

# Chapitre 3

## Calcul des lignes d'influence

### 3.1 Définition

La ligne d'influence d'une poutre est la courbe représentative de la variation d'un effet en un point donné en fonction de la position d'une charge unité mobile.

Les lignes d'influence sont fort utiles pour la détermination des combinaisons d'actions lors des calculs des structures de génie civil. En effet, elles permettent de déterminer très simplement quelles sont les zones de chargement favorables (et défavorables) qui minimisent (maximisent) une action en un point donné.

La signification des lignes d'influence est opposée à celle des diagrammes des efforts (tableau 3.1).

	L.I.	D.E.
Position charge :	Variable	Fixe
Position section :	Fixe	Variable

TABLE 3.1 – Signification des L.I. et des diagrammes des efforts

### 3.2 Lignes d'influence d'une poutre isostatique

Considérons une poutre droite  $A_0A_1$ , simplement appuyée, soumise à une charge unité mobile d'abscisse  $\alpha$  (premier schéma de la figure (3.1)).

Puisque la poutre est en équilibre, on a :

$$\sum M_{/A_1} = 0 \quad (3.1)$$

$$\rightarrow V_0l - 1(l - \alpha) = 0 \quad (3.2)$$

$$\rightarrow V_0 = 1 - \frac{\alpha}{l} \quad (3.3)$$

On a donc :

pour  $\alpha < x$  :

$$\begin{cases} V_{(x,\alpha)} = -\frac{\alpha}{l} \\ M_{(x,\alpha)} = \alpha \left(1 - \frac{x}{l}\right) \end{cases} \quad (3.4)$$

pour  $\alpha > x$  :

$$\begin{cases} V_{(x,\alpha)} = 1 - \frac{\alpha}{l} \\ M_{(x,\alpha)} = x \left(1 - \frac{\alpha}{l}\right) \end{cases} \quad (3.5)$$

Ces deux systèmes représentent les équations des lignes d'influence de l'effort tranchant  $V$  et du moment fléchissant  $M$  relatifs à la position  $x$  pour une position variable de la charge mobile  $\alpha$  (voir figure 3.1).

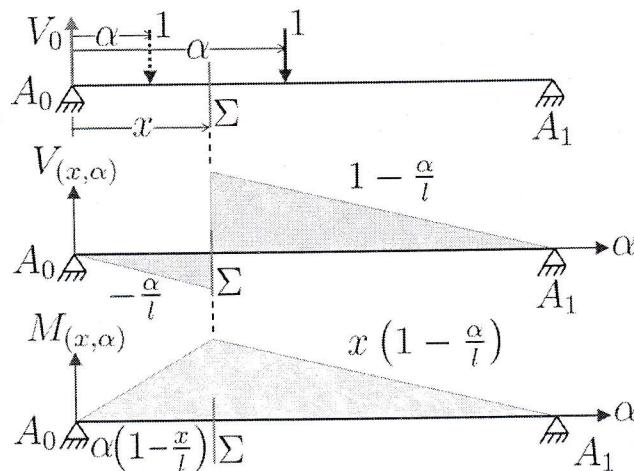


FIGURE 3.1 – Lignes d'influence de  $V$  et  $M$  d'une poutre isostatique

### 3.3 Exploitation des lignes d'influence

#### 3.3.1 Charges localisées

Soit une poutre  $A_0A_1$  chargée par un ensemble de charges ponctuelles  $(P_1, \dots, P_n)$  (figure 3.2).

- Soient  $y_i$  et  $y'_i$  les ordonnées d'abscisse  $\alpha_i$  des lignes d'influences de l'effort tranchant et du moment fléchissant dans la section  $\Sigma$  (figure 3.2).
- Une charge unité 1 d'abscisse  $\alpha_i$  produit dans  $\Sigma$  un effort tranchant  $y_i$  et un moment fléchissant  $y'_i$  (figure 3.2).
- D'après le théorème de superposition, une charge  $P_i$  d'abscisse  $\alpha_i$  produit un effort tranchant  $P_i y_i$  et un moment fléchissant  $P_i y'_i$ .

