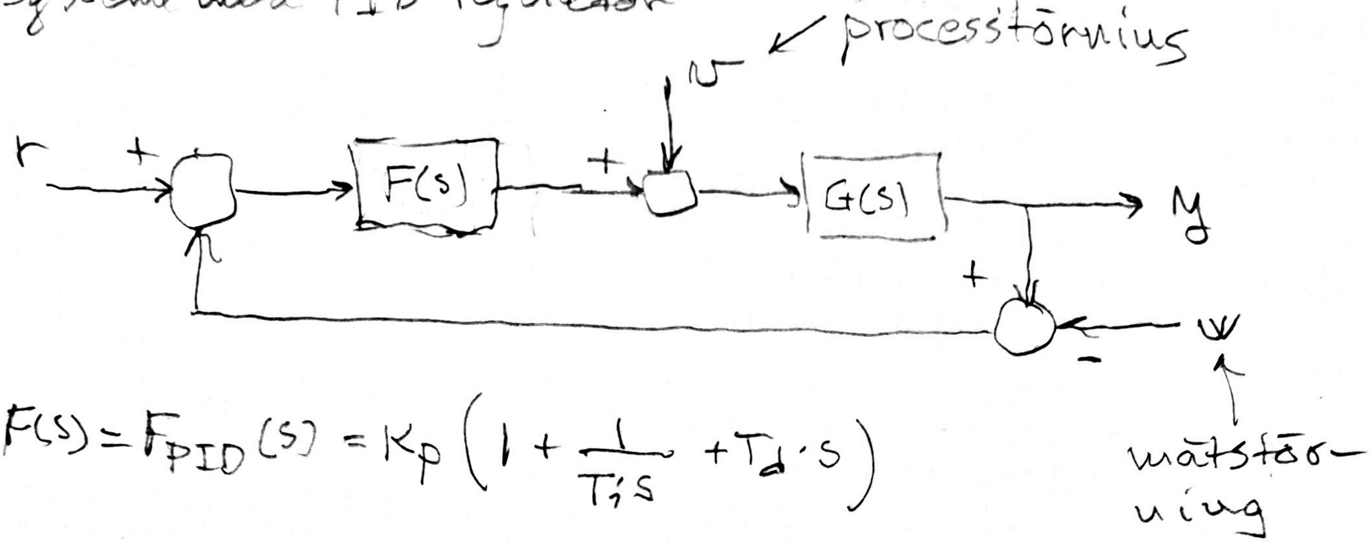
Föreläsning 11

System med PID-regulator



$$F(s) = F_{PID}(s) = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d \cdot s\right)$$

Skrivs ofta $F_{PID}(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s$

Ex 8.1 P-reglering av DC-motor

Motor $G(s) = \frac{K}{s(1+Ts)} = \frac{K/T}{s^2 + s/T}$ $\quad F(s) = K_p$

$$G_{ry}(s) = \frac{F(s)\cdot G(s)}{1 + F(s)\cdot G(s)} = \frac{K_p \cdot \frac{K/T}{s^2+s/T}}{1 + K_p \cdot \frac{K/T}{s^2+s/T}} =$$

$$= \frac{K_p \cdot K/T}{s^2 + s/T + K_p K/T} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \text{ där}$$

$$\omega_n = \sqrt{K_p \cdot K/T} \qquad \zeta = \frac{1}{2\omega_n T} = \frac{1}{2\sqrt{K_p \cdot K \cdot T}}$$

- K_p ökar $\Rightarrow$ ω_n ökar, ζ minskar $\Rightarrow$ snabbare system ökad översväng i stegsvar och minskad fasmarginal

Styrsignalaktiviteten ges av $G_{ru}(s)$.

$$G_{ru}(s) = \frac{K_p}{1 + K_p G(s)} = \frac{K_p(s^2 + s/T)}{s^2 + s/T + K_p K/T} \rightarrow K_p \text{ då } s \rightarrow \infty$$

styrsignalens begynnelsevärde $u(0)$ vid ett referenssteg $r_0 \cdot \sigma(t)$

$$u(0) = \lim_{s \to \infty} s \cdot \frac{K_p(s^2+s/T)}{s^2+s/T+K_pK/T} \cdot \frac{r_0}{s} = K_p \cdot r_0$$

Med störning v $(r=0)$

$$G_{vy}(s) = \frac{G(s)}{1+K_p \cdot G(s)} = \frac{K/T}{s^2+s/T+K_pK/T} \to \frac{1}{K_p} \text{ då } s \to 0$$

$\Rightarrow$ Lågfrekventa störningar dämpas då K_p ökar.

