

Chapitre 3 : Méthode des différences finies (1D)

1. Problèmes stationnaires 1D
2. Problèmes instationnaires 1D
3. Consistance & stabilité

La méthode en 5 pas

PAS 1 : Définition du problème continu

PAS 2 : Introduction d'un maillage & valeurs nodales des champs

PAS 3 : Problème discrétisé, une équation algébrique par point de maillage, approcher les dérivées avec des différences finies de même ordre de précision partout.

PAS 4 : Ecriture matricielle du système linéaire

PAS 5 : Programmation du système linéaire & solution numérique
une fois (pb stationnaire), en boucle (pb instationnaire)

VALIDATION ?

1. Problèmes stationnaires 1D

1.1 Poisson 1D + CL Dirichlet

PAS 1 : Définition du problème continu

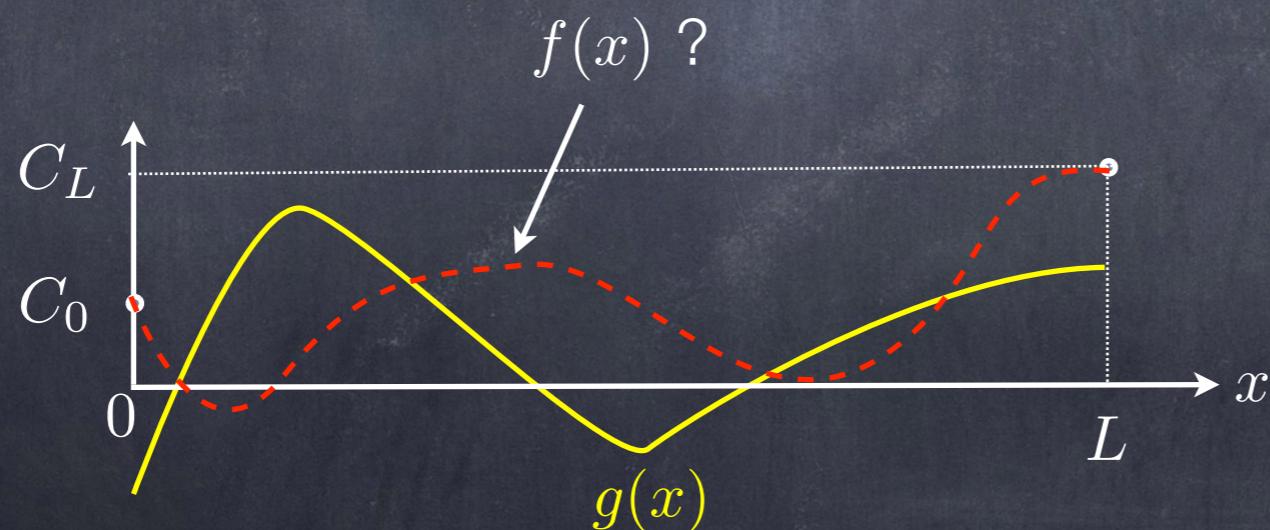
En premier lieu, on doit toujours proprement définir le problème continu, que l'on doit résoudre. On commence avec le **problème de Poisson en 1D**, muni de conditions limites de type Dirichlet (on impose la valeur de f sur les bords)

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = g \quad , \quad x \in]0, L[$$

sur les bords:

$$f(0) = C_0$$

$$f(L) = C_L$$



PAS 2 : Introduction d'un maillage & valeurs nodales des champs

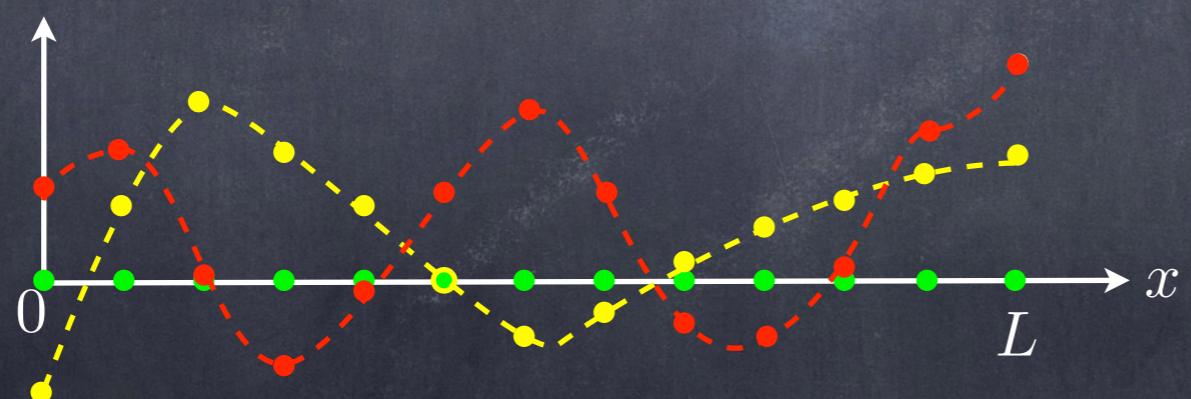
Nous discrétisons l'espace en introduisant un maillage

maillage de $M+1$ pts • $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_M = L$

Les fonctions/champs sont représentées par des ensembles de valeurs nodales
discrétisées

$M+1$ valeurs nodales de g , connues • $g_0, g_1, g_2, \dots, g_M$

$M+1$ valeurs nodales de f , recherchées • $f_0, f_1, f_2, \dots, f_M$



Notation

$$f_i = f(x_i)$$

$$g_i = g(x_i)$$

Souvent, on travaille avec des maillages réguliers

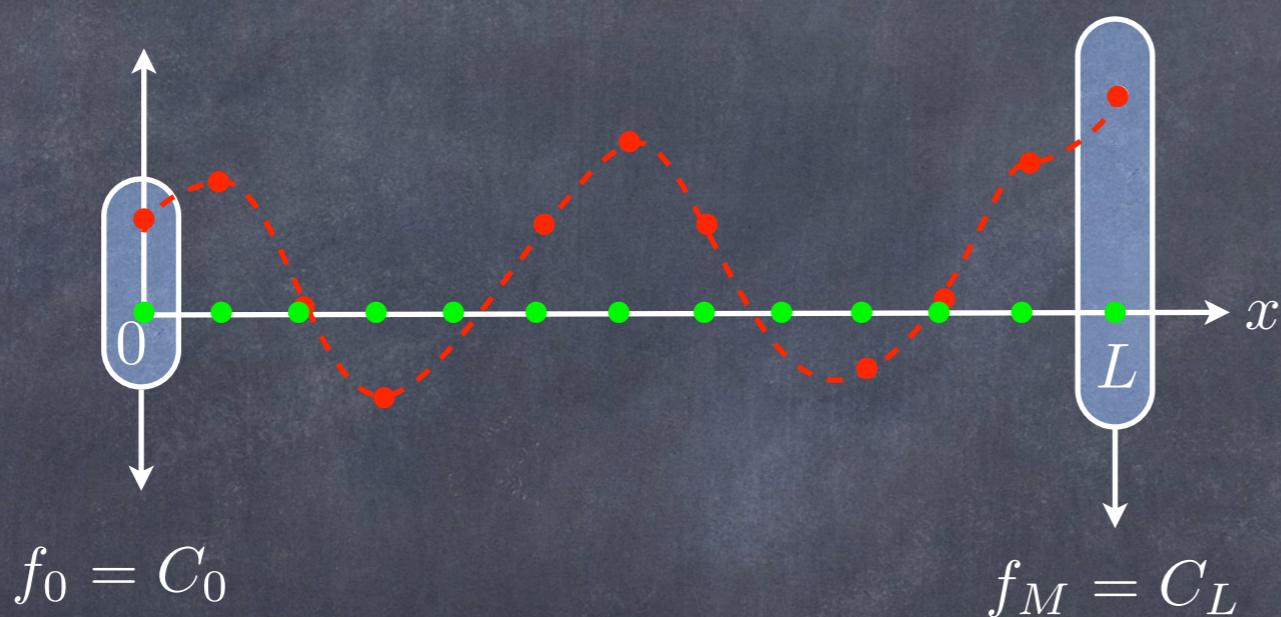
$$x_i = i\delta x \quad i = 0, 1, \dots, M$$

pas d'espace $\delta x = L/M$

PAS 3 : Ecrire le problème discréтиisé

La philosophie est simple : 1 équation algébrique par point de maillage

- pour tout point de bord (point extérieur)
 - on écrit une représentation fidèle de la condition aux limites
 - = facile pour une condition de Dirichlet