Le système de charges total produit un effort tranchant et un moment fléchissant à la section  $\Sigma$  de :

$$V_{(x)} = \sum_{i=1}^n P_i y_i \quad (3.6)$$

$$M_{(x)} = \sum_{i=1}^n P_i y'_i \quad (3.7)$$

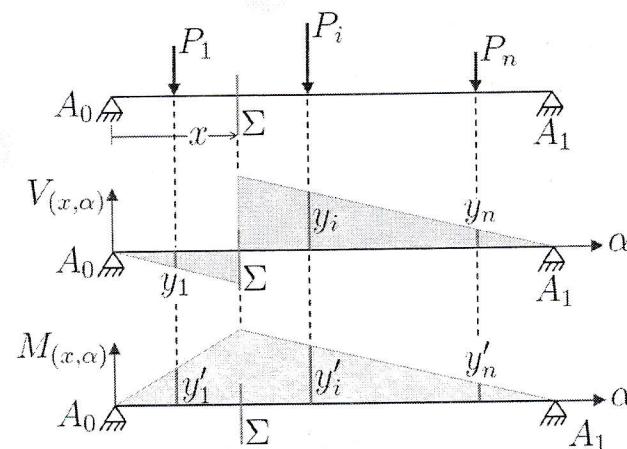


FIGURE 3.2 – Charges localisées sur la poutre

### 3.3.2 Charges réparties

Soit une poutre  $A_0A_1$  soumise entre  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  à une charge répartie d'intensité  $P(\alpha)$  (figure 3.3).

- Un tronçon de longueur  $d\alpha$  et d'abscisse  $\alpha$  subit une charge localisée élémentaire  $P(\alpha)d\alpha$  (figure 3.3),
- par principe de superposition, la force  $P(\alpha)d\alpha$  produit dans la section  $\Sigma$  d'abscisse  $x$  un effort tranchant  $P(\alpha)y'd\alpha$  et un moment fléchissant  $P(\alpha)y'd\alpha'$ .

L'ensemble de la charge répartie produit :

$$V_{(x)} = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} P(\alpha) y d\alpha \quad (3.8)$$

$$M_{(x)} = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} P(\alpha) y' d\alpha \quad (3.9)$$

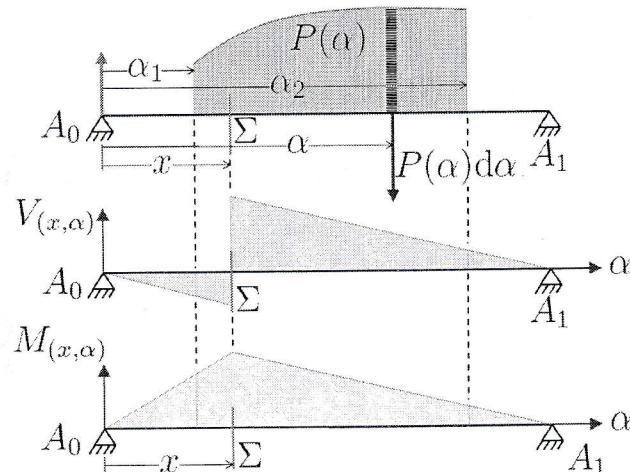


FIGURE 3.3 – Charge répartie sur la poutre

Remarque : Si la charge appliquée est uniforme,  $P(\alpha) = P$ , on a :

$$V_{(x)} = P \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} y d\alpha \quad (3.10)$$

$$M_{(x)} = P \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} y' d\alpha \quad (3.11)$$

### 3.4 Exercices

⇒ Exercice 1 :

Calculer la ligne d'influence du moment fléchissant et le moment produit au milieu de la poutre de la figure (3.4).

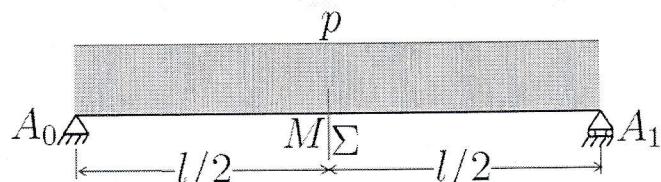


FIGURE 3.4 – Schéma de l'exercice 9

⇒ Solution 1 :

Ligne d'influence du moment fléchissant :

Partie  $A_0M$  (voir figure 3.1) :

$$M_{(x,\alpha)} = \alpha \left( 1 - \frac{x}{l} \right) \quad (3.12)$$

on a :

$$x_M = \frac{l}{2} \quad \rightarrow \quad M_{(x,\alpha)} = \frac{\alpha}{2} \quad (3.13)$$

Partie  $MA_1$  :

$$M_{(x,\alpha)} = x \left( 1 - \frac{\alpha}{l} \right) = \frac{1}{2}(l - \alpha) \quad (3.14)$$

La L.I. du moment fléchissant est présentée sur la figure (3.5).

