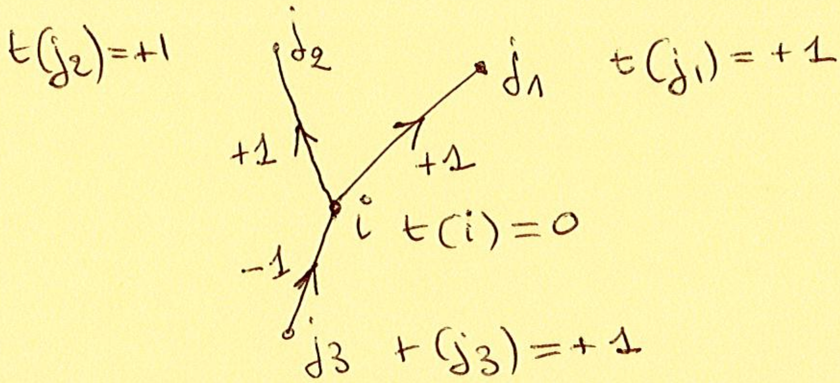
Cocycle – Tension – Pb de Tension maximale –
Algo de FF pour la tension maximale

Soit $G = (X, U)$ X : sommets U : arcs $|X| = n$ $|U| = m$

Soit $i \in X$, on définit le cocycle $\omega(\{i\})$ comme étant l'ensemble des arcs ayant i comme extrémité.

Le vecteur cocycle ω^i est un vecteur de $\mathbb{R}^m$ tel que

$$\begin{cases} \omega^i_j = 0 & \text{si } i \text{ n'est pas une extrémité de l'arc } j \\ \omega^i_j = +1 & \text{si } i \text{ est l'extrémité initiale de l'arc } j \\ \omega^i_j = -1 & \text{si } i \text{ est l'extrémité terminale de l'arc } j \end{cases}$$



Il est facile de voir que tout vecteur cycle est orthogonal à tout vecteur cocycle ω^i.

Soit $A \subset X$, on définit le vecteur cocycle $\omega(A)$ par $\omega(A) = \sum_{i \in A} \omega^i$

On définit une tension comme une combinaison linéaire quelconque de vecteurs cocycles. Flots et tensions sont donc orthogonaux : soit F, le s.e.v. de $\mathbb{R}^m$ engendré par les flots, $F^\perp$, le s.e.v. de $\mathbb{R}^m$ engendré par les tensions.

Si G est connexe, $\dim F = m - n + 1$ et $\dim F^\perp = n - 1$

Remarque : toute tension dérive d'un potentiel t :

$$\forall i = 1..m \quad \theta_i = t(y) - t(x) \quad \text{où } i = (x, y)$$

Problème de la tension maximum

Notons $\Theta(G)$ l'ensemble des tensions sur G

$$(P)\begin{cases} \operatorname{Max} \theta_1 \\ \theta \in \Theta(G) \\ k_i \leq \theta_i \leq l_i \quad \forall i = 1 \dots m \end{cases}$$

Recherche d'une tension maximum quand on connaît une tension réalisable (Ford et Fulkerson) θ^0

On note $1 = (b, a)$

On marque l'extrémité terminale a

$$\left.\begin{array}{l} x \text{ sommet marqué} \\ i = (x, y) \in U \\ \theta_i^0 = k_i \end{array}\right\} \Rightarrow \text{on marque } y$$

$$\left.\begin{array}{l} x \text{ sommet marqué} \\ i = (y, x) \in U \\ \theta_i^0 = l_i \end{array}\right\} \Rightarrow \text{on marque } y$$

alors

soit on ne peut pas marquer b et on peut améliorer θ^0 (soit A^* l'ensemble des sommets que l'on ne peut pas marquer alors $a \notin A^*$ et $b \in A^*$, on peut trouver $\beta > 0$ suffisamment petit tel que $\theta^1 = \theta^0 + \beta\omega(A^*)$ soit une tension réalisable et $\theta_1^1 > \theta_1^0$)

soit on peut marquer b et θ^0 est la solution optimale de (P)

Applications à la RO : problème du plus court chemin dans un graphe, problème d'ordonnancement