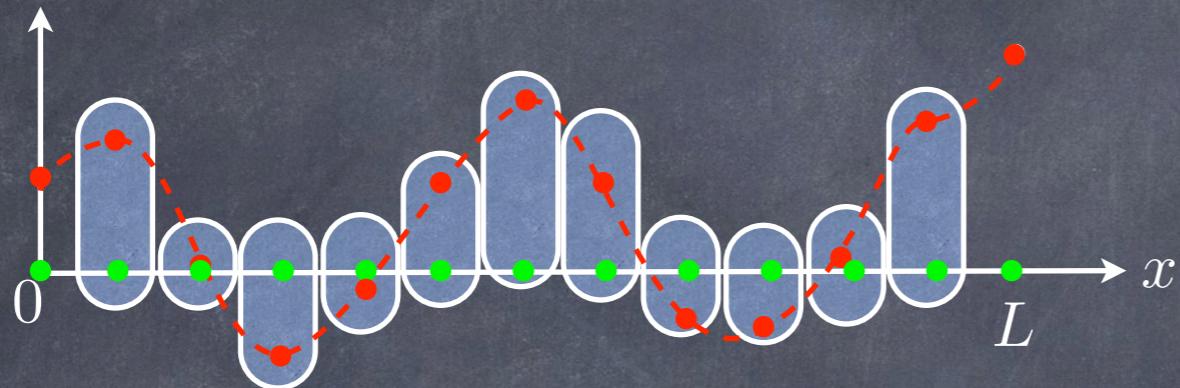
Ici donc 2 équations pour 2 points les bords

pour tout point intérieur

Notation

on impose une version discrète de l'équation différentielle

$$\frac{d^2 f_i}{dx^2} = \frac{d^2 f}{dx^2}(x_i)$$



$$\frac{d^2 f_i}{dx^2} = g_i$$

$$i = 1, \dots, M - 1$$

On remplacera les dérivées par des différence finies. Pour un maillage générale ceci donne (chapitre 1)

$$\frac{d^2 f_i}{dx^2} \simeq \frac{2f_{i-1}}{(x_{i-1} - x_i)(x_{i-1} - x_{i+1})} + \frac{2f_i}{(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})} + \frac{2f_{i+1}}{(x_{i+1} - x_{i-1})(x_{i+1} - x_i)} = g_i$$

$$i = 1, \dots, M - 1$$

pour un maillage uniforme, on simplifie l'expression à

$$\frac{d^2 f_i}{dx^2} \simeq \frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{\delta x^2} = g_i$$

$$i = 1, \dots, M - 1$$

On obtiendra donc $M-1$ équations algébriques, pour $M-1$ points intérieurs

PAS 4 : Ecriture matricielle

On a obtenu donc M+1 eqs pour M+1 valeurs nodales. Ici, ces équations (maillage régulier) seront

eq point 0

$$f_0 = C_0$$

eq point 1

$$\frac{1}{\delta x^2} (f_0 - 2f_1 + f_2) = g_1$$

eq point 2

$$\frac{1}{\delta x^2} (f_1 - 2f_2 + f_3) = g_2$$

...

eq point i

$$\frac{1}{\delta x^2} (f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}) = g_i$$

...

eq point M-1

$$\frac{1}{\delta x^2} (f_{M-2} - 2f_{M-1} + f_M) = g_{M-1}$$

eq point M

$$f_M = C_L$$

que l'on peut assembler sous forme matricielle

Notant $a = 1/\delta x^2$ ceci donne

$$\begin{array}{l} \text{eq point 0} \\ \text{eq point 1} \\ \text{eq point 2} \\ \dots \\ \text{eq point M-1} \\ \text{eq point M} \end{array} \left[\begin{array}{ccccc} 1 & & & & \\ a & -2a & a & & \\ & a & -2a & a & \\ & & & \dots & \\ & & & & a & -2a & a \\ & & & & & 1 & \\ \hline & & & & & & \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_{M-1} \\ f_M \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} C_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ \dots \\ g_{M-1} \\ C_L \end{array} \right]$$

$\uparrow \qquad \qquad \qquad \uparrow \qquad \qquad \qquad \uparrow$

\mathbf{A} matrice taille $(M+1) \times (M+1)$ \mathbf{f} vecteur \mathbf{g} vecteur

= Un problème linéaire de la forme $\mathbf{Af} = \mathbf{g}$

PAS 5 : Programmation

Il suffit de définir la matrice A et le vecteur g, afin de pouvoir calculer la solution f à l'aide de l'ordinateur. On utilisera $f = A \backslash g$ en Matlab et des bibliothèques d'algorithmes ailleurs.

VALIDATION ?

Si possible, on trouvera un test qui permet de retrouver des valeurs que l'on calcule à la main. Ceci validera le programme, qui pourra ensuite être utilisé pour résoudre d'autres problèmes

Le plus facile c'est de proposer une fonction $f(x)$, par exemple

$$f(x) = \sin 2x \quad \text{on calcule} \quad g(x) = \frac{d^2 f}{dx^2} = -4 \sin 2x \\ \text{alors}$$

$$C_0 = f(0) = \sin 0 = 0$$

$$C_L = f(L) = \sin 2L$$

TEST : si on utilise cette fonction $g(x)$ et ces constantes C_0 et C_L pour définir le vecteur colonne \mathbf{g} alors on devra trouver en le vecteur colonne \mathbf{f} les valeurs nodales $f_i \simeq \sin 2x_i$

Ce genre de test de validation permet d'évaluer comment l'erreur décroît avec un nombre de points augmentant et de retrouver l'ordre $\alpha > 0$ du schéma numérique.

$$\mathcal{E}_M = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{i=0}^M (f_i - \sin 2x_i)^2} \sim M^{-\alpha}$$

code poisson1d_dirichlet.m
+ validation

1.2 Poisson 1D + CL de Neuman

PAS 1 : Définition du problème continu

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = g \quad x \in]0, L[$$

CL:

$$\frac{df}{dx}(0) = D_0$$

modif

$$f(L) = C_L$$

PAS 2 : Introduction d'un maillage & valeurs nodales des champs

$$x_i = i \delta x, \quad i = 0, \dots, M$$

avec $\delta x = L/M$

$$f_i = f(x_i) \quad \frac{df_i}{dx} = \frac{df}{dx}(x_i) \quad \frac{d^2 f_i}{dx^2} = \frac{d^2 f}{dx^2}(x_i)$$
$$g_i = g(x_i)$$

PAS 3 : Problème discréteisé, une équation algébrique par point de maillage

eq. point 0

$$\frac{df_0}{dx} \simeq \frac{1}{2\delta x}(-3f_0 + 4f_1 - f_2) = D_0$$

modif

eq. points i
 $i \in \{1, \dots, M-1\}$

$$\frac{d^2 f_i}{dx^2} \simeq \frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{\delta x^2} = g_i$$

precision
d'ordre 2
partout

eq. point M

$$f_M = C_L$$

PAS 4 : Ecriture matricielle

$$a = 1/\delta x^2$$

$$b = 1/2\delta x$$

$$\begin{array}{l}
 \text{eq point 0} \\
 \text{eq point 1} \\
 \text{eq point 2} \\
 \dots \\
 \text{eq point } M-1 \\
 \text{eq point } M
 \end{array}
 \left[\begin{array}{ccc}
 -3b & 4b & -b \\
 a & -2a & a \\
 a & -2a & a \\
 \dots \\
 & & \\
 & &
 \end{array} \right]
 =
 \begin{array}{c}
 f_0 \\
 f_1 \\
 f_2 \\
 \dots \\
 f_{M-1} \\
 f_M
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 D_0 \\
 g_1 \\
 g_2 \\
 \dots \\
 g_{M-1} \\
 C_L
 \end{array}
 \text{modif}$$

A matrice taille $(M+1) \times (M+1)$ **f** vecteur **g** vecteur

PAS 5 : Programmation

Pareil

VALIDATION ?

Selon l'idée précédente on propose une fonction $f(x)$, par exemple

$$f(x) = \sin 2x \quad \text{on calcule} \quad g(x) = \frac{d^2 f}{dx^2} = -4 \sin 2x$$

$$D_0 = \frac{df}{dx}(0) = 2 \cos 0 = 2$$

$$C_L = f(L) = \sin 2L$$

TEST : si on utilise cette fonction $g(x)$ et ces constantes D_0 et C_L pour définir le vecteur colonne \mathbf{g} alors on devra trouver en le vecteur colonne \mathbf{f} les valeurs nodales $f_i = \sin 2x_i$

code poisson1d_neuman.m
+ validation

1.3 Problème aux valeurs propres + CL Dirichlet

PAS 1 : Définition du problème continu

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \lambda f \quad \forall x \in [0, L] \quad \text{CL: } f(0) = 0 \quad f(L) = 0$$

Pour quels λ existe-t-il des solutions f non-nulles

PAS 2 : Introduction d'un maillage & valeurs nodales des champs

$$x_i = i \delta x, \quad i = 0, \dots, M \quad f_i = f(x_i) \quad \frac{d^2 f_i}{dx} = \frac{d^2 f}{dx^2}(x_i)$$

avec $\delta x = L/M$

PAS 3 : Problème discrétisé, une équation algébrique par point de maillage

eq. point 0 $f_0 = 0$

eq. points i
 $i \in \{1, \dots, M-1\}$

$$\frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{\delta x^2} = \lambda f_i$$

eq. point M $f_M = 0$

PAS 4 : Ecriture matricielle

On cherche à écrire le problème discrétisé comme un problème aux valeurs propres (généralisé) matriciel $\mathbf{A}\mathbf{f} = \lambda\mathbf{B}\mathbf{f}$