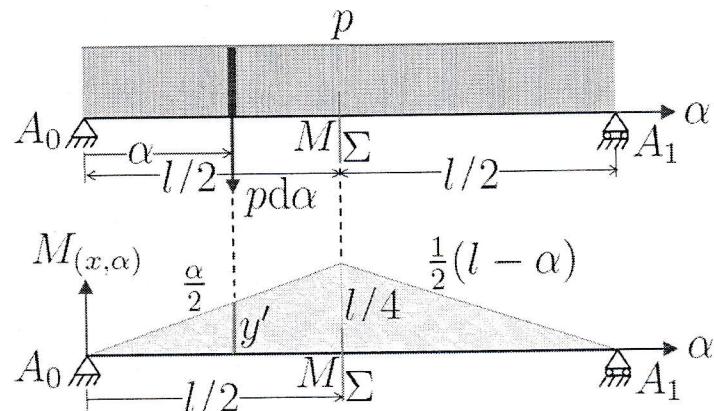


FIGURE 3.5 – Ligne d'influence du moment fléchissant à la section  $\Sigma$

Calcul du moment à mi-travée :

on a :

$$M(x) = \int_0^l p y' d\alpha \quad (3.15)$$

partie  $A_0 M$  :

$$M(x) = p \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{\alpha}{2} d\alpha = \frac{p}{2} \left[ \frac{\alpha^2}{2} \right]_0^{\frac{l}{2}} = \frac{pl^2}{16} \quad (3.16)$$

partie  $M A_1$  :

$$M(x) = p \int_{\frac{l}{2}}^l \frac{l-\alpha}{2} d\alpha = \frac{p}{2} \left[ l\alpha - \frac{\alpha^2}{2} \right]_{\frac{l}{2}}^l = \frac{pl^2}{16} \quad (3.17)$$

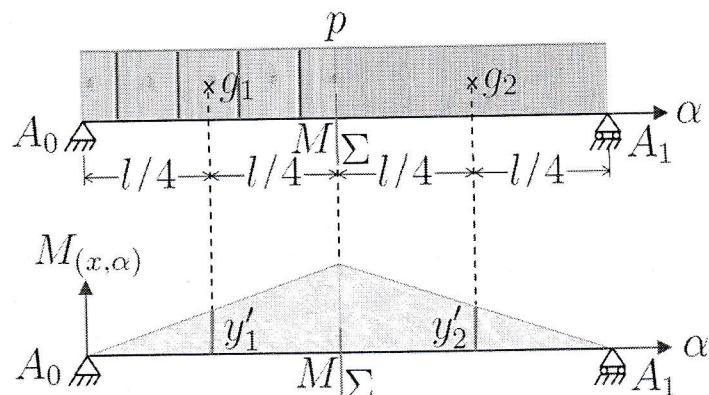
le moment total est donc :

$$M(x) = \frac{pl^2}{8} \quad (3.18)$$

Autre façon pour calculer le M.F. à partir de la L.I. :

on divise le chargement répartie par parties simplifiées et on cherche le 'centre de gravité' de la représentation schématique de l'effort et on calcule directement le moment en cherchant la composante  $y'$  du C.D.G sur la ligne d'influence, comme ça on a pour notre cas (figure 3.6) :

$$M(x) = F_{g_1} y'_1 + F_{g_2} y'_2 = p \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{8} + p \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{8} = \frac{pl^2}{8} \quad (3.19)$$

FIGURE 3.6 – Moment total à la section  $\Sigma$ 

## ♦ Exercice 2 :

1. Déterminer les lignes d'influence des moments fléchissants aux sections  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  (figure 3.7),
2. Calculer les M.F. aux sections  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  du chargement extérieur appliquée (figure 3.8).

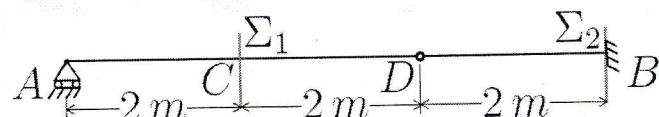


FIGURE 3.7 – Schéma de l'exercice 10

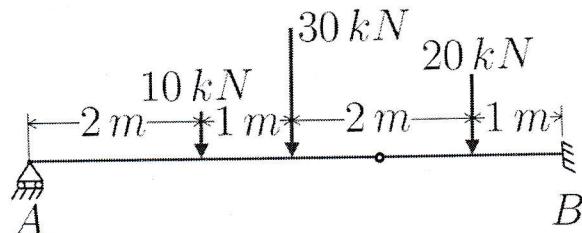


FIGURE 3.8 – Chargement extérieur appliqué à la poutre - Exercice 10

## ⇒ Solution 2 :

1. Lignes d'influence du moment fléchissant à  $\Sigma_1$  :

*Quand  $\alpha < 2m$  :*

En tenant en compte l'équilibre de la partie de la poutre  $AD$ , on obtient :

