

Principe Fondamental de la Dynamique

UN PEU D'HISTOIRE...

HISTOIRE

REPÈRES

PRINCIPE

FONDAMENTAL

SOLIDE QCQ

MOUVEMENT DE
TRANSLATION

MOMENT
D'INERTIE

MOUVEMENT DE
ROTATION

Au XVII^e siècle, **Galilée** énonce un principe simple:

Tout corps possède une certaine inertie qui l'oblige à conserver sa vitesse, à moins qu'une force extérieure l'oblige à arrêter ce mouvement

Moins d'un siècle après et en ayant bien pris soin de définir ce qu'est une masse, un poids et une force, **Isaac Newton** formule trois lois fondamentales :

1^{ère} loi : *Dans un repère galiléen, tout objet en état de mouvement rectiligne uniforme et soumis à aucune force extérieures, conserve son mouvement.*

2^{ème} loi : *Force = masse \times accélération .*

3^{ème} loi : *Tout corps soumis à une force exerce en retour une force de même intensité et de direction opposée.*

Le **P**rincipe **F**ondamental de la **D**ynamique est la traduction, avec les outils mathématiques actuels, des lois de Newton

REPÈRES UTILISÉS

HISTOIRE

REPÈRES

PRINCIPE

FONDAMENTAL

SOLIDE QCQ

MOUVEMENT DE
TRANSLATION

MOMENT
D'INERTIE

MOUVEMENT DE
ROTATION

Le PFD ne peut s'exprimer que dans certains repères (référentiels), les repères Galiléens.

- **Repère de Copernic:**

Origine au centre d'inertie du système solaire + trois directions stellaire "fixes".

Tout repère en translation par rapport au repère de Copernic peut être considéré comme Galiléen.

- **Repère lié au centre d'inertie de la terre :**

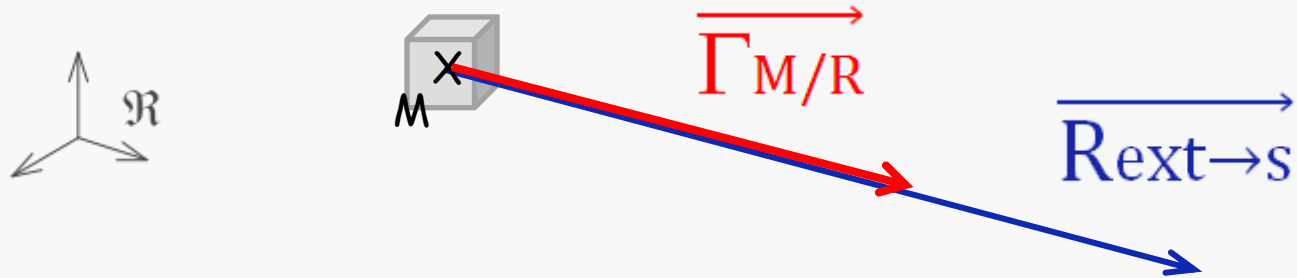
Origine au centre d'inertie de la terre + les directions stellaires précédentes (repère en translation non rectiligne et non uniforme par rapport au précédent)

- **Le repère terrestre :**

Origine locale du repère de travail. utilisation: convient en général au phénomènes mécaniques classiques. Il peut être considéré comme galiléen sur une période d'observation relativement courte.

PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA DYNAMIQUE

Cas d'un solide «Ponctuel »



Si le solide (S) est soumis à des actions extérieures se réduisant à une résultante $\overrightarrow{R_{ext \rightarrow s}}$ alors son mouvement est tel que :

$$\overrightarrow{R_{ext \rightarrow s}} = m \cdot \overrightarrow{\Gamma_{M/R}}$$

Somme de forces extérieures appliquées sur S = Masse de S × Accélération du point M dans le repère R

Unités : N = kg × m.s⁻²

Un Newton communique à une masse de 1 kg une accélération de 1 m.s⁻² dans sa direction

