

Reglerteknik M3 och D3

Formelsamling

Oktober 2015

1 Linjära modeller för dynamiska system

Laplaceformen

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

Linjär differentialekvation

$$y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \dots + a_n y(t) = b_0 u^{(n)}(t) + b_1 u^{(n-1)}(t) + \dots + b_n u(t)$$

Överföringsfunktion

$$G(s) = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}$$

Viktfunktion ($Y(s) = G(s)U(s)$)

$$y(t) = \int_0^t g(\tau)u(t-\tau)d\tau$$

Tabell 1: Viktiga egenskaper för Laplaceformen

Superposition	$\mathcal{L}\{a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t)\} = a_1 Y_1(s) + a_2 Y_2(s)$
Derivering	$\mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} = sY(s) - y(0)$ $\mathcal{L}\{y^{(k)}\} = s^k Y(s) - s^{k-1}y(0) - s^{k-2}y^{(1)}(0) - \dots - y^{(k-1)}(0)$
Integration	$\mathcal{L}\left\{\int_0^t y(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{s}Y(s)$
Begynnelsevärdessatsen	$\lim_{t \rightarrow 0} y(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sY(s)$
Slutvärdessatsen	$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s)$ (Förutsättning: $y(\infty)$ existerar)
Fördröjningssatsen	$\mathcal{L}\{y(t-T)\sigma(t-T)\} = e^{-sT}Y(s)$
Dämpningssatsen	$\mathcal{L}\{e^{-at}y(t)\} = Y(s+a)$
Faltningintegralen	$\mathcal{L}\left\{\int_0^t y_1(\tau)y_2(t-\tau) d\tau\right\} = Y_1(s)Y_2(s)$

Tabell 2: Vanligt förekommande Laplacetransformpar

$y(t)$ ($y(t) = 0 \quad t < 0$)	$Y(s)$
$\delta(t)$	1
$\sigma(t) = 1$	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
$\frac{t^{m-1}e^{-at}}{(m-1)!}$	$\frac{1}{(s+a)^m}$
$1 - e^{-at}$	$\frac{a}{s(s+a)}$
$e^{-at} - e^{-bt}$	$\frac{b-a}{(s+a)(s+b)}$
$t - \frac{1}{a}(1 - e^{-at})$	$\frac{a}{s^2(s+a)}$
$1 - (1+at)e^{-at}$	$\frac{a^2}{s(s+a)^2}$
$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$

Tidsförlopp vid avvikelse från arbetspunkt

För ett dynamiskt (stabilt) system

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

gäller enligt slutvärdessatsen, då insignalen är konstant $u(t) = u_0$, att

$$y(t) \rightarrow y_0 = G(0)u_0$$

Då insignalen avviker från denna arbetspunkt, d.v.s. då $u(t) = u_0 + \Delta u(t)$, blir

$$\Delta Y(s) = G(s)\Delta U(s)$$

och

$$y(t) = y_0 + \Delta y(t) = G(0)u_0 + \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\Delta U(s)\}$$

Tidsdiskreta system

Z-transformen

$$F(z) = \mathcal{Z}\{f(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k}$$
$$\mathcal{Z}\{f(k-1)\} = z^{-1}F(z) - f(-1)$$

Pulsöverföringsfunktion ($Y(z) = H(z)U(z)$)

$$y(k) = \sum_{i=0}^k h(i)u(k-i)$$

Diskretisering av tillståndsmodell med styckvis konstant insignal:

$$x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k)$$
$$y(k) = Cx(k)$$

$$\Phi = e^{Ah} \quad \Gamma = \int_0^h e^{A\tau} B d\tau$$

Diskretisering:

$$s \rightarrow \frac{1-z^{-1}}{h} \quad (\text{Euler bakåt})$$

$$s \rightarrow \frac{z-1}{h} \quad (\text{Euler framåt})$$

$$s \rightarrow \frac{2}{h} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \quad (\text{Tustin})$$

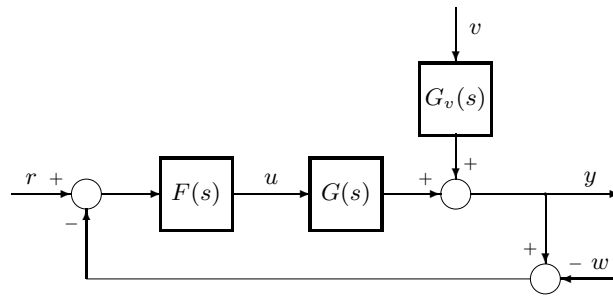
Översikt av tidskontinuerliga LTI-modeller

$$\begin{array}{ccc} a\left(\frac{d}{dt}\right)y(t) = b\left(\frac{d}{dt}\right)u(t) & \xrightarrow{\mathcal{L}} & a(s)Y(s) = b(s)U(s) \\ & & \downarrow G(s)=\frac{b(s)}{a(s)} \\ y(t) = \int_0^t g(\tau)u(t-\tau)d\tau & \xleftarrow{\mathcal{L}^{-1}} & Y(s) = G(s)U(s) \\ \uparrow g(t)=Ce^{At}B+D\delta(t) & & \uparrow G(s)=C(sI-A)^{-1}B+D \end{array}$$
$$\begin{array}{ccc} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) & \xrightarrow{\mathcal{L}} & sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) & & Y(s) = CX(s) + DU(s) \end{array}$$

