ERE103

Reglerteknik D

Matematikrepetition

2019

Torsten Wik, Knut Åkesson
(anpassning för D av Bo Egardt)

I detta häfte sammanfattas de för kursen viktigaste matematiska begreppen. God förtrogenhet med dessa begrepp är nödvändigt för att tillgodogöra sig innehållet i reglerteknikkursen. Längst bak i häftet finns instuderingsfrågor som du kan använda för att identifiera vilka begrepp och metoder som du behöver repetera.

Avdelningen för system- och reglerteknik
Institutionen för elektroteknik
Chalmers Tekniska Högskola

1 Komplexa tal

Det imaginära talet i definieras av $\boxed{i^2 = -1}$.

Låt $\quad z = a + ib$

Realdel:

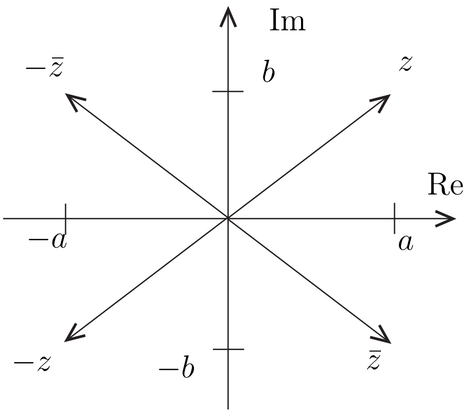
$$Re\{z\} = a$$

Imaginärdel:

$$Im\{z\} = b$$

Komplexkonjugat:

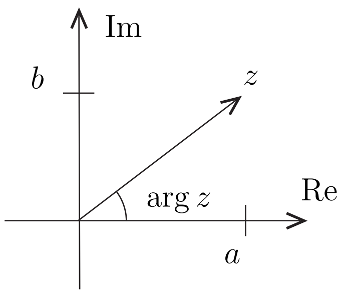
$$\begin{aligned} \bar{z} &= Re\{z\} - iIm\{z\} \\ &= a - ib \end{aligned}$$



z kan ses som en vektor i planet, se figuren ovan. *Beloppet* av z ger vektorns längd:

$$|z| = \sqrt{Re\{z\}^2 + Im\{z\}^2} = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{(Pythagoras)}$$

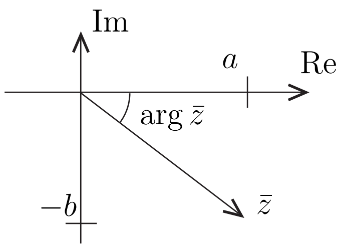
OBS: $z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = |z|^2$



Argumentet av ett komplext tal anger vinkeln till positiva realaxeln:

$$\arg z = \text{atan}\frac{b}{a} \qquad \text{(se figur)}$$

Ibland används beteckningen $\angle z$ istället för $\arg z$.



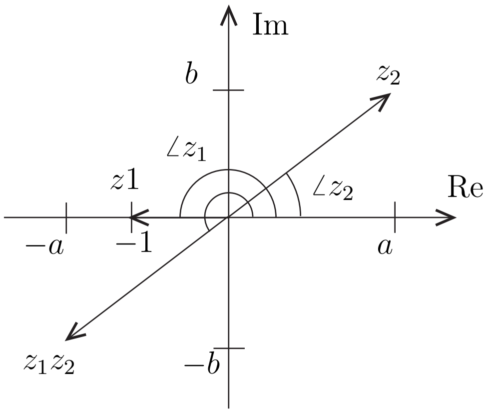
Argumentet (vinkeln) kan uttryckas som ett negativt tal:

$$\angle\bar{z} = \arg\bar{z} = \text{atan}\frac{-b}{a} = -\text{atan}\frac{b}{a}$$

Om $z_1, z_2 \in \mathcal{C}$, d v s z_1 och z_2 ingår i mängden av alla komplexa tal gäller

$$\begin{aligned} |z_1 z_2| &= |z_1||z_2| \\ \arg z_1 z_2 &= \arg z_1 + \arg z_2 \end{aligned}$$

Låt t ex $z_1 = -1$ och $z_2 = z = a + ib \quad \Rightarrow \quad z_1 z_2 = -a - ib = -z$



$$
\begin{aligned}
\arg z_1 z_2 &= \arg(-1) + \arg(a + ib) \\
&= \pi + \operatorname{atan}\frac{b}{a} \\
\text{eller} &= 180^\circ + \operatorname{atan}\frac{b}{a}
\end{aligned}
$$

