20 de marzo de 2019

Unidad II. Distribuciones < discretas / Continuas

¿Qué es una variable aleatoria?

En un experimento no siempre es de interés de manera inmediata el resultado que se obtiene.

La mayoría de las veces el interés radica en alguna característica o medida de los resultados del experimento.

Ejemplo:

Experimento: se lanzan 2 dados y se observa el resultado de ambas caras

Interés: La suma de las 2 caras:

Sabemos que $\Omega = \{(1,1), (1,2) \dots (6,6)\}$

$\#\Omega = 36.$

Denotemos con la letra x a la suma de las 2 caras superiores de los datos, ¿Qué valores toma x?

$x=2 \longrightarrow (1,1)$
$x=3 \longrightarrow (1,2)$
$\vdots$
$x=12 \longrightarrow (6,6)$

Nos gustaría saber cuáles son las probabilidades de los valores que toma la variable 'x'

$P(x=2) = P(\{(1,1)\}) = 1/36$

$P(x=3) = P(\{(1,2),(2,1)\}) = 2/36 = 1/18$

$P(x=4) = P(\{(1,3),(2,2),(3,1)\} = 1/12$
$P(x=5) = P(\{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\} = 1/9$
$P(x=6) = P(\{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,4)\} = 5/36$
$P(x=7) = P(\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\} = 1/6$
$P(x=8) = P(\{(1,7),(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2),(7,1)\} = 5/36$
$P(x=9) = P(\{(1,8),(2,7),(3,6),(4,5),(5,4),(6,3),(7,2),(8,1)\} = 1/9$
$P(x=10) = P(\{(1,9) \dots = 1/12$
$P(x=11) = P(\{(1,10) \dots = 1/18$
$P(x=12) = P(\{(1,11) \dots = 1/36$

$\Sigma = 36/36 = 1$

21 de marzo de 2019

A la función $P(X = x)$ donde $x = 2, 3, 4, \ldots, 12$. Se

variable valor

le llama <u>función de probabilidad</u>

Definición de variable aleatoria discreta.

Una variable aleatoria discreta toma como valores un subconjunto de los enteros positivos o todos los enteros positivos. Se suelen denotar dichos valores como $x_1, x_2, \ldots, x_n$

Def. Una variable aleatoria continua es aquella que toma valores en intervalos de los números reales.

Los intervalos se denotan de la siguiente forma:

(a, b), $(a, b]$, $[a, b)$, $[a, b]$, $(-\infty, a)$ ó (b, ∞) ó $(-\infty,$

Ejemplos:

Discretas
* el número de carros que pasan por Av. universidad en una hora.
* el número de estudiantes de ISC.
* el número de hijos de una pareja.
* número de veces que se lanza una moneda hasta que aparezca un sol.

Continuas
* La altura de las personas.
* El nivel de agua en una presa.
* El tiempo de vida de una computadora.
* El tiempo de llegadas a un aeropuerto.

Función de probabilidad o función de masa.

Dada una v.a. (variable aleatoria), se define su función de masa, o de probabilidad, como:

$$p(x) = P(X = x)$$

donde x es un valor que tiene la variable X

Ejemplo, en la suma de las caras de los dados:

$p(2) = 1/3$, $p(3) = 3/36$ ... $p(11) = 2/36$, $p(12) = 1/36$

La función masa tiene los siguientes propiedades:

Si x toma como valores la lista $x_1, x_2, \dots, x_n$, entonces:

- $p(x_i) \geq 0 \;\forall x_i$ con $i = 1, 2, \dots$
- $\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1$

Ejemplo: Sea x una v.a. discreta que toma como valores 1, 2 y 3, se define lo siguiente:

$p(1) = 1/2$ y $p(3) = 1/3$, ¿Cuánto vale $p(2)$?

Respuesta: $p(1) + p(2) + p(3) = 1$

entonces $p(2) = 1 - p(1) - p(3) = 1 - 1/2 - 1/3 = 1/6$

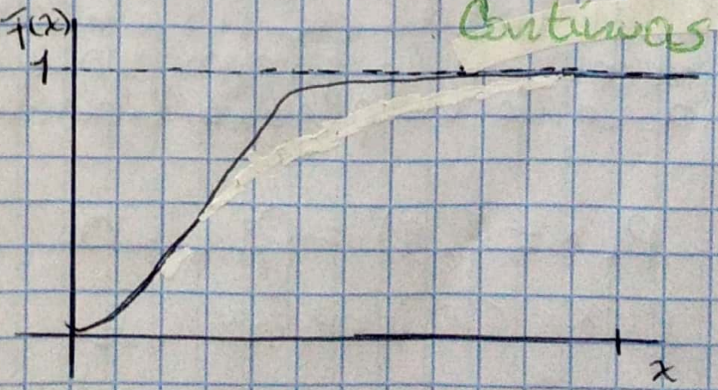
Función de distribución acumulada.

