Probabilidad
Tarea 2

Omar Pacheco - Braulio Sanchez

Pregunta 1

La siguiente tabla de contingencia muestra el resultado (incompleto) de entrevistas concluidas durante una encuesta para estudiar las opiniones que se tienen al respecto del aborto legal en cierta ciudad.

Área de la ciudad	A favor (F)	En contra (Q)	Indecisos (R)	Total
A	100	20	-	125
B	115	5	-	125
D	50	-	15	-
E	35	50	-	-
Total	-	135	65	-

Realice lo que se le pide proponiendo una notación adecuada para sus respuestas.

a) Si se elige al azar una de las personas encuestadas, cuál es la probabilidad de que:

   i. este en contra del aborto legalizado dado que vive en la zona A o E?

   ii. El entrevistado esté indeciso dado que no vive en la zona D?

b) Determine las siguientes probabilidades:

   i. $P(F|B)$

   ii. $P(D|Q)$

   iii. $P(Q|A\cup B)$

Solución Pregunta 1: Primero completamos la tabla:

Área de la ciudad	A favor (F)	En contra (Q)	Indecisos (R)	Total
A	100	20	5	125
B	115	5	5	125
D	50	60	15	125
E	35	50	40	125
Total	300	135	65	500

Ahora sí respondemos las preguntas:

a) i. Se nos pregunta la prob. de que esté en contra dado que (condicional) vive en la zona A o E. Es decir, $P(Q|A\cup E)$.

Por definición:

$$P(Q|A\cup E) = \frac{P(Q\cap(A\cup E))}{P(A\cup E)}$$

Además, al ser un espacio equiprobable tenemos:

$$P(A\cup E) = \frac{\#A\cup E}{\#\Omega} = \frac{135}{500} = \frac{27}{100}$$

$$P(Q\cap(A\cup E)) = \frac{\#Q\cap(A\cup E)}{\#\Omega}$$

$$P(Q\cap(A\cup E)) = \frac{\#(Q\cap A)\cup(Q\cap E)}{500}$$

$$P(Q\cap(A\cup E)) = \frac{70}{500}$$

Así que tenemos:

$$P(Q|A\cup E) = \frac{\frac{70}{500}}{\frac{135}{500}} = \frac{70}{135}$$

ii. La prob. de que este indeciso (R), dado que (condicional) no viva en la zona D (D^c), esto es

$$P(R|D^c) = \frac{P(R \cap D^c)}{P(D^c)}$$

donde

$$P(D^c) = \frac{\#D^c}{\#\Omega} = \frac{375}{500}$$
$$P(R \cap D^c) = \frac{\#R \cap D^c}{\#\Omega} = \frac{50}{500}$$

Sustituimos:

$$P(R|D^c) = \frac{\frac{50}{500}}{\frac{375}{500}}$$
$$P(R|D^c) = \frac{50}{500}$$

b) i.

$$P(F|B) = \frac{P(F \cap B)}{P(B)}$$

$$P(B) = \frac{\#B}{\#\Omega} = \frac{125}{500}$$
$$P(F \cap B) = \frac{\#F \cap B}{\#\Omega} = \frac{115}{500}$$

$$\therefore P(F|B) = \frac{\frac{115}{500}}{\frac{125}{500}}$$

$$P(F|B) = \frac{115}{125}$$

ii.

$$P(D|Q) = \frac{P(D \cap Q)}{P(Q)} \qquad \begin{aligned} P(D \cap Q) &= \frac{\#D \cap Q}{\#\Omega} = \frac{60}{500} \\ P(Q) &= \frac{\#Q}{\#\Omega} = \frac{135}{500} \end{aligned}$$

$$\therefore P(D|Q) = \frac{\frac{60}{500}}{\frac{135}{500}} = \frac{60}{135}$$

iii.

$$P(Q|A \cup B) = \frac{P(Q \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} \qquad \begin{aligned} P(Q \cap (A \cup B)) &= \frac{\#Q \cap (A \cup B)}{\#\Omega} = \frac{25}{500} \\ P(A \cup B) &= \frac{\#A \cup B}{\#\Omega} = \frac{250}{500} \end{aligned}$$

$$\therefore P(D|Q) = \frac{\frac{25}{500}}{\frac{250}{500}} = \frac{25}{250}$$

😄

Pregunta 2

Supóngase que dividimos a las personas en tres clases económicas: pobre, media y rica. Mediante una encuesta, se encuentra que el 2% de los pobres, el 43% de la clase media, y el 70% de los ricos tienen casa propia. Se sabe además que los pobres constituyen el 30% de la población, la clase media el 68%, los ricos el 2%. AI seleccionar al azar una persona, se encuentra que tiene casa. ¿Cuál es la probabilidad de que esa persona sea de la clase pobre?, ¿Cuál es la probabilidad de que una persona seleccionada al azar en una población tenga casa propia?