Eftersom ett helt varv är 2π (360°) kan vi dra ifrån detta (eller lägga till) och får

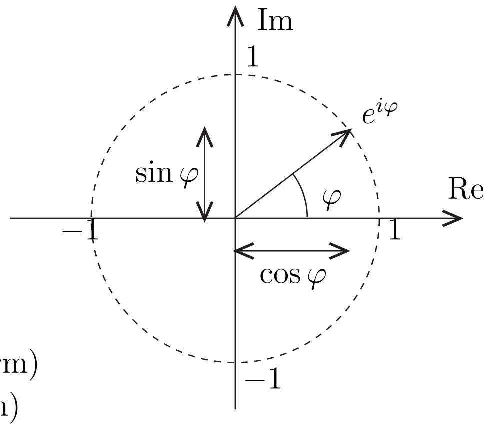
$$
\begin{aligned}
\arg z_1 z_2 &= -\pi + \operatorname{atan}\frac{b}{a} \\
\text{eller} &= -180^\circ + \operatorname{atan}\frac{b}{a}
\end{aligned}
$$

Vi definierar

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

Pythagoras sats ger

$$|e^{i\varphi}| = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = 1$$



Vi kan alltså ange ett komplext tal på två sätt:

$$
z = \begin{cases} Re\{z\} + iIm\{z\} & \text{(Summaform)} \\ |z|e^{i\angle z} & \text{(Polär form)} \end{cases}
$$

Att de två formerna är samma komplexa tal z ser vi t ex av

$$
\begin{aligned}
||z|e^{i\angle z}| &= |z|\underbrace{|e^{i\angle z}|}_{=1} = |z| \\
\arg(|z|e^{i\angle z}) &= \underbrace{\arg|z|}_{=0} + \arg(e^{i\angle z}) = \arg z
\end{aligned}
$$

M h a den polära formen visar vi enkelt reglerna för kvoter av komplexa tal. Låt $z_1 = r_1 e^{\varphi_1}$ och $z_2 = r_1 e^{\varphi_2}$. Kvoten kan då skrivas

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

vilket ger

$$
\begin{aligned}
|\frac{z_1}{z_2}| &= \frac{r_1}{r_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \\
\arg(\frac{z_1}{z_2}) &= \varphi_1 - \varphi_2 = \arg z_1 - \arg z_2
\end{aligned}
$$

2 Polynomekvationer

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0$$

Enligt algebrans fundamentalsats har denna ekvation *precis* n *entydigt* bestämda rötter (lösningar), d v s samma antal som gradtalet. Om vi kallar rötterna för $z_1, z_2, \ldots z_n$ kan alltså polynomekvationen skrivas

$$a_n(z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_n) = 0$$

eftersom det är uppenbart att $z_1, z_2, \ldots z_n$ då är lösningarna till ekvationen.

Exempel:

$$z^2 + 3z + 2 = (z + 2)(z + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad z_1 = -2, \quad z_2 = -1$$

Exempel:

$$z^2 + 2z + 1 = (z + 1)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z + 1 = \pm 0$$

$$\Leftrightarrow \quad z_1 = -1, \quad z_2 = -1, \quad \text{d v s dubbelrot i } -1$$

Exempel:

$$z^4 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad (z^2)^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad z^2 = \pm 1$$

$$z^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} z_1 & = & 1 \\ z_2 & = & -1 \end{cases}$$

$$z^2 = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} z_2 & = & i \\ z_4 & = & -i \end{cases}$$

Alltså är $\quad z^4 - 1 = (z - 1)(z + 1)(z - i)(z + i).$

Inom reglertekniken är nästan alltid polynomets koefficienter a_i reella ($a_i \in \mathcal{R}$). Då gäller att om en rot är komplex är även dess konjugat en rot, d v s

om $z = a + ib$ är en rot *måste* även $\bar{z} = a - ib$ vara en rot.

Som en följd gäller att om n är udda måste ett udda antal rötter vara reella.

3 Partialbråksuppdelning

Anta att vi har en rationell funktion (en kvot av två polynom) $B(s)/A(s)$ där $B(s)$ har lägre gradtal än $A(s)$ och där nämnaren $A(s)$ är faktoriserad så långt som möjligt i reella faktorer enligt följande tabell.

