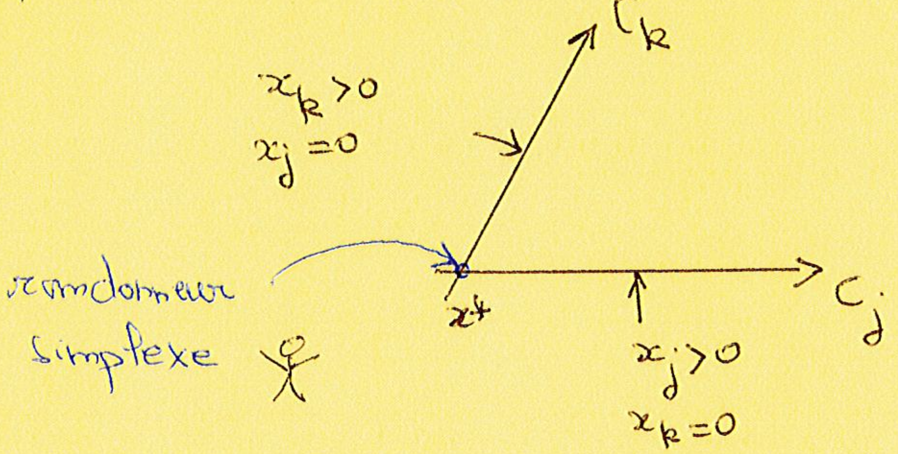
Algorithme du Simplexe

Le "randonneur simplexe" se trouve positionné en $(x^*, f(x^*))$
x^* est un sommet de C auquel il lui est associé la base réalisable $\{A^i\}_{i\in I}$. On suppose ici que les vecteurs hors-base sont au nombre de 2 (cas du problème du brasseur $m=3$ $n=5$).
On veut calculer les pentes des deux chemins (arêtes de C) qui partent du sommet x^* :



On a : $\sum_{i\in I} x_i^* A^i = A_I x_I^* = b$ $(\Rightarrow x_I^* = A_I^{-1} b)$

et $x_j^* = x_k^* = 0$

$$\text{Pente de } C_j = \lim_{\theta \to 0^+} \frac{f(x(\theta)) - f(x^*)}{\theta} \quad \text{où } x = x(\theta) \in C_j$$

Il faut maintenant calculer $x = x(\theta)$ en fonction de x^* qui est connu

$x(\theta)$ est caractérisé par $[x(\theta)]_j = \theta \ (>0)$ et $[x(\theta)]_k = 0$

et $A(x(\theta)) = b = \sum_{i \in I} x_i A^i + \theta A^j = \sum_{i \in I} x_i^* A^i \quad (1)$

On a besoin maintenant de décomposer A^j sur la base $\{A^i\}_{i \in I}$:

$$A^j = \sum_{i \in I} \gamma_{ij} A^i$$

alors (1) $\iff \sum_{i \in I} (x_i + \theta \gamma_{ij} - x_i^*) A^i = 0$

d'où

$$\begin{cases} x_i = x_i^* - \theta \gamma_{ij} & \forall i \in I \\ x_j = \theta \\ x_k = 0 \end{cases}$$

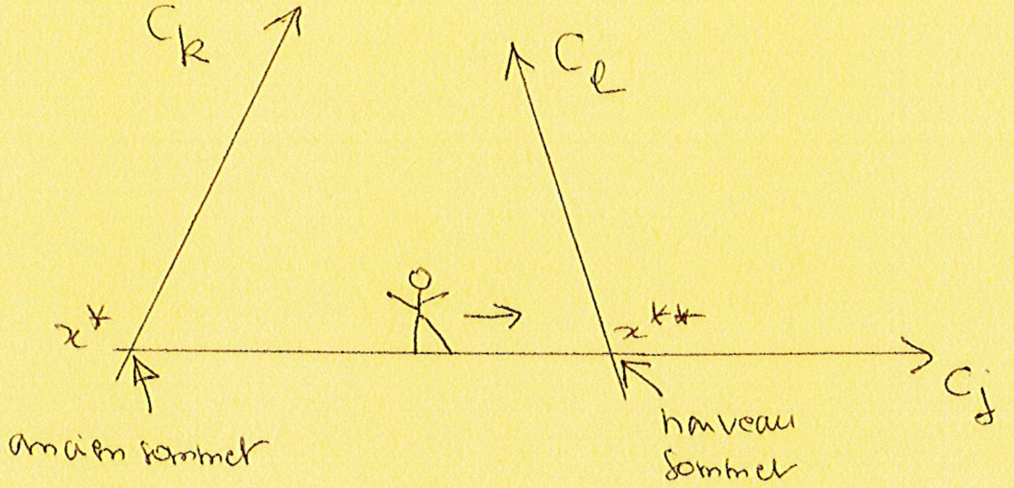
$$f(x(\theta)) - f(x^*) = \sum_{i \in I} c_i x_i + c_j \theta - \sum_{i \in I} c_i x_i^*$$