$$\sum M_{/D} = 0 \quad \rightarrow \quad 4R_A - 1(4 - \alpha) = 0 \quad (3.20)$$

$$\rightarrow \quad R_A = 1 - \frac{\alpha}{4} \quad (3.21)$$

le moment à  $\Sigma_1$  est donc :

$$M_{(2,\alpha)} = R_A \cdot 2 - 1(2 - \alpha) \quad (3.22)$$

$$= \left(1 - \frac{\alpha}{4}\right) \cdot 2 - 1(2 - \alpha) \quad (3.23)$$

$$= \frac{\alpha}{2} \quad (3.24)$$

*Quand  $\alpha > 2m$  :*

On a deux cas à traiter cette fois :

*Cas 1 :  $2m < \alpha < 4m$*

On a la même travée et le même équilibre, donc :

$$R_A = 1 - \frac{\alpha}{4} \quad (3.25)$$

le moment sur la deuxième partie de la poutre est :

$$M_{(2,\alpha)} = R_A \cdot 2 = \left(1 - \frac{\alpha}{4}\right) \cdot 2 = \frac{4 - \alpha}{2} \quad (3.26)$$

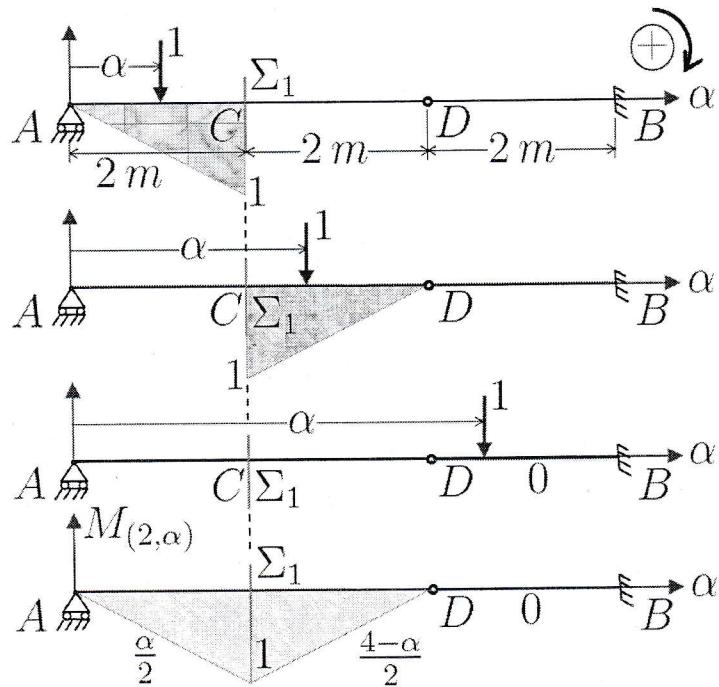
*Cas 2 :  $\alpha > 4m$*

La partie de la poutre  $AD$  ne subit aucun chargement, d'où :

$$\sum M_{/D} = 0 \quad \rightarrow \quad R_A = 0 \quad (3.27)$$

le moment sur la troisième partie de la poutre est :

$$M_{(2,\alpha)} = 0 \quad (3.28)$$

FIGURE 3.9 – Lignes d'influence du moment fléchissant à la section  $\Sigma_1$ 

Nous présentons la ligne d'influence du moment fléchissant à la section  $\Sigma_1$  sur la figure (3.9).

Lignes d'influence du moment fléchissant à  $\Sigma_2$  :

*Quand  $\alpha < 4m$  :*

On a :

$$\sum M_{/D} = 0 \quad \rightarrow \quad R_A = 1 - \frac{\alpha}{4} \quad (3.29)$$

l'effort tranchant au point  $D$  est :

$$V_D = R_A - 1 = -\frac{\alpha}{4} \quad (3.30)$$

le moment à  $\Sigma_2$  est :

$$M_{(6,\alpha)} = V_D \cdot 2 = -\frac{\alpha}{4} \cdot 2 = -\frac{\alpha}{2} \quad (3.31)$$

*Quand  $\alpha > 4m$  :*

L'équilibre du tronçon  $AD$  nous donne :

$$\sum M_{/D} = 0 \rightarrow R_A = 0 \quad (3.32)$$

le moment à  $\Sigma_2$  est :

$$M_{(6,\alpha)} = -1.(6 - \alpha) = \alpha - 6 \quad (3.33)$$

La ligne d'influence correspondante à  $\Sigma_2$  est schématisée sur la figure (3.10).

