Föreläsning 9 Frekvensanalys

Låt $G(s)$ vara överföringsfunktionen för ett system. Dess frekvensegenskaper beskrivs då av frekvensfunktionen (komplexvärd) $G(j\omega)$

$$G(j\omega) = G(s)\Big|_{s=j\omega}.$$

Låt nu systemet ha insignalen $u(t) = \sin\omega t$. Med $\sin\omega t = \operatorname{Im} e^{j\omega t}$ kan via faltningssatsen visa att utsignalen blir

$$y(t) = |G(j\omega)| \cdot \sin(\omega t + \arg G(j\omega))$$

$|G(j\omega)|$ kallas systemets amplitudfunktion.
$\arg G(j\omega)$ kallas dess fasfunktion.

Ex Låt $G(s) = \dfrac{1}{(1+5s)(1+s)}$. Då gäller

$$|G(j\omega)| = \left|\frac{1}{(1+j5\omega)(1+j\omega)}\right| = \frac{1}{\sqrt{1+25\omega^2}\cdot\sqrt{1+\omega^2}}$$

$$\arg G(j\omega) = -\arg(1+j5\omega) - \arg(1+j\omega) =$$
$$= -\arctan 5\omega - \arctan\omega.$$

Med insignalen $u(t) = \sin\omega t$ får vi

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{1+25\omega^2}\sqrt{1+\omega^2}} \cdot \sin(\omega t - \arctan 5\omega - \arctan\omega)$$

Bode-diagram

Ett Bodediagram visar grafiskt $G(j\omega)$ med två kurvor

- $|G(j\omega)|$ med log-skala som funktion av ω med logskala eller
  $20\log|G(j\omega)|$ (dB) med linjär skala som funktion av ω med logskala.
- $\arg G(j\omega)$ som funktion av ω med logskala.

Allmän form på $G(s)$:

$$G(s) = \frac{K \cdot C_1(s) \cdot C_2(s) \cdot \ldots \cdot C_k(s)}{s^m \cdot D_1(s) \cdot D_2(s) \cdot \ldots \cdot D_\ell(s)}$$

Bodes grundform

$C_i(s)$ och $D_i(s)$ kan vara av följande typer.

- $1 + s/\omega_i$
- $1 + 2\zeta\, s/\omega_i + (s/\omega_i)^2$
- e^{-s/ω_i}

Bodes grundform

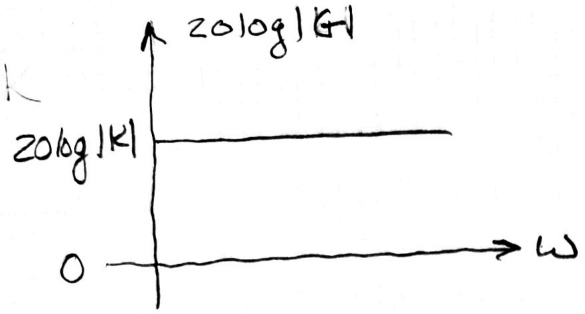
$$\frac{1}{s^m} = \frac{1}{(j\omega)^m} = j^{-m} \cdot \omega^{-m} = \omega^{-m} \cdot e^{-jm \cdot 90^\circ}$$

$$\log|G| = \log|K| + \log|C_1| + \log|C_2| + \ldots + \log|C_k| - $$
$$- \log|D_1| - \log|D_2| - \ldots - \log|D_\ell| - m\log\omega$$

$$\arg G = \arg K + \arg C_1 + \arg C_2 + \ldots + \arg C_k -$$
$$- \arg D_1 - \arg D_2 - \ldots - \arg D_\ell - m \cdot 90^\circ$$

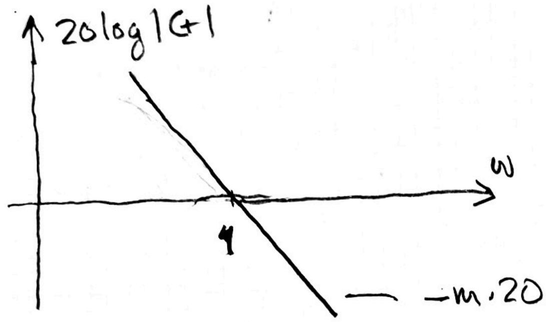
De ingående faktorernas kurvor adderas!

