

### 4.3 Ossatures souples (à nœuds mobiles)

#### 4.3.1 Rotations inconnues d'une ossature

Soit un portique à deux étages sollicité par un système de chargement extérieur quelconque ( $S$ ) (voir figure 4.12).

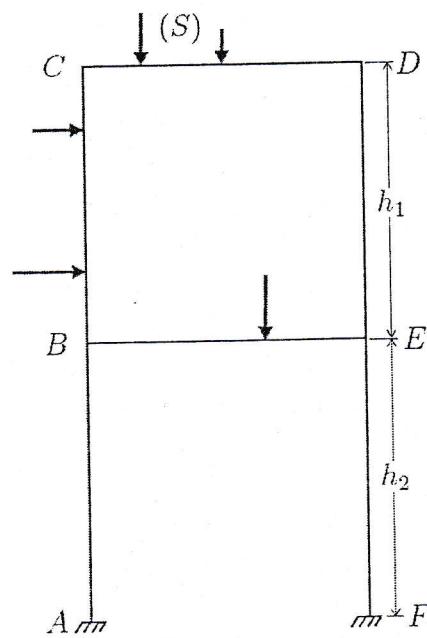


FIGURE 4.12 – Portique à deux étages sollicité.

Si les nœuds ne sont pas fixes, l'application du chargement extérieur ( $S$ ) provoque un déplacement horizontal  $\Delta_1$  de la barre  $CD$  vis-à-vis de la barre  $BE$  et un déplacement  $\Delta_2$  de  $BE$  vis-à-vis des sections d'encastrement  $A$  et  $F$  (voir figure 4.13).

La déformation la plus générale de ce portique peut être définie par :

- les rotations  $\theta_B$ ,  $\theta_C$ ,  $\theta_D$  et  $\theta_E$  des nœuds ;
- La rotation  $\Omega_1$  des cordes  $BC$  et  $DE$  et la rotation  $\Omega_2$  des cordes  $AB$  et  $EF$ , avec :

$$\begin{cases} \Omega_1 = \frac{\Delta_1}{h_1} \\ \Omega_2 = \frac{\Delta_2}{h_2} \end{cases} \quad (4.177)$$

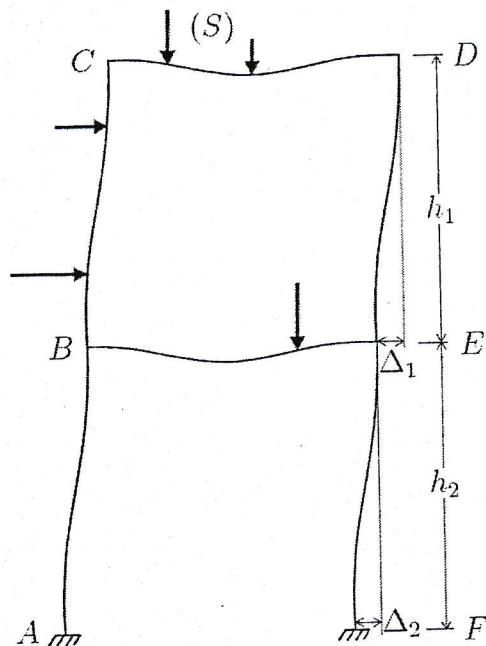


FIGURE 4.13 – Déformée du portique.

Dans le cas général d'une structure présentant  $n$  nœuds et  $p$  étages, le nombre de rotations inconnues est  $(n + p)$ .

Ces inconnues sont déterminées par le biais des deux groupes d'équations définies dans les sections suivantes.

#### 4.3.2 Groupe I d'équations

Il est constitué par les équations qui expriment les équilibres de chaque nœud. Ces équations sont obtenues comme indiqué précédemment pour les ossatures rigides à nœuds fixes mais en prenant les rotations  $\Omega_i$  des barres verticales  $\neq 0$  ( $\Omega_i \neq 0$  nœuds mobiles).

Le nombre  $n$  d'équations du groupe I est égal au nombre  $n$  des nœuds pour lesquels les rotations sont inconnues.

Dans le cas de l'exemple précédent du portique, il est égal à 4.

$$\boxed{\sum \Gamma_B = \sum \Gamma_C = \sum \Gamma_D = \sum \Gamma_E = 0} \quad (4.178)$$

### 4.3.3 Groupe II d'équations

Il est constitué par les équations qui expriment l'équilibre horizontal de la structure.

Soit  $\Sigma$  une section horizontale coupant les barres verticales et  $H$  la résultante des forces horizontales appliquées à la structure au dessus de cette section.

Si  $\sum T$  désigne la somme des efforts tranchants dans la section  $\Sigma$  des barres verticales, on doit avoir :

$$\boxed{\sum T = H} \quad (4.179)$$

Le nombre de relations indépendantes de ce groupe d'équations est égal au nombre  $p$  d'étages (voir figure 4.13).

### 4.3.4 Calcul d'une ossature à noeuds mobiles

Les groupes d'équations I et II forment un système linéaire de  $(n + p)$  équations qui nous permettent de déterminer les  $(n + p)$  rotations inconnues. Cela nous permet de déterminer d'une façon entière les efforts internes de la structure étudiée.

*Remarque : Dans l'exemple du portique précédent, si les barres  $AB$  et  $EF$  par exemple ne supportent aucune charge horizontale, la somme des efforts tranchants  $\sum T$  dans ces barres ont pour valeur :*

$$\sum T = T_{AB} + T_{EF} = \frac{M_{BA} - M_{AB}}{h_2} + \frac{M_{FE} - M_{EF}}{h_2} \quad (4.180)$$

*d'après les conventions de signes, on a pour le parcours  $ABEF$  :*

$$\begin{cases} M_{AB} = \Gamma_{AB} \\ M_{BA} = -\Gamma_{BA} \end{cases} \quad \begin{cases} M_{EF} = \Gamma_{EF} \\ M_{FE} = -\Gamma_{FE} \end{cases} \quad (4.181)$$

*ce qui donne :*

$$\sum T = -\frac{1}{h_2}(\Gamma_{AB} + \Gamma_{BA} + \Gamma_{EF} + \Gamma_{FE}) \quad (4.182)$$

## 4.4 Exercices

⇒ Exercice 3 :

Considérons le portique de la figure (4.14).