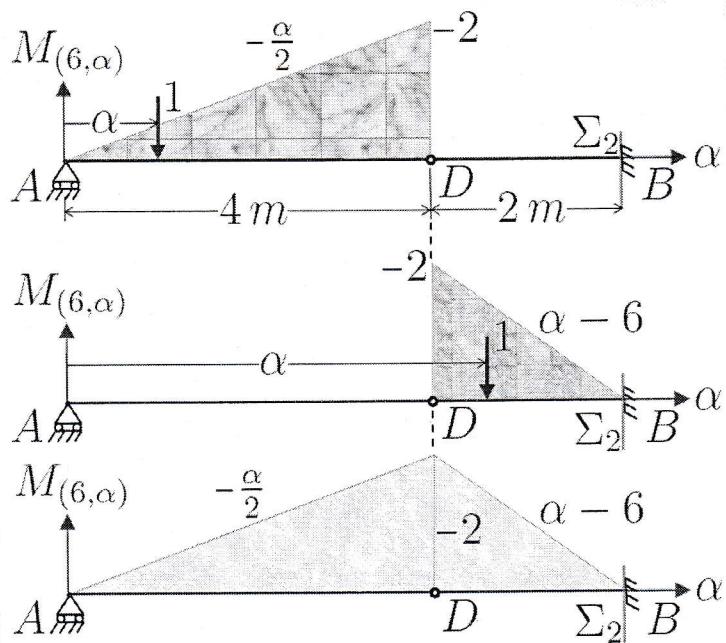


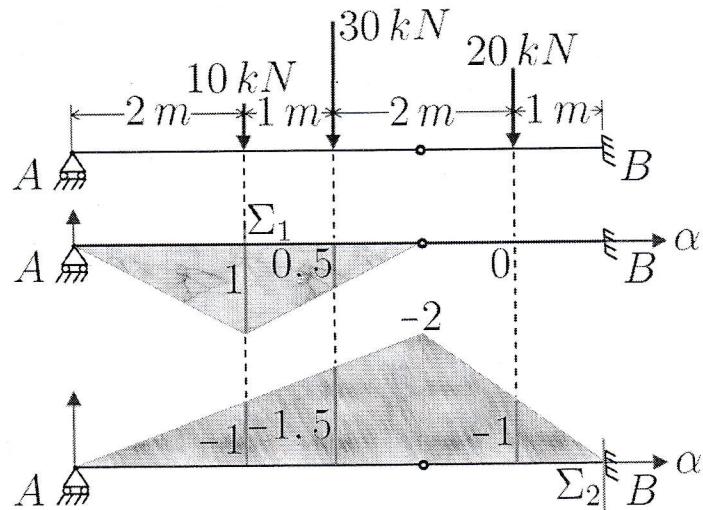
FIGURE 3.10 – Lignes d'influence du moment fléchissant à la section  $\Sigma_2$

2. Calcul du moment fléchissant dû au chargement présenté sur la figure (3.8) :

En cherchant les ordonnées des lignes d'influence de  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  au niveau des points d'application des efforts (voir figure 3.11), on obtient directement les valeurs des moments fléchissants aux points  $C$  et  $B$ . Ainsi on a :

$$M_{/c} = 10.(1) + 30.(0,5) + 20.(0) = 25 \text{ kN.m} \quad (3.34)$$

$$M_{/B} = 10.(-1) + 30.(-1,5) + 20.(-1) = -75 \text{ kN.m} \quad (3.35)$$

FIGURE 3.11 – Moment total d'un chargement ext. aux sections  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$ 

## ⇒ Exercice 3 :

1. Déterminer les foyers de la poutre de la figure (3.12),
2. Calculer et tracer la ligne d'influence du moment fléchissant à la section  $\Sigma$ ,

on considère  $EI = cte$ .

