Kap 6. Stabilitet

Ett system är stabilt då och endast då rötterna till karakteristiska har negativ realdel.

Låt G(s) vara systemets överföringsfunktion

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$$

Karakteristiska ekvationen blir då $A(s)=0$ vars lösning kallas systemets <u>poler</u>.

Stabilitet kräver att polerna ligger i vänstra halvplanet

Detta ger att impulssvaret för ett stabilt system $\to 0$ då $t \to \infty$.

<u>Ex</u> System på tillståndsform

Låt
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \Rightarrow A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

Polerna ges av $\det(sI-A)=0$

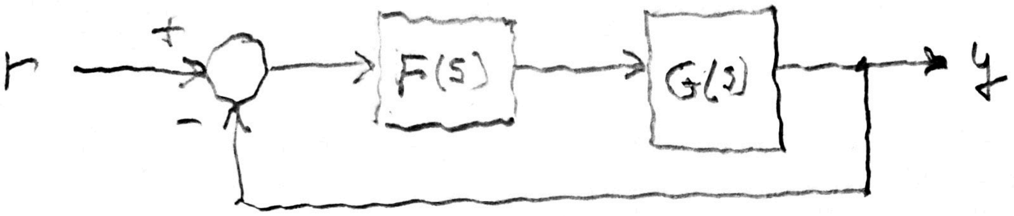
$$sI-A = \begin{bmatrix} s+2 & -1 \\ -2 & s+3 \end{bmatrix}, \quad \det(sI-A)=0 \Rightarrow$$

$$(s+2)(s+3)-2=0, \quad s^2+5s+4=0$$

$$s=-2{,}5 \pm \sqrt{2{,}5^2-4} = -2{,}5 \pm 1{,}5 \Rightarrow \text{båda poler} < 0$$

<u>Stabilt!</u>

Återkopplade system



$$Y(s) = \frac{F(s)\cdot G(s)}{1+F(s)\cdot G(s)} = \frac{L(s)}{1+L(s)} \Rightarrow$$

den karakteristiska ekvationen är

$$1+L(s)=0$$

Ex

Låt $G(s) = \frac{1}{s+a}$ och $F(s) = \frac{K_i}{s}$ (I-regulator)

$$1+L(s) = 1+\frac{K_i}{s(s+a)}, \quad 1+L(s)=0 \Rightarrow$$

$$s^2+as+K_i=0 \Rightarrow s=-\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}-K_i} \Rightarrow$$

$a>0 \Rightarrow$ poler i vänstra halvplanet.

$a=0 \Rightarrow$ poler på Im-axeln. (ej stabilt)

Routh-Hurwitz' stabilitetskriterium

Låt $a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots = 0$

För $n \geq 3$ blir ekv. svår att lösa.

Stabiliteten kan då avgöras med Routh-Hurwitz' kriterium

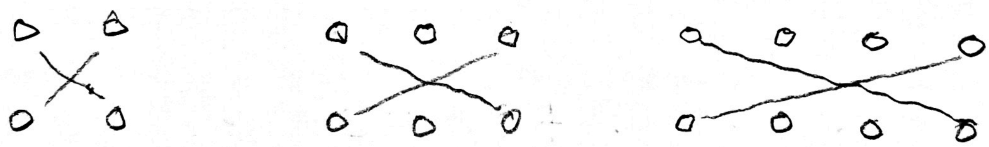
Ställ upp följande talschema

$$
\begin{array}{c|cccc}
s^n & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 \\
s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 \\
s^{n-2} & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\
\vdots & d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \\
\vdots & & & & \\
s^0 & & & &
\end{array}
$$

Här är

$$c_0 = \frac{a_1 a_2 - a_3 a_0}{a_1}, \quad c_1 = \frac{a_1 a_4 - a_5 a_0}{a_1}, \quad d_0 = \frac{c_0 a_3 - c_1 a_1}{c_0}$$

Lägg märke till mönstret



Låt $a_0 > 0$

- Nödvändigt stabilitetsvillkor:
  alla koefficienter $a_0, a_1, \ldots, a_n > 0$
- Nödvändigt och tillräckligt stab.villkor
  Alla koefficienter i första kolumnen > 0
  Om någon koefficient i första kolumnen $= 0$, låt den vara $\varepsilon > 0$. Låt sedan $\varepsilon \to 0$ och studera antalet teckenväxlingar.