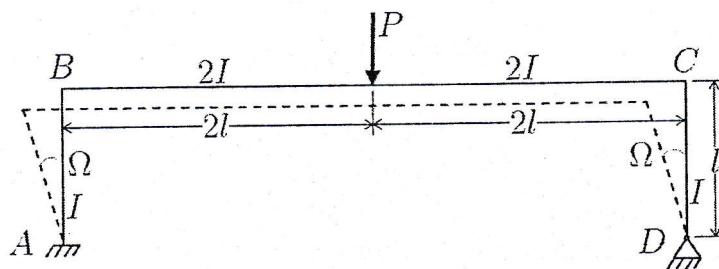


FIGURE 4.14 – Schéma de l'exercice 3

Déterminer les éléments de réduction en tout point du portique en utilisant la méthode des rotations ?

⇒ Solution 3 :

Facteurs de rigidité :

$$K_{AB} = K_{BA} = \frac{4EI}{l} = K \quad (4.183)$$

$$K_{BC} = K_{CB} = \frac{4E \cdot 2I}{4l} = \frac{K}{2} \quad (4.184)$$

$$K'_{CD} = \frac{3EI}{l} = \frac{3}{4} K \quad (4.185)$$

Facteurs de transmission :

$$\lambda_{AB} = \lambda_{BA} = \lambda_{BC} = \lambda_{CB} = \frac{1}{2} \quad (4.186)$$

Moments d'encastrements parfaits de la poutre chargée BC :

$$\gamma_{BC} = -\gamma_{CB} = -\frac{Pab^2}{l^2} = -\frac{P \cdot 4l}{8} = -\frac{Pl}{2} \quad (4.187)$$

Groupe I d'équations : ( $\Omega \neq 0$ )

Nœud  $B$  :

$$\Gamma_{BC} + \Gamma_{BA} = 0 \quad (4.188)$$

$$\rightarrow \gamma_{BC} - K_{BC}\theta_B - \lambda_{BC}K_{BC}\theta_C - K_{BA}\theta_B + K_{BA}(1 + \lambda_{BA})\Omega_{BA} = 0 \quad (4.189)$$

$$\rightarrow (K_{BC} + K_{BA})\theta_B + \lambda_{BC}K_{BC}\theta_C = \gamma_{BC} + K_{BA}(1 + \lambda_{BA})\Omega \quad (4.190)$$

$$\rightarrow \frac{3}{2}K\theta_B + \frac{K}{4}\theta_C = -\frac{Pl}{2} + \frac{3}{2}K\Omega \quad (4.191)$$

Nœud  $C$  :

$$\Gamma_{CB} + \Gamma_{CD} = 0 \quad (4.192)$$

$$\rightarrow \gamma_{CB} - K_{CB}\theta_C - \lambda_{CB}K_{CB}\theta_B - K'_{CD}\theta_C + K'_{CD}\Omega = 0 \quad (4.193)$$

$$\rightarrow \lambda_{CB}K_{CB}\theta_B + (K_{CB} + K'_{CD})\theta_C = \gamma_{CB} + K'_{CD}\Omega \quad (4.194)$$

$$\rightarrow \frac{K}{4}\theta_B + \frac{5}{4}K\theta_C = \frac{Pl}{2} + \frac{3}{4}K\Omega \quad (4.195)$$

Groupe II d'équations :

Le déplacement de la traverse  $BC$  est tel que la somme des efforts horizontaux au droit d'une coupure traversant les 2 bâcheilles  $AB$  et  $CD$  soit nulle car il n'y a pas de forces horizontales extérieures appliquées au portique :

$$T_{AB} + T_{CD} = 0 \quad (4.196)$$

on a :

$$\begin{cases} T_{AB} = \frac{M_{BA} - M_{AB}}{l} = -\frac{\Gamma_{BA} + \Gamma_{AB}}{l} \\ T_{CD} = \frac{M_{DC} - M_{CD}}{l} = -\frac{\Gamma_{CD}}{l} \end{cases} \quad (4.197)$$

$$(4.196) \rightarrow \Gamma_{BA} + \Gamma_{AB} + \Gamma_{CD} = 0 \quad (4.198)$$

$$\rightarrow -\frac{K}{2}\theta_B + K\left(1 + \frac{1}{2}\right)\Omega - K\theta_B + K\left(1 + \frac{1}{2}\right)\Omega - \frac{3}{4}K\theta_C + \frac{3}{4}K\Omega = 0 \quad (4.199)$$

$$\rightarrow \frac{3}{2}K\theta_B + \frac{3}{4}K\theta_C = \frac{15}{4}K\Omega \quad (4.200)$$

reprenant les équations (4.191), (4.195) et (4.200) :

$$\begin{cases} 6\theta_B + \theta_C - 6\Omega = -\frac{2Pl}{K} \\ \theta_B + 5\theta_C - 3\Omega = \frac{2Pl}{K} \\ 2\theta_B + \theta_C - 5\Omega = 0 \end{cases} \quad (4.201)$$

après résolution du système on obtient :

$$\begin{cases} \theta_B = -\frac{42}{79} \frac{Pl}{K} = -0,53 \frac{Pl}{K} \\ \theta_C = \frac{34}{79} \frac{Pl}{K} = 0,43 \frac{Pl}{K} \\ \Omega = -\frac{10}{79} \frac{Pl}{K} = -0,13 \frac{Pl}{K} \end{cases} \quad (4.202)$$

Les moments des noeuds sont donc :

$$\Gamma_{AB} = -\lambda_{AB} K_{AB} \theta_B + K_{AB}(1 + \lambda_{AB})\Omega \quad (4.203)$$

$$= -\frac{1}{2}K \left( -\frac{42}{79} \frac{Pl}{K} \right) + \frac{3}{2}K \left( -\frac{10}{79} \frac{Pl}{K} \right) \quad (4.204)$$

$$= \frac{21}{79} Pl - \frac{15}{79} Pl = \frac{6}{79} Pl \quad (4.205)$$

$$= 0,076 Pl \quad (4.206)$$

$$\Gamma_{BA} = -K_{BA} \theta_B + K_{BA}(1 + \lambda_{BA})\Omega \quad (4.207)$$

$$= -K \left( -\frac{42}{79} \frac{Pl}{K} \right) + \frac{3}{2}K \left( -\frac{10}{79} \frac{Pl}{K} \right) \quad (4.208)$$

$$= \frac{42}{79} Pl - \frac{15}{79} Pl = \frac{27}{79} Pl \quad (4.209)$$

$$= 0,342 Pl \quad (4.210)$$

l'équilibre du noeud  $B$  nous donne :

$$\Gamma_{BA} + \Gamma_{BC} = 0 \quad (4.211)$$

$$\rightarrow \Gamma_{BC} = -\Gamma_{BA} = -0,342 Pl \quad (4.212)$$

on a aussi :