Notons $a = 1/\delta x^2$

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccccc} 1 & & & & \\ a & -2a & a & & \\ & a & -2a & a & \\ & & a & -2a & a \\ & & & a & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \dots \\ f_{M-1} \\ f_M \end{bmatrix} \\ \hline \mathbf{A} \quad \mathbf{f} \end{array} = \lambda \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccccc} 0 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \dots \\ f_{M-1} \\ f_M \end{bmatrix} \\ \hline \mathbf{B} \quad \mathbf{f} \end{array}$$

PAS 5 : Programmation

Il suffit de définir la matrice A et B, afin de pouvoir calculer les fonctions et les valeurs propres à l'aide de l'ordinateur. On utilisera $[F, \text{LAMBDA}] = \text{eig}(A, B)$ en Matlab

VALIDATION

Ici on connaît la solution analytique

$$\frac{d^2 f}{dx^2} - \lambda f = 0 \quad \begin{matrix} \text{on renomme} \\ \lambda = -k^2 \end{matrix} \quad \frac{d^2 f}{dx^2} + k^2 f = 0$$

Solution

$$f = A \sin kx + B \cos kx$$

Les conditions aux limites fixent

$$\begin{aligned} f(0) = 0 &\Rightarrow B = 0 \\ f(L) = 0 &\Rightarrow A \sin kL = 0 \quad \text{soit} \quad k = k_n = \frac{n\pi}{L}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \end{aligned}$$

Les fonctions propres sont donc

$$f_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad \lambda_n = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}$$

Est-ce qu'on les retrouve ?

code valeurspropres1d_general.m
+ validation

PAS 4' : Ecriture matricielle, qui élimine les points de bord

Des conditions limites homogènes peuvent toujours être éliminées.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -2a & a & & & \\ a & -2a & a & & \\ & \searrow & \searrow & \searrow & \\ & & a-2a & a & \\ & & & a-2a & \\ & & & & a-2a \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_{M-2} \\ f_{M-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}} = \lambda \underbrace{\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_{M-2} \\ f_{M-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}}$$

de la forme $\mathbf{Af} = \lambda \mathbf{f}$

PAS 5' : Programmation

Il suffit de définir la matrice A et B, afin de pouvoir calculer les fonctions et les valeurs propres à l'aide de l'ordinateur. On utilisera $[F, \text{LAMBDA}] = \text{eig}(A)$ en Matlab

code valeurspropres1d_reduit.m
+ validation

1.4 Problème aux valeurs propres + CL différentes

PAS 1 : Définition du problème continu

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \lambda f \quad \forall x \in [0, L] \quad \text{CL: } f'(0) = 0 \quad f(L) = 0$$

Pour quels λ existe-t-il des solutions f non-nulles ?

PAS 2+3+4+5 ou 4'+5' : A vous maintenant !

2. Problèmes instationnaires 1D

2.1 Advection 1D : schéma explicite UPWIND

PAS 1 : Définition du problème continu

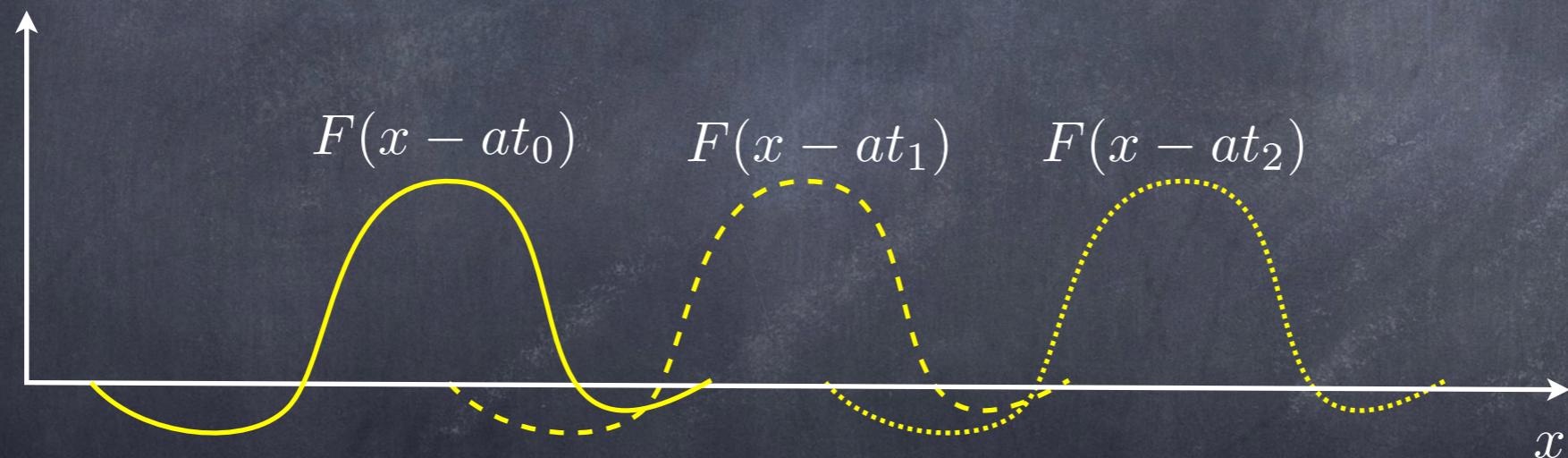
$$\frac{\partial f}{\partial t} + a \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad a > 0 \quad x \in [0, L] \quad t \in [0, T]$$

1 CI : $f(x, 0) = F(x)$

1 CL : $f(0, t) = F(-at)$

Solution ?

$$f(x, t) = F(x - at)$$



La fonction avance vers des valeurs de x croissantes, sans se déformer.
Peut-on retrouver ce comportement dans une solution numérique du problème.

PAS 2 : Introduction d'un maillage, de temps discrets & des valeurs nodales des champs

maillage : $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_M = L$ M+1 points d'espace

$x_i = i \delta x$, $i = 0, \dots, M$ avec $\delta x = L/M$ uniforme

temps : $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N = T$ N+1 temps

$t_n = n \delta t$, $n = 0, \dots, N$ avec $\delta t = T/N$ uniforme

$$f_i^n = f(x_i, t_n) \quad \frac{\partial f_i^n}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t}(x_i, t_n) \quad \frac{\partial f_i^n}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_i, t_n)$$

PAS 3 : Ecrire le problème discréteisé

philosophie : 1 eq par point de maillage ET par temps discret

sur les points de bords, on impose les CL

sur les points intérieurs, on impose une traduction diff. finies de l'EDP

INITIALISATION : on commence par traduire la condition initiale qui fixe l'état à n=0

$$f_j^0 = F(x_j) \quad j = 0, \dots, M$$

AVANCEMENT TEMPOREL : on cherche des équations algébriques pour tous les points, qui permettent de trouver le champ à tous les temps suivants à partir du champ au(x) temps précédent(s).

Sur le point de bord, à l'entrée du domaine ($a>0$), on dispose d'une condition de Dirichlet qui fixe la valeur de la fonction à tout temps.

$$f_0^{n+1} = F(-at_{n+1}) \quad n = 0, \dots, N - 1$$

Sur les points intérieurs on impose une version discrétisée de l'EDP, ici

$$\frac{\partial f_j^n}{\partial t} + a \frac{\partial f_j^n}{\partial x} = 0 \quad \begin{matrix} j = 1, \dots, M \\ n = 0, \dots, N - 1 \end{matrix} \xrightarrow{\text{lié au choix du schéma}}$$

Dans le “schéma numérique” UPWIND, on discrétise la dérivée temporelle utilisant une formule (F) et la dérivée spatiale utilisant une formule (B)

$$\frac{\partial f_j^n}{\partial t} \simeq \frac{f_j^{n+1} - f_j^n}{\delta t} \quad (\text{F}) \quad \frac{\partial f_j^n}{\partial x} \simeq \frac{f_j^n - f_{j-1}^n}{\delta x} \quad (\text{B})$$

Ceci donne

$$\frac{f_j^{n+1} - f_j^n}{\delta t} + a \frac{f_j^n - f_{j-1}^n}{\delta x} = 0 \quad \longrightarrow \quad f_j^{n+1} = f_j^n - \frac{a \delta t}{\delta x} (f_j^n - f_{j-1}^n)$$

ou encore avec $C = \frac{a \delta t}{\delta x}$ un nombre sans dimension

$$f_j^{n+1} = (1 - C)f_j^n + Cf_{j-1}^n \quad \begin{matrix} j = 1, \dots, M \\ n = 0, \dots, N-1 \end{matrix} \quad \xrightarrow{\hspace{10em}} \text{on comprend mieux pourquoi.}$$

En résumé nous avons donc pour tous les points et pour tout $n = 0, \dots, N-1$

$$\begin{cases} f_0^{n+1} = F(-at_{n+1}) \\ f_j^{n+1} = (1 - C)f_j^n + Cf_{j-1}^n & j = 1, \dots, M \end{cases}$$

Ceci est une formule récursive, qui permet de calculer les valeurs nodales du champ à temps $(n+1)$ à partir de celles du temps n précédent.

On appelle ce schéma **explicite** car la formule est explicite : on ne doit résoudre aucune équation afin de trouver l'état suivant du champ.