La función de distribución acumulada se denota como $F(x)$ y se define como:

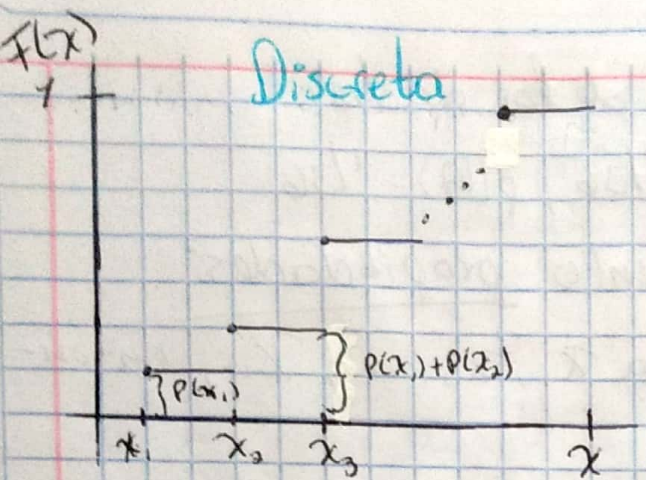
$$F(a) = P(x \leq a) = \sum_{x \leq a} p(x)$$

Propiedades de la función de distribución acumulada:

- $F(x) \geq 0 \;\forall x$
- $F(\infty) = 1$
- $F(-\infty) = 0$
- F es no decreciente



29 de marzo de 2019



Ejemplo:

$F(x_1) = p(x_1)$

$F(x_2) = P(X \leq x_2) = p(x_1) + p(x_2)$

$F(x_3) = P(X \leq x_3) = p(x_1) + p(x_2) + p(x_3)$

$\vdots$

Ejercicios: $(f(x)$ y $F(x))$

① Un grupo de partes moldeadas se clasifica de acuerdo con su longitud de la siguiente manera:

Longitud redondeada a la décima de milímetro más cercano	4.9	5.0	5.1	5.2	5.3	5.4	5.5	5.6
Número de partes	0	3	10	25	40	18	16	2

a) Si la v.a. X es la longitud de una parte moldeada seleccionada al azar, determine la función de probabilidad de X

b) ¿Cuál es el valor de $p(X \leq 5.1)$?

c) ¿Cuál es el valor de $p(4.95 < x < 5.35)$?

Sol. a) primero veamos el rango de valores o soporte de la v.a es $X = \{4.9, 5.0, 5.1, 5.2, 5.3, 5.4, 5.5, 5.6\}$

Se tiene un total de 114 unidades medidas, se puede considerar a la proporción de piezas en cada categoría como la probabilidad de la v.a. en cada caso.

$f(4.9) = P(X = 4.9) = 0/114 = 0$

$f(5.0) = P(X = 5.0) = 3/114 \ldots$

$f(5.6) = P(x = 5.6) = 2/114$

Vamos a verificar que $f(x)$ es una función de probabilidad:

→ es claro que $f(x) \geq 0 \quad \forall \quad x \in X$

→ $\sum_{x \in X} f_x(x) = \frac{0}{114} + \frac{3}{114} + \dots + \frac{2}{114} = 1$

b) $P(X \leq 5.1) = P(X = 4.9) + P(X = 5.0) + P(X = 5.1)$

$= \frac{0}{114} + \frac{3}{114} + \frac{10}{114} = \frac{13}{114} = 0.114$

el 11.4% tiene una longitud menor o igual a 5.1

c) $P(4.95 < X < 5.35) = f(5) + f(5.1) + f(5.2) + f(5.3)$

$= \frac{78}{114}$

* Verifique que la función siguiente es de probabilidad.

$$f(x) = 8/7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x, \quad x = 1, 2, 3$$

Solc

$f(1) = 8/7 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{8}{7} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{7}$

$f(2) = 8/7 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{8}{7} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{7}$

$f(3) = 8/7 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{8}{7} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{7}$