$$\Gamma_{CD} = -K'_{CD} \theta_C + K'_{CD} \Omega \quad (4.213)$$

$$= -\frac{3}{4}K \left( \frac{34}{79} \frac{Pl}{K} \right) + \frac{3}{4}K \left( -\frac{10}{79} \frac{Pl}{K} \right) \quad (4.214)$$

$$= -\frac{51}{158} Pl - \frac{15}{158} Pl = -\frac{33}{79} Pl \quad (4.215)$$

$$= -0,418 Pl \quad (4.216)$$

l'équilibre du noeud  $C$  donne :

$$\Gamma_{CB} + \Gamma_{CD} = 0 \quad (4.217)$$

$$\rightarrow \Gamma_{CB} = -\Gamma_{CD} = 0,418 Pl \quad (4.218)$$

Les moments fléchissants aux nœuds sont donc :

$$M_{AB} = \frac{6}{79}Pl \quad \star \quad M_{CD} = M_{CB} = -\frac{33}{79}Pl \quad (4.219)$$

$$M_{BC} = M_{BA} = -\frac{27}{79}Pl \quad (4.220)$$

Calcul des moments fléchissants en tout point du portique :

Le moment fléchissant sur une branche du portique est exprimé par la formule (2.29) :

$$M_{ij}(x) = m_{ij}(x) + M_{ij} \left(1 - \frac{x}{l_{ij}}\right) + M_{ji} \frac{x}{l_{ij}} \quad (4.221)$$

on a pour les branches  $AB$  et  $CD$  :  $m(x) = 0$ .

Les courbes des moments sur les deux branches sont donc des droites variant de  $M_{AB}$  à  $M_{BA}$  et de  $M_{CD}$  à  $M_{DC} = 0$ .

Pour la branche  $BC$  :

$$M_{BC}(x) = m_{BC}(x) + M_{BC} \left(1 - \frac{x}{4l}\right) + M_{CB} \frac{x}{4l} \quad (4.222)$$

pour les surcharges locales de la branche  $BC$  on a :

$$\begin{cases} m_{BC}(x) = \frac{P}{2}x & 0 < x < 2l \\ m_{BC}(x) = \frac{P}{2}(4l - x) & 2l < x < 4l \end{cases} \quad (4.223)$$

valeur du moment fléchissant à  $x = 2l$  :

$$M_{BC}(2l) = \frac{P}{2} \cdot 2l - \frac{27}{79}Pl \left(1 - \frac{2l}{4l}\right) - \frac{33}{79}Pl \cdot \frac{2l}{4l} \quad (4.224)$$

$$= Pl - \frac{27}{158}Pl - \frac{33}{158}Pl \quad (4.225)$$

$$= \frac{49}{79}Pl \quad (4.226)$$

$$= 0,62Pl \quad (4.227)$$

la courbe du moment sur la branche  $BC$  est composée de 2 parties de droites : la première de  $M_{BC}$  à  $M_{BC}(2l)$  et la deuxième de  $M_{BC}(2l)$  à  $M_{CB}$ .

Le DMF du portique est présenté sur la figure (4.15).

Calcul de l'effort normal en tout point du portique :

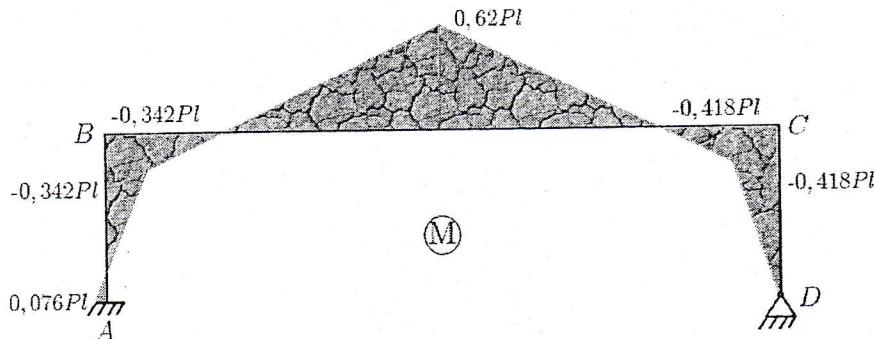


FIGURE 4.15 – Diagramme des moments fléchissants - Exercice 3

Réactions d'appuis :

En considérant  $V_A$  et  $V_D$  comme efforts verticaux appliqués aux points  $B$  et  $C$  de la poutre  $BC$  et en considérant l'équilibre de cette branche (voir figure 4.16), on a :

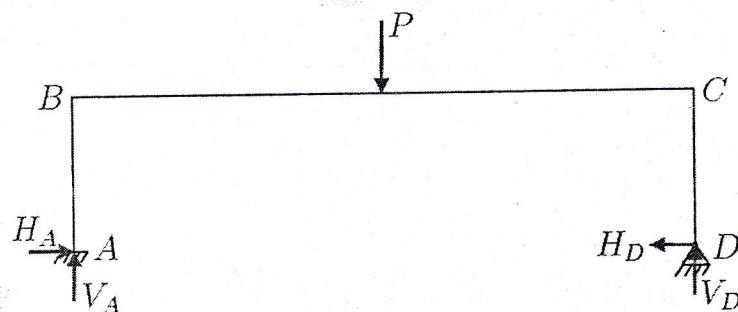


FIGURE 4.16 – Réactions d'appuis - Exercice 3

$$\begin{cases} M_{CB} = V_A \cdot l_{BC} + M_{BC} - P \cdot \frac{l_{BC}}{2} \\ M_{BC} = V_D \cdot l_{BC} + M_{CB} - P \cdot \frac{l_{BC}}{2} \end{cases} \quad (4.228)$$

d'où :

$$V_A = \frac{P}{2} + \frac{M_{CB} - M_{BC}}{l_{BC}} = \frac{P}{2} + \frac{-\frac{33}{79}Pl + \frac{27}{79}Pl}{4l} \quad (4.229)$$

$$\rightarrow V_A = \frac{38}{79}P = 0,481P \quad (4.230)$$

$$V_D = \frac{P}{2} + \frac{M_{BC} - M_{CB}}{l_{BC}} = \frac{P}{2} + \frac{\frac{33}{79}Pl - \frac{27}{79}Pl}{4l} \quad (4.231)$$

$$\rightarrow V_D = \frac{41}{79}P = 0,519P \quad (4.232)$$

l'équilibre de la branche  $AB$  donne :

$$M_{BA} = M_{AB} - H_A \cdot l_{AB} \quad (4.233)$$

$$\rightarrow H_A = \frac{M_{AB} - M_{BA}}{l} = \frac{1}{l} \left( \frac{6}{79}Pl + \frac{27}{79}Pl \right) \quad (4.234)$$

$$\rightarrow H_A = \frac{33}{79}P = 0,418P \quad (4.235)$$

l'équilibre de la branche  $CD$  donne :

$$M_{CD} = H_D \cdot l_{CD} = lH_D \quad (4.236)$$

$$\rightarrow H_D = \frac{M_{CD}}{l} = \frac{1}{l} \left( -\frac{33}{79}Pl \right) = -\frac{33}{79}P = -0,418P \quad (4.237)$$

l'équilibre des trois poutres composant le portique nous donne :

$$\begin{cases} N_{AB} = V_A \\ N_{BC} = H_A \\ N_{CD} = V_D \end{cases} \quad (4.238)$$

le DEN est présenté sur la figure (4.17).