PAS 4 : Ecriture matricielle

INITIALISATION

$$\begin{bmatrix} f_0^0 \\ f_1^0 \\ \vdots \\ f_M^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(x_0) \\ F(x_1) \\ \vdots \\ F(x_M) \end{bmatrix}$$

AVANCEMENT TEMPOREL

Boucle sur $n = 0, \dots, N - 1$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} f_0^{n+1} \\ f_1^{n+1} \\ \ddots \\ f_j^{n+1} \\ \ddots \\ f_{M-1}^{n+1} \\ f_M^{n+1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}^{n+1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & .. & .. & .. & .. \\ C & 1-C & 0 & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & 0 & C & 1-C & 0 & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & 0 & C & 1-C & 0 \\ .. & .. & .. & .. & 0 & C & 1-C \end{bmatrix}}_{\mathcal{E}} \underbrace{\begin{bmatrix} f_0^n \\ f_1^n \\ \ddots \\ f_j^n \\ \ddots \\ f_{M-1}^n \\ f_M^n \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}^n} + \underbrace{\begin{bmatrix} F(-at_{n+1}) \\ 0 \\ .. \\ .. \\ .. \\ .. \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}^{n+1}}$$

“Opérateur” ou matrice
d’évolution

PAS 5 : Programmation

Nous implémentons le précédent schéma dans le programme Matlab
testupwind.m.

$$F(x) = \cos(x) \quad L = 20 \quad T = 100 \quad \delta x = 0.01 \quad \delta t = 0.01$$

et a est une vitesse donnée à l'entrée de la fonction.

code testupwind.m
+ validation

Le code retrouve bien la solution analytique si $C < 1$
Mais instabilité numérique si $C > 1$

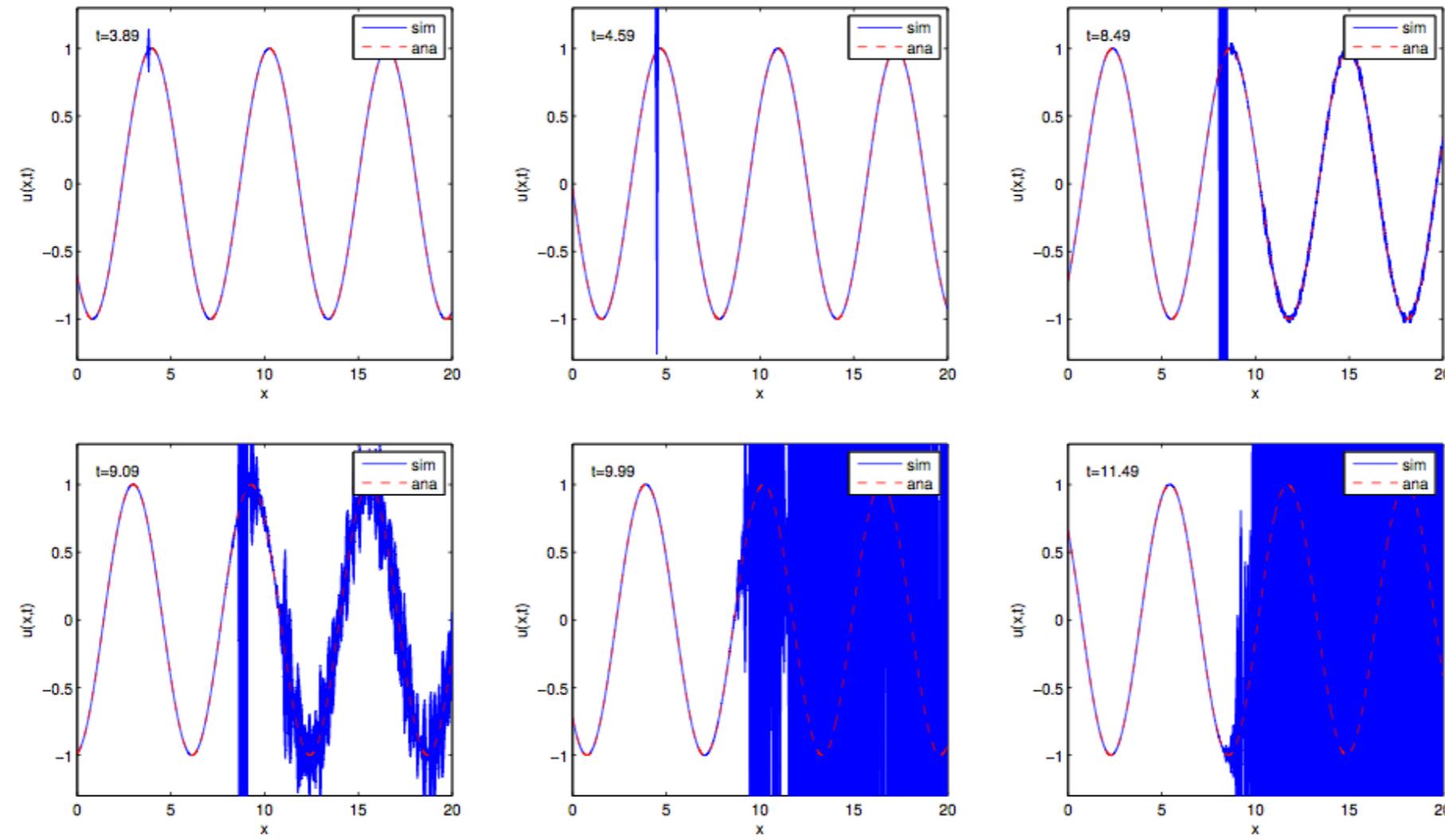


FIGURE II.2 – Simulation de l'équation d'advection avec un schéma Upwind. Pour les paramètres choisis $C = a\delta t/\delta x = 1.02$ la solution numérique (sim), devient instable après un temps fini. De très grands écarts avec la solution analytique $u(x, t) = \cos(x - at)$ (ana) se manifestent alors.

A chaque pas de temps, on fait des erreurs d'approximation et ces erreurs peuvent s'accumuler pour mener à un phénomène d'instabilité numérique.

Un code numérique doit être stable si on veut l'utiliser en pratique. Nous disposons d'outils théoriques pour caractériser les domaines de stabilité d'un code => Section 3

2.2 Diffusion 1D : schéma implicite CRANK-NICOLSON

PAS 1 : Définition du problème continu

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = s \quad \alpha > 0 \quad x \in [0, L] \quad \forall t \in [0, T]$$

$$CI : f(0, x) = g(x)$$

$$CL : f(t, 0) = G(t)$$

$$f(t, L) = H(t)$$

PAS 2 : Maillage, temps discrets & discréttisation des champs

même qu'avant

PAS 3 : une équation par point de maillage et par temps

INITIALISATION : fixer l'état à n=0

$$f_j^0 = g_j \quad j = 0, \dots, M$$

AVANCEMENT TEMPOREL :

Sur les points de bords on écrit les conditions aux limites. Ici, pas de difficultés car on a des CL de type Dirichlet. On les exprime à temps $n+1$

$$f_0^{n+1} = G^{n+1} \quad f_M^{n+1} = H^{n+1} \quad n = 0, \dots, N - 1$$

Pour tous les autres points intérieurs on essaie d'écrire une formule algébrique récursive, qui est consistante avec l'EDP de diffusion. Ici le schéma de Crank-Nicolson dicte que

$$\begin{aligned} f_j^{n+1} &= f_j^n + \frac{S}{2} [(f_{j-1}^{n+1} - 2f_j^{n+1} + f_{j+1}^{n+1}) + (f_{j-1}^n - 2f_j^n + f_{j+1}^n)] \\ &\quad + \frac{\delta t}{2} (s_j^n + s_j^{n+1}) \end{aligned} \quad \begin{aligned} n &= 0, \dots, N - 1 \\ j &= 1, \dots, M - 1 \end{aligned}$$

où $S = \frac{\alpha \delta t}{\delta x^2}$ est un nombre sans dimension important.

Pour comprendre ce schéma, on peut voir le processus de discrétisation en deux étapes séparés (d'abord temps puis espace ou inversement) *au tableau*

Ce schéma est **implicite**, car on ne peut pas directement calculer le champ à temps $n+1$ à partir des valeurs nodales aux temps précédents.

pour faire le lien avec la notation matricielle, il convient de réorganiser les termes ainsi

$$\begin{aligned} f_j^{n+1} - \frac{S}{2} (f_{j-1}^{n+1} - 2f_j^{n+1} + f_{j+1}^{n+1}) & \quad n = 0, \dots, N-1 \\ = f_j^n + \frac{S}{2} (f_{j-1}^n - 2f_j^n + f_{j+1}^n) + \frac{\delta t}{2} (s_j^n + s_j^{n+1}) & \quad j = 1, \dots, M-1 \end{aligned}$$

Tous les termes qui font appel aux valeurs nodales de f à temps $n+1$, sont mis à gauche tous les autres à droite.