$$= \theta \left(c_j - \sum_{i \in I} c_i \gamma_{ij} \right)$$

et donc pente de $C_j = c_j - \sum_{i \in I} c_i \gamma_{ij}$ ☺

On posera $z_j = \sum_{i \in I} c_i \gamma_{ij} = c_I' \gamma_{ij}$ (produit scalaire de 2 vecteurs)

Le randonneur s'est maintenant engagé sur le chemin C^j (cela se traduit par le fait que $x_j > 0$ et donc A^j va entrer dans la base). Il doit s'arrêter lorsqu'il va sortir de l'ensemble des contraintes ou ce qui revient au même rencontrer un nouveau sommet



On doit donc avoir $x_i = x_i^* - \theta \gamma_{ij} \geqslant 0 \quad \forall i \in I$

soit $0 \leq \theta \leq \theta_{max} = \min\limits_{\gamma_{ij} > 0} \frac{x_i^*}{\gamma_{ij}} = \frac{x_\beta^*}{\gamma_{\beta j}}$ (donc $\gamma_{\beta j} > 0$)

Remarque : si $\forall i \in I \quad \gamma_{ij} \leq 0$ alors $\forall \theta > 0 \quad x(\theta) \geqslant 0$ et donc toute la demi-droite C_j est incluse dans l'ensemble des contraintes C (qui n'est donc pas borné). Si $c_j - z_j > 0$ (par exemple) alors $f(x(\theta)) \to +\infty$ qd $\theta \to +\infty$. Donc si on cherche à maximiser f sur C alors le problème (P) n'admet pas de solution optimale $\Rightarrow$ test d'existence de solution optimale dans l'algorithme du simplexe.

La nouvelle base associée au nouveau sommet est donc $I^{new} = I \cup \{j\} \setminus \{\beta\}$

Le vecteur A^β remplace A^j dans la nouvelle base associée au nouveau sommet

Il reste un problème à résoudre (simplexe) :
comment calculer efficacement les γ_{ij}^{new} dans la nouvelle base en fonction des γ_{ij}^{old} dans l'ancienne base ? Pour cela, on a besoin de déterminer la matrice de changement de base M dont les vecteurs colonnes sont les décompositions des vecteurs A^i ~~ses~~ de la nouvelle base sur l'ancienne base.

Supposons que le vecteur A^α remplace le vecteur A^β dans la nouvelle base.

$$M = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & A^\alpha & & \\ & & \downarrow & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \cdots & \gamma_{i_1\alpha}^{old} & \cdots & 0 \\ 0 & 1 \cdots & \gamma_{i_2\alpha}^{old} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \gamma_{\beta\alpha}^{old} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots \gamma_{i_m\alpha}^{old} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

⚠ Le vecteur A^α n'est pas en position α. Sa position sera la même que le vecteur A^β dans l'ancienne base (voir tableau simplexe)
Sur la diagonal de M on trouve des 1 sauf le terme $\gamma_{\beta\alpha}^{old}$ (>0) qui sera le pivot de l'itération.

On a donc $\gamma^{old} = M\gamma^{new}$ $\quad \gamma^{old}, \gamma^{new}$ matrices (m,n)

Soit V_i^{new} la ligne $(\gamma_{i1}^{new}, \dots, \gamma_{in}^{new})$ et V_i^{old} la ligne $(\gamma_{i1}^{old} \dots)$

on a donc
$$V_\beta^{old} = \gamma_{\beta\alpha}^{old} V_\alpha^{new} \Rightarrow V_\alpha^{new} = \frac{V_\beta^{old}}{\gamma_{\beta\alpha}^{old}}$$

$$V_i^{old} = V_i^{new} + \gamma_{i\alpha}^{old} V_\alpha^{new} \Rightarrow V_i^{new} = V_i^{old} - \gamma_{i\alpha}^{old} V_\alpha^{new} \quad (\forall i \neq \alpha m \beta)$$

Rque : ces formule sont vraies aussi pour $V_i^{new} = (x_i^{new}, \gamma_{i1}^{new}, \dots, \gamma_{in}^{new})$ $V_i^{old} = (x_i^{old}, \dots)$