CAS D'UN SOLIDE QUELCONQUE

HISTOIRE

REPÈRES

PRINCIPE

FONDAMENTAL

SOLIDE QCQ

MOUVEMENT DE
TRANSLATION

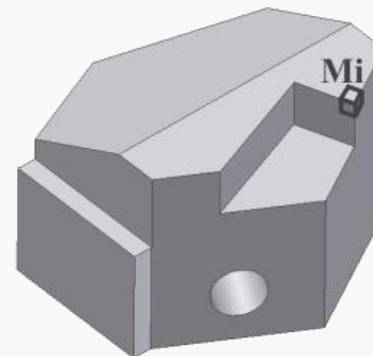
MOMENT
D'INERTIE

MOUVEMENT DE
ROTATION

Soit un solide (S) quelconque de masse m .

Contrairement au solide précédent, celui-ci peut subir des efforts en différents points. Ceux-ci peuvent le faire tourner. Il y aura donc présence de moments...

En appliquant la démonstration précédente à ce solide, il suffirait de considérer celui-ci comme une somme de points M_i de masses m_i



Si le solide (S) est soumis à des actions mécaniques extérieures quelconques :

$$\{\mathcal{T}(\text{ext} \rightarrow s)\} = \underset{A}{\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R(\text{ext} \rightarrow s)} \\ \overrightarrow{M_A(\text{ext} \rightarrow s)} \end{array} \right\}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R(\text{ext} \rightarrow s)} = \sum m_i \cdot \overrightarrow{\Gamma_{M_i/R}} \\ \overrightarrow{M_A(\text{ext} \rightarrow s)} = \sum \overrightarrow{AM_i} \wedge (m_i \cdot \overrightarrow{\Gamma_{M_i/R}}) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{Résultante mécanique} = \text{Résultante dynamique} \\ \text{Moment mécanique} = \text{Moment dynamique} \end{array}$$

On peut aussi écrire en utilisant les torseurs:

$$\{\mathcal{T} \text{ mécanique}\} = \{\mathcal{T} \text{ dynamique}\}$$

MOUVEMENTS PARTICULIERS

HISTOIRE

REPÈRES

PRINCIPE

FONDAMENTAL

SOLIDE QCQ

MOUVEMENT DE
TRANSLATION

MOMENT
D'INERTIE

MOUVEMENT DE
ROTATION

Le torseur dynamique contient des relations difficilement utilisables par un élève de terminale, Nous allons donc uniquement nous intéresser au cas particuliers de la translation et de la rotation

On peut montrer que, dans tous les cas :

$$\sum m_i \cdot \overrightarrow{\Gamma_{M_i/R}} = \underbrace{m}_{\text{Masse totale}} \cdot \underbrace{\overrightarrow{\Gamma_{G/R}}}_{\text{Vecteur accélération du centre de gravité G}}$$

Donc que, dans tous les cas :

$$\overrightarrow{R(\text{ext} \rightarrow s)} = m \cdot \overrightarrow{\Gamma_{G/R}}$$

Ce théorème permet déjà d'utiliser le PFD dans le cas d'un mouvement de translation

MOUVEMENT DE TRANSLATION

HISTOIRE

REPÈRES

PRINCIPE

FONDAMENTAL

SOLIDE QCQ

MOUVEMENT DE
TRANSLATION

MOMENT
D'INERTIE

MOUVEMENT DE
ROTATION

Si un solide (S) est en mouvement de translation par rapport à un repère galiléen \mathcal{R} , alors:

$$\begin{cases} \overrightarrow{R}(\text{ext} \rightarrow s) = m \cdot \overrightarrow{\Gamma}_{G/\mathcal{R}} \\ \overrightarrow{M}_G(\text{ext} \rightarrow s) = \vec{0} \end{cases}$$

$\overrightarrow{R}(\text{ext} \rightarrow s)$

Résultante des actions mécaniques extérieures exercées sur le solide S en **N**

$\overrightarrow{M}_G(\text{ext} \rightarrow s)$

Moments résultant en G des actions mécaniques extérieures exercées sur le solide S en **N.m**

m

Masse totale en **kg**

$\overrightarrow{\Gamma}_{G/\mathcal{R}}$

Vecteur accélération du centre de gravité G du solide S dans le repère \mathcal{R} en **m.s⁻²**