Faktor i nämnare	Ger upphov till partialbråk
$s-\alpha$	$\dfrac{A_1}{s-\alpha}$
$(s-\alpha)^n$	$\dfrac{A_1}{s-\alpha}+\dfrac{A_2}{(s-\alpha)^2}+\cdots+\dfrac{A_n}{(s-\alpha)^n}$
s^2+as+b	$\dfrac{B_1 s+C_1}{s^2+as+b}$
$(s^2+as+b)^n$	$\dfrac{B_1 s+C_1}{s^2+as+b}+\dfrac{B_2 s+C_2}{(s^2+as+b)^2}+\cdots+\dfrac{B_n s+C_n}{(s^2+as+b)^n}$

Genom att sätta samtliga partialbråk på gemensam nämnare får man ett ekvationssystem med en entydig lösning.

Exempel:

$$\begin{aligned}\frac{2s^2+s-3}{(s+1)^2(s+2)} &= \frac{A_1}{s+1}+\frac{A_2}{(s+1)^2}+\frac{A_3}{s+2}\\ &= \frac{A_1(s+1)(s+2)+A_2(s+2)+A_3(s+1)^2}{(s+1)^2(s+2)}\\ &= \frac{(A_1+A_3)s^2+(3A_1+A_2+2A_3)s+(2A_1+2A_2+A_3)}{(s+1)^2(s+2)}\end{aligned}$$

Identifieraing av koefficienterna i täljaren och lösning av ekvationssystemet med t ex succesiv eliminering ger

$$\left\{\begin{array}{rcl} A_1+A_3 &=& 2\\ 3A_1+A_2+2A_3 &=& 1\\ 2A_1+2A_2+A_3 &=& -3\end{array}\right. \quad\Rightarrow\quad \left\{\begin{array}{rcl} A_1 &=& -1\\ A_2 &=& -2\\ A_3 &=& 3\end{array}\right.$$

I fallet att vi bara har enkla nollställen till nämnaren kan man använda handpåläggning, som illustreras med ett exempel:

$$F(s)=\frac{-2s^2+3s-4}{s(s+1)(s-2)}=\frac{A_1}{s}+\frac{A_2}{s+1}+\frac{A_3}{s-2}$$

$$\begin{aligned} sF(s) &= A_1+s\left(\frac{A_2}{s+1}+\frac{A_3}{s-2}\right) &&\Rightarrow\quad A_1=(sF(s))_{s=0}=2\\ (s+1)F(s) &= A_2+(s+1)\left(\frac{A_1}{s}+\frac{A_3}{s-2}\right) &&\Rightarrow\quad A_2=((s+1)F(s))_{s=-1}=3\\ (s-2)F(s) &= A_3+(s-2)\left(\frac{A_1}{s}+\frac{A_2}{s+1}\right) &&\Rightarrow\quad A_3=((s-2)F(s))_{s=2}=-1\end{aligned}$$

4 Linjär algebra

Låt A vara en 3×3 matris (3 rader $\times$ 3 kolonner) och v vara en 3×2 matris. Då är

$$\begin{aligned} Av &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \\ v_{31} & v_{32} \end{bmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11}v_{11} + a_{12}v_{21} + a_{13}v_{31} & a_{11}v_{12} + a_{12}v_{22} + a_{13}v_{32} \\ a_{21}v_{11} + a_{22}v_{21} + a_{23}v_{31} & a_{21}v_{12} + a_{22}v_{22} + a_{23}v_{32} \\ a_{31}v_{11} + a_{32}v_{21} + a_{33}v_{31} & a_{31}v_{12} + a_{32}v_{22} + a_{33}v_{32} \end{bmatrix}}_{3\times 2 \text{ vektor}} \end{aligned}$$

Allmänt gäller för dimensionerna vid matrismultiplikation att

$$\underbrace{[n \times m]}_{A}\underbrace{[m \times p]}_{B} = \underbrace{[n \times p]}_{C}$$

Elementet i rad i och kolonn j hos C är

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj},$$

d v s rad i hos A multiplicerad med kolonn j hos B.

Determinant

Determinanten för en kvadratisk matris är en skalär. För en (2×2)-matris A är determinanten t ex

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

För en (3×3)-matris A kan determinanten bestämmas med Sarrus regel:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

För en godtyckligt stor $(n \times n)$-matris A är determinanten

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} D_{ij}$$

där vi kan välja godtycklig rad i i matrisen A (genom att $\det A = \det A^T$ kan vi istället välja en kolmn j och summera över rader om det förenklar). Faktorn $(-1)^{i+j}$

kan vi tolka ur "tecken-matrisen"

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

D_{ij} är underdeterminanten till elementet a_{ij}, vilket är determinanten för den matris man får om rad i och kolonn j stryks i A-matrisen. T ex för $A = [4 \times 4]$ är

$$D_{32}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

Detta kan man sedan upprepa tills man har (3×3)-matriser och kan använda Sarrus regel.

