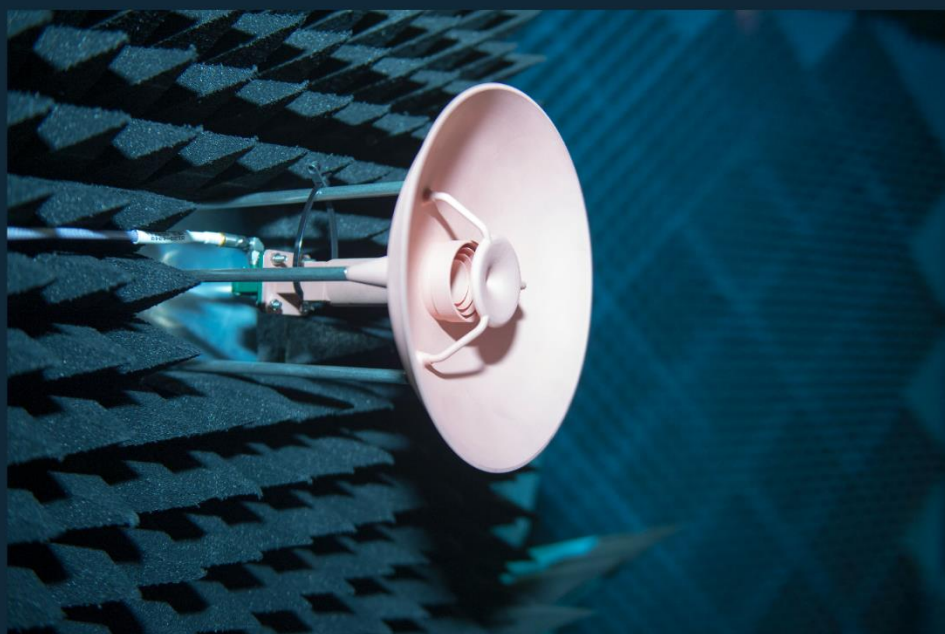


A. Rivera  
O. Castillo

# Fundamentos de Ingeniería de Microondas y Aplicaciones en Filtros



2023



# Fundamentos de Ingeniería de Microondas y Aplicaciones en Filtros

---

Javier Alvaro Rivera Suaña

Omar Castillo Alarcón



Javier Alvaro Rivera Suaña  
Omar Castillo Alarcón

# Fundamentos de Ingeniería de Microondas y Aplicaciones en Filtros

Omar Castillo Alarcón, editor

Fundamentos de Ingeniería de Microondas y Aplicaciones en Filtros  
TJFN - Tecnología de microondas

**Autores:**

© Javier Alvaro Rivera Suaña  
© Omar Castillo Alarcón

**Editado por:**

© Omar Castillo Alarcón  
Jr. Bolívar 204 Juliaca, Puno, Perú.

Primera edición digital, julio 2023

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú N°  
2023-06898

**Imagen de portada:**

"3D-printed antenna" by europeanspaceagency is licensed under CC BY-SA 2.0.

**Repositorio digital:**

<https://github.com/omartux/mwbook>

**ISBN:**

Este libro se distribuye bajo una licencia Creative Commons 4.0



## **Prefacio**

El objetivo principal de este material es presentar de manera unificada, los principios fundamentales de la ingeniería de microondas y aplicarlos al análisis, diseño y mediciones de filtros. El libro inicia con una revisión de conceptos fundamentales de la ingeniería de microondas. En el segundo capítulo, se presenta definiciones sobre líneas de transmisión en conductores y líneas de transmisión microstrip. El tercer capítulo presenta la definición de la carta de Smith y los parámetros de dispersión  $S$ . Sin embargo, en el cuarto capítulo ya se tienen aplicaciones desarrolladas sobre métodos de adaptación de impedancia con componentes concentrados y distribuidos. Finalmente, el quinto capítulo muestra definiciones y métodos de análisis, diseño, implementación y caracterización de filtros pasivos de microonda.

Para el desarrollo adecuado del curso de ingeniería de microondas involucra predominantemente el análisis y diseño de circuitos concentrados y distribuidos, en contraste con definiciones de conceptos referidos en el primer párrafo. La mayoría de los ingenieros de microondas hoy en día diseñan planos de circuitos y componentes integrados, utilizando herramientas de desarrollo asistido por computadora (CAD) muy sofisticados; como también del uso de analizadores de redes. Sin embargo, a nivel de educación superior en nuestra Región, algunas universidades no disponen de licencias de acceso para el uso de dichas herramientas CAD. Por lo tanto, en este material se utilizó QUCS (Quite Universal Circuit Simulator) y en sus versiones actualizadas para el mejor entendimiento de los capítulos desarrollados. La razón de utilizar el software es por su acceso libre (open-source), y permite desarrollar el análisis, diseño y simulación de componentes en alta frecuencia lo cual hace de QUCS un software bastante amigable para estudiante e investigadores en esta área de la ingeniería.



## Dedicatoria

*Este material va dedicado con mucho cariño y aprecio para mis Padres, Hermanos y a mi Abuelo que día a día vieron el esfuerzo realizado de un proyecto que inició en el 2015 con una chance de estudiar en el extranjero, eh aquí el producto de esa gran oportunidad de superación. Con mucho aprecio y fuente de inspiración de mi familia va esta dedicación...*

*Alvaro Rivera*

*A mi querida Esposa e Hijos que apoyan mis proyectos, y un agradecimiento especial a mis Padres y Abuelos que aún toleran a este soñador empedernido...*

*Omar Castillo*

# Contenido

Prefacio .....	i
Dedicatoria .....	ii
Contenido .....	iii
1    Introducción .....	1
1.1    Ingeniería de Microondas .....	1
1.2    Aplicaciones de la Ingeniería de Microondas .....	1
1.3    Ecuaciones de Maxwell .....	2
1.4    Ecuación de Helmholtz .....	4
1.5    Ondas Planas .....	4
1.5.1    Ondas Planas en un Medio sin Perdidas .....	4
1.5.2    Ondas Planas en un Medio General con Perdidas .....	7
1.5.3    Ondas Planas en un Conductor Bueno .....	8
2    Líneas de Transmisión .....	10
2.1    Teoría de Líneas de dos Conductores .....	10
2.2    Modelo Circuital de una Línea de Transmisión .....	13
2.3    Propagación de Ondas en una Línea de Transmisión .....	15
2.4    Propagación de Ondas en una Línea de Transmisión sin Perdidas .....	20
2.5    Líneas de Transmisión Terminadas sin Pérdidas .....	22
2.5.1    Línea Terminada en Corto Circuito sin Pérdidas .....	34
2.5.2    Línea Terminada en Circuito Abierto sin Pérdidas .....	36
2.5.3    Líneas de Transmisión con Diferentes Impedancias .....	38
2.6    Líneas de Transmisión con Pérdidas .....	39
2.6.1    Líneas de Transmisión con Pérdidas Pequeñas .....	40
2.6.2    Líneas de Transmisión sin Distorsiones .....	45
2.6.3    Líneas de Transmisión Terminada con Pérdidas .....	46
2.7    Transformador de Cuarto de Onda .....	47
2.7.1    Diseño Multiseccional del Transformador de Cuarto de Onda .....	53

2.8	Desadaptaciones de Carga y Generador .....	56
2.8.1	Carga Adaptada con la Línea .....	59
2.8.2	Generador Adaptado a la Línea Adaptada.....	59
2.8.3	Adaptación Conjugada .....	59
2.9	Línea de Transmisión Microstrip .....	61
2.9.1	Sustrato.....	62
2.9.2	Ecuaciones de Diseño.....	63
2.9.3	Resistencia de una Línea Microstrip. ....	65
2.9.4	Efectos Dependientes de Frecuencia en Modos de Orden Superior.....	71
2.9.5	Longitud de Onda en un Medio Guiado .....	73
3	Carta de Smith.....	75
3.1	Adición de Elementos Concentrados .....	82
3.1.1	Inductor en Serie con la Impedancia de Carga .....	82
3.1.2	Condensador en Serie con la Impedancia de Carga .....	83
3.1.3	Inductor en Paralelo con la Admitancia de Carga .....	84
3.1.4	Condensador en Paralelo con la Admitancia de Carga .....	85
3.2	Unidades Logarítmicas.....	86
3.3	Matrices de Impedancia & Admitancia.....	87
3.4	Parámetros S.....	89
3.4.1	Redes Recíprocas y sin Pérdidas .....	93
3.5	Elementos Concentrados & Distribuidos .....	96
4	Adaptación de Impedancia .....	97
4.1	Adaptación de Impedancia y Sintonización. ....	97
4.2	Adaptación con Elementos Concentrados (Redes-L).....	98
4.2.1	Adaptación cuando $R_L > Z_0$ .....	100
4.2.2	Adaptación cuando $R_L < Z_0$ .....	104
4.3	Adaptación con Elementos Distribuidos .....	105
5	Filtros Pasivos .....	112
5.1	Diseño de Filtros por el Método de Pérdidas de Inserción.....	113

5.1.1	Filtros Butterworth .....	113
5.1.2	Filtros Chebyshev.....	116
5.2	Transformación de Filtros con Elementos Concentrados.....	119
5.2.1	Escalado de Impedancia y Frecuencia.....	119
5.2.2	Escalado de Frecuencia para Filtro Pasa-Bajo .....	119
5.2.3	Escalado de Frecuencia para Filtro Pasa-Alto.....	122
5.2.4	Escalado de Frecuencia para Filtro Pasa-Banda.....	123
5.2.5	Escalado de Frecuencia para Filtro Rechaza-Banda.....	126
5.3	Filtros Pasivos con Elementos Distribuidos .....	127
5.3.1	Transformación de Richards .....	128
5.3.2	Identidades de Kuroda.....	129
5.4	Filtros Pasa-Bajo por Saltos de Impedancia.....	134
5.4.1	Circuito Equivalente.....	135
5.4.2	Experimentación & Caracterización.....	140
5.5	Filtros Pasa-Banda de Líneas Acopladas .....	145
5.5.1	Propiedades del Filtro Pasa-Banda de una Sección de Líneas Acopladas .....	145
5.5.2	Diseño de Filtros Pasa-Banda de Líneas Acopladas .....	146
5.5.3	Experimentación & Caracterización.....	149
	Referencias.....	154
	Anexo A: Prefijos y Constantes Físicas .....	A1
	Anexo B: Conductividad y Propiedades Dieléctricas de Materiales Comunes.....	A2
	Anexo C: Resultados Útiles .....	A3
	Anexo D: Parámetros de Líneas de Transmisión para Líneas Comunes.....	A4
	Anexo E: Parámetros ABCD de Circuitos Usuales de dos Puertos .....	A5

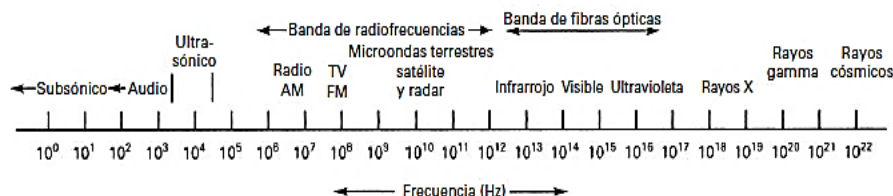
# 1 Introducción

## 1.1 Ingeniería de Microondas

La Ingeniería de Microondas actualmente se considera como una disciplina bastante sólida debido a que los conceptos fueron desarrollados hace más de 50 años, y probablemente porque el radar; la primera gran aplicación de la tecnología de microondas, se desarrolló intensamente ya en la Segunda Guerra Mundial. Sin embargo, los últimos años han traído desarrollos sustanciales y continuos en dispositivos de estado sólido de alta frecuencia, circuitos integrados de microondas, técnicas de diseño y las aplicaciones cada vez más amplias de la tecnología de radiofrecuencia RF y microondas [1].

El campo de la ingeniería de radiofrecuencia RF y microondas generalmente cubre el comportamiento de señales de corriente alterna con frecuencias en el rango de 100 MHz a 1000 GHz. Las frecuencias de RF van desde muy alta frecuencia (VHF, Very High Frequency) en un rango de 30 a 300 MHz; como también a ultra alta frecuencia (UHF, Ultra High Frequency) en un rango de 300 a 3000 MHz, mientras que el término microondas se utiliza normalmente para frecuencias entre 3 y 300 GHz con una correspondiente longitud de onda;  $\lambda = c/f$ , comprendida entre  $\lambda = 10 \text{ cm}$  y  $\lambda = 1 \text{ mm}$  respectivamente [1]. Por lo tanto, las señales con longitudes de onda en el orden de los milímetros a menudo se denominan ondas milimétricas.

La Figura 01 muestra la ubicación de las bandas de frecuencias en el espectro electromagnético.



**Figura 01.** Espectro electromagnético de frecuencias [2].

## 1.2 Aplicaciones de la Ingeniería de Microondas

La mayoría de las aplicaciones actuales de la ingeniería de microondas y RF son: para sistemas de redes y comunicaciones, sistemas de seguridad inalámbricos, sistemas de radar, sensores remotos ambientales y sistemas médicos. Los sistemas de comunicaciones de RF y microondas son omnipresentes, especialmente hoy, cuando la conectividad inalámbrica promete brindar acceso de voz y datos a cualquier persona, en cualquier lugar y en cualquier momento.

Desarrollar aplicaciones tecnológicas en ingeniería de microondas requieren operaciones en alta frecuencia y longitudes de onda corta, a menudo crean dificultades en el análisis y diseño de dispositivos y sistemas, estos mismos aspectos brindan oportunidades únicas para la aplicación de sistemas de microondas. Las siguientes consideraciones puede ser útiles en la práctica como:

- La ganancia de una antena; el cual es proporcional al tamaño eléctrico de la antena. A frecuencias muy altas se puede obtener más ganancia para un tamaño físico establecido de la antena, y esto tiene importantes ventajas al implementar sistemas de microondas.
- Se puede obtener más ancho de banda, el cual está directamente relacionado con la transmisión de datos.
- Las señales de microonda viajan por líneas de vista y no son desviadas por la ionosfera como las señales de baja frecuencia. Los enlaces de comunicación terrestre y satelital con muy alta capacidad son posibles con la reutilización de frecuencias en ubicaciones mínimamente distantes.
- El área de reflexión efectiva de una sección transversal del radar, para un objetivo de detección suele ser proporcional al tamaño eléctrico del objeto. Este hecho, junto con las características de frecuencia, ganancia de la antena; generalmente hace que las frecuencias en microonda sean preferidas para sistemas de radar.
- Varias resonancias moleculares, atómicas y nucleares ocurren a frecuencias de microonda creando una variedad de aplicaciones únicas en las áreas de: teledetección, diagnósticos, tratamientos médicos y métodos de calentamiento.

### **1.3 Ecuaciones de Maxwell**

Los fenómenos eléctricos y magnéticos a nivel macroscópico son descritos por las ecuaciones de Maxwell, según lo publicado por James Clerk Maxwell en 1873 [3]. Este trabajo resumió el estado de la ciencia en ese momento, a partir de consideraciones teóricas sobre la existencia del desplazamiento de la corriente eléctrica, lo que llevó al descubrimiento experimental por Heinrich Rudolf Hertz sobre la propagación de ondas electromagnéticas. El trabajo de Maxwell se basó en una gran cantidad de conocimiento empírico y teórico desarrollado por Gauss, Ampere, Faraday y otros [4].

Con una conciencia de la perspectiva histórica, generalmente es ventajoso desde un punto de vista científico. Por lo tanto, las ecuaciones de Maxwell se pueden escribir en forma de punto o diferencial como: [5]

$$\nabla \times \bar{H}(\bar{r}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \bar{D}(\bar{r}, t) + \bar{J}(\bar{r}, t) \quad (1)$$

$$\nabla \times \bar{E}(\bar{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \bar{B}(\bar{r}, t) \quad (2)$$

$$\nabla \times \bar{D}(\bar{r}, t) = \rho(\bar{r}, t) \quad (3)$$

$$\nabla \times \bar{B}(\bar{r}, t) = 0 \quad (4)$$

Donde:  $\bar{E}$ ,  $\bar{B}$ ,  $\bar{H}$ ,  $\bar{D}$ ,  $\bar{J}$ , y  $\rho$  son funciones reales de posición y tiempo. Y las cantidades con guiones representan campos vectoriales variables en el tiempo y son funciones reales de las coordenadas espaciales  $X, Y, Z$  y la variable tiempo  $t$ . Estas cantidades se definen como sigue:

$\bar{H}(\bar{r}, t)$	<i>Fuerza del campo magnético</i>	[ Amperes/m ]
$\bar{E}(\bar{r}, t)$	<i>Fuerza del campo eléctrico</i>	[ Volts/m ]
$\bar{B}(\bar{r}, t)$	<i>Densidad de flujo magnético</i>	[ Webers/m <sup>2</sup> ]
$\bar{D}(\bar{r}, t)$	<i>Densidad de flujo eléctrico</i>	[ Coulombs/m <sup>2</sup> ]
$\bar{J}(\bar{r}, t)$	<i>Densidad de corriente eléctrica</i>	[ Amperes/m <sup>2</sup> ]
$\rho(\bar{r}, t)$	<i>Densidad de carga eléctrica</i>	[ Coulombs/m <sup>3</sup> ]

La Ecuación (1) es la ley de Ampere o la ley generalizada del circuito de Ampere. La Ecuación (2) es la ley de Faraday o la ley de inducción magnética de Faraday. La Ecuación (3) es la ley de Coulomb o la ley de Gauss para campos eléctricos. La Ecuación (4) es la ley de Gauss o la ley de Gauss para campos magnéticos. Como también la densidad de corriente eléctrica  $\bar{J}(\bar{r}, t)$  y la densidad de carga eléctrica se rigen por la ley de continuidad; determinado por la Ecuación (5) [1].

$$\nabla \cdot \bar{J}(\bar{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \rho(\bar{r}, t) \quad (5)$$

El cual establece la conservación de las densidades de corriente y carga en  $\bar{r}$ .

En el espacio libre se tiene valores definidos de la permitividad y la permeabilidad como: [6]

$$\bar{D} = \epsilon_0 \bar{E} \quad (6)$$

$$\bar{B} = \mu_0 \bar{H} \quad (7)$$

Donde:  $\epsilon_0 \approx 8.85 \times 10^{-12}$  (F/m), permitividad en el espacio libre.

$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$  (H/m), permeabilidad en el espacio libre.

## 1.4 Ecuación de Helmholtz

Las ecuaciones de Maxwell describen el campo electromagnético en todo momento para todos los puntos en el espacio. Por lo tanto, se asumirá las ecuaciones de Maxwell en una región libre de fuentes, es decir en una región homogénea, isotrópica, lineal y sin fuente; las ecuaciones de curvatura de Maxwell en forma de fasor en regiones donde  $\bar{J} = 0$  y  $\rho = 0$ . Esto no implica la ausencia de una fuente en cualquier lugar del espacio, ya que las fuentes deben existir fuera de las regiones consideradas para generar campos en estas regiones [1]. En una región libre de fuente, las ecuaciones de Maxwell se convierten en:

$$\nabla \times \bar{H} = \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \bar{E} \quad (8)$$

$$\nabla \times \bar{E} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \bar{H} \quad (9)$$

$$\nabla \cdot \bar{E} = 0 \quad (10)$$

$$\nabla \cdot \bar{H} = 0 \quad (11)$$

La ecuación de Helmholtz o ecuación de onda en una región homogénea libre de fuentes, se puede escribir como la ecuación de onda de Helmholtz para  $\bar{E}$ ; de manera similar se puede encontrar una ecuación  $\bar{H}$ , el cual se describen por las Ecuaciones (12) y (13).

$$\nabla^2 \bar{E} + \omega^2 \mu \epsilon \bar{E} = 0 \quad (12)$$

$$\nabla^2 \bar{H} + \omega^2 \mu \epsilon \bar{H} = 0 \quad (13)$$

Donde: la constante  $k = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$  se define como la constante de propagación, también conocida como: constante de fase o número de onda del medio y, sus unidades son (1/m). Como una forma de introducir el comportamiento de las ondas.

## 1.5 Ondas Planas

### 1.5.1 Ondas Planas en un Medio sin Pérdidas

En un medio sin pérdidas las constantes  $\epsilon$  y  $\mu$  son números reales, por lo que la constante de propagación  $k$  es real. Una solución de onda plana básica a las ecuaciones de onda anteriores, se puede encontrar considerando un campo eléctrico con una sola componente  $\hat{x}$  y uniforme (sin variación) en las direcciones  $x$  y  $y$ . Entonces,  $\partial/\partial x = \partial/\partial y = 0$ . Por tanto, la Ecuación (12) de Helmholtz para  $\bar{E}$  se reduce a:



$$\frac{\partial^2 E_\chi}{\partial z^2} + k^2 E_\chi = 0 \quad (14)$$

Las dos soluciones independientes de la Ecuación (14) se resuelven fácilmente por sustitución; para ser definidas de la forma:

$$E_\chi(z) = E^+ e^{-jkz} + E^- e^{jkz} \quad (15)$$

Donde:  $E^+$  y  $E^-$  son constantes arbitrarias de amplitud. La solución anterior es para el caso de armónicos del tiempo a la frecuencia  $\omega$ . En el dominio del tiempo, este resultado se escribe como:

$$\mathcal{E}_\chi(z, t) = E^+ \cos(\omega t - kz) + E^- \cos(\omega t + kz) \quad (16)$$

Asumiendo que;  $E^+$  y  $E^-$  son constantes reales. Y considerando el primer término de la Ecuación (16) para representar una onda que viaja en la dirección  $+z$ ; para mantener un punto fijo en la onda ( $\omega t - kz = \text{constante}$ ), por lo que uno debe moverse en la dirección  $+z$  cuando el tiempo se incrementa. De manera similar, el segundo término de la Ecuación (16) representa una onda que viaja en dirección negativa  $-z$ ; de ahí la notación  $E^+$  y  $E^-$  para representar amplitudes de onda. La velocidad de la onda en este sentido se llama *velocidad de fase*, porque es la velocidad a la que en un punto fijo de fase las ondas viajan y está dado por: [1]

$$v_p = \frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\omega t - \text{constante}}{k} \right) = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \quad (17)$$

En el espacio libre, tenemos  $v_p = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0} = c = 2.998 \times 10^8 \text{ m/seg}$ ; que es la *velocidad de la luz*. Y la longitud de onda  $\lambda$ , el cual se define como la distancia entre dos máximos sucesivos o mínimos de cualquier otro punto de referencia en la onda en un instante fijo del tiempo. Por lo tanto, se tiene:

$$(\omega t - kz) - [\omega t - k(z + \lambda)] = 2\pi \quad (18)$$

Como también se puede deducir la siguiente expresión:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi v_p}{\omega} = \frac{v_p}{f} \quad (19)$$

Una especificación completa del campo electromagnético de una onda plana debe incluir el campo magnético. En general, siempre que se conoce  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$ ; el otro vector de campo puede ser fácilmente determinado utilizando una de las ecuaciones de curvatura de Maxwell. Por lo tanto, aplicando la Ecuación (9) al campo eléctrico de la Ecuación (15) da como resultado  $H_x = H_z = 0$ , y se tiene:

$$H_y = \frac{j}{\omega\mu} \frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{1}{\eta} (E^+ e^{-jkz} - E^- e^{jkz}) \quad (20)$$

Donde:  $\eta = (\omega\mu)/k = \sqrt{\mu/\epsilon}$ , el cual se conoce como la impedancia intrínseca en un medio. El radio de los componentes del campo  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$  tienen unidades de impedancia conocidas como impedancia de onda; para ondas planas la impedancia de onda es igual a la impedancia intrínseca del medio. En el espacio libre, la impedancia intrínseca es  $\eta_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} = 377 \Omega$ . Teniendo en cuenta que los vectores  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$  son ortogonales entre sí y ortogonales a la dirección de propagación ( $\pm \hat{z}$ ); que es una característica de las ondas electromagnéticas transversales (TEM).

---

**Ejemplo 01.**


---

Una onda plana se propaga en un medio dieléctrico sin pérdidas y tiene un campo eléctrico;  $\epsilon_x = E_0 \cos(\omega t - \beta z)$  con una frecuencia de operación de 5.0 GHz y una longitud de onda en el material de 3.0 cm. Determinar la constante de propagación, la velocidad de fase, la permitividad relativa del medio y la impedancia de onda [1].

Solución:

De la Ecuación (19) se tiene la constante de propagación:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0.03} = 209.4 \text{ m}^{-1}$$

Similarmente se tiene la velocidad de fase, definida por la Ecuación (17) como:

$$v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi f}{k} = \lambda f = (0.03)(5 \times 10^9) = 1.5 \times 10^8 \text{ m/seg.}$$

Este resultado es menor que el valor de la velocidad de la luz por un factor de 2. La permitividad relativa en el medio puede ser determinado por la Ecuación (17) como:

$$\epsilon_r = \left( \frac{c}{v_p} \right)^2 = \left( \frac{3 \times 10^8}{1.5 \times 10^8} \right)^2 = 4.0$$

Por lo tanto, se tiene la impedancia de la onda:

$$\eta = \left( \frac{\eta_0}{\sqrt{\epsilon_r}} \right) = \frac{377}{\sqrt{4}} = 188.5 \Omega$$

### 1.5.2 Ondas Planas en un Medio General con Pérdidas

Ahora se considera el efecto de un medio con pérdidas. Si el medio es un conductor con una conductividad  $\sigma$ , las ecuaciones de curvatura de Maxwell se pueden escribir a partir de la Ecuación (9) y la Ecuación (1) como: [1]

$$\nabla \times \bar{E} = -j\omega\mu\bar{H} \quad (21)$$

$$\nabla \times \bar{H} = j\omega\epsilon\bar{E} + \sigma\bar{E} \quad (22)$$

Por lo tanto, la ecuación de onda resultante para  $\bar{E}$  se convierte en:

$$\nabla^2 \bar{E} + \omega^2 \mu \epsilon \left(1 - j \frac{\sigma}{\omega \epsilon}\right) \bar{E} = 0 \quad (23)$$

Donde vemos una similitud con la Ecuación (12), la diferencia de la ecuación de onda para el campo eléctrico  $\bar{E}$  en el caso sin pérdidas es que la cantidad  $k^2 = \omega^2 \mu \epsilon$  de la Ecuación (12), el cual es reemplazado por  $k^2 = \omega^2 \mu \epsilon [(1 - j(\sigma/\omega\epsilon))]$ . Luego se define una constante de propagación compleja para el medio como:

$$\gamma = \alpha + j\beta = j\omega\sqrt{\mu\epsilon} \sqrt{1 - j \frac{\sigma}{\omega\epsilon}} \quad (24)$$

Donde:  $\alpha$  es la constante de atenuación y  $\beta$  es la constante de fase. Si se asume de nuevo un campo eléctrico con un solo componente  $\hat{x}$  y uniforme en  $x$  y  $y$ ; la Ecuación (23) de onda se reduce a:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \gamma^2 E_x = 0 \quad (25)$$

El cual tiene soluciones:

$$E_x(z) = E^+ e^{-\gamma z} + E^- e^{\gamma z} \quad (26)$$

Donde la onda oscilante positiva tiene un factor de propagación de la forma:

$$e^{-\gamma z} = e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} \quad (27)$$

De otra forma la Ecuación (27) tiene su definición en el dominio temporal como:

$$e^{-\gamma z} = e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) \quad (28)$$

Donde se puede ver que la ecuación anterior representa una onda que viaja en la dirección  $+z$  con una velocidad de fase  $v_p = \omega/\beta$ , una longitud de onda  $\lambda = 2\pi/\beta$  y un factor

exponencial de amortiguamiento. La tasa de descomposición con la distancia viene dada por la constante de atenuación  $\alpha$ . El término de onda oscilante negativa de la Ecuación (26) se amortigua de manera similar a lo largo del eje  $-z$ . Si se elimina la pérdida de conductividad;  $\sigma = 0$ , entonces se tiene:  $\gamma = jk$ ,  $\alpha = 0$ ,  $\beta = k$ . La pérdida también se puede tratar mediante el uso complejo de la permitividad de la Ecuación (24), con la conductividad  $\sigma = 0$  pero,  $\epsilon = \epsilon' - j\epsilon''$  establecido en complejo, se tiene:

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon} = jk = j\omega\sqrt{\mu\epsilon'(1 - j\tan\delta)} \quad (29)$$

Donde:  $\tan\delta = \epsilon''/\epsilon'$  es la *tangente de pérdida* de un material conductor.

Similarmente, el campo magnético asociado se puede calcular como:

$$H_y = \frac{j}{\omega\mu} \frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{-j\gamma}{\omega\mu} (E^+ e^{-\gamma z} - E^- e^{\gamma z}) \quad (30)$$

Donde, la impedancia intrínseca del medio conductor ahora es complejo:

$$\eta = \frac{j\omega\mu}{\gamma} \quad (31)$$

Por lo que todavía se identifica como la impedancia de onda, el cual expresa la relación de los componentes del campo eléctrico y magnético. Esto permite que la Ecuación (30) se pueda reescribir como:

$$H_y = \frac{1}{\eta} (E^+ e^{-\gamma z} - E^- e^{\gamma z}) \quad (32)$$

Teniendo en cuenta que; aunque la impedancia intrínseca de la Ecuación (31) es en general complejo, dicha ecuación se reduce al caso sin pérdidas como:

$$\eta = \sqrt{\mu/\epsilon} \text{ cuando } \gamma = jk = j\omega\sqrt{\mu\epsilon} \quad (33)$$

### 1.5.3 Ondas Planas en un Conductor Bueno

Muchos problemas de interés práctico implican pérdida o atenuación debido a una buena, pero no materiales con conductores perfectos. Un buen conductor es un caso especial de análisis; donde, la corriente conductiva del material es mucho mayor que la corriente de desplazamiento, lo que significa que  $\sigma \gg \omega\epsilon$ . La mayoría de los metales se pueden clasificar como buenos conductores. En términos de  $\epsilon$  en complejo, en lugar de la conductividad esta condición es equivalente a  $\epsilon'' \gg \epsilon'$ . La constante de propagación de la Ecuación (24) se puede aproximar adecuadamente ignorando el término de desplazamiento de la corriente, para dar como resultado la siguiente expresión:

$$\gamma = \alpha + j\beta \simeq j\omega\sqrt{\mu\epsilon} \sqrt{\frac{\sigma}{j\omega\epsilon}} = (1+j)\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} \quad (34)$$

Donde; el termino *skin depth* o profundidad característica de penetración, se define como:

$$\delta_s = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} \quad (35)$$

Por lo tanto, la amplitud de los campos en el conductor decaerá en una cantidad de  $1/e$ , es decir en un 36.8 % después de viajar una distancia a una profundidad de penetración, porque  $e^{-\alpha z} = e^{-\alpha\delta_s} = e^{-1}$  [1]. A frecuencias en nivel de microondas en un material (buen conductor), esta distancia será muy pequeña. La importancia práctica de este resultado es que solo es necesario en un revestimiento fino de un buen conductor (por ejemplo, plata u oro) para componentes de microondas de baja pérdida.

Entonces la impedancia intrínseca dentro de un material (buen conductor), puede ser determinado por las Ecuaciones (31) y (34), dando como resultado:

$$\eta = \frac{j\omega\mu}{\gamma} \simeq (1+j)\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} = (1+j)\frac{1}{\sigma\delta_s} \quad (36)$$

Nota: el ángulo de fase de esta impedancia es de  $45^\circ$ , el cual es una característica de buenos conductores. El ángulo de fase de la impedancia para un material sin pérdidas es  $0^\circ$ , y el ángulo de fase de la impedancia de un medio con pérdidas arbitrario está entre  $0^\circ$  y  $45^\circ$ .

**Tabla 01.** Resumen de resultados de propagación de ondas planas en medios homogéneos sin pérdidas y con pérdidas [1].

Cantidad	Sin Pérdida ( $\epsilon'' = \sigma = 0$ )	Pérdida General	Buen Conductor $\epsilon'' \gg \epsilon'$ o $\sigma \gg \omega\epsilon'$
Constante de Propagación Compleja	$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon}$	$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon'} \sqrt{1 - j\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon'}\right)}$	$\gamma = (1+j)\sqrt{\omega\mu\sigma/2}$
Constante de Fase (Número de Onda)	$\beta = k = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$	$\beta = \text{Im}\{\gamma\}$	$\beta = \text{Im}\{\gamma\}$ $\beta = \sqrt{\omega\mu\sigma/2}$
Constante de Atenuación	$\alpha = 0$	$\alpha = \text{Re}\{\gamma\}$	$\alpha = \text{Re}\{\gamma\}$ $\alpha = \sqrt{\omega\mu\sigma/2}$
Impedancia	$\eta = \sqrt{\mu/\epsilon} = \omega\mu/k$	$\eta = j\omega\mu/\gamma$	$\eta = (1+j)\sqrt{\omega\mu/2\sigma}$
Skin Depth	$\delta_s = \infty$	$\delta_s = 1/\alpha$	$\delta_s = \sqrt{2/\omega\mu\sigma}$
Longitud de Onda	$\lambda = 2\pi/\beta$	$\lambda = 2\pi/\beta$	$\lambda = 2\pi/\beta$
Velocidad de Fase	$v_p = \omega/\beta$	$v_p = \omega/\beta$	$v_p = \omega/\beta$

## 2 Líneas de Transmisión

Una línea de transmisión almacena energía eléctrica y magnética distribuida en el espacio; y alternando entre las dos formas en el tiempo. Es decir, en cualquier posición a lo largo de la línea, la energía se almacena en una combinación de forma eléctrica y magnética para una señal alterna en cualquier posición de la línea, convertida de una forma a otra a medida que avanza en el tiempo. Una línea de transmisión se puede modelar en forma de circuito eléctrico que combina inductores;  $L_s$  (para la energía magnética), condensadores;  $C_s$  (para la energía eléctrica) y resistencias;  $R_s$  (modelo de pérdidas), cuyos valores dependen de la geometría de la línea y de las propiedades de los materiales que componen las líneas de transmisión [7].

Así las líneas de transmisión de varias longitudes y cortes transversales imitan circuitos; es decir, estructuras distribuidas de las cuales son los miembros más fundamentales de una línea de transmisión, el cual distingue RF, microondas y diseño digital de alta velocidad a partir del diseño de circuitos con elementos concentrados ( $R$ ,  $L$  y  $C$ ).

La diferencia clave entre la teoría de circuitos y la teoría de líneas de transmisión es el tamaño eléctrico. El análisis de circuitos asume que las dimensiones físicas de la red son mucho más pequeñas que la longitud de onda eléctrica, mientras que las líneas de transmisión pueden ser una fracción considerable de una longitud de onda, o muchas longitudes de onda en tamaño. Así, una línea de transmisión es un parámetro distribuido de red, donde los voltajes y corrientes pueden variar en magnitud y fase sobre su longitud, mientras que el análisis de circuito ordinario se ocupa de elementos agrupados, donde el voltaje y la corriente no varían apreciablemente sobre la dimensión física de los elementos.

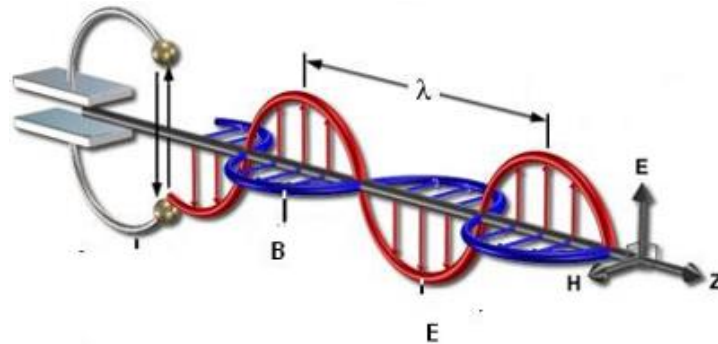
### 2.1 Teoría de Líneas de dos Conductores

Las líneas que transmiten información en el modo de propagación TEM; como la bifilar, coaxial o esencialmente cuasi-TEM como la línea microstrip, pueden ser analizadas ya sea resolviendo directamente las ecuaciones de Maxwell, o bien, usando la teoría general de circuitos [8].

En el primer caso, si se resuelven utilizando las ecuaciones de Maxwell, la forma de las soluciones obtenidas es muy similar a la de la propagación de ondas planas uniformes en el espacio libre, cuya distribución también es TEM; es decir que las ondas electromagnéticas son transversales, porque tanto los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$  son mutuamente perpendiculares a la dirección axial  $z$  de propagación, como se muestra en la Figura 02. Si se consideran a la línea y al flujo de potencia a lo largo del eje  $z$ , las ecuaciones se resuelven obligando que  $\vec{E}_z = \vec{H}_z = 0$ ; para que los campos resultantes sean completamente transversales entre los conductores. Si se requiere realizar un análisis más

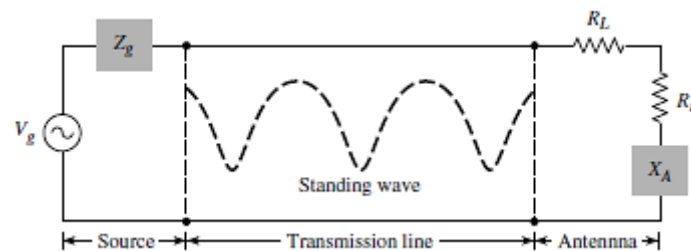
riguroso; habría que calcular según la frecuencia de operación, y la profundidad de penetración de los campos dentro de los conductores sería  $J_z = \sigma E_z$ .

La Figura 02 muestra la propagación de ondas electromagnéticas planas en modo TEM a lo largo de una línea de transmisión, en el cual la región considerada entre o alrededor de los conductores, el campo  $\vec{E}$  puede tener las componentes  $\vec{E}_x$  y  $\vec{E}_y$ , pero siempre  $\vec{E}_z = 0$ . Lo mismo aplica para el campo  $\vec{H}$ , de modo que la pareja de vectores  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$  puedan rotar, manteniéndose la perpendicularidad entre ambos y resultando siempre el flujo de potencia  $\vec{P}$  en la dirección  $z$ .



**Figura 02.** Propagación de onda electromagnética en modo TEM.

El segundo método de análisis es empleando la teoría general de circuitos; es el más sencillo y conduce a los mismos resultados. Este método alternativo se prefiere porque se pueden definir y utilizar las variables de voltaje  $V$ , corriente  $I$  y potencia  $P$ ; que definitivamente son más familiares que las variables de campo eléctrico, campo magnético y densidad de potencia. La Figura 03 muestra el modelo de circuito de una línea de transmisión [9].



**Figura 03.** Línea de transmisión fundamental.

Un aspecto a tener en cuenta es la conductancia  $G$  entre los conductores, el cual es una función de la frecuencia y de las propiedades del material aislante; ya que éste posee cierta conductividad que aumenta con la frecuencia de la corriente alterna y produce pérdidas

elevadas denominadas como: *histéresis del dieléctrico*. Este fenómeno de histéresis es despreciable a bajas frecuencias, pero a frecuencias altas se convierte en la causa principal de pérdidas en el material dieléctrico.

