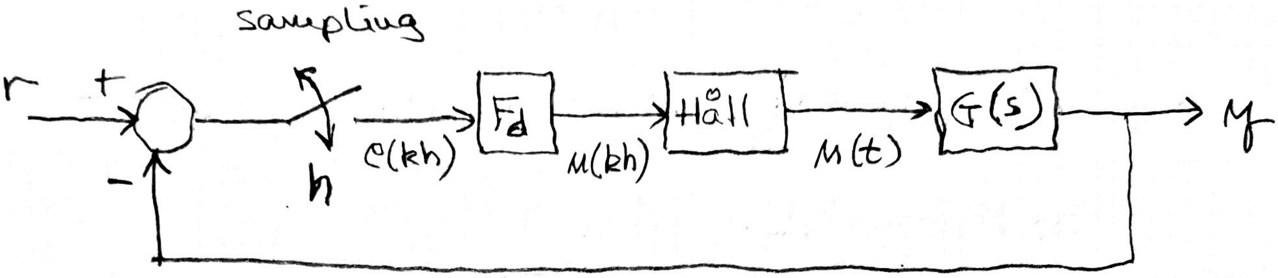
Föreläsning 14 Diskretisering

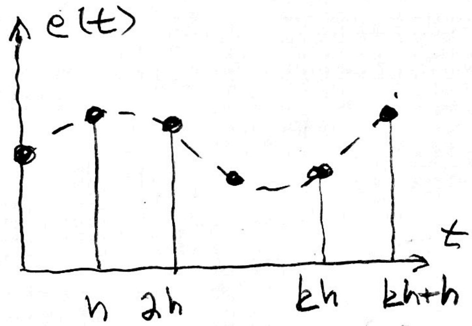
Sampling: mäta och registrera en signal

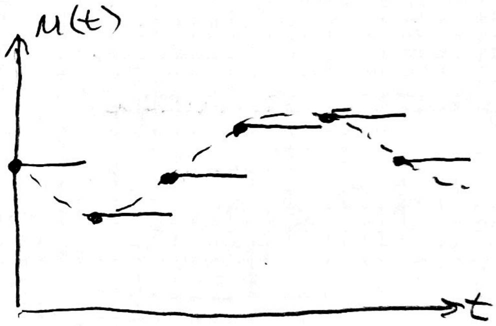
Datoriserad reglering



Samplingen sker med perioden h

Hållbretsen bevarar värdet av $u(kh)$ tills nästa värde kommer. Det ger en styckvis konstant styrsignal $u(t)$





Beräkningsalgoritmen beräknar $u(kh)$ ur de samplade värdena $e(kh)$ av felsignalen $e(t)$

$u(t)$ är styckvis konstant

$u(t) = u(kh)$, $kh \le t < kh+h$ (Hållkrets)

Derivatorna i systemets differentialekvation kan approximeras med samplen:

$$\dot{y}(t) \approx \frac{y(t+h) - y(t)}{h} \qquad \ddot{y} = (\dot{y})^{\cdot} = \frac{\dot{y}(t+h) - \dot{y}(t)}{h} =$$

$$= \frac{\frac{y(t+2h) - y(t+h)}{h} - \frac{y(t+h) - y(t)}{h}}{h} = \frac{y(t+2h) - 2y(t+h) + y(t)}{h^2}$$

Ex Approximering av differentialekvation

$$\dot{y}(t) + a y(t) = a \cdot u(t), \quad t = kh \quad k = 0, 1, \ldots$$

$$\frac{y(kh+h) - y(kh)}{h} + a y(kh) = a \cdot u(kh) \Rightarrow$$

$$\underbrace{y(kh+h) = (1-ah)\, y(kh) + a \cdot u(kh)}_{\text{Differensekvation}}$$

(Framåt differens)

Allmän differensekvation av ordning 2 (bakåtdifferens

$$y(kh) + a_1 y(kh-h) + a_2 y(kh-2h) = \qquad *$$
$$= b_0 u(kh) + b_1 u(kh-h) + b_2 u(kh-2h)$$

---

z-transformen

$$Y(z) = \mathcal{Z}\{y(kh)\} = \sum_{k=0}^{\infty} y(kh) \cdot z^{-k}$$

Ex $y(kh) = e^{-akh} \Rightarrow Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-akh} \cdot z^{-k} =$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (e^{-ah} \cdot z^{-1})^k = \frac{1}{1 - e^{-ah} \cdot z^{-1}} = \underline{\frac{z}{z - e^{-ah}}}$$