* Dada la función

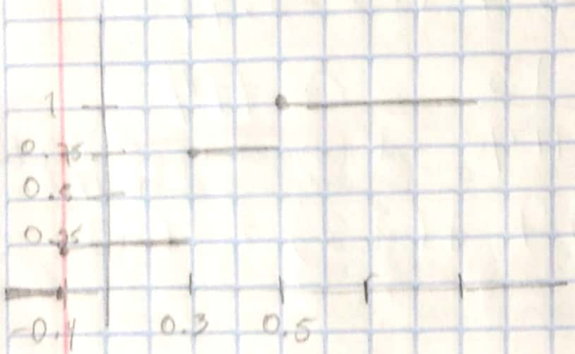
$$F_x(x) = \begin{cases} 0, & x < -0.1 \\ 0.25, & -0.1 \leq x < 0.3 \\ 0.75, & 0.3 \leq x < 0.5 \\ 1, & x \geq 0.5 \end{cases}$$

a) Verificar que F_x es una función de distribución

b) Obtener f_x

a) Basta verificar que
- $0 \leq F_x(x) \leq 1 \quad \forall x \in X$
- Si $x \leq y$, entonces $F_x(x) \leq F_x(y)$
- $\lim_{x \to -\infty} F_x(x) = 0$ y $\lim_{x \to \infty} F_x(x) = 1$

Dado que el rango de valores posibles para $F_x(x)$ va de 0 a 1 se cumple que $0 \leq F(x) \leq 1$



X	F(x)
0.1	0.25
0.3	0.5
0.5	0.75

$X = \{.1, .3, .5\}$

como podemos observar en la grafica

$\lim_{\to -\infty} F(x) = 0$ y $\lim_{\to \infty} F(x) = 1$

1° de abril de 2019

Esperanza.

Sea X una v.a discreta, con función de probabilidad o de densidad $f_x(t)$, se define el valor esperado como:

$$\mu = \underbrace{E[x]}_{\text{valor esperado de } x} = \sum_{x_i} x_i f(x_i)$$

Ejemplo: calcular la media de las v.a. X que representa la suma de las caras de los dados.

Sol. $$\mu = \sum_{x=2}^{12} x f(x) = 2f(2) + 3f(3) + \ldots + 12f(12)$$
$$= 2(1/36) + 3(2/36) + \ldots + 12(1/36) = 7$$

Varianza

Sea X una v.a. discreta, la varianza de x se denota como σx^2, y se denota como:

$$\sigma_x^2 = \sum_{x_i} (x_i - \mu)^2 f_x(x_i)$$

Ejemplo: calcular la varianza de la v.a. X que representa la suma de las caras de los dados.

Sol. Veamos $\sigma_x^2 = \sum (x_i - \mu)^2 f(x_i) = (2-7)^2 \frac{1}{36} + (3-7)^2 \frac{2}{36} + \ldots + (12-7)^2 1/36 = 2.4152$.

2 de abril de 2019

Desviación estándar

Está dada como: $\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2}$

Propiedad del valor esperado.

Sea x una v.a con función de probabilidad $f(x)$, se define otra variable aleatoria

$$y = h(x)$$

donde $h(\cdot)$ es una función real, entonces.

$$E[y] = E[h(x)] = \sum_{x_i} h(x_i) f(x_i)$$

Ejemplos

- Si $y = h(x) = x^2$, entonces:

$$E[y] = \sum_{x_i} x_i^2 f(x_i)$$

- Si $y = h(x) = \ln(x)$, entonces:

$$E[y] = E[\ln(x)] = \sum_{x_i} \ln(x_i) f(x_i)$$

Momentos de una variable aleatoria.

Se puede conocer el comportamiento de una variable aleatoria mediante sus momentos. Los momentos <u>no</u> centrales de una v.a son los siguientes:

primer momento $\mu = E[x] = \mu'$

segundo momento $\mu'' = E[x^2] = \sum x_i^2 f(x_i)$

tercer momento $\mu''' = E[x^3] = \sum x_i^3 f(x_i)$

$\vdots$

k-ésimo momento $\mu^k = E[x^k] = \sum x_i^k f(x_i)$

Notemos que cada uno de los argumentos del valor esperado son funciones tipo $h(x)$.

Notemos también que la varianza se puede representar como:

$$\sigma_x^2 = E[x^2] - (E[x])^2$$

Binomial.

La función de probabilidad es:

$$p(X = x) = f(x) = \binom{n}{k} p^x (1-p)^{n-x}$$

donde p y n son los parámetros o la distribución.
p es la probabilidad de éxito y n es el número de ensayos tipo Bernoulli.