Översikt av diskreta LTI-modeller

$$\begin{array}{ccc}
 a(q)y(k) = b(q)u(k) & \xrightarrow{\mathcal{Z}} & a(z)Y(z) = b(z)U(z) \\
 & & \downarrow H(z) = \frac{b(z)}{a(z)} \\
 y(k) = \sum_{i=0}^k h(i)u(k-i) & \xleftarrow{\mathcal{Z}^{-1}} & Y(z) = H(z)U(z) \\
 \uparrow h(k) = C\Phi^{k-1}\Gamma & & \uparrow H(z) = C(zI - \Phi)^{-1}\Gamma \\
 \\
 \begin{array}{l} x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k) \\ y(k) = Cx(k) \end{array} & \xrightarrow{\mathcal{Z}} & \begin{array}{l} zX(z) - x(-1) = \Phi X(z) + \Gamma U(z) \\ Y(z) = CX(z) \end{array} \\
 \\
 \Phi = e^{Ah} \uparrow \Gamma = \int_0^h e^{A\tau} B d\tau & & \\
 \\
 \begin{array}{l} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{array} & &
 \end{array}$$

Återkopplat system



Reglerfelet

$$e(t) = r(t) - y(t)$$

Kvarstående reglerfelet

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (r(t) - y(t))$$

Regulatorer

P-regulator

$$F(s) = K_p$$

PI-regulator

$$F(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right) = K_p + \frac{K_i}{s}$$

Kretsöverföring $L(s)$ = den öppna överföringsfunktion som erhålls då man går ett varv runt i återkopplingsslungan och multiplicerar med -1 . För ovanstående återkopplade system blir därför

$$L(s) = G(s)F(s)$$

2 Tillståndsmodeller

Linjär tillståndsmodell

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

Överföringsfunktion

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

Poler

$$\det(sI - A) = 0$$

Olinjär tillståndsmodell

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) \\ y(t) &= g(x(t), u(t))\end{aligned}$$

Linjärisering

Arbetspunkt (x_0, u_0, y_0)

$$\begin{aligned}\dot{x}_0 &= f(x_0, u_0) \quad (\text{oftast gäller att } \dot{x}_0 = 0) \\ y_0 &= g(x_0, u_0)\end{aligned}$$

Linjäriserad modell kring arbetspunkten

$$\begin{aligned}\Delta\dot{x}(t) &= A\Delta x(t) + B\Delta u(t) \\ \Delta y(t) &= C\Delta x(t) + D\Delta u(t)\end{aligned}$$

där

$$\Delta x(t) = x(t) - x_0, \quad \Delta u(t) = u(t) - u_0, \quad \Delta y(t) = y(t) - y_0$$

och

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_0, u_0)} \quad B = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{(x_0, u_0)} \quad C = \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{(x_0, u_0)} \quad D = \left. \frac{\partial g}{\partial u} \right|_{(x_0, u_0)}$$

De partiella derivatorna har följande elementvisa tolkning

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Tillståndstransformation $\xi = Tx$

$$\dot{\xi} = \bar{A}\xi + \bar{B}u$$

$$y = \bar{C}\xi + Du$$

$$\bar{A} = TAT^{-1}, \quad \bar{B} = TB, \quad \bar{C} = CT^{-1}$$

Från överföringsfunktion till tillståndsmodell

$$G(s) = \frac{b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1}s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n} + d$$

Styrbar kanonisk form

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_{n-1} \ b_n] x(t) + d u(t)$$

Observerbar kanonisk form

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ -a_{n-1} & 0 & 0 & & 1 \\ -a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [1 \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0] x(t) + d u(t)$$

$$G(s) = \frac{g_1}{s - p_1} + \dots + \frac{g_n}{s - p_n} + d = \sum_{i=1}^n \frac{g_i}{s - p_i} + d$$

Diagonalform

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & p_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & p_n \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_{n-1} \\ g_n \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [1 \ 1 \ \cdots \ 1 \ 1] x(t) + d u(t)$$

Tidssvar för linjär tillståndsmodeller

Lösning av tillståndsekvation för godtycklig insignal

$$x(t) = \Phi(t - t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t - \tau)Bu(\tau) d\tau$$

Övergångsmatrisen

$$\Phi(t) = e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\} = I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}$$

Några regler för övergångsmatrisen

$$\frac{d}{dt}\Phi(t) = A\Phi(t) \quad \Phi(0) = I$$

$$\Phi(t + \tau) = \Phi(\tau)\Phi(t)$$

Tillståndsuppdatering vid styckvis konstant insignal $u(kh + \tau) = u(kh)$, $0 \leq \tau < h$

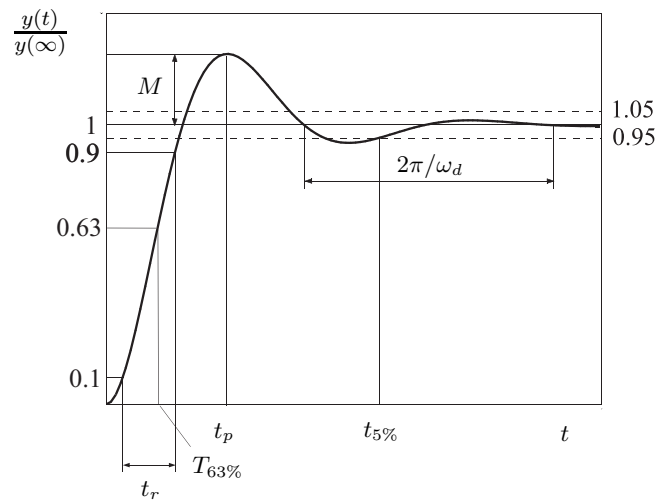
$$x(kh + h) = A_d x(kh) + B_d u(kh)$$

där

$$\begin{bmatrix} A_d & B_d \\ 0 & I \end{bmatrix} = \exp \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} h$$