Cuando se desea analizar un problema de este tipo usando las ecuaciones de Maxwell, los efectos del fenómeno de histéresis del dieléctrico son considerados definiendo una permitividad compleja como: [10]

$$\nabla \times \vec{H} = \sigma \vec{E} + j\omega \epsilon \vec{E}$$

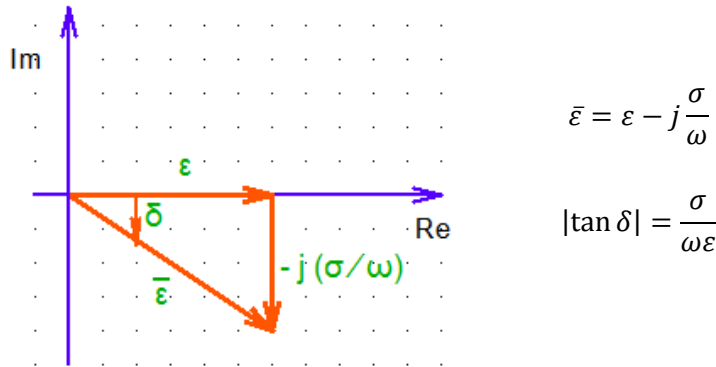
$$\nabla \times \vec{H} = j\omega \left( \epsilon - j \frac{\sigma}{\omega} \right) \vec{E}$$

Permitividad compleja

Donde:

$\sigma \vec{E};$	Densidad de la corriente de conducción
$j\omega \epsilon \vec{E};$	Densidad de la corriente de desplazamiento

Dicha permitividad compleja;  $\bar{\epsilon}$ , se puede representar en el plano complejo como se indica en la Figura 04. Donde, la parte real;  $\epsilon$ , es igual a  $\epsilon_r \epsilon_0$  y  $\epsilon_r$  no tiene unidades sí  $\epsilon_0 \equiv 8.8542 \times 10^{-12} \text{ F/m}$ . Para el modelo circuital de una línea es posible determinar los datos proporcionados por los fabricantes, en donde se especifica la *tangente de pérdida* relacionada con la permitividad real y la conductividad del dieléctrico por la ecuación expresada, donde se puede despejar  $\sigma$  y estimar su valor aproximado para la frecuencia de operación en cuestión; si  $\omega = 2\pi f$ .



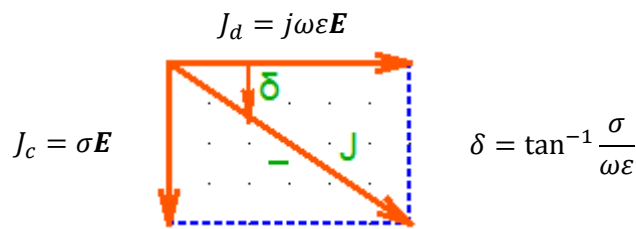
**Figura 04.** Representación de la permitividad compleja de un material y definición del ángulo de disipación  $\delta$ . La tangente del ángulo  $\delta$  se denomina *tangente de pérdida*.

La tangente de pérdida también se puede interpretar como se indica a continuación. De la ecuación  $\nabla \times \vec{H} = (\epsilon - j(\sigma/\omega))\vec{E}$ , se observa que la razón de la densidad de corriente de conducción  $J_c$  y la densidad de corriente de desplazamiento  $J_d$  es:



$$\frac{J_c}{J_d} = \frac{\sigma}{j\omega\epsilon}$$

Por lo tanto, los dos vectores de densidad de corriente tienen la misma dirección, pero están  $90^\circ$  fuera de fase con respecto al tiempo. Esta relación de fases puede representarse gráficamente como se muestra en la Figura 05. En ella se observa que  $\delta$  es el ángulo con el cual la densidad de corriente de desplazamiento adelanta a la densidad total de corriente, que es igual a la suma vectorial de  $J_c$  y  $J_d$ . Como era de esperarse, este ángulo  $\delta$  es el mismo resultado que la ecuación;  $\tan \delta$ .



**Figura 05.** Relación de fases entre las densidades de corriente;  $J_c$  y  $J_d$  son vectores paralelos con un desfase de  $90^\circ$  en ambos.

## 2.2 Modelo Circuital de una Línea de Transmisión

Un pedazo de longitud infinitesimal  $\Delta z$  de un conductor, como muestra la Figura 06 puede ser modelado como un circuito eléctrico con elementos concentrados RCL; como se puede ver en la Figura 07, donde la línea de transmisión es representada circuitalmente como una línea de dos conductores (TEM) [1].

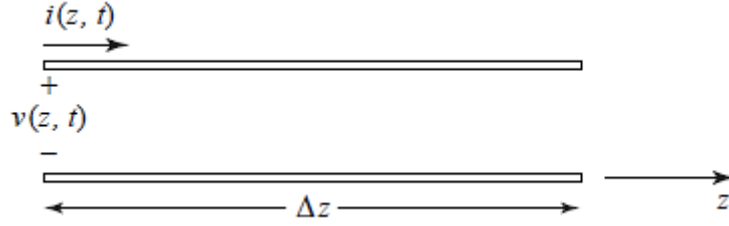
Donde el circuito de la Figura 07 se puede describir como:

$R$  = Resistencias en serie por unidad de longitud para ambos conductores, en  $\Omega/\text{m}$ .

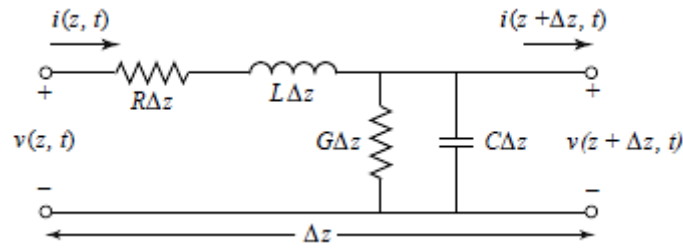
$L$  = Inductores en serie por unidad de longitud para ambos conductores, en  $\text{H}/\text{m}$ .

$G$  = Conductancia en paralelo por unidad de longitud, en  $\text{S}/\text{m}$ .

$C$  = Capacitancia en paralelo por unidad de longitud, en  $\text{F}/\text{m}$ .



**Figura 06.** Línea de transmisión de dos hilos.



**Figura 07.** Modelo circuital de una línea de transmisión con elementos concentrados.

La inductancia  $L$  en serie representa la autoinducción total de los dos conductores, y la capacitancia  $C$  en paralelo se debe a la gran proximidad de los dos conductores. La resistencia  $R$  en serie representa la resistencia debida a la conductividad finita de los conductores, y la conductancia  $G$  en paralelo se debe a la pérdida dieléctrica en el material entre los conductores  $R$  y  $G$ ; por lo tanto, representan una pérdida.

Del circuito de la Figura 07 se puede aplicar la Ley de Voltaje de Kirchhoff como:

$$v(z, t) - R\Delta z i(z, t) - L\Delta z \frac{\partial i(z, t)}{\partial t} - v(z + \Delta z, t) = 0 \quad (37)$$

Similarmente, aplicando la Ley de Corriente de Kirchhoff se tiene:

$$i(z, t) - G\Delta z v(z + \Delta z, t) - C\Delta z \frac{\partial v(z + \Delta z, t)}{\partial t} - i(z + \Delta z, t) = 0 \quad (38)$$

Dividiendo la Ecuación (37) y (38) por  $\Delta z$  y tomando el límite de  $\Delta z \rightarrow 0$  se obtiene las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\frac{\partial v(z, t)}{\partial z} = -Ri(z, t) - L \frac{\partial i(z, t)}{\partial t} \quad (39)$$

$$\frac{\partial i(z, t)}{\partial z} = -Gv(z, t) - C \frac{\partial v(z, t)}{\partial t} \quad (40)$$

Las ecuaciones anteriores de la línea de transmisión están en el dominio del tiempo, conocidas también como ecuaciones de telegrafista.

Al tener una distribución transversal de los campos eléctrico y magnético, resulta fácil calcular los parámetros circuitales de la línea o cable por unidad de longitud (inductancia  $L$ , capacitancia  $C$ , resistencia  $R$  y conductancia  $G$ ); entonces es posible obtener soluciones para la operación completa de líneas de transmisión aplicando teoría general de circuitos sin el uso de las ecuaciones de Maxwell.

Por lo tanto, para la condición de estado estable sinusoidal con fasores basados en coseno, dichas Ecuaciones (39) y (40) se pueden simplificar como: [7]

$$\frac{dV(z)}{dz} = -(R + j\omega L)I(z) \quad (41)$$

$$\frac{dI(z)}{dz} = -(G + j\omega C)V(z) \quad (42)$$

Donde:  $V$ , es el fasor de la diferencia de voltaje entre los conductores e  $I$  es el fasor de la corriente en uno de ellos. Sin duda, los términos de voltaje y corriente son conceptos mucho más familiares y de más fácil comprensión que los de campos electromagnéticos, pero estos últimos sí deben emplearse para analizar otros tipos de líneas.

### 2.3 Propagación de Ondas en una Línea de Transmisión

Las dos Ecuaciones (41) y (42) se pueden resolver simultáneamente para obtener ecuaciones de onda para  $V(z)$  y  $I(z)$  como:

$$\frac{d^2 V(z)}{dz^2} - \gamma^2 V(z) = 0 \quad (43)$$

$$\frac{d^2 I(z)}{dz^2} - \gamma^2 I(z) = 0 \quad (44)$$

Donde la expresión:

$$\gamma = \alpha + j\beta \quad (45)$$

$$\gamma = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}$$

$$\gamma = \sqrt{Z * Y}$$

es la *constante de propagación compleja* que está en función de la frecuencia. Si se desea obtener la expresión para  $v(z, t)$  a partir del fasor  $V(z)$ , y recordando la definición de un fasor, simplemente se emplea la relación;  $v(z, t) = \text{Re}[V(z)e^{j\omega t}]$ . Igualmente, para la corriente, una vez conocido el fasor  $I(z)$  la expresión en función del espacio y el tiempo se obtiene como:  $i(z, t) = \text{Re}[I(z)e^{j\omega t}]$ .

En la constante de propagación;  $\gamma = \alpha + j\beta$ ,  $\alpha$  indica la atenuación que sufre la onda de voltaje o de corriente según sea el caso, conforme viaja o se propaga a lo largo de una línea; y  $\beta$ , es la parte imaginaria que indica la rapidez del cambio de fase de la onda conforme se propaga. Las unidades de la constante de atenuación;  $\alpha$  (Np/m) y las de la constante de fase;  $\beta$  (rad/m). Sin embargo, es más común especificar a  $\alpha$  (dB/m) y emplear la conversión de nepers a decibels por medio de la relación;  $1 \text{ Np} = 8.686 \text{ dB}$ . Por lo tanto:

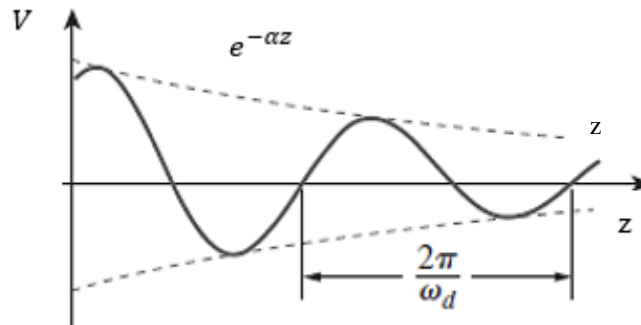
$$\alpha \text{ (dB/m)} = 8.686 * \alpha \text{ (Np/m)}$$

Las soluciones de onda oscilante de las Ecuaciones (43) y (44) pueden ser determinados como:

$$V(z) = V_0^+ e^{-\gamma z} + V_0^- e^{\gamma z} \quad (46)$$

$$I(z) = I_0^+ e^{-\gamma z} + I_0^- e^{\gamma z} \quad (47)$$

Donde el termino  $e^{-\gamma z}$  representa la propagación de onda en la dirección  $+z$ , y el termino  $e^{\gamma z}$  representa la propagación de onda en la dirección  $-z$ . La expresión de la Ecuación (46), tiene un comportamiento como se muestra en la Figura 08 [10].



**Figura 08.** Atenuación exponencial de una onda senoidal de voltaje a lo largo de una línea de transmisión con pérdidas.

Luego, al aplicar la Ecuación (41) para el voltaje de la Ecuación (46), el resultado de la corriente en la línea es:

$$I(z) = \frac{\gamma}{R + j\omega L} (V_0^+ e^{-\gamma z} - V_0^- e^{\gamma z}) \quad (48)$$

Y comparando dicho resultado con la Ecuación (47) muestra la expresión de la impedancia característica  $Z_0$ , donde cada línea de transmisión tendrá su propio valor particular de impedancia característica, dependiendo de la geometría y las dimensiones de la línea, así como de la frecuencia de operación. De hecho, este parámetro;  $Z_0$ , es comúnmente proporcionado por los fabricantes de medios guiados en sus especificaciones características. Por ejemplo, hay cables coaxiales con impedancias características nominales de  $50 \Omega$  (radiodifusión y comunicaciones) y  $75 \Omega$  (televisión por cable).

La impedancia característica puede ser definido como:

$$Z_0 = \frac{R + j\omega L}{\gamma} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} \quad (49)$$

relacionando el voltaje y la corriente en la línea de la siguiente manera:

$$\frac{V_0^+}{I_0^+} = Z_0 = \frac{-V_0^-}{I_0^-} \quad (50)$$

Entonces, la Ecuación (47) se puede reescribir de la siguiente forma:

$$I(z) = \frac{V_0^+}{Z_0} e^{-\gamma z} - \frac{V_0^-}{Z_0} e^{\gamma z} \quad (51)$$

Volviendo al dominio del tiempo, podemos expresar la forma de onda de voltaje como:

$$v(z, t) = |V_0^+| \cos(\omega t - \beta z + \phi^+) e^{-\alpha z} + |V_0^-| \cos(\omega t + \beta z + \phi^-) e^{\alpha z} \quad (52)$$

Donde;  $\phi^\pm$  es el ángulo de fase de la tensión compleja  $V_0^\pm$ . Por lo tanto, se determina que la longitud de onda en un medio guiado (línea de transmisión) es:

$$\lambda_g = \frac{2\pi}{\beta} \quad [\text{m}] \quad (53)$$

Se tiene también la velocidad de fase definida por:

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \lambda f \quad [\text{m/seg}] \quad (54)$$

Donde;  $\beta$ , es la constante de fase o parte imaginaria de la constante de propagación en (rad/m) y,  $\omega$  es la frecuencia angular (rad/seg).

Otro parámetro a definirse es la velocidad de grupo;  $v_g = \partial\omega/\partial\beta$ , el cual es la velocidad de la envolvente de una forma de onda modulada. Y describe qué tan rápido se propaga la información. Es la velocidad a la que la energía o información en forma de onda se mueve. Por lo tanto, la velocidad de grupo nunca puede ser mayor que la velocidad de la luz en el vacío,  $c$ . Sin embargo, la velocidad de fase puede ser mayor que  $c$ . Para una línea sin pérdidas y sin dispersión.

La velocidad de grupo y de fase es la misma, si la velocidad de fase es independiente a la frecuencia, entonces  $\beta$  es linealmente proporcional a  $\omega$  y la velocidad del grupo es lo mismo que la velocidad de fase ( $v_p = v_g$ ).

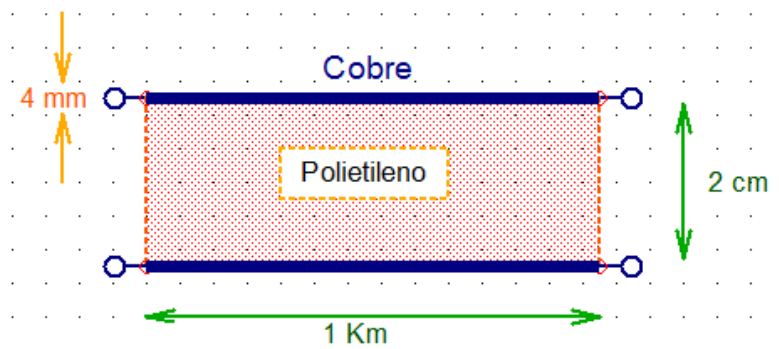
La longitud eléctrica se utiliza a menudo para trabajar con diseños de líneas de transmisión, antes de establecer la longitud física de una línea. La longitud eléctrica de una línea de transmisión se expresa como una fracción de una longitud de onda en grados (o radianes), donde una longitud de onda corresponde a  $360^\circ$  ( $2\pi$  radianes). Entonces, si  $\beta$  es la constante de fase de una señal en una línea de transmisión, y  $\ell$  es su longitud física; la longitud eléctrica de la línea en radianes es  $\beta\ell$ .

### Ejemplo 02.

Se tiene una línea de transmisión bifilar de cobre con aislamiento de polietileno (Figura 09), calcular los valores de impedancia característica, constante de propagación, velocidad de fase y el tiempo que tardaría una señal en viajar desde el generador hasta el extremo opuesto de la línea. Asumir una línea de transmisión sin pérdidas de longitud física es de 1 km. Realizar el análisis para frecuencias de 1 kHz, 10 kHz y 1 MHz [10].

Datos:

Se tiene el modelamiento gráfico de la línea de transmisión bifilar:



**Figura 09.** Línea de transmisión bifilar.

Donde se tiene los parámetros  $L$ ,  $C$ ,  $R$  y  $G$ ; como:

$f$	$L$	$C$	$R$	$G$
1 kHz	1.02 $\mu\text{H}/\text{m}$	27.33 pF/m	2.74 $\text{m}\Omega/\text{m}$	34.35 $\text{p}\Omega/\text{m}$
10 kHz	0.92 $\mu\text{H}/\text{m}$	27.33 pF/m	4.16 $\text{m}\Omega/\text{m}$	343.5 $\text{p}\Omega/\text{m}$
1 MHz	0.92 $\mu\text{H}/\text{m}$	27.33 pF/m	4.16 $\text{m}\Omega/\text{m}$	34.35 $\text{n}\Omega/\text{m}$

Solución:

Usando la Ecuación (49), se determina la impedancia característica:

$f$	$Z_0 (\Omega)$
1 kHz	197.37 – j 40.4
10 kHz	183.59 – j 6.58
1 MHz	183.47 – j 0.64

Usando la Ecuación (45), se determina la constante de propagación  $\gamma$ :

$f$	$\gamma$
1 kHz	$(6.94 + j 33.89) \times 10^{-6}$
10 kHz	$(11.36 + j 315.26) \times 10^{-6}$
1 MHz	$(0.1165 + j 31.5) \times 10^{-3}$

De la Ecuación (54), se determina la velocidad de fase  $v_p$ :

$f$	$v_p (\text{m}/\text{seg})$
1 kHz	$1.85 \times 10^8$
10 kHz	$1.99 \times 10^8$
1 MHz	$1.99 \times 10^8$

Analizando los resultados obtenidos, donde la impedancia característica conforme la frecuencia aumenta su componente imaginario tiende a cero, y la parte real tiende al mismo valor que se obtendría para una línea sin pérdidas, al asumir  $R$  y  $G$  igual a cero; entonces,  $Z_0 = \sqrt{L/C} = 183.47 \Omega$ . Asimismo, al aumentar la frecuencia la velocidad de fase  $v_p$  tiende al valor que tendría la velocidad de propagación en un medio con  $\epsilon_r = 2.26$  (polietileno) y sin pérdidas. Por lo tanto,  $v_p = c/\sqrt{\epsilon_r} = 1.996 \times 10^8 \text{ m}/\text{seg}$ . Mientras que la atenuación;  $\alpha$ , aumenta a medida que se incrementa la frecuencia.

Finalmente, se determina el tiempo de retardo usando la definición  $t_d = \ell/v_p$ :

$f$	$t_d$ ( $\mu$ seg)
1 kHz	5.4
10 kHz	5.0
1 MHz	5.0

## 2.4 Propagación de Ondas en una Línea de Transmisión sin Pérdidas

La definición anterior es para una línea de transmisión general, incluido los efectos de pérdida, donde se observa que la constante de propagación y la impedancia característica son valores complejos [1]. Sin embargo, en muchas aplicaciones prácticas la pérdida en una línea es muy pequeña y; por lo tanto, puede pasarse por alto lo que simplifica los resultados. Donde; estableciendo  $R = G = 0$  en la Ecuación (45), se obtiene la constante de propagación como:

$$\gamma = \alpha + j\beta = j\omega\sqrt{LC} \quad (55)$$

Como también:

$$\beta = \omega\sqrt{LC} \quad (56)$$

$$\alpha = 0 \quad (57)$$

Como se esperaba, para una línea de transmisión sin pérdidas; la constante de atenuación  $\alpha = 0$ . Y la impedancia característica de la Ecuación (49) se reduce a:

$$Z_0 = \sqrt{L/C} \quad (58)$$

Teniendo ahora un número real. Las soluciones generales para voltaje y corriente en una línea de transmisión sin pérdida se pueden escribir como:

$$V(z) = V_0^+ e^{-j\beta z} + V_0^- e^{j\beta z} \quad (59)$$

$$I(z) = \frac{V_0^+}{Z_0} e^{-j\beta z} - \frac{V_0^-}{Z_0} e^{j\beta z} \quad (60)$$

Donde, la longitud de onda es:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{LC}} \quad (61)$$

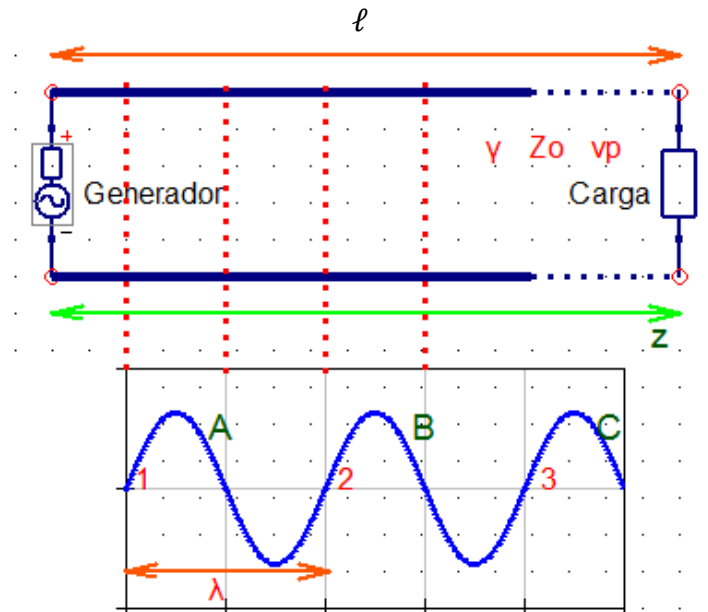


Y la velocidad de fase:

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (62)$$

**Nota:** Para interpretar la velocidad de fase se observa la Figura 10, por simplicidad se considera que la línea no tiene atenuación, por lo que la onda de voltaje no está amortiguada. Es decir que  $\gamma$  es puramente imaginaria puesto que  $\alpha = 0$ , esta consideración es válida para muchos casos en alta frecuencia.

La onda senoidal de la Figura 10 viaja hacia la derecha en la dirección positiva de  $z$ , y su forma y magnitud no son alteradas conforme avanza hacia la carga, puesto que no hay atenuación. La línea tiene una longitud total física medida en metros, y una longitud total *eléctrica* correspondiente medida en longitudes de onda  $\lambda$ . Por definición;  $\lambda$ , es la distancia entre puntos sucesivos de la onda que tienen la misma fase eléctrica; por ejemplo, la distancia entre los puntos 1 y 2 o entre A y B. Su valor depende de la frecuencia  $f$  de oscilación y de la velocidad de propagación  $v_p$ ; y esta velocidad a su vez, depende de las características del medio por el cual la onda viaja (tipo de dieléctrico entre los conductores de la línea).



**Figura 10.** Onda de voltaje que se propaga sobre una línea de transmisión sin pérdidas del generador hacia la carga [10].

Si entre los conductores se tiene aire, se puede considerar que la velocidad de la onda es igual a la velocidad de la luz en el espacio libre;  $c = 2.9979 \times 10^8$  m/seg.

Pero si el medio tiene una constante dieléctrica relativa  $\epsilon_r$  mayor que la unidad (aire), entonces la onda se propaga con una velocidad menor que la velocidad de la luz, el cual puede ser determinado por:

$$v_{p(\text{medio})} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}}$$

Al reducirse la velocidad de propagación, la longitud de onda automáticamente se reduce también, como si la onda fuese comprimida a lo largo de eje  $z$ . Esta nueva longitud de onda dentro del medio de propagación sin pérdidas se calcula como:

$$\lambda_{\text{medio}} = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{v}{f} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r} * f} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon_r}}$$

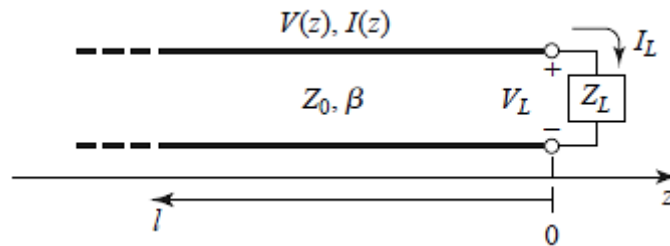
Donde:  $\lambda_0$ , es la longitud de onda en el espacio libre a la misma frecuencia; por lo tanto, en la ecuación anterior se observa que  $\lambda$  y  $\beta$  son inversamente proporcionales entre sí; de modo que si  $\beta = 2\pi/\lambda$ , al sustituir en la ecuación anterior, se tiene:

$$v_p = \frac{2\pi f}{2\pi/\lambda} = \lambda f = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}}$$

De manera análoga; si  $\ell$  es la longitud física total de una línea de transmisión, se puede determinar el tiempo total que tarda un punto arbitrario con determinada fase en recorrer la distancia desde el generador hasta la carga como:  $t_d = \ell/v_p = \beta\ell/\omega$

## 2.5 Líneas de Transmisión Terminadas sin Pérdidas

La Figura 11 muestra una línea de transmisión sin pérdidas conectado a una impedancia de carga arbitraria  $Z_L$ . Este problema ilustrará la reflexión de ondas en la línea de transmisión, una propiedad fundamental en los sistemas distribuidos.



**Figura 11.** Línea de transmisión terminada en una impedancia de carga  $Z_L$  [1].

Asumiendo que una onda incidente tiene la forma  $V_0^+ e^{-j\beta z}$ , el cual es generado a partir de una fuente en  $z < 0$ . Donde se observa que la relación de voltaje y corriente para una onda oscilante es  $Z_0$ , el cual es la impedancia característica de la línea. Sin embargo, cuando la línea se conecta a una carga arbitraria  $Z_L \neq Z_0$ , la relación de voltaje y corriente en la carga debe ser  $Z_L$ . Por lo tanto, una onda reflejada debe estar excitado con la amplitud adecuada para satisfacer esta condición. El voltaje total en la línea se puede escribir como en la Ecuación (59), estableciendo una suma de ondas incidentes y reflejadas:

$$V(z) = V_0^+ e^{-j\beta z} + V_0^- e^{j\beta z} \quad (63)$$

De manera similar la corriente total en la línea se describe mediante la Ecuación (60) como:

$$I(z) = \frac{V_0^+}{Z_0} e^{-j\beta z} - \frac{V_0^-}{Z_0} e^{j\beta z} \quad (64)$$

Donde, la totalidad del voltaje y la corriente en la carga están relacionados por la impedancia de carga, por lo que en  $z = 0$  se debe tener:

$$Z_L = \frac{V(0)}{I(0)} = \frac{V_0^+ + V_0^-}{V_0^+ - V_0^-} Z_0 \quad (65)$$

Y solucionando para  $V_0^-$  da como resultado:

$$V_0^- = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} V_0^+ \quad (66)$$

La amplitud de la onda de voltaje reflejado; y normalizado a la amplitud de voltaje de la onda incidente, se define como el *coeficiente de reflexión de voltaje*,  $\Gamma$ :

$$\Gamma = \frac{V_0^-}{V_0^+} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \quad (67)$$

El voltaje total y las ondas de corriente en la línea se pueden escribir como:

$$V(z) = V_0^+ (e^{-j\beta z} + \Gamma e^{j\beta z}) \quad (68)$$

$$I(z) = \frac{V_0^+}{Z_0} (e^{-j\beta z} - \Gamma e^{j\beta z}) \quad (69)$$

De estas ecuaciones se puede ver que el voltaje y la corriente en la línea consisten en una superposición de una onda incidente y onda reflejada; tales ondas se denominan ondas estacionarias. Solamente, cuando  $\Gamma = 0$  no hay onda reflejada. Para obtener  $\Gamma = 0$ , la

impedancia de carga  $Z_L$  debe ser igual a la impedancia característica  $Z_0$  de la línea de transmisión, como se describe en la Ecuación (67). Donde usualmente se denomina cuando una carga está adaptada con la línea de transmisión, ya que no hay reflejo de la onda incidente [1][7].

Ahora consideraremos el flujo de la potencia promedio en el tiempo a lo largo de la línea en el punto  $z$  como:

$$P_{avg} = \frac{1}{2} \text{Re}\{V(z)I(z)^*\}$$

$$P_{avg} = \frac{1}{2} \frac{|V_0^+|^2}{Z_0} \text{Re}\{1 - \Gamma^* e^{-2j\beta z} + \Gamma e^{2j\beta z} - |\Gamma|^2\} \quad (70)$$

En el cual se ha determinado utilizando las Ecuaciones (68) y (69). Los dos términos del medio entre paréntesis son de la forma  $A - A^* = 2j \text{Im}\{A\}$  y, por lo tanto, son puramente imaginarios. Esta afirmación simplifica el resultado de la potencia promedio como:

$$P_{avg} = \frac{1}{2} \frac{|V_0^+|^2}{Z_0} (1 - |\Gamma|^2) \quad (71)$$

El flujo de la potencia promedio es constante en cualquier punto de la línea, y la potencia total entregada a la carga;  $P_{avg}$ , es igual a la potencia incidente ( $|V_0^+|^2/2Z_0$ ) menos la potencia reflejada ( $|V_0^-|^2/2Z_0$ ). Si  $\Gamma = 0$ , entonces la potencia máxima se entrega a la carga, mientras no se entregue energía entonces  $|\Gamma| = 1$ . La discusión anterior asume que el generador está adaptado, de modo que no hay reflexión de la onda reflejada desde  $z < 0$ .

Cuando la carga esta desadaptada, no toda la potencia disponible del generador es entregada a la carga. Esto indicará pérdida, que usualmente es denominado como *pérdida de retorno* (RL) el cual está definido en unidades logarítmicas como:

$$RL_{(dB)} = -20 \text{Log } |\Gamma| \quad (72)$$

De modo que una carga adaptada  $\Gamma = 0$  tiene una pérdida de retorno  $RL = \infty$  dB (no hay potencia reflejada), si existe reflexión total entonces  $|\Gamma| = 1$  tendrá una pérdida de retorno  $RL = 0$  dB (se refleja toda la potencia incidente). La pérdida de retorno es un número no negativo para la reflexión de una red pasiva.

Si la carga está adaptada a la línea de transmisión  $\Gamma = 0$  y la magnitud del voltaje en la línea es  $|V(z)| = |V_0^+|$ , que es una constante. A veces se dice que esta línea es plana. Sin embargo, cuando la carga esta desadaptada la presencia de una onda reflejada conduce a ondas estacionarias, y la magnitud del voltaje en la línea no es constante. Por lo tanto, de la Ecuación (68) se tiene:

$$|V(z)| = |V_0^+| |1 + \Gamma e^{2j\beta z}| = |V_0^+| |1 + \Gamma e^{-2j\beta \ell}|$$

$$|V(z)| = |V_0^+| |1 + |\Gamma| e^{j(\theta - 2\beta \ell)}| \quad (73)$$

Donde:  $\ell = -z$ , es la distancia positiva medida desde la carga en  $z = 0$ , y  $\theta$  es la fase del coeficiente de reflexión ( $\Gamma = |\Gamma| e^{j\theta}$ ). Este resultado muestra que la magnitud del voltaje oscila en la posición  $z$  a lo largo de la línea. El valor máximo ocurre cuando el término de fase  $e^{j(\theta - 2\beta \ell)} = 1$  y está dado por:

$$V_{max} = |V_0^+| (1 + |\Gamma|) \quad (74)$$

Y el mínimo valor ocurre cuando el término de fase  $e^{j(\theta - 2\beta \ell)} = -1$  y está dado por:

$$V_{min} = |V_0^+| (1 - |\Gamma|) \quad (75)$$

Como  $|\Gamma|$  aumenta, la relación de  $V_{max}$  y  $V_{min}$  incrementa, por lo que una medida de desadaptación en la línea es llamada *relación de onda estacionaria* (SWR), el cual puede definirse como:

$$SWR = \frac{V_{max}}{V_{min}} = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} \quad (76)$$

Esta cantidad también se conoce como la *relación de onda estacionaria de voltaje* y a veces se identifica como VSWR. De la Ecuación (76) se ve que SWR es un número real tal que  $1 \leq VSWR \leq \infty$ ; donde,  $SWR = 1$  implica una carga adaptada.

Observe que en general  $\Gamma$ , puede ser complejo, pero VSWR es necesariamente siempre real:  $1 \leq VSWR \leq \infty$ . Para una condición de adaptación;  $\Gamma = 0$  y  $VSWR = 1$  y, cuanto más cercano esté VSWR a 1, mejor se adaptará la carga con la línea y se entregará más potencia a la carga. Los coeficientes de reflexión y la relación de onda estacionaria para condiciones terminadas en cortocircuito y en circuito abierto son  $-1$  y  $+1$ , respectivamente, y en ambos casos el VSWR es infinito [7].

De la Ecuación (73) se ve que la distancia entre dos máximos de voltaje sucesivos (o mínimo) es:  $\ell = 2\pi/2\beta = \pi\lambda/2\pi = \lambda/2$ , mientras que la distancia entre un máximo y un mínimo es:  $\ell = \pi/2\beta = \lambda/4$ , donde  $\lambda$  es la longitud de onda en la línea de transmisión. El coeficiente de reflexión de la Ecuación (67) se definió como la relación entre la amplitud del voltaje reflejado y la amplitud de onda del voltaje incidente en la carga ( $\ell = 0$ ), pero esta cantidad se puede generalizar para cualquier punto  $\ell$  a lo largo de la línea de transmisión.

De la Ecuación (63) con:  $z = -\ell$ , la relación de la componente reflejada al componente incidente es:

$$\Gamma(\ell) = \frac{V_0^- e^{-j\beta\ell}}{V_0^+ e^{j\beta\ell}} = \Gamma(0)e^{-2j\beta\ell} \quad (77)$$

Donde:  $\Gamma(0)$ , es el coeficiente de reflexión en  $z = 0$ , dado por la Ecuación (67). Este resultado es útil al transformar el efecto de una desadaptación de carga en la línea.

Por lo tanto, el flujo de la potencia real en la línea es constante (para una línea sin pérdidas); pero la amplitud de voltaje al menos para una línea desadaptada es oscilatoria en la posición de la línea. Por lo tanto, se puede concluir que la impedancia vista mirando en la línea debe variar con la posición, y este es de hecho el caso. A una distancia  $\ell = -z$  de la carga, la impedancia de entrada vista mirando hacia la carga es: [1]

$$Z_{in} = Z_0 \frac{(Z_L + Z_0)e^{j\beta\ell} + (Z_L - Z_0)e^{-j\beta\ell}}{(Z_L + Z_0)e^{j\beta\ell} - (Z_L - Z_0)e^{-j\beta\ell}}$$

$$Z_{in} = Z_0 \frac{Z_L \cos \beta\ell + jZ_0 \sin \beta\ell}{Z_0 \cos \beta\ell + jZ_L \sin \beta\ell}$$

$$Z_{in} = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan \beta\ell}{Z_0 + jZ_L \tan \beta\ell} \quad (78-a)$$

$$Z_{in} = Z_0 \frac{1 + \Gamma e^{-2\gamma\ell}}{1 - \Gamma e^{-2\gamma\ell}} \quad (78-b)$$

Este es un resultado muy importante que da la impedancia de entrada de una longitud de línea de transmisión, con una impedancia de carga arbitraria. Nos referiremos a este resultado como la ecuación de impedancia de la línea de transmisión; algunos casos especiales se considerarán a continuación.

La Ecuación (78-a) también se conoce como la ecuación de telegrafista sin pérdidas. Donde;  $\beta\ell$ , se llama longitud eléctrica y se expresa en grados o fracciones de una longitud de onda, pero en los cálculos debe convertirse a radianes con la longitud de onda en  $2\pi$  radianes.

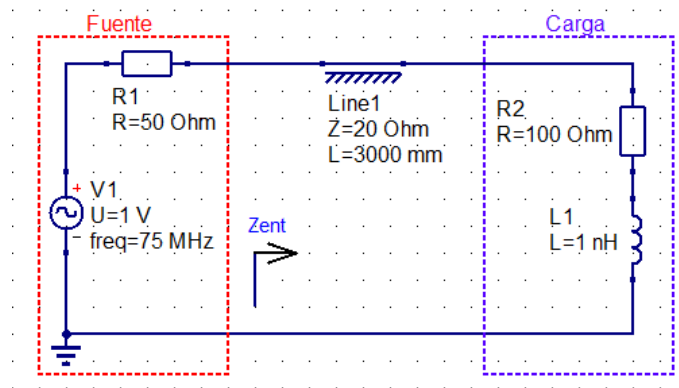
Observemos aquí que  $Z_{in}$  es una función periódica de  $\ell$  con período  $\lambda/2$  y varía entre  $Z_{max}$  y  $Z_{min}$ , [10] donde:

$$Z_{max} = \frac{V_{max}}{I_{min}} = Z_0(VSWR)$$

$$Z_{min} = \frac{V_{min}}{I_{max}} = \frac{Z_0}{VSWR}$$

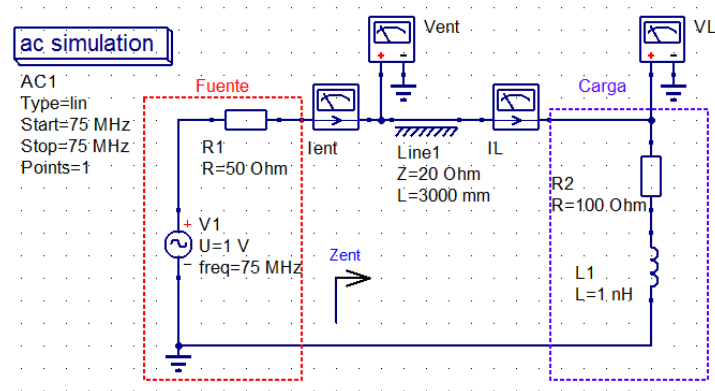
**Ejemplo 03.**

Del circuito siguiente, calcular la impedancia de entrada  $Z_{ent}$ , y la potencia promedio entregada a la carga, asumir una línea de transmisión sin pérdidas. Si:  $V_1 = \cos(2\pi * 75 * 10^6 t)$ .