Si X es una V.a. con distribución binomial de parámetros n y p, entonces se denota como

$$X \sim \text{Binomial}(n, p)$$

distribuye

Distribución acumulada.

$$F(x) = p(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i) = \sum_{x_i=0}^{[x]} f(x_i) = \sum_{x_i=0}^{(x)} \binom{n}{x_i} p^{x_i} (1-p)^{n-x_i}$$

Varianza.

Sea $X \sim \text{Binomial}(n, p)$, por definición de la varianza:

$$\sigma^2 = E[x^2] - E[x]^2$$

donde $E[x^2] = \sum_{x=0}^{n} x^2 \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \sum_{x=1}^{n} x^2 \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \quad (*)$

5 de abril de 2019.

Notemos que $x^2\binom{n}{x} = x \cdot x\binom{n}{x}$
$= xn\binom{n-1}{x-1}$

Sustituyendo en (*)

$$E[x^2] = \sum_{x=1}^{n} nx\binom{n-1}{x-1}p^x(1-p)^{n-x}$$

$$= \sum_{x=1}^{n} npx\binom{n-1}{x-1}p^{x-1}(1-p)^{n-x}$$

$$= np\sum_{x=1}^{n} x\binom{n-1}{x-1}p^{x-1}(1-p)^{n-x}$$ sea $z = x-1$

$$\rightarrow E[x^2] = np\sum_{z=0}^{n}(z+1)\binom{n-1}{z}p^z(1-p)^{n-x}$$

$$= np\sum_{z=0}^{n-1}(z+1)\binom{n-1}{z}p^z(1-p)^{n-(z+1)}$$

$$= np\sum_{z=0}^{n-1}(z+1)\binom{n-1}{z}p^z(1-p)^{(n-1)-z}$$

$$= np\left[\sum_{z=0}^{n-1} z\binom{n-1}{z}p^z(1-p)^{(n-1)-z} + \sum_{z=0}^{n-1}\binom{n-1}{z}p^z(1-p)^{(n-1)-z}\right]$$

Observe que $\binom{n-1}{z}p^z(1-p)^{(n-1)-z}$ es la función de probabilidad de una v.a. Binomial

$$Z \sim \text{Binomial}(n-1, p)$$

Además $E[z] = \sum_{z=0}^{n-1} z\binom{n-1}{z} p^z (1-p)^{(n-1)-z} = (n-1)p$

$\rightarrow E[x^2] = np[(n-1)p+1]$

Regresando:

$\sigma^2 = E[x^2] - E[x]^2 = np[(n-1)p+1] - [np]^2$

$= np[n-p-p+1] - [np]^2$

$= \cancel{(np)^2} + np(1-p) - \cancel{(np)^2} = np(1-p)$

3-57) The random variable x has a binomial distribution with $n=10$ and $p=0.5$. Determine the following probabilities:

a) $P(x=5)$ b) $P(x\leq 2)$ c) $P(x\geq 9)$ d) $P(3\leq x<5)$

e) ¿Cuáles son los valores más probables?

f) Obtener μ y σ^2.

Sol.

$f(x) = \binom{10}{x} 0.5^x \cdot 0.5^{10-x}$

a) $\rightarrow P(x=5) = \binom{10}{5} 0.5^5 \cdot (.5)^{10-5}$

$= \binom{10}{5} 0.5^5 \cdot 0.5^5 = \binom{10}{5} 0.5^{10} = 0.246$

b) $P(x\leq 2) = P(x=0) + P(x=1) + P(x=2)$

$\rightarrow P(x=0) = \binom{10}{0} 0.5^0 \cdot (0.5)^{10} = \binom{10}{0} \cdot (0.5)^{10} = 0.000976$

$P(x=1) = \binom{10}{1} 0.5^1 (0.5)^9 = \binom{10}{1} \cdot (0.5)(0.5)^9 = 0.00976$