Exempel

$$\begin{aligned} \det\begin{bmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c & d \\ 0 & e & f & 0 \\ 0 & g & h & i \end{bmatrix} &= -e\det\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ 0 & c & d \\ 0 & h & i \end{bmatrix} + f\det\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d \\ 0 & g & i \end{bmatrix} \\ &= -e(aci - adh) + f(-adg) = -acei + adeh - adfg \end{aligned}$$

där vi valt att summera över rad 3. Enklast summerar vi dock över kolumn 1:

$$a\det\begin{bmatrix} 0 & c & d \\ e & f & 0 \\ g & h & i \end{bmatrix} = a(deh - cei - dfg) = adeh - acei - adfg$$

Invers

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Krav: } \begin{cases} A \text{ kvadratisk} \\ \text{alla kolonner i } A \text{ linjärt oberoende} \end{cases}$$

Linjärt oberoende kolonner innebär att ingen kolonn kan åstadkommas genom att multiplicera de andra kolonnerna med tal och sedan summera dem. Följande gäller alltid:

Antalet linjärt oberoende rader är alltid det samma som antalet linjärt oberoende kolonner

Vi kan alltså lika gärna kolla om alla rader i en matris är linjärt oberoende. Följande gäller också:

Om $\det A \neq 0$ *så är alla rader/kolonner linjärt oberoende och* A^{-1} *existerar*

Om A^{-1} existerar har ekvationssytemet

$$Ax = b \quad \text{den } \textit{entydiga} \text{ lösningen} \quad x = A^{-1}b$$

Inversen kan bestämmas med (observera "transponeringen")

$$[A^{-1}]_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} D_{ji}}{\det A}$$

För en (2×2)-matris är inversen

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

Egenvärde och egenvektorer

Egenvärdena λ till en kvadratisk matris A definieras av

$$Av = \lambda v, \quad v \neq 0$$

där kolonnvektorn v är den egenvektor som hör till egenvärdet. Egenvärdena ges av polynomekvationen

$$P(\lambda) = \det(\lambda I - A) = 0$$

där $P(\lambda)$ blir ett polynom av samma grad som dimensionen på A. M a o hör det till matrisen lika många egenvärden med tillhörande egenvektorer som dimensionen på A.

5 Taylorutveckling

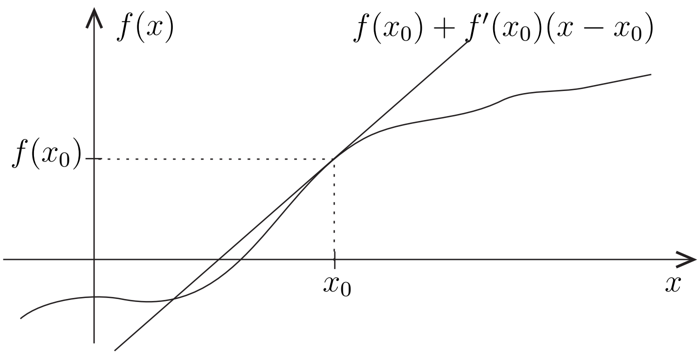
Om x är en skalär variabel och $f(x)$ är en oändligt många gånger deriverbar skalär funktion kan vi Taylorutveckla kring $x = x_0$ så att:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)\frac{(x - x_0)^2}{1 \cdot 2} + f^{(3)}(x_0)\frac{(x - x_0)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots \\ &= f(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}(x_0)\frac{(x - x_0)^n}{n!} \end{aligned}$$

Ju fler termer man tar med i serien desto bättre approximerar man $f(x)$. Om $x - x_0$ är litet i förhållande till hur stora de högre derivatorna hos f är kan man försumma alla högre ordningens termer (2 och uppåt) i serien och får

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

som är en god approximation när vi befinner oss nära x_0 (se figur). Detta kallas en *linjärisering* av $f(x)$ kring x_0.



5.1 Funktioner av flera variabler

Funktioner av flera variabler ingår inte i D-programmets matematikkurser. Detta är en sammanfattning av vad som tas upp i reglerteknikkursen för användning i samband med tillståndsmodeller.