MOUVEMENT DE TRANSLATION

Principe de d'Alembert

La deuxième loi du principe fondamental peut aussi s'écrire :

$$\overrightarrow{R(\text{ext} \rightarrow s)} - m \cdot \overrightarrow{\Gamma_{G/R}} = \overrightarrow{R(\text{ext} \rightarrow s)} + \overrightarrow{F_I} = 0$$

Dans ce cas :

$\overrightarrow{R(\text{ext} \rightarrow s)}$

Résultante des actions mécaniques extérieures exercées sur le solide S en **N**

m

Masse totale en **kg**

$\overrightarrow{\Gamma_{G/R}}$

Vecteur accélération du centre de gravité G du solide S dans le repère \mathcal{R} en **m.s⁻²**

$\overrightarrow{F_I}$

Force d'inertie (opposée à l'accélération) $\overrightarrow{F_I} = - m \cdot \overrightarrow{\Gamma_{G/R}}$

Toutes les méthodes appliquées en statique pourront être utilisables

MOMENT D'INERTIE

HISTOIRE

REPÈRES

PRINCIPE

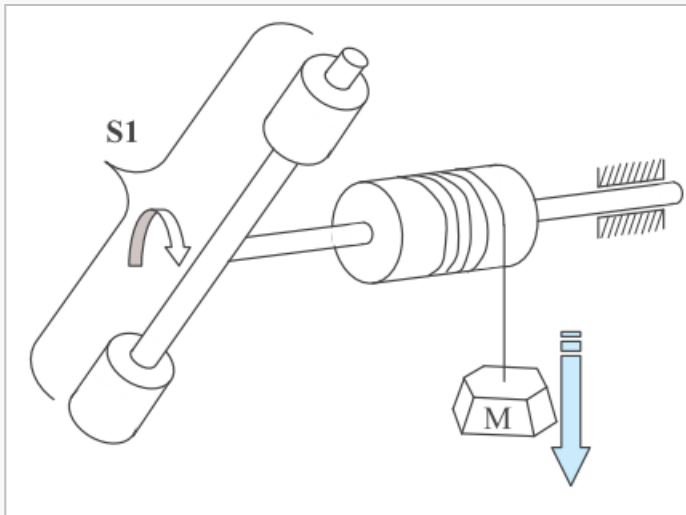
FONDAMENTAL

SOLIDE QCQ

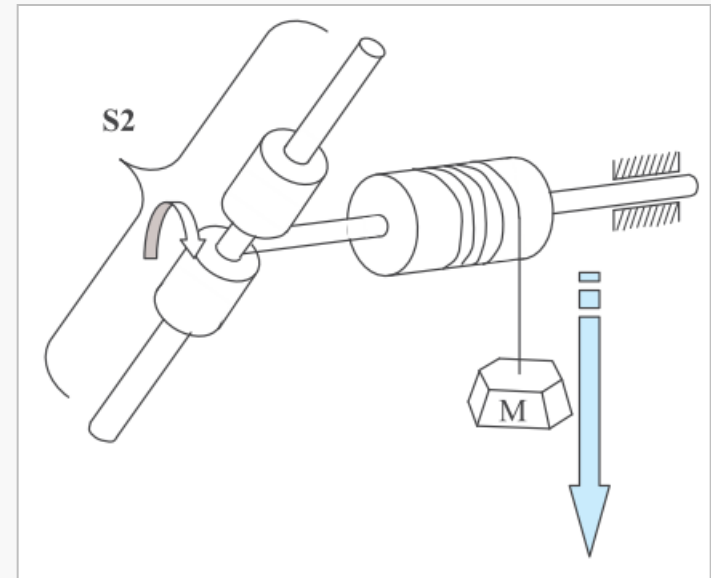
MOUVEMENT DE
TRANSLATION

MOMENT
D'INERTIE

MOUVEMENT DE
ROTATION



Les deux objets suivants sont identiques, hormis la position des masselottes qui est plus éloigné du centre de rotation pour le solide S1



On lâche les masses M simultanément.