$P(x=2) = \binom{10}{2} 0.5^2 (.5)^8 = 0.0439$

$P(x\leq 2) = 0.05468$

c) $P(x \geq 9) = P(x=9) + P(x=10)$

$P(x=9) = \binom{10}{9} 0.5^{9} (0.5)^{1} = 0.00976$

$P(x=10) = \binom{10}{10} 0.5^{10} \cancel{(0.5)^{0}} = 0.000976$

$P(x \geq 9) = 0.010736$

d) $P(3 \leq x < 5) = P(x=3) + P(x=4)$

$P(x=3) = \binom{10}{3} (0.5)^{3} (0.5)^{7} = 0.1171$

$P(x=4) = \binom{10}{4} (0.5)^{4} (0.5)^{6} = 0.01281$

$P(3 \leq x < 5) = 0.12991$

e) los valores más probables son en $x=5$

f) $\mu = \frac{10+0}{2} = 5$

$\sigma^2 = \frac{(10-0+1)^2 - 1}{12} = 10$

3-46) $0 \leq x \leq 100$

$\mu = \frac{0+100}{2} = 50$

$\sigma^2 = \frac{(b-a+1)^2-1}{12} = \frac{(100-0+1)^2-1}{12} = 850$

3-49) $0.15 \leq x \leq 0.19$

$\mu = \frac{15+19}{2} \left(\frac{1}{100}\right) = 0.17$

$\sigma^2 = \frac{(19-15+1)^2-1}{12} \left(\frac{1}{100}\right)^2 = 0.0002 \text{ mm}$

3-50) $\mu = 100\left(\frac{4+2}{2}\right) = 300$

$\sigma = 100^2 \cdot \left(\frac{(4-2+1)^2-1}{12}\right) = 6666.67$

3-52) $0 \leq x \leq 9$

$\mu = \frac{9+0}{2} = 4.5$ $\sigma^2 = \frac{(9-0+1)^2-1}{12} = 8.25$ $\sigma = \sqrt{8.25} = 2.87$

$y = 5x \rightarrow \mu = \frac{45+0}{2} = 22.5$ $\sigma^2 = \frac{(45-0+1)^2-1}{12} = 176.25$

$\sigma = \sqrt{176.25} = 13.275$

3-67) Sea x el número de pasajeros que no llegan, la probabilidad de que no llegue una persona es $0.1 = p$

Se tiene $x \sim$ Binomial $(n = 125, p = 0.1)$

a) Se requiere $p(x \geq 5) = 1 - p(x < 5)$

$= 1 - p(x \leq 4)$

$= 1 - p(x=0) + p(x=2) + p(x=3) + p(x=4)$

$= 1 - \binom{125}{0}(0.1)^0(1-0.1)^{125} + \dots + \binom{125}{4}(0.1)^4(1-0.1)^{121}$

$= 1 - 1.9068 \times 10^{-6} - 2.6448 \times 10^{-5} - \dots - 2.8166 \times 10^{-3} = 0.9961$

b) $P(x \geq 6) = 1 - P(x \leq 5)$

$= 1 - P(x \leq 4) - P(x = 5)$

$= 0.9961 - 7.5736 \times 10^{-3} = 0.9885$

Si $x \sim$ Binomial (n, p)

$\rightarrow y = n - x \rightarrow y \sim \text{Bin}(n, 1-p)$

Scanned by CamScanner

3-58) Dado $p = 0.1$ y $n = 10$

$$P(X=K) = \frac{n!}{K!(n-K)!} p^K (1-p)^{n-K}$$

$\boxed{K=0}$ $p(x=0) = \frac{10!}{0!(10)!} (0.1)^0 (1-0.1)^{10} \approx 0.3486$

Con los demás se obtiene la tabla sig:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P(x)	.3486	.3874	.1937	.0573	0.0111	.0014	.00013	.0000087	.000003	9X10⁻⁹	.00036

a) El más probable es $x=1$ con mayor probabilidad

b) El menos probable sería $x=9$, con la menor probabilidad.

3-61) $n=3$ $p=1/4$

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} =$$

$F(0) = \binom{3}{0}(.25)^0(1-.25)^3 = 0.4218$

$F(1) = \binom{3}{1}(.25)^1(1-.25)^2 = 0.4218$

$F(2) = \binom{3}{2}(.25)^2(1-.25)^1 = 0.1406$ $F(3) = \binom{3}{3}(.25)^3(1-.25)^0 = 0.0156$

3-62) Como sólo puede operar si todos los circuitos funcionan, la probabilidad de que cualquiera funcione es del .99, y de que sólo funcionen 40 es $(.99)^{40} = 0.6689$

3-64) a) 3 están ocupadas: $P(x=3) = \binom{10}{3} \cdot (.4)^3 \cdot (1-.4)^7 = 0.2150$

b) Al menos 1: $P(x \geq 1) = 1 - P(x=0) = 1 - \left[\binom{10}{0}(.4)^0(.6)^{10}\right] = .994$

c) Todas ocupadas: $E(x) = np = 10(.4) = 4$

3-66) a) $n = 50$, $p = 5/50 = 0.1 \rightarrow$ (muelles no conformes)

b) $P(x \leq 2) = P(x=0) + P(x=1) + P(x=2)$

$= [(50C0)(0.1)^0(0.9)^{50}] + [(50C1)(0.1)^1(0.9)^{49}] + [(50C2)(0.1)^2(0.9)^{48}]$

$= 0.1149$

c) $P(x \geq 49) = P(x=49) + P(x=50)$

$= [(50C49)(0.1)^{49}(0.9)^1] + [(50C50)(0.1)^{50}(0.9)^0] = 4.51 \times 10^{-48}$

8 de abril de 2019.