PAS 4 : écriture matricielle

INITIALISATION

$$\begin{bmatrix} f_0^0 \\ f_1^0 \\ \vdots \\ f_M^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \vdots \\ g_M \end{bmatrix}$$

AVANCEMENT TEMPOREL

(page suivante)

Boucle sur $n = 0, \dots, N-1$

AVANCEMENT TEMPOREL

Boucle sur $n = 0, \dots, N - 1$

$$\frac{\begin{bmatrix} 1 & & & \\ -S/2 & (1+S) & -S/2 & \\ & .. & .. & \\ & -S/2 & (1+S) & -S/2 \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0^{n+1} \\ f_1^{n+1} \\ .. \\ f_{M-1}^{n+1} \\ f_M^{n+1} \end{bmatrix}}{\mathcal{O}_g} = S = \frac{\alpha \delta t}{\delta x^2}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} 0 & & & \\ S/2 & (1-S) & S/2 & \\ & .. & .. & \\ & S/2 & (1-S) & S/2 \\ & & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0^n \\ f_1^n \\ .. \\ f_{M-1}^n \\ f_M^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G^{n+1} \\ (s_1^{n+1} + s_1^n)\delta t/2 \\ .. \\ (s_{M-1}^{n+1} + s_{M-1}^n)\delta t/2 \\ H^{n+1} \end{bmatrix}}{\mathcal{O}_d \mathbf{f}^n} = \mathbf{g}^{n+1}$$

Si la matrice inverse est facile à calculer alors

opérateur d'évolution

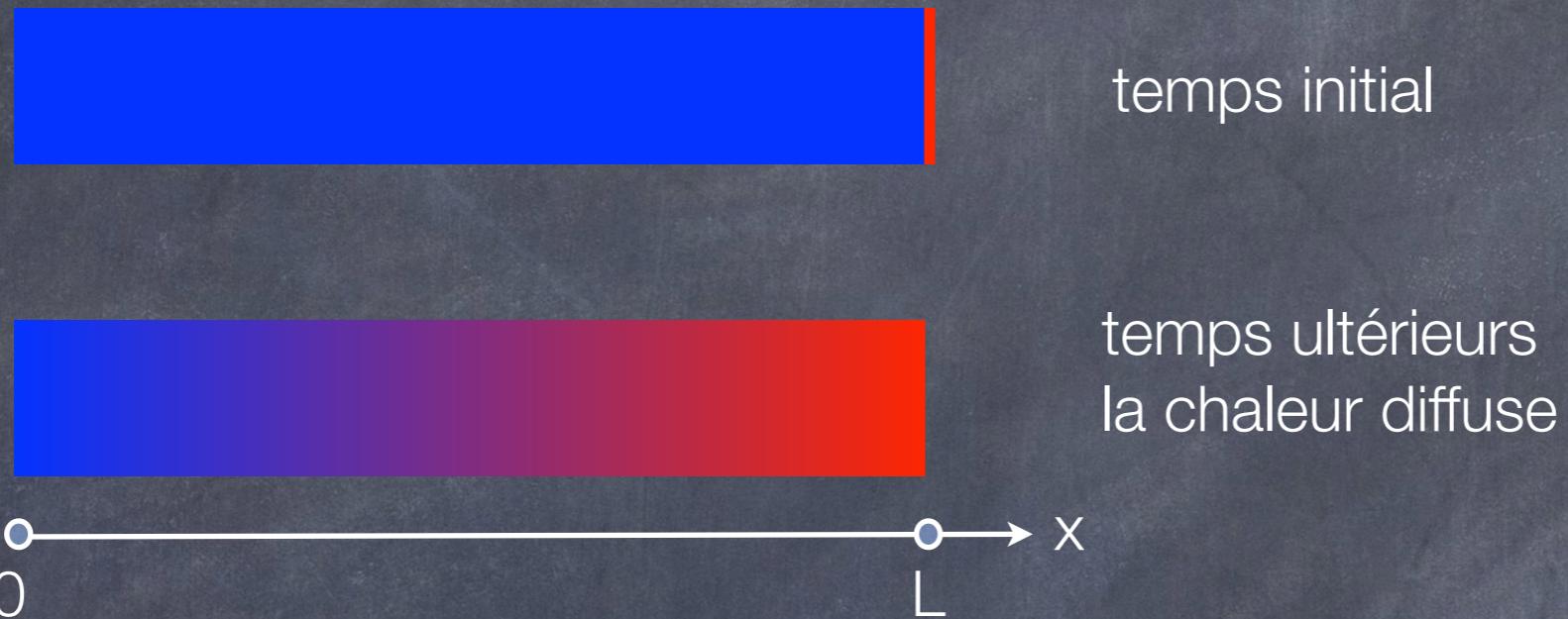
$$\mathbf{f}^{n+1} = \mathcal{O}_g^{-1}(\mathcal{O}_d \mathbf{f}^n + \mathbf{g}^{n+1})$$

$$\mathcal{E} = \mathcal{O}_g^{-1} \mathcal{O}_d$$

Sinon, il faut résoudre un grand système linéaire à chaque pas de temps.

PAS 5 : Programmation

On programme un cas concret. Un matériau solide, initialement à température basse est mise en contact avec une source chaude à temps $t=0$.



on souhaite simuler le transitoire. On choisit par exemple $L=10$ et

$$CI : f(x, 0) = 0$$

$$CL : f(0, t) = 0$$

$$f(L, t) = 1$$

code testCNdif.m

il n'y a pas de source $s(x, t) = 0$ de chaleur dans la barre.

3. Consistance & stabilité

3.1 Schémas numériques

Dans cette section on suppose qu'on résolve un problème instationnaire 1D tel que

$$\text{(advection 1D)} \quad \frac{\partial f}{\partial t} + a \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad a > 0$$

$$\text{(diffusion 1D)} \quad \frac{\partial f}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad \alpha > 0$$

$$\text{(diff-adv 1D)} \quad \frac{\partial f}{\partial t} + a \frac{\partial f}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad a, \alpha > 0$$

A l'aide de la méthode des différences finies. Comme d'habitude on note

$$f_j^n = f(x_j, t_n)$$

pour le champ discret sur les points de maillage et les temps discrets. Dans toute cette section, on travaille avec un pas d'espace δx et un pas de temps δt constant.

On peut imaginer une ‘infinité’ de schémas numériques qui permettent d’obtenir un algorithme pour marcher en temps une solution. Quelques exemples

$$(\text{FTCS adv}) \quad \frac{f_j^{n+1} - f_j^n}{\delta t} + a \frac{f_{j+1}^n - f_{j-1}^n}{2\delta x} = 0$$

$$(\text{CN adv}) \quad \frac{f_j^{n+1} - f_j^n}{\delta t} + \frac{a}{2} \left(\frac{f_{j+1}^{n+1} - f_{j-1}^{n+1}}{2\delta x} + \frac{f_{j+1}^n - f_{j-1}^n}{2\delta x} \right) = 0$$

$$(\text{I3N diff}) \quad \frac{3f_j^{n+1} - 4f_j^n + f_j^{n-1}}{2\delta t} - \alpha \frac{f_{j+1}^{n+1} - 2f_j^{n+1} + f_{j-1}^{n+1}}{\delta x^2} = 0$$

(autres exemples sur la feuille donnée et sur DOKEOS)

Chacun de ces schémas peut être plus au moins précis, plus au moins facile à utiliser et plus ou moins stable en fonction des paramètres $a, \alpha, \delta x, \delta t$

La caractérisation de ces propriétés fait l’objet de cette section 3 du chapitre.

Les problèmes étudiés ici sont linéaires et 1D en espace. On peut alors toujours réécrire les schémas sous **une forme générale**

2 niveaux
temporaux
(n+1 et n)

$$\sum_{j \in \mathcal{J}} a_j f_j^{n+1} = \sum_{k \in \mathcal{K}} b_k f_k^n$$

*(on ignore
les sources)*

3 niveaux
temporaux
(n+1,n,n-1)

$$\sum_{j \in \mathcal{J}} a_j f_j^{n+1} = \sum_{k \in \mathcal{K}} b_k f_k^n + \sum_{l \in \mathcal{L}} c_l f_l^{n-1}$$

L'idée est ici de mettre à gauche tous les termes à temps n+1, à droite tous les termes aux temps précédents (n,n-1,...). Chaque schéma se caractérise par un certain nombre de **niveaux temporaux** et de **points d'espace impliqués**.

Un schéma est **explicite** si

$$\mathcal{J} = \{j\} \quad \text{ou} \quad a_j = 1$$

Dans ce cas, on obtient directement la solution à un temps n+1 (cf. section 2.1) à partir de la solution aux temps précédents. Dans le cas opposé, le schéma est **implicite**. La solution à temps n+1 se trouve comme la solution d'un système linéaire

$$(\text{FTCS adv}) \quad f_j^{n+1} = f_j^n - \frac{C}{2}(f_{j+1}^n - f_{j-1}^n) \quad C = \frac{a\delta t}{\delta x}$$

2 niveaux temporaux
3 points d'espace
explicite

$$(\text{CN adv}) \quad f_j^{n+1} + \frac{C}{4}(f_{j+1}^{n+1} - f_{j-1}^{n+1}) = f_j^n - \frac{C}{4}(f_{j+1}^n - f_{j-1}^n) \quad C = \frac{a\delta t}{\delta x}$$

2 niveaux temporaux
3 points d'espace
implicite

$$(\text{I3N diff}) \quad \left(\frac{3}{2} + 2S \right) f_j^{n+1} - S f_{j+1}^{n+1} - S f_{j-1}^{n+1} = 2f_j^n - \frac{1}{2} f_j^{n-1} \quad S = \frac{\alpha \delta t}{\delta x^2}$$

3 niveaux temporaux
3 points d'espace
implicite

3.2 Consistance & ordre d'un schéma numérique

Il existe une multitude de schéma permettant de résoudre une même équations et pour un schéma donné, il faut se convaincre que le schéma soit **consistant**, c.a.d.