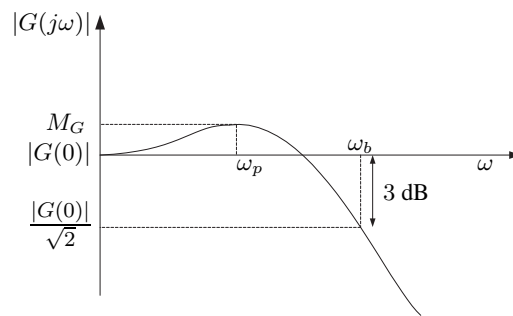
3 Tids- och frekvensanalys

Stegsvar



- *Stigtiden* t_r (rise time) = tiden det tar för utsignalen $y(t)$ att gå från 10% till 90% av dess slutvärde.
- *Insvängningstiden* $t_{5\%}$ = tiden då utsignalen $y(t)$ har svängt in innanför området $0.95y(\infty) < y(t) < 1.05y(\infty)$. Utsignalen får följaktligen ej hamna utanför detta område efter tiden $t_{5\%}$.
- *Ekvivalent tidskonstant* $T_{63\%}$ = tiden då utsignalen $y(t)$ nått 63% av dess slutvärde
- *Maximal relativ översläng* $M = \frac{\max(y(t)) - y(\infty)}{y(\infty)}$
- t_p = tiden då $\max(y(t))$ inträffar
- *Dämpad självsvängningsfrekvens* $\omega_d = 2\pi/T_p$ där T_p = periodtiden för den dämpade resonanssvängning som uppträder för system som har komplexkonjugerade poler.

Amplituddiagram



- *Maxvärde eller resonanstopp* $M_G = \max_{\omega} |G(j\omega)|$
- *Resonansfrekvens* ω_p = den frekvens vid vilken resonanstopp inträffar.
- *Bandbredd* ω_b = den frekvens vid vilken amplituden sjunkit ner en faktor $1/\sqrt{2}$ jämfört med lågfrekvensförstärkningen $|G(j0)|$, d.v.s.

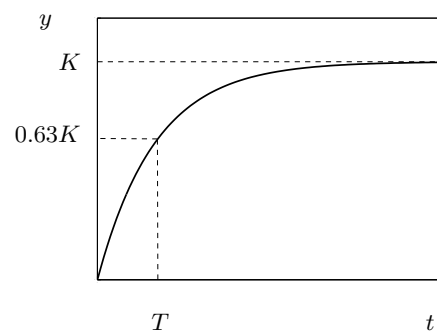
$$\frac{|G(j\omega_b)|}{|G(j0)|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = -3 \text{ dB}$$

Första ordningens system

$$G(s) = \frac{K}{1 + sT}$$

Stegsvar

$$y(t) = K(1 - e^{-t/T})$$



Stigtid	$t_r = 2.20T$
Insvängningstid	$t_{5\%} = 3.00T$
Ekvivalent tidskonstant	$T_{63\%} = T$
Bandbredd	$\omega_b = 1/T$

Andra ordningens system med komplexkonjugerade poler

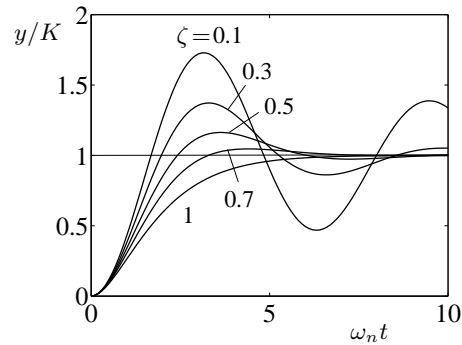
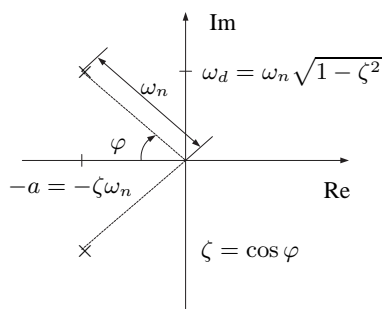
$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{K}{1 + 2\zeta s/\omega_n + (s/\omega_n)^2}$$

Poler

$$s = -a \pm j\omega_d \quad \text{där} \quad \begin{cases} a = \zeta\omega_n \\ \omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \end{cases}$$

Stegsvar

$$y(t) = K(1 - e^{-at} \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t + \varphi)) \quad \text{där} \quad \varphi = \arccos(\zeta)$$



Stigtid

$$t_r \approx (1 + 0.3\zeta + 2\zeta^2)/\omega_n$$

Insvängningstid

$$t_{5\%} \approx \frac{3}{a} \quad \zeta \leq 0.9$$

Max relativ översläng

$$M = e^{-\pi a/\omega_d} = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}$$

Bandbredd

$$\omega_b/\omega_n = \sqrt{1 - 2\zeta^2} + \sqrt{1 + (1 - 2\zeta^2)^2} \\ \approx 1.85 - 1.2\zeta \quad \text{då} \quad 0.4 \leq \zeta \leq 1$$