Solución:

Para la solución del ejercicio se hará uso de las ecuaciones de análisis de cálculo de impedancia;  $Z_{ent} = V_{ent}/I_{ent}$ , como también de la Ecuación (70) simplificada, para el cálculo de la potencia promedio entregada a la carga del circuito. Para lo cual se utilizarán dispositivos de medición de corriente y voltaje proporcionados por el software, como se muestra en la Figura 12.



**Figura 12.** Diseño del circuito de línea de transmisión con medidores de voltaje y corriente en la entrada de la línea y la carga.

Realizado las configuraciones de medición de corriente y voltaje, como se muestra en la Figura 12, se procede a establecer las ecuaciones de impedancia y potencia como se muestra a continuación:

equation	equation
Impedancia $Z = V_{ent}/I_{ent}$	Potencia $PL = 0.5 * \text{real}(V_L * \text{conj}(I_L))$

Por lo tanto; se realiza la simulación correspondiente, donde se tiene los resultados siguientes:

number	Z
1	4+j0.0438

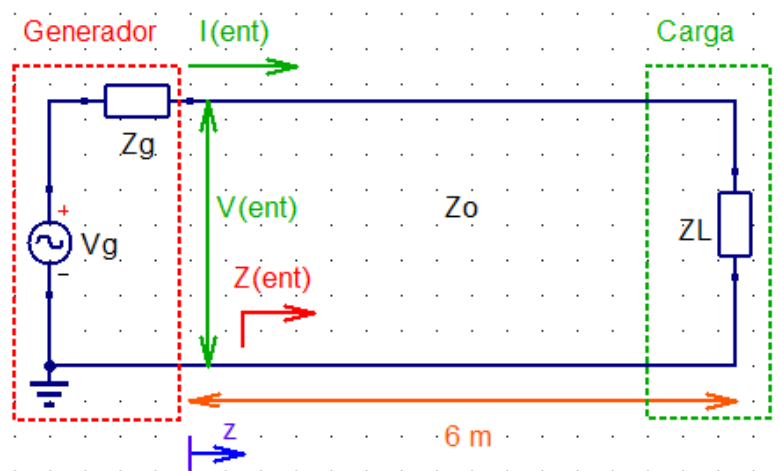
number	PL
1	0.000686

#### Ejemplo 04.

Un generador de señales está conectado a una línea de transmisión cuya impedancia característica es de  $75 \Omega$ . La línea mide 6 metros cuya permitividad relativa es 2.6. Y al extremo final de la línea se conecta una carga arbitraria cuya impedancia es de  $75 \Omega$ . Si el generador tiene una resistencia interna de  $1 \Omega$  y un voltaje igual a  $V_g = 1.5 \cos(2\pi * 10^8 t) V$ , calcular; las expresiones matemáticas instantáneas para el voltaje y la corriente en cualquier punto de la línea, como también la potencia promedio que se le entrega a la carga asumiendo ( $\alpha = 0 \text{ dB}$ ) [10].

Solución:

Según los datos proporcionados se tiene una representación circuital del ejercicio, como se muestra en la Figura 13.



$$V_g = 1.5 \angle 0^\circ$$

$$Z_g = 1 \Omega$$

$$f = 100 \text{ MHz}$$

$$Z_0 = 75 \Omega = Z_L$$

**Figura 13.** Diseño circuital del ejercicio.



Como la línea de transmisión está adaptada en  $Z_0$ , la impedancia que se ve en todos los puntos de la línea es la misma; por lo tanto, la impedancia de entrada también es  $Z_{ent} = 75\Omega$ .

Entonces se puede determinar lo siguiente:

$$V_{ent} = \frac{V_g * Z_{ent}}{Z_g + Z_{ent}} = \frac{75}{76} (1.5 \angle 0^\circ) = 1.48 \angle 0^\circ \text{ [V]}$$

$$I_{ent} = \frac{V_g}{Z_g + Z_{ent}} = \frac{1.5 \angle 0^\circ}{76} = 0.0197 \angle 0^\circ \text{ [A]}$$

Luego; al sumir una línea de transmisión sin pérdidas ( $\alpha = 0$ ) y, considerando las Ecuaciones (45) y (62) se puede determinar la constante de propagación como:

$$\gamma = j\beta = j \frac{\omega}{v_p} = j \frac{\omega \sqrt{\epsilon_r}}{c} = j \frac{2\pi \times 10^8 \sqrt{2.6}}{3 \times 10^8} = j 1.075 \pi \text{ [rad/m]}$$

Por lo tanto, las expresiones matemáticas de voltaje y corriente son de la siguiente manera:

$$V(z) = (V_{ent})e^{-j\beta z} = (1.48e^{j0})e^{-j1.075 \pi z} = 1.48e^{-j1.075 \pi z} \text{ [V]}$$

$$I(z) = (I_{ent})e^{-j\beta z} = 0.0197e^{-j1.075 \pi z} \text{ [A]}$$

Finalmente, se procede a determinar las expresiones matemáticas de voltaje y corriente para cualquier punto de la línea de transmisión:

$$v(z, t) = \text{Re}[V(z) e^{j\omega t}]$$

$$v(z, t) = \text{Re}[1.48 e^{-j1.075 \pi z} e^{j2\pi f t}]$$

$$v(z, t) = 1.48 \cos[2\pi \times 10^8 t - 1.075 \pi z] \text{ [V]}$$

$$i(z, t) = \text{Re}[I(z) e^{j\omega t}]$$

$$i(z, t) = \text{Re}[0.0197 e^{-j1.075 \pi z} e^{j2\pi f t}]$$

$$i(z, t) = 0.0197 \cos[2\pi \times 10^8 t - 1.075 \pi z] \text{ [A]}$$

Así; por ejemplo, para el punto específico donde está la carga, las expresiones instantáneas se obtienen sustituyendo ( $z = 6 \text{ m}$ ) en las ecuaciones anteriores. Por lo que se refiere a la potencia promedio entregada a la carga, ésta debe ser igual a la potencia promedio de entrada ya que se está considerando que la línea no tiene pérdidas ( $\alpha = 0$ ). De allí que, a partir de los fasores de voltaje y corriente, se tiene:

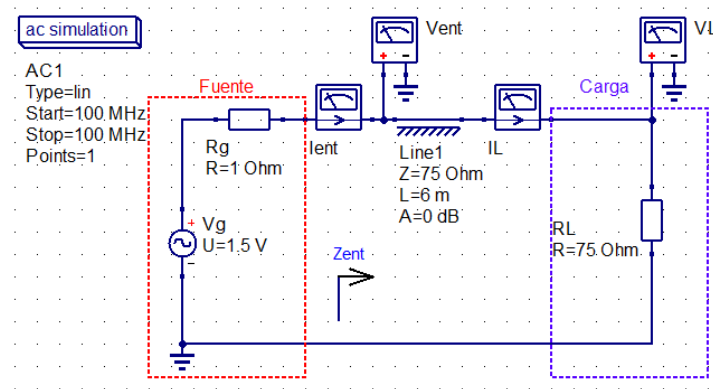
$$P_{prom(carga)} = (P_{prom(ent)}) = \frac{1}{2} \text{Re}[V(z)I^*(z)]$$

$$P_{prom(carga)} = \frac{1}{2} \text{Re}[(1.48 e^{-j 1.075 \pi z})(0.0197 e^{j 1.075 \pi z})]$$

$$P_{prom(carga)} = 0.0146 = 14.6 \text{ [mW]}$$

Simulación:

Se procede a diseñar el modelo del circuito, como se muestra en la Figura 14.



**Figura 14.** Diseño circuital del ejercicio.

Se tiene los resultados de la simulación, como se muestra a continuación:

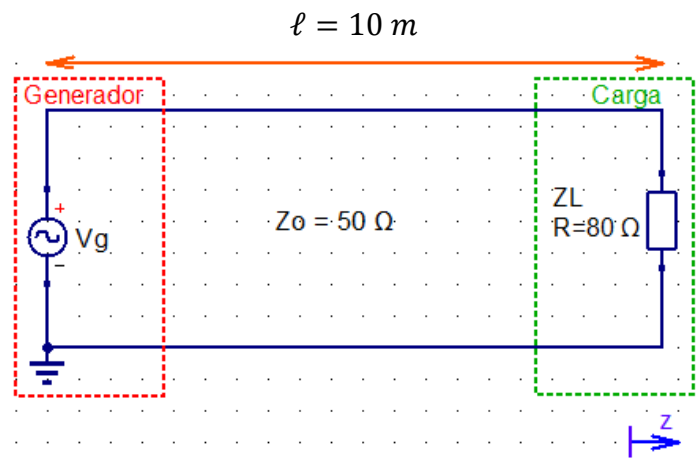
Valores de Simulación			
PL	Potencia de Carga		
0.0146			
Zent	Impedancia de Entrada		
75			
Vent.dv	Ient.i	Voltaje & Corriente	
1.48	0.0197		

**Ejemplo 05.**

Se tiene una línea de transmisión sin pérdidas, cuya constante dieléctrica relativa ( $\epsilon_r = 3$ ) operando a una frecuencia de 300 MHz. La longitud de la línea es de 10 m, con una impedancia característica  $Z_0 = 50 \Omega$ . Al final de la línea se conecta una carga con impedancia de  $80 \Omega$ . Determinar el coeficiente de reflexión para voltajes en la carga y la impedancia de entrada de la línea; también la impedancia que se vería a distancias  $\lambda/2$  y  $\lambda$ , medidas desde el generador hacia la carga.

Solución:

Se tiene el diseño del circuito, como se muestra en la Figura 15:



**Figura 15.** Diseño circuital del ejercicio.

El coeficiente de reflexión para voltajes se obtiene empleando la Ecuación (67).

$$\Gamma = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = 0.23 = 0.23 \angle 0^\circ$$

Luego se procede a determinar la constante de fase,  $\beta$ :

$$v_p = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{\omega}{\beta}$$

$$\beta = \frac{2\pi \times 3 \times 10^8 \sqrt{3}}{3 \times 10^8} = 10.88 \text{ [rad/m]}$$

Para el cálculo de la impedancia de entrada se utiliza la Ecuación (78-b), al tener la longitud de la línea como dato.

$$Z_{in} = Z_0 \frac{1 + \Gamma e^{-2\gamma\ell}}{1 - \Gamma e^{-2\gamma\ell}}$$

$$Z_{in} = 50 \frac{1 + 0.23e^{-j20\beta}}{1 - 0.23e^{-j20\beta}}$$

$$Z_{in} = 50 \frac{1 + 0.23e^{-j217.6}}{1 - 0.23e^{-j217.6}}$$

$$Z_{in} = 34.73 + j12.45 \quad \Omega = 36.9 \angle 19.7^\circ \quad [\Omega]$$

Para determinar la impedancia vista en:  $z = -\ell + \lambda/2$  y  $z = -\ell + \lambda$ , y conocer su posición en metros, se procede a obtener primero:

$$\lambda_g = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{1 \text{ m}}{\sqrt{3}} = 0.577 \text{ m}$$

Donde,  $\lambda_0$  es la longitud de onda en el espacio libre a la misma frecuencia de 300 MHz.

Para el análisis de impedancia de entrada de una línea terminada con una carga arbitraria, se considera una línea infinita de longitud  $\ell$  como se referencia en la Figura 16, donde se toma un punto de referencia en la carga;  $z = 0$ , por lo que el generador estará situado en  $z = -\ell$ . Este procedimiento es práctico para el análisis y no implica ninguna dificultad adicional, la coordenada  $z$  crece en el mismo sentido que antes; es decir de izquierda a derecha.

Por lo tanto, la impedancia  $Z$  vista hacia la derecha (en dirección hacia la carga) desde cualquier punto en la línea, está dada a partir de la siguiente expresión:

$$Z(z) = \frac{V(z)}{I(z)} = Z_0 \frac{Ae^{-\gamma z} + Be^{\gamma z}}{Ae^{-\gamma z} - Be^{\gamma z}}$$

Si  $z = -\ell$ , la impedancia de entrada  $Z_{ent}$  vista por el generador hacia la derecha será:

$$Z_{ent} = Z_0 \frac{Ae^{\gamma\ell} + Be^{-\gamma\ell}}{Ae^{\gamma\ell} - Be^{-\gamma\ell}}$$

Ahora; cuando  $z = 0$ , donde está la carga  $Z_L$  se obtiene:

$$Z_L = \frac{V(0)}{I(0)} = Z_0 \frac{A + B}{A - B} = Z_0 \frac{1 + (B/A)}{1 - (B/A)}$$

$$Z_L - \frac{B}{A}Z_L = Z_0 + \frac{B}{A}Z_0$$

Por lo tanto, se obtiene:

$$\Gamma = \frac{B}{A}$$

Entonces, se tiene en referencia al ejercicio:

$$Z(z) = Z_0 \frac{e^{-\gamma z} + \Gamma e^{\gamma z}}{e^{-\gamma z} - \Gamma e^{\gamma z}} = Z_0 \frac{1 + \Gamma e^{2\gamma z}}{1 - \Gamma e^{2\gamma z}}$$

Sustituyendo los valores, se tiene:

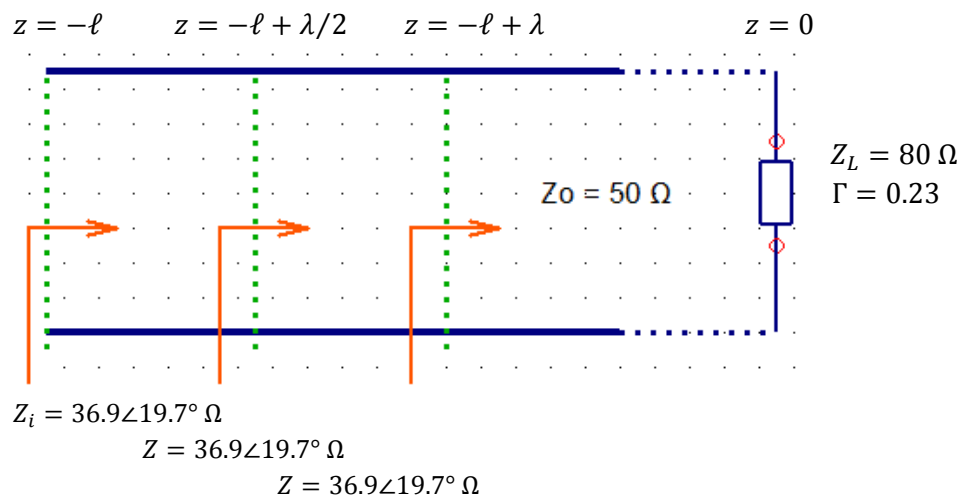
$$Z|_{z=-\ell+\lambda/2} = 50 \frac{1 + 0.23e^{j2\beta(-10+0.2885)}}{1 - 0.23e^{j2\beta(-10+0.2885)}}$$

$$Z|_{z=-\ell+\lambda/2} = 34.73 + j 12.45 \Omega = 36.9 \angle 19.7^\circ [\Omega]$$

$$Z|_{z=-\ell+\lambda} = 50 \frac{1 + 0.23e^{j2\beta(-10+0.577)}}{1 - 0.23e^{j2\beta(-10+0.577)}}$$

$$Z|_{z=-\ell+\lambda} = 34.73 + j 12.45 \Omega = 36.9 \angle 19.7^\circ [\Omega]$$

Realizando un modelo gráfico se tiene el siguiente comportamiento:

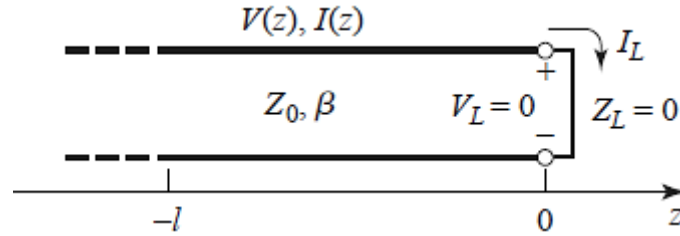


**Figura 16.** Respuesta de impedancia de entrada a diferentes longitudes de la línea de transmisión [10].

El hecho de que las tres impedancias valgan lo mismo no es ninguna sorpresa, debido al carácter periódico de las funciones trigonométricas involucradas en las fórmulas empleadas. Sin embargo, se puede ver que el valor de  $Z$  parece repetirse cada  $\lambda/2$ , en lugar de cada vez que se avance  $\lambda$ . Esto se debe a que en una línea desadaptada la onda total que se forma tiene un periodo igual a  $\lambda/2$ .

### 2.5.1 Línea Terminada en Corto Circuito sin Pérdidas

Con frecuencia se presentan varios casos especiales de líneas de transmisión terminadas en corto circuito sin pérdidas, por lo que es apropiado considerar aquí las propiedades de tales casos. Se considera primero el circuito de línea de transmisión que se muestra en la Figura 17.



**Figura 17.** Línea de transmisión terminada en corto circuito [1].

Donde la línea de transmisión está terminada en cortocircuito;  $Z_L = 0 + j0 \Omega$ . De la Ecuación (67) se ve que el coeficiente de reflexión para una carga en corto circuito es  $\Gamma = -1$ , entonces en relación a la Ecuación (76), las ondas estacionarias son infinitas. Por lo tanto, las Ecuaciones (68) y (69) de voltaje y corriente en la línea son:

$$V(z) = V_0^+ (e^{-j\beta z} - e^{j\beta z}) = -2jV_0^+ \sin \beta z \quad (79)$$

$$I(z) = \frac{V_0^+}{Z_0} (e^{-j\beta z} + e^{j\beta z}) = \frac{2V_0^+}{Z_0} \cos \beta z \quad (80)$$

El cual muestra que  $V = 0$  en la carga (como se esperaba para un cortocircuito), mientras que la corriente tiene un valor máximo. De acuerdo a la Ecuación (78) se tiene la relación de:  $V(-\ell)/I(-\ell)$  el cual determina la impedancia de entrada sustituyendo  $z = -\ell$ , como:

$$Z_{in(C.C.)} = \frac{V(-\ell)}{I(-\ell)} = Z_0 \frac{V_0^+ (e^{j\beta \ell} - e^{-j\beta \ell})}{V_0^+ (e^{j\beta \ell} + e^{-j\beta \ell})}$$

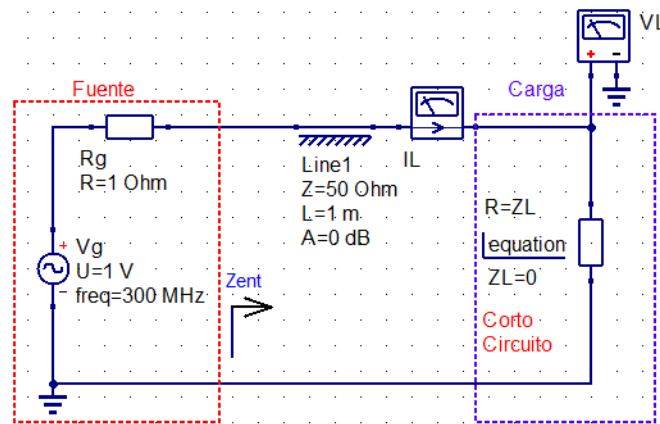
$$Z_{in(C.C.)} = Z_0 \frac{(1 - e^{-2\gamma\ell})}{(1 + e^{-2\gamma\ell})}$$

$$Z_{in(C.C.)} = jZ_0 \tan \beta\ell = Z_0 \tanh \gamma\ell \quad (81)$$

Como se puede ver dicha ecuación es puramente imaginario para cualquier extensión de  $\ell$ , y para tomar todos los valores entre  $+j\infty$  y  $-j\infty$ . Por ejemplo, cuando  $\ell = 0$  tenemos  $Z_{in} = 0$ , pero para  $\ell = \lambda/4$  tenemos  $Z_{in} = \infty$  (circuito abierto). La Ecuación (81) también muestra que la impedancia es periódica en  $\ell$ , repitiéndose para múltiplos de  $\lambda/2$ .

**Nota:** La impedancia de entrada  $Z_{in}$ , también se puede determinar de forma aproximada con el fin de medir indirectamente los parámetros  $R$  y  $L$  de la línea de transmisión. Si la línea es lo suficientemente corta, de tal modo que  $|\gamma\ell| \ll 1$ , los exponentes de la Ecuación (81), se pueden expandir para simplificar a dicha ecuación en forma aproximada como;  $Z_{in(C.C.)} = \ell(R + j\omega L)$ .

**Simulación:** Se procede a realizar el diseño del circuito de línea de transmisión terminada en corto circuito sin pérdidas, como se muestra en la Figura 18.



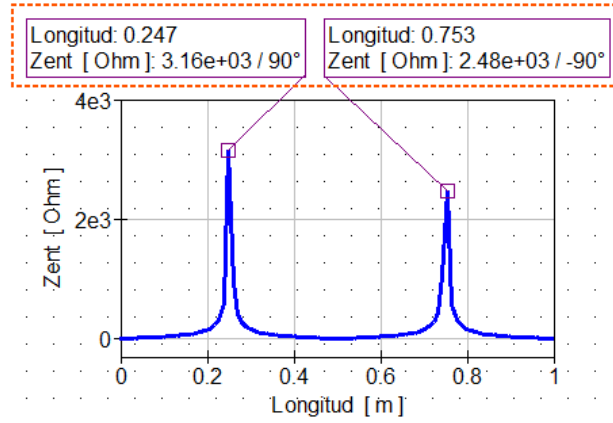
**Figura 18.** Diseño circuital.

Donde para fines de comprobar la carga en corto circuito, se procede a simular el coeficiente de reflexión (ROE) en la carga y su respectivo valor de impedancia. Como se muestra a continuación.

ROE	ZL
-1	0

Como se sabe el coeficiente de reflexión en corto circuito es  $\Gamma = -1$ . A continuación se analizará el comportamiento de la impedancia de entrada, si se definió que a longitudes físicas  $\ell = \lambda/4$  tenemos  $Z_{in} = \infty$  (circuito

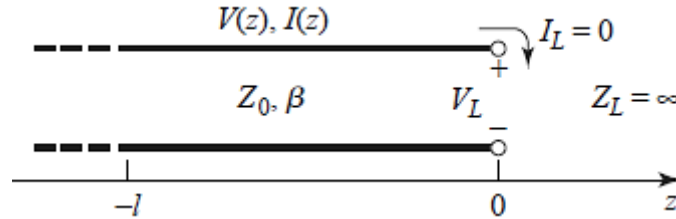
abierto), para este fin se estableció una frecuencia de operación de 300 MHz para la fuente de alimentación y una longitud física de la línea de transmisión de 1 metro. Así a longitudes físicas de 0.25m, 0.75m; se tendrá un comportamiento de circuito abierto al registrar valores de impedancia de entrada bastante grandes, como se muestra en la Figura 19.



**Figura 19.** Comportamiento de impedancia de entrada.

### 2.5.2 Línea Terminada en Circuito Abierto sin Pérdidas

A continuación, se considera una línea de transmisión terminada en circuito abierto sin pérdidas, como se muestra en la Figura 20.



**Figura 20.** Línea de transmisión terminada en circuito abierto [1].

Donde la impedancia de la carga arbitraria  $Z_L = \infty$ . Dividiendo el numerador y denominador de la Ecuación (67) por  $Z_L$ , y permitiendo  $Z_L \rightarrow \infty$  muestra que el coeficiente de reflexión para este caso;  $\Gamma = 1$ , y la relación de ondas estacionarias es nuevamente infinita. De las Ecuaciones (68) y (69) el voltaje y la corriente en la línea son:

$$V(z) = V_0^+ (e^{-j\beta z} + e^{j\beta z}) = 2V_0^+ \cos \beta z \quad (82)$$

$$I(z) = \frac{V_0^+}{Z_0} (e^{-j\beta z} - e^{j\beta z}) = \frac{-2jV_0^+}{Z_0} \sin \beta z \quad (83)$$



lo que muestra que ahora la corriente;  $I = 0$  en la carga, como se esperaba para un circuito abierto, mientras que el voltaje es un máximo. Por lo tanto, la impedancia de entrada vista en  $z = -\ell$  será:

$$Z_{in(C.A.)} = \frac{V(-\ell)}{I(-\ell)} = Z_0 \frac{e^{\gamma\ell} + e^{-\gamma\ell}}{e^{\gamma\ell} - e^{-\gamma\ell}}$$

$$Z_{in(C.A.)} = Z_0 \frac{(1 + e^{-2\gamma\ell})}{(1 - e^{-2\gamma\ell})}$$

$$Z_{in(C.A.)} = -jZ_0 \cot \beta\ell = Z_0 \coth \gamma\ell \quad (84)$$

El cual también es puramente imaginario para cualquier longitud  $\ell$  [10]. De manera análoga en referencia al análisis realizado en corto circuito, asumiendo una línea corta  $|\gamma\ell| \ll 1$ , la Ecuación hiperbólica (84) se puede reducir a:  $Z_{in(C.A.)} \approx (Z_0/\gamma\ell)$ . Y en referencia a las ecuaciones;  $\gamma = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}$  y  $Z_0 = \sqrt{(R + j\omega L)/(G + j\omega C)}$ , se realiza una división de  $\gamma/Z_0 = Z_0/\gamma\ell$ , en el cual se tiene una ecuación aproximada de la impedancia de entrada medida a cierta frecuencia angular  $\omega$ , para una línea corta  $\ell$  terminada en circuito abierto con componentes de  $G$  y  $C$  como:  $Z_{in(C.A.)} = 1/\ell(G + j\omega C)$ .

---

**Ejemplo 06.**


---

Se desea estimar los valores de la impedancia característica, y la constante de propagación de una línea de transmisión de 1 km de longitud a una frecuencia de 1 kHz. Por lo tanto, se realizaron mediciones de la impedancia de entrada con el circuito terminado en circuito abierto y en circuito cerrado. Las lecturas obtenidas fueron:  $-j100 \Omega$  y  $j50 \Omega$ . Calcular  $Z_0$  y  $\gamma$ .

Solución:

Se procede a determinar la longitud de onda:

$$\lambda_0 = \frac{3 \times 10^8}{10^3} = 300 \text{ [km]}$$

Si se considera una línea sin pérdidas;  $\alpha = 0$ , entonces  $\beta_0 = 2\pi/\lambda_0$ , y:

$$|j\beta_0\ell| = \frac{2\pi}{300 \text{ km}} \times 1 \text{ km} = 0.02 \ll 1$$

Esta condición es diferente en el cable, puesto que el dieléctrico no es aire. Sin embargo, aún si  $\beta$  se duplicase la condición  $|j\beta_0\ell|$  también se cumpliría en la línea de transmisión; entonces se puede emplear las aproximaciones desarrolladas.

$$Z_{in(C.A.)} = \frac{1}{\ell(G + j\omega C)} = -j 100$$

$$Z_{in(C.C.)} = \ell(R + j\omega L) = j 50$$

Concluyendo que:  $R \approx 0$  y  $G \approx 0$ , se tiene:

$$j\ell\omega L = j 50 \rightarrow L = 7.96 \text{ } [\mu\text{H/m}]$$

$$\frac{1}{j\ell\omega C} = -j 100 \rightarrow C = 1.59 \text{ } [\text{nF/m}]$$

Por lo tanto, se tiene la constante de propagación:

$$\gamma = j\beta = \sqrt{(j\omega L)(j\omega C)} = j\omega\sqrt{LC}$$

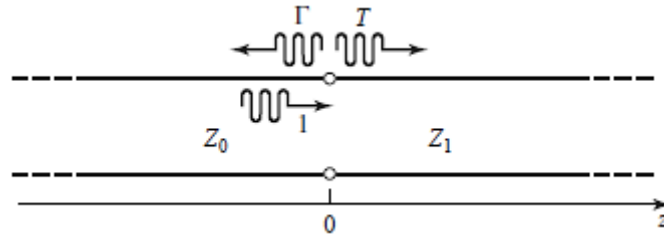
$$\gamma = j 2\pi \times 10^3 \sqrt{7.96 \times 10^{-6} \times 1.59 \times 10^{-9}} = j 7 \times 10^{-4} \text{ } [\text{rad/m}]$$

Finalmente, se determina la impedancia característica de la línea de transmisión:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{j\omega L}{j\omega C}} = 70.75 \text{ } [\Omega]$$

### 2.5.3 Líneas de Transmisión con Diferentes Impedancias

A continuación, se considera una línea de transmisión con impedancia característica  $Z_0$  que alimenta otra línea de transmisión con diferente impedancia característica  $Z_1$ , como se muestra en la Figura 21.



**Figura 21.** Reflexión y transmisión en la unión de dos líneas de transmisión con diferentes impedancias [1].

Asumiendo que la línea de carga es infinitamente larga, o si está terminado en su propia impedancia característica de modo que no exista reflexión desde su extremo lejano, entonces la impedancia de entrada vista por la línea de alimentación es  $Z_1$ , de modo que el coeficiente de reflexión  $\Gamma$  es:

$$\Gamma = \frac{Z_1 - Z_0}{Z_1 + Z_0} \quad (85)$$

Por lo tanto, no se refleja toda la onda incidente, algunos se transmiten a la segunda línea con una amplitud de voltaje dada por un coeficiente de transmisión. De la Ecuación (68) el voltaje para  $z < 0$  es:

$$V(z) = V_0^+(e^{-j\beta z} + \Gamma e^{j\beta z}), \quad z < 0 \quad (86)$$

Donde:  $V_0^+$ , es la amplitud de la onda de voltaje incidente en la línea de alimentación. El voltaje de la onda para  $z > 0$  en ausencia de reflexiones es solo saliente y puede escribirse como:

$$V(z) = V_0^+ T e^{-j\beta z} \quad \text{para: } z > 0 \quad (87)$$

Al evaluar estos voltajes en  $z = 0$ , se obtiene el *coeficiente de transmisión*  $T$ , como:

$$T = 1 + \Gamma = 1 + \frac{Z_1 - Z_0}{Z_1 + Z_0} = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_0} \quad (88)$$

En donde, el coeficiente de transmisión entre los dos puntos del circuito es a menudo expresado en dB; como *pérdida de inserción*  $IL$  [11].

$$IL = -20 \log|T| \quad (\text{dB}) \quad (89)$$

## 2.6 Líneas de Transmisión con Pérdidas

En la práctica, las líneas de transmisión tienen pérdidas debido a la conductividad finita y/o pérdida por el material dieléctrico, pero estas pérdidas suelen ser pequeñas. En muchos problemas prácticos se puede despreciar la pérdida ( $\alpha = 0$ ;  $\omega L \gg R$  &  $\omega C \gg G$ ), pero en algunas ocasiones el efecto de la pérdida puede ser muy importante; como cuando se trata de la atenuación de una línea de transmisión, ruido introducido por una línea con pérdidas, o el factor de calidad  $Q$  de un resonador, etc. [11]. En esta sección se estudiará los efectos de la pérdida en el comportamiento de la línea de transmisión y mostraremos cómo se puede calcular la constante de atenuación.

### 2.6.1 Líneas de Transmisión con Pérdidas Pequeñas

En la mayoría de las prácticas de líneas de transmisión de RF, la pérdida es pequeña, si no fuera este el caso, la línea tendría poco valor práctico. Cuando la pérdida es pequeña algunas aproximaciones se pueden hacer para simplificar las expresiones, para los parámetros generales de la línea de transmisión de:  $\gamma = \alpha + j\beta$  y  $Z_0$ .

La expresión general de la constante de propagación compleja está determinada por la Ecuación (45), y conservando la consideración de  $\omega L \gg R$  &  $\omega C \gg G$ , se tiene:

$$\gamma = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} \quad (90)$$

$$\gamma = \left[ \sqrt{j\omega L} \sqrt{1 + \frac{R}{j\omega L}} \right] \left[ \sqrt{j\omega C} \sqrt{1 + \frac{G}{j\omega C}} \right]$$

$$\gamma = j\omega\sqrt{LC} \sqrt{1 + \frac{R}{j\omega L}} \sqrt{1 + \frac{G}{j\omega C}}$$

$$\gamma \simeq j\omega\sqrt{LC} \left[ 1 + \frac{R}{j2\omega L} \right] \left[ 1 + \frac{G}{j2\omega C} \right]$$

El cual puede ser expresado como:

$$\gamma \simeq j\omega\sqrt{LC} \left[ 1 - \frac{j}{2} \left( \frac{R}{\omega L} + \frac{G}{\omega C} \right) \right] \quad (91)$$

Donde se puede determinar:

$$\alpha \simeq \frac{1}{2} \left( R\sqrt{C/L} + G\sqrt{L/C} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{R}{Z_0} + GZ_0 \right) \quad (92)$$

$$\beta \simeq \omega\sqrt{LC} \quad (93)$$

Sí:  $Z_0 = \sqrt{L/C}$ , es la impedancia característica de la línea en ausencia de pérdida. De la Ecuación (93) se observa que la constante de propagación  $\beta$  es idéntica a la del caso sin pérdidas como se expresa en las Ecuaciones (56) y (57). Por el mismo orden de aproximación, la impedancia característica  $Z_0$  puede ser aproximado como una cantidad real como:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} \simeq \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (94)$$

Por lo tanto, las Ecuaciones (92-94) se conocen como aproximaciones de alta frecuencia y baja pérdida para líneas de transmisión, y son importantes porque muestran que la constante de propagación y la impedancia característica para una línea de baja pérdida se puede aproximar mucho considerando la línea sin pérdidas.

El efecto de tener pérdida en una línea de transmisión;  $\alpha \neq 0$  sobre el coeficiente de reflexión de voltaje:  $\Gamma_v(z) = (V_0^- e^{\gamma z} / V_0^+ e^{-\gamma z}) = (V_0^- / V_0^+) e^{2\gamma z}$ , si  $(z \leq 0)$ . Se afirma que  $z$  disminuye.

El coeficiente de reflexión en la carga; donde  $z = 0$ , será:

$$\Gamma_{carga} = \Gamma_v(0) = \frac{V_0^-}{V_0^+} = |\Gamma_{carga}| e^{j\theta}$$

Sin embargo, para otro valor de  $z$  donde;  $\gamma = \alpha + j\beta$ , se tiene:

$$\Gamma_v(z) = \frac{V_0^-}{V_0^+} e^{2z(\alpha + j\beta)} = \frac{V_0^-}{V_0^+} e^{2\alpha z} e^{j2\beta z} = |\Gamma_{carga}| e^{2\alpha z} e^{j(2\beta z + \theta)}$$

Se concluye que el coeficiente de reflexión sigue valiendo lo mismo en la carga cuando;  $\alpha = 0$ , en posición:  $z = 0$ . Sin embargo, para otros puntos cuando  $z \neq 0$ , la magnitud de dicho coeficiente va disminuyendo conforme se aleja de la carga hacia el generador; su fase sigue variando de la misma manera que para una línea sin pérdidas, pues el coeficiente  $\beta$  está dado por las ecuaciones definidas. Por lo tanto, se deduce que su lugar geométrico en el plano complejo ya no es un círculo, sino una espiral.

El valor de ROE o VSWR también cambia en diferentes puntos a lo largo de la línea. Mientras el punto considerado esté más lejos de la carga; el voltaje incidente se incrementará más grande y el reflejado se reducirá más pequeño (al atenuarse en dirección hacia el generador) por lo tanto, el ROE también decrecerá.

$$VSWR = \frac{1 + |\Gamma_v|}{1 - |\Gamma_v|} = \frac{1 + |\Gamma_{carga}| e^{2\alpha z}}{1 - |\Gamma_{carga}| e^{2\alpha z}} \quad ; (z \leq 0)$$

Luego, un aspecto primordial a tener en cuenta es qué porcentaje de la potencia inicial es entregada a la carga. Mientras mayor sea este valor, la línea será más eficiente. Por lo tanto, la eficiencia;  $\eta$ , de una línea se define como:

$$\eta = \frac{\text{Potencia promedio entregada a la carga}}{\text{Potencia promedio de entrada al inicio de la línea}}$$

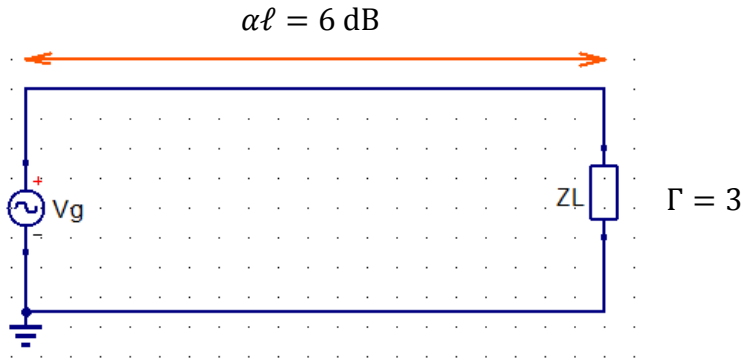
$$\eta = \frac{\frac{1}{2} \operatorname{Re}[V_L I_L^*]}{\frac{1}{2} \operatorname{Re}[V_{in} I_{in}^*]} = \frac{\operatorname{Re}[V_L I_L^*]}{\operatorname{Re}[V_{in} I_{in}^*]}$$

**Ejemplo 07.**

Una línea de transmisión presenta una atenuación de 6 dB desde el generador hasta la carga. Muy cerca de este último punto el ROE es igual 3. Determinar el ROE al inicio de la línea.

Solución:

Se tiene el diseño del circuito, como se muestra en la Figura 22.



**Figura 22.** Diseño circuital del ejercicio.

Se utiliza la siguiente expresión:

$$ROE|_{Inicio\_gen} = \frac{1 + |\Gamma_L| e^{-2\alpha\ell}}{1 - |\Gamma_L| e^{-2\alpha\ell}} = \frac{1 + \left(\frac{ROE - 1}{ROE + 1}\right) e^{-2\alpha\ell}}{1 - \left(\frac{ROE - 1}{ROE + 1}\right) e^{-2\alpha\ell}}$$

La línea tiene una atenuación;  $\alpha\ell = 6 \text{ dB}$ . Por lo tanto, se tiene la siguiente expresión lineal:

$$\alpha\ell [\text{dB}] = (8.686)(\alpha\ell \text{ en nepers}) = 6 \text{ dB} \rightarrow \alpha\ell = 0.691 \text{ Np}$$

Finalmente, sustituyendo dicho resultado en:

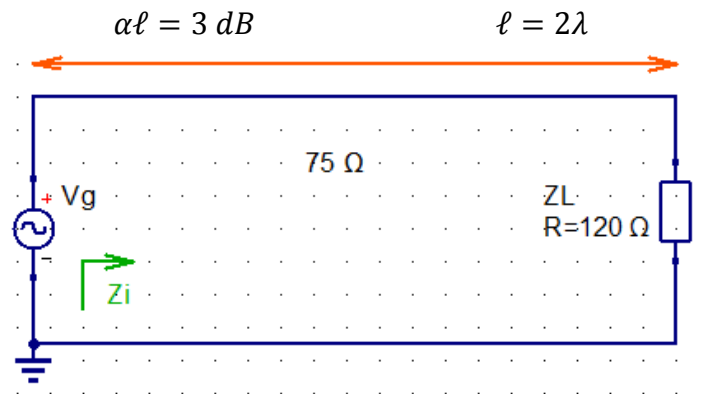
$$ROE|_{Inicio\_gen} = 1.28$$

**Ejemplo 08.**

Una línea de transmisión presenta pérdidas totales de 3 dB entre el generador y la carga. La línea mide  $2\lambda$  y su impedancia característica es de  $75 \Omega$ . Si al final se conecta una carga de  $120 \Omega$ . Calcular la pérdida de retorno en la carga y la impedancia de entrada de la línea.