Est-ce que le schéma représente bien l'équation exacte dans la limite où le pas d'espace et la pas de temps tendent vers zero, $\delta x, \delta t \rightarrow 0$ et partout dans le domaine considéré ?

Pour tester la consistance, il suffit d'appliquer le schéma à une fonction continûment différentiable $f(x, t) \in \mathcal{C}_\infty$. Ensuite on propose des développements limités

$$f_j^{n+1} = f_j^n + \delta t \frac{\partial f_j^n}{\partial t} + \frac{\delta t^2}{2} \frac{\partial^2 f_j^n}{\partial t^2} + O(\delta t^3)$$

$$f_{j\pm 1}^n = f_j^n \pm \delta x \frac{\partial f_j^n}{\partial x} + \frac{\delta x^2}{2} \frac{\partial^2 f_j^n}{\partial x^2} + O(\delta x^3) \quad \text{etc...}$$

autour d'un seul endroit (ici x_j) et un seul temps (ici t_n) et on remplace ces expression dans le schéma proposé

(comme en chapitre 1, mais avec des dérivées partielles en x et t)

Pour un schéma quelconque ceci résultera dans

$$(\text{schéma})_j^n = (\text{equation exacte})_j^n + (\text{résidu})_j^n$$

Un schéma ne sera que consistant si le résidu décroît à zéro pour $\delta x, \delta t \rightarrow 0$ et ce résidu sera alors (le plus souvent) de la forme

$$(\text{résidu})_j^n = r_j^n = \delta x^p \text{ (terme)} + \delta t^q \text{ (terme)}$$

Ici **p** est un exposant qui indique **l'ordre spatial** du schéma, **q** indique **l'ordre temporel**.
On appelle **min(p,q)** **l'ordre global** du schéma.

(FTCS adv)
$$\frac{f_j^{n+1} - f_j^n}{\delta t} + a \frac{f_{j+1}^n - f_{j-1}^n}{2\delta x} = 0$$

On remplace
$$f_j^{n+1} = f_j^n + \delta t \frac{\partial f_j^n}{\partial t} + \frac{\delta t^2}{2} \frac{\partial^2 f_j^n}{\partial t^2} + O(\delta t^3)$$

$$f_{j\pm 1}^n = f_j^n \pm \delta x \frac{\partial f_j^n}{\partial x} + \frac{\delta x^2}{2} \frac{\partial^2 f_j^n}{\partial x^2} \pm \frac{\delta x^3}{6} \frac{\partial^3 f_j^n}{\partial x^3} + O(\delta x^4)$$

...

$$\frac{f_j^{n+1} - f_j^n}{\delta t} + a \frac{f_{j+1}^n - f_{j-1}^n}{2\delta x}$$

$$= \frac{\partial f_j^n}{\partial t} + a \frac{\partial f_j^n}{\partial x} + \frac{\delta t}{2} \frac{\partial^2 f_j^n}{\partial t^2} + O(\delta t^2) + a \frac{\delta x^2}{6} \frac{\partial^3 f_j^n}{\partial x^3} + O(\delta x^4)$$

(equation exacte) $_j^n$

(residu) $_j^n$

Le schéma est consistant, car on retrouve bien l'équation exacte dans la limite $\delta x, \delta t \rightarrow 0$. L'ordre temporel est 1, l'ordre spatial est 2, l'ordre global 1

D'autres exemples seront donnés en TD. **Attention:** pousser les DL suffisamment loin, afin de pouvoir conclure sur l'ordre d'un schéma.

En théorie, la précision d'un schéma d'ordre supérieur est plus élevée, mais attention. Ceci n'est que vrai dans la limite $\delta x, \delta t \rightarrow 0$

exemple: $x \leq 100 x^2 \Leftrightarrow x \geq 0.01$

Parfois un schéma d'ordre 1, peut être plus précis qu'un schéma d'ordre sup à dx,dt fini

3.3 Convergence & stabilité d'un schéma numérique

3.3.a Définition : convergence d'un schéma

Dans la section 2 de ce chapitre, nous avons donné de nombreux exemples, dans lesquels on rassemblait les équations des points discret sous forme matricielle. On utilisera cette notation ici

$$\mathbf{f}^n = \begin{bmatrix} f_0^n \\ \dots \\ f_j^n \\ \dots \\ f_M^n \end{bmatrix}$$

solution numérique

$$\mathbf{f}_{ex}^n = \begin{bmatrix} f_{ex,0}^{n+1} \\ \dots \\ f_{ex,j}^{n+1} \\ \dots \\ f_{ex,M}^{n+1} \end{bmatrix}$$

solution exacte (suffix ex)

Un schéma numérique sera dit **convergent** pour une norme donné (notée $\|\cdot\|$), si pour toute solution initiale et pour tout n

$$\|\mathbf{f}_{ex}^n - \mathbf{f}^n\| \xrightarrow{\delta x, \delta t \rightarrow 0} 0 \quad \text{à } \delta x / \delta t \text{ fixé.}$$

3.3.b. La consistance n'implique pas la convergence

Nous avons vu que le schéma donnant la boucle d'avancement temporel se laisse écrire sous forme matricielle. Pour un schéma **à deux niveaux temporaux**, ceci donne

$$\begin{bmatrix} f_0^{n+1} \\ \cdots \\ f_j^{n+1} \\ \cdots \\ f_M^{n+1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \text{“Opérateur” ou matrice} & \cdots \\ \text{d’évolution} & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{bmatrix}}_{\mathcal{E}} \underbrace{\begin{bmatrix} f_0^n \\ \cdots \\ f_j^n \\ \cdots \\ f_M^n \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}^n} + \underbrace{\begin{bmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}^{n+1}}$$

soit

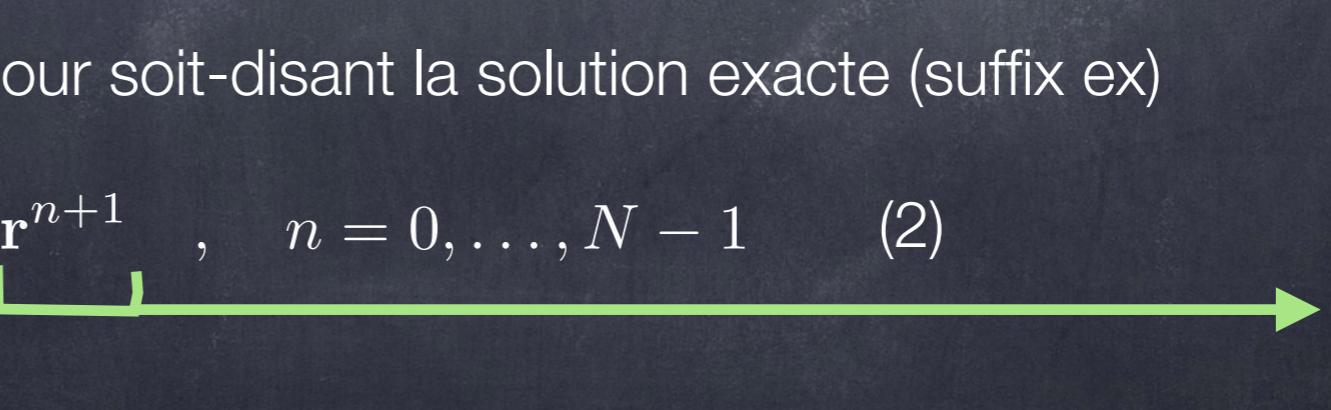
$$\mathbf{f}^{n+1} = \mathcal{E}\mathbf{f}^n + \mathbf{F}^{n+1}, \quad n = 0, \dots, N-1 \quad (1)$$

On peut écrire une équation pour soit-disant la solution exacte (suffix ex)

$$\mathbf{f}_{ex}^{n+1} = \mathcal{E}\mathbf{f}_{ex}^n + \mathbf{F}^{n+1} + \delta t \mathbf{r}^{n+1}, \quad n = 0, \dots, N-1 \quad (2)$$

qui fait intervenir les résidus rencontrés dans l'étude de la consistance

résidus



$$\begin{bmatrix} r_0^{n+1} \\ \cdots \\ r_j^{n+1} \\ \cdots \\ r_j^{n+1} \end{bmatrix}$$

On introduit l'erreur comme la différence entre la solution exacte et la solution numérique

$$\mathbf{e}^n = \mathbf{f}_{ex}^n - \mathbf{f}^n$$

En soustrayant les équations (2)-(1), on obtient une équation pour l'évolution de l'erreur

$$\mathbf{e}^{n+1} = \mathcal{E} \mathbf{e}^n + \delta t \mathbf{r}^{n+1} \quad , \quad n = 0, \dots, N-1$$