Resonansfrekvens

$$\omega_p = \begin{cases} \omega_n\sqrt{1-2\zeta^2} & 0 \leq \zeta < 1/\sqrt{2} \\ 0 & \zeta \geq 1/\sqrt{2} \end{cases}$$

Resonanstopp

$$M_G = \begin{cases} \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} & 0 < \zeta < \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & \zeta \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Bodediagram

decibel (dB)	=	$20 \log_{10} G(j\omega) $
oktav	=	frekvenskvot 1:2 eller 2:1
dekad	=	frekvenskvot 1:10 eller 10:1
lutning $[\pm m]$	=	$\pm m \cdot 20 \text{ dB/dekad}$
brytfrekvens ω_i	=	skärningspunkt för asymptoter

Bodediagram för första ordningens process

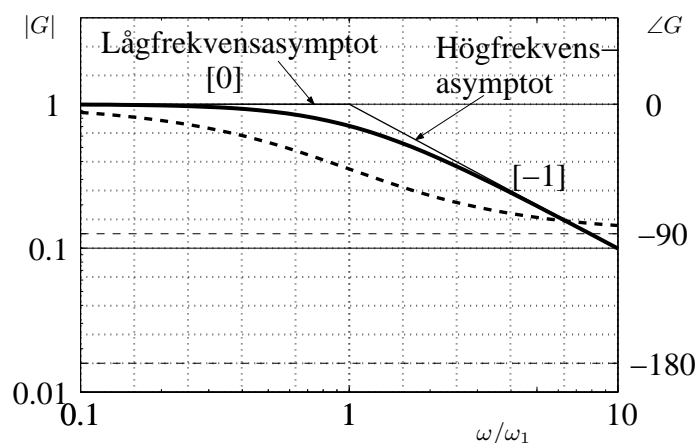
$$G(s) = \frac{1}{1 + s/\omega_1}$$

Korrektion av beloppsskurvan jämfört med asymptoten

ω	$\omega_1/4$	$\omega_1/2$	ω_1	$2\omega_1$	$4\omega_1$
Korrektion	$\frac{1}{\sqrt{1.0625}}$	$\frac{1}{\sqrt{1.25}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{1.25}}$	$\frac{1}{\sqrt{1.0625}}$
Korrektion _{dB}	-0.2 dB	-1.0 dB	-3 dB	-1.0 dB	-0.2 dB

Fasvridning

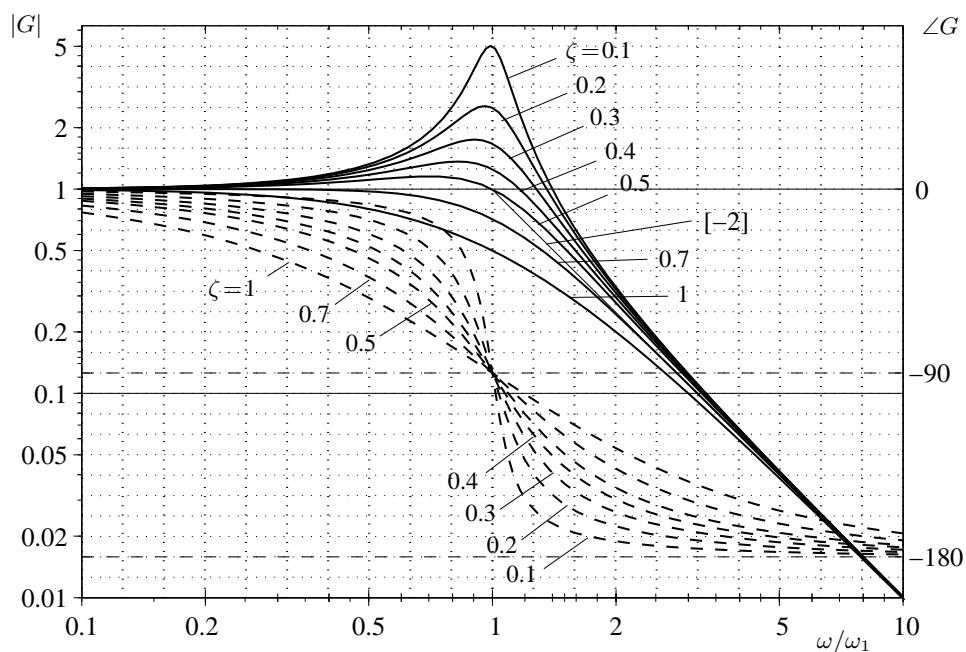
ω	$\omega_1/4$	$\omega_1/2$	ω_1	$2\omega_1$	$4\omega_1$
$\angle G(j\omega)$	-14°	-27°	-45°	-63°	-76°



Figur: Bodediagram, inklusive låg- och högfrequensasymptoterna, för överföringsfunktionen $G(s) = \frac{1}{1 + s/\omega_1}$. Belopp heldragen linje, fasvridning streckad linje. En ruta motsvarar 4 dB och 20° .