Distribución Geométrica.

Si p es la probabilidad del éxito, $p(x=x)$ es decir P(ocurran x fracasos del primer éxito) $= \underbrace{(1-p),(1-p),\ldots(1-p)}_{x}p$

$\longrightarrow (1-p)^x p = f(x)$ $\longrightarrow$ función de probabilidad.

Serie Geométrica.

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = x^0 + x^1 + x^2 + \ldots + x^n$$ si $|x| < 1$ entonces se tiene:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$, también se cumple que $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$

Sea x una v.a. con $x \sim$ Geométrica(p), probar que:
$f(x) = P(X=x) = (1-p)^x p$ es la función de probabilidad con $x = 1, 2, 3, \ldots$; se debe probar que:

- $f(x) \geq 0 \;\forall x$
- $\sum_{x=0}^{\infty} f(x) = 1$

Como es claro que $f(x) \geq 0 \;\forall x$, entonces

$$\sum_{x=0}^{\infty} f(x) = \sum_{x=0}^{\infty} (1-p)^x p = p \sum_{x=0}^{\infty} (1-p)^x$$

Notemos que $\sum_{x=0}^{\infty} (1-p)^x$ es una serie geométrica, por lo tanto

$$\sum_{x=0}^{\infty} (1-p)^x = \frac{1}{1-(1-p)} = \frac{1}{p} \quad \therefore \quad \sum_{x=0}^{\infty} f(x) = \frac{p}{p} = 1$$

Media y varianza de una variable geométrica.

Si $x \sim$ Geométrica(p), entonces $E[x] = \frac{1-p}{p}$ y

$$Var[x] = \frac{(1-p)(2-p)}{p^2} - \left(\frac{1-p}{p}\right)^2 = \frac{(1-p)[(2-p)-(1-p)]}{p^2} =$$

Scanned by CamScanner

9 de abril de 2019.

Ejercicio 3-75.

Supongamos que cada una de las llamadas a una estación de radio tiene una probabilidad de conexión igual a 0.02. Supongamos que las llamadas son independientes.

a) ¿Cuál es la probabilidad que la primera llamada que se conecta es la décima llamada que se intenta?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que se requieren más de 5 llamadas para contestar?

c) ¿Cuál es el número promedio de llamadas que se requieren para conectarse?

Solo

Sea y el número de llamadas hasta alcanzar la conexión, nótese que $y = x+1$, donde:

x representa el número de fracasos antes de llegar a la conexión, entonces:

$$f_y(y) = P(y = y) = P(x+1 = y) = P(x = y-1)$$

$$\therefore f_y(y) = p(1-p)^{y-1} \quad \text{con } y = 1, 2, 3, \ldots$$

a) Se pide $p = 0.02$, $p(y=10) = 0.02(1-0.02)^{10-1}$

$= 0.02(.98)^9 = 0.01667$

b) $p(y>5) = 1 - p(y \geq 5) = 1 - p(y=1) + p(y=2) + \ldots + p(y=5)$

$= .903$

$E(y)$

incompleto, la maestra lo borró antes de que lo anotara.

:(

10 de abril de 2019

Binomial negativa

La distribución binomial negativa modela el número de ensayos hasta obtener r éxitos en ensayos Bernoulli con probabilidad de éxito p.

Ejemplo Lanzamiento de una moneda balanceada hasta obtener 3 sellos.

Sea X la v.a. que cuenta el número de ensayos; el rango de valores de x es 1, 2, 3, ... En este evento: $\{X = x\}$.

Significa que el número de ensayos para generar r éxitos es igual a x. Es de interés conocer:

$$P(X=x) = ?$$

Este evento significa que:

- El r-ésimo éxito se dió en el ensayo x.
- En los x-1 ensayos positivos y negativos y r-1 como éxitos

En la última observasión quiere decir que los y-1 éxitos ocurren en un total de combinaciones $\binom{x-1}{r-1}$ con plourran r-1 éxito en x-1 ensayos)

Esta función de probabilidad corresponde a una binomial de parámetros (x-1) y p → Binomial (x-1, p). Ahora la probabilidad de la primera observación es p.