Même quand l'erreur est zéro au départ, elle ne le restera pas forcément au cours des itérations.

$$\mathbf{e}^0 = \mathbf{f}_{ex}^0 - \mathbf{f}^0 = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{e}^1 = \delta t \mathbf{r}^1$$

$$\mathbf{e}^2 = \delta t (\mathcal{E} \mathbf{r}^1 + \mathbf{r}^2)$$

$$\mathbf{e}^3 = \delta t (\mathcal{E}^2 \mathbf{r}^1 + \mathcal{E} \mathbf{r}^2 + \mathbf{r}^3)$$

....

$$\mathbf{e}^n = \delta t \sum_{m=1}^n \mathcal{E}^{n-m} \mathbf{r}^m$$

Si on introduit une norme (notée $\|\dots\|$) on peut mesurer l'erreur de manière plus globale et on peut aussi la majorer.

$$\|\mathbf{e}^n\| = \delta t \left\| \sum_{m=1}^n \mathcal{E}^{n-m} \mathbf{r}^m \right\| \leq \delta t \sum_{m=1}^n \|\mathcal{E}^{n-m} \mathbf{r}^m\| \leq n \delta t \max_{0 \leq m \leq n} \|\mathcal{E}^{n-m} \mathbf{r}^m\|$$

La consistance d'un schéma **garantie** que

$$\mathbf{r}^n \xrightarrow[\delta x, \delta t \rightarrow 0]{} 0 \quad \forall n$$

mais **ne garantie pas** que

$$\|\mathcal{E}^{n-m} \mathbf{r}^m\| \xrightarrow[\delta x, \delta t \rightarrow 0]{} 0 \quad \forall n, m$$

Cette dernière quantité $\|\mathcal{E}^{n-m} \mathbf{r}^m\|$ peut même croître de manière incontrôlée lorsque $n \rightarrow +\infty$ et en conséquence l'erreur ne décroîtra pas forcément vers zéro:

$$\|\mathbf{e}_n\| \cancel{\xrightarrow[\delta x, \delta t \rightarrow 0]{} 0}$$

Il faut donc imposer **une condition supplémentaire** pour assurer la convergence:
un schéma numérique doit être stable.

3.3.c. Condition de stabilité

Un schéma numérique est stable pour la norme $\|\cdot\|$ si pour tout vecteur \mathbf{x} , il existe une constante C indépendante de $\delta x, \delta t, n, \mathbf{x}$ telle que

$$\|\mathcal{E}^n \mathbf{x}\| \leq C \|\mathbf{x}\|, \quad 0 \leq n \leq T/\delta t$$

On voit ici que cette condition est associé à une durée maximale de la simulation T . Avec cette relation, on simplifie (cf. slide précédent)

$$\|\mathbf{e}^n\| \leq n \delta t \max_{0 \leq m \leq n} \|\mathcal{E}^{n-m} \mathbf{r}^m\| \leq CT \max_{0 \leq m \leq n} \|\mathbf{r}^m\|$$

Utilisant maintenant la consistance du schéma

$$\mathbf{r}^n \xrightarrow[\delta x, \delta t \rightarrow 0]{} 0 \quad 0 \leq n \leq T/\delta t$$

On trouve alors que le schéma converge

$$\|\mathbf{e}^n\| \xrightarrow[\delta x, \delta t \rightarrow 0]{} 0 \quad 0 \leq n \leq T/\delta t$$

Théorème de Lax: Si un schéma consistant d'ordre (global) p est stable, l'erreur tend vers 0 comme δx^p lorsque $\delta x, \delta t \rightarrow 0$ à $\delta x/\delta t$ fixe

3.4. Etude de stabilité par analyse de Fourier

3.4.a Introduction

L'étude de stabilité d'un schéma peut se faire de manière précise en étudiant **le rayon spectral de l'opérateur d'évolution**. Ceci fait intervenir les notions de valeurs et vecteur propres et sera un peu trop avancé pour ce cours (traité en M2).

Si on s'affranchit de l'effet des conditions aux limites, on peut utiliser l'analyse de Fourier afin de trouver une condition de stabilité plus simple, qui s'exprime comme

$$\max_{k \in \mathbb{R}} |g(k, \delta x, \delta t)| \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \text{schéma stable}$$

On appelle $g(k, \delta x, \delta t)$ **le facteur d'amplification** du schéma et k est ici un nombre d'onde de l'espace de Fourier. Le calcul de ce facteur se fait directement à partir de la définition du schéma.

3.4.b Quelques rappels sur l'analyse de Fourier

Soit $f(x)$ une fonction réelle intégrable sur l'axe réel. On définit **la transformée de Fourier** ici comme

$$TF[f(x)](k) = \hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ikx} dx$$

La **transformée de Fourier inverse** est définie comme

$$TFI[\hat{f}(k)](x) = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k)e^{ikx} dk$$

Suite à l'utilisation de ikx (au lieu de $i2\pi\xi x$) dans les exponentielles on a besoin d'un facteur de normalisation $1/\sqrt{2\pi}$ (pour les anciens L3 d'Orsay)

Pour parler de stabilité, on aura besoin d'introduire une norme $\|\dots\|$. On choisit ici **la norme L^2** que l'on définit comme

$$\|f\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} |f|^2 dx}$$

Une fonction qui à une norme $< \infty$ est **carré-intégrable** sur l'axe des réels: $f \in L^2(\mathbb{R})$

On utilisera l'identité de Parséval

$$\|f\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(k)|^2 dk = \|\hat{f}\|^2$$

qui permet d'identifier la norme L^2 dans l'espace de Fourier à la norme L^2 dans l'espace physique.

3.4.c. Facteur d'amplification d'un schéma à 2 niveaux

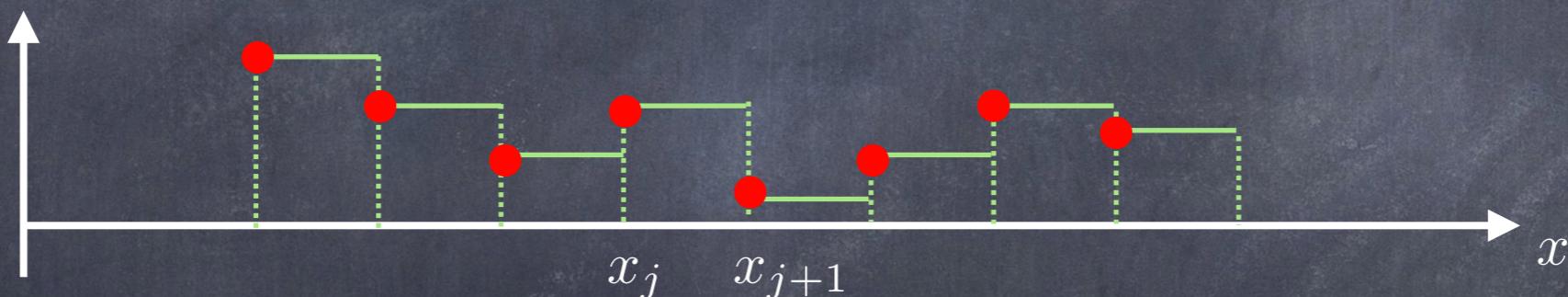
Soit un schéma numérique à 2 niveaux qui nous est donné, que l'on suppose de la forme

$$\sum_m a_m f_{j+m}^{n+1} = \sum_m b_m f_{j+m}^n \quad \longrightarrow \quad \mathbf{f}^{n+1} = \mathcal{E} \mathbf{f}^n$$

Ici on ne spécifie pas comment varie m , mais vous pouvez bien imaginer que l'on peut toujours écrire le schéma sous cette forme. On **oublie l'existence de bords.**

On construit maintenant des fonctions constantes par morceaux:

$$F^n(x) = f_j^n, \quad x_j \leq x \leq x_{j+1}$$



Pour cette fonction on peut, grâce au schéma numérique, écrire que

$$\sum_m a_m F^{n+1}(x + m\delta x) = \sum_m b_m F^n(x + m\delta x) \quad \forall x$$

Toute dépendance de l'index j a disparue. On multiplie par $e^{-ikx}/\sqrt{2\pi}$ et on intègre sur l'axe réel afin de prendre la transformée de Fourier de l'équation. Par quelques manipulations basiques (propriété de translation)

$$\sum_m a_m e^{ikm\delta x} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F^{n+1}(x + m\delta x) e^{-ik(x+m\delta x)} dx \right)$$

$$= \sum_m b_m e^{ikm\delta x} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F^n(x + m\delta x) e^{-ik(x+m\delta x)} dx \right)$$

$$<=> \sum_m a_m e^{ikm\delta x} \hat{F}^{n+1}(k) = \sum_m b_m e^{ikm\delta x} \hat{F}^n(k)$$

Le facteur d'amplification est défini comme la quantité

$$g(k, \delta x, \delta t) = \frac{\hat{F}^{n+1}(k)}{\hat{F}^n(k)} = \frac{\sum_m b_m e^{ikm\delta x}}{\sum_m a_m e^{ikm\delta x}}$$