Solución:

Se tiene el diseño del circuito, como se muestra en la Figura 23.



**Figura 23.** Diseño circuital del ejercicio.

La pérdida de retorno en la carga está definida como:

$$\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{120 - 75}{195} = 0.23$$

$$RL = -20 \log |\Gamma_L| = 12.76 \text{ dB}$$

Teniendo la constante de propagación como:

$$\gamma \ell = \alpha \ell + j\beta \ell$$

$$\alpha \ell = 3 \text{ dB} = 0.345 \text{ Np}$$

$$\beta \ell = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)(2\lambda) = 4\pi$$

En referencia a la impedancia de entrada de la línea se puede utilizar la siguiente expresión:

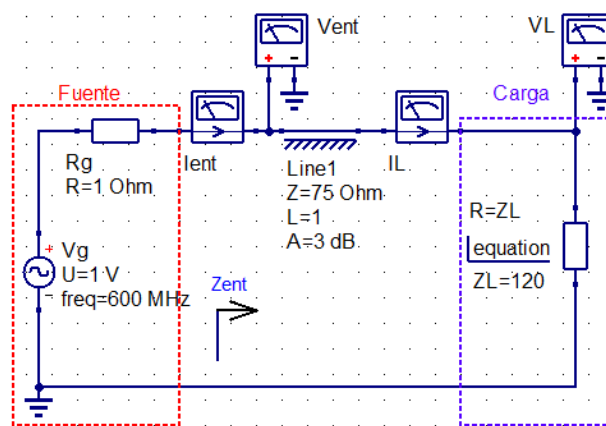
$$Z_{in} = Z_0 \left( \frac{1 + \Gamma_L e^{-2\gamma \ell}}{1 - \Gamma_L e^{-2\gamma \ell}} \right)$$

$$Z_{in} = 75 \left[ \frac{1 + (0.23)e^{-2(0.345+j4\pi)}}{1 - (0.23)e^{-2(0.345+j4\pi)}} \right]$$

$$Z_{in} = 94.5 \quad \Omega$$

Si la línea se hubiese considerado sin pérdidas, la impedancia de entrada hubiese sido la misma que la de la carga, es decir  $120 \Omega$ , siendo la longitud de la línea múltiplos entero de  $\lambda/2$ .

Simulación: Se procede con el diseño del circuito, como se muestra en la Figura 24.



**Figura 24.** Diseño circuital del ejercicio.

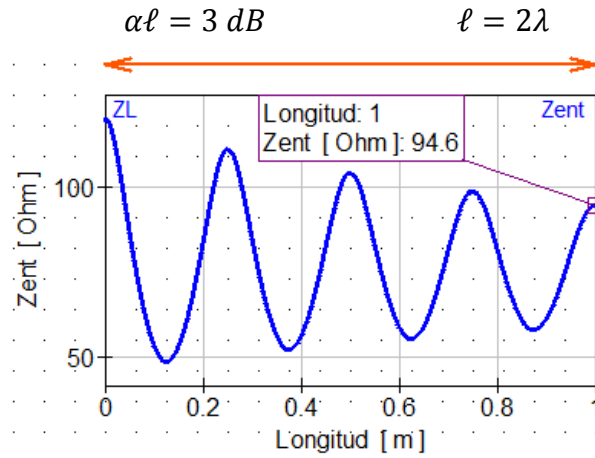
Se tiene los resultados de la simulación, como se muestra a continuación:

Zent	ZL
94.6	120
ROE	
0.231	

A continuación, se analizará el comportamiento de atenuación de la impedancia de entrada, si se estableció una longitud física  $\ell = 2\lambda$  tenemos  $Z_{ent} = 94.6 \Omega$  en simulación y  $Z_{ent} = 94.5 \Omega$  en análisis, para este fin se estableció una frecuencia de operación de 600 MHz para la fuente de alimentación; a fin de obtener una longitud física de la línea de transmisión de 1 metro (caso ideal, cuando  $\epsilon_r = 1$ ).



La Figura 25 muestra el comportamiento de impedancia de la línea de transmisión con respecto a su longitud.



**Figura 25.** Comportamiento de impedancia de una línea de transmisión con atenuación.

### 2.6.2 Líneas de Transmisión sin Distorsiones

Como se puede ver en la Ecuación (90) para la constante de propagación de una línea con pérdida, el término de fase  $\beta$  es generalmente una función complicada de la frecuencia angular  $\omega$  cuando se tiene pérdida. En particular, observamos que  $\beta$  generalmente no es una función lineal de la frecuencia, como se expresa en la Ecuación (93), a menos que la línea no tenga pérdidas. Si  $\beta$  no es una función lineal de frecuencia (de la forma  $\beta = a\omega$ ), entonces la velocidad de fase  $v_p = \omega/\beta$  variaría con respecto a la frecuencia. La implicación de esto es que los diversos componentes de frecuencia de una señal de banda ancha, viajarán con diferentes velocidades de fase y así llegar al extremo del receptor de la línea de transmisión a tiempos diferentes [11].

Esto conducirá a la dispersión, una distorsión de la señal y generalmente es un efecto indeseable. Concedido como hemos argumentado la desviación de  $\beta$  de una función lineal puede ser bastante pequeño, pero el efecto puede ser significativo si la línea es muy larga. Este efecto conduce al concepto de velocidad de grupo. Sin embargo, existe un caso especial de una línea con pérdidas que tiene un factor de fase lineal como función de la frecuencia. Tal línea se llama línea sin distorsión y se caracteriza por parámetros de línea que satisface la relación:

$$\frac{R}{L} = \frac{G}{C} \quad (95)$$

De la Ecuación (90) la constante de propagación compleja exacta, es expresado bajo las condiciones de la Ecuación (95), reduciendo el resultado a:

$$\gamma = j\omega\sqrt{LC} \sqrt{1 - 2j\frac{R}{\omega L} - \frac{R^2}{\omega^2 L^2}}$$

$$\gamma = j\omega\sqrt{LC} \left(1 - j\frac{R}{\omega L}\right)$$

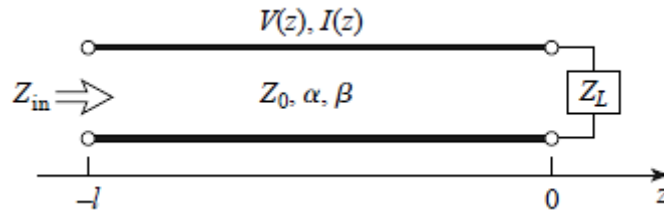
$$\gamma = R\sqrt{C/L} + j\omega\sqrt{LC} = \alpha + j\beta \quad (96)$$

lo que muestra que;  $\beta = \omega\sqrt{LC}$  es ahora una función lineal de frecuencia. La Ecuación (96) también muestra que la constante de atenuación;  $\alpha = R\sqrt{C/L}$  no depende de la frecuencia, por lo que todos los componentes de frecuencia de una señal, se atenuarán en la misma cantidad (en realidad, R suele ser una función débil de la frecuencia). Por lo tanto, la línea sin distorsión no está libre de pérdidas, pero es capaz de pasar una envolvente de pulso o modulación sin distorsión.

Para obtener una línea de transmisión con parámetros que satisfacen la Ecuación (95), a menudo requiere que L se incremente agregando bobinas de carga en serie espaciadas periódicamente a lo largo de la línea.

### 2.6.3 Líneas de Transmisión Terminada con Pérdidas

La Figura 26 muestra una longitud de una línea de transmisión con pérdidas terminada en una impedancia de carga  $Z_L$ .



**Figura 26.** Línea de transmisión con pérdidas terminada en una impedancia  $Z_L$  [1].

Por lo tanto,  $\gamma = \alpha + j\beta$  es complejo, pero se asume que la pérdida es pequeña por lo que  $Z_0$  es aproximadamente real, como se expresa en la Ecuación (94).

De las Ecuaciones (68) y (69), se dan expresiones para el voltaje y corriente de una onda en una línea sin pérdidas. Las expresiones análogas para el caso con pérdida son:

$$V(z) = V_0^+(e^{-\gamma z} + \Gamma e^{\gamma z}) \quad (97)$$

$$I(z) = \frac{V_0^+}{Z_0} (e^{-\gamma z} - \Gamma e^{\gamma z}) \quad (98)$$

Donde;  $\Gamma$ , es el coeficiente de reflexión de la carga como se indica en la Ecuación (67), y  $V_0^+$  es la amplitud del voltaje incidente referenciada en  $Z = 0$ . De la Ecuación (77) el coeficiente de reflexión a una distancia  $\ell$  de la carga es:

$$\Gamma(\ell) = \Gamma e^{-2j\beta\ell} e^{-2\alpha\ell} = \Gamma e^{-2\gamma\ell} \quad (99)$$

La impedancia de entrada  $Z_{in}$  a una distancia  $\ell$  de la carga es:

$$Z_{in} = \frac{V(-\ell)}{I(-\ell)} = Z_0 \frac{Z_L + Z_0 \tanh \gamma\ell}{Z_0 + Z_L \tanh \gamma\ell} \quad (100-a)$$

Se puede calcular la potencia entregada a la entrada de la línea terminada en  $z = -\ell$  como:

$$P_{in} = \frac{1}{2} \text{Re}\{V(-\ell)I^*(-\ell)\} = \frac{|V_0^+|^2}{2Z_0} (e^{2\alpha\ell} - |\Gamma|^2 e^{-2\alpha\ell})$$

$$P_{in} = \frac{|V_0^+|^2}{2Z_0} (1 - |\Gamma(\ell)|^2) e^{2\alpha\ell} \quad (100-b)$$

Donde, las Ecuaciones (97) y (98) se utilizan para obtener  $V(-\ell)$  y  $I(-\ell)$ . Por lo tanto, la potencia realmente entregada a la carga es:

$$P_L = \frac{1}{2} \text{Re}\{V(0)I^*(0)\} = \frac{|V_0^+|^2}{2Z_0} (1 - |\Gamma|^2) \quad (101)$$

La diferencia de estas potencias corresponde a la potencia perdida en la línea:

$$P_{loss} = P_{in} - P_L = \frac{|V_0^+|^2}{2Z_0} [(e^{2\alpha\ell} - 1) + |\Gamma|^2 (1 - e^{-2\alpha\ell})] \quad (102)$$

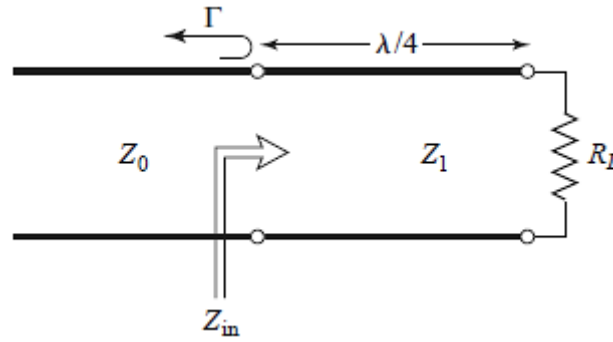
El primer término de la Ecuación (102) representa la pérdida de potencia de la onda incidente, mientras que el segundo término representa la pérdida de potencia de la onda reflejada; teniendo en cuenta que ambos términos aumentan a medida que  $\alpha$  aumenta.

## 2.7 Transformador de Cuarto de Onda

El transformador de cuarto de onda es un circuito útil y práctico, para igualar impedancias y también proporciona un circuito de línea de transmisión simple que ilustra mejor las propiedades de ondas estacionarias en una línea desadaptada [12]. El propósito principal

es la aplicación de la teoría de líneas de transmisión desarrollada previamente a una transmisión básica de circuito de línea. Primero abordaremos el problema desde el punto de vista de la impedancia y, luego mostraremos cómo este resultado también se puede interpretar en términos de un conjunto infinito de múltiples reflexiones sobre una sección de adaptación.

La Figura 27 muestra un circuito que emplea un transformador de cuarto de onda.



**Figura 27.** Circuito transformador de cuarto de onda [1].

Donde, la resistencia de carga  $R_L$  y la impedancia característica de la línea de alimentación  $Z_0$ ; son tanto reales como se supone que son conocidas. Estas dos componentes están conectadas con una línea de transmisión sin pérdidas de impedancia característica  $Z_1$  con una longitud de onda  $\lambda/4$ . Se desea adaptar la carga con la línea  $Z_0$  usando la sección  $\lambda/4$  de la línea y así tener  $\Gamma = 0$  mirando en la sección de adaptación  $\lambda/4$ .

De la Ecuación (78) la impedancia de entrada  $Z_{in}$  se puede encontrar como:

$$Z_{in} = Z_1 \frac{Z_L + jZ_1 \tan \beta \ell}{Z_1 + jZ_L \tan \beta \ell} \quad (103)$$

Evalutando la Ecuación (103) para:  $\beta \ell = (2\pi/\lambda)(\lambda/4) = \pi/2$ , entonces la función tangente tiende al infinito cuando su argumento es  $\pi/2 = 90^\circ$ . Luego se puede dividir el numerador y el denominador por:  $\tan \beta \ell$  y estableciendo el límite de  $\beta \ell \rightarrow \pi/2$  para obtener:

$$Z_{in} = \frac{Z_1^2}{Z_L} \quad (104)$$

Para obtener reflexión nula  $\Gamma = 0$ , debemos tener  $Z_{in} = Z_0$ , el cual determina la impedancia característica de  $Z_1$  como:

$$Z_1 = \sqrt{Z_0 Z_L} \quad (105)$$

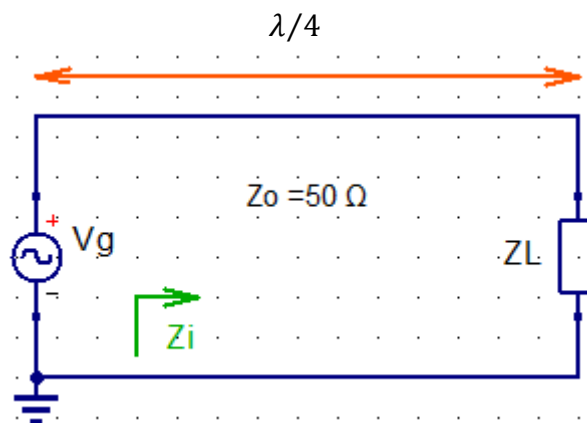
Donde la impedancia  $Z_1$ , es la media geométrica de la impedancia de carga y la impedancia de la fuente. Entonces no habrá ondas estacionarias en la línea de alimentación ( $SWR = 1$ ), aunque habrá ondas estacionarias en la sección de adaptación  $\lambda/4$ . Además, la condición anterior se aplica solo cuando la longitud de la sección de adaptación es  $\lambda/4$  o longitudes con múltiplos impares de  $\lambda/4$ , de modo que una adaptación perfecta se puede lograr en una frecuencia de diseño  $f_0$ , pero se producirá una desadaptación de impedancia en otras frecuencias.

### Ejemplo 09.

Se tiene una línea de transmisión sin pérdidas con impedancia característica  $Z_0 = 50 \Omega$ , el cual está terminada con una carga cuya impedancia vale  $Z_L$ . Si la línea mide  $\lambda/4$ , determinar la impedancia de entrada para:  $Z_L = 80 \Omega$ ,  $Z_L = 50 + j20 \Omega$  y  $Z_L = -j20 \Omega$ .

Solución:

Se tiene la representación del circuito, como se muestra en la Figura 28.



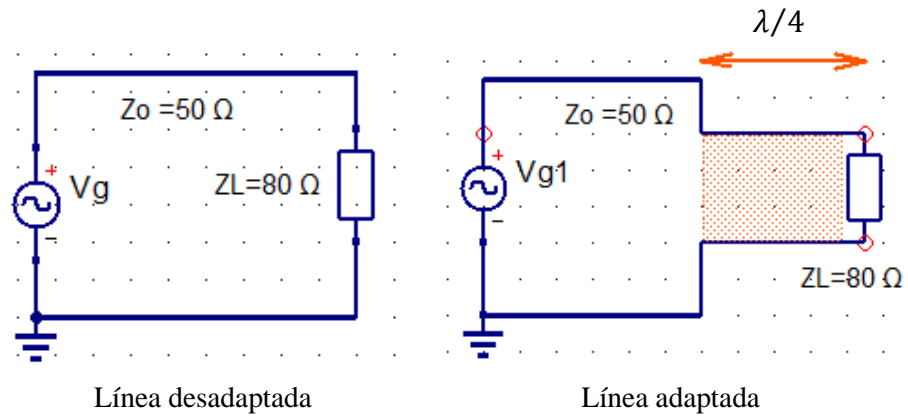
**Figura 28.** Diseño circuital del ejercicio.

Para:  $Z_L = 80 \Omega$

$$Z_{in} = \frac{Z_0^2}{Z_L} = \frac{2500}{80} = 31.25 \Omega$$

Si se realizará un análisis gráfico del ejercicio usando la carta de Smith, el desplazamiento desde la carga hasta el generador equivaldría a girar medio círculo de la carta; es decir  $\lambda/4$ .

La Figura 29, muestra el diseño del transformador de cuarto de onda.



**Figura 29.** Aplicación del transformador cuarto de onda en una línea de transmisión.

Para:  $Z_L = 50 + j20 \Omega$

$$Z_{in} = \frac{Z_1^2}{Z_L} = \frac{2500}{50 + j20} = 43.1 - j17.24 \text{ } [\Omega]$$

Para:  $Z_L = -j20 \Omega$ .

$$Z_{in} = \frac{Z_1^2}{Z_L} = \frac{2500}{-j20} = j125 \text{ } [\Omega]$$

### Ejemplo 10.

Considere una resistencia de carga  $R_L = 100 \Omega$  para ser adaptada con una línea de  $50 \Omega$ , utilizando un transformador de cuarto de onda. Determinar la impedancia característica de la sección correspondiente y graficar la magnitud del coeficiente de reflexión frente a la frecuencia normalizada  $f/f_0$ , donde  $f_0$  es la frecuencia a la que la línea tiene una longitud de  $\lambda/4$  [1].

Solución:

De la Ecuación (105) se determina la impedancia característica necesaria del transformador como:

$$Z_1 = \sqrt{(50)(100)} = 70.71 \Omega$$

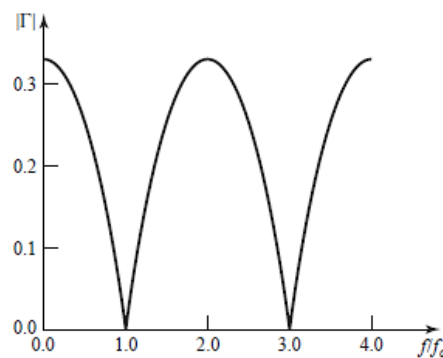
Donde, la magnitud del coeficiente de reflexión esta expresado por:

$$|\Gamma| = \left| \frac{Z_{in} - Z_0}{Z_{in} + Z_0} \right|$$

Sí la impedancia de entrada  $Z_{in}$  es una función de la frecuencia expresado por la Ecuación (78). Dicha frecuencia dependiente viene del término  $\beta\ell$ , el cual puede ser escrito en términos de  $f/f_0$  como:

$$\beta\ell = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)\left(\frac{\lambda_0}{4}\right) = \left(\frac{2\pi f}{v_p}\right)\left(\frac{v_p}{4f_0}\right) = \frac{\pi f}{2f_0}$$

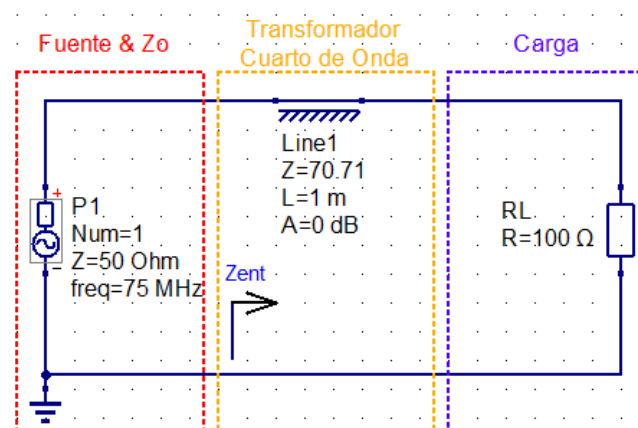
Donde se puede ver que  $\beta\ell = \pi/2$  para  $f = f_0$ , como se esperaba. Sin embargo, para frecuencias más altas la sección de adaptación parece ser eléctricamente más larga, y para frecuencias más bajas parece más corto. La magnitud del coeficiente de reflexión se representa en función de  $f/f_0$  como se muestra en la Figura 30.



**Figura 30.** Coeficiente de reflexión versus frecuencia normalizada para el transformador de cuarto de onda [1].

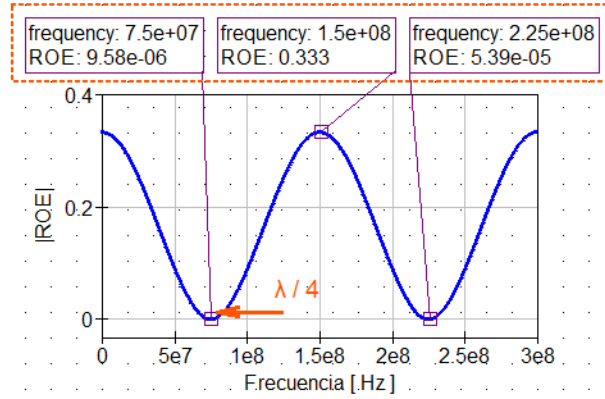
#### Simulación:

Para fines de interacción con el software, se procede a modelar el diseño del circuito, como se muestra en la Figura 31.



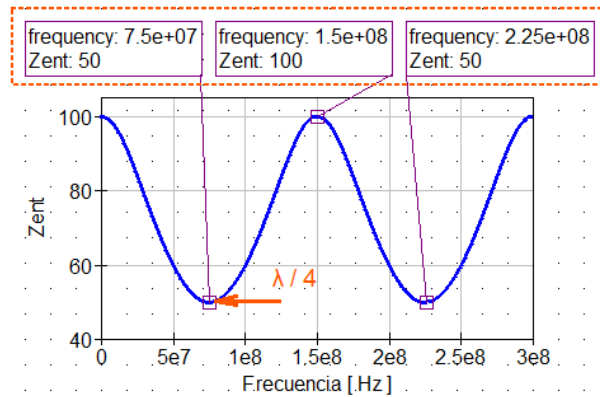
**Figura 31.** Diseño circuital para el transformador de cuarto de onda.

Como se muestra en la Figura 32, se tiene el comportamiento del coeficiente de reflexión ROE con respecto a la frecuencia. Para este propósito se estableció la frecuencia de la fuente de alimentación a 75 MHz, a fin de obtener una longitud física referencial de 1 metro ( $\ell = \lambda_0/4$ ) para la línea de transmisión de cuarto de onda; en condiciones ideales ( $\epsilon_r = 1$ ).



**Figura 32.** Comportamiento ROE del transformador de cuarto de onda.

De manera similar se puede analizar el comportamiento de la impedancia de entrada del circuito transformador cuarto de onda, como se muestra en la Figura 33 a frecuencia de 75 MHz ( $\ell = \lambda_0/4$ ) se tiene una impedancia característica  $Z_0 = 50 \Omega$ , al igual que  $|\Gamma| = 0$ .



**Figura 33.** Comportamiento de impedancia de entrada del transformador de cuarto de onda.



### 2.7.1 Diseño Multiseccional del Transformador de Cuarto de Onda

Una característica adicional del transformador de cuarto de onda es que se puede extender para diseños con multisecciones de manera metódica, para proporcionar un ancho de banda más amplio. Si solo se requiere una adaptación de impedancia de banda estrecha; un transformador de una sola sección puede ser suficiente. Sin embargo, como veremos a continuación, los diseños de transformadores de cuarto de onda en multisección se pueden sintetizar, para producir óptimas características de adaptación en una banda de frecuencias deseadas.

Un inconveniente del transformador de cuarto de onda es que solo puede adaptar una impedancia de carga real. Una impedancia de carga compleja se puede transformar en una impedancia real al usar una longitud adecuada de una línea de transmisión; entre la carga y el transformador, o usando un apropiado elemento reactivo en serie o paralelo. Estas técnicas normalmente alteran la dependencia de frecuencia de la carga y, esto a menudo tiene el efecto de reducir el ancho de banda de la adaptación.

Por lo tanto, ahora se analizará el rendimiento del ancho de banda del transformador en función de la desadaptación de la carga. La Ecuación (105) es válida solo para la frecuencia de diseño  $f_0$ , donde la longitud eléctrica para la sección de adaptación es  $\lambda_0/4$ ; pero a otras frecuencias la longitud es diferente de modo que la adaptación perfecta ya no se obtiene [1].

Para este tipo de tratamiento, se tiene como resultado el coeficiente de reflexión  $\Gamma$  como:

$$\Gamma = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0 + j2t\sqrt{Z_0 Z_L}} \quad (106)$$

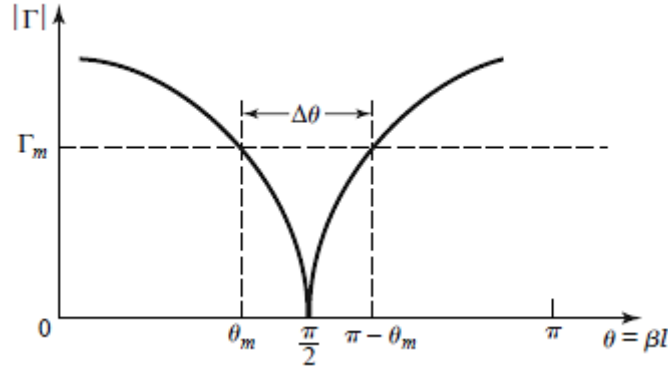
Luego se determina la magnitud  $|\Gamma|$  dando como resultado:

$$|\Gamma| = \frac{1}{\{1 + [4Z_0 Z_L / (Z_L - Z_0)^2] \sec^2 \theta\}^{1/2}} \quad (107)$$

Donde se asume que la frecuencia de operación está cerca de la frecuencia de diseño  $f_0$ , entonces  $\ell \simeq \lambda_0/4$  y  $\theta \simeq \pi/2$ , luego  $\sec^2 \theta \gg 1$ . Por lo tanto, la Ecuación (107) se simplifica como:

$$|\Gamma| \simeq \frac{|Z_L - Z_0|}{2\sqrt{Z_0 Z_L}} |\cos \theta|, \quad \text{para } \theta \text{ cerca de } \pi/2 \quad (108)$$

Este resultado proporciona la desadaptación aproximada del transformador de cuarto de onda cerca de la frecuencia de diseño, como se muestra en la Figura 34.



**Figura 34.** Comportamiento aproximado de la magnitud del coeficiente de reflexión para una sección del transformador cuarto de onda que funciona cerca de la frecuencia de diseño [1].

Si se establece un valor máximo  $\Gamma_m$ , para una magnitud del coeficiente de reflexión aceptable, entonces el ancho de banda del transformador de adaptación se puede definir como:

$$\Delta\theta = 2\left(\frac{\pi}{2} - \theta_m\right) \quad (109)$$

Por lo que la respuesta de la Ecuación (107) es simétrica sobre  $\theta = \pi/2$ , y  $\Gamma = \Gamma_m$  en  $\theta = \theta_m$  y en  $\theta = \pi - \theta_m$ . Evaluando  $\Gamma_m$  a la expresión exacta de la magnitud del coeficiente de reflexión en la Ecuación (107), obtenemos el resultado para  $\theta_m$ :

$$\frac{1}{\Gamma_m^2} = 1 + \left( \frac{2\sqrt{Z_0 Z_L}}{Z_L - Z_0} \sec \theta_m \right)^2 \quad (110)$$

O similar a la forma:

$$\cos \theta_m = \frac{\Gamma_m}{\sqrt{1 - \Gamma_m^2}} \frac{2\sqrt{Z_0 Z_L}}{|Z_L - Z_0|} \quad (111)$$

Y si se asume líneas TEM, se tiene:

$$\theta = \beta\ell = \frac{2\pi f}{v_p} \frac{v_p}{4f_0} = \frac{\pi f}{2f_0} \quad (112)$$

Entonces la frecuencia del borde inferior de la banda en  $\theta = \theta_m$  es:

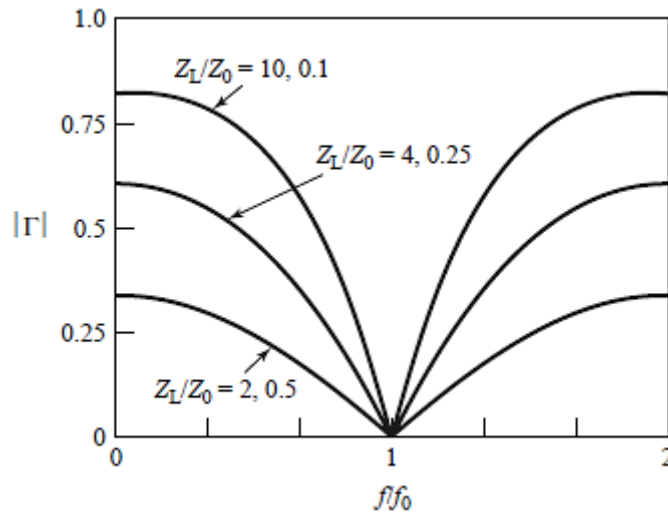
$$f_m = \frac{2\theta_m f_0}{\pi} \quad (113)$$

Y el ancho de banda fraccional es determinado usando la Ecuación (111), como:

$$\frac{\Delta f}{f_0} = \frac{2(f_0 - f_m)}{f_0} = 2 - \frac{2f_m}{f_0} = 2 - \frac{4\theta_m}{\pi}$$

$$\frac{\Delta f}{f_0} = 2 - \frac{4}{\pi} \cos^{-1} \left[ \frac{\Gamma_m}{\sqrt{1 - \Gamma_m^2}} \frac{2\sqrt{Z_0 Z_L}}{|Z_L - Z_0|} \right] \quad (114)$$

El ancho de banda fraccional generalmente se expresa en porcentajes  $100 \Delta f / f_0 \%$ . Teniendo en cuenta que el ancho de banda del transformador aumenta a medida que  $Z_L$  se acerca a  $Z_0$  (menor desadaptación de la carga). Como se muestra en la Figura 35.



**Figura 35.** Magnitud del coeficiente de reflexión versus frecuencia normalizada para un transformador de adaptación cuarto de onda de una sección con varias desadaptaciones de carga [1].

Los resultados anteriores son estrictamente válidos solo para líneas TEM. Cuando las líneas no son TEM; como guías de onda. La constante de propagación ya no es una función lineal de la frecuencia, y la impedancia de onda dependerá de la frecuencia. Estos factores complican el comportamiento general de los transformadores de cuarto de onda para líneas que no son TEM, pero en la práctica. El ancho de banda del transformador suele ser lo suficientemente pequeño como para que estas complicaciones no afecten el resultado. Otro factor ignorado en el análisis anterior es el efecto de reactancias asociadas con discontinuidades, cuando hay un cambio escalonado en las dimensiones de una línea de transmisión. Esto a menudo puede compensarse haciendo un pequeño ajuste en la longitud de la sección correspondiente.

**Ejemplo 11.**

Diseñar un transformador de adaptación de cuarto de onda de una sola sección, para adaptar una carga de  $10 \Omega$  a una línea de transmisión de  $50 \Omega$ ; para una frecuencia de diseño de  $f_0 = 3 \text{ GHz}$ . Determinar el porcentaje de ancho de banda para  $SWR \leq 1.5$ .

Solución:

De la Ecuación (105) se determina la impedancia característica de la sección de adaptación como:

$$Z_1 = \sqrt{Z_0 Z_L} = \sqrt{(50)(10)} = 22.36 \Omega$$

y la longitud de la sección de adaptación de  $\lambda/4$  a  $3 \text{ GHz}$  es la longitud física dependiente de la constante dieléctrica de la línea. Donde  $SWR$  de 1.5 corresponde a la magnitud del coeficiente de reflexión como:

$$\Gamma_m = \frac{SWR - 1}{SWR + 1} = \frac{1.5 - 1}{1.5 + 1} = 0.2$$

Donde el ancho de banda fraccional es determinado por la Ecuación (114) como:

$$\frac{\Delta f}{f_0} = 2 - \frac{4}{\pi} \cos^{-1} \left[ \frac{\Gamma_m}{\sqrt{1 - \Gamma_m^2}} \frac{2\sqrt{Z_0 Z_L}}{|Z_L - Z_0|} \right]$$

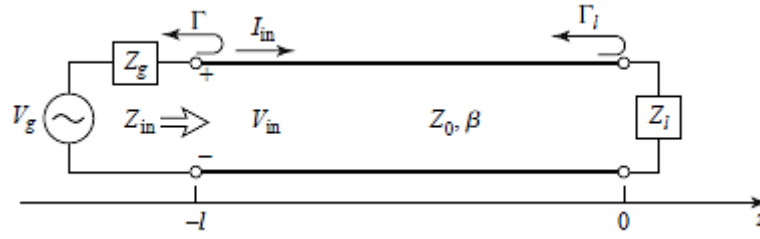
$$\frac{\Delta f}{f_0} = 2 - \frac{4}{\pi} \cos^{-1} \left[ \frac{0.2}{\sqrt{1 - (0.2)^2}} \frac{2\sqrt{(50)(10)}}{|10 - 50|} \right]$$

$$\frac{\Delta f}{f_0} = 0.29, \text{ o } 29 \%$$

## 2.8 Desadaptaciones de Carga y Generador

En la Sección 2.5 se definió la línea de transmisión terminada, asumiendo que el generador estaba adaptado, de modo que no se produjeran reflexiones en el generador. Sin embargo, tanto el generador como la carga pueden presentar impedancias desadaptadas en la línea de transmisión. Por tanto, se analizará este caso y también veremos que la condición para la máxima transferencia de potencia del generador a la carga. Donde en algunas situaciones pueden implicar que exista ondas estacionarias en la línea.

La Figura 36 muestra un circuito de línea de transmisión con un generador y carga arbitraria, donde  $Z_g$  y  $Z_\ell$ , pueden ser complejos [1].



**Figura 36.** Circuito de línea de transmisión para una carga y generador desadaptado.

Una línea de transmisión sin pérdidas se puede modelar con una longitud eléctrica  $\ell$  y una impedancia característica  $Z_0$ , el cual es suficiente para diseñar circuitos con redes pasivas y activas en la práctica. Sin embargo, debido a que tanto el generador como la carga no están adaptados, pueden ocurrir múltiples reflejos en la línea, como en el problema del transformador de cuarto de onda. El circuito de la Figura 36 podría ser analizado usando una serie infinita para representar las múltiples reflexiones, para lo cual usaremos el método más fácil y útil de transformación de impedancia. Por lo tanto, la impedancia de entrada que mira hacia la línea de transmisión terminada desde el extremo del generador es expresado por la Ecuación (115), como se analizó anteriormente en la Ecuación (78).

$$Z_{in} = Z_0 \frac{1 + \Gamma_\ell e^{-2j\beta\ell}}{1 - \Gamma_\ell e^{-2j\beta\ell}} = Z_0 \frac{Z_\ell + jZ_0 \tan \beta\ell}{Z_0 + jZ_\ell \tan \beta\ell} \quad (115)$$

Siendo  $\Gamma_\ell$  el coeficiente de reflexión de la carga:

$$\Gamma_\ell = \frac{Z_\ell - Z_0}{Z_\ell + Z_0} \quad (116)$$

Y el voltaje en la línea puede ser escrito como:

$$V(z) = V_0^+ (e^{-j\beta z} + \Gamma_\ell e^{j\beta z}) \quad (117)$$

Donde podemos encontrar  $V_0^+$ , es el voltaje en el extremo de la línea del generador, en;  $z = -\ell$

$$V(-\ell) = V_g \frac{Z_{in}}{Z_{in} + Z_g} = V_0^+ (e^{j\beta\ell} + \Gamma_\ell e^{-j\beta\ell}) \quad (118)$$

Por lo tanto:

$$V_0^+ = V_g \frac{Z_{in}}{Z_{in} + Z_g} \frac{1}{(e^{j\beta\ell} + \Gamma_\ell e^{-j\beta\ell})} \quad (119)$$

El cual puede ser reescrito usando la Ecuación (115) como:

$$V_0^+ = V_g \frac{Z_0}{Z_0 + Z_g} \frac{e^{-j\beta\ell}}{(1 - \Gamma_\ell \Gamma_g e^{-2j\beta\ell})} \quad (120)$$

Donde  $R_g$  es el coeficiente de reflexión visto mirando al generador:

$$\Gamma_g = \frac{Z_g - Z_0}{Z_g + Z_0} \quad (121)$$

La relación de onda estacionaria en la línea es:

$$\text{SWR} = \frac{1 + |\Gamma_\ell|}{1 - |\Gamma_\ell|} \quad (122)$$

La potencia deliberada para la carga es:

$$P = \frac{1}{2} \text{Re}\{V_{in} I_{in}^*\} = \frac{1}{2} |V_{in}|^2 \text{Re}\left\{\frac{1}{Z_{in}}\right\}$$

$$P = \frac{1}{2} |V_g|^2 \left| \frac{Z_{in}}{Z_{in} + Z_g} \right|^2 \text{Re}\left\{\frac{1}{Z_{in}}\right\} \quad (123)$$

Ahora estableciendo:  $Z_{in} = R_{in} + jX_{in}$  y  $Z_g = R_g + jX_g$ ; luego la Ecuación (123) puede ser reducido como:

$$P = \frac{1}{2} |V_g|^2 \frac{R_{in}}{(R_{in} + R_g)^2 + (X_{in} + X_g)^2} \quad (124)$$

Ahora se asume que la impedancia del generador  $Z_g$  es fija, y se considerará tres casos de impedancia de carga, como se describe a continuación.

### 2.8.1 Carga Adaptada con la Línea

En este caso tenemos  $Z_\ell = Z_0$ , así que  $\Gamma_\ell = 0$ , y  $SWR = 1$ , determinadas por las Ecuaciones (116) y (122). Luego la impedancia de entrada  $Z_{in} = Z_0$ . Entonces, teniendo la Ecuación (124) la potencia entregada a la carga es:

$$P = \frac{1}{2} |V_g|^2 \frac{Z_0}{(Z_0 + R_g)^2 + X_g^2} \quad (125)$$

### 2.8.2 Generador Adaptado a la Línea Adaptada

En este caso la impedancia de carga  $Z_\ell$  y los parámetros de la línea de transmisión  $\beta\ell$ ,  $Z_0$  son elegidos para hacer la impedancia de entrada  $Z_{in} = Z_g$ , de modo que el generador este adaptado a la carga conectado por la línea de transmisión terminada. Entonces el coeficiente de reflexión general  $\Gamma = 0$ .

$$\Gamma = \frac{Z_{in} - Z_g}{Z_{in} + Z_g} = 0 \quad (126)$$

Sin embargo, puede haber una onda estacionaria en la línea, ya que el coeficiente de reflexión en la carga  $\Gamma_\ell$ , no puede ser cero, entonces la potencia entregada a la carga es:

$$P = \frac{1}{2} |V_g|^2 \frac{R_g}{4(R_g^2 + X_g^2)} \quad (127)$$

Se observa que a pesar de que la línea cargada este adaptada con el generador, la potencia entregada a la carga puede ser menor que la expresión determinada en la Ecuación (125), donde la línea cargada no está necesariamente adaptada con el generador. Por lo tanto, nos lleva a la pregunta de cuál es la impedancia de carga óptima o equivalentemente, cuál es la impedancia de entrada óptima para lograr la máxima transferencia de potencia a la carga para una determinada impedancia del generador.