Bodediagram för andra ordningens resonant process

$$G(s) = \frac{1}{1 + 2\zeta s/\omega_1 + (s/\omega_1)^2}$$

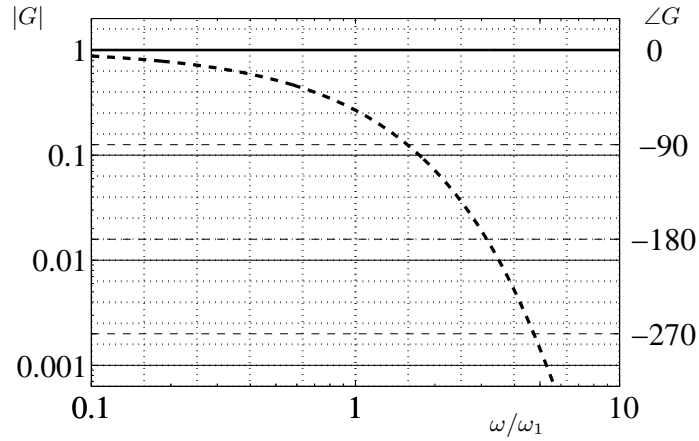


Figur: Bodediagram inklusive asymptoter för överföringsfunktionen $G(s) = \frac{1}{1 + 2\zeta s/\omega_1 + (s/\omega_1)^2}$. Belopp heldragen linje, fasvridning streckad linje. En ruta motsvarar 2 dB och 10° .

Bodediagram för dödtdidsprocess

$$G(s) = e^{-s/\omega_1}$$

ω	$\omega_1/4$	$\omega_1/2$	ω_1	$2\omega_1$	$4\omega_1$
$\angle G(j\omega)$	-14°	-29°	-57°	-115°	-229°



Figur: Bodediagram för överföringsfunktionen $G(s) = e^{-s/\omega_1}$. Belopp heldragen linje, fasvridning streckad linje. En ruta motsvarar 20° .

Padéapproximation av n:te ordningen

$$e^{-sT_d} \approx G_n(s)$$

$$G_1(s) = \frac{2 - sT_d}{2 + sT_d}$$

$$G_2(s) = \frac{12 - 6sT_d + (sT_d)^2}{12 + 6sT_d + (sT_d)^2}$$

$$G_3(s) = \frac{120 - 60sT_d + 12(sT_d)^2 - (sT_d)^3}{120 + 60sT_d + 12(sT_d)^2 + (sT_d)^3}$$

$$G_4(s) = \frac{1680 - 840sT_d + 180(sT_d)^2 - 20(sT_d)^3 + (sT_d)^4}{1680 + 840sT_d + 180(sT_d)^2 + 20(sT_d)^3 + (sT_d)^4}$$

4 Stabilitet och stabilitetsmarginaler

Stabilitetsdefinitioner

Givet att

$$a_0 y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \dots + a_n y(t) = f(t)$$

så gäller följande stabilitetsdefinitioner.

System utan insignal ($f \equiv 0$)

- *Asymptotisk stabil*: Om $y(t) \rightarrow 0$ då $t \rightarrow \infty$ för alla begynnelsestillstånd.
- *Stabil*: Då $y(t)$ är begränsad för alla begynnelsestillstånd.
- *Instabil*: Om det finns något begynnelsevärde som ger ett obegränsat y .

Systemet med insignal ($f \neq 0$)

Ett dynamiskt system är insignal-utsignal stabilt om *alla* begränsade insignaler medför att även utsignalen är begränsad. Ett asymptotiskt stabilt system är insignal-utsignalstabilt.

Stabilitetskriterier

Då ett dynamiskt system beskrivs av

$$a_0 y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \dots + a_n y(t) = f(t)$$

så ges den karakteristiska ekvationen av

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

Stabiliteten för systemet kan avgöras med hjälp av följande kriterier:

- Då det för alla rötter, λ_i , gäller att $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$ så är systemet asymptotiskt stabilt.
- Om det finns något λ_i så att $\operatorname{Re} \lambda_i > 0$ så är systemet instabilt.
- Om alla rötter uppfyller $\operatorname{Re} \lambda_i \leq 0$ och eventuella rent imaginära rötter är enkla så är systemet stabilt.

Routh-Hurwitz' stabilitetskriterium

Då den karakteristiska ekvationen är

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + a_3\lambda^{n-3} + \dots + a_n = 0$$

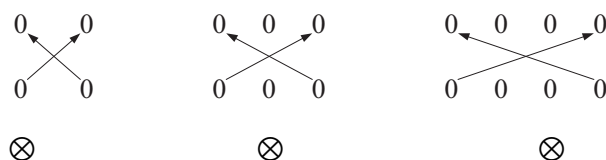
kan stabiliteten avgöras med hjälp av följande tablå.

λ^n	a_0	a_2	a_4	$a_6 \dots$
λ^{n-1}	a_1	a_3	a_5	$a_7 \dots$
λ^{n-2}	c_0	c_1	$c_2 \dots$	
λ^{n-3}	d_0	d_1	$d_2 \dots$	
\cdot	\cdot			
\cdot	\cdot			
λ^0				

där

$$c_0 = \frac{a_1 a_2 - a_3 a_0}{a_1} \quad c_1 = \frac{a_1 a_4 - a_5 a_0}{a_1} \quad d_0 = \frac{c_0 a_3 - c_1 a_1}{c_0} \quad \text{etc}$$

Observera mönstret för de korsvisa produkterna:



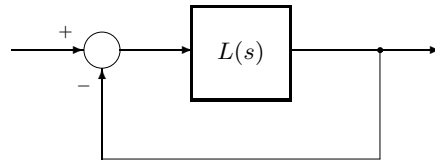
Tomrum längst till höger i tablå fylls ut med nollor. Koefficienter genereras tills man får $n + 1$ rader i tablåns första kolumn.