Grundfaktorernas amplitudfunktioner (ω logskala)



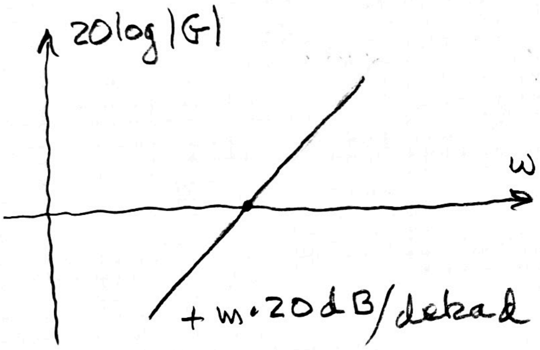
$$G(s) = K$$

$$G(j\omega) = K$$



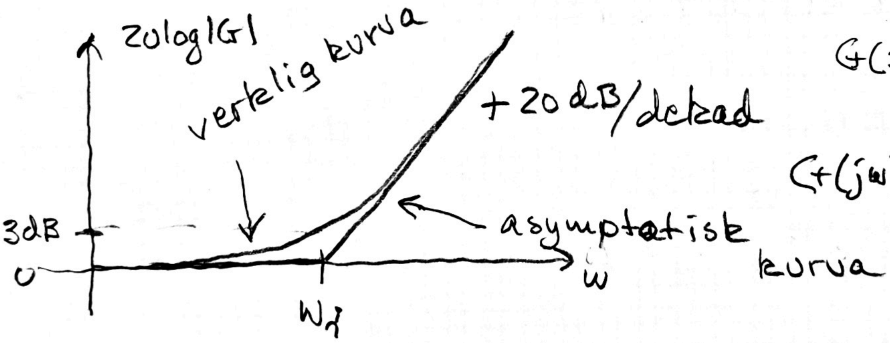
$$G(s) = \frac{1}{s^m}$$

$$G(j\omega) = \omega^{-m}\, e^{-jm90^\circ}$$



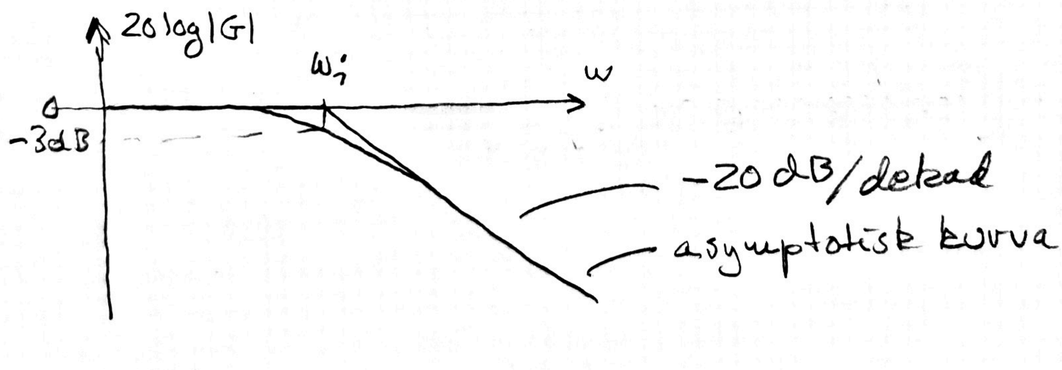
$$G(s) = s^m$$

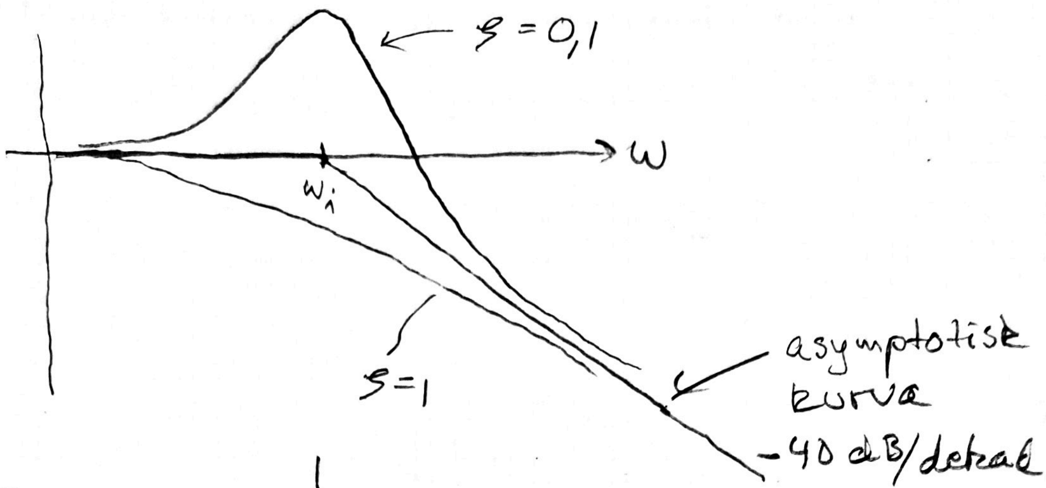
$$G(j\omega) = \omega^m \cdot e^{jm90^\circ}$$



$$G(s) = 1 + s/\omega_1$$

$$G(j\omega) = 1 + j\frac{\omega}{\omega_1}$$