### 2.8.3 Adaptación Conjugada

Suponiendo que la impedancia en serie del generador  $Z_g$  es fija, podemos variar la impedancia de entrada  $Z_{in}$  hasta conseguir la máxima transferencia de potencia entregada a la carga. Conociendo  $Z_{in}$ , entonces es fácil de encontrar la impedancia de carga correspondiente  $Z_\ell$ , mediante una transformación de impedancia a lo largo la línea. Para maximizar la potencia  $P$ , entonces diferenciamos con respecto a la parte real e imaginaria de  $Z_{in}$ . Usando la Ecuación (124) da:

$$\frac{\partial P}{\partial R_{in}} = 0 \rightarrow \frac{1}{(R_{in} + R_g)^2 + (X_{in} + X_g)^2} + \frac{-2R_{in}(R_{in} + R_g)}{[(R_{in} + R_g)^2 + (X_{in} + X_g)^2]^2} = 0 \quad (128)$$

Entonces se tiene:

$$R_g^2 - R_{in}^2 + (X_{in} + X_g)^2 = 0 \quad (129)$$

Similarmente:

$$\frac{\partial P}{\partial X_{in}} = 0 \rightarrow \frac{-2R_{in}(X_{in} + X_g)}{[(R_{in} + R_g)^2 + (X_{in} + X_g)^2]^2} = 0 \quad (130)$$

Donde:

$$X_{in}(X_{in} + X_g) = 0 \quad (131)$$

Solucionando las Ecuaciones (129) y (131) simultáneamente para  $R_{in}$  y  $X_{in}$  da:

$$R_{in} = R_g, \quad X_{in} = -X_g \quad (132)$$

Por lo tanto, se tiene:

$$Z_{in} = Z_g^* \quad (133)$$

Esta condición se conoce como la *adaptación conjugada* y, da como resultado una máxima transferencia de potencia a la carga para una impedancia del generador fija. La potencia entregada es:

$$P = \frac{1}{2} |V_g|^2 \frac{1}{4R_g} \quad (134)$$

El cual se considera mayor o igual que las potencias anteriores (125 y 127). Este es también la potencia máxima disponible del generador. Teniendo en cuenta que los coeficientes de reflexión  $\Gamma_\ell$ ,  $\Gamma_g$  y  $\Gamma$  puede ser distinto de cero. Físicamente, esto significa que en algunos casos la potencia en múltiples reflexiones en una línea desadaptada puede agregar en fase, para entregar más potencia a la carga que se entregaría si la línea fuera plana (sin reflexiones). Si la impedancia del generador es real ( $X_g = 0$ ), entonces los dos últimos casos se reducen al mismo resultado, que es la máxima transferencia de potencia entregada a la carga, cuando la línea cargada está adaptada con el generador ( $R_{in} = R_g$ , con  $X_{in} = X_g = 0$ ).



Finalmente, se tiene en cuenta que ni la adaptación para lograr reflexión cero ( $Z_\ell = Z_0$ ), ni la adaptación conjugada ( $Z_{in} = Z_g^*$ ) necesariamente producen un sistema con la mejor eficiencia. Por ejemplo, si  $Z_g = Z_\ell = Z_0$ , entonces tanto la carga como el generador están adaptados (sin reflexión), pero solo la mitad de la potencia producido por el generador se entrega a la carga (la otra mitad se pierde en  $Z_g$ ). Para una eficiencia de transmisión del 50 %, esta eficiencia solo puede mejorarse haciendo que  $Z_g$  sea tan pequeño como sea posible.

## 2.9 Línea de Transmisión Microstrip

La línea de transmisión microstrip; es uno de los tipos de líneas de transmisión planar más populares, principalmente; porque puede ser fabricado por procesos fotolitográficos y es fácilmente miniaturizado e integrado con dispositivos de radiofrecuencia RF o microondas, tanto pasivos como activos. La geometría de una línea de transmisión microstrip, está conformada por una línea que se muestra en la Figura 37; donde un conductor de ancho  $W$  está impreso en un sustrato conectado a la tierra del sustrato dieléctrico de espesor  $d$ , y  $\epsilon_r$  es la permitividad relativa [8].

Aunque la línea de transmisión microstrip tiene una estructura geométrica muy simple, los campos EM involucrados son en realidad complejos. Sin embargo, los enfoques simples a los cálculos del modo cuasi-TEM son combinados con dependientes de la frecuencia. Las expresiones producen una precisión de diseño bastante aceptable para muchas aplicaciones [12].

En realidad, los campos exactos de la línea microstrip constituyen una onda híbrida TM-TE y requieren técnicas de análisis más avanzadas. En la mayoría de aplicaciones prácticas, el sustrato dieléctrico es eléctricamente muy delgado ( $d \ll \lambda$ ), por lo que los campos son cuasi-TEM. En otras palabras, los campos son esencialmente los mismos que los del caso estático (CC). Por lo tanto, se tiene buenas aproximaciones para la velocidad de fase, constante de propagación, y la impedancia característica se puede obtener a partir de soluciones estáticas o cuasi-estáticas. Entonces la velocidad de fase y la constante de propagación se pueden expresar como:

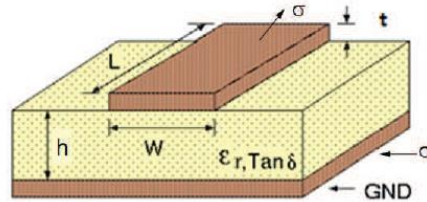
$$v_p = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_e}} \quad (135)$$

$$\beta = k_0 \sqrt{\epsilon_e} \quad (136)$$

Donde:  $k_0 = 2\pi f / c$   
 $c$  ; Velocidad de la luz  
 $\epsilon_e$  ; Constante dieléctrica efectiva

### 2.9.1 Sustrato

El diseño implica elegir la estructura de la línea de transmisión a utilizar y el sustrato. En esta sección, las propiedades eléctricas de los materiales serán discutidos y luego se describirá los sustratos comúnmente utilizados con interconexiones planas. La Figura 37 muestra una estructura de una línea microstrip en un sustrato.



**Figura 37.** Geometría física de una línea de transmisión microstrip en un sustrato.

**Nota:** Muchos autores tienden a denotar las características de una línea de transmisión microstrip con diferentes expresiones, como:

$$\begin{array}{ll} h = d & \text{Espesor del sustrato} \\ Z_0 = R_0 & \text{Impedancia característica} \end{array}$$

La propiedad de almacenamiento de energía adicional se describe mediante la permitividad relativa;  $\epsilon_r$ , que es la relación entre la permitividad del material en el espacio libre:  $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$  [7]. Sin embargo, cuando los campos de la línea de transmisión están en un medio no-homogéneo, como la línea microstrip de la Figura 37, se usa la permitividad relativa efectiva;  $\epsilon_e$ . La permitividad relativa efectiva cambia con la frecuencia de trabajo como la proporción de energía almacenada en las diferentes regiones. Este efecto se llama dispersión y hace que un pulso se extienda; como los diferentes componentes de frecuencia del pulso viajan a diferentes velocidades.

Otro parámetro de suma importancia a considerar en un sustrato es la tangente de pérdida;  $\tan \delta$ . El cuál es la pérdida en un dieléctrico proveniente de dos fuentes: amortiguamiento dieléctrico y pérdidas de conducción en el dieléctrico. La amortiguación dieléctrica se origina por el movimiento de los centros de carga que resulta de la distorsión mecánica de la celosía dieléctrica. Con un campo eléctrico alterno, esto da lugar a vibraciones de energía en el dieléctrico, por lo que se pierde energía del campo eléctrico. Es fácil ver que esta pérdida aumentará linealmente con la frecuencia y será cero en CC.

Por lo tanto, las propiedades de varios materiales de sustratos típicos se dan en la Tabla 02. Considerando solo una familia de sustratos, para ilustrar algunas de las consideraciones involucradas en la elección del sustrato. Como por ejemplo la alúmina que

es un típico de cerámica muy adecuada para la producción de circuitos que funcionan a frecuencias superiores de 60 GHz.

**Tabla 02.** Propiedades dieléctricas de sustratos [7].

Material	$10^{-4} * \tan \delta$ (Hasta 10 GHz)	$\epsilon_r$
Aire (seco)	$\approx 0$	1
Alúmina, 99.5 %	1 – 2	10.1
Zafiro	0.4 – 0.7	9.4, 11.6
Vidrio (típico)	20	5
Poliimida	50	3.2
Cuarzo (fusionado)	1	3.8
FR4 placa de circuito	100	4.3 – 4.5
RT-duroid 5880	5 – 15	2.16 – 2.24
RT-duroid 6010	10 – 60	10.2 – 10.7
AT-1000	20	10.0 – 13.0
Silicio Si (alta resistividad)	10 – 100	11.9
GaAs	6	12.85
InP	10	12.4
$\text{SiO}_2$ (en-chip)	---	4.0 – 4.2
LTCC (típico, tapa verde TM 951)	15	7.8

## 2.9.2 Ecuaciones de Diseño

Si bien;  $\epsilon_e$ , es la constante dieléctrica efectiva de una línea de transmisión microstrip, y las líneas de campo  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$  están en una región dieléctrica del sustrato y parte en el aire [1]. La constante dieléctrica efectiva puede ser interpretado como una constante dieléctrica de un medio homogéneo que reemplaza el aire y las regiones dieléctricas de la línea microstrip; como se ve en la Figura 38, donde un porcentaje de los campos electromagnéticos están en el dieléctrico y en el aire [11]. Por lo tanto, la constante dieléctrica efectiva ( $\epsilon_e$ ) debe satisfacer la relación:

$$1 < \epsilon_e < \epsilon_r$$

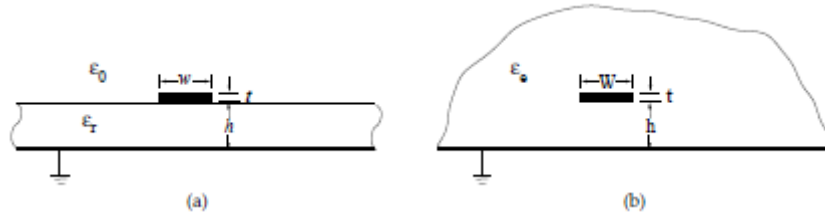
Dicha relación depende de la constante dieléctrica del sustrato, el espesor del sustrato, el ancho del conductor y la frecuencia de operación.

Se presentarán fórmulas aproximadas de diseño para la constante dieléctrica efectiva, impedancia característica y la atenuación de la línea microstrip; estos resultados son aproximaciones de ajuste a rigurosas soluciones cuasi-estáticas.

Por lo tanto, la constante dieléctrica efectiva ( $\epsilon_e$ ) de una línea de transmisión microstrip está dado por: [1]

$$\epsilon_e = \frac{\epsilon_r + 1}{2} + \frac{\epsilon_r - 1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + 12 \frac{d}{W}}} \quad (137)$$

Esta constante dieléctrica efectiva se puede interpretar como la constante dieléctrica de un medio homogéneo, que reemplaza de manera equivalente el aire y las regiones dieléctricas de la línea microstrip, como se muestra en la Figura 38.



**Figura 38.** Geometría equivalente de una línea microstrip quasi-TEM; (a) el sustrato dieléctrico de permitividad relativa  $\epsilon_r$ , es reemplazado por un medio homogéneo de permitividad relativa efectiva  $\epsilon_e$  (b) [7].

Dada las dimensiones físicas de la línea microstrip se puede calcular la impedancia característica como:

Para;  $\frac{W}{d} \leq 1$

$$Z_0 = \frac{60}{\sqrt{\epsilon_e}} \ln \left( \frac{8d}{W} + \frac{W}{4d} \right) \quad (138)$$

Para;  $\frac{W}{d} \geq 1$

$$Z_0 = \frac{120\pi}{\sqrt{\epsilon_e} \left[ \frac{W}{d} + 1.393 + 0.667 \ln \left( \frac{W}{d} + 1.444 \right) \right]} \quad (139)$$

Como también; para una impedancia característica establecida ( $Z_0$ ) y, la constante dieléctrica relativa ( $\epsilon_r$ ), la relación de  $W/d$  puede ser calculado como:

Para;  $\frac{W}{d} < 2$

$$\frac{W}{d} = \frac{8e^A}{e^{2A} - 2} \quad (140)$$

Para;  $\frac{W}{d} > 2$

$$\frac{W}{d} = \frac{2}{\pi} \left[ B - 1 - \ln(2B - 1) + \frac{\epsilon_r - 1}{2\epsilon_r} \left\{ \ln(B - 1) + 0.39 - \frac{0.61}{\epsilon_r} \right\} \right] \quad (141)$$

Donde:

$$A = \frac{Z_0}{60} \sqrt{\frac{\epsilon_r + 1}{2}} + \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1} \left( 0.23 + \frac{0.11}{\epsilon_r} \right) \quad (142)$$

$$B = \frac{377\pi}{2Z_0\sqrt{\epsilon_r}} \quad (143)$$

Considerando una línea microstrip como una línea cuasi-TEM, podemos determinar la atenuación debido a la pérdida dieléctrica como:

$$\alpha_d = \frac{k_0 \epsilon_r (\epsilon_e - 1) \tan \delta}{2\sqrt{\epsilon_e} (\epsilon_r - 1)} \quad \text{Np/m.} \quad (144)$$

Donde:  $\tan \delta$ , es la tangente de pérdida del dieléctrico determinado como:

$$\frac{\epsilon_r (\epsilon_e - 1)}{\epsilon_e (\epsilon_r - 1)} \quad (145)$$

lo que explica el hecho de que los campos alrededor de la línea microstrip están parcialmente en el aire (sin pérdidas) y en parte en el dieléctrico (con pérdidas). Y existirá atenuación debida a la pérdida del conductor aproximadamente por:

$$\alpha_c = \frac{R_s}{Z_0 W} \quad \text{Np/m.} \quad (146)$$

Donde:  $R_s = \sqrt{\omega \mu_0 / 2\sigma}$ , es la resistividad superficial del conductor. Para la mayoría de sustratos de microstrip, la pérdida del conductor es más significativa que la pérdida dieléctrica; pueden ocurrir excepciones con algunos sustratos semiconductores.

### 2.9.3 Resistencia de una Línea Microstrip.

El proceso de calcular la resistencia de una línea microstrip se debe considerar el grosor del conductor; por lo tanto, la resistencia total será la suma de la resistencia de la línea microstrip y la resistencia del plano de masa o tierra; el cual se puede expresar de la siguiente manera: [7]

$$R = R_{microstrip} + R_{plano}$$

Donde:

$$R_{microstrip} = \frac{R_s}{W} \left( \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi^2} \ln \frac{4\pi W}{t} \right) q$$

Donde:  $R_s$ , es la resistencia de la línea, y  $t$  es el grosor de la línea microstrip (thickness), y  $q$  es el factor de llenado de la línea.

$$q = \begin{cases} 1, & \text{para } \frac{W}{h} \leq 0.5 \\ 0.94 + 0.132 \frac{W}{h} - 0.0062 \left( \frac{W}{h} \right)^2, & \text{para } 0.5 \leq \frac{W}{h} \leq 10 \end{cases}$$

De manera análoga se puede determinar la expresión de cálculo de la resistencia del plano de masa como:

$$R_{plano} = \frac{R_s}{W} \left( \frac{W/h}{W/h + 5.8 + 0.03 h/W} \right), \quad \text{para } 0.1 \leq \frac{W}{h} \leq 10$$

---

**Ejemplo 12.**


---

Diseñar una línea de transmisión microstrip sobre un sustrato de alúmina de 0.5 mm, cuyas propiedades dieléctricas son:  $\epsilon_r = 9.9$  &  $\tan \delta = 0.001$ , para obtener una impedancia característica de 50  $\Omega$ . Determinar la longitud requerida de esta línea para producir un retardo de fase de 270° a 10 GHz, y calcular la pérdida total en la línea asumiendo conductores de cobre.

Solución:

Primero se determina  $W/d$  para obtener  $Z_0 = 50 \Omega$ , luego asumiremos la relación de  $W/d < 2$ , expresado por la Ecuación (140). Donde se tiene:

$$A = 2.142$$

$$\frac{W}{d} = 0.9654$$

Por lo tanto, se cumple la condición de  $W/d < 2$ ; de lo contrario utilizaríamos la expresión para  $W/d > 2$ .

Luego el ancho de línea requerido es:

$$W = 0.9654 * (d)$$

$$W = 0.483 \text{ mm.}$$

De la Ecuación (137) se determina la constante dieléctrica efectiva ( $\epsilon_e = 6.665$ ). Y la longitud eléctrica de la línea  $\ell$  para producir un retardo de fase de  $270^\circ$ , el cual es determinado como:

$$\phi = 270^\circ = \beta \ell = \sqrt{\epsilon_e} k_0 \ell$$

$$k_0 = \frac{2\pi f}{c} = 209.4 \text{ m}^{-1}$$

$$\ell = \frac{270^\circ(\pi/180^\circ)}{\sqrt{\epsilon_e} k_0} = 8.72 \text{ mm.}$$

La atenuación a causa de la pérdida dieléctrica se determina utilizando la Ecuación (144), donde:  $\alpha_d = 0.255 \text{ Np/m} = 0.022 \text{ dB/cm}$ . La resistividad superficial del cobre a 10 GHz es  $0.026 \Omega$ , y la atenuación a causa de la pérdida del conductor es:  $\alpha_c = 0.0108 \text{ Np/cm} = 0.094 \text{ dB/cm}$ . Por lo tanto, la pérdida total en la línea es de 0.101 dB.

---

### Ejemplo 13.

---

Calcular las dimensiones físicas de una línea de transmisión microstrip ( $L$  &  $W$ ) como se muestra en la Figura 39, para obtener una impedancia característica de  $50 \Omega$  a una frecuencia de operación de 2.5 GHz. Considerar las propiedades dieléctricas del sustrato como:

$$h = 0.8 \text{ mm}$$

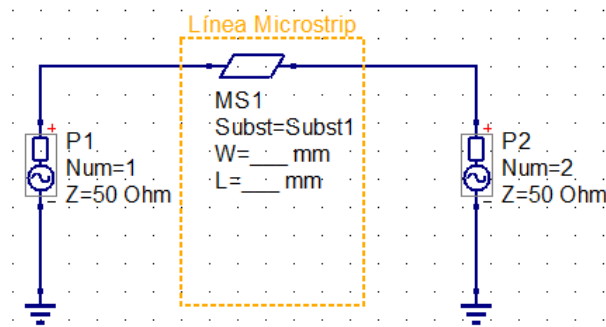
$$\epsilon_r = 2.54$$

$$\tan \delta = 0.0022$$

$$T = 35 \mu\text{m}$$

Solución:

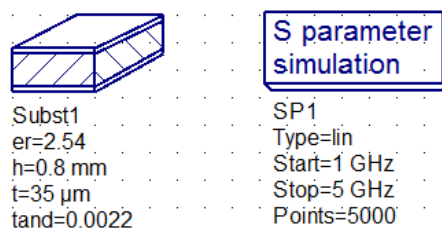
Se tiene el diseño del circuito de la línea de transmisión microstrip, como se muestra en la Figura 39.



**Figura 39.** Diseño circuital de línea microstrip.

Para la determinación de las dimensiones de la línea de transmisión microstrip, primero se asume la solución de las Ecuaciones (142) y (143); a fin de analizar los valores de  $A$  y  $B$ , para luego utilizar dichos resultados en las condiciones de  $W/h < 2$  o  $W/h > 2$  correspondiente a las Ecuaciones (140) y (141).

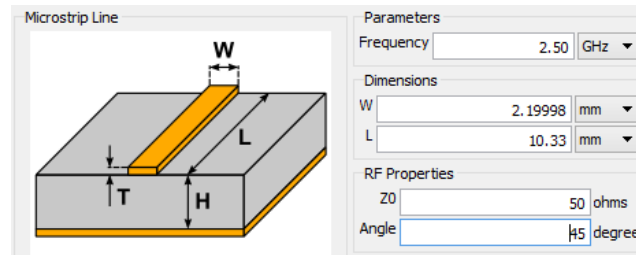
Para este proceso utilizaremos la herramienta de cálculo que proporciona el software para determinar las dimensiones, y así poder simular el ejercicio. Por lo tanto, se procede a establecer las propiedades dieléctricas del sustrato, como también la herramienta de simulación de los parámetros de dispersión  $[S]$  a ser tratado en la Sección 3.4. La Figura 40 muestra las herramientas de simulación.



**Figura 40.** Configuración de las propiedades dieléctricas del sustrato y uso del controlador de simulación de parámetros de dispersión  $S$ .

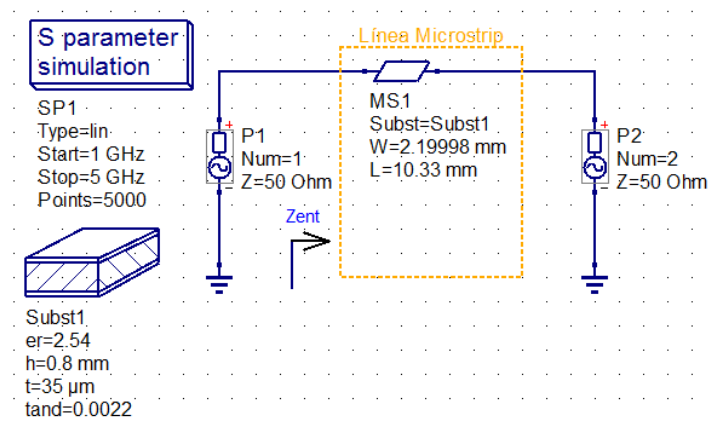


Utilizando la herramienta de cálculo del software para obtener las dimensiones de una línea microstrip, se obtiene dichos resultados. La Figura 41 muestra la herramienta Line Calculation.



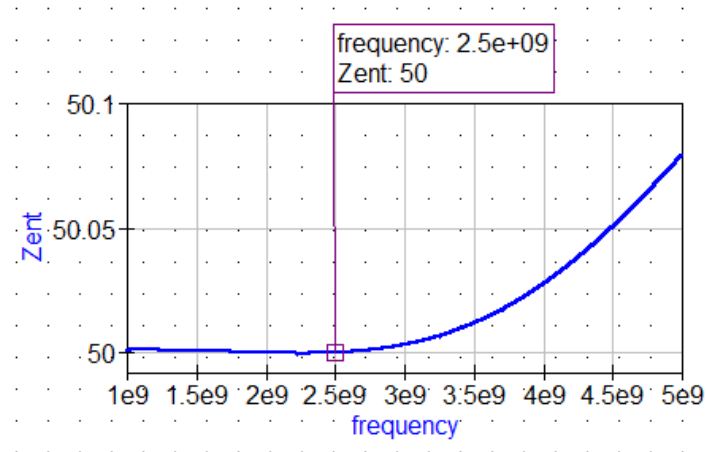
**Figura 41.** Herramienta de cálculo de dimensiones de líneas microstrip.

Por lo tanto, se establece dichas dimensiones  $L$  &  $W$  de la línea microstrip en el diseño del circuito, como se muestra en la Figura 42.



**Figura 42.** Dimensiones  $L$  &  $W$  de la línea microstrip para  $Z_0$ .

Finalmente, para fines de comprobación de obtención de la impedancia característica  $Z_0$  de la línea microstrip, se procede a utilizar las ecuaciones de análisis de impedancia del coeficiente de reflexión  $S[1,1]$  proporcionados por el software; el cual permite determinar la impedancia característica de la línea para  $50 \Omega$ ; como se puede ver en la Figura 43.



**Figura 43.** Impedancia característica de la línea de transmisión microstrip.

#### Ejemplo 14.

Del ejemplo anterior, determinar cuál de las dimensiones  $L$  o  $W$  establece la impedancia de una línea microstrip; para lo cual se variará gradualmente la longitud  $L$  con un ancho establecido  $W$  de la línea microstrip y, viceversa.

Solución:

Primero, se procede a variar la longitud  $L$  de la línea microstrip con un ancho establecido;  $W = 2.19998 \text{ mm}$ . como se determinó anteriormente. Se tiene el resultado siguiente.

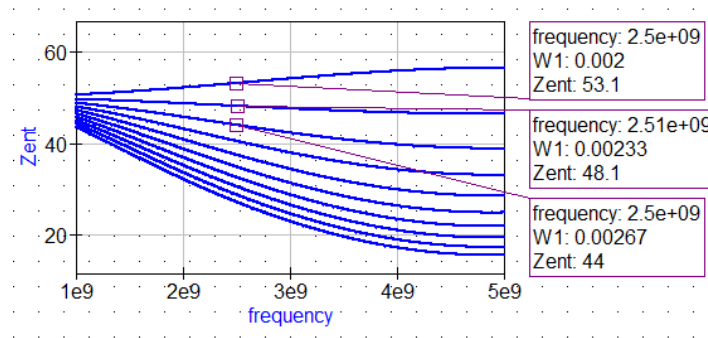
$L \text{ (mm)}$	$W \text{ (mm)}$	$Z_{\text{línea}} \Omega$
10.33	2.19998	50
15.33		50
20.33		50
25.33		50
30.33		50

Luego, se procede a variar el ancho  $W$  de la línea microstrip con una longitud establecida en  $L = 10.33 \text{ mm}$ . Se tiene el resultado siguiente.

$L \text{ (mm)}$	$W \text{ (mm)}$	$Z_{\text{línea}} \Omega$
10.33	2.19998	50
	3.19998	38.6
	4.19998	31.3
	5.19998	26.3
	6.19998	22.6

Como se puede apreciar en los resultados obtenidos, al variar la longitud de la línea de transmisión microstrip, no afecta la impedancia característica de la línea; sin embargo, al variar el ancho de la línea microstrip su impedancia cambia drásticamente de valor.

Por lo tanto, la dimensión física que establece la impedancia de una línea de transmisión microstrip es el ancho de la línea,  $W$ . La Figura 44 muestra el comportamiento de variaciones de impedancia con respecto a variaciones de  $W$ .



**Figura 44.** Respuesta de impedancia a diferentes valores de  $W$  de una línea microstrip.

#### 2.9.4 Efectos Dependientes de Frecuencia en Modos de Orden Superior

Hay una serie de fórmulas aproximadas y desarrolladas para soluciones y/o datos experimentales; que se han sugerido para predecir el efecto de la variación de la frecuencia en los parámetros de la línea microstrip. Un modelo popular dependiente de la frecuencia para la constante dieléctrica efectiva tiene una forma similar a la siguiente fórmula:

$$\epsilon_e(f) = \epsilon_r - \frac{\epsilon_r - \epsilon_e(0)}{1 + G(f)} \quad (147)$$

Donde:  $\epsilon_e(f)$ , representa la constante dieléctrica efectiva dependiente de la frecuencia,  $\epsilon_r$  es la permitividad del sustrato, y  $\epsilon_e(0)$  es la constante dieléctrica efectiva de la línea en DC dado por la Ecuación (137).

La función  $G(f)$  puede tomar varias formas, pero una sugerida es la siguiente:

$$G(f) = g(f/f_p)^2$$

$$g = 0.6 + 0.009Z_0$$

$$f_p = Z_0/8\pi d \quad (148)$$

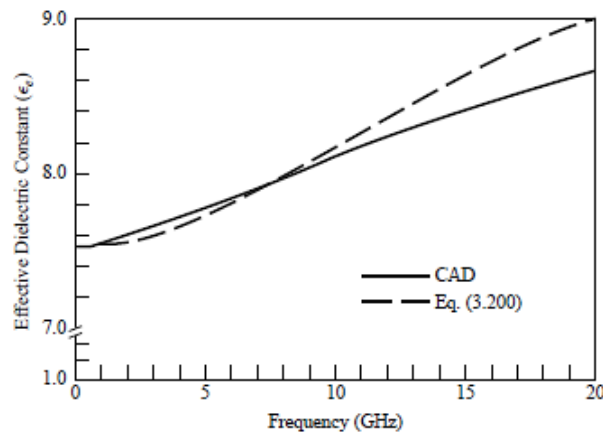
Donde:  $Z_0$ , está en Ohms,  $f$  en GHz, y  $d$  en cm. Puede verse en la forma de la Ecuación (147) que  $\epsilon_e(f)$  se reduce al valor de  $\epsilon_e(0)$  en DC cuando  $f = 0$  y aumenta hacia  $\epsilon_r$  a medida que aumenta la frecuencia.

### Ejemplo 15.

Usando la fórmula aproximada de la Ecuación (147) para graficar el cambio de la constante dieléctrica efectiva sobre la frecuencia, para una línea microstrip de  $25 \Omega$  en un sustrato que tiene una permitividad de 10 y un espesor de 0.65 mm. Comparar los datos para frecuencias de hasta 20 GHz. Comparar el retardo de fase calculado a 10 GHz a través de una longitud de línea de 1.093 cm cuando se use  $\epsilon_e(0)$  frente a  $\epsilon_e(10 \text{ GHz})$  [1].

Solución:

El ancho de línea requerido para una impedancia de  $25 \Omega$  es  $W = 2 \text{ mm}$ . La constante dieléctrica efectiva para esta línea a bajas frecuencias se puede determinar usando la Ecuación (137), donde  $\epsilon_e(0) = 7.53$ . Se utiliza un programa de computadora para calcular la constante dieléctrica efectiva en función de la frecuencia usando la Ecuación (147). La Figura (45) muestra que el modelo aproximado es razonablemente hasta aproximadamente 10 GHz pero da una sobre estimación a frecuencias más altas.



**Figura 45.** Constante dieléctrica efectiva versus frecuencia para una línea microstrip, comparando el modelo aproximado de la ecuación 147 [1].

## 2.9.5 Longitud de Onda en un Medio Guiado

La longitud de onda en líneas de transmisión microstrip se determina usando la Ecuación (149), puesto que al tratarse de un medio guiado; este tiene relación con la constante dieléctrica relativa del sustrato;  $\epsilon_r$ , y por ende con la permitividad efectiva;  $\epsilon_e$ .

$$\lambda_g = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon_e}} \quad (149)$$

Donde:  $\lambda_0 = c/f_0$   
 $c$  ; velocidad de luz en el vacío  
 $f_0$  ; frecuencia de diseño

**Tabla 03.** Propiedades eléctricas y fuerza dieléctrica de sustratos estándares [8].

Material	$\epsilon_r$	$\tan \delta$	$k$	Fuerza dieléctrica
		Hasta 10 GHz	(W/cm/°C)	(kV/cm)
Zafiro	11.7	$10^{-4}$	0.4	$4 \times 10^5$
Alúmina	9.7	$2 \times 10^{-4}$	0.3	$4 \times 10^5$
Cuarzo (fundido)	3.8	$10^{-4}$	0.01	$10 \times 10^5$
Poliestireno	2.53	$4.7 \times 10^{-4}$	0.0015	280
Oxido de Berilio (BeO)	6.6	$10^{-4}$	2.5	---
GaAs ( $\Gamma = 10^7 \Omega \text{ cm}$ )	12.3	$16 \times 10^{-4}$	0.3	350
Si ( $\Gamma = 10^5 \Omega \text{ cm}$ )	11.7	$50 \times 10^{-4}$	0.9	300
Aire	1	$\simeq 0$	0.00024	30

**Nota:** La capacidad de manejo de máxima potencia en líneas microstrip es más complicado. Donde el voltaje pico que puede ser aplicado sin causar la ruptura dieléctrica, determina la capacidad de manejo de la potencia máxima (PPHC, Peak Power Handling Capability) de la línea microstrip. Por lo tanto,  $Z_0$  es la impedancia característica y  $V_0$  es el voltaje máximo resistido por la línea; la máxima potencia pico esta dado por:

$$P_p = \frac{(V_0)^2}{2Z_0} \quad (150)$$

**Tabla 04.** Comparación de APHC para varios sustratos [8].

Substrato	Potencia Promedio Máxima (kW)		
	2.0 GHz	10 GHz	20 GHz
Poliestireno	0.321	0.124	0.075
Cuarzo	1.200	0.523	0.357
Silicio	3.190	2.23	1.640
G <sub>a</sub> A <sub>s</sub>	3.550	1.47	0.934
Zafiro	11.65	5.10	3.460
Alúmina	12.12	5.17	3.400
BeO	174.5	75.7	51.5

En referencia a la frecuencia que se produce en un acoplamiento significativo entre el modo cuasi-TEM y el modo espurio de onda superficial de orden más bajo se indica a continuación: [8]

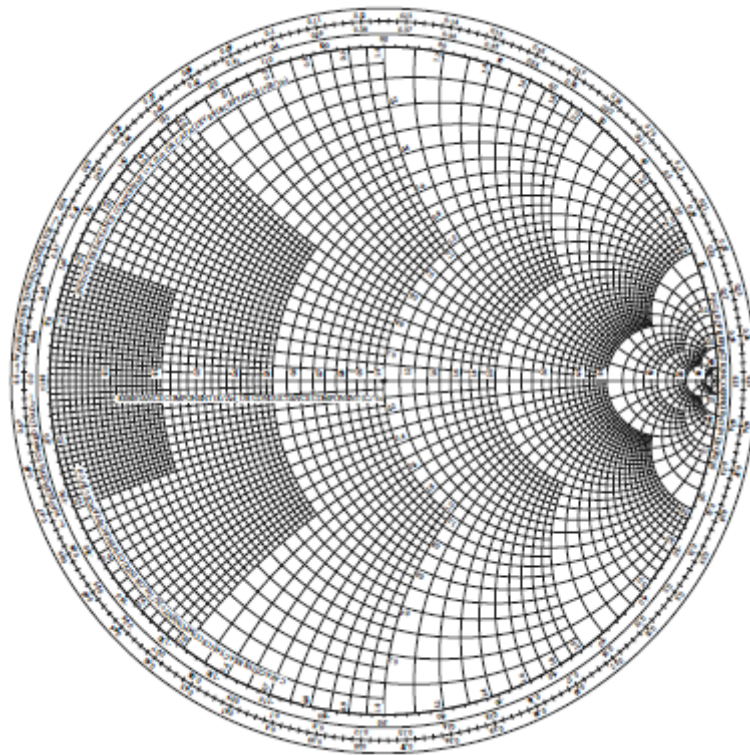
$$f_T = \frac{150}{\pi h} \sqrt{\frac{2}{\epsilon_r - 1}} \tan^{-1}(\epsilon_r) \quad (151)$$

Donde:  $f_T$ , está en GHz y  $h$  esta en mm. Por lo tanto, el máximo grosor de un sustrato de quartz ( $\epsilon_r \cong 3.8$ ), para circuitos microstrip diseñados a 100 GHz es menor que 0.5 mm. La excitación de modos de orden superior en microstrip se puede evitar si se opera por debajo de la frecuencia de corte del primer modo de orden superior, que viene dada por:

$$f_c \cong \frac{300}{\sqrt{\epsilon_r}(2W + 0.8h)} \quad (152)$$

### 3 Carta de Smith

La carta de Smith mostrado en la Figura 46 es una herramienta gráfica que puede ser muy útil para resolver problemas de líneas de transmisión, es probablemente el más conocido y el más utilizado. Fue desarrollado en 1939 por P. Smith en los laboratorios telefónicos Bell. La carta de Smith; sin embargo, es más que una técnica gráfica, además de ser una parte integral de la gran mayoría de softwares actuales y equipos de prueba para diseño en microondas [13]. La carta de Smith proporciona una forma útil de visualizar los fenómenos de la línea de transmisión, sin la necesidad de cálculos numéricos detallados. Por lo tanto, un ingeniero de microondas puede desarrollar una buena intuición sobre la línea de transmisión y los problemas de adaptación de impedancia al aprender a pensar en términos de la carta de Smith.

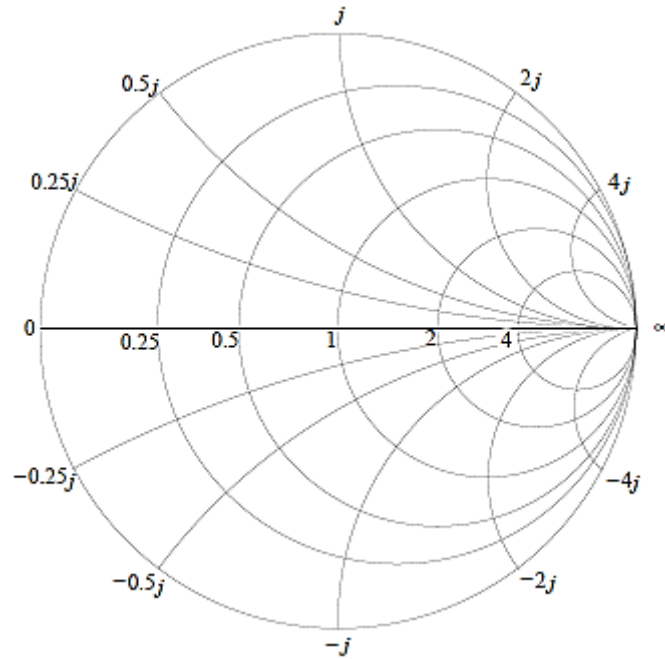


**Figura 46.** Carta de Smith [13].

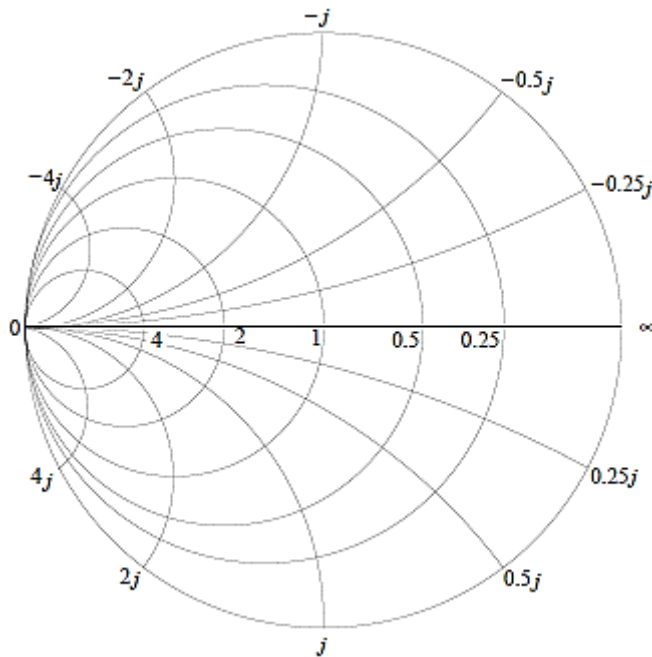
A primera vista la carta de Smith puede parecer intimidante, pero la clave para comprenderlo está en darse cuenta de que se basa en un gráfico polar del coeficiente de reflexión de voltaje  $\Gamma$ . Donde el coeficiente de reflexión está expresado en forma polar (magnitud y fase) como:  $\Gamma = |\Gamma|e^{j\theta}$ . Donde la magnitud  $|\Gamma|$  se traza como un radio ( $|\Gamma| \leq 1$ ) desde el centro de la carta y, el ángulo  $\theta$  está comprendido entre  $(-180^\circ \leq \theta \leq 180^\circ)$  y se mide en sentido antihorario desde el lado derecho del diámetro horizontal. Cualquier

coeficiente de reflexión pasivamente realizable  $|\Gamma| \leq 1$  puede entonces ser trazado como un punto único en la carta de Smith.