Kvarstående fel vid stegstörning $v_0 \sigma(t)$

$$y(\infty) = \lim_{s \to 0} s \cdot \frac{K/T}{s^2+s/T+K_pK/T} \cdot \frac{v_0}{s} = \frac{v_0}{K_p}$$

minskar med ökande K_p.

Ex PD-reglering av samma motor:

$$F_{PD}(s) = K_p + K_d s, \quad G(s) = \frac{K/T}{s^2+s/T} \Rightarrow$$

$$G_{ry}(s) = \frac{(K_p+K_d s)\frac{K/T}{s^2+s/T}}{1+(K_p+K_d s)\cdot\frac{K/T}{s^2+s/T}} =$$

$$= \frac{K_pK/T + K_dK/T \cdot s}{s^2+(1+K_dK)\cdot s/T + K_pK/T} = \frac{rs+\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

$$\omega_n = \sqrt{K_pK/T} \qquad \zeta = \frac{1+K_dK}{2\sqrt{K_pKT}}$$

K_d ökar dämpningen $\Rightarrow$ Fasmarginalen ökar

K_p minskar dämpningen

Ex I-reglering av $G(s) = \frac{b}{s+a}$.

Vi vill ha Fasmarginalen $\varphi_m = 45^\circ$.

$$L(s) = F(s)\cdot G(s) = \frac{K_i \cdot b}{s(s+a)} \Rightarrow$$

$$L(j\omega) = \frac{K_i \cdot b}{j\omega(j\omega+a)}.$$ Bestäm $G_{ry}(s)$.

Bestäm först överkorsningsfrekvensen ω_c

Den ges av

$$\varphi_m = \arg L(j\omega_c) + 180^\circ \Rightarrow$$

$$45^\circ = -90^\circ - \arctan\frac{\omega_c}{a} + 180^\circ \Rightarrow$$

$$\arctan\frac{\omega}{a} = 45^\circ \Rightarrow \frac{\omega_c}{a} = 1 \Rightarrow \underline{\omega_c = a}$$

K_i ges av $|L(j\omega_c)| = 1 \Rightarrow$

$$L(j\omega_c) = \frac{K_i b}{ja(ja+a)} \Rightarrow |L(j\omega_c)| = \frac{K_i \cdot b}{a\cdot a\sqrt{2}}$$

$$|L(j\omega_c)| = 1 \Rightarrow \underline{K_i = \frac{a^2\sqrt{2}}{b}} \Rightarrow$$

$$L(s) = \frac{\frac{a^2\sqrt{2}}{b}\cdot b}{s(s+a)} = \frac{a^2\sqrt{2}}{s^2(s+a)} \Rightarrow$$

$$G_{ry}(s) = \frac{a^2\sqrt{2}}{s^2 + as + a^2\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$\omega_n = \sqrt{a^2\sqrt{2}} = a \cdot 2^{1/4} \approx \underline{1{,}19a}$$

$$\zeta = \frac{a}{2a \cdot 2^{1/4}} = \frac{1}{2^{1{,}25}} \approx 0{,}42$$

Sammanfattning:

P: ökar snabbhet, minskar stabilitetsmarginaler och ökar styrsignalaktivitet.