Ofta har vi anledning att studera skalära funktioner av *flera* variabler $f(z_1, z_2, \ldots, z_k)$ (vi har här bytt namn på de oberoende variablerna av skäl som framgår senare). I fallet $k = 2$ kan vi åskådliggöra funktionen f i ett tredimensionellt koordinatsystem: (z_1, z_2) bestämmer en punkt i planet som motsvarar de två första koordinataxlarna, och $f(z_1, z_2)$ utgör den tredje koordinaten. Funktionen $f(z_1, z_2)$ beskriver på detta sätt en *yta* i rummet.

På samma sätt som derivatan $f'(x)$ beskriver hur funktionen ändras nära x, så kan man definiera *partiella derivator*, som beskriver hur $f(z_1, z_2)$ ändras om vi förflyttar oss längs koordinataxlarna z_1 respektive z_2. De partiella derivatorna betecknas $\frac{\partial f}{\partial z_1}$ respektive $\frac{\partial f}{\partial z_2}$ och fås genom att derivera funktionen med avseende på respektive variabel, under det att övriga variabler betraktas som *konstanter*.

Exempel:

$$f(z_1, z_2) = 2z_1 + z_2^2 + 3z_1 z_2, \quad \frac{\partial f}{\partial z_1} = 2 + 3z_2, \quad \frac{\partial f}{\partial z_2} = 2z_2 + 3z_1$$

I punkten $(z_1, z_2) = (1, 0)$ fås alltså $\frac{\partial f}{\partial z_1} = 2$ och $\frac{\partial f}{\partial z_2} = 3$.

Ovanstående kan generaliseras till flera oberoende variabler, $f(z_1, z_2, \dots, z_k)$. Dessutom har vi användning för *vektorvärda* funktioner, dvs där vi "staplar" flera skalära funktioner $f_1, f_2, \dots, f_n$ i en vektor. Om var och en av dessa beror av flera variabler, så får vi i det allmänna fallet en funktion

$$f(z) = \begin{bmatrix} f_1(z_1, \dots, z_k) \\ f_2(z_1, \dots, z_k) \\ \vdots \\ f_n(z_1, \dots, z_k) \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_k \end{bmatrix}$$

Precis som i det skalära fallet kan man Taylorutveckla och linjärisera i flera variabler. Med användning av

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \begin{bmatrix} \frac{df_1}{dz_1} & \frac{df_1}{dz_2} & \dots & \frac{df_1}{dz_k} \\ \frac{df_2}{dz_1} & \frac{df_2}{dz_2} & \dots & \frac{df_2}{dz_k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{df_n}{dz_1} & \frac{df_n}{dz_2} & \dots & \frac{df_n}{dz_k} \end{bmatrix} \qquad \text{(Jacobian)}$$

så gäller

$$f(z) = f(z_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)(z - z_0) + \text{högre ordningens termer}$$

där alla derivatorna i Jacobianen beräknas för $z_0 = \begin{bmatrix} z_{10} & z_{20} & \cdots & z_{k0} \end{bmatrix}^T$.

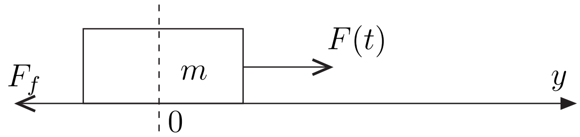
Inom reglertekniken är ofta fallet att den olinjära funktionen f är en funktion av n tillstånd (x) och m insignaler (u), dvs $f = f(z) = f(x, u)$. Dessutom väljs den s k arbetspunkten $z_0 = (x_0, u_0)$ så att $f(x_0, u_0) = 0$. Delar vi upp Jacobianen $\frac{\partial f}{\partial z}$ i $\frac{\partial f}{\partial x}$ och $\frac{\partial f}{\partial u}$ får vi då följande linjärisering:

$$\begin{aligned} f(x,u) &\approx \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,u_0)} (x - x_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{(x_0,u_0)} (u - u_0) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{df_1}{dx_1} & \frac{df_1}{dx_2} & \dots & \frac{df_1}{dx_n} \\ \frac{df_2}{dx_1} & \frac{df_2}{dx_2} & \dots & \frac{df_2}{dx_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{df_n}{dx_1} & \frac{df_n}{dx_2} & \dots & \frac{df_n}{dx_n} \end{bmatrix}_{(x_0,u_0)} \begin{bmatrix} x_1 - x_{10} \\ x_2 - x_{20} \\ \vdots \\ x_n - x_{n0} \end{bmatrix} + \\ &\quad \begin{bmatrix} \frac{df_1}{du_1} & \frac{df_1}{du_2} & \dots & \frac{df_1}{du_m} \\ \frac{df_2}{du_1} & \frac{df_2}{du_2} & \dots & \frac{df_2}{du_m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{df_n}{du_1} & \frac{df_n}{du_2} & \dots & \frac{df_n}{du_m} \end{bmatrix}_{(x_0,u_0)} \begin{bmatrix} u_1 - u_{10} \\ u_2 - u_{20} \\ \vdots \\ u_m - u_{m0} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

där de partiella derivatorna i matriserna alltså skall beräknas för den s k arbetspunkten $x = x_0, u = u_0$.