Las versiones normalizadas de la carta de Smith resultan ser más utilizadas, el cual tiene versiones de admitancia e impedancia, como se puede ver en las Figuras 47 y 48.



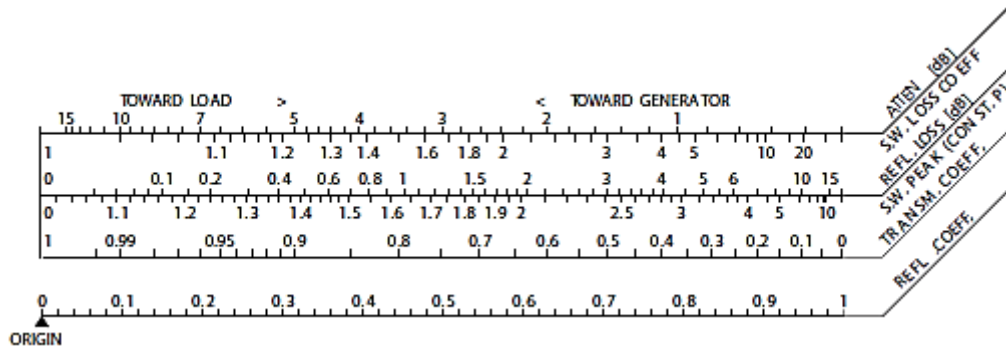
**Figura 47.** Carta de Smith para impedancia normalizada [7].



**Figura 48.** Carta de Smith para admitancia normalizada [7].



La utilidad real de la carta de Smith; radica en el hecho de que se puede utilizar para convertir los coeficientes de reflexión a impedancia o admitancia normalizada, utilizando los círculos de impedancia o admitancia impresos en la carta. Cuando se trata de impedancias en la carta de Smith, generalmente se utilizan cantidades normalizadas que se denotará con letras minúsculas. La constante de normalización suele ser la impedancia característica de la línea de transmisión. Por tanto,  $z = Z/Z_0$  el cual representa la versión normalizada de la impedancia  $Z$ . La Figura 49 muestra el nomograma de la carta de Smith.



**Figura 49.** Nomograma utilizado en la carta de Smith con parámetros de transmisión que relaciona la magnitud del coeficiente de la línea de transmisión (TRANSM. COEFF, T); la atenuación (ATTE, [dB]); el coeficiente de pérdida de las ondas estacionarias (S.W. LOSS COEFF); el coeficiente de reflexión (REFL. COEFF,  $\Gamma$ ); la pérdida de reflexión (REFL. LOSS, [dB]); y el pico de la onda estacionaria (S. W. PEAK CONST,  $\Gamma$ ) [7].

Si una línea sin pérdidas de impedancia característica  $Z_0$  está conectada a una impedancia de carga  $Z_L$ , el coeficiente de reflexión en la carga se puede escribir acorde a la Ecuación (67) como:

$$\Gamma = \frac{z_L - 1}{z_L + 1} = |\Gamma|e^{j\theta} \quad (153)$$

Donde:  $z_L = Z_L/Z_0$  es la impedancia de carga normalizada. Esta relación se puede resolver para  $z_L$  en términos de  $\Gamma$  como:

$$z_L = \frac{1 + |\Gamma|e^{j\theta}}{1 - |\Gamma|e^{j\theta}} \quad (154)$$

La carta de Smith también se puede utilizar para resolver gráficamente la impedancia de la línea de transmisión a partir de la Ecuación (78) ya que esto se puede escribir en términos del coeficiente de reflexión generalizado como:

$$Z_{in} = Z_0 \frac{1 + \Gamma e^{-2j\beta\ell}}{1 - \Gamma e^{-2j\beta\ell}} \quad (155)$$

**Ejemplo 16.**

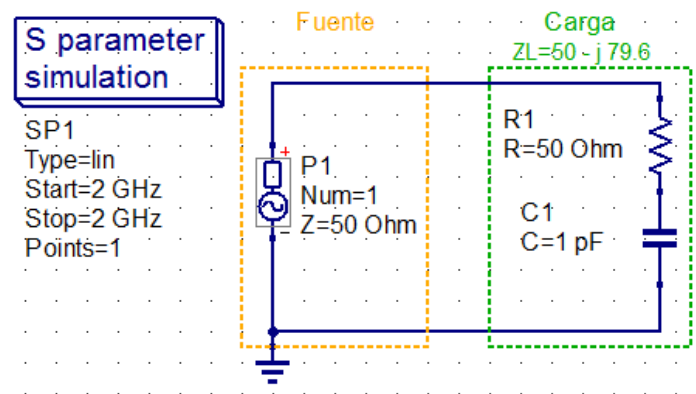
Se tiene una impedancia de carga;  $Z_L = 50 - j 79.6 \Omega$ , operando a una frecuencia de 2 GHz, representar dicha impedancia en la carta de Smith.

Solución:

Para la representación de la impedancia de carga en la carta de Smith, se realiza la normalización definida como;  $z_L = Z_L/Z_0$ , donde  $Z_0 = 50 \Omega$ .

Por lo tanto, se obtiene la impedancia de carga normalizada como:  $z_L = 1 - j 1.592$ , el cual está situado en la parte inferior de la carta de Smith al tratarse de una impedancia de carga capacitiva.

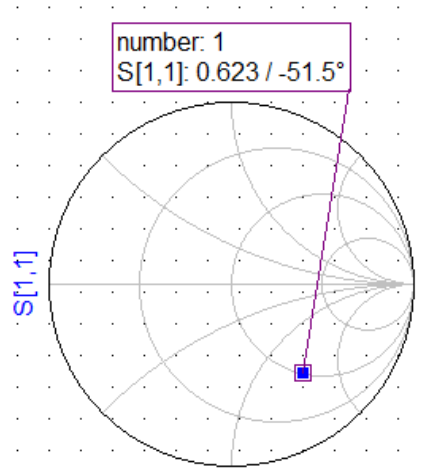
Al tener como dato la frecuencia de operación se puede representar dicha impedancia con componentes concentrados; el cual permitirá diseñar y desarrollar la simulación correspondiente, acorde al circuito equivalente de la Figura 50.



**Figura 50.** Diseño circuitual del ejercicio.

Realizado la simulación del circuito, se tiene la representación del parámetro  $S[1.1] = 0.623 \angle -51.5^\circ$ , el cual también representa el coeficiente de reflexión  $\Gamma$  de la carga descrito por la Ecuación (153).

Como se puede ver en la Figura 51, la representación de  $\Gamma$  está situado en la parte inferior de la carta de Smith, debido al comportamiento de reactancia capacitiva de la impedancia de carga.



**Figura 51.** Representación de  $\Gamma_L$  en la carta de Smith.

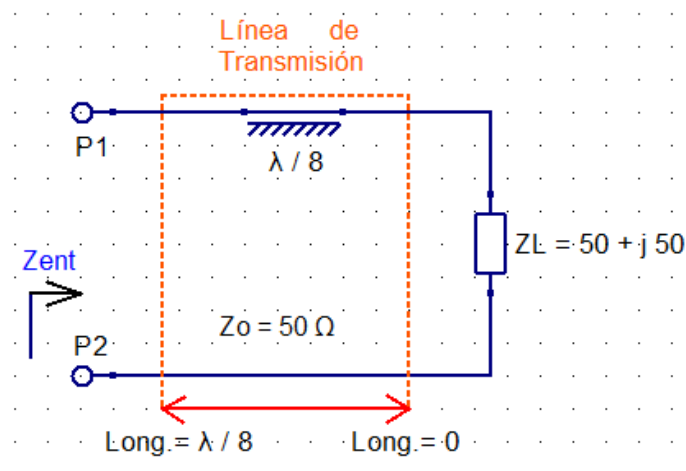
La representación del parámetro  $S[1,1]$  también puede ser definido como impedancia normalizada utilizando la Ecuación (154), el cual da como resultado;  $z_L = 1 - j 1.592 [\Omega]$ .

### Ejemplo 17.

Del circuito de la Figura 52 determinar la impedancia de entrada  $Z_{ent}$ , el coeficiente de reflexión de la carga y la relación de onda estacionaria VSWR; si la línea de transmisión tiene una longitud eléctrica de  $45^\circ$  e impedancia característica de  $50 \Omega$ . La impedancia de carga es:  $Z_L = 50 + j 50 \Omega$ .

Solución:

Se tiene el diseño del circuito de la línea de transmisión.



**Figura 52.** Diseño circuital del ejercicio.

La impedancia de carga normalizada está determinada como:  $z_L = Z_L/Z_0$ . Por lo tanto, se tiene  $z_L = 1 + j1$ , el cual se puede representar en la carta de Smith.

Como dato se tiene la longitud eléctrica de la línea de transmisión como:

$$\beta\ell = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$$

$$\beta\ell = \frac{2\pi\ell}{\lambda}$$

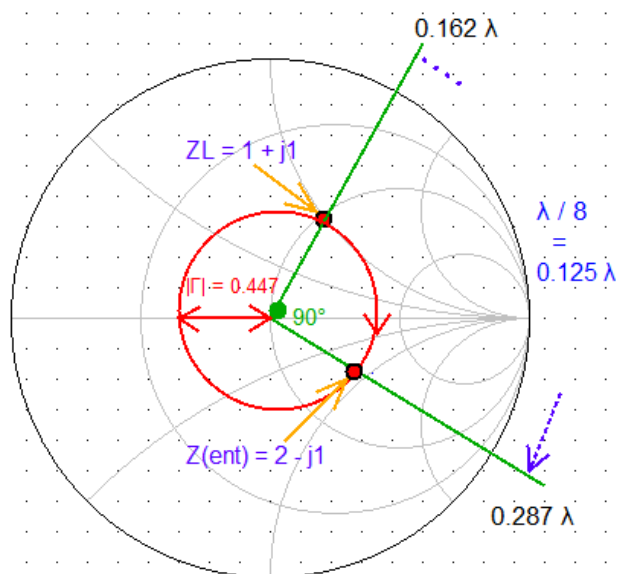
Entonces, se tiene:

$$\frac{2\pi\ell}{\lambda} = \frac{\pi}{4}$$

$$\ell = \frac{\lambda}{8} = 0.125 \lambda$$

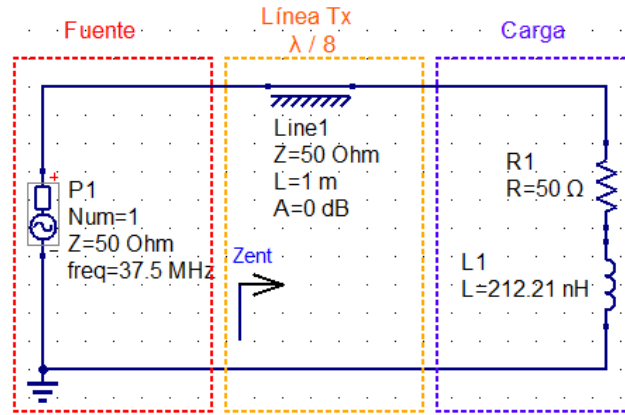
Por lo tanto; en la carta de Smith de la Figura 53 la impedancia de carga normalizada  $z_L$  se desplazará en dirección hacia la fuente (sentido horario)  $0.125 \lambda$ , el cual dará como resultado la impedancia de entrada  $Z_{ent} = 2 - j1$  situado en la parte inferior de la carta de Smith.

El desplazamiento se realiza alrededor del círculo VSWR, cuya magnitud del coeficiente de reflexión  $|\Gamma| = 0.447$  y la relación  $VSWR = 2.62$ .



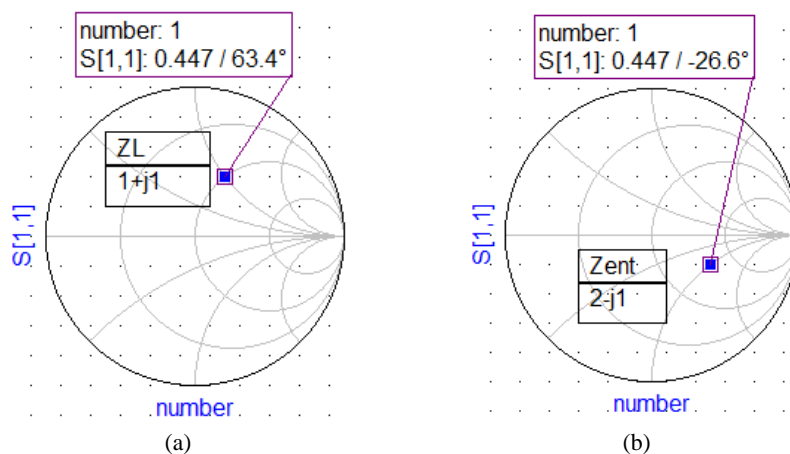
**Figura 53.** Desplazamiento de  $\lambda/8$  desde la carga normalizada hacia la fuente.

**Simulación:** Se procede con el diseño del circuito equivalente, como se muestra en la Figura 54. Donde, a fin de cumplir con la longitud eléctrica de la línea de transmisión se estableció una frecuencia de operación de 37.5 MHz para la fuente de alimentación, dando así una longitud física de la línea de 1 metro, para este ejercicio se asumirá una línea sin pérdidas.



**Figura 54.** Diseño circuital del ejercicio.

La Figura 55 muestra el resultado de la simulación del ejercicio utilizando la carta de Smith; donde, en la Figura 55-a muestra el coeficiente de reflexión de la carga con una magnitud de 0.447 y un ángulo de  $63.4^\circ$ , así mismo también se puede representar la impedancia normalizada de la carga  $z_L = 1 + j1$ . Como también se muestra en la Figura 55-b el coeficiente de reflexión y la impedancia de entrada del circuito con el desplazamiento de la línea de transmisión de  $\lambda/8$ .

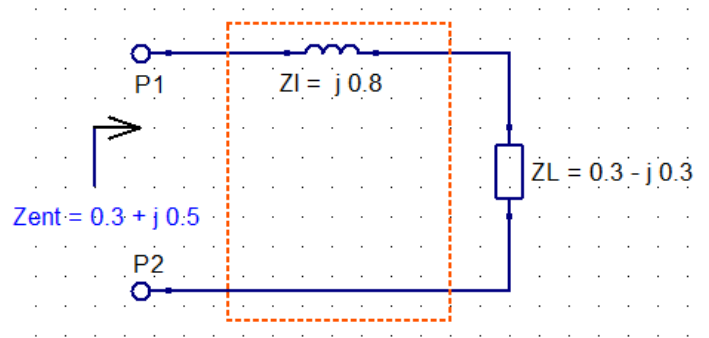


**Figura 55.** Coeficientes de reflexión de  $z_L$  &  $Z_{ent}$ .

### 3.1 Adición de Elementos Concentrados

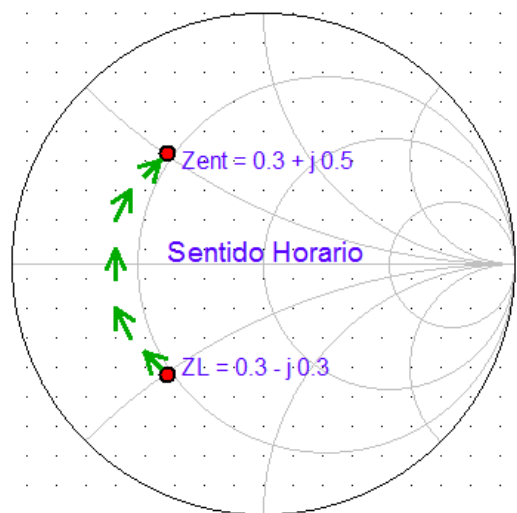
#### 3.1.1 Inductor en Serie con la Impedancia de Carga

La Figura 56 muestra el diseño del circuito al adicionar un inductor en serie con la impedancia de carga  $Z_L$ .



**Figura 56.** Inductor en serie con la impedancia de carga  $Z_L$ .

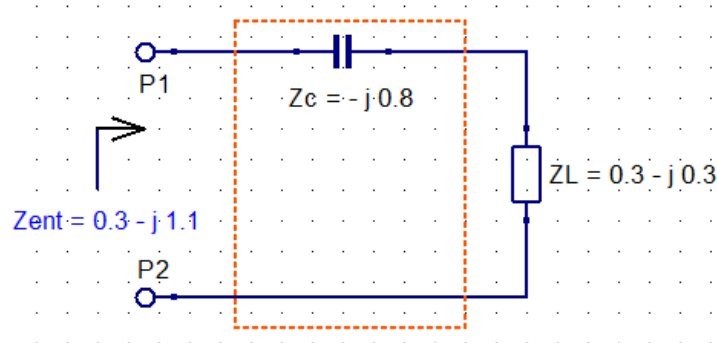
El efecto de adicionar un inductor en serie con la impedancia de carga, como se puede ver en el diagrama de impedancia de Smith de la Figura 57, el desplazamiento desde el valor de la impedancia de carga normalizada se realiza en sentido horario, adicionando el valor complejo del inductor. Por lo tanto, se tiene como resultado el valor de la impedancia de entrada  $Z_{ent}$ .



**Figura 57.** Desplazamiento en sentido horario en la carta de impedancia de Smith (Inductor en serie con  $Z_L$ ).

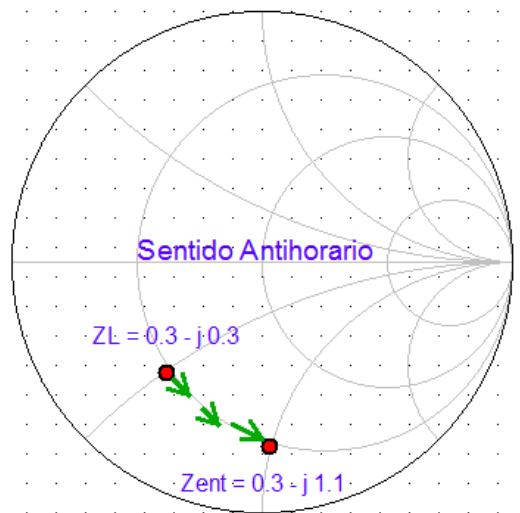
### 3.1.2 Condensador en Serie con la Impedancia de Carga

La Figura 58 muestra el diseño del circuito al adicionar un condensador en serie con la impedancia de carga  $Z_L$ .



**Figura 58.** Condensador en serie con la impedancia de carga  $Z_L$ .

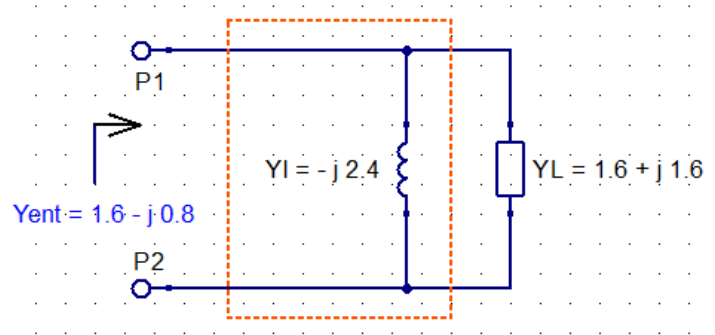
El efecto de adicionar un condensador en serie con la impedancia de carga, como se puede ver en la carta de impedancia de Smith de la Figura 59, el desplazamiento desde el valor de la impedancia de carga normalizada se realiza en sentido antihorario, adicionando el valor del condensador. Teniéndose como resultado la impedancia de entrada  $Z_{ent}$ .



**Figura 59.** Desplazamiento en sentido antihorario en la carta de impedancia de Smith (capacitor en serie con  $Z_L$ ).

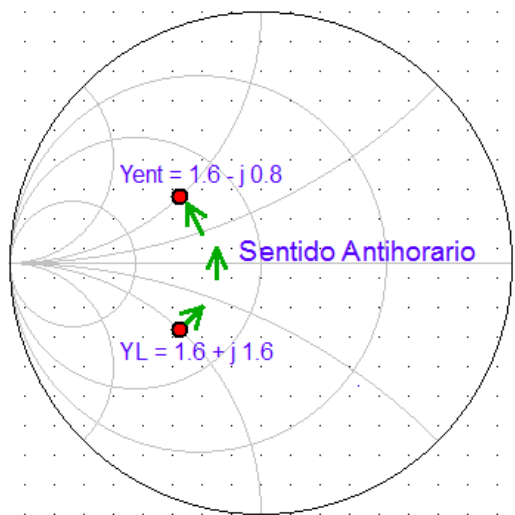
### 3.1.3 Inductor en Paralelo con la Admitancia de Carga

La Figura 60 muestra el diseño del circuito al adicionar un inductor en paralelo con la admitancia de la carga  $Y_L$ .



**Figura 60.** Inductor en paralelo con la admitancia de carga  $Y_L$ .

El efecto de adicionar un inductor en paralelo con la admitancia de la carga, se puede ver en la carta de admitancia de Smith de la Figura 61, donde el desplazamiento desde el valor de la admitancia de la carga normalizada se realiza en sentido antihorario, adicionando el valor del inductor en admitancia. Por lo tanto, se tiene como resultado la admitancia de entrada  $y_{ent}$ .

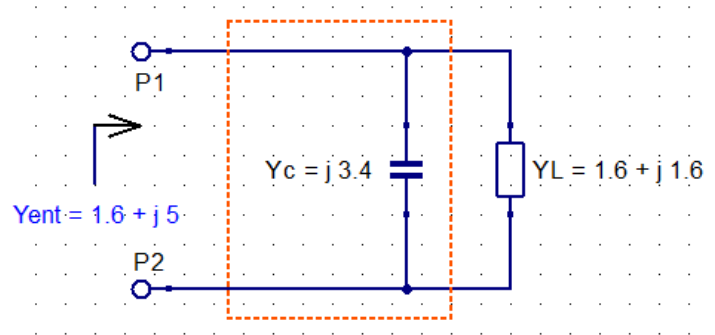


**Figura 61.** Desplazamiento en sentido antihorario en la carta de admitancia de Smith (inductor en paralelo con  $Y_L$ ).



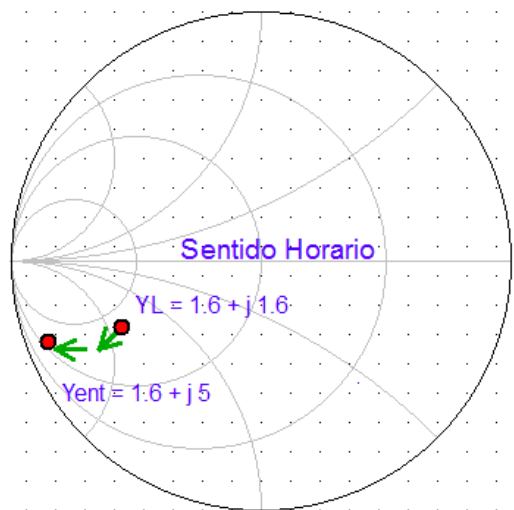
### 3.1.4 Condensador en Paralelo con la Admitancia de Carga

La Figura 62 muestra el diseño del circuito al adicionar un condensador en paralelo con la admitancia de la carga  $Y_L$ .



**Figura 62.** Condensador en paralelo con la admitancia de carga  $Y_L$ .

El efecto de adicionar un condensador en paralelo con la admitancia de la carga, se puede ver en la carta de admitancia de Smith de la Figura 63, donde el desplazamiento desde el valor de la admitancia de la carga normalizada se realiza en sentido horario, adicionando el valor del condensador en admitancia. Teniéndose como resultado la admitancia de entrada  $y_{ent}$ .



**Figura 63.** Desplazamiento en sentido horario en la carta de admitancia de Smith (condensador en paralelo con  $Y_L$ ).

### 3.2 Unidades Logarítmicas

A menudo, la relación de dos niveles de potencia  $P_1$  y  $P_2$  en un sistema de comunicaciones y microondas se expresa en unidades logarítmicas dB como: [2]

$$10 \text{ Log} \left( \frac{P_1}{P_2} \right) \text{ dB} \quad (156)$$

Por lo tanto, una relación de potencia de 2 equivale a 3 dB, mientras que una relación de potencia de 0.1 equivale a -10 dB. El uso de relaciones de potencia en dB facilita el cálculo de la pérdida o ganancia de potencia mediante una serie de componentes, ya que los factores multiplicativos de pérdida o ganancia pueden contabilizarse sumando la pérdida o ganancia en dB para cada etapa. Por ejemplo, una señal que pasa a través de un atenuador de 6 dB seguida de un amplificador de 23 dB tendrá una ganancia general de  $23 - 6 = 17$  dB.

Las unidades logarítmicas a menudo se utilizan solo para representar relaciones de potencia, pero si  $P_1 = V_1^2/R_1$  y  $P_2 = V_2^2/R_2$  entonces la relación de potencia resultante en términos de voltaje es:

$$10 \text{ Log} \left( \frac{V_1^2 R_2}{V_2^2 R_1} \right) = 20 \text{ Log} \left( \frac{V_1}{V_2} \sqrt{\frac{R_2}{R_1}} \right) \text{ dB} \quad (157)$$

Donde:  $R_1$  y  $R_2$  son las resistencias de carga y  $V_1$ ,  $V_2$  son los voltajes que aparecen a través de estas cargas. Si las resistencias de carga son iguales, entonces se tiene:

$$20 \text{ Log} \left( \frac{V_1}{V_2} \right) \text{ dB} \quad (158)$$

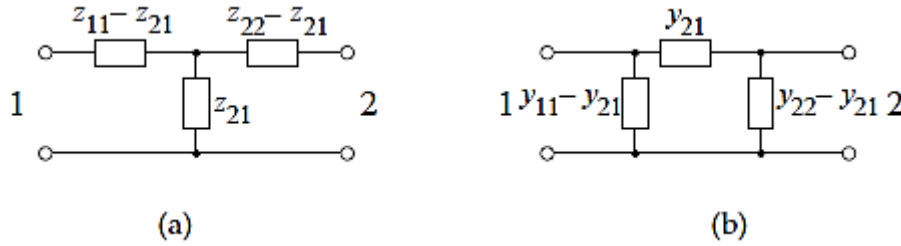
La potencia absoluta también se puede expresar en notación de decibelios, si un nivel de potencia de referencia es establecido como  $P_2 = 1 \text{ mW}$ , entonces la potencia  $P_1$  se puede expresar en dBm como:

$$10 \text{ Log} \left( \frac{P_1}{1 \text{ mW}} \right) \text{ dBm} \quad (159)$$

Así, una potencia de  $1 \text{ mW}$  equivale a 0 dBm, mientras que una potencia de  $1 \text{ W}$  equivale a 30 dBm, y así sucesivamente.

### 3.3 Matrices de Impedancia & Admitancia

Para el presente análisis se considera una red arbitraria de microondas de N-puertos. Dichos puertos pueden ser cualquier tipo de línea de transmisión, o línea de transmisión equivalente a un modo de guía de ondas de propagación única, como se muestra en la Figura 64. Si uno de los puertos físicos de la red es una guía de onda que admite más de un modo de propagación; un puerto adicional de electricidad se puede agregar para tener en cuenta estos modos. En un punto específico del puerto, un plano terminal  $t_n$  se define junto con los voltajes y corrientes equivalentes para las ondas incidentes y/o reflejadas:  $(V_n^+, I_n^+)$  y  $(V_n^-, I_n^-)$ .



**Figura 64.** Circuito equivalente de parámetros Z y Y para una red recíproca; (a) parámetros Z, y (b) parámetros Y [7].

Los planos terminales son importantes para proporcionar una referencia de fase para los fasores de tensión y corriente. Ahora, en el n-ésimo plano terminal, el voltaje y la corriente total están dados por: [13]

$$V_n = V_n^+ + V_n^- \quad (160)$$

$$I_n = I_n^+ - I_n^- \quad (161)$$

La matriz de impedancia  $[Z]$  de la red de microondas relaciona estos voltajes y corrientes de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \cdots & Z_{1N} \\ Z_{21} & Z_{22} & \cdots & Z_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{N1} & \cdots & \cdots & Z_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_N \end{bmatrix}$$

O también en su forma matricial como:

$$[V] = [Z][I] \quad (162)$$

Similarmemente, se puede definir como una matriz de admitancia  $[Y]$  como:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \cdots & Y_{1N} \\ Y_{21} & Y_{22} & \cdots & Y_{2N} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ Y_{N1} & \cdots & \cdots & Y_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_N \end{bmatrix}$$

Como también en forma matricial:

$$[I] = [Y][V] \quad (163)$$

Por supuesto, las matrices  $[Z]$  y  $[Y]$  son inversas entre sí:

$$[Y] = [Z]^{-1} \quad (164)$$

Teniendo en cuenta que tanto las matrices  $[Z]$  como  $[Y]$  relacionan los voltajes y corrientes totales del puerto. De la Ecuación (162) vemos que  $Z_{ij}$  se puede encontrar como:

$$Z_{ij} = \left. \frac{V_i}{I_j} \right|_{I_k=0 \text{ para } k \neq j} \quad (165)$$

Por lo tanto, la Ecuación (165) establece que  $Z_{ij}$  se puede encontrar conduciendo el puerto  $j$  con la corriente  $I_j$  en circuito abierto; y todos los demás puertos en  $I_k = 0$  para  $k \neq j$ . Y midiendo el voltaje del circuito abierto en el puerto  $i$ . Por lo tanto,  $Z_{ii}$  será la impedancia de entrada que se ve en el puerto  $i$  cuando todos los demás puertos están en circuito abierto; donde  $Z_{ij}$  es la impedancia de transferencia entre los puertos  $i$  &  $j$  cuando todos los demás puertos están en circuito abierto.

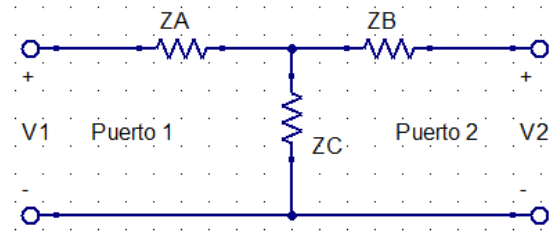
De manera similar de la Ecuación (163),  $Y_{ij}$  se puede encontrar como:

$$Y_{ij} = \left. \frac{I_i}{V_j} \right|_{V_k=0 \text{ para } k \neq j} \quad (166)$$

que establece que  $Y_{ij}$  se puede determinar impulsando el puerto  $j$  con el voltaje  $V_j$ , cortocircuitando todos los demás puertos, entonces  $V_k = 0$  para  $K \neq j$ , y midiendo la corriente en cortocircuito en el puerto  $i$ .

**Ejemplo 18.**

Determinar los parámetros  $Z$  de la red  $T$  de dos puertos que se muestra a continuación [1]:



Solución:

De la Ecuación (165), el parámetro  $Z_{11}$  puede ser determinado como la impedancia de entrada del puerto 1, cuando el puerto 2 está en circuito abierto:

$$Z_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{I_2=0} = Z_A + Z_C$$

La impedancia de transferencia  $Z_{12}$  se puede encontrar midiendo la tensión en circuito abierto en el puerto 1, cuando se aplica una corriente  $I_2$  en el puerto 2. Por división de voltaje:

$$Z_{12} = \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{I_1=0} = \frac{V_2}{I_2} \frac{Z_C}{Z_B + Z_C} = Z_C$$

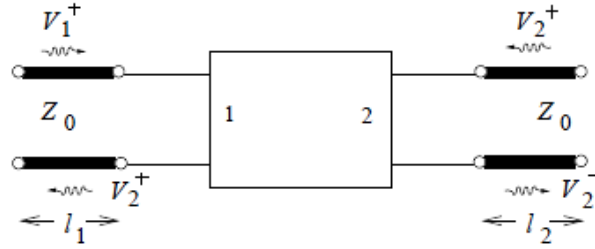
Como se puede verificar que  $Z_{21} = Z_{12}$ , lo que indica que el circuito es recíproco. Finalmente,  $Z_{22}$  se puede encontrar como:

$$Z_{22} = \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{I_1=0} = Z_B + Z_C$$

### 3.4 Parámetros S

La medición directa de parámetros como:  $Z, Y, ABCD$ , etc. En la mayoría de aplicaciones es muy complicado, porque requiere que los puertos estén terminados en circuitos cortos o abiertos. Para circuitos activos, tales terminaciones podrían dar como resultado un comportamiento no deseado como; oscilaciones o destrucción del componente. Además, en RF o microondas es difícil realizar que un circuito este en abierto o en corto [13]. Ya que los circuitos de RF están diseñados con especial atención a la máxima transferencia de potencia y se prefieren terminaciones resistivas, ya que están más cerca de las condiciones reales de operación, y así el efecto de los errores de medición tiene menos impacto.

La esencia de uso de los parámetros de dispersión S, es porque relacionan ondas incidentes y reflejadas en una línea de transmisión, como se muestra en la Figura 65. Por lo tanto, los parámetros S están relacionados con el flujo de potencia. Todas estas son buenas razones porque en diseño de RF y microondas se prefieren el uso de los parámetros S [7].



**Figura 65.** Red de dos puertos.

De la figura anterior los parámetros S pueden ser representados con una relación de  $a_n$  y  $b_n$ , como se expresa a continuación:

$$a_n = \frac{v_n^+}{\sqrt{Z_{0n}}} \quad ; \text{ Proporcional a la onda de entrada en el } n\text{-ésimo puerto.}$$

$$b_n = \frac{v_n^-}{\sqrt{Z_{0n}}} \quad ; \text{ Proporcional a la onda de salida en el } n\text{-ésimo puerto.}$$

Donde:  $v_n^+$  y  $v_n^-$ , representan los voltajes correspondientes para las ondas de entrada y salida de una línea de transmisión conectado al  $n$  – ésimo puerto a impedancia característica  $Z_0$ ; por lo tanto, la relación entre  $a_n$  y  $b_n$  puede ser escrito como:

$$b_1 = S_{11}a_1 + S_{12}a_2$$

$$b_2 = S_{21}a_1 + S_{22}a_2$$

Por consiguiente, se tiene:

$$S_{11} = \frac{b_1}{a_1}, \quad S_{21} = \frac{b_2}{a_1}, \quad a_2 = 0$$

$$S_{12} = \frac{b_1}{a_2}, \quad S_{22} = \frac{b_2}{a_2}, \quad a_1 = 0$$

Donde:

$S_{11}$ = Coeficiente de reflexión en la entrada

$S_{21}$ = Coeficiente de transmisión directa

$S_{12}$ = Coeficiente de transmisión inversa

$S_{22}$ = Coeficiente de reflexión en la salida

En vista de la dificultad de definir voltajes y corrientes para líneas no-TEM. Además, existe un problema práctico al intentar medir tensiones y corrientes a frecuencia de microondas, porque las mediciones directas generalmente involucran la magnitud (inferido de la potencia) y fase de una onda que viaja en una dirección determinada o de una onda estacionaria. Por lo tanto, los voltajes y corrientes equivalentes y, las matrices relacionadas de impedancia y admitancia, se convierten en algo así como una abstracción cuando se trata de redes de alta frecuencia. Una representación más acorde con la medida directa de ondas reflejadas y transmitidas, viene dada por la matriz de dispersión  $S$ .

Al igual que la matriz de impedancia y admitancia para una red de  $N$ -puertos; la matriz de dispersión  $S$ , proporciona una descripción completa de los puertos de una red. Mientras que la matriz de impedancia y admitancia relacionan los voltajes y corrientes totales en los puertos. Por lo tanto, la matriz de dispersión relaciona las ondas de voltaje incidente y reflejado de los puertos.

Por consiguiente, se tiene una red de  $N$ -puertos, donde  $V_n^+$  es la amplitud de la onda de voltaje incidente en el puerto  $n$  y,  $V_n^-$  es la amplitud de la onda de voltaje reflejada desde el puerto  $n$ . La matriz de dispersión o matriz  $[S]$ , está definido en relación con las ondas de voltajes incidentes y reflejadas como:

$$\begin{bmatrix} V_1^- \\ V_2^- \\ \vdots \\ V_N^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \cdots & S_{1N} \\ S_{21} & S_{22} & \cdots & S_{2N} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ S_{N1} & \cdots & \cdots & S_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^+ \\ V_2^+ \\ \vdots \\ V_N^+ \end{bmatrix}$$

O también de la forma:

$$[V^-] = [S][V^+] \quad (167)$$

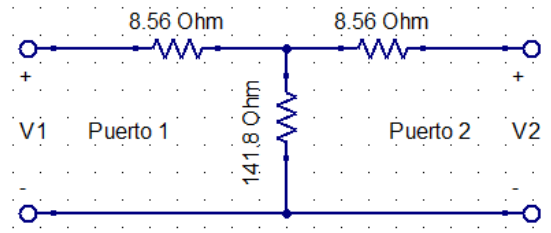
Un elemento específico de la matriz de dispersión puede ser determinado como:

$$S_{ij} = \left. \frac{V_i^-}{V_j^+} \right|_{V_k^+ = 0 \text{ para } k \neq j} \quad (168)$$

Por lo tanto, la Ecuación (168) menciona que  $S_{ij}$  es determinado por impulsión del puerto  $j$  con una onda incidente de voltaje  $V_j^+$  y midiendo la amplitud de la onda reflejada  $V_i^-$  saliendo del puerto  $i$ . Las ondas incidentes en todos los puertos excepto el  $j$  –ésimo puerto se establecen en cero, lo que significa que todos los puertos deben terminar en cargas adaptadas para evitar reflexiones. Entonces,  $S_{ii}$  es el coeficiente de reflexión visto mirando en el puerto  $i$  cuando todos los demás puertos terminan en cargas adaptadas y,  $S_{ij}$  es el coeficiente de transmisión del puerto  $j$  al puerto  $i$  cuando todos los demás puertos terminan en cargas adaptadas.

**Ejemplo 19.**

Determinar los parámetros de dispersión del circuito atenuador de 3 dB que se muestra a continuación [1].