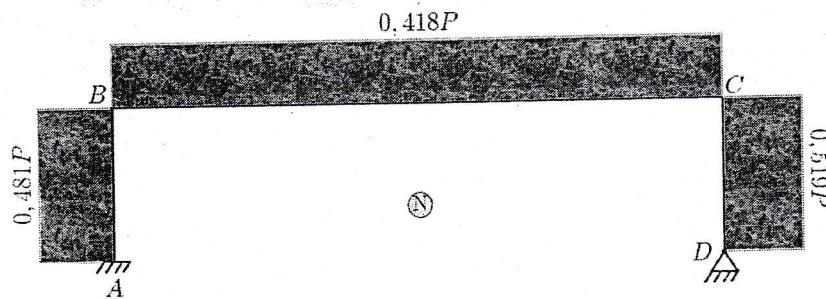


FIGURE 4.17 – Diagramme des efforts normaux - Exercice 3

Calcul de l'effort tranchant en tout point du portique :

Branche  $AB$  :

$$T_{AB} = \frac{M_{BA} - M_{AB}}{l_{AB}} = \frac{1}{l} \left( -\frac{27}{79}Pl - \frac{6}{79}Pl \right) = -\frac{33}{79}P = -0,418P \quad (4.239)$$

## 4.4 Exercices

Branche  $BC$  :

$0 < x < 2l$  :

$$T_{BC} = \frac{P}{2} + \frac{M_{CB} - M_{BC}}{l_{BC}} = \frac{P}{2} + \frac{1}{4l} \left( -\frac{33}{79}Pl + \frac{27}{79}Pl \right) \quad (4.240)$$

$$\rightarrow T_{BC} = \frac{38}{79}P = 0,481P \quad (4.241)$$

$2l < x < 4l$  :

$$T_{BC} = -\frac{P}{2} + \frac{M_{CB} - M_{BC}}{l_{BC}} = -\frac{P}{2} + \frac{1}{4l} \left( -\frac{33}{79}Pl + \frac{27}{79}Pl \right) \quad (4.242)$$

$$\rightarrow T_{BC} = -\frac{41}{79}P = -0,519P \quad (4.243)$$

Branche  $CD$  :

$$T_{CD} = \frac{M_{DC} - M_{CD}}{l_{CD}} = \frac{1}{l} \left( 0 + \frac{33}{79}Pl \right) = \frac{33}{79}P = 0,418P \quad (4.244)$$

Le DET est présenté sur la figure (4.18).

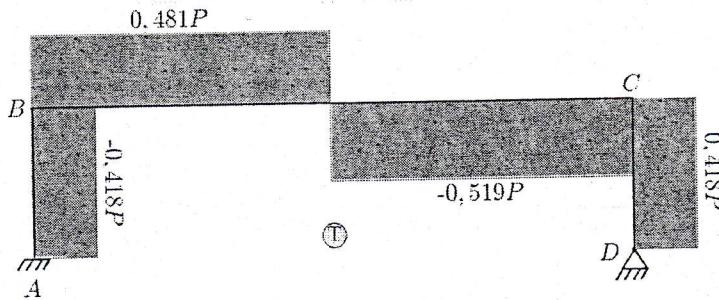


FIGURE 4.18 – Diagramme des efforts tranchants - Exercice 3

♦ Exercice 4 :

Considérons le même portique de l'exercice précédent mais en changeant l'effort appliqué (figure 4.19).

Déterminer le diagramme des moments fléchissants du portique en utilisant la méthode des rotations ?

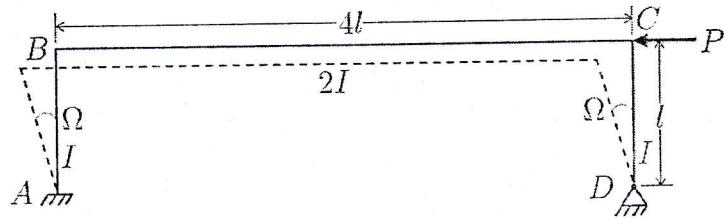


FIGURE 4.19 – Schéma de l'exercice 4

## ⇒ Solution 4 :

Facteurs de rigidité :

$$K_{AB} = K_{BA} = \frac{4EI}{l} = K \quad (4.245)$$

$$K_{BC} = K_{CB} = \frac{4E \cdot 2I}{4l} = \frac{1}{2}K \quad (4.246)$$

$$K'_{CD} = \frac{3EI}{l} = \frac{3}{4}K \quad (4.247)$$

facteurs de transmission :

$$\lambda_{AB} = \lambda_{BA} = \lambda_{BC} = \lambda_{CB} = \frac{1}{2} \quad (4.248)$$

Groupe I d'équations : ( $\Omega \neq 0$ )

Équilibre du noeud B :

$$\Gamma_{BA} + \Gamma_{BC} = 0 \quad (4.249)$$

$$\rightarrow -K_{BA}\theta_B + K_{BA}(1 + \lambda_{BA})\Omega - K_{BC}\theta_B - \lambda_{BC}K_{BC}\theta_C = 0 \quad (4.250)$$

$$\rightarrow -K\theta_B + K\frac{3}{2}\Omega - \frac{1}{2}K\theta_B - \frac{1}{2}\lambda_{BC}K\theta_C = 0 \quad (4.251)$$

$$\rightarrow \frac{3}{2}\theta_B + \frac{1}{4}\theta_C - \frac{3}{2}\Omega = 0 \quad (4.252)$$

Équilibre du noeud C :

$$\Gamma_{CB} + \Gamma_{CD} = 0 \quad (4.253)$$

$$\rightarrow -\lambda_{CB}K_{CB}\theta_B - K_{CB}\theta_C - K'_{CD}\theta_C + K'_{CD}\Omega = 0 \quad (4.254)$$

$$\rightarrow -\frac{1}{2}K\theta_B - \frac{1}{2}K\theta_C - \frac{3}{4}K\theta_C + \frac{3}{4}K\Omega = 0 \quad (4.255)$$

$$\rightarrow \theta_B + 5\theta_C - 3\Omega = 0 \quad (4.256)$$

Groupe II d'équations :