Donnons un exemple, pour illustrer comment on procède en pratique

$$(\text{FTCS adv}) \quad \frac{f_j^{n+1} - f_j^n}{\delta t} + a \frac{f_{j+1}^n - f_{j-1}^n}{2\delta x} = 0$$

On commence par réécrire le schéma sous forme générale

$$f_j^{n+1} = f_j^n - \frac{C}{2}(f_{j+1}^n - f_{j-1}^n)$$

Ensuite on remplace

$$f_j^{n+1} = \hat{F}^{n+1} e^{ikx_j} , \quad f_j^n = \hat{F}^n e^{ikx_j} , \quad f_{j\pm 1}^n = \hat{F}^n e^{ik(x_j \pm \delta x)}$$

Ceci donne directement

$$\hat{F}^{n+1} e^{ikx_j} = \left(1 - \frac{C}{2} (e^{ik\delta x} - e^{-ik\delta x}) \right) \hat{F}^n e^{ikx_j}$$

Le facteur d'amplification devient

$$g = \frac{\hat{F}^{n+1}}{\hat{F}^n} = 1 - iC \sin k\delta x$$

On constate $|g| \geq 1 \quad \forall k$

3.4.e. Stabilité L^2

Nous avons déjà défini la norme L^2 d'une fonction. La norme L^2 d'un vecteur colonne est la norme Euclidienne

$$\|\mathbf{u}^n\| = \sqrt{\sum_{j=0}^M |u_j^n|^2}$$

C'est ce norme que l'on choisit afin de traduire la condition de stabilité (3.3.c)

$$\|\mathcal{E}^n \mathbf{x}\| \leq C \|\mathbf{x}\|, \quad 0 \leq n \leq T/\delta t \quad , \quad \forall \mathbf{x}$$

On peut maintenant relier cette condition à une condition sur $g(k, \delta x, \delta t)$

Revenant sur la définition de ce facteur on avait

$$\hat{F}^{n+1}(k) = g(k, \delta x, \delta t) \hat{F}^n(k)$$

Avec la norme L^2 dans l'espace de Fourier, on peut immédiatement écrire

$$\begin{aligned} \|\hat{F}^{n+1}\| &= |g(k, \delta x, \delta t)| \|\hat{F}^n(k)\| \\ &\leq \left(\max_{k \in \mathbb{R}} |g(k, \delta x, \delta t)| \right) \|\hat{F}^n(k)\| \end{aligned}$$

Application de l'identité de Parseval, permet de passer dans l'espace physique

$$\|F^{n+1}(x)\| \leq \left(\max_{k \in \mathbb{R}} |g(k, \delta x, \delta t)| \right) \|F^n(x)\| \quad (1)$$

et si on rappelle la définition des fonctions $F^n(x)$ et $F^{n+1}(x)$ on peut reconnaître que

$$\|F^n(x)\| = \sqrt{\delta x \sum_{j=0}^M |f_j^n|^2} = \sqrt{\delta x} \|\mathbf{f}^n\|$$

En conséquence, on peut simplifier l'équation (1) en

$$\|\mathbf{f}^{n+1}\| \leq \left(\max_{k \in \mathbb{R}} |g(k, \delta x, \delta t)| \right) \|\mathbf{f}^n\|$$

Si on boucle cette condition, on obtient donc

$$\|\mathbf{f}^n\| \leq \left(\max_{k \in \mathbb{R}} |g(k, \delta x, \delta t)| \right)^n \|\mathbf{f}^0\| \quad \text{soit} \quad \|\mathcal{E}^n \mathbf{f}^0\| \leq \left(\max_{k \in \mathbb{R}} |g(k, \delta x, \delta t)| \right)^n \|\mathbf{f}^0\|$$

Si on peut majorer

$$\left(\max_{k \in \mathbb{R}} |g(k, \delta x, \delta t)| \right)^n \leq C \quad \text{on aura la propriété de stabilité désirée}$$

Stabilité L^2 & Théorème de von Neumann

Un schéma à 2 niveaux temporaux sera **stable pour la norme** L^2 s'il existe une constante C indépendante de $\delta x, \delta t$ telle que

$$\forall \mathbf{f}^0 \in L^2(\mathbb{R}), \quad \|\mathbf{f}^n\| \leq C \|\mathbf{f}^0\|, \quad \text{pour } 0 \leq n \leq T/\delta t, \quad \frac{\delta x}{\delta t} \text{ fixé.}$$

Le théorème de von Neumann permet de relier cette stabilité L^2 à une condition sur le facteur d'amplification du schéma

Un schéma à 2 niveaux est stable L^2 si et seulement si

$$\max_{k \in \mathbb{R}} |g(k, \delta x, \delta t)| \leq 1 + M\delta t$$

avec g le facteur d'amplification, M une constante et à $\delta x/\delta t$ fixé

(Démo au tableau)

La notion de stabilité L^2 présentée ci-dessus, dépend du nombre de pas de temps maximal: $0 \leq n \leq T/\delta t$. Dans un cas concret, on aimeraient avoir des garanties sur la stabilité pour un nombre de pas de temps quelconque, d'où la notion de **stabilité asymptotique**.

En TD, on ne s'intéressera qu'à la stabilité asymptotique.

Stabilité asymptotique L^2 & Critère de von Neumann

Un schéma à 2 niveau temporeaux sera asymptotiquement **stable pour la norme L^2** s'il existe une constante C indépendante de $\delta x, \delta t$ telle que

$$\forall \mathbf{f}^0 \in L^2(\mathbb{R}), \quad \|\mathbf{f}^n\| \leq C \|\mathbf{f}^0\|, \quad \text{pour } \forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{\delta x}{\delta t} \text{ fixé.}$$

Le second théorème dit critère de von Neumann permet de relier cette stabilité asymptotique à une condition plus restrictive sur le facteur d'amplification du schéma

Un schéma à 2 niveaux est asymptotiquement stable L^2 si et seulement si

$$\max_{k \in \mathbb{R}} |g(k, \delta x, \delta t)| \leq 1$$

avec g le facteur d'amplification et à $\delta x/\delta t$ fixé

$$(\text{FTCS adv}) \quad \frac{f_j^{n+1} - f_j^n}{\delta t} + a \frac{f_{j+1}^n - f_{j-1}^n}{2\delta x} = 0$$

On commence par réécrire le schéma sous forme générale

$$f_j^{n+1} = f_j^n - \frac{C}{2}(f_{j+1}^n - f_{j-1}^n)$$

Ensuite on remplace

$$f_j^{n+1} = \hat{F}^{n+1} e^{ikx_j} , \quad f_j^n = \hat{F}^n e^{ikx_j} , \quad f_{j\pm 1}^n = \hat{F}^n e^{ik(x_j \pm \delta x)}$$

Ceci donne directement

$$\hat{F}^{n+1} e^{ikx_j} = \left(1 - \frac{C}{2} (e^{ik\delta x} - e^{-ik\delta x}) \right) \hat{F}^n e^{ikx_j}$$

Le facteur d'amplification devient

$$g = \frac{\hat{F}^{n+1}}{\hat{F}^n} = 1 - iC \sin k\delta x$$

On constate $|g| \geq 1 \quad \forall k$

Le schéma FTCS est inconditionnellement instable

3.4.f. Stabilité L^2 d'un schéma à 3 niveaux

Si nous avons un schéma à 3 niveaux temporels, on procède de manière très similaire.
Soit un tel schéma

$$\sum_m a_m f_{j+m}^{n+1} = \sum_m b_m f_{j+m}^n + \sum_m c_m f_{j+m}^{n-1}$$

Suivant exactement la même procédure que précédemment, nous obtenons après la transformée de Fourier

$$\left(\sum_m a_m e^{ikm\delta x} \right) \hat{F}^{n+1} = \left(\sum_m b_m e^{ikm\delta x} \right) \hat{F}^n + \left(\sum_m c_m e^{ikm\delta x} \right) \hat{F}^{n-1}$$

On divise cette équation par \hat{F}^{n-1} et on remarque que

$$g = \frac{\hat{F}^{n+1}}{\hat{F}^n} = \frac{\hat{F}^n}{\hat{F}^{n-1}} \Rightarrow g^2 = \frac{\hat{F}^{n+1}}{\hat{F}^{n-1}}$$

Le facteur d'amplification est solution d'un polynôme d'ordre 2

$$-\left(\sum_m a_m e^{ikm\delta x} \right) g^2 + \left(\sum_m b_m e^{ikm\delta x} \right) g + \left(\sum_m c_m e^{ikm\delta x} \right) = 0$$

Et il y a donc 2 solutions g_1 et g_2

On peut montrer que l'extension suivante du critère de von Neumann s'applique

Un schéma à 3 niveaux est asymptotiquement stable L^2 si et seulement si

$$\max_{i \in \{1,2\}} \left(\max_{k \in \mathbb{R}} |g_i(k, \delta x, \delta t)| \right) \leq 1$$

avec g le facteur d'amplification et à $\delta x/\delta t$ fixé

Exemple en TD, consultez la feuille avec les **propriétés de stabilité** de quelques schémas