$$G(s) = \frac{1}{1 + 2\varsigma \frac{s}{\omega_i} + \left(\frac{s}{\omega_i}\right)^2}$$

Korrektioner för "verklig" kurva

	$\omega_i/2$	ω_i	$2\omega_i$
$(1 + s/\omega_i)^{\pm m_i}$	$\pm m_i$ dB	$\pm 3m_i$ dB	$\pm m_i$ dB

$1 + 2\varsigma \frac{s}{\omega_i} + \left(\frac{s}{\omega_i}\right)^2$ se fig 5.15

Finns i formelsamlingen.

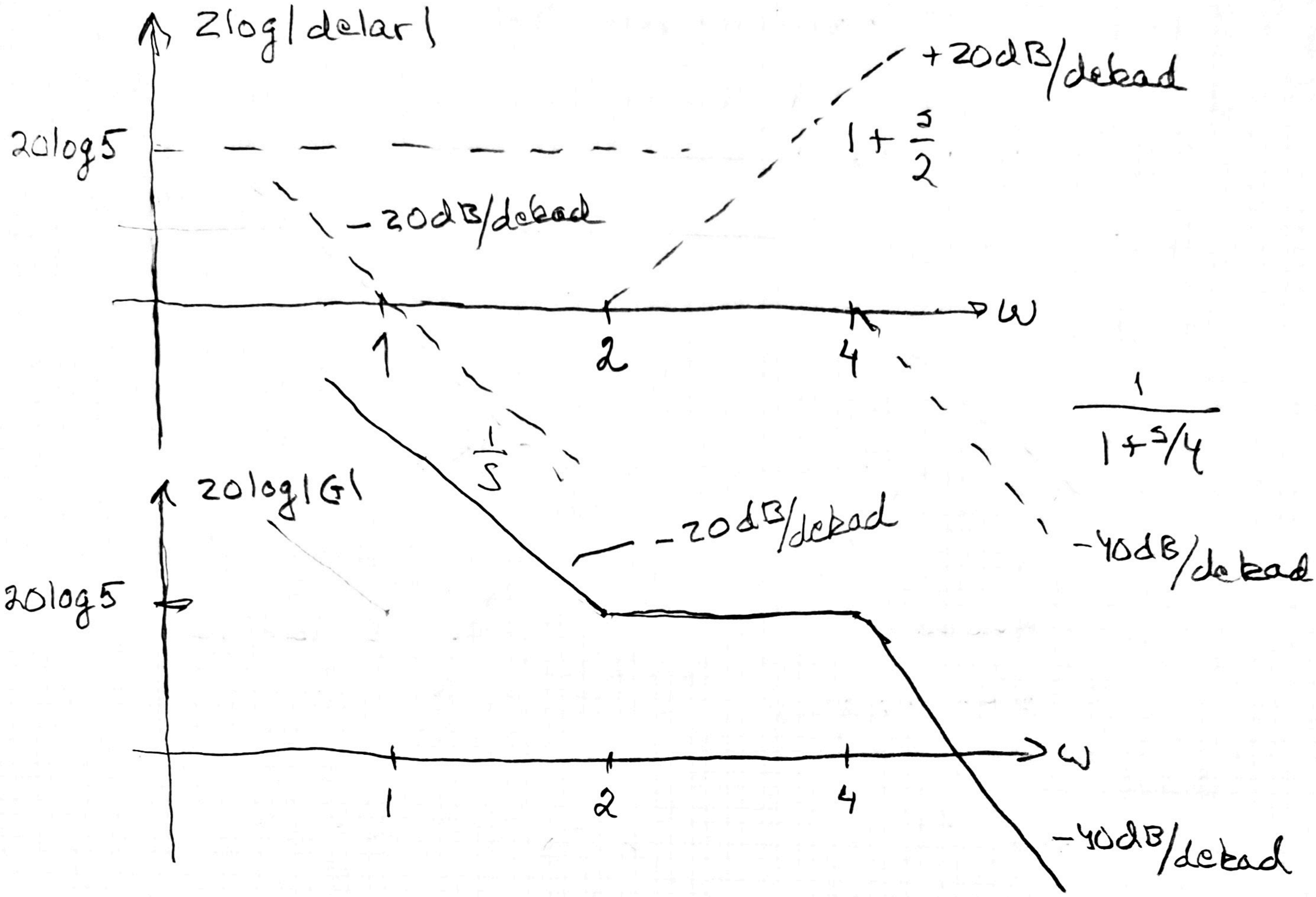
Ex Rita asymptotiskt Bode-diagram för $|G|$