Le déplacement de la traverse  $BC$  est tel que la somme des efforts horizontaux au droit d'une coupure traversant les 2 bâcheilles  $AB$  et  $CD$  sont égal à l'effort horizontal  $-P$  :

$$T_{AB} + T_{CD} = -P \quad (4.257)$$

on a  $t_{ij} = 0$  pour toutes les barres.

$$\begin{cases} T_{AB} = \frac{M_{BA}-M_{AB}}{l} = -\frac{\Gamma_{BA}+\Gamma_{AB}}{l} \\ T_{CD} = \frac{M_{DC}-M_{CD}}{l} = -\frac{\Gamma_{CD}}{l} \end{cases} \quad (4.258)$$

$$\rightarrow \Gamma_{AB} + \Gamma_{BA} + \Gamma_{CD} = Pl \quad (4.259)$$

$$\rightarrow -\lambda_{AB}K_{AB}\theta_B + K_{AB}(1 + \lambda_{AB})\Omega - K_{BA}\theta_B + K_{BA}(1 + \lambda_{BA})\Omega - K'_{CD}\theta_C + K'_{CD}\Omega = Pl \quad (4.260)$$

$$\rightarrow -\frac{1}{2}K\theta_B + K\frac{3}{2}\Omega - K\theta_B + K\frac{3}{2}\Omega - \frac{3}{4}K\theta_C + \frac{3}{4}K\Omega = Pl \quad (4.261)$$

$$\rightarrow \frac{3}{2}\theta_B + \frac{3}{4}\theta_C - \frac{15}{4}\Omega = -\frac{Pl}{K} \quad (4.262)$$

les équations (4.252), (4.256) et (4.262) forment un système de 3 équations à 3 inconnues  $\theta_B$ ,  $\theta_C$  et  $\Omega$  :

$$\begin{cases} \frac{3}{2}\theta_B + \frac{1}{4}\theta_C - \frac{3}{2}\Omega = 0 \\ \theta_B + 5\theta_C - 3\Omega = 0 \\ \frac{3}{2}\theta_B + \frac{3}{4}\theta_C - \frac{15}{4}\Omega = -\frac{Pl}{K} \end{cases} \quad (4.263)$$

la résolution du système donne :

$$\begin{cases} \theta_B = \frac{36}{79}\frac{Pl}{K} = 0,4557\frac{Pl}{K} \\ \theta_C = \frac{16}{79}\frac{Pl}{K} = 0,2025\frac{Pl}{K} \\ \Omega = \frac{116}{237}\frac{Pl}{K} = 0,4895\frac{Pl}{K} \end{cases} \quad (4.264)$$

les moments des noeuds sont :

$$\Gamma_{AB} = M_{AB} = -\lambda_{AB}K_{AB}\theta_B + K_{AB}(1 + \lambda_{AB})\Omega \quad (4.265)$$

$$= -\frac{1}{2}K\frac{36}{79}\frac{Pl}{K} + \frac{3}{2}K\frac{116}{237}\frac{Pl}{K} \quad (4.266)$$

$$= \frac{40}{79}Pl = 0,506Pl \quad (4.267)$$

$$\Gamma_{BC} = M_{BC} = -K_{BC}\theta_B - \lambda_{BC}K_{BC}\theta_C \quad (4.268)$$

$$= -\frac{1}{2}K\frac{36}{79}\frac{Pl}{K} - \frac{1}{2}\frac{1}{2}K\frac{16}{79}\frac{Pl}{K} \quad (4.269)$$

$$= -\frac{22}{79}Pl = -0,278 Pl \quad (4.270)$$

$$\Gamma_{CD} = M_{CD} = -K'_{CD}\theta_C + K'_{CD}\Omega \quad (4.271)$$

$$= -\frac{3}{4}K\frac{16}{79}\frac{Pl}{K} + \frac{3}{4}K\frac{116}{237}\frac{Pl}{K} \quad (4.272)$$

$$= \frac{17}{79}Pl = 0,215 Pl \quad (4.273)$$

l'équilibre des nœuds  $B$  et  $C$  nous donne :

$$M_{BA} = M_{BC} = -0,278 Pl \quad (4.274)$$

$$M_{CB} = M_{CD} = 0,215 Pl \quad (4.275)$$

Récapitulatif des moments fléchissants sur les nœuds :

$$\begin{cases} M_{AB} &= 0,506 Pl \\ M_{BA} &= M_{BC} = -0,278 Pl \\ M_{CB} &= M_{CD} = 0,215 Pl \end{cases} \quad (4.276)$$

les moments fléchissants en tout point du portique sont exprimés par la formule :

$$M_{ij}(x) = m_{ij}(x) + M_{ij} \left(1 - \frac{x}{l_{ij}}\right) + M_{ji} \frac{x}{l_{ij}} \quad (4.277)$$

les moments d'enca斯特rement parfait  $m_{ij}(x)$  sont nuls pour les trois barres du portique. Les courbes des moments fléchissants sont donc des droites entre les valeurs caractéristiques au niveau des nœuds.

Le DMF est présenté en conséquence dans la figure (4.20).

♦ Exercice 5 :

Considérons le portique de la figure (4.21).

Déterminer le diagramme des moments fléchissants du portique en utilisant la méthode des rotations ?

On prend  $EI = 1$  en considérant des inerties variables pour les branches verticales et horizontales (voir figure 4.21).