6 Differentialekvationer

Betrakta en massa m, som dras på ett underlag med en kraft F.



Massan ligger stilla vid tiden $t = 0$ och friktionskraften antas vara proportionell mot massans hastighet, d v s

$$F_f(t) = k\frac{d}{dt}y(t)$$

En kraftbalans ger med Newtons lag $ma(t) = F(t) - F_f(t)$ som uttryckt i y tillsammans med begynnelsevärdena ger en linjär ordinär differentialekvation (ODE) med konstanta koefficienter:

$$\begin{cases} m\frac{d^2}{dt^2}y(t) + k\frac{d}{dt}y(t) &= F(t) \\ y &= 0, \quad t = 0 \\ \frac{d}{dt}y &= 0, \quad t = 0 \end{cases}$$

Linjär betyder här att differentialekvationen är en linjär funktion av y och eventuella derivator av y. Exempel på *olinjära* ODE är

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}y(t) + y^2(t) &= \frac{d}{dt}y(t) \\ \frac{d}{dt}y(t) &= \sqrt{y(t)} \end{aligned}$$

och följande ODE är ett exempel på en linjär ODE med icke konstanta koefficienter:

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + ty(t) = F(t)$$

p g a den tidsvarierande koefficienten t framför $y(t)$.

Linjära ODE med konstanta koefficienter kan alltid skrivas:

$$a_n\frac{d^n}{dt^n}y(t) + a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y(t) + \ldots a_1\frac{d}{dt}y(t) + a_0y(t) = f(t) \tag{1}$$

Varje lösning till ekvation (1) kan skrivas

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t),$$

där $y_p(t)$ är partikulärlösningen och $y_h(t)$ är en lösning till den homogena ekvationen

$$a_n\frac{d^n}{dt^n}y(t) + a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y(t) + \ldots + a_1\frac{d}{dt}y(t) + a_0y(t) = 0.$$

Om man känner lösningarna till den homogena ekvationen så räcker det att finna en enda partikulärlösning för att kunna bilda alla lösningarna till differentialekvationen. Har $f(t)$ ett enkelt utseende kan man ofta finna en partikulärlösning genom att ansätta en lösning och testa genom insättning i (1).

Avgörande för den homogena lösningen är den till (1) hörande karakteristiska ekvationen:

$$P(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0.$$

Lösningen till den homogena ekvationen ges nämligen av

$$y_h(t) = \sum_{k=1}^{m} p_k(t)e^{\lambda_k t},$$

där $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ är de olika rötterna till den karakteristiska ekvationen och $n_1, \ldots, n_m$ är deras deras multiplicitet (t ex om $P(\lambda) = \lambda^2 - 2a\lambda + a^2 = (\lambda - a)^2$ har $\lambda = a$ multipliciteten 2). $p_k(t)$ är godtyckliga polynom av grad $\leq n_k - 1$.

För att en entydig lösning skall existera måste vi ha n olika villkor på y och dess derivator.

7 Laplacetransformen

M h a Laplacetransformen kan en linjär ODE med konstanta koefficienter omformas till en linjär algebraisk ekvation.

Laplacetransformen av en tidsfunktion $f(t)$ är den komplexa funktionen

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} \qquad \text{definierad av} \qquad F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

Med den inversa laplacetransformen kan vi gå tillbaka till tidsplanet (OBS: gäller endast för $t > 0$):

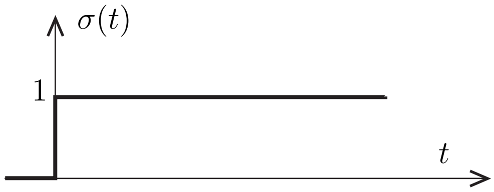
$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} \qquad \text{definierad av} \qquad f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(s)e^{st}ds,$$

I praktiken löses dessa integraler oftast m h a tabeller eller numeriskt i en mjukvara.