Solución:

De la Ecuación (168),  $S_{11}$  se puede determinar como el coeficiente de reflexión visto en el puerto 1, cuando el puerto 2 termina en una carga adaptada ( $Z_0 = 50 \Omega$ ):

$$S_{11} = \left. \frac{V_1^-}{V_1^+} \right|_{V_2^+ = 0} = \Gamma^{(1)} \Big|_{V_2^+ = 0} = \frac{Z_{in}^{(1)} - Z_0}{Z_{in}^{(1)} + Z_0} \Big|_{Z_0 \text{ en el puerto 2}}$$

Pero

$$Z_{in}^{(1)} = 8.56 + \left[ \frac{(141.8)(8.56 + 50)}{(141.8 + 8.56 + 50)} \right] = 50 \Omega$$

Por lo tanto;  $S_{11} = 0$ , y por simetría del circuito  $S_{22} = 0$

Se puede encontrar  $S_{21}$  aplicando una onda incidente en el puerto 1;  $V_1^+$ , y midiendo la onda saliente en el puerto 2;  $V_2^-$ . Esto es equivalente al coeficiente de transmisión del puerto 1 al puerto 2:

$$S_{21} = \left. \frac{V_2^-}{V_1^+} \right|_{V_2^+ = 0}$$

Por el hecho de que  $S_{11} = S_{22} = 0$ , sabemos que  $V_1^- = 0$  cuando el puerto 2 está conectado en  $Z_0 = 50 \Omega$ , y que  $V_2^+ = 0$ . En este caso tenemos que  $V_1^+ = V_1$  y  $V_2^- = V_2$ . Al aplicar un voltaje  $V_1$  en el puerto 1 y usar el divisor de voltaje dos veces, encontramos  $V_2^- = V_2$  como el voltaje a través de la resistencia de carga de  $50 \Omega$  en el puerto 2:

$$V_2^- = V_2 = V_1 \left( \frac{41.44}{41.44 + 8.56} \right) \left( \frac{50}{50 + 8.56} \right) = 0.707 V_1$$



Donde:

$$41.44 = \frac{(141.8)(58.56)}{(141.8 + 58.56)}$$

es la resistencia de la combinación en paralelo de la carga de  $50 \Omega$  y la resistencia de  $8.56 \Omega$  con la resistencia de  $141.8 \Omega$ . Así,  $S_{12} = S_{21} = 0.707$ .

Si la potencia de entrada es:  $|V_1^+|^2 / 2Z_0$ , entonces la potencia de salida es:

$$\frac{|V_2^-|^2}{2Z_0} = \frac{|S_{21}V_1^+|^2}{2Z_0} = \frac{|S_{21}|^2}{2Z_0|V_1^+|^2} = \frac{|V_1^+|^2}{4Z_0}$$

el cuál es la mitad ( $-3$  dB) de la potencia de entrada.

### 3.4.1 Redes Recíprocas y sin Pérdidas

Como se desarrolló en la sección de matrices de impedancia y admitancia; son simétricas las redes recíprocas y son puramente imaginarios para redes sin pérdidas. Las matrices de dispersión  $S$ , para estos tipos particulares de redes también tienen propiedades especiales. Se definirá que la matriz de dispersión para una red recíproca es simétrica, y que la matriz de dispersión para una red sin pérdidas es unitaria.

Una matriz de dispersión es simétrica para redes recíprocas, si cumple:

$$[S] = [S]^t \quad (169)$$

Una matriz que satisface la siguiente condición se llama, *matriz unitaria*.

$$[S]^t [S]^* = [U]$$

$$[S]^* = \{[S]^t\}^{-1} \quad (170)$$

La Ecuación Matricial (170) se puede escribir en forma de suma como:

$$\sum_{k=1}^N S_{ki} S_{kj}^* = \delta_{ij}, \quad \text{para todo } i, j. \quad (171)$$

Donde:  $\delta_{ij} = 1$ , si  $i = j$  y,  $\delta_{ij} = 0$  si  $i \neq j$ , es el símbolo delta de Kronecker. Por lo tanto, si  $i = j$ , la Ecuación (171) se reduce a:

$$\sum_{k=1}^N S_{ki} S_{kj}^* = 1 \quad (172)$$

mientras que si  $i \neq j$ , la Ecuación (171) se reduce a:

$$\sum_{k=1}^N S_{ki} S_{kj}^* = 0, \quad \text{para } i \neq j. \quad (173)$$

Por lo tanto, la Ecuación (172) establece que el producto escalar de cualquier columna de la matriz  $[S]$  con el conjugado de esa misma columna da la unidad, mientras que la Ecuación (173) establece que el producto escalar de cualquier columna con el conjugado de una columna diferente da cero (las columnas son ortonormales). Como también desde la Ecuación (170) se tiene:

$$[S][S]^* = [U] \quad (174)$$

---

### Ejemplo 20.

---

Se sabe que una red de dos puertos tiene la siguiente matriz de dispersión  $[S]$ . Determinar si la red es recíproca y sin pérdidas. Si el puerto 2 está conectado a una carga adaptada, ¿Cuál es la pérdida de retorno observado desde el puerto 1?, si el puerto 2 termina en un cortocircuito, ¿Cuál es la pérdida de retorno observada desde el puerto 1? [1]

$$[S] = \begin{bmatrix} 0.15 \angle 0^\circ & 0.85 \angle -45^\circ \\ 0.85 \angle 45^\circ & 0.2 \angle 0^\circ \end{bmatrix}$$

1° Solución:

Como  $[S]$  no es simétrico, la red no es recíproca. Para no tener pérdidas, los parámetros de dispersión deben satisfacer las Ecuaciones (172) y (173). Tomando la primera columna [ $i = 1$  en la Ecuación (172)] da como resultado:

$$|S_{11}|^2 + |S_{21}|^2 = (0.15)^2 + (0.85)^2 = 0.745 \neq 1$$

Por lo que se determina que la red no está libre de pérdidas.

2° Solución:

Cuando el puerto 2 termina en una carga adaptada, el coeficiente de reflexión visto en el puerto 1 es:

$$\Gamma = S_{11} = 0.15$$

Entonces la pérdida de retorno resulta:

$$RL = -20 \log |\Gamma| = -20 \log (0.15) = 16.5 \text{ dB}$$

3° Solución:

Cuando el puerto 2 termina en cortocircuito, el coeficiente de reflexión visto en el puerto 1 se puede encontrar de la siguiente manera. De la definición de la matriz de dispersión y el hecho de que  $V_2^+ = -V_2^-$  (para un cortocircuito en el puerto 2), podemos escribir como:

$$V_1^- = S_{11}V_1^+ + S_{12}V_2^+ = S_{11}V_1^+ - S_{12}V_2^-$$

$$V_2^- = S_{21}V_1^+ + S_{22}V_2^+ = S_{21}V_1^+ - S_{22}V_2^-$$

La segunda ecuación se tiene:

$$V_2^- = \frac{S_{21}}{1 + S_{22}} V_1^+$$

Dividiendo la primera ecuación por  $V_1^+$  y usando el resultado anterior da el coeficiente de reflexión visto en el puerto 1 como:

$$\Gamma = \frac{V_1^-}{V_1^+} = S_{11} - S_{12} \frac{V_2^-}{V_1^+} = S_{11} - \frac{S_{12}S_{21}}{1 + S_{22}}$$

$$\Gamma = 0.15 - \frac{(0.85\angle -45^\circ)(0.85\angle 45^\circ)}{1 + 0.2} = -0.452$$

Por lo tanto, la pérdida de retorno es:

$$RL = -20 \log |\Gamma| = -20 \log (0.452) = 6.9 \text{ dB}$$

Un punto importante para comprender acerca de los parámetros de dispersión  $[S]$ ; es que el coeficiente de reflexión que mira en el puerto  $n$  no es igual a  $S_{nn}$  a menos que todos los demás puertos estén adaptados. De manera similar, el coeficiente de transmisión del puerto  $m$  al puerto  $n$  no es igual a  $S_{nm}$  a menos que todos los demás puertos estén adaptados. Los parámetros de dispersión de una red son propiedades solo de la propia red, suponiendo que la red es lineal; y se definen con la condición de que todos los puertos estén adaptados. Cambiando las terminaciones o excitaciones de una red no cambia sus parámetros de dispersión, pero puede cambiar el coeficiente de reflexión visto en un puerto dado, o el coeficiente de transmisión entre dos puertos.

### 3.5 Elementos Concentrados & Distribuidos

En el análisis de diseño de circuitos en radiofrecuencia RF o microonda, los elementos de un circuito pasivo como: resistencias, condensadores e inductores; deben considerarse con más cuidado, ya que en diseños de alta frecuencia; la resistencia simple, condensador o inductor no se puede contar con que proporcionen resistencia pura, capacitancia o inductancia. Por lo tanto, en circuitos de alta frecuencia; por lo general, el elemento "agrupado" se modela mejor como una combinación de estos elementos puros con líneas de transmisión. Además, cuando el tamaño del elemento llega a ser mayor que 0.1 en longitud de onda; el circuito equivalente debe incluir las líneas de transmisión [6].

En cierto sentido estándar, la teoría de circuitos es una aproximación o un caso especial de la teoría más amplia del electromagnetismo. como se describió en las ecuaciones de Maxwell. Esto se debe al hecho de que en general las aproximaciones de elementos agrupados de la teoría de circuitos, pueden no ser válidas en RF o en alta frecuencia. Los componentes de microondas a menudo actúan como elementos *distribuidos*, donde la fase del voltaje y la corriente cambia significativamente sobre la extensión física del dispositivo, porque las dimensiones del dispositivo son del orden de la longitud de onda eléctrica. A frecuencias más bajas la longitud de onda es lo suficientemente grande como para que haya una variación de fase insignificante a través de las dimensiones de un componente [12].

## 4 Adaptación de Impedancia

### 4.1 Adaptación de Impedancia y Sintonización.

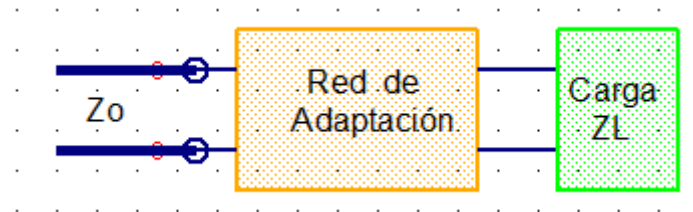
Este capítulo marca un punto de inflexión, ya que ahora se comenzará a aplicar la teoría y las técnicas de los capítulos anteriores a problemas prácticos en ingeniería de microondas. Se analizará con el tema de adaptación de impedancia, que a menudo es una parte importante de un proceso de diseño más amplio para un componente o sistema de microondas. La idea básica de adaptación de impedancia se ilustra en la Figura 66, que muestra una red de adaptación de impedancia colocada entre una impedancia de carga y una línea de transmisión. Idealmente, la red correspondiente no tiene pérdidas para evitar pérdidas innecesarias de potencia, y por lo general está diseñado para que la impedancia vista en la red correspondiente sea  $Z_0$ . Entonces se eliminarán las reflexiones en la línea de transmisión a la izquierda de la red de adaptación, aunque normalmente habrá múltiples reflexiones entre la red de adaptación y la carga. Este procedimiento a veces se denomina sintonización [13]. La adaptación o ajuste de impedancia es importante por las siguientes razones:

- La potencia máxima se entrega cuando la carga está adaptada a la línea de transmisión, suponiendo que el generador está adaptado y se minimiza la pérdida de potencia en la línea de alimentación.
- Componentes sensibles del receptor de adaptación de impedancia (antena, amplificador de bajo ruido, etc.) pueden mejorar la relación señal a ruido del sistema.
- Adaptación de impedancia en una red de distribución de energía, como una red de antenas puede reducir los errores de fase y amplitud.

Siempre que la impedancia de carga  $Z_L$  tenga una parte real positiva, una red de adaptación siempre puede ser encontrado. Sin embargo, hay muchas opciones disponibles y se analizará el diseño y el rendimiento de varios tipos de redes prácticas de adaptación. Factores que pueden ser importantes en la selección de una red de adaptación particular incluyen los siguientes aspectos: [1]

- Complejidad: como ocurre con la mayoría de las soluciones en ingeniería, el diseño más simple que satisface las especificaciones requeridas es generalmente preferible. Una red de adaptación más simple suele ser más barato, más pequeño, más confiable y con menos pérdidas que un diseño más complejo.
- Ancho de banda: cualquier tipo de red de adaptación puede idealmente ofrecer una adaptación perfecta (cero reflexiones) en una sola frecuencia. En muchas aplicaciones, sin embargo, es deseable igualar una carga sobre una banda de frecuencias. Hay varias formas de hacer esto, por supuesto, con un correspondiente aumento de complejidad.

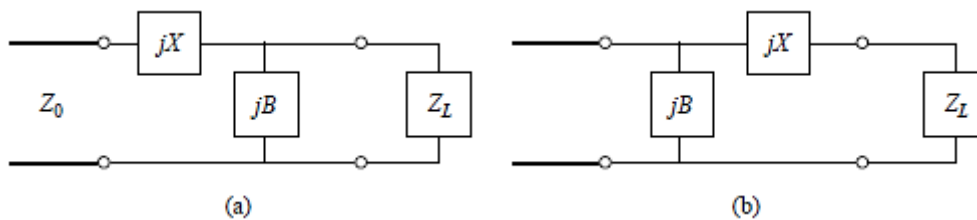
- Implementación: según el tipo de línea de transmisión o guía de ondas que se utilice, un tipo de red de adaptación puede ser preferible a otro. Por ejemplo, *Stubs* de sintonización son mucho más fáciles de implementar en la guía de onda que los transformadores de multisección de cuarto de onda.
- Capacidad de ajuste: en algunas aplicaciones, la red de adaptación puede requerir un ajuste para coincidir con una impedancia de carga variable. Algunos tipos de redes de adaptación son más accesibles que otros en este sentido.



**Figura 66.** Red de adaptación de impedancia de una carga arbitraria con una línea de transmisión.

## 4.2 Adaptación con Elementos Concentrados (Redes-L)

Probablemente el tipo más simple de adaptación de redes es la sección de tipo-L, que utiliza dos elementos reactivos para adaptar una impedancia de carga arbitraria con una línea de transmisión. Hay dos posibles configuraciones para esta red, como se muestra en la Figura 67.

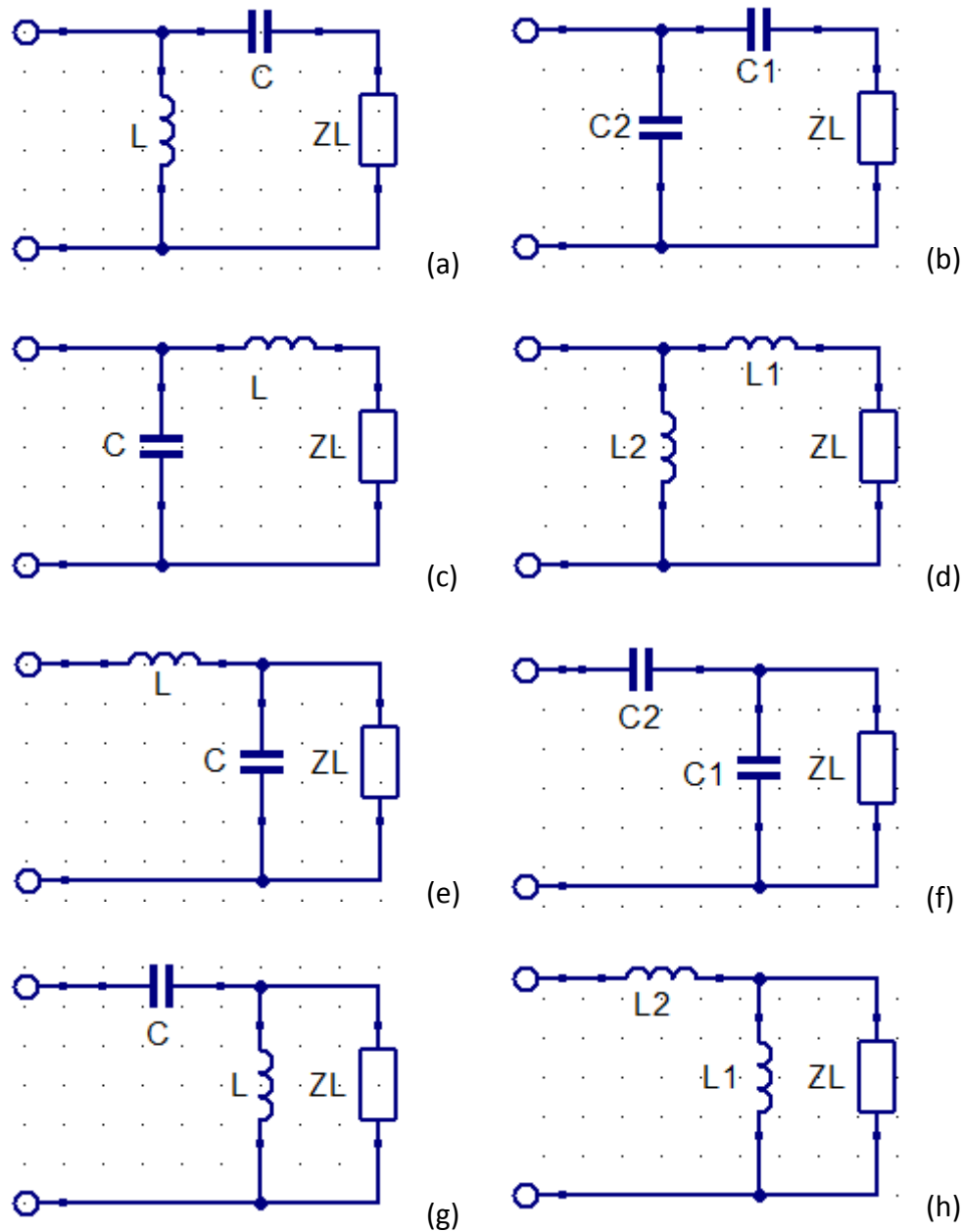


**Figura 67.** Redes-L de adaptación. (a) red para  $Z_L$  dentro del círculo  $1 + jx$  de la carta de Smith. (b) red para  $Z_L$  fuera del círculo  $1 + jx$  de la carta de Smith [1].

Si la impedancia de carga normalizada  $z_L = Z_L/Z_0$ , está dentro del círculo  $1 + jx$  de la carta de Smith, entonces el circuito de la Figura 57-a debería ser usado. Sin embargo, si la impedancia de carga normalizada está fuera del círculo  $1 + jx$  de la carta de Smith, entonces se debe utilizar el circuito de la Figura 57-b. El círculo  $1 + jx$  es la resistencia del círculo de impedancia de la carta de Smith, para lo cual la distancia o radio es igual a  $r = 1$ .

En cualquiera de las configuraciones de la Figura 57, los elementos reactivos pueden ser inductores o condensadores, dependiendo de la impedancia de carga. Por lo tanto, hay

ocho posibilidades distintas para el circuito de adaptación para varias impedancias de carga, como se muestra en la Figura 68. Si la frecuencia es lo suficientemente baja y/o el tamaño del circuito es lo suficientemente pequeño, los condensadores e inductores de elementos agrupados reales pueden ser usados, aunque los circuitos integrados modernos de microondas pueden ser lo suficientemente pequeños como para que se puedan utilizar elementos agrupados también a frecuencias más altas. Sin embargo, existe una amplia gama de frecuencias y tamaños de circuitos en los que los elementos agrupados no pueden ser realizables. Esta es una limitación de las redes-L en técnicas de adaptación. Primero se analizará expresiones analíticas para la red de adaptación de elementos en los dos casos de la Figura 67.



**Figura 68.** Ocho posibilidades de redes-L de adaptación.

### 4.2.1 Adaptación cuando $R_L > Z_0$

Primero se considera el circuito de la Figura 67-a; donde,  $Z_L = R_L + jX_L$ . El cual se definió que el circuito se usaría cuando  $z_L = Z_L/Z_0$  está dentro del círculo  $1 + jx$  de la carta de Smith, lo que implica que  $R_L > Z_0$  para este caso.

La impedancia vista mirando dentro de la red de adaptación, seguida de la impedancia de carga debe ser igual a  $Z_0$  para una condición de impedancia adaptada, como se define en la siguiente expresión: [1]

$$Z_0 = jX + \frac{1}{jB + \frac{1}{(R_L + jX_L)}} \quad (175)$$

Reorganizando la Ecuación (175) en partes reales e imaginarias, se tiene dos ecuaciones para las dos incógnitas  $X$  y  $B$  descritas de la siguiente manera:

$$B(XR_L - X_L Z_0) = R_L - Z_0 \quad (176)$$

$$X(1 - BX_L) = BZ_0 R_L - X_L \quad (177)$$

Resolviendo la Ecuación (176) para  $X$  y reemplazando en la Ecuación (177) se tiene una ecuación cuadrática para  $B$  como:

$$B = \frac{X_L \pm \sqrt{R_L/Z_0} \sqrt{R_L^2 + X_L^2 - Z_0 R_L}}{R_L^2 + X_L^2} \quad (178)$$

Teniéndose en cuenta que  $R_L > Z_0$ , el argumento de la segunda raíz cuadrada es siempre positivo. Entonces la reactancia en serie se puede encontrar como:

$$X = \frac{1}{B} + \frac{X_L Z_0}{R_L} - \frac{Z_0}{BR_L} \quad (179)$$

La Ecuación (178) indica que tiene dos posibles soluciones para  $B$  y  $X$ . Ambas soluciones son físicamente realizables ya que tanto los valores positivos como negativos de  $B$  y  $X$  son posibles ( $X$  positivo implica un inductor y  $X$  negativo implica un condensador, mientras que  $B$  positivo implica un condensador y  $B$  negativo implica un inductor). Sin embargo, una solución da lugar a valores significativamente más pequeños para los componentes reactivos o, puede ser la solución preferido si el ancho de banda de la adaptación es mejor, o si el SWR en la línea entre la red de adaptación y la carga es menor.



Por lo tanto, los valores de los componentes concentrados pueden ser determinados por:

$$C = \frac{B}{2\pi f Z_0} \quad (180)$$

$$L = \frac{X Z_0}{2\pi f} \quad (181)$$

---

**Ejemplo 21.**


---

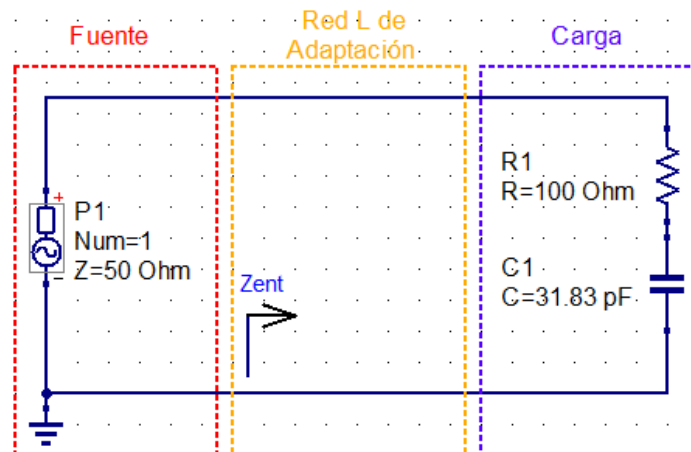
Diseñar una red-L de adaptación para adaptar una carga cuya impedancia medida es;  $Z_L = 100 - j50 \, \Omega$  para obtener impedancia característica, el sistema está operando a una frecuencia de 100 MHz.

Solución:

Como primer criterio de adaptación, se verifica si se cumple la condición; en donde la parte real de  $Z_L$  tiene que ser mayor que la impedancia característica ( $R_L > Z_0$ ). Por lo tanto, si se cumple dicha condición.

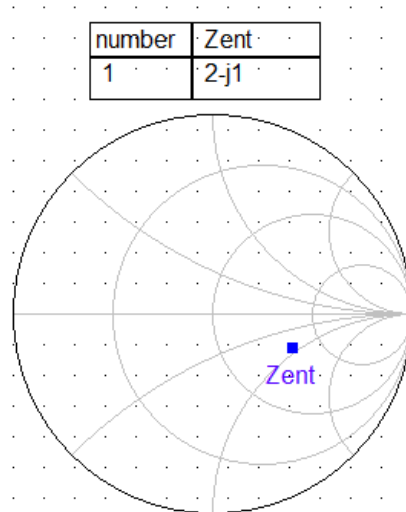
Ahora se procede a representar el coeficiente de reflexión de la carga en la carta de Smith, para verificar si efectivamente dicha impedancia normalizada  $z_L$  está ubicada dentro del círculo  $1 + jx$ .

Para lo cual, la impedancia de carga  $Z_L$ , se representará utilizando componentes concentrados; como se puede ver en la Figura 69 a fin de poder realizar la simulación correspondiente.



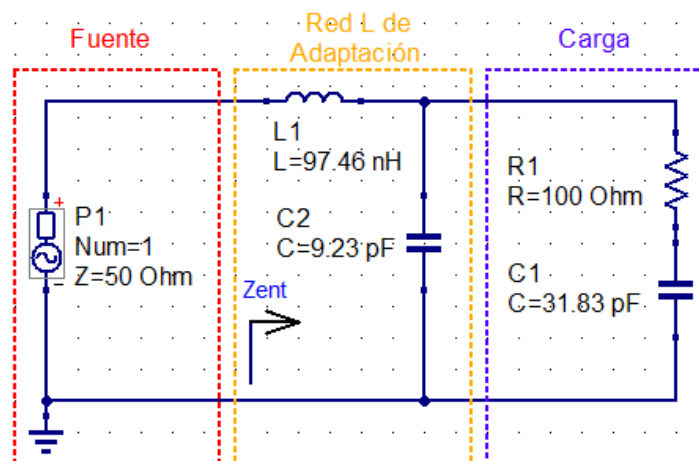
**Figura 69.** Diseño circuitual del ejercicio.

Al realizar la simulación del coeficiente de reflexión  $\Gamma$  de la impedancia de carga, se puede determinar la impedancia normalizada de la carga,  $z_L = Z_{ent}$ . Como se muestra en la Figura 70.



**Figura 70.** Representación de la impedancia de entrada  $Z_{ent}$  sin la red-L de adaptación.

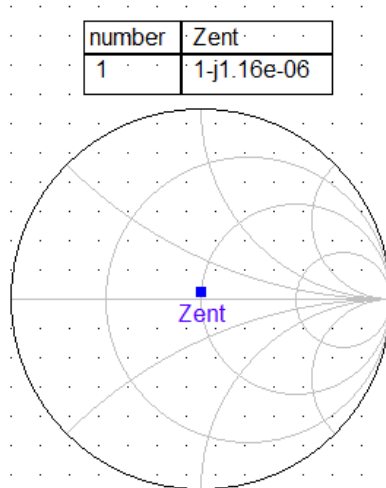
Ahora se procede a utilizar la red-L de adaptación en específico el de tipo (e) de la Figura 68, esta determinación es debido a que la impedancia normalizada está dentro del círculo  $1 + jx$ , el cual define que un elemento de la red-L debe estar en paralelo con la carga. Por lo tanto, se determina el modelo del circuito de adaptación como se muestra en la Figura 71.



**Figura 71.** Red de adaptación con componentes concentrados.

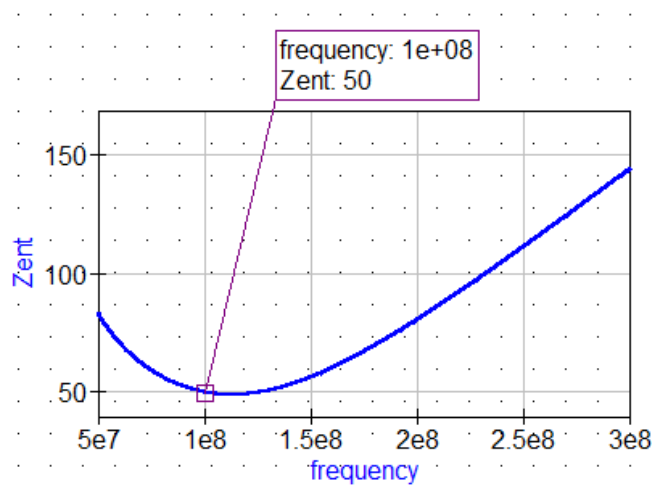
Donde, para la determinación de los componentes L-C de la red-L de adaptación está definido por las Ecuaciones (180) y (181).

Realizado la simulación del circuito de adaptación, se puede determinar el efecto de adaptación con la carta de Smith, como se muestra en la Figura 72, donde el coeficiente de reflexión de la impedancia de entrada  $Z_{ent}$  ahora está centrado en la carta de Smith.



**Figura 72.** Representación de la impedancia de entrada  $Z_{ent}$  con la red-L de adaptación.

De manera similar, se puede representar la magnitud de la impedancia de entrada en un diagrama cartesiano para poder divisar el efecto de adaptación, como se puede ver en la Figura 73, donde efectivamente a la frecuencia de operación de 100 MHz la impedancia del sistema está adaptado a impedancia característica  $Z_0$ .



**Figura 73.** Impedancia característica  $Z_0 \approx Z_{ent}$  de la red-L de adaptación.

### 4.2.2 Adaptación cuando $R_L < Z_0$

A continuación, se considera el circuito de la Figura 67-b. Este circuito es utilizado cuando  $Z_L$  está fuera del círculo  $1 + jx$  de la carta de Smith, lo que implica que  $R_L < Z_0$ . La entrada vista mirando en la red correspondiente, seguida de la impedancia de carga, debe ser igual a  $1/Z_0$  para una condición de impedancia adaptada [1], donde se tiene:

$$\frac{1}{Z_0} = jB + \frac{1}{R_L + j(X + X_L)} \quad (182)$$

Se realiza una operación similar en separar las partes reales e imaginarias; se tiene dos ecuaciones para las dos incógnitas  $B$  y  $X$ , como:

$$BZ_0(X + X_L) = Z_0 - R_L \quad (183)$$

$$(X + X_L) = BZ_0R_L \quad (184)$$

Resolviendo para  $X$  y  $B$  se tiene:

$$X = \pm \sqrt{R_L(Z_0 - R_L)} - X_L \quad (185)$$

$$B = \pm \frac{\sqrt{(Z_0 - R_L)/R_L}}{Z_0} \quad (186)$$

Como  $R_L < Z_0$ , los argumentos de las raíces cuadradas son siempre positivos. Una vez más, se tiene en cuenta que son posibles dos soluciones. Para adaptar una carga compleja arbitraria con una línea de impedancia característica  $Z_0$ , la parte real de la impedancia de entrada a la red de adaptación debe ser  $Z_0$ , mientras que la parte imaginaria debe ser cero. Esto implica que una red de adaptación general debe tener al menos dos grados de libertad; en el circuito de adaptación de la red-L, estos dos grados de libertad son proporcionados por los valores de los dos componentes reactivos como:

$$C = \frac{-1}{2\pi f X Z_0} \quad (187)$$

$$L = \frac{-Z_0}{2\pi f B} \quad (188)$$

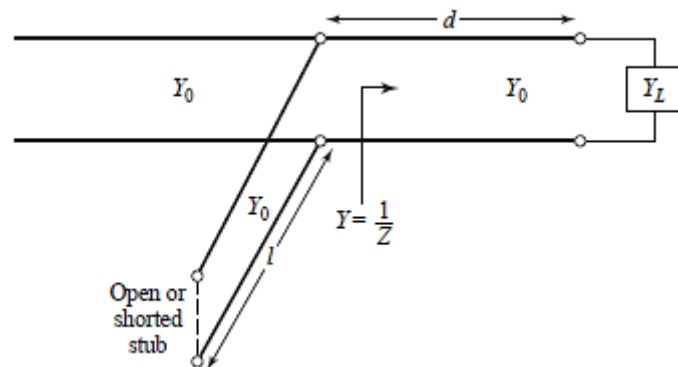
### 4.3 Adaptación con Elementos Distribuidos

Otra técnica popular de adaptación es utilizando una sola longitud de línea de transmisión (Stub) en circuito abierto o en cortocircuito, conectada en paralelo o en serie con la línea de transmisión de alimentación a una cierta distancia de la carga, como se muestran en las Figuras 74 y 75. Como un circuito de sintonización stub-simple, es a menudo muy conveniente porque el stub se puede fabricar como parte de la línea de transmisión del circuito y, se evitan los elementos agrupados. Los stubs en paralelo son preferidos para líneas de transmisión microstrip o stripline, mientras que los stubs en serie se prefieren para línea de ranura (slotline) o guía de ondas coplanar [13].

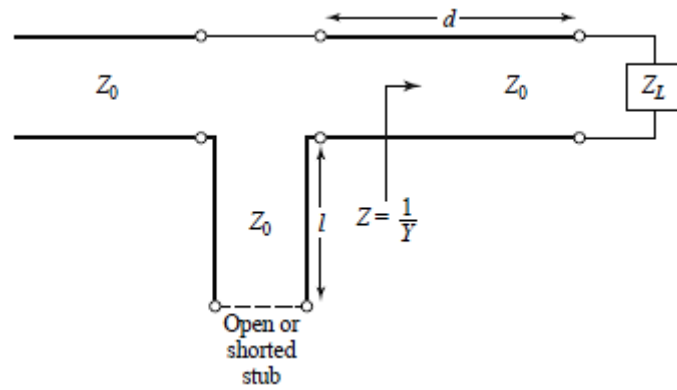
En la sintonización de un stub-simple, hay dos parámetros ajustables que son; la distancia ( $d$ ), desde la carga hasta la posición del stub, y el valor de la susceptancia o reactancia ( $l$ ) que es proporcionada por el stub.

Para el caso del stub en paralelo, la idea básica es seleccionar  $d$  para que la admitancia  $Y$ , vista mirando en la línea a la distancia  $d$  de la carga es de la forma  $Y_0 + jB$ . Entonces la susceptancia del stub se elige como  $-jB$ , lo que da como resultado una condición de adaptación. Para el caso del stub en serie, la distancia  $d$  es seleccionado de modo que la impedancia  $Z$ , vista mirando dentro de la línea a una distancia  $d$  de la carga es de la forma  $Z_0 + jX$ . Entonces la reactancia del stub se elige como  $-jX$ , lo que da como resultado una condición de adaptación.

Como se describió en el Capítulo 2, la longitud adecuada de una línea de transmisión abierta o en corto, puede proporcionar cualquier valor deseado de reactancia o susceptancia. Para una susceptancia o reactancia dada, la diferencia de longitudes de un stub abierto o cortocircuitado es  $\lambda/4$ .



**Figura 74.** Circuito de adaptación Stub en paralelo conectada a una admitancia de carga  $Y_L$  [1].



**Figura 75.** Circuito de adaptación Stub en serie conectada a una impedancia de carga  $Z_L$  [1].

Para medios de transmisión de línea como microstrip o stripline, los stubs de circuito abierto son más fáciles de fabricar, ya que no se necesita un orificio de paso a través del sustrato hasta el plano de masa o tierra. Para líneas como coaxial o guía de ondas, sin embargo, los stubs en cortocircuito son generalmente preferidos porque el área de la sección transversal de tal línea de circuito abierto, puede ser lo suficientemente grande (eléctricamente) para irradiar energía, en cuyo caso el stub ya no es puramente reactivo. Se utilizará tanto la carta de Smith como las soluciones analíticas para el ajuste en paralelo y en serie. Las soluciones usando la carta de Smith son rápidas, intuitivas y, por lo general, lo suficientemente precisas en la práctica. Las expresiones analíticas son más precisas y útiles para el análisis informático.

### Ejemplo 22.

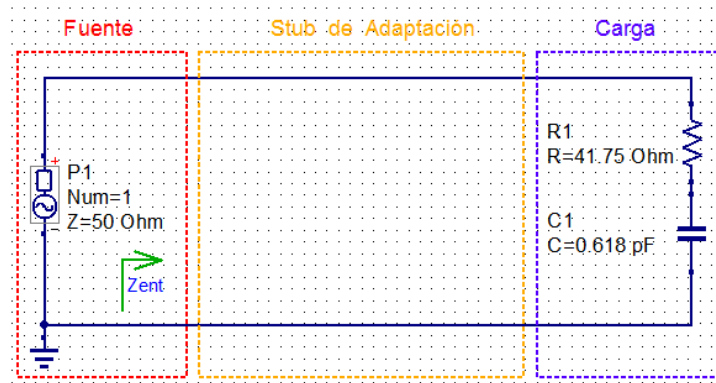
Diseñar una red de adaptación utilizando líneas de transmisión microstrip (Stub), para adaptar una antena de transmisión cuya impedancia medida es;  $Z_L = 41.75 - j114.40 \, \Omega$ , operando a una frecuencia de resonancia de 2.25 GHz, se pide adaptar dicha impedancia de la antena a impedancia característica. Para lo cual la red de adaptación (Stub) será en paralelo y en circuito abierto. El sustrato a utilizar tiene los siguientes parámetros dieléctricos.

$$\begin{aligned} h &= 0.8 \, \text{mm} \\ \epsilon_r &= 2.54 \\ \tan \delta &= 0.0022 \\ T &= 35 \, \mu\text{m} \end{aligned}$$

Solución:

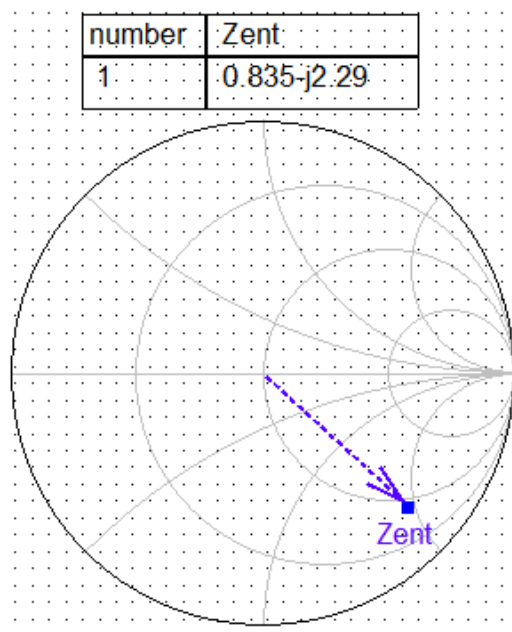
Se inicia con la representación del circuito para modelar la impedancia de la antena utilizando elementos concentrados, a fin de utilizar el software para la simulación correspondiente.

La Figura 76 muestra el diseño del circuito.



**Figura 76.** Diseño circuital del ejercicio.

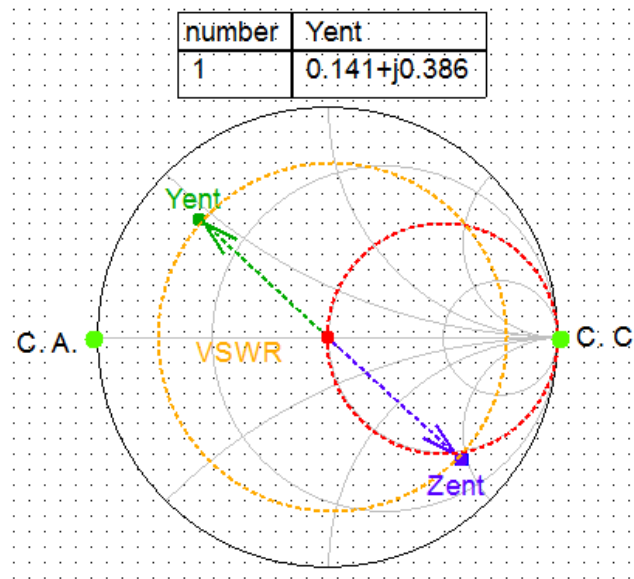
Realizado el diseño del circuito eléctrico, se procede a simular la aplicación para obtener el coeficiente de reflexión normalizado de impedancia de la antena, el cual está representado por el diagrama de la Figura 77.