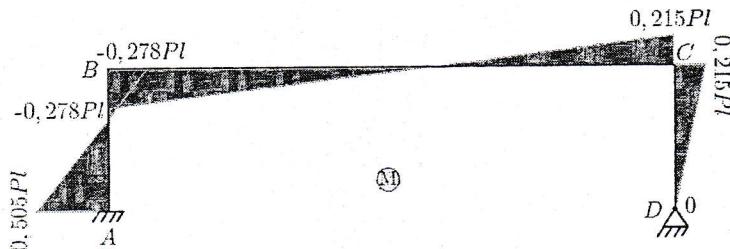


FIGURE 4.20 – Diagramme des moments fléchissants - exercice 4

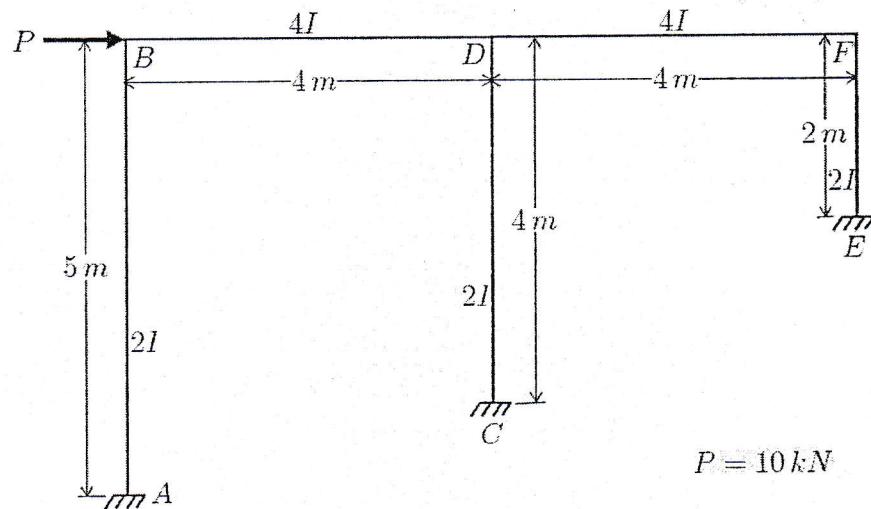


FIGURE 4.21 – Schéma de l'exercice 5

⇒ Solution 5 :

Facteurs de rigidité ;

$$K_{AB} = K_{BA} = \frac{4E \cdot 2I}{5} = \frac{8}{5} \quad (4.278)$$

$$K_{BD} = K_{DB} = \frac{4E \cdot 4I}{4} = 4 \quad (4.279)$$

$$K_{CD} = K_{DC} = \frac{4E \cdot 2I}{4} = 2 \quad (4.280)$$

$$K_{DF} = K_{FD} = \frac{4E \cdot 4I}{4} = 4 \quad (4.281)$$

$$K_{EF} = K_{FE} = \frac{4E \cdot 2I}{2} = 4 \quad (4.282)$$

facteurs de transmission :

$$\lambda_{ij} = \frac{1}{2} \quad (4.283)$$

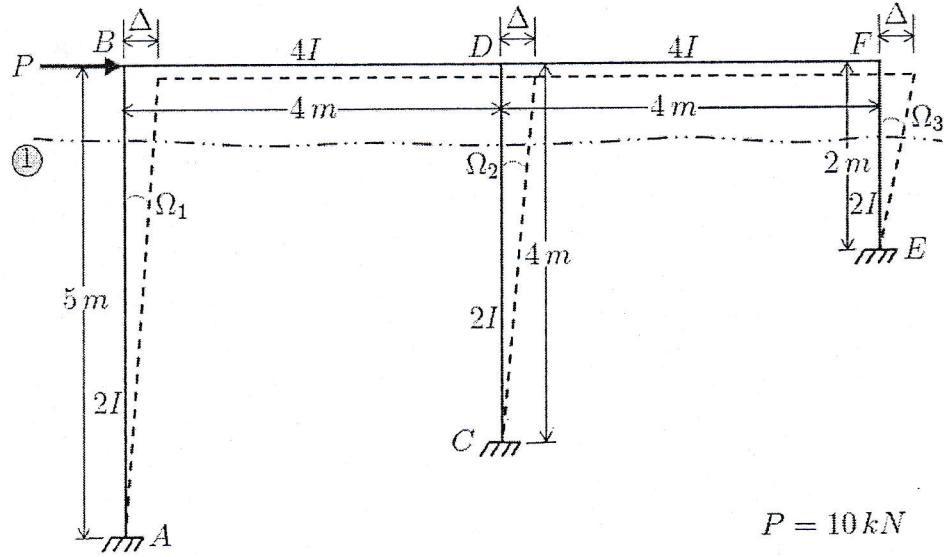


FIGURE 4.22 – Déplacements horizontaux et coupe : exercice 5

Groupe I d'équations :

Équilibre du nœud  $B$  :

$$\Gamma_{BA} + \Gamma_{BD} = 0 \quad (4.284)$$

$$\rightarrow -K_{BA}\theta_B + K_{BA}(1 + \lambda_{BA})\Omega_{BA} - K_{BD}\theta_B - \lambda_{BD}K_{BD}\theta_D = 0 \quad (4.285)$$

$$\rightarrow -\frac{8}{5}\theta_B + \frac{83}{5}\Omega_1 - 4\theta_B - \frac{1}{2}4\theta_D = 0 \quad (4.286)$$

$$\rightarrow \frac{28}{5}\theta_B + 2\theta_D - \frac{12}{5}\Omega_1 = 0 \quad (4.287)$$

Équilibre du nœud  $D$  :

$$\Gamma_{DB} + \Gamma_{DC} + \Gamma_{DF} = 0 \quad (4.288)$$

$$\rightarrow -\lambda_{DB}K_{DB}\theta_B - K_{DB}\theta_D - K_{DC}\theta_D + K_{DC}(1 + \lambda_{DC})\Omega_{DC} - K_{DF}\theta_D - \lambda_{DF}K_{DF}\theta_F = 0 \quad (4.289)$$

$$\rightarrow -\frac{1}{2}4\theta_B - 4\theta_D - 2\theta_D + 2\frac{3}{2}\Omega_2 - 4\theta_D - \frac{1}{2}4\theta_F = 0 \quad (4.290)$$

$$\rightarrow 2\theta_B + 10\theta_D + 2\theta_F - 3\Omega_2 = 0 \quad (4.291)$$

Équilibre du nœud  $F$  :

$$\Gamma_{FD} + \Gamma_{FE} = 0 \quad (4.292)$$

$$\rightarrow -\lambda_{FD}K_{FD}\theta_D - K_{FD}\theta_F - K_{FE}\theta_F + K_{FE}(1 + \lambda_{FE})\Omega_{FE} = 0 \quad (4.293)$$

$$\rightarrow -\frac{1}{2}4\theta_D - 4\theta_F - 4\theta_F + 4\frac{3}{2}\Omega_3 = 0 \quad (4.294)$$

$$\rightarrow \theta_D + 4\theta_F - 3\Omega_3 = 0 \quad (4.295)$$

Groupe II d'équations :