Vi visar några exempel på bestämning av $F(s)$.

Enhetssteg

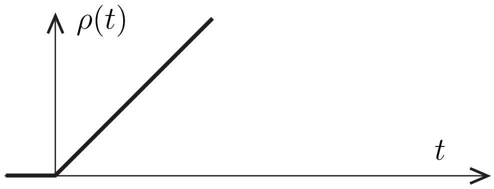
$$\sigma(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$



$$\mathcal{L}\{\sigma(t)\} = \int_0^\infty \sigma(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty 1 \cdot e^{-st}dt = \left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^\infty = \frac{1}{s}$$

Enhetsramp

$$\rho(t) = \begin{cases} t, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$



$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\rho(t)\} &= \int_0^\infty \rho(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty te^{-st}dt = \left\{ \begin{array}{l} \text{partiell} \\ \text{integration} \end{array} \right\} = \\ &= \left[-\frac{t}{s}e^{-st}\right]_0^\infty - \int_0^\infty -\frac{e^{-st}}{s}dt = 0 + \left[-\frac{e^{-st}}{s^2}\right]_0^\infty = \frac{1}{s^2} \end{aligned}$$

Derivata

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\} &= \int_0^\infty \frac{df}{dt}e^{-st}dt = \left\{ \begin{array}{l} \text{partiell} \\ \text{integration} \end{array} \right\} = \\ &= \left[f(t)e^{-st}\right]_0^\infty - \int_0^\infty f(t)\frac{d}{ds}e^{-st}dt = \\ &= -f(0) + s\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = \\ &= s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0) = sF(s) - f(0) \end{aligned}$$

På samma sätt visar man t ex att

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2}{dt^2}f(t)\right\} = s^2F(s) - \left\{sf + \frac{df}{dt}\right\}_{t=0}$$

Viktiga räkneregler

- Superpositionssatsen

$$\mathcal{L}\left\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\right\} = c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)$$

- Derivering (visas som för $n = 1$, men med upprepad partiell integration)

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n}{dt^n} f(t)\right\} = s^n F(s) - \left\{s^{n-1} f + s^{n-2} \frac{df}{dt} \cdots \frac{d^{n-1} f}{dt^{n-1}}\right\}_{t=0}$$

Speciellt om $f(0) = f'(0) = \ldots f^{(n-1)}(0) = 0$ är $\mathcal{L}\left\{\frac{d^n}{dt^n} f(t)\right\} = s^n F(s)$

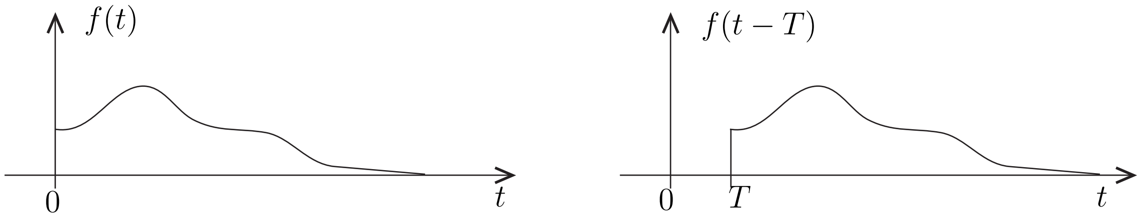
- Integration

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_{n-1}} f(\tau) d\tau dt_{n-1} \ldots dt_1\right\} = \frac{1}{s^n} F(s)$$

Speciellt för $n = 1$:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{s} F(s)$$

- Förskjutningssatsen



$$\mathcal{L}\left\{f(t - T)\right\} = e^{-sT} F(s)$$

förutsatt att $f(t) = 0,\ t < 0$. Tiden T kallas *dödtid*.

- Dämpningssatsen

$$\mathcal{L}\left\{e^{-at} f(t)\right\} = F(s + a)$$

- Faltningssatsen

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t g(t - \tau) f(\tau) d\tau\right\} = G(s) F(s)$$

- Begynnelsevärdessatsen

$$\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{s \to \infty} sF(s)$$

- Slutvärdessatsen
$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$
OBS: Slutvärdessatsen kräver att $sF(s)$ har samtliga poler i vänstra halvplanet (VHP).