$$G(s) = \frac{80 + 40s}{s(s^2 + 4s + 16)}$$

Lösning: Skriv först om på grundform

$$G(s) = \frac{80(1 + s/2)}{16s\left(1 + \frac{s}{4} + \frac{s^2}{16}\right)} = \frac{5(1 + s/2)}{s\left(1 + \frac{s}{4} + \left(\frac{s}{4}\right)^2\right)}$$

$\Rightarrow$



Ex

Rita Bodediagram för $|G|$

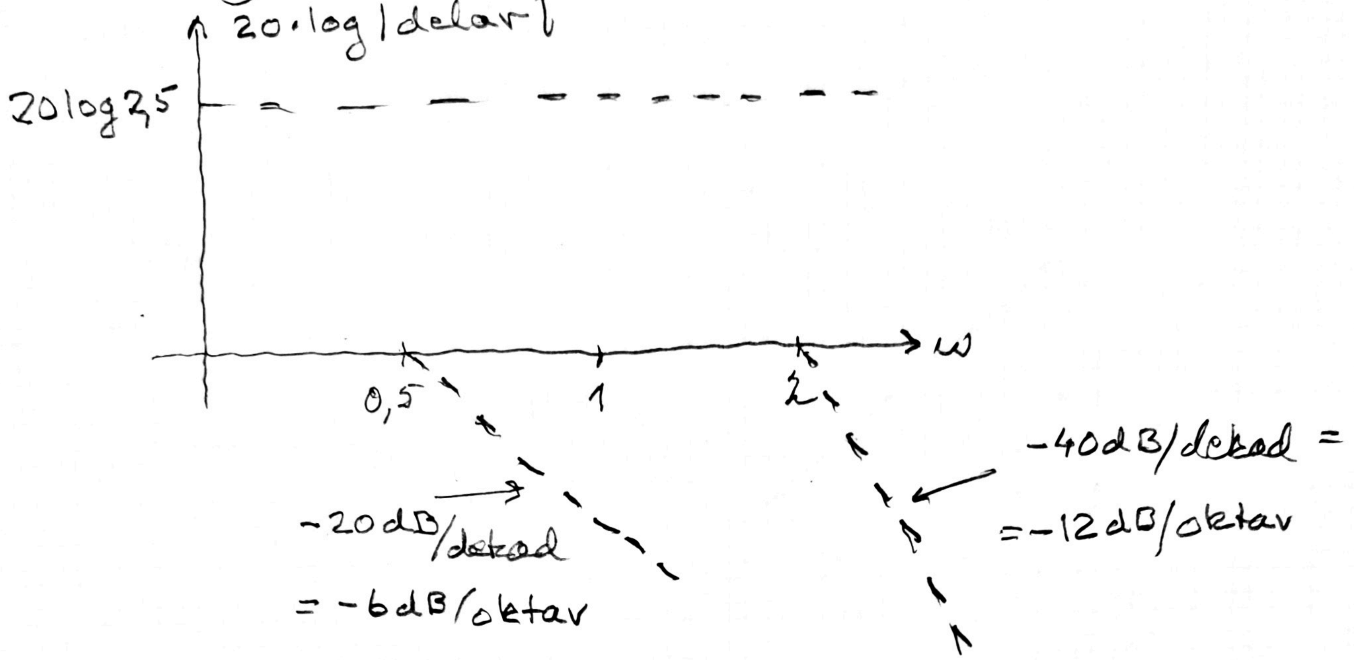
$$G(s) = \frac{10}{(s^2+0{,}4s+4)(1+2s)}$$