Stabilitetsvillkor: (förutsatt $a_0 > 0$)

Nödvändigt men ej tillräckligt stabilitetsvillkor: Alla koefficienterna i karakteristiska ekvationen är strikt positiva.

Nödvändigt och tillräckligt stabilitetsvillkor: Alla koefficienterna i tablåns första kolumn (a_0, a_1, c_0, \dots) är strikt positiva.

Stabilitet för återkopplade system



Kretsöverföringen $L(s)$ = överföringsfunktionen då man går ett varv runt i återkopplingsslingan och multiplicerar med -1 , se ovanstående figur.

Karakteristisk ekvation för ett återkopplat system med kretsöverföring $L(s)$

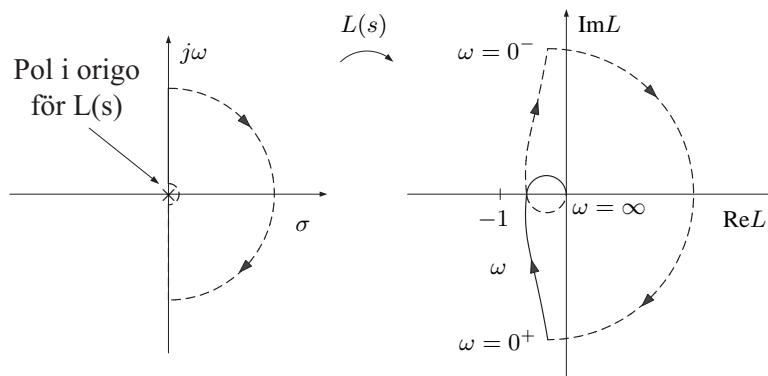
$$1 + L(s)$$

Då $L(s) = B_L(s)/A_L(s)$ blir karakteristiska ekvationen

$$A_L(s) + B_L(s) = 0$$

Nyquistkriteriet

Nyquist kontur i s -planet samt avbildning av Nyquists kontur i $L(s)$ - planet.



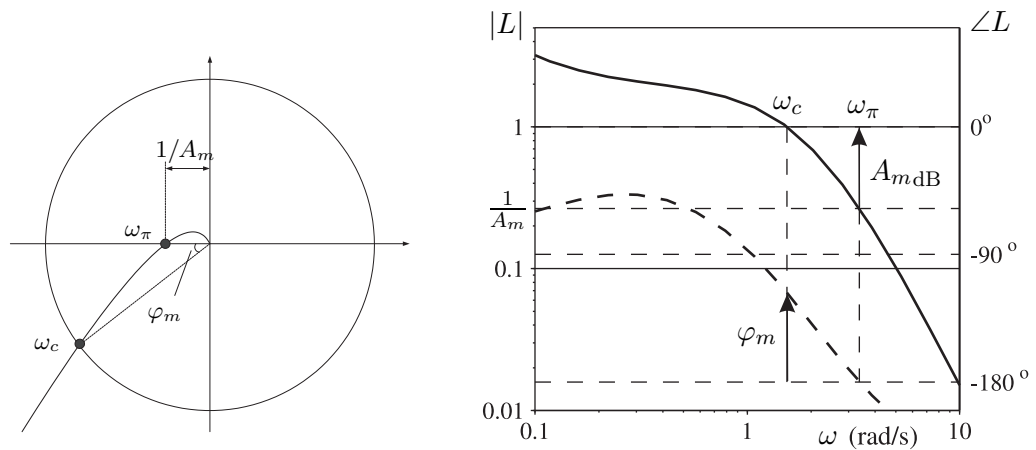
Stabilitetsvillkor: $Z = P + N = 0$ ger ett stabilt återkopplat system

- Z = antalet nollställen i högra halvplanet för $1 + L(s)$
- P = antalet poler i högra halvplanet för $L(s)$
- N = antalet varv i medurs riktning som $L(s)$ -kurvan omsluter punkten $(-1, 0)$

Nyquists förenklade kriterium

Då kretsöverföringen $L(s)$ inte har några poler i högra halvplanet är det återkopplade systemet stabilt om man går utefter kurvan $L(j\omega)$ från $\omega = 0$ till $\omega = \infty$ och finner att punkten $(-1, 0)$ hamnar till vänster om kurvan. Plotten $L(j\omega)$ från $\omega = 0$ till $\omega = \infty$ kallas för ett *förenklat Nyquistdiagram*.

Fas- och amplitudmarginaler



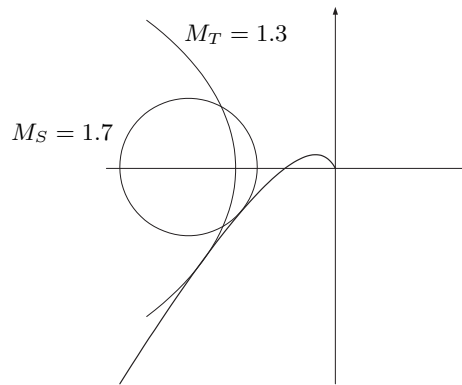
Fasmarginal

$$\varphi_m = \angle L(j\omega_c) - (-180^\circ) \quad \text{där} \quad |L(j\omega_c)| = 1$$

Amplitudmarginal

$$A_m = \frac{1}{|L(j\omega_\pi)|} \quad \text{där} \quad \angle L(j\omega_\pi) = -180^\circ$$