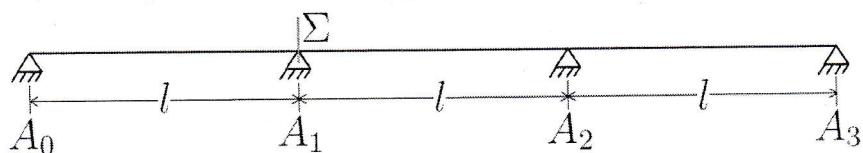


FIGURE 3.12 – Schéma de l'exercice 11

## ⇒ Solution 3 :

1. *Calcul des foyers de gauche :*

Travée 1 :

on a :  $M_0 = 0$ , donc :

$$\varphi_1 = -\frac{M_0}{M_1} = 0 \quad (3.36)$$

Travée 2 :

$$\varphi_2 = \frac{b_2}{c_1 + a_2} = \frac{\frac{l}{6EI}}{\frac{l}{3EI} + \frac{l}{3EI}} = \frac{1}{4} \quad (3.37)$$

Travée 3 :

$$\varphi_3 = \frac{b_3}{c_2 + a_3 - b_2\varphi_2} = \frac{\frac{l}{6EI}}{\frac{l}{3EI} + \frac{l}{3EI} - \frac{l}{6EI}\frac{1}{4}} = \frac{4}{15} \quad (3.38)$$

*Calcul des foyers de droite :*

En utilisant la symétrie de la poutre, on a :

$$\varphi'_1 = \frac{4}{15} \quad (3.39)$$

$$\varphi'_2 = \frac{1}{4} \quad (3.40)$$

$$\varphi'_3 = 0 \quad (3.41)$$

2. Calcul des équations de la ligne d'influence du moment fléchissant :

– quand la force unité est appliquée sur la travée 1 :

$$M_1 = -\frac{1}{b_1} \frac{\varphi_1 \varphi'_1 \theta''_0 + \varphi'_1 \theta'_1}{1 - \varphi_1 \varphi'_1} \quad (3.42)$$

$$= -\frac{6}{l} \frac{4}{15} \alpha \frac{l^2 - \alpha^2}{6l} \quad (3.43)$$

$$= -\frac{4}{15} \alpha \left( 1 - \frac{\alpha^2}{l^2} \right) \quad (3.44)$$

– quand la force unité est appliquée sur la travée 2 :

$$M_1 = \frac{1}{b_2} \frac{\varphi_2 \theta''_1 + \varphi_2 \varphi'_2 \theta'_2}{1 - \varphi_2 \varphi'_2} \quad (3.45)$$

$$= \frac{6}{l} \frac{-\frac{1}{4} \frac{\alpha(l-\alpha)(2l-\alpha)}{6l} + \frac{1}{16} \frac{\alpha(l^2-\alpha^2)}{6l}}{1 - \frac{1}{16}} \quad (3.46)$$

$$= -\frac{\alpha}{15} \left( 7 - 12 \frac{\alpha}{l} + 5 \frac{\alpha^2}{l^2} \right) \quad (3.47)$$

– quand la force unité est appliquée sur la travée 3 :

$$M_2 = \frac{1}{b_3} \frac{\varphi_3 \theta''_2 + \varphi_3 \varphi'_3 \theta'_3}{1 - \varphi_3 \varphi'_3} \quad (3.48)$$

$$= -\frac{6}{l} \frac{4}{15} \alpha \frac{(l - \alpha)(2l - \alpha)}{6l} \quad (3.49)$$

$$= -\frac{4\alpha}{15} \left( 2 - 3\frac{\alpha}{l} + \frac{\alpha^2}{l^2} \right) \quad (3.50)$$

les moments  $M_1$  et  $M_2$  sont reliés par :

$$M_1 = -\varphi_2 M_2 \quad (3.51)$$

d'où :

$$M_1 = \frac{\alpha}{15} \left( 2 - 3\frac{\alpha}{l} + \frac{\alpha^2}{l^2} \right) \quad (3.52)$$

En traçant point par point, la ligne d'influence du moment fléchissant obtenue est présentée sur la figure (3.13).