Constatation:

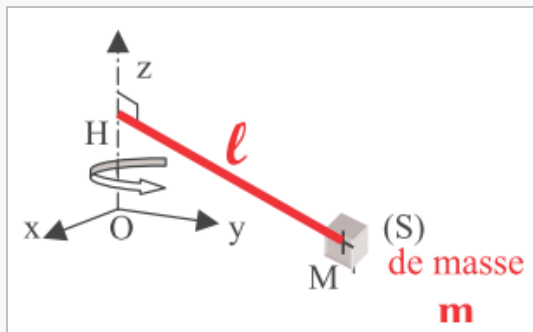
La masse liée au solide S2 descend plus vite, le solide S2 est plus facile à mettre en mouvement de rotation que S1.

Les deux solides ont pourtant même masse mais réparties différemment par rapport à l'axe de rotation.

Ils n'ont pas le même **Moment d'Inertie**

MOMENT D'INERTIE

D'UN SOLIDE PONCTUEL PAR RAPPORT À UN AXE



Soit un solide S modélisable par un point M de masse m

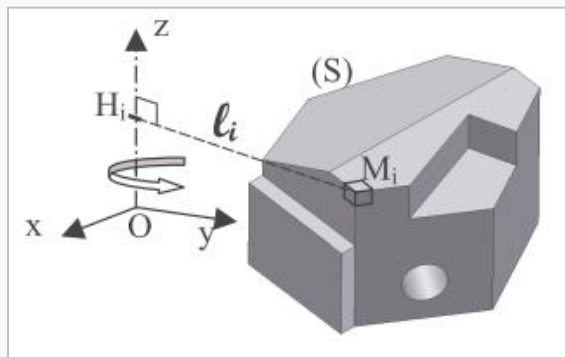
Le moment d'inertie de S par rapport à un axe oz est donnée par la relation :

$$J_{oz} = m \cdot l^2 \quad \text{En } \text{kg.m}^2$$

Si le solide est 2 fois plus lourd, il sera 2 fois plus difficile à entraîner en rotation.

Si le solide est 2 fois plus éloigné de l'axe, il sera 4 fois plus difficile à entraîner en rotation

D'UN SOLIDE QUELCONQUE PAR RAPPORT À UN AXE



Ce solide est une somme de points M_i de masse dm_i , donc:

Moment d'inertie du solide S par rapport à l'axe oz

$$J_{oz} = \iiint_S l^2 dm$$

MOMENT D'INERTIE

Le calcul de moment d'inertie dépasse les capacités actuelles d'un élève de terminale, nous nous contenterons de nous servir de volumes élémentaires pour lesquels les formules de calcul de moment d'inertie nous sont données.

HISTOIRE

REPÈRES

PRINCIPE

FONDAMENTAL

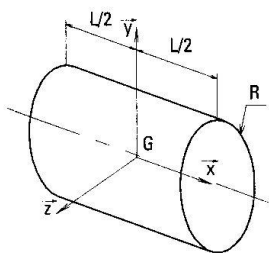
SOLIDE QCQ

MOUVEMENT DE
TRANSLATION

MOMENT
D'INERTIE

MOUVEMENT DE
ROTATION

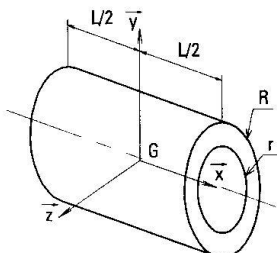
Cylindre plein
masse $m = \pi R^2 \cdot L \cdot \rho$
(ρ : masse volumique)



$$J_x = \frac{m \cdot R^2}{2}$$

$$J_y = J_z = \frac{m \cdot R^2}{4} + \frac{m \cdot L^2}{12}$$

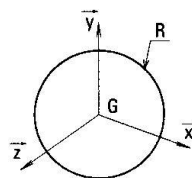
Cylindre creux
 $m = \pi(R^2 - r^2) \cdot L \cdot \rho$



$$J_x = \frac{m \cdot (R^2 + r^2)}{2}$$

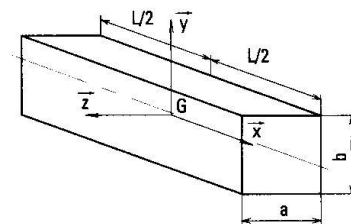
$$J_y = J_z = \frac{m \cdot (R^2 + r^2)}{4} + \frac{m \cdot L^2}{12}$$