Maximala känslighetsfunktioner



Känslighetsfunktion

$$S(s) = \frac{1}{1 + L(s)}$$

Komplementär känslighetsfunktion

$$T(s) = 1 - S(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)}$$

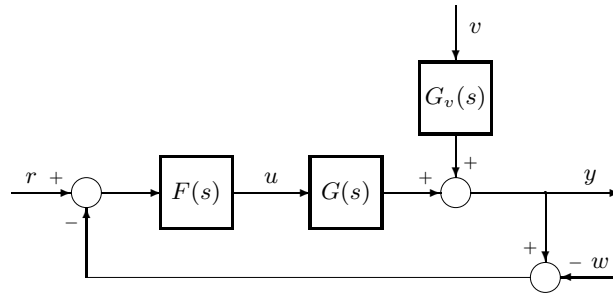
$$M_S = \max_{\omega} |S(j\omega)| \quad \text{och} \quad M_T = \max_{\omega} |T(j\omega)|$$

innebär att kretsöverföringen inte passerar innanför en cirkel med medelpunkt i $(-1, 0)$ och radie $1/M_S$, medan måttet M_T motsvarar resonanstoppen för $T(s)$.

$$\min(M_S, M_T) \geq \frac{1}{2 \sin \frac{\varphi_m}{2}} \quad M_S \geq \frac{A_m}{A_m - 1}$$

$$\varphi_m \geq 2 \arcsin \frac{1}{2 \min(M_S, M_T)} \quad A_m \geq \frac{M_S}{M_S - 1}$$

5 Principer för dimensionering av regulatorer



Känslighetsfunktioner

Kretsöverföring

$$L(s) = G(s)F(s)$$

Känslighetsfunktion

$$S(s) = \frac{1}{1 + L(s)} = G_{re}(s)$$

Relation mellan öppen styrning och återkopplad reglering

$$Y_{ol}(s) = G_v(s)V(s) \quad Y_{cl}(s) = S(s)G_v(s)V(s)$$

innebär att

$$Y_{cl}(s) = S(s)Y_{ol}(s)$$

Komplementär känslighetsfunktion

$$T(s) = 1 - S(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)}$$

Störkänslighetsfunktion

$$G_v(s)S(s) = \frac{G_v(s)}{1 + L(s)}$$

Styrkänslighetsfunktion

$$F(s)S(s) = \frac{F(s)}{1 + L(s)} = \frac{T(s)}{G(s)}$$

Återkopplat system

$$\begin{aligned} Y(s) &= G_{ry}(s)R(s) + G_{vy}(s)V(s) + G_{wy}(s)W(s) \\ &= T(s)R(s) + G_v(s)S(s)V(s) + T(s)W(s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U(s) &= G_{ru}(s)R(s) + G_{vu}(s)V(s) + G_{wu}(s)W(s) \\ &= F(s)S(s)R(s) - F(s)S(s)G_v(s)V(s) + F(s)S(s)W(s) \end{aligned}$$

6 Dimensionering av PID-regulatorer

Dimensionering baserat på önskad fasmarginal

Villkoren

$$|L(j\omega_c)| = 1 \quad \text{och} \quad \angle L(j\omega_c) = -180^\circ + \varphi_m$$

där önskad överkorsningsfrekvens ω_c och fasmarginal φ_m antas givna, ger följande krav på regulatorn

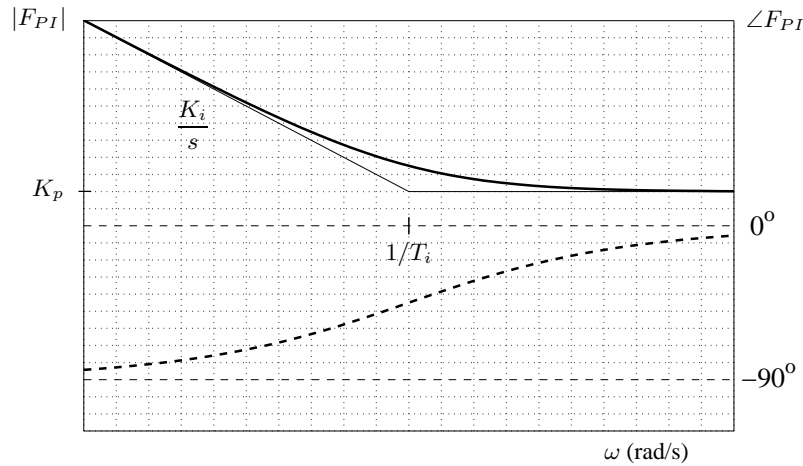
$$|F(j\omega_c)| = \frac{1}{|G(j\omega_c)|}$$

$$\angle F(j\omega_c) = -180^\circ + \varphi_m - \angle G(j\omega_c)$$

PI-regulator

$$F_{PI}(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right) = K_i \frac{1 + T_i s}{s} \quad \text{där} \quad K_i = \frac{K_p}{T_i}$$