Fördröjningssatsen

$$\mathcal{Z}\{y(kh - lh)\} = z^{-l} \cdot Y(z)$$

---

z-transformering av * ger

$$Y(z) + a_1 z^{-1} Y(z) + a_2 z^{-2} Y(z) = b_0 U(z) + b_1 z^{-1} U(z) + b_2 z^{-2} \cdot U(z) \Rightarrow$$

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} = \frac{b_0 z^2 + b_1 z + b_2}{z^2 + a_1 z + a_2}$$

Systemets överföringsfunktion

Polerna ges av $z^2 + a_1 z + a_2 = 0$

Ex Överföringsfunktion för system av ordning 1 med styckvis konstant styrsignal

$\dot{y}(t) + a y(t) = a \cdot u(t) \Rightarrow$ (via $\mathcal{L}$-transform)

$s \cdot Y(s) - y(0) + a \cdot Y(s) = a \cdot U(s)$

$(s+a) Y(s) = y(0) + a \cdot U(s)$

$Y(s) = \dfrac{y(0)}{s+a} + \dfrac{a}{s+a} \cdot U(s)$ Inverstransformera!

[Faltningssatsen $Y_1(s) \cdot Y_2(s) = \mathcal{L} \int_0^t y_1(\tau) y_2(t-\tau)\, d\tau$ med

$Y_1(s) = U(s)$, $Y_2(s) = \dfrac{a}{s+a}$]

$y(t) = y(0) \cdot e^{-at} + a \cdot \int_0^t e^{-a(t-\tau)} \cdot u(\tau)\, d\tau$, Låt $t=h$

$u(\tau) =$ konstant mellan $t=0$ och $t=h \Rightarrow$

$u(\tau) = u(0)$ i $0 \le \tau < h$

$y(h) = y(0) \cdot e^{-ah} + a \cdot u(0) \cdot \int_0^h e^{-a(h-\tau)}\, d\tau =$

$= y(0) \cdot e^{-ah} + a \cdot u(0) \cdot e^{-ah} \int_0^h e^{a\tau}\, d\tau =$

$= y(0) \cdot e^{-ah} + u(0) \cdot (1 - e^{-ah})$

Iteration ger

$y(kh+h) = e^{-ah} \cdot y(kh) + (1 - e^{-ah}) \cdot u(kh)$

Ex Bestäm den diskreta överförings-funktionen $G_d(z)$ för

$$G(s) = \frac{a}{s+a}.$$

Enligt ovan motsvarar detta

$\dot{y}(t) + ay(t) = a \cdot u(t) \Rightarrow$ (bakåtdifferens)

$$y(kh) = e^{-ah} y(kh-h) + (1-e^{-ah}) u(kh-h)$$

z-transformering ger

$$Y(z) = e^{-ah} \cdot z^{-1} \cdot Y(z) + (1-e^{-ah}) \cdot z^{-1} \cdot U(z) \Rightarrow$$

$$G_d(z) = \frac{(1-e^{-ah}) \cdot z^{-1}}{1-e^{-ah} \cdot z^{-1}} = \underline{\underline{\frac{1-e^{-ah}}{z-e^{-ah}}}}$$

Ex Bestäm $G_d(z)$ för $G(s) = \dfrac{5}{(s+1)(s+2)}$

med samplingsintervallet $h = \ln 2$

Partialbråksuppdela

$$G(s) = \frac{5}{(s+1)(s+2)} = 2{,}5 \cdot \left(\frac{2}{s+1} - \frac{2}{s+2} \right) =$$

$$= 5 \cdot \frac{1}{s+1} + 2{,}5 \cdot \frac{2}{s+2}.$$

Med resultaten ovan fås ($a=1$ och $a=2$).

$$G_d(z) = 5 \cdot \frac{1-e^{-h}}{z-e^{-h}} + 2{,}5 \cdot \frac{1-e^{-2h}}{z-e^{-2h}} = (h = \ln 2) =$$

$$= 5 \cdot \frac{1-0{,}5}{z-0{,}5} + 2{,}5 \cdot \frac{1-0{,}25}{z-0{,}25} = \frac{2{,}5}{z-0{,}5} + \frac{1{,}875}{z-0{,}25} =$$

$$= \underline{\underline{0{,}625 \cdot \frac{z+0{,}5}{(z-0{,}5)(z-0{,}25)}}}$$