Pregunta 3

Los miembros de una firma de consultoría rentan automóviles en tres agencias: 60% de la agencia 1, 30% de la agencia 2 y 10% de la agencia 3. Si 9% de los vehículos de la agencia 1 necesitan afinación, 20% de las unidades de la agencia 2 necesitan también una afinación y 6% de los autos de la agencia 3 necesitan asimismo afinación, ¿cuál es la probabilidad de que un automóvil rentado a la firma necesite afinación? Si un automóvil rentado a una firma de consultoría necesita afinación, ¿cuál es la probabilidad de que este vehículo provenga de la agencia 2?

Solución pregunta 3: Tenemos los siguientes eventos:

- A_1 := "El carro rentado es de la agencia 1", $P(A_1) = \frac{60}{100}$
- A_2 := "El carro rentado es de la agencia 2", $P(A_2) = \frac{30}{100}$
- A_3 := "El carro rentado es de la agencia 3", $P(A_3) = \frac{10}{100}$
- B_1 := "El carro de la agencia 1 necesita afinación", $P(B_1) = \frac{9}{100}$
- B_2 := "El carro de la agencia 2 necesita afinación", $P(B_2) = \frac{20}{100}$
- B_3 := "El carro de la agencia 3 necesita afinación", $P(B_3) = \frac{6}{100}$

Y si nos pregunta entonces: $P(B)$:= "La probabilidad de que un carro necesite afinación". Cómo los eventos A_1, A_2, A_3 forman una partición, tenemos entonces:

$$\begin{aligned}
P(B) &= P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + P(B \cap A_3) \\
P(B) &= P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3) \\
P(B) &= \frac{60}{100}\frac{9}{100} + \frac{30}{100}\frac{20}{100} + \frac{10}{100}\frac{6}{100} \\
P(B) &= \frac{3}{25}
\end{aligned}$$

Luego se nos pregunta la probabilidad de que un carro sea de la agencia 2 dado que ocupa afinación, es decir $P(A_2|B)$. Por definición:

$$\begin{aligned}
P(A_2|B) &= \frac{P(A_2 \cap B)}{P(B)} \\
P(A_2|B) &= \frac{P(A_2)\ P(B|A_2)}{P(B)} = \frac{\frac{30}{100}\frac{20}{100}}{\frac{3}{25}} \\
P(A_2|B) &= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

😄

Pregunta 4

En una fábrica, una línea de producción termina dos tipos de piezas ensambladas por dos autómatas. El primer autómata ensambla tres partes de la producción, y en 65% de los casos del acabado es de primera calidad. El segundo autómata ensambla dos partes de la producción, y en 85% de los casos es de primera calidad.

a) Si en esta línea se elige una pieza, cuál es la probabilidad de que sea de primera calidad?

b) Si una pieza es de primera calidad, ¿qué es más probable: que sea del primer automata o del segundo?

Pregunta 5

Una máquina consiste en 4 componentes conectados en paralelo, de modo que la máquina falla sólo si los cuatro componentes fallan. Supongamos que los components son independientes entre sí. Si los componentes tienen probabilidades 0.1; 0.2; 0.3 y 0.4 de fallar cuando la máquina es encendida, ¿cuál es la probabilidad de que funcione al encenderla?