Así, la probabilidad $P(X=x)$ es el producto de las probabilidades en las observaciones.

$$P(X=x) = \binom{x-1}{r-1} p^{r-1}(1-p)^{x-r} p = \binom{x-1}{r-1} p^{r}(1-p)^{x-r}$$

donde $x = r, r+1, r+2, \ldots$

Nota: la dist. geométrica es un caso particular de la binomial negativa con r=1.

11 de abril de 2019.

O bien una binomial negativa es una generalización de una distibución geométrica. Aún más, la suma de las variables

$X_1 \sim$ Geométrica (p), $X_2 \sim$ Geométrica $(p) \ldots X_n \sim Geom(p)$

son tales que $X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_r = X$, donde

$X \sim$ Binomial negativa (r, p).

→ Propiedades del valor esperado

Sean a, b y c constantes y X y Y, variables aleatorias con funciones de probabilidad $f_X(x)$ y $f_Y(y)$, respectivamente, entonces (con X y Y independientes)

$$E[a + bX + cY] = a + bE[X] + cE[Y]$$

Ejercicio: Obtener el valor de una v.a. $X \sim BinNeg(r, p)$

Sol. Recordemos que X se puede ver como una suma de r variables geométricas de parámetro p.

$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_r$ $\quad X_i \sim Geom(p)$ $\quad i = 1, \ldots, r$

X_i representa el número de ensayos hasta el éxito.

Sabemos que $E[X_i] = \frac{1}{p}$, ahora bien, utilizando la propiedad del valor esperado de las sumas

$E[X] = E[X_1] + E[X_2] + \ldots + E[X_r] = \frac{1}{p} + \frac{1}{p} + \ldots + \frac{1}{p} = r/p$

→ $Var(a) = 0$, $a = cte$

→ $Var(aX) = a^2 Var(X)$

→ $Var(a + bX) = b^2 Var(X)$

→ $Var(a + bX + cY) = b^2 Var(X) + c^2 Var(Y)$ ssi X y Y son independientes

12 de abril de 2019

Ejercicio. Obtener la varianza de x tal que $x \sim Bin(r, p)$

Sol. Recordemos que $x = x_1 + x_2 + \dots + x_r$, donde $x_i \sim Geom(p)$

Sabemos que $Var(x_i) = \frac{1-p}{p^2}$, entonces se tiene que:

$$Var(x) = var(x_1) + var(x_2) + \dots + var(x_r)$$
$$= \underbrace{\frac{1-p}{p^2} + \frac{1-p}{p^2} + \dots + \frac{1-p}{p^2}}_{r \text{ veces}} = \frac{r(1-p)}{p^2}$$

* Si $x \sim Geom(p)$, X representa el número de fracasos hasta obtener el primer éxito. $x = 0, 1, 2, \dots$

$E[x] = \frac{1-p}{p}$

$Var[x] = \frac{1-p}{p^2}$

* Si $y \sim Geom(p)$ y representa el número de ensayos hasta obtener el primer éxito.

$E[y] = 1/p$

$Var[y] = \frac{1-p}{p^2}$

Notemos que $y = x + 1$

La relación de las medias y las varianzas de x y y se se obtienen mediante las propiedades de la media y la varianza.

Función generadora de momentos

Sea x una v.a con función de probabilidad $f(x)$ se define la función generadora de momentos de x como

$$M(t) = E[e^{\overset{h(x)}{xt}}] = \sum_{x_i}^{n} e^{x_i t} f_x(x_i), \text{ para algún dato de } t$$

Esta función genera momentos, para ello debemos obtener sus derivadas

15 de abril de 2019

la primera derivada:

$$M'(t) = \frac{d}{dt}\left(\sum_{x_i} e^{x_i t} f_x(x_i)\right) = \sum_{x_i} \frac{d}{dt}\left(e^{x_i t} f_x(x_i)\right)$$

$$= \sum_{x_i} x_i e^{x_i t} f_x(x_i)$$

Dada una v.a X con función de densidad $f(x)$, su FGM siempre ~~que~~ que existan se tiene la primer derivada:

$M'_x(0) = E[X]$; ahora la segunda derivada será:

$$M''_x(t) = \frac{d}{dt}\left[M'_x(t)\right] = \frac{d}{dt}\sum_{x_i=0}^{\infty} x_i e^{t x_i} f_x(x_i) = \sum_{x_i=0}^{\infty} \frac{d}{dt}\left(x_i e^{t x_i} f_x(x_i)\right)$$

$$= \sum_{x_i=0}^{\infty} x_i^2 e^{x_i t} f_x(x_i) \quad \text{Ahora } M''(0) = \sum_{x_i=0}^{\infty} x_i^2 f_x(x_i)$$

$$= E[X^2]$$

De manera análoga se tiene que $M^k(0) = E[X^k]$

Notemos que la varianza se puede expresar como:

$$Var(x) = E[X^2] - E[X]^2 = M''(0) - (M'(0))^2$$

Distribución de Poisson

Esta distribución se utiliza para modelar fenómenos que cuentan el número de eventos por unidad de tiempo, de volumen, etc. Aquí la V.a. x puede ser:

* El número de llamadas por hora que recibe la policía.
* El número de fallas que existe en un metro de alambre.

La función de probabilidad de una v.a con distribución de Poisson de medida x es:

$$P(X=x) = f_x(x)\, e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} \quad \text{donde } \lambda > 0,\ x = 1,2,3\ldots$$

Se denota como $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$

Se tiene que $\sum_{x_i=0}^{\infty} \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}$ es la expansión en series de Taylor de la expresión e^{λ}, así se tiene que

$$\sum_{x_i=0}^{\infty} f(x_i) = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$$

Media y varianza de la Poisson.

La FGM de una $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ es:

$$M(t) = E[e^{xt}] = \sum_{x_i=0}^{\infty} e^{x_i t} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} = e^{-\lambda}\sum_{x_i=0}^{\infty} e^{x_i t}\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}$$

$$= e^{-\lambda}\sum_{x_i=0}^{\infty}\frac{[\lambda e^t]^{x_i}}{x_i!}$$ Sea $\alpha = \lambda e^t$, entonces:

$\sum_{x_i=0}^{\infty} \frac{\alpha^{x_i}}{x_i!}$ es la expansión en serie de Taylor de $e^{\lambda e^t}$

$$\therefore M(t) = e^{-\lambda} e^{\lambda e^t} = e^{\lambda(e^t - 1)}$$

El segundo momento de la distribución de Poisson es:

$E[x^2] = \sum_{x_i=0}^{\infty} x_i^2 f(x_i)$, se puede obtener también la FGM

$$E[\lambda^2] = M''(0) = \lambda e^0 e^{\lambda(e^0-1)}(\lambda e^0 + 1) = \lambda(\lambda+1) = \lambda^2 + \lambda$$

Entonces la varianza es: $Var(x) = E[x^2] - E[x]^2$

$$= \cancel{\lambda^2} + \lambda - \cancel{\lambda^2}$$

$$\rightarrow Var(x) = \lambda$$

Noten que la distribución de Poisson $E(x) = Var[x] = \lambda$

Ejercicio 3-100

Solo sea x la v.a. que representa el número de llamadas por hora que llegan de un teléfono

Donde el número promedio de llamadas que llegan por hora es igual a 10.

Entonces $X \sim Poison(\lambda = 10)$ y su función de probabilidad es $f(x) = P(X = x) = e^{-10}\left(\frac{10^x}{x!}\right)$

a) $P(x = 5) = ?$

$\rightarrow e^{-10}\left(\frac{10^5}{5!}\right) = 0.03783$

b) $P(x \leq 3) = ?$

$P(x \leq 3) = P(0) + P(1) + P(2) + P(3)$

$= e^{-10}\left[\left(\frac{10^0}{0!}\right) + \left(\frac{10^1}{1!}\right) + \left(\frac{10^2}{2!}\right) + \left(\frac{10^3}{3!}\right)\right]$

$= e^{-10}\left[1 + 10 + 50 + \frac{1000}{6}\right] = 0.01033$

c) ¿Cuál es la probabilidad de que lleguen exactamente 15 llamadas en 2 horas?

$\rightarrow$ Solo Dado a que llegan 10 llamadas en una hora, entonces si el número de llamadas es un "Proceso homogéneo".

El número promedio de llamadas que llegan en 2 horas es igual a 2λ donde $\lambda = 10$, es decir se tiene la v.a. $y \sim Poissón(\lambda = 20)$

Entonces $P(y=15) = e^{-20}\left(\frac{20^{15}}{15!}\right) = 0.05164$

d) ¿Cuál es la probabilidad que lleguen 5 llamadas en 30 minutos?

Sol. Ahora tenemos una v.a Z con $Z \sim Poisson(5)$

Entonces $P(5) = e^{-5}\left(\frac{5^5}{5!}\right) = 0.1754$