Ex Låt $L(s) = \dfrac{K}{s(s+2)(1+Ts)}$

För vilka K, T är systemet stabilt?

$1+L(s) = 0 \Rightarrow Ts^3 + (1+2T)s^2 + 2s + K \Rightarrow$

$a_0 = T \quad a_1 = (1+2T) \quad a_2 = 2 \quad a_3 = K$

$$\begin{array}{c|ccc}
s^3 & T & 2 & 0 \\
s^2 & 1+2T & K & 0 \\
s^1 & c_0 & c_1 & \\
s^0 & d_0 & &
\end{array}$$

$$c_0 = \frac{2(2T+1) - TK}{1+2T}, \quad c_1 = \frac{(1+2T)\cdot 0 - 0\cdot T}{1+2T} = 0$$

$$d_0 = \frac{c_0 \cdot K - 0 \cdot a_1}{c_0} = K$$

Stabilt system om $\underline{\underline{T>0}}$, $1+2T>0$

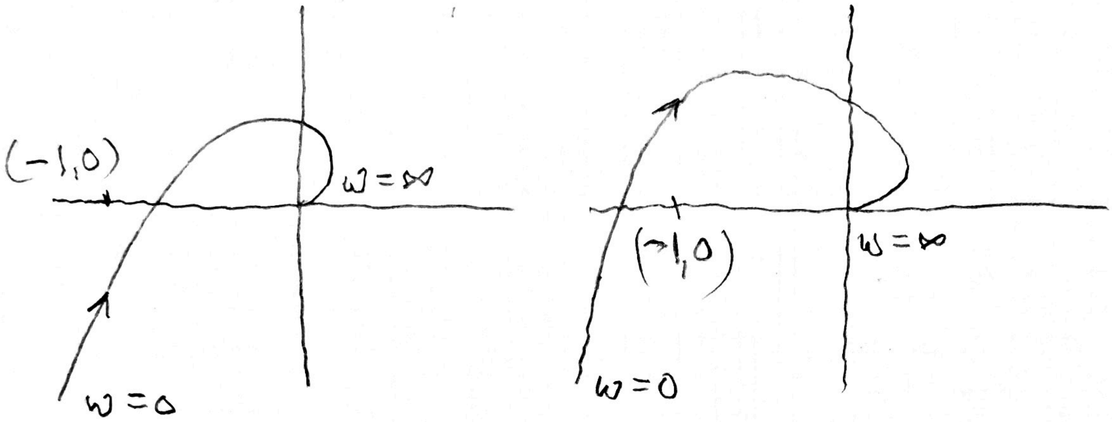
$$\frac{2(2T+1)-TK}{1+2T} > 0, \quad \underline{\underline{K>0}}$$

$$4T+2-TK > 0 \Rightarrow K < 4 + \frac{2}{T}$$

Alltså $\underline{\underline{0 < K < 4 + \frac{2}{T}}}$

Nyquists förenklade stab. kriterium

Antag att $L(s)$ ej har poler i högra halvplanet.
Rita kurvan $L(j\omega)$ från $\omega = 0$ till $\omega = \infty$.



stabilt

Om kurvan passerar negativa realaxeln med punkten $(-1,0)$ till vänster är systemet stabilt.

Ex Låt $L(s) = \dfrac{K}{s(s+1)(s+2)}$. stabilt?