Considérons la coupe ① de la figure (4.22) et appliquons l'équation (4.179) :

$$T_{AB} + T_{CD} + T_{EF} = P \quad (4.296)$$

$$\rightarrow -\frac{\Gamma_{AB} + \Gamma_{BA}}{5} - \frac{\Gamma_{CD} + \Gamma_{DC}}{4} - \frac{\Gamma_{EF} + \Gamma_{FE}}{2} = 10 \quad (4.297)$$

$$\begin{aligned} \rightarrow & -\frac{1}{5}(-\lambda_{AB}K_{AB}\theta_B + K_{AB}(1 + \lambda_{AB})\Omega_{AB} - K_{BA}\theta_B + K_{BA}(1 + \lambda_{BA})\Omega_{BA}) \\ & -\frac{1}{4}(-\lambda_{CD}K_{CD}\theta_D + K_{CD}(1 + \lambda_{CD})\Omega_{CD} - K_{DC}\theta_D + K_{DC}(1 + \lambda_{DC})\Omega_{DC}) \\ & -\frac{1}{2}(-\lambda_{EF}K_{EF}\theta_F + K_{EF}(1 + \lambda_{EF})\Omega_{EF} - K_{FE}\theta_F + K_{FE}(1 + \lambda_{FE})\Omega_{EF}) \\ & = 10 \quad (4.298) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow & \frac{1}{10}\frac{8}{5}\theta_B - \frac{3}{10}\frac{8}{5}\Omega_1 + \frac{8}{25}\theta_B - \frac{3}{10}\frac{8}{5}\Omega_1 + \frac{1}{8}2\theta_D - \frac{3}{8}2\Omega_2 \\ & + \frac{1}{2}\theta_D - \frac{3}{8}2\Omega_2 + \frac{1}{4}4\theta_F - \frac{3}{4}4\Omega_3 + 2\theta_F - \frac{3}{4}4\Omega_3 = 10 \quad (4.299) \end{aligned}$$

$$\rightarrow \frac{12}{25}\theta_B + \frac{3}{4}\theta_D + 3\theta_F - \frac{24}{25}\Omega_1 - \frac{3}{2}\Omega_2 - 6\Omega_3 = 10 \quad (4.300)$$

les rotations  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  et  $\Omega_3$  sont exprimées par (voir figure 4.22) :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \Omega_1 & = & \Omega \\ \Omega_2 & = & \frac{\Delta}{4} \\ \Omega_3 & = & \frac{\Delta}{2} \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{lcl} \frac{\Delta}{5} \\ \frac{5}{4}\Omega \\ \frac{5}{2}\Omega \end{array} \right. \quad (4.301)$$

les équations (4.287), (4.291), (4.295) et (4.300) deviennent :

$$\begin{cases} \frac{28}{5}\theta_B + 2\theta_D - \frac{12}{5}\Omega = 0 \\ 2\theta_B + 10\theta_D + 2\theta_F - \frac{15}{4}\Omega = 0 \\ \theta_D + 4\theta_F - \frac{15}{2}\Omega = 0 \\ \frac{12}{25}\theta_B + \frac{3}{4}\theta_D + 3\theta_F - 17,835\Omega = 10 \end{cases} \quad (4.302)$$

il s'agit d'un système de 4 équations à 4 inconnues  $\theta_B$ ,  $\theta_D$ ,  $\theta_F$  et  $\Omega$ . Après résolution, on trouve :

$$\begin{cases} \theta_B = -0,3866 \\ \theta_D = 0,0814 \\ \theta_F = -1,5845 \\ \Omega = -0,8342 \end{cases} \quad (4.303)$$

les moments appliqués par les nœuds sur les poutres sont donc :

$$\Gamma_{AB} = M_{AB} = -\frac{1}{25}(-0,3866) + \frac{8}{5}\frac{3}{2}(-0,8342) = -1,693 \text{ kN.m} \quad (4.304)$$

$$\Gamma_{BA} = -M_{BA} = -\frac{8}{5}(-0,3866) + \frac{8}{5}\frac{3}{2}(-0,8342) = -1,384 \text{ kN.m} \quad (4.305)$$

$$\Gamma_{BD} = M_{BD} = -4(-0,3866) - \frac{1}{2}4(0,0814) = 1,384 \text{ kN.m} \quad (4.306)$$

$$\Gamma_{DB} = -M_{DB} = -\frac{1}{2}4(-0,3866) - 4(0,0814) = 0,448 \text{ kN.m} \quad (4.307)$$

$$\Gamma_{DC} = M_{DC} = -2(0,0814) + 2\frac{3}{4}(-0,8342) = -3,29 \text{ kN.m} \quad (4.308)$$

$$\Gamma_{CD} = -M_{CD} = -\frac{1}{2}2(0,0814) + 2\frac{3}{4}(-0,8342) = -3,21 \text{ kN.m} \quad (4.309)$$

$$\Gamma_{DF} = M_{DF} = -4(0,0814) - \frac{1}{2}4(-1,5845) = 2,843 \text{ kN.m} \quad (4.310)$$

$$\Gamma_{FD} = -M_{FD} = -\frac{1}{2}4(0,0814) - 4(-1,5845) = 6,175 \text{ kN.m} \quad (4.311)$$

$$\Gamma_{FE} = M_{FE} = -4(-1,5845) + 4\frac{3}{2}2,5(-0,8342) = -6,175 \text{ kN.m} \quad (4.312)$$

$$\Gamma_{EF} = -M_{EF} = -\frac{1}{2}4(-1,5845) + 4\frac{3}{2}2,5(-0,8342) \quad (4.313)$$

$$= -9,344 \text{ kN.m} \quad (4.314)$$

Récapitulatif des moments fléchissants des nœuds :

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{AB} = -1,693 \text{ kN.m} \\ M_{BA} = 1,384 \text{ kN.m} \\ M_{BD} = 1,384 \text{ kN.m} \\ M_{DB} = -0,448 \text{ kN.m} \end{array} \right. * \left\{ \begin{array}{l} M_{DC} = -3,29 \text{ kN.m} \\ M_{CD} = 3,21 \text{ kN.m} \\ M_{DF} = 2,843 \text{ kN.m} \end{array} \right. \quad (4.315)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{FD} = -6,175 \text{ kN.m} \\ M_{FE} = -6,175 \text{ kN.m} \\ M_{EF} = 9,344 \text{ kN.m} \end{array} \right. \quad (4.316)$$

Du fait qu'on a qu'un seul effort extérieur concentré appliqué au portique, toutes les courbes des moments fléchissants sont des droites entre les valeurs caractéristiques calculées précédemment.

Le DMF est présenté sur la figure (4.23).