Lösning: Skriv om på grundform

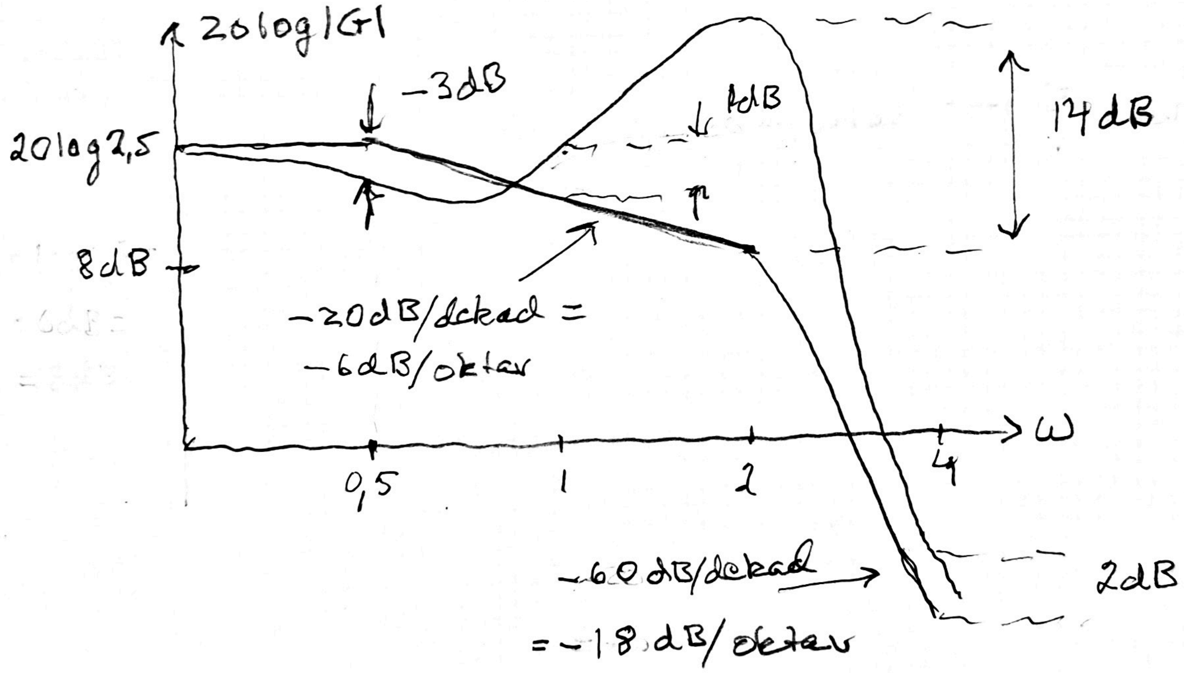
$$G(s) = \frac{10}{4\left(1+0{,}1s+\left(\frac{s}{4}^2\right)\right)\cdot\left(1+\frac{s}{0{,}5}\right)} =$$

$$= \frac{2{,}5}{\left(1+2\cdot 0{,}1\cdot\frac{s}{2}+\left(\frac{s}{2}\right)^2\right)\left(1+\frac{s}{0{,}5}\right)} \Rightarrow \zeta = 0{,}1$$

Rita först asymptotiskt diagram och korrigera sedan.



Summera



Korrektioner enligt formelsamling

ω	0,25	0,5	1	2	4
$1+s/0{,}5$	-1	-3	-1		
$1+2\cdot 1\cdot \frac{s}{2}+\left(\frac{s}{2}\right)^2$			2	14	2
Totalt	-1	-3	1	14	2