Construir conjunto de 4 ~~longitudes~~ formas de onda sabiendo que

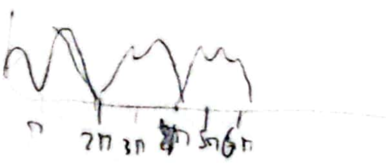
$$\phi_1(t) = \begin{cases} \sin(t), & 0 \le t \le 2\pi \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Concepto ~~ortogonalidad~~ ortonormalidad

Un conjunto de ~~longitudes~~ formas de onda $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ son ortonormales si y solo si $\langle \phi_i, \phi_j \rangle = \delta_{ij}$, si $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ y $\delta_{ij} = 0$ otros, tambien todas las señales han de tener energia 1, $\int_{-\infty}^{+\infty} |\phi_i(t)|^2 \, dt = 1$, $i = 1, \ldots, n$, y si todas las parejas de señales diferentes son ortogonales, $\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_i(t) \phi_j^*(t) \, dt = 0$

→ Es $= 0$ cuando $\phi_i(t)$ y $\phi_j(t)$ no hacen overlap

Encontrar otras ~~longitudes~~ formas de onda



$$\sin(t) = \cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Cuando dos funciones trigonometrias estan movidas entre si en $\frac{\pi}{2} k$ son siempre ortogonales

Por lo que ϕ_1 es ortogonal a $\cos(t)$

$$\langle \sin(t), \cos(t) \rangle = \int_0^{2\pi} \overbrace{\sin(t)\cos(t)}^{\frac{1}{2}\sin(2t)} \, dt = \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos(2t)}{2}\right]_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right) = 0$$

Para la tercera y cuarta onda podemos usar que $\sin(nt)$ y $\cos(kt)$ son siempre ortogonales en el intervalo de 0 a 2π.

Por lo que $\phi_3 = \sin(2t)$ $\phi_4 = \cos(2t)$ son ortogonales con todos los otros, pero comprobamos:

$$\langle \sin(2t), \cos(2t) \rangle = \int_0^{2\pi} \underbrace{\sin(2t)\cos(2t)}_{\frac{1}{2}\sin(4t)} dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin(4t)\,dt = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{4}\cos(4t)\right]_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{4}\right)\right) = 0$$

$$\langle \sin(2t), \cos(t) \rangle = \int_0^{2\pi} \underbrace{\sin(2t)\cos(t)}_{\frac{1}{2}(\sin(3t)+\sin(t))} dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin(3t) + \sin(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos(3t)}{3} - \cos(t)\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\left(\left(\cancel{-\frac{1}{3}} \cancel{-1} - \left(\cancel{-\frac{1}{3}} \cancel{-1}\right)\right)\right) = 0$$

$$\langle \sin(t), \sin(2t) \rangle = \int_0^{2\pi} \sin(t)\sin(2t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos(t) - \cos(3t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sin(t) - \frac{\sin(3t)}{3}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\left(0 - 0 - (0 - 0)\right) = 0$$

$$\langle \cos(t), \cos(2t) \rangle = \int_0^{2\pi} \underbrace{\cos(t)\cos(2t)}_{\frac{1}{2}\cos(t)+\cos(3t)} dt = \frac{1}{2} \cdots \overset{\text{igual que antes.}}{\cdots} = 0$$

Ahora que sabemos que son ortogonales solo nos queda normalizar

$$\underset{\|\cos(2t)\|}{\overset{\|}{\|\cos(t)\|}} = \sqrt{\int_0^{2\pi} \underbrace{\cos(t)\cdot\cos(t)}_{\frac{1+\cos(2t)}{2}} dt} = \sqrt{\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos(2t)}{2} dt} = \sqrt{\int \frac{1}{2} + \frac{\cos(2t)}{2}\,dt} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}\left[t + \frac{\sin(2t)}{2}\right]_0^{2\pi}} = \sqrt{\frac{1}{2}(2\pi) + (0)} = \sqrt{\pi}$$

$$\underset{\|\sin(2t)\|}{\overset{\|}{\|\sin(t)\|}} = \sqrt{\int_0^{2\pi} \underbrace{\sin^2(t)}_{\frac{1-\cos(2t)}{2}} dt} \Rightarrow \text{igual que antes} = \sqrt{\frac{1}{2}(2\pi) + 0} = \sqrt{\pi}$$

Escaneado con CamScanner