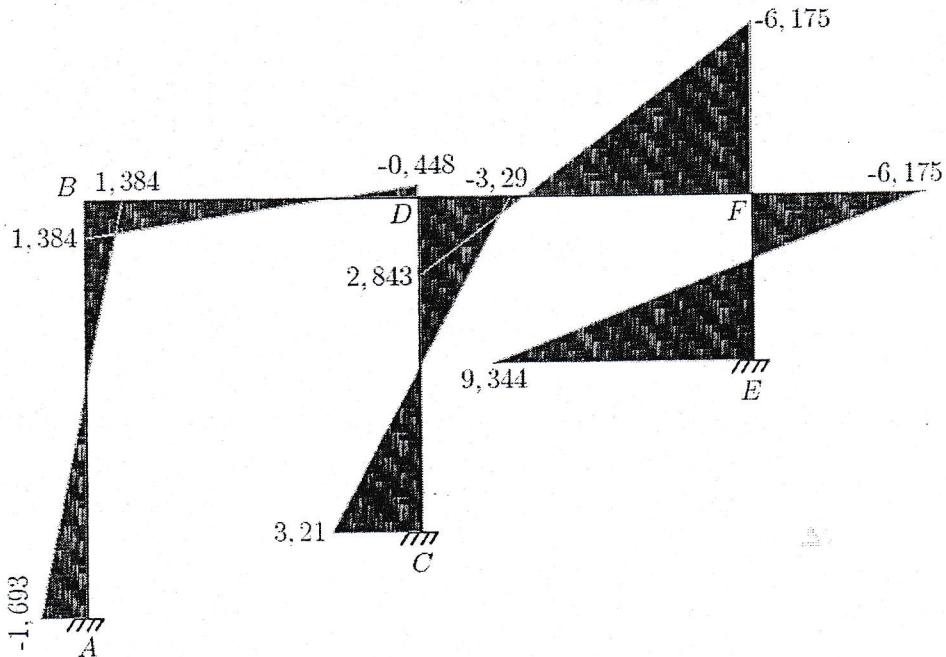


FIGURE 4.23 – Diagramme des moments fléchissants - exercice 5

♦ Exercice 6 :

Considérons le portique de la figure (4.24).

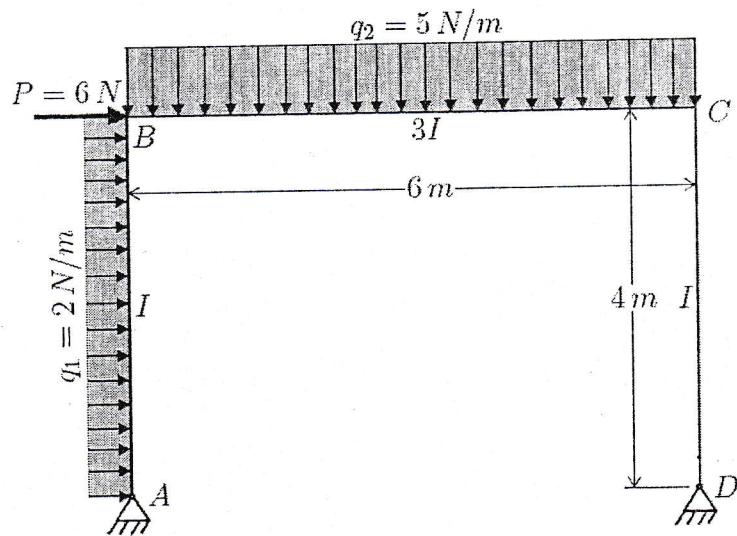


FIGURE 4.24 – Schéma de l'exercice 6

Déterminer le diagramme des moments fléchissants du portique en utilisant la méthode des rotations ?

☞ Solution 6 :

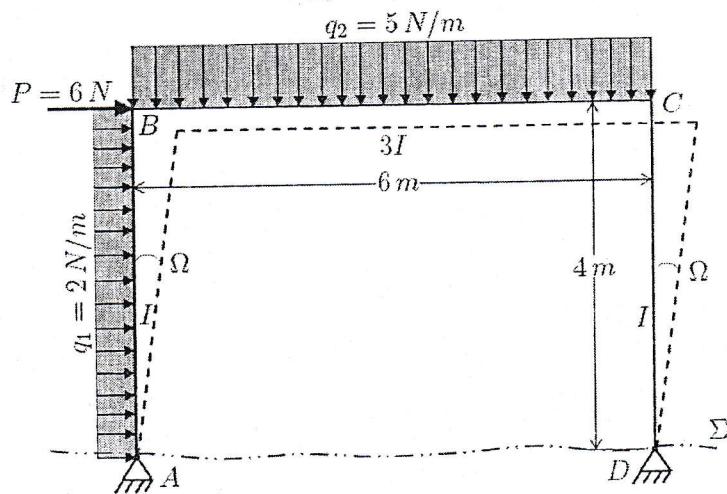


FIGURE 4.25 – Déplacement des nœuds - exercice 6

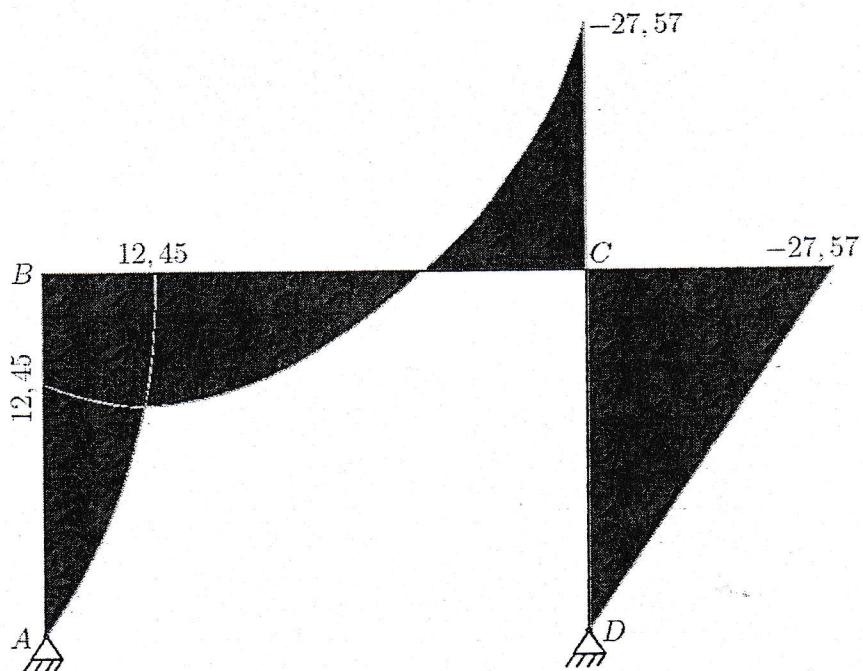


FIGURE 4.26 – Diagramme des moments fléchissants - exercice 6