Sphère
 $m = \frac{4}{3} \pi R^3 \cdot \rho$



$$J_x = J_y = J_z = \frac{2}{5} m \cdot R^2$$

Parallélépipède rectangle
 $m = a \cdot b \cdot L \cdot \rho$



$$J_x = \frac{m}{12} (a^2 + b^2)$$

$$J_y = \frac{m}{12} (a^2 + L^2)$$

$$J_z = \frac{m}{12} (b^2 + L^2)$$

Théorème de Huygens :

Si on connaît le moment d'inertie d'un système de masse m par rapport à l'axe (G, x) , on peut trouver le moment d'inertie par rapport à l'axe (A, x) distant de d de l'axe (G, x) :

$$J_{Ax} = J_{Gx} + m \cdot d^2$$

MOUVEMENT DE ROTATION

HISTOIRE

REPÈRES

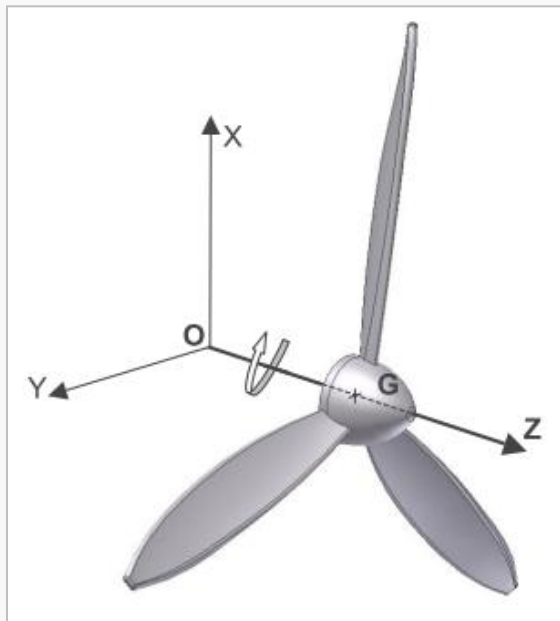
PRINCIPE
FONDAMENTAL

SOLIDE QCQ

MOUVEMENT DE
TRANSLATION

MOMENT
D'INERTIE

MOUVEMENT DE
ROTATION



Nous considérerons en hypothèse que le solide S possède un axe de symétrie au niveau de la géométrie des masses.

Le centre de gravité G est donc situé sur l'axe de rotation $O\vec{Z}$

$$\begin{cases} \overrightarrow{R}(\text{ext} \rightarrow s) = \vec{0} \\ \overrightarrow{M}_{OZ}(\text{ext} \rightarrow s) = J_{OZ} \cdot \ddot{\theta} \cdot \vec{Z} \quad \text{ou} \quad J_{OZ} \cdot \dot{\omega} \cdot \vec{Z} \end{cases}$$

$$\overrightarrow{R}(\text{ext} \rightarrow s)$$

Résultante des actions mécaniques extérieures exercées sur le solide S en **N**

$$\overrightarrow{M}_G(\text{ext} \rightarrow s)$$

Moments résultant en G des actions mécaniques extérieures exercées sur le solide S en **N.m**

$$J_{OZ}$$

Moment d'inertie du solide S autour de l'axe oz en **kg.m²**

$$\ddot{\theta} \quad \text{ou} \quad \dot{\omega}$$

Accélération angulaire du solide S en **rad.s⁻²**

Le principe Fondamental de la Dynamique

FIN