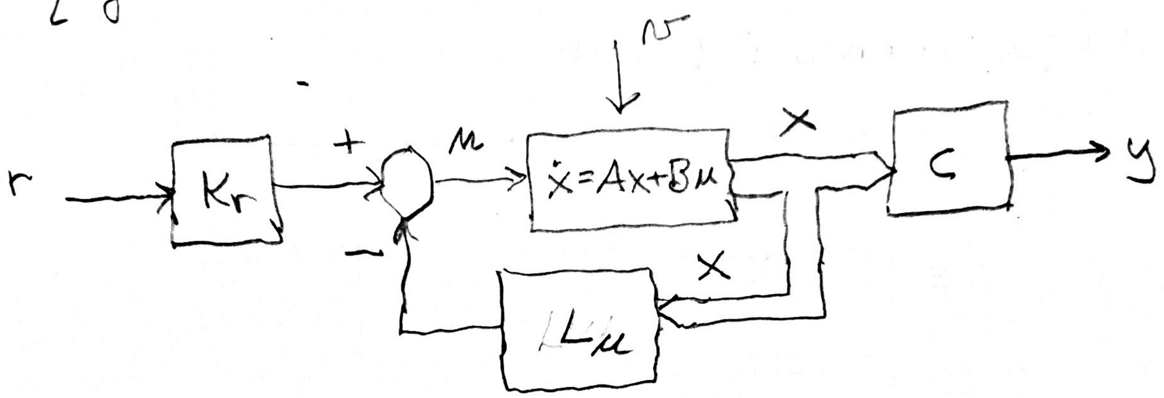
Föreläsning 13 Tillståndsåterkoppling

Metoden utgår från ett system på tillståndsform.

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + B_v \cdot v \\ y = C \cdot x \end{cases}$$



K_r bestämmer lågfrekvensförstärkningen.
Tillstånden återkopplas och bildar styrlagen

$$u = K_r \cdot r - L_u \cdot x \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B \cdot (K_r \cdot r - L_u \cdot x) + B_v \cdot v = \\ \quad = (A - B \cdot L_u)x + B \cdot K_r \cdot r + B_v \cdot v \\ y = C \cdot x \qquad \dim x = n \Rightarrow L_u = [l_1, l_2, \ldots, l_n] \end{cases}$$

$G_{ry}(s)$: sätt $v = 0$

$$\begin{cases} s \cdot X(s) = (A - BL_u) \cdot X(s) + B \cdot K_r \cdot R(s) \\ Y(s) = C \cdot X(s) \end{cases}$$

$$(sI - A + BL_u)X(s) = B \cdot K_r \cdot R(s)$$

$$X(s) = (sI - A + B \cdot L_u)^{-1} B \cdot K_r \cdot R(s) \qquad \Rightarrow$$

$$Y(s) = C \cdot X(s)$$

$$G_{ry}(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = C \cdot (sI - A + B \cdot L_u)^{-1} \cdot B \cdot K_r \qquad \Rightarrow$$

Polerna ges av det karakteristiska ekvationen $\det(sI - A + B\cdot L_u)$

<u>$G_{ru}(s)$</u> sätt $v = 0$

$$U(s) = K_r \cdot R(s) - L_u \cdot X(s)$$

$$X(s) = (sI - A + B\cdot L_u)^{-1} B\cdot K_r \cdot R(s) \Rightarrow$$

$$U(s) = \left(-L_u (sI - A + B\cdot L_u)^{-1} \cdot B\cdot K_r + K_r\right)\cdot R(s)$$

$$G_{ru}(s) = \frac{U(s)}{R(s)} = -L_u (sI - A + BL_u)^{-1}\cdot B\cdot K_r + K_r$$

<u>$G_{vy}(s)$</u> sätt $r = 0$

$$\begin{cases} (sI - A + B\cdot L_u)X(s) = B_v \cdot V(s) \\ Y(s) = C\cdot X(s) \end{cases} \Rightarrow$$

$$G_{vy}(s) = \frac{Y(s)}{V(s)} = C\cdot(sI - A + B\cdot L_u)^{-1}\cdot B_v$$

<u>K_r</u> Bestäms så att lågfrekvensförstärkningen hos $G_r(s)$ blir 1.

Alltså $G_{ry}(0) = 1$.

$$G_{ry}(s) = C\cdot(sI - A + B\cdot L_u)^{-1}\cdot B\cdot K_r \Rightarrow$$

$$C(-A + B\cdot L_u)\cdot B\cdot K_r = 1 \Rightarrow$$

$$K_r = \frac{1}{C\cdot(-A + B\cdot L_u)\cdot B}$$

Ex
$$\begin{cases} \dot{x} = -ax + b(u + v) \\ u = -lx + K_r \cdot r \\ y = x \quad (C = 1) \end{cases}$$

Bestäm l och K_r så att systemet får polen $s = -\alpha$

Karakteristisk ekvation $\det(sI - A + BL_u) = 0$

dimension 1 och $A = -a$ ger $B = b$, $L_u = l$

$s - (-a) + b \cdot l = 0 \Rightarrow s + a + b \cdot l = 0$. $s = -\alpha \Rightarrow$

$-\alpha + a + b \cdot l = 0 \Rightarrow \underline{\underline{l = \frac{\alpha - a}{b}}}$

$G_{ry}(s) = C \cdot (sI - A + BL_M)^{-1} \cdot B \cdot K_r$. $n = 1, C = 1, A = -a \Rightarrow B = b$

$$G_{ry}(s) = 1 \cdot \frac{1}{s + a + b \cdot \frac{\alpha - a}{b}} \cdot b \cdot K_r = \underline{\frac{b \cdot K_r}{s + \alpha}}$$