$L(s)$ har inga nollställen i högra halvplanet.
Nyquists förenklade kriterium kan användas

$$L(j\omega) = \frac{K}{j\omega(j\omega+1)(j\omega+2)} = \frac{K(1-j\omega)(2-j\omega)}{j\omega(\omega^2+1)(4+\omega^2)} =$$

$$= \frac{-K\cdot 3j\omega}{j\omega(\omega^2+1)(\omega^2+4)} + j\frac{K(2-\omega^2)}{\omega(\omega^2+1)(4+\omega^2)}$$

$$= -\frac{3K}{(\omega^2+1)(\omega^2+4)} - j\frac{K(2-\omega^2)}{\omega(\omega^2+1)(4+\omega^2}$$

$$|L(j0)| = \infty \quad |L(j\infty)| = 0$$

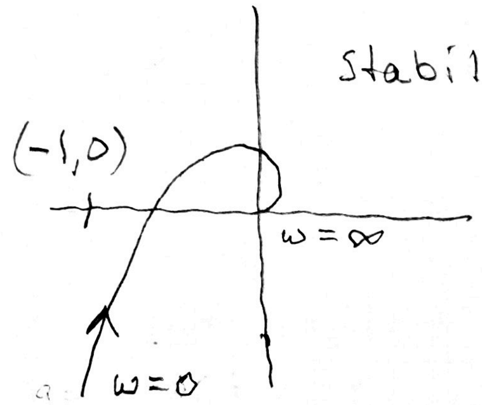
Passage av negativ realaxel:

$\mathrm{Im}\,L(j\omega)=0 \Rightarrow \omega=\sqrt{2} \Rightarrow$

$$\mathrm{Re}\,L(j\sqrt{2}) = -\frac{3K}{(1+2)(4+2)} = -\frac{3K}{18} = -\frac{K}{6}$$

$-\frac{K}{6}=-1$, $K=6$ ger marginellt stabilt system.

Stabilt system

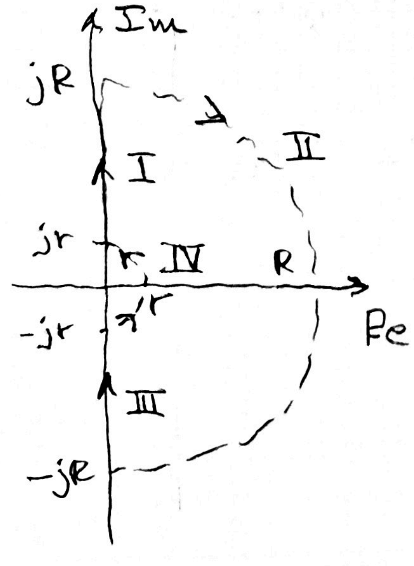


Systemet är stabilt om $-\frac{K}{6} > -1 \Rightarrow \underline{\underline{K<6}}$

<u>Nyquistkriteriet</u>

Används när L(s) har nollställe i högra halvplanet.

Avbilda L(s) då ω genomlöper Nyquists kontur:



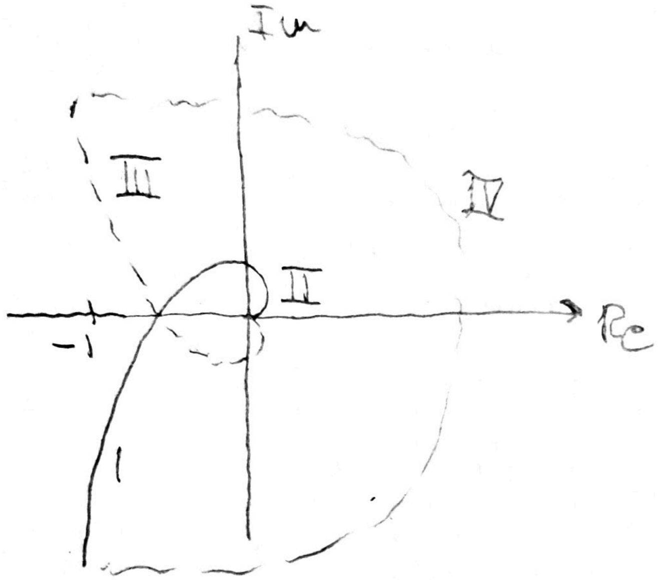
I: $0<\omega<\infty$

II: $s=Re^{j\theta}$ $-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$, $R\to\infty$