I: höjer lågfrekvensförstärkning, krävs för att eliminera kvarstående fel

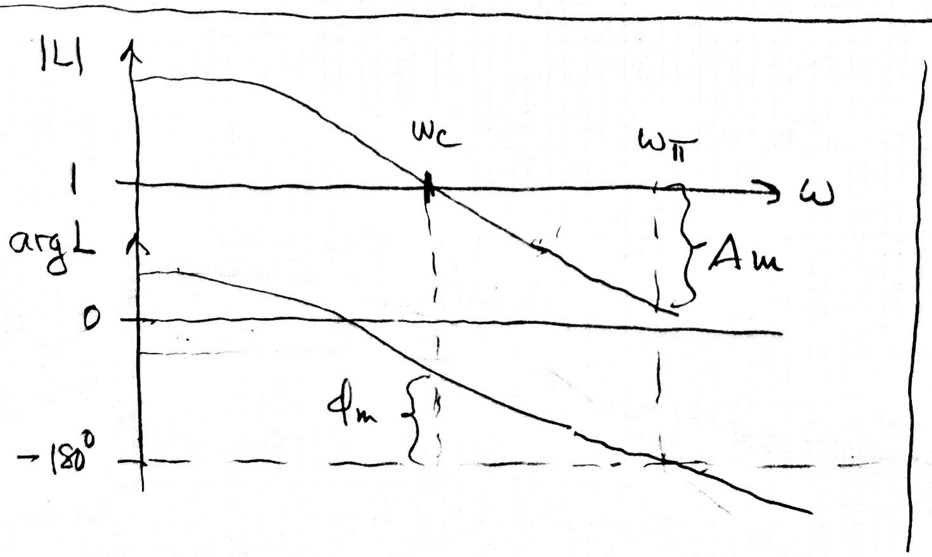
D: ger positivt bidrag till faskurvan vilket ökar stabiliteteten.

<u>Enkel dimensioneringsprincip</u>

Utgå från önskad ω_c och φ_m. Då gäller

- $|L(j\omega_c)| = 1 \Rightarrow |F(j\omega_c)| = \dfrac{1}{|G(j\omega_c)|}$
- $\varphi_m = \arg L(j\omega_c) + 180^\circ \iff$

$$\arg F(j\omega_c) = -180^\circ + \varphi_m - \arg G(j\omega_c) \qquad (*)$$



A_m = amplitudmarginal

φ_m = fasmarginal

$$\varphi_m = \arg L(j\omega_c) + 180^\circ$$

$$A_m = \frac{1}{|L(j\omega_\pi)|}$$

ω_π ges av $\arg G(j\omega_\pi) = -180^\circ$

Ex PI Ett system $G(s) = \dfrac{1}{s(s+8)^2}$ skall regleras så att kvarstående fel vid en stegstörning blir noll och fasmarginalen blir 50°. ω_c skall vara $0{,}3 \cdot \omega_\pi$. Bestäm regulator.

Lösning: Kvarstående fel vid stegstörning $= 0 \Rightarrow$ PI-regulator. Alltså

$$F(s) = K_i \cdot \frac{1+T_i s}{s} \Rightarrow F(j\omega) = K_i \cdot \frac{1+j\omega T_i}{j\omega}$$

Bestäm ω_π: $\arg G(j\omega) = -90^\circ - 2\arctan\frac{\omega}{8} \Rightarrow$

$$-90^\circ - 2 \cdot \arctan\frac{\omega_\pi}{8} = -180^\circ \Rightarrow 2\arctan\frac{\omega_\pi}{8} = 90^\circ$$

$$\arctan\frac{\omega_\pi}{8} = 45^\circ \Rightarrow \underline{\omega_\pi = 8 \text{ rad/s}} \Rightarrow$$

$$\omega_c = 0{,}3 \cdot 8 = \underline{2{,}4 \text{ rad/s}}$$

$$\arg G(j\omega_c) = -90^\circ - 2\arctan\frac{2{,}4}{8} = -123{,}4^\circ$$

$\varphi_m = \arg F(j\omega_c) + \arg G(j\omega_c) + 180^\circ$ och $\varphi_m = 50^\circ \Rightarrow$

$50^\circ = \arg F(j\omega_c) - 123{,}4^\circ + 180^\circ \Rightarrow$

$\arg F(j\omega_c) = -6{,}6^\circ \Rightarrow$

$-90^\circ + \arctan \omega_c \cdot T_i = -6{,}6^\circ$

$\arctan \omega_c \cdot T_i = 83{,}4^\circ \Rightarrow \omega_c T_i = 8{,}64$

$\Rightarrow T_i = \frac{8{,}64}{\omega_c} = \frac{8{,}64}{2{,}4} = \underline{3{,}6}$

$|L(j\omega_c)| = 1$ ger K_i:

$|F(j\omega_c)| \cdot |G(j\omega_c)| = 1 \Rightarrow$

$K_i \cdot \frac{\sqrt{1+8{,}64^2}}{2{,}4} \cdot \frac{1}{2{,}4\sqrt{2{,}4^2+8^2}^{\,2}} = 1$

$\underline{K_i = 46{,}2}$

$\underline{\underline{F(s) = 46{,}2 \cdot \frac{1+3{,}6s}{s}}}$