Exempel:
$$F(s) = \frac{s+2}{s^2-1} \quad \Rightarrow \quad sF(s) = \frac{s(s+2)}{s^2-1}$$
Polerna bestäms genom att sätta nämnaren till 0:
$$s^2 - 1 = (s+1)(s-1) = 0$$
$$\Rightarrow \quad \begin{cases} s_1 &= -1 \\ s_2 &= 1 \quad \in \text{HHP, alltså ej OK att använda satsen!} \end{cases}$$
Exempel:
$$F(s) = \frac{2s-1}{s(s^2+2s+2)} = \frac{2s-1}{s(s+2)(s+1)} \quad \Rightarrow \quad sF(s) = \frac{2s-1}{(s+2)(s+1)}$$
Poler i $s = -2$ och $s = -1$ $\quad \Rightarrow \quad$ OK att använda satsen!

Exempel:
$$sF(s) = \frac{1}{s^2+1} = \frac{1}{(s+i)(s-i)}$$
Poler i $s = \pm i$ $\quad \Rightarrow \quad$ ej OK att använda satsen!

Vi återgår till problemet med massan på underlaget (se sid 11) för att illustrera hur Laplacetransformen kan användas för att lösa en diffekvation. Anta att en konstant kraft F läggs på vid $t = 0$ och att massan då ligger still. Vi vill beskriva hur massans position y ser ut som en funktion av tiden. Differetialekvationen vi skall lösa är alltså (se sid 11):
$$m\frac{d^2}{dt^2}y(t) + k\frac{d}{dt}y(t) = F\sigma(t), \qquad y(0) = \dot{y}(0) = 0$$
Laplacetransformerar vi denna ekvation får vi m h a deriveringsregeln och uttrycket för laplacetransformen av ett enhetssteg
$$ms^2Y(s) + ksY(s) = \frac{F}{s}$$
Löser vi ut $Y(s)$ och partialbråksuppdelar (PBU) får vi
$$Y(s) = \frac{F}{s^2(ms+k)} = \{\text{PBU}\} = \frac{F/k}{s^2} - \frac{Fm/k^2}{s} + \frac{Fm^2/k}{ms+k}$$
Med de härledda uttrycken för enhetssteg och enhetsramp samt superpositionssatsen och dämpningssatsen kan vi inverslaplacetransformera $Y(s)$ och får
$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{F}{k}\rho(t) - \frac{Fm}{k^2}\sigma(t) + \frac{Fm}{k}e^{-kt/m}\sigma(t) \\ &= \frac{F}{k}\left(t + \frac{m}{k}(e^{-kt/m} - 1)\right)\sigma(t) \end{aligned}$$
Som alternativ till den sista faktorn $\sigma(t)$ kan man istället ange att uttrycket för $y(t)$ bara gäller för $t > 0$, vilket alltid är fallet när man har använt invers Laplacetransform.

8 Instuderingsfrågor

1. Bestäm belopp, argument (i radianer och i grader), och uttryck även följande komplexa tal på polär form.

$$(a)\quad \frac{2}{1-i} \qquad (b)\quad \frac{-3}{1+i} \qquad (c)\quad \left(\frac{-3}{1+i}\right)\left(\frac{2}{1-i}\right)$$

2. Bestäm rötterna till $z^4 - 1 = 0$ (prova att använda polär form)!

3. Bestäm $|f(\omega)|$ och $\arg f(\omega)$ då $f(\omega)$ ges av

$$(a)\quad f(\omega) = \frac{1}{1-i\omega} \qquad (b)\quad f(\omega) = \frac{1}{(1-i\omega)^2}$$

$$(c)\quad f(\omega) = -\frac{1}{2i\omega} \qquad (d)\quad f(\omega) = e^{-2i\omega}$$

4. Partialbråksuppdela

$$(a)\quad \frac{s^2+2s+1}{(s^2+2s+3)(s+1)} \qquad (b)\quad \frac{s^2+\alpha}{(s+1)(s-2)(s-2)}$$

5. Beräkna

$$\begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}^{-1}$$

6. Bestäm egenvärdena till

$$\begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

7. Bestäm lösningen till ekvationssystemet

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 3 \\ 4x_1 + x_2 &= 3 \end{aligned}$$

8. Linjärisera funktionen $f(x) = 1 + \frac{1}{\pi}x^2 + \sin x$ kring $x = \pi$.

9. Linjärisera funktionen $f(x_1, x_2) = (x_1 - 2)^2 + \sin x_2$ kring punkten $(1, 0)$.

10. Lös differentialekvationen

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + \frac{d}{dt}y(t) = t, \qquad y(0) = 0, \dot{y}(0) = 1$$

för $t > 0$ genom att beräkna partikulärlösning och lösning till homogena ekvationen.