III: $-\infty<\omega<0$

IV: $s=re^{j\theta}$ $-\frac{\pi}{2}\le r\le\frac{\pi}{2}$ $r<0$

Detta ger att konturen omsluter högra halvplanet.



L(jω):s bild av Nyquists-konturen.

Nyquists stabilitetskriterium

$Z = P + N = 0$ ger stabilt återkopplat system.

Z = antal nollställen i höger halvplan hos $1+L(s)$.

P = antal poler i höger halvplan hos $L(s)$.

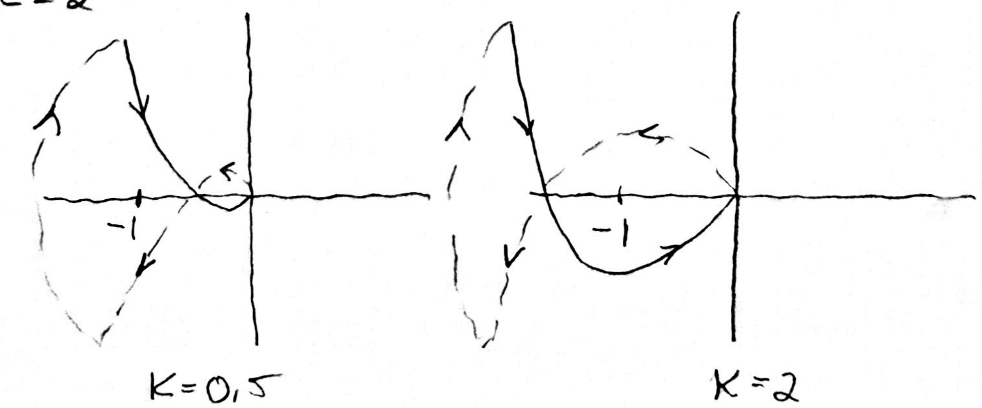
N = antal varv medurs som avbildningen $L(s)$ omsluter punkten $(-1,0)$. Moturs ger $N<0$.

Ex $L(s) = \dfrac{K(s+1)}{s(s-1)}$, stabilt för $K=0{,}5$, $K=2$?

$$L(j\omega) = \frac{K(j\omega+1)}{j\omega(j\omega-1)} = -\frac{K(1+j\omega)}{j\omega(1-j\omega)} = -\frac{K\cdot(1+j\omega)^2}{j\omega(1+\omega^2)} =$$

$$= -\frac{K(1-\omega^2+j2\omega)}{j\omega(1+\omega^2)} = -\frac{2K}{1+\omega^2} + j\frac{K(1-\omega^2)}{\omega(1+\omega^2)}$$

Rita bilden av Nyquistkonturen för $K=0{,}5$ och $K=2$



K=0,5 K=2

$L(s)$ har 1 pol i höger halvplan ⇒
$P = 1$

<u>$K = 0{,}5$</u> $(-1, 0)$ omsluts 1 gång medurs ⇒
⇒ $N = 1$

$Z = N + P = 1 + 1 = 2$. $1 + L(s)$ har 2 nollställen
i höger halvplan.
<u>Instabilt</u>.