K_r ges av $G_{ry}(0) = 1$: $\frac{b \cdot K_r}{0 + \alpha} = 1$ $\underline{\underline{K_r = \frac{\alpha}{b}}}$

$$\Rightarrow \underline{G_{ry}(s) = \frac{\alpha}{s + \alpha}}$$

$G_{vy}(s) = C \cdot (sI - A + BL_M) \cdot B_v =$

$$= 1 \cdot \frac{1}{s + a + b \cdot \frac{\alpha - a}{b}} \cdot b = \frac{b}{s + \alpha}$$

$G_{vy}(0) = \frac{b}{\alpha}$. Högfrekventa störningar kompenseras bättre med högt α.

$$G_{ru}(s) = -L_M(sI - A + B \cdot L_M)^{-1} \cdot B \cdot K_r + K_r =$$

$$= -\frac{\alpha - a}{b} \cdot \frac{1}{s + a + b \cdot \frac{\alpha - a}{b}} \cdot b \cdot K_r + K_r =$$

$$= \frac{a - \alpha}{s + \alpha} \cdot K_r + K_r = K_r \cdot \frac{a - \alpha + s + \alpha}{s + \alpha} =$$

$$= \frac{\alpha}{b} \cdot \frac{s + a}{s + \alpha}$$

$$L(s) = L_M(sI - A)^{-1} \cdot B = \frac{\alpha - a}{b} \cdot \frac{1}{s + a} \cdot b = \frac{\alpha - a}{s + a}$$

Låt $r(t) = r_0 \sigma(t) \Rightarrow R(s) = \frac{r_0}{s}$

$$U(s) = G_{ru}(s) \cdot R(s) = \frac{\alpha}{b} \cdot \frac{s + a}{s + \alpha} \cdot \frac{r_0}{s}$$

$$u(0) = \lim_{s \to \infty} s \cdot \frac{\alpha}{b} \cdot \frac{s + a}{s + \alpha} \cdot \frac{r_0}{s} = \frac{\alpha}{b} \cdot r_0$$

Styrsignalaktiviteten ökar med α.

Tillståndsåterkoppling kräver att systemet är <u>styrbart</u>, dvs att varje tillstånd kan påverkas med styrsignalen u.

Matematiskt kräver detta att

$$\det[B \;\; AB \;\; A^2B \; \ldots \; A^{n-1}B] \neq 0.$$

EX Systemet

$$\dot{x}_1 = -2x_1 + x_2$$

$$\dot{x}_2 = -5x_1 + 2u$$

$$y(t) = x_1$$

regleras med tillståndsåterkoppling så att styrsignalen blir $u = -Lx + K_r \cdot r$.

Här är $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ och $L = [l_1 \ \ l_2]$

a) Är systemet styrbart?

b) Bestäm L och K_r så att $G_{ry}(s) = \dfrac{8}{s^2+4s+8}$

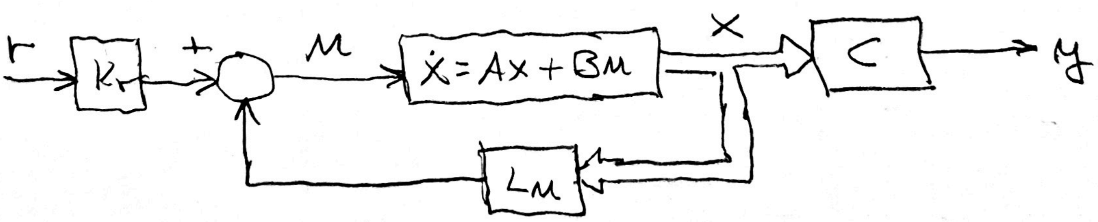
Lösning

a) $n = 2$. $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ $C = [1 \ \ 0]$

$AB = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$ styrbarhetsmatrisen blir $S = [B \ AB] = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\det S = 4 \neq 0$ Alltså styrbart.

b) $\dot{x} = Ax + Bu$, $u = -Lx + K_r \cdot r$, $L = [l_1 \ \ l_2]$



$u = -L_u x + K_r \cdot r \Rightarrow$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B(-L_u x + K_r \cdot r) = (A - L_u)x + B \cdot K_r \cdot r \\ y = Cx \end{cases}$$

$\Longrightarrow$

$$sX(s) = (A - BL_M)X(s) + B \cdot K_r \cdot R(s)$$

$$(sI - A + BL_M)X(s) = BK_r \cdot R(s)$$

$$Y(s) = C \cdot X(s) \Rightarrow$$

$$G_{ry}(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = C \cdot (sI - A + B \cdot L_M) \cdot B \cdot K_r = \frac{8}{s^2 + 4s + 8}$$

$$sI - A + B \cdot L_M = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 & l_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} s+2 & -1 \\ 5 & s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2l_1 & 2l_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+2 & -1 \\ 5+2l_1 & s+2l_2 \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} s+2 & -1 \\ 5+2l_1 & s+2l_2 \end{bmatrix} = (s+2)(s+2l_2) + 5 + 2l_1 =$$

$$= s^2 + s(2+2l_2) + 5 + 2l_1 + 4l_2 = s^2 + 4s + 8 \Rightarrow$$

$$2 + 2l_2 = 4 \Rightarrow \underline{\underline{l_2 = 1}}$$

$$5 + 2l_1 + 4l_2 = 8 \Rightarrow \underline{\underline{l_1 = -0{,}5}}$$

$\underline{K_r}$ $\quad G_r(0) = 1 \Rightarrow C(-A + BL_M)^{-1} \cdot B \cdot K_r = 1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0{,}5 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot K_r = 1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \right)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} K_r = 1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} K_r = 1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} K_r = 1$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot K_r = 8 \qquad 2K_r = 8 \qquad \underline{\underline{K_r = 4}}$$