$ avbildar vänstra halvplanet(s) till det inre av enhetscirkeln(z), $|z| < 1$.

Omskrivning

$$z = e^{sh} = \frac{e^{sh/2}}{e^{-sh/2}} \approx (\text{Taylor}) \approx$$

$$\approx \frac{1 + \frac{sh}{2}}{1 - sh/2} \Rightarrow$$

$$z(1 - sh/2) = 1 + sh/2$$

Lös ut s :

$$s = \frac{2}{h} \cdot \frac{z-1}{z+1}$$

Ex Utgå från $H(s) = \frac{1}{s+1}$ och bestäm H(z) för ett HP-filter med $\omega_c = 5$ rad/s. $h = 0{,}5$

Lösning

$LP \to HP \Rightarrow$

$$s \to \frac{\omega_c}{s} = \frac{5}{s} \Rightarrow$$

$$H_{HP}(s) = \frac{1}{\frac{5}{s}+1} = \frac{s}{s+5}$$

$$s \to \frac{2}{h} \cdot \frac{z-1}{z+1} = 4 \cdot \frac{z-1}{z+1} \Rightarrow$$

$$H(z) = \frac{4 \cdot \frac{z-1}{z+1}}{4 \cdot \frac{z-1}{z+1} + 5} = \underline{\underline{\frac{4(z-1)}{9z+1}}}$$

Frequency warping

Tustins metod ger en förvrängning av Faskurvan.

Med följande variant av Tustin kan man få en god approximation av Faskurvan kring en önskad frekvens ω_M:

$$s = \frac{\omega_M}{\tan \frac{\omega_M h}{2}} \cdot \frac{z-1}{z+1}$$