<u>$K = 2$</u> $(-1, 0)$ omsluts 1 gång <u>moturs</u>. ⇒
$N = -1$

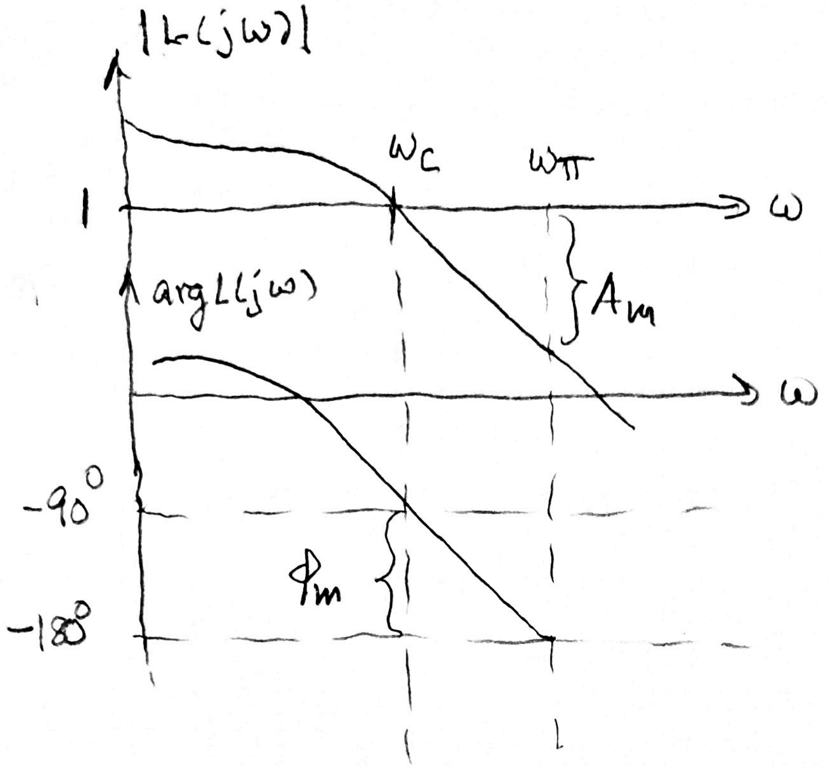
$Z = N + P = -1 + 1 = 0$, $1 + L(s)$ har inga nollställen
i höger halvplan. <u>Stabilt</u>.

<u>Stabilitetsmarginaler</u>

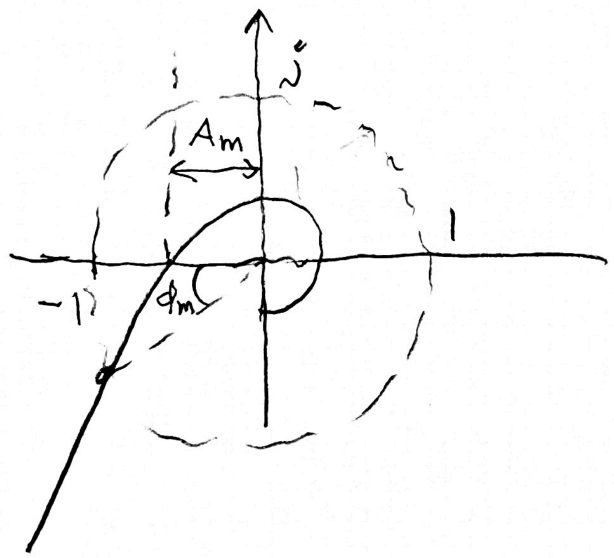
Anger hur nära punkten $(-1, 0)$ $L(j\omega)$ ligger

Amplitudmarginal A_m : Hur mycket förstärkningen i kretsöverföringen kan variera utan instabilitet

Fasmarginal φ_m : Hur mycket fasvridning $L(s)$ kan tillföras utan instabilitet.



Bode-diagram



Nyquistkurvan
$L(j\omega)$

ω_c ges av $|L(j\omega_c)| = 1$

ω_π ges av $\arg L(j\omega_\pi) = -180^\circ$

$$\Rightarrow \quad \varphi_m = \arg L(j\omega_c) + 180^\circ$$

$$A_m = \frac{1}{|L(j\omega_\pi)|}$$