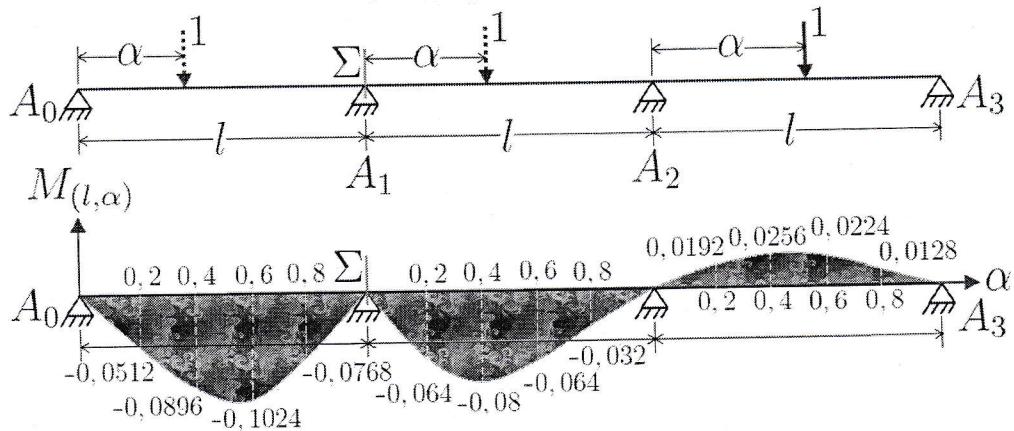


FIGURE 3.13 – Ligne d'influence du moment fléchissant à la section  $\Sigma$

♦♦ Exercice 4 :

On considère un pont à deux travées schématisé par une poutre comme présenté sur la figure (3.14).

1. Déterminer les foyers de la poutre,
2. Calculer et tracer la ligne d'influence du M.F. à la section  $\Sigma$ ,

3. On considère le passage d'un camion de 30 t (camion type  $B_c$ ). Calculer la valeur absolue maximale du M.F. dans la section  $\Sigma$ .

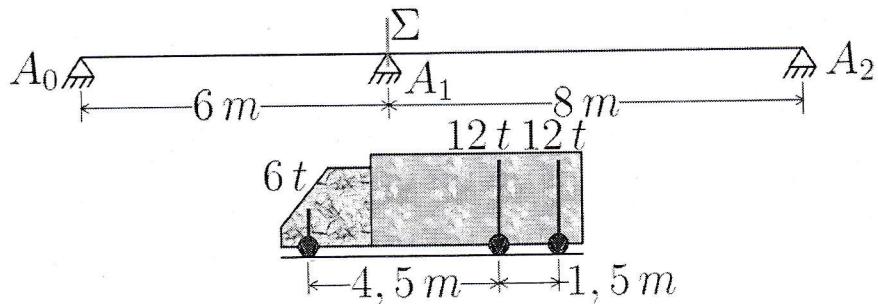


FIGURE 3.14 – Schéma de l'exercice 12 (pont à 2 travées)

⇒ Solution 4 :

1. *Calcul des foyers de gauche :*

travée 1 ( $A_0A_1$ ) :

on a :  $M_0 = 0$ , d'où :

$$\varphi_1 = -\frac{M_0}{M_1} = 0 \quad (3.53)$$

travée 2 ( $A_1A_2$ ) :

$$\varphi_2 = \frac{b_2}{c_1 + a_2} = \frac{\frac{8}{6EI}}{\frac{6}{3EI} + \frac{8}{3EI}} = \frac{2}{7} \quad (3.54)$$

*Calcul des foyers de droite :*

travée 2 ( $A_1A_2$ ) :

on a :  $M_2 = 0$ , d'où :

$$\varphi'_2 = -\frac{M_2}{M_1} = 0 \quad (3.55)$$

travée 1 ( $A_0A_1$ ) :

$$\varphi'_1 = \frac{b_1}{c_1 + a_2} = \frac{\frac{6}{6EI}}{\frac{6}{3EI} + \frac{8}{3EI}} = \frac{3}{14} \quad (3.56)$$

2. Calcul des équations de la ligne d'influence :

– Quand la force unité est appliquée à la travée 1 :

$$M_1 = -\frac{1}{b_1} \frac{\varphi_1 \varphi'_1 \theta''_0 + \varphi'_1 \theta'_1}{1 - \varphi_1 \varphi'_1} \quad (3.57)$$

$$= -\frac{\alpha(36 - \alpha^2)}{168} \quad (3.58)$$

– Quand la force unité est appliquée à la travée 2 :

$$M_1 = \frac{1}{b_2} \frac{\varphi_2 \theta''_1 + \varphi_2 \varphi'_2 \theta'_2}{1 - \varphi_2 \varphi'_2} \quad (3.59)$$

$$= -\frac{\alpha(8 - \alpha)(16 - \alpha)}{224} \quad (3.60)$$

La ligne d'influence est présentée sur la figure (3.15). Elle est obtenue après traçage point par point.