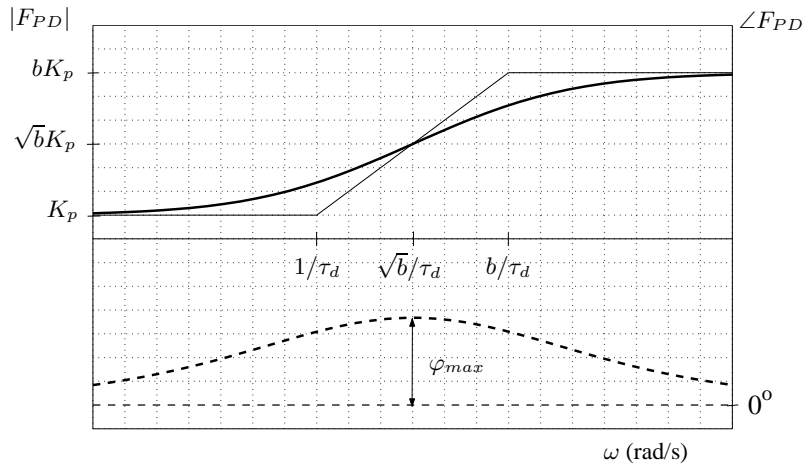
Bodediagram för PI-regulatorn



PD-regulator

$$F_{PD}(s) = K_p \left(1 + \frac{T_d s}{1 + T_f s} \right) = K_p \frac{1 + s\tau_d}{1 + s\tau_d/b} \quad b > 1$$

Bodediagram för PD-regulatorn



Då PD-regulatorns maximala faslyft φ_{max} placeras vid önskad överkorsningsfrekvens ω_c gäller att

$$b = \frac{1 + \sin \varphi_{max}}{1 - \sin \varphi_{max}}$$

$$\tau_d = \sqrt{b}/\omega_c$$

PID-regulator

$$F_{PID}(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{1 + T_f s} \right) = K_i \frac{1 + 2\zeta s\tau + (s\tau)^2}{s(1 + s\tau/\beta)}$$

Den första formuleringen används normalt vid realisering, medan den andra utnyttjas vid dimensionering. Följande samband råder

$$T_f = \frac{\tau}{\beta} \quad T_i = 2\zeta\tau - T_f \quad T_d = \frac{\tau^2}{T_i} - T_f \quad K_p = K_i T_i.$$

Ziegler-Nichols självsvängningsmetod

Ställ in regulatorparametrarna, K_p , T_i och T_d , genom att göra ett experiment och sedan använda tumregler.

$$F_{PID}(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{1 + T_f s} \right)$$

1. PID-regulatorn ställs in som en P-regulator ($T_i = \infty, T_d = 0$).
2. Förstärkningen K_p höjs tills stabilitetsgränsen uppnås.
3. Låt $K_0 = K_p$ och notera självsvängningens periodtid T_0 . Analytiskt $K_0 G(j\omega_{\pi_{proc}}) = -1$, där $T_0 = 2\pi/\omega_{\pi_{proc}}$
4. Parametrar enligt tabell

Regulatortyp	Parameter		
	K_p	T_i	T_d
P-regulator	$0.5K_0$	-	-
PI-regulator	$0.45K_0$	$0.85T_0$	-
PID-regulator	$0.6K_0$	$0.5T_0$	$0.125T_0$

5. T_f väljs oftast som $T_f = T_d/10$.

7 Frekvensanalys

7.1 Fourierserier

En periodisk funktion f som har perioden T kan approximeras som

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n2\pi t}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{n2\pi t}{T}\right) \right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{2n\pi t}{T}},$$

där koefficienterna ges av

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos\left(\frac{n2\pi t}{T}\right) dt, \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin\left(\frac{n2\pi t}{T}\right) dt, \\ c_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i\frac{2n\pi t}{T}} dt. \end{aligned}$$

7.2 Fouriertransformen

För icke-periodiska funktioner kan Fouriertransformen av funktionen f beräknas som

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Den inversa Fouriertransformen beräknas enligt

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Filter

Butterworthfiltret:

$$|H(i\omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\frac{\omega}{\omega_c})^{2n}}$$

$$p_k = \omega_c \cdot e^{i(\pi/2 + \pi/(2n) + \pi(k-1)/n)}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

Transformationer:

$$\text{LP} \rightarrow \text{LP} : \quad s \rightarrow s/\omega_c$$

$$\text{LP} \rightarrow \text{HP} : \quad s \rightarrow \omega_c/s$$

$$\text{LP} \rightarrow \text{BP} : \quad s \rightarrow \frac{s^2 + \omega_L \omega_H}{s(\omega_H - \omega_L)} = \frac{s^2 + \omega_M^2}{Bs}$$

$$\text{LP} \rightarrow \text{BS} : \quad s \rightarrow \frac{s(\omega_H - \omega_L)}{s^2 + \omega_L \omega_H} = \frac{Bs}{s^2 + \omega_M^2}$$

Tidsdiskreta filter:

$$y(t) = \frac{1}{n}(x(t) + x(t-1) + \dots + x(t-n+1)) \quad (\text{MA-filter})$$

$$y(t) = \alpha y(t-1) + (1-\alpha)x(t) \quad (\text{exponentialfilter})$$

Diskretisering och implementering

Diskretisering av tillståndsmodell med styckvis konstant insignal:

$$x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k)$$

$$y(k) = Cx(k)$$

$$\Phi = e^{Ah} \quad \Gamma = \int_0^h e^{A\tau} B d\tau$$

Diskretisering:

$$s \rightarrow \frac{1 - z^{-1}}{h} \quad (\text{Euler bakåt})$$

$$s \rightarrow \frac{z - 1}{h} \quad (\text{Euler framåt})$$

$$s \rightarrow \frac{2}{h} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad (\text{Tustin})$$