Solución pregunta 5: $A :=$ "La maquina funcione al encenderla" = "La maquina no falle al encenderla". Además, sea $B :=$ La maquina falle al encenderla, $A = B^c$. Como los componentes son independientes, la probabilidad de que uno falle es independiente de si fallen los otros o no. Por lo tanto $P(C_i \cap C_j) = P(C_i)P(C_j)$. Ahora, calculemos $P(B)$ y luego $P(B^c)$

$$P(B) = P(C_1, C_2, C_3, C_4)$$
$$P(B) = P(C_1)\ P(C_2)\ P(C_3)\ P(C_4)$$
$$P(B) = 0.1 \cdot 0.2 \cdot 0.3 \cdot 0.4$$
$$P(B) = 0.0024$$

$$P(B^c) = 1 - P(B) = 1 - 0.0024$$
$$P(B^c) = 0.9976 = P(A)$$

😃

Pregunta 6

Se lanza un dado dos veces. Sea $A =$ "el máximo de las caras es 2", $B =$ "el mímino de las caras es 2". ¿Son independientes? Argumente su respuesta.

Pregunta 7

Si los tres primeros lanzamientos de una moneda han resultado cara, la probabilidad de que obtengamos cara en el cuarto lanzamiento es:

A. $\dfrac{1}{16}$

B. $\dfrac{1}{4}$

C. $\dfrac{1}{2}$

D. Otro valor entre cero y uno

Solución pregunta 7: La respuesta es C. $\frac{1}{2}$, ya que el resultado de lanzar una moneda no afecta el el resultado del siguiente, es decir, son independientes. Por que la probabilidad del primer lanzamiento será la misma del segundo lanzamiento, $\frac{1}{2}$. 😃

Pregunta 8

Una compañía maderera acaba de recibir un lote de 10,000 tablas de 2x4. Suponga que 20% de estas tablas (2000) en realidad están demasiado tiernas o verdes para ser utilizadas en construcción de primera calidad. Se eligen dos tablas al azar, una después de la otra. Sea $A = \{\text{la primera tabla esta verde}\}$ y $B = \{\text{la segunda tabla está verde}\}$. Calcule $P(A)$, $P(B)$ y $P(A \cap B)$ (un diagrama de árbol podría ayudar). ¿Son A y B independientes?

Pregunta 9

Demuestre que para los eventos independientes A y B se tiene que

$$P(A \cup B) = 1 - P(A^c)P(B^c)$$

Generalización (inducción): Si los eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son mutuamente independientes, entonces

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = 1 - P(A_1^c)P(A_2^c)\ldots P(A_n^c).$$

Solución pregunta 9: Si dos eventos A, B son independientes tenemos que

$$\begin{aligned}
P(A \cap B) &= P(A)\ P(B) \\
P(A \cap B) &= (1 - P(A^c))(1 - P(B^c)) \\
P(A \cap B) &= 1 - P(A^c) - P(B^c) + P(A^c)P(B^c)
\end{aligned}$$

Y para cualesquiera dos eventos tenemos:

$$\begin{aligned}
P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\
P(A \cup B) &= 1 - P(A^c) + 1 - P(B^c) - P(A \cap B) \\
P(A \cup B) &= 1 - P(A^c) + 1 - P(B^c) - (1 - P(A^c) - P(B^c) + P(A^c)P(B^c)) \\
P(A \cup B) &= 1 - \cancel{P(A^c)} + \cancel{1} - \cancel{P(B^c)} - \cancel{1} + \cancel{P(A^c)} + \cancel{P(B^c)} - P(A^c)P(B^c) \\
P(A \cup B) &= 1 - P(A^c)P(B^c)
\end{aligned}$$

Ahora, por hipótesis inductiva supongamos que para $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eventos independientes, la afirmación:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = 1 - P(A_1^c)P(A_2^c)\ldots P(A_n^c) \tag{1}$$

es verdadera. Intentaremos demostrar que la afirmación

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup A_{n+1}) = 1 - P(A_1^c)P(A_2^c)\ldots P(A_n^c)P(A_{n+1}^c) \tag{2}$$

También es verdadera

Consideremos la únion de eventos $(\bigcup_1^n A_i) \cup A_{n+1}$, por definición tendremos:

$$P\left(\left(\bigcup_1^n A_i\right) \cup A_n\right)$$

😆

Pregunta 10

Si A y B son eventos independientes y la probabilidad de que ambos ocurran es 0.16, mientras que la probabilidad de que ninguno ocurra es 0.36, calcule $P(A)$ y $P(B)$.

Solución pregunta 9: Es fácil ver que la afirmación

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = 1 - P(A_1^c)P(A_2^c)\ldots P(A_n^c)$$

es verdadera 😆