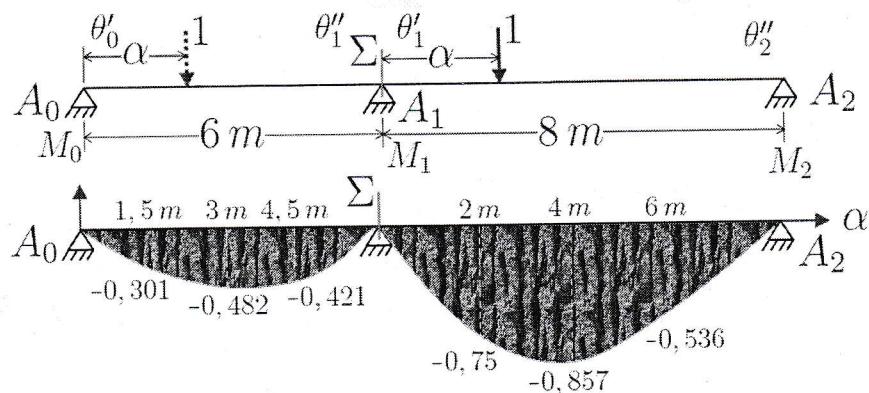


FIGURE 3.15 – Ligne d'influence du moment fléchissant à la section  $\Sigma$

3. Détermination de la position la plus défavorable du camion et la valeur extrême de  $M_1$  :

On dispose les essieux du camion sur les travées du pont en le faisant rouler de gauche à droite ou de droite à gauche. la valeur maximale du moment est recherchée pour chaque cas et l'enveloppe de ces maximums correspond à la valeur la plus défavorable du pont et sa position est la position la plus défavorable.

Sur la figure (3.16), nous présentons les trois situations potentielles de notre pont. Le cas le plus logique que donne le moment maximal est la deuxième situation.

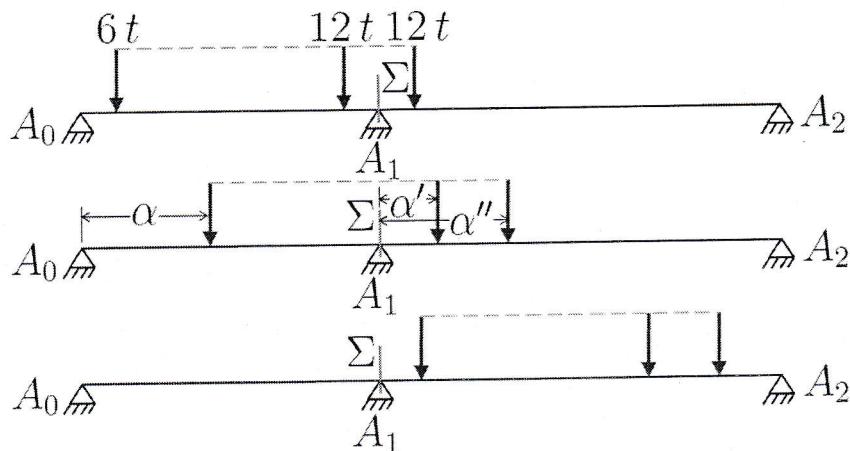


FIGURE 3.16 – Positions potentielles possibles du camion sur les deux travées

Soient  $\alpha$ ,  $\alpha'$  et  $\alpha''$  les positions des essieux par rapport aux appuis situés immédiatement à gauche de ces essieux (voir figure (3.16)). On a :

$$\alpha' = \alpha + 4.5 - l_1 = \alpha - 1.5 \quad (3.61)$$

$$\alpha'' = \alpha + 6 - l_1 = \alpha \quad (3.62)$$

en utilisant la ligne d'influence, on trouve :

$$\begin{aligned} M_{1(\alpha)} &= -6 \frac{\alpha(36 - \alpha^2)}{168} - 12 \frac{(\alpha - 1.5)(9.5 - \alpha)(17.5 - \alpha)}{224} \\ &\quad - 12 \frac{\alpha(8 - \alpha)(16 - \alpha)}{224} \end{aligned} \quad (3.63)$$

$$= 13.36 - 19.22\alpha + 2.813\alpha^2 - 0.07143\alpha^3 \quad (3.64)$$

Le maximum de  $M_{1(\alpha)}$  correspond à :

$$\frac{dM_{1(\alpha)}}{d\alpha} = 0 \rightarrow -19.22 + 5.626\alpha - 0.2143\alpha^2 = 0 \quad (3.65)$$

$$\rightarrow \alpha = 4.04 \text{ m} \quad (3.66)$$

et le moment maximal est :

$$M_{1\max} = -23.1 \text{ t.m} \quad (3.67)$$