**Figura 77.** Representación de la impedancia de carga  $Z_L = Z_{ent}$  en la carta de Smith.

Según el requerimiento de adaptación para la antena, la línea de transmisión (Stub) debe estar en circuito abierto y en paralelo a la carga, lo cual implica trabajar la adaptación con el valor de la admitancia normalizada;  $Y_{ent} = 1/Z_{ent}$ .

Por lo tanto, al desarrollar la aplicación con el valor de la admitancia con fines de análisis, la carta de Smith cambia sus orientaciones concernientes a los puntos de circuito abierto (C. A.) y cerrado (C. C.) en  $180^\circ$ , el cual está representado por la Figura 78.

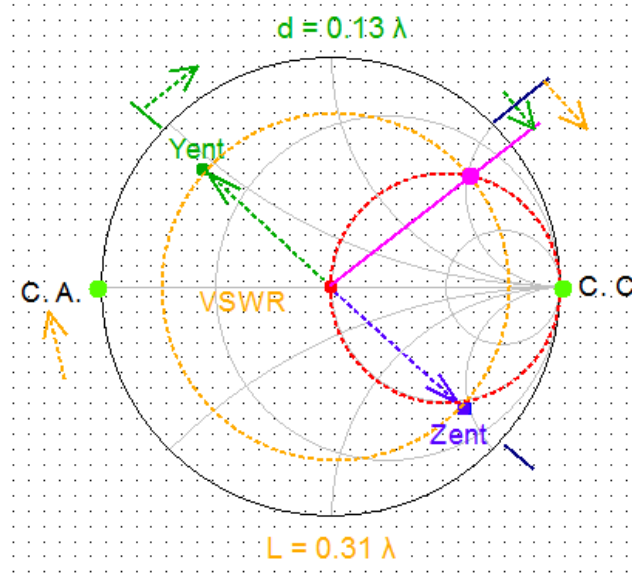


**Figura 78.** Representación de la admitancia de carga  $Y_L = Y_{ent}$  en la carta de Smith.

Ahora el procedimiento es determinar los valores;  $d$  y  $l$ , correspondientes a la distancia del Stub desde la carga y longitud del Stub. Para lo cual se optará una de las soluciones disponibles que se tiene.

Primero se ubicará un punto de intersección entre el círculo característico de la carta de Smith con el círculo VSWR, el cual permitirá trazar una línea desde el punto central de la carta y las intersecciones de los círculos; seguidamente se puede realizar la medida " $d$ " en sentido horario desde el valor de la admitancia hasta el punto de intersección de los círculos. Luego se puede determinar la longitud " $l$ " al realizar la medida desde la reactancia de la intersección de los círculos hasta el punto de circuito abierto (C. A.), como se muestra en la Figura 79.





**Figura 79.** Determinación de los parámetros  $\ell$  y  $d$ .

Determinado las dimensiones;  $d$  y  $l$ , ahora se procede a expresar dichos valores en unidades métricas (milímetros), para realizar su respectiva simulación.

Se tiene la longitud de onda en el espacio vacío, definido por:

$$\lambda_0 = \frac{c}{f_0}$$

Y la longitud de onda en un medio guiado, definido por la Ecuación (149) como:

$$\lambda_g = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon_e}}$$

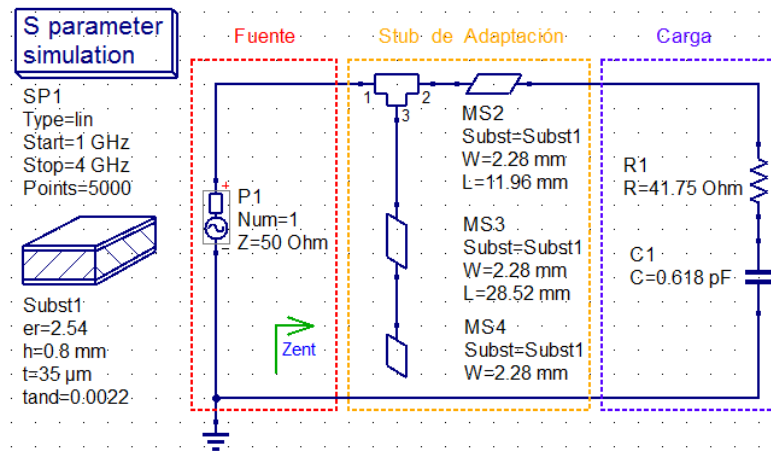
Por lo tanto, las dimensiones;  $d$  y  $l$ , se pueden determinar como:

$$d = 0.13 \lambda_g = 11.96 \text{ mm.}$$

$$l = 0.31 \lambda_g = 28.52 \text{ mm.}$$

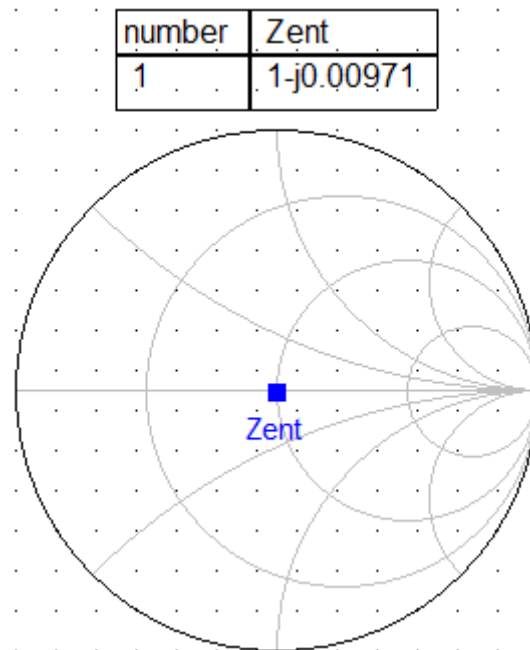
Determinado dichas dimensiones, se puede calcular el ancho de la línea microstrip; para establecer la impedancia del Stub a impedancia característica, donde utilizando las Ecuaciones (140) y (143), según se cumpla las condiciones establecidas; se tiene como resultado:  $W = 2.28 \text{ mm.}$

Obtenido las dimensiones métricas del Stub, se puede diseñar el circuito de adaptación con líneas microstrip; como se muestra en la Figura 80.



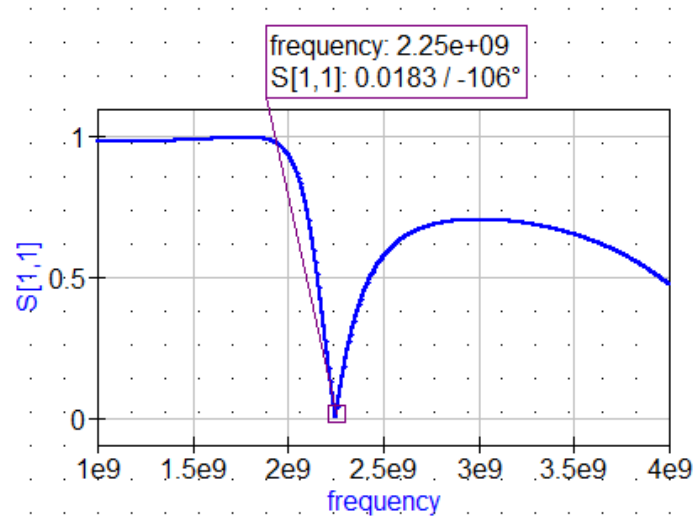
**Figura 80.** Diseño del Stub de adaptación en paralelo a  $Z_L$ .

La Figura 81, muestra el efecto de adaptación de la antena; con un ligero ajuste de las dimensiones del Stub ( $d = 11.61$  mm &  $l = 28.39$  mm) para sintonizar una mejor adaptación. Donde anteriormente se tenía el valor de la admitancia en una posición alejada del punto céntrico de la carta, ahora dicho valor está centrado; lo cual indica que se tiene una óptima adaptación de la antena a impedancia característica.



**Figura 81.** Resultado de adaptación de la antena.

Otra manera de representar dicha adaptación es utilizando el coeficiente de reflexión  $S[1,1]$  en un diagrama cartesiano, para poder divisar la adaptación de la antena a frecuencia de resonancia de 2.25 GHz, como se muestra en la Figura 82.



**Figura 82.** Respuesta del coeficiente  $S[1,1]$  de adaptación.

## 5 Filtros Pasivos

Un filtro es una red de dos puertos que se utiliza para controlar la respuesta de frecuencia en un punto determinado, en un sistema de RF o microondas proporcionando transmisión a frecuencias dentro de la banda de paso del filtro y, atenuación en la banda de supresión del filtro. Las respuestas de frecuencia típicas incluyen características de pasa-bajo, pasa-alto, pasa-banda y rechaza-banda [14-17].

Un filtro perfecto tendría cero pérdidas de inserción en la banda de paso, atenuación infinita en la banda de parada y una respuesta de fase lineal, para evitar la distorsión de la señal en la banda de paso. Por supuesto, tales filtros no existen en la práctica, por lo que se deben hacer concesiones; aquí radica el arte de diseño de filtros.

Las compensaciones de diseño necesarias se pueden evaluar para cumplir mejor con la aplicación. Si, por ejemplo, una pérdida mínima de inserción es lo más importante, entonces una respuesta binomial puede ser usada; mientras que una respuesta de Chebyshev, satisfacería un requisito de atenuación más aguda en la banda de parada. Si es posible sacrificar la tasa de atenuación, se puede obtener una mejor respuesta de fase, obtenido mediante el uso de un diseño de filtro de fase lineal.

Por lo tanto, hay dos métodos de diseño de filtros de RF y microondas: [1]

- Método de parámetros de imagen.
- Método de pérdidas de inserción.

El método de parámetros de imagen puede producir una respuesta del filtro utilizable para algunas aplicaciones, pero no existe una forma metódica de mejorar el diseño. Por lo que los filtros diseñados con este método, consisten en una cascada de dos puertos, más simples secciones de filtro para proporcionar las frecuencias de corte deseadas y las características de atenuación, pero no permiten la especificación de una respuesta de frecuencia particular durante el funcionamiento completo. Así, aunque el procedimiento es relativamente sencillo, el diseño de filtros por parámetros de imagen, a menudo debe repetirse muchas veces para lograr los resultados deseados.

Por otro lado, el método de pérdidas de inserción permite un alto grado de control sobre la banda de paso, la banda de parada, características de amplitud y fase; con una forma sistemática de sintetizar una respuesta. Por lo que este método es más moderno, que utiliza técnicas de síntesis de red para diseñar filtros con una respuesta de frecuencia completamente especificada. El diseño se simplifica comenzando con prototipos de filtros de pasa-bajo que están normalizados en términos de impedancia y frecuencia. Luego se aplican transformaciones para convertir los diseños de prototipos al rango de frecuencia y nivel de impedancia.

Por lo tanto, en el presente capítulo se utilizará el método de pérdidas de inserción.

## 5.1 Diseño de Filtros por el Método de Pérdidas de Inserción

El método de pérdidas de inserción en una respuesta del filtro, se define por su pérdida de inserción o como la relación de pérdida de potencia  $P_{LR}$  (PLR, Power Loss Ratio), definido con la siguiente expresión: [13]

$$P_{LR} = \frac{\text{Potencia disponible de la fuente}}{\text{Potencia entregada a la carga}} = \frac{P_{\text{incidente}}}{P_{\text{carga}}}$$

$$P_{LR} = \frac{1}{1 - |\Gamma(\omega)|^2} \quad (189)$$

Donde se observa que esta cantidad es el recíproco del parámetro  $|S_{12}|^2$ , si la carga y la fuente están adaptados. La pérdida de inserción (IL, Insertion Loss) se expresa en dB como:

$$IL = 10 \text{ Log } P_{LR} \quad (190)$$

Por definición del coeficiente de reflexión, sabemos que  $|\Gamma(\omega)|^2$  es una función par de  $\omega$ ; por lo tanto, puede ser expresado como polinomio en  $\omega^2$ :

$$|\Gamma(\omega)|^2 = \frac{M(\omega)^2}{M(\omega)^2 + N(\omega)^2} \quad (191)$$

Donde  $M$  y  $N$  son polinomios reales en  $\omega^2$ . Sustituyendo esta forma en la Ecuación (189) se obtiene la siguiente expresión:

$$P_{LR} = 1 + \frac{M(\omega^2)}{N(\omega^2)} \quad (192)$$

Para que un filtro se pueda realizar físicamente, su relación de pérdida de potencia debe tener la forma de la Ecuación (192). Observe que, al especificar la tasa de pérdida de potencia simultáneamente restringe la magnitud del coeficiente de reflexión  $|\Gamma(\omega)|$ .

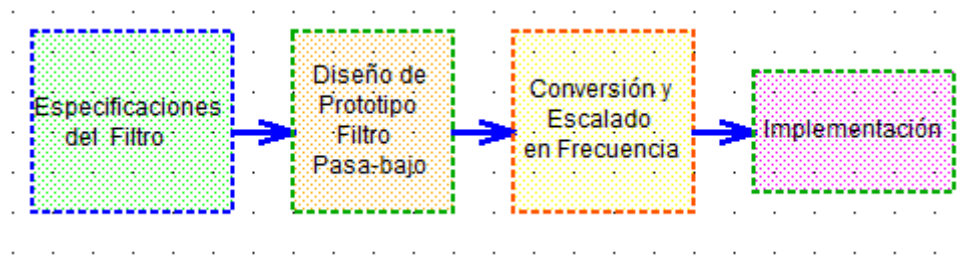
### 5.1.1 Filtros Butterworth

Este tipo de filtros también se denomina como un filtro maximalmente plano, con una característica también de respuesta binomial, y es óptimo en el sentido de que proporciona la respuesta de banda de paso más plana posible para la complejidad u orden del filtro. Para un filtro pasa-bajo, se especifica mediante:

$$P_{LR} = 1 + k^2 \left( \frac{\omega}{\omega_c} \right)^{2N} \quad (193)$$

Donde;  $N$ , es el orden del filtro y  $\omega_c$  es la frecuencia angular de corte. La banda de paso se extiende desde  $\omega = 0$  hasta  $\omega = \omega_c$ ; en el borde de la banda, la relación de pérdida de potencia es  $1 + k^2$ . Si elegimos esto como punto de -3 dB, como es común, tenemos  $k = 1$ , que se asumirá a partir de ahora en los diseños.

A continuación, analizaremos el diseño de prototipos de filtros pasa-bajo normalizados, en términos de impedancia y frecuencia; esta normalización simplifica el diseño de filtros para frecuencia, impedancia y tipo arbitrarios (pasa-bajo, pasa-alto, pasa-banda o rechaza banda). Los prototipos de pasa-bajo se escalan luego a la frecuencia e impedancia deseada y, los componentes de los elementos agrupados RCL, serán reemplazados por elementos de circuito distribuido para su implementación. El proceso de diseño de filtros se muestra en la Figura 83.



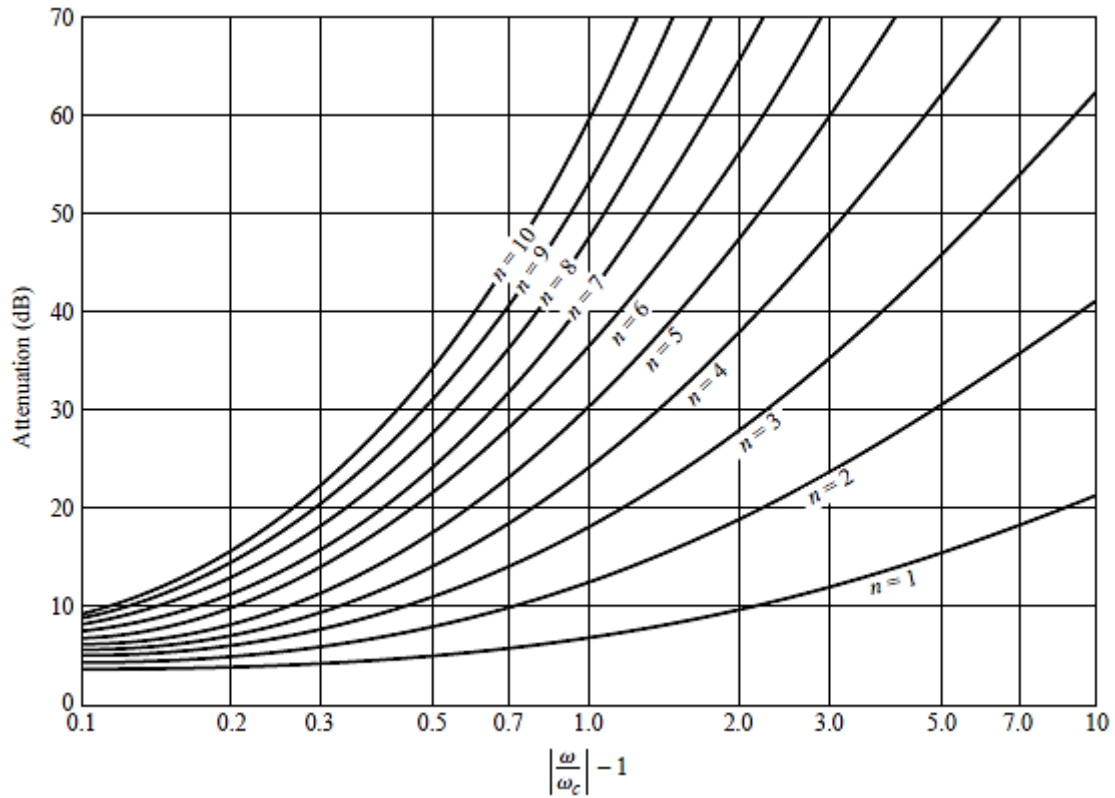
**Figura 83.** Proceso de diseño de filtros por el método de pérdidas de inserción [1].

La Tabla 05 proporciona valores de los elementos normalizados, para prototipos de filtros Butterworth de tipo pasa-bajo, para un rango de orden del filtro desde  $N = 1$  hasta 10. Entre conexiones de elementos concentrados en serie y paralelo, definido por  $g_k$  ( $k = 1, 2, 3, \dots, 11$ ).

**Tabla 05.** Valores normalizados de elementos para prototipos de filtro maximalmente plano ( $g_0 = 1, \omega_c = 1, N = 1$  hasta 10) [13].

$N$	$g_1$	$g_2$	$g_3$	$g_4$	$g_5$	$g_6$	$g_7$	$g_8$	$g_9$	$g_{10}$	$g_{11}$
1	2.0000	1.0000									
2	1.4142	1.4142	1.0000								
3	1.0000	2.0000	1.0000	1.0000							
4	0.7654	1.8478	1.8478	0.7654	1.0000						
5	0.6180	1.6180	2.0000	1.6180	0.6180	1.0000					
6	0.5176	1.4142	1.9318	1.9318	1.4142	0.5176	1.0000				
7	0.4450	1.2470	1.8019	2.0000	1.8019	1.2470	0.4450	1.0000			
8	0.3902	1.1111	1.6629	1.9615	1.9615	1.6629	1.1111	0.3902	1.0000		
9	0.3473	1.0000	1.5321	1.8794	2.0000	1.8794	1.5321	1.0000	0.3473	1.0000	
10	0.3129	0.9080	1.4142	1.7820	1.9754	1.9754	1.7820	1.4142	0.9080	0.3129	1.0000

Finalmente, como procedimiento práctico de diseño, será necesario determinar el tamaño u orden del filtro. Esto suele estar dictado por una especificación sobre la pérdida de inserción a alguna frecuencia en la banda de supresión del filtro. La Figura 84 muestra las características de atenuación para el orden del filtro  $N$  versus frecuencia normalizada. Si se requiere un filtro con  $N > 10$ , se puede obtener un buen resultado conectando en cascada dos diseños de orden inferior.



**Figura 84.** Atenuación versus frecuencia normalizada para prototipos de filtro maximalmente plano [13].

### 5.1.2 Filtros Chebyshev

Este tipo de filtro también se denomina como filtro de rizado, donde se utiliza un polinomio de Chebyshev para especificar la pérdida de inserción de un filtro de  $N$ -ésimo orden pasa-bajo como:

$$P_{LR} = 1 + k^2 T_N^2\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) \quad (194)$$

entonces se producirá un corte más agudo, aunque la respuesta de la banda de paso tendrá rizados de amplitud  $1 + k^2$ , ya que  $T_N^2$  oscila entre  $\pm 1$  para  $|x| \leq 1$ . Por lo tanto,  $k^2$  determina el nivel de ondulación en la banda de paso. Para valores grandes de  $x$ ,  $T_N(x) \simeq 1/2 (2x)^N$ , entonces para  $\omega \gg \omega_c$  la pérdida de inserción se convierte en:

$$P_{LR} \simeq \frac{k^2}{4} \left(\frac{2\omega}{\omega_c}\right)^{2N} \quad (195)$$

Que aumenta la pérdida de inserción a razón de  $20N$  dB / década. Sin embargo, la pérdida de inserción para el caso Chebyshev es  $(2)^{2N}/4$ , el cual es mayor que la respuesta binomial en cualquier frecuencia dada donde  $\omega \gg \omega_c$ .

**Nota:** también se tienen filtros de respuesta: elípticas, de fase lineal, etc. El cual no es parte de tratamiento en este material.

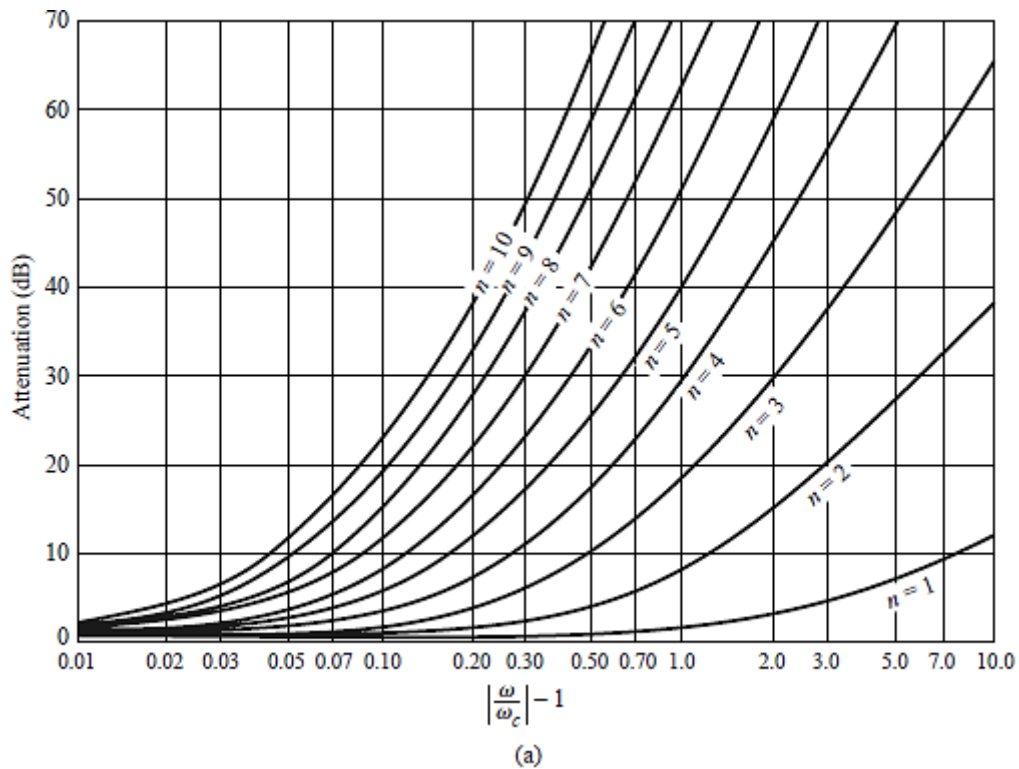
De manera similar a la definición anterior, las Tablas 06 y 07 proporciona valores de elementos normalizados, para prototipos de filtros Chebyshev pasa-bajo con rizados de 0.5 dB y 3 dB, para un rango de orden del filtro desde  $N = 1$  hasta 10. Entre conexiones de elementos en serie y paralelo, definido por  $g_k$  ( $k = 1, 2, 3, \dots, 11$ ). Sin embargo, debemos tener un criterio adicional; el cual corresponde al diseño de filtros, donde es factible sólo para orden impar, esto debido a que el último valor normalizado  $g_k$  termina en 1; lo cual significa que dicho puerto está adaptado a impedancia característica. Lo que no ocurre cuando el orden del filtro es un número par.

Las Figuras 85 y 86 muestran la relación de atenuación versus frecuencia normalizada de prototipos de filtros con rizado de 0.5 dB y 3 dB, a fin de determinar el orden correspondiente.



**Tabla 06.** Valores normalizados de elementos para rizados-constante de prototipos de filtro pasa-bajo ( $g_0 = 1, \omega_c = 1, N = 1$  hasta 10, rizado de 0.5 dB) [13].

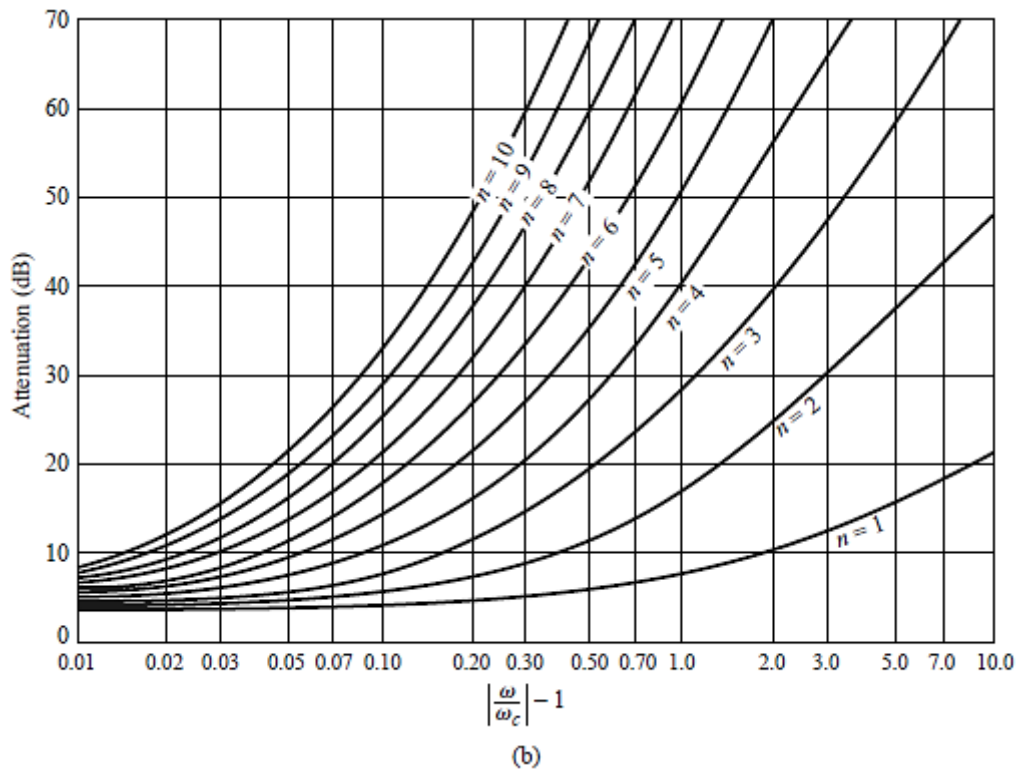
$N$	0.5 dB Ripple										
	$g_1$	$g_2$	$g_3$	$g_4$	$g_5$	$g_6$	$g_7$	$g_8$	$g_9$	$g_{10}$	$g_{11}$
1	0.6986	1.0000									
2	1.4029	0.7071	1.9841								
3	1.5963	1.0967	1.5963	1.0000							
4	1.6703	1.1926	2.3661	0.8419	1.9841						
5	1.7058	1.2296	2.5408	1.2296	1.7058	1.0000					
6	1.7254	1.2479	2.6064	1.3137	2.4758	0.8696	1.9841				
7	1.7372	1.2583	2.6381	1.3444	2.6381	1.2583	1.7372	1.0000			
8	1.7451	1.2647	2.6564	1.3590	2.6964	1.3389	2.5093	0.8796	1.9841		
9	1.7504	1.2690	2.6678	1.3673	2.7239	1.3673	2.6678	1.2690	1.7504	1.0000	
10	1.7543	1.2721	2.6754	1.3725	2.7392	1.3806	2.7231	1.3485	2.5239	0.8842	1.9841



**Figura 85.** Atenuación versus frecuencia normalizada para prototipos de filtros con rizado constante 0.5 dB [13].

**Tabla 07.** Valores normalizados de elementos para rizados-constante de prototipos de filtro pasa-bajo ( $g_0 = 1, \omega_c = 1, N = 1$  hasta 10, rizado de 3.0 dB) [13].

	3.0 dB Ripple										
$N$	$g_1$	$g_2$	$g_3$	$g_4$	$g_5$	$g_6$	$g_7$	$g_8$	$g_9$	$g_{10}$	$g_{11}$
1	1.9953	1.0000									
2	3.1013	0.5339	5.8095								
3	3.3487	0.7117	3.3487	1.0000							
4	3.4389	0.7483	4.3471	0.5920	5.8095						
5	3.4817	0.7618	4.5381	0.7618	3.4817	1.0000					
6	3.5045	0.7685	4.6061	0.7929	4.4641	0.6033	5.8095				
7	3.5182	0.7723	4.6386	0.8039	4.6386	0.7723	3.5182	1.0000			
8	3.5277	0.7745	4.6575	0.8089	4.6990	0.8018	4.4990	0.6073	5.8095		
9	3.5340	0.7760	4.6692	0.8118	4.7272	0.8118	4.6692	0.7760	3.5340	1.0000	
10	3.5384	0.7771	4.6768	0.8136	4.7425	0.8164	4.7260	0.8051	4.5142	0.6091	5.8095



**Figura 86.** Atenuación versus frecuencia normalizada para prototipos de filtros con rizado constante de 3.0 dB [13].

## 5.2 Transformación de Filtros con Elementos Concentrados

Para el diseño de filtros de radiofrecuencia y microondas, se toma como referencia el prototipo de un filtro pasa-bajo en diseño normalizado; que tiene una impedancia de fuente de  $R_s = 1 \Omega$  y una frecuencia de corte de  $\omega_c = 1 \text{ rad/seg}$ . Por lo tanto, el diseño de un filtro pasa-bajo se puede escalar en términos de impedancia y frecuencia para convertirlos y proporcionar características de respuesta de filtros: pasa-alto, pasa-banda o rechaza-banda [1].

### 5.2.1 Escalado de Impedancia y Frecuencia

El proceso de escalado de impedancia en diseño de filtros; se da cuando la fuente y las resistencias de carga son unitarias (excepto para filtros Chebyshev con orden de filtro  $N$  par, que tienen resistencia de carga no unitaria). La resistencia de la fuente  $R_0$  se puede obtener multiplicando todas las impedancias de diseño del prototipo por  $R_0$ . Por lo tanto, los nuevos valores de los componentes de un filtro están determinados por:

$$L' = R_0 L \quad (196)$$

$$C' = C / R_0 \quad (197)$$

$$R'_s = R_0 \quad (198)$$

$$R'_L = R_0 R_L \quad (199)$$

Donde:

$L', C', R'_s, R'_L;$	<i>Valores con escalado de impedancia</i>
$L, C, R_L;$	<i>Valores normalizados del prototipo original</i>
$R_0 = Z_0;$	<i>Impedancia característica</i>

### 5.2.2 Escalado de Frecuencia para Filtro Pasa-Bajo

Para cambiar la frecuencia de corte de un prototipo de filtro pasa-bajo de la unidad a  $\omega_c$ , se requiere un escalado de frecuencia del filtro por el factor  $1/\omega_c$ , que se logra reemplazando  $\omega$  por  $\omega/\omega_c$  o descrito por:

$$\omega \leftarrow \frac{\omega}{\omega_c} \quad (200)$$

Entonces la nueva relación de pérdida de potencia será:

$$P'_{LR}(\omega) = P_{LR}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) \quad (201)$$

Donde;  $\omega_c$ , es la nueva frecuencia de corte, el corte ocurre cuando  $\omega/\omega_c = 1$ , o  $\omega = \omega_c$ . Esta transformación se puede ver como una extensión de la banda de paso original. Los valores de los nuevos elementos se determinan aplicando la sustitución de la Ecuación (200) a las reactancias en serie  $j\omega L_k$  y, susceptancias en paralelo  $j\omega C_k$ , del prototipo de filtro como:

$$jX_k = j\frac{\omega}{\omega_c} L_k = j\omega L'_k \quad (202)$$

$$jB_k = j\frac{\omega}{\omega_c} C_k = j\omega C'_k \quad (203)$$

Lo que muestra que los nuevos valores de los elementos concentrados están dados por:

$$L'_k = \frac{L_k}{\omega_c} \quad (204)$$

$$C'_k = \frac{C_k}{\omega_c} \quad (205)$$

Por lo tanto, cuando se requiere escalado de impedancia y frecuencia, los resultados de las Ecuaciones (196) y (199) pueden ser combinados con las Ecuaciones (204) y (205), para dar como resultado:

$$L'_k = \frac{R_0 L_k}{\omega_c} \quad (206)$$

$$C'_k = \frac{C_k}{R_0 \omega_c} \quad (207)$$

---

### **Ejemplo 23.**

---

Diseñar un filtro pasa-bajo maximalmente plano con una frecuencia de corte de 2 GHz, impedancia característica de 50  $\Omega$ , y al menos 15 dB de pérdida de inserción a 3 GHz. Calcular y graficar la respuesta de amplitud para un intervalo de frecuencias desde:  $f = 1$  GHz hasta 4 GHz.

Solución:

Primero se determina el orden requerido del filtro maximalmente plano, para satisfacer la pérdida de inserción establecida en 3 GHz.

Entonces se tiene:

$$\left| \frac{\omega}{\omega_c} \right| - 1 = \left| \frac{2\pi(3 \times 10^9)}{2\pi(2 \times 10^9)} \right| - 1 = 0.5$$

De acuerdo a la Figura 84 se observa el orden del filtro, el cual es suficiente para  $N = 5$ . Entonces de la Tabla 05 se obtiene los valores normalizados para los elementos del prototipo pasa-bajo como:

$$g_1 = 0.6180$$

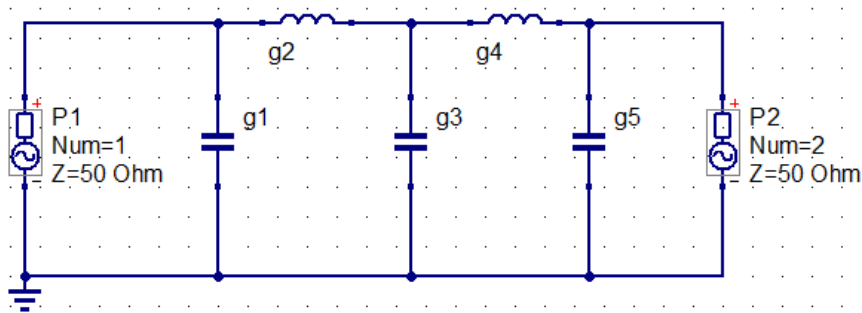
$$g_2 = 1.6180$$

$$g_3 = 2.0000$$

$$g_4 = 1.6180$$

$$g_5 = 0.6180$$

Por lo tanto, el modelo de diseño del filtro pasa-bajo de orden;  $N=5$ , es como se muestra en la Figura 87.



**Figura 87.** Circuito básico de filtro pasa-bajo de orden;  $N = 5$ .

Luego; utilizando las Ecuaciones (206) y (207) pueden ser evaluadas para obtener valores de los elementos escalados como:

$$C'_1 = 0.984 \text{ pF}$$

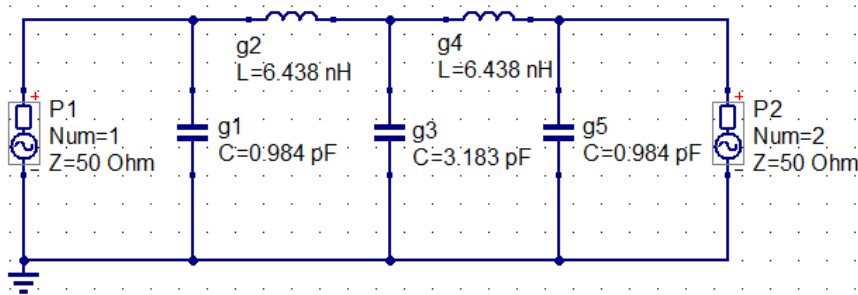
$$L'_2 = 6.438 \text{ nH}$$

$$C'_3 = 3.183 \text{ pF}$$

$$L'_4 = 6.438 \text{ nH}$$

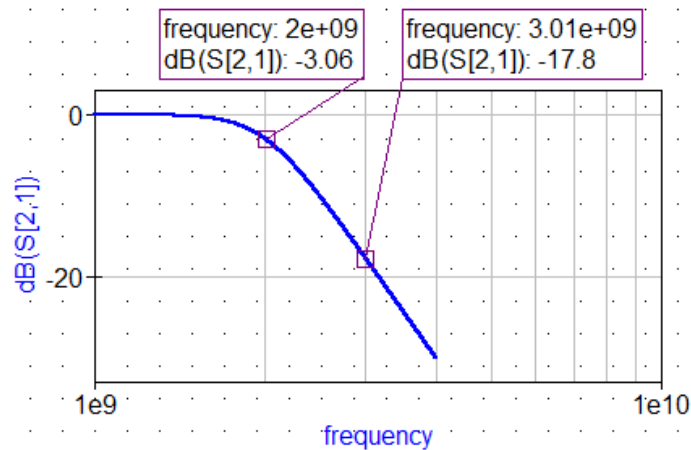
$$C'_5 = 0.984 \text{ pF}$$

Seguidamente, se tiene el diseño del circuito escalado como se muestra en la Figura 88.



**Figura 88.** Circuito filtro pasa-bajo con escalado de impedancia y frecuencia.

Finalmente, para la representación de la respuesta de amplitud del filtro se consigna el parámetro  $S[2,1]$ , donde expresa el coeficiente de reflexión directa, como se muestra en la Figura 89.



**Figura 89.** Respuesta de parámetro  $S[2,1]$  del filtro pasa-bajo.

### 5.2.3 Escalado de Frecuencia para Filtro Pasa-Alto

Para la transformación del prototipo de pasa-bajo a pasa-alto, la sustitución de frecuencia está determinado por: [13]

$$\omega \leftarrow -\frac{\omega_c}{\omega} \quad (208)$$

Esta sustitución mapea  $\omega = 0$  a  $\omega = \pm\infty$  y viceversa; el corte ocurre cuando  $\omega = \pm\omega_c$ . El signo negativo es necesario para convertir inductores y condensadores ideales en condensadores e inductores realizables. Aplicando la Ecuación (208) a las reactancias en serie  $j\omega L_k$  y las susceptancias en paralelo  $j\omega C_k$ , del prototipo del filtro da como resultado:

$$jX_k = -j\frac{\omega_c}{\omega}L_k = \frac{1}{j\omega C'_k} \quad (209)$$

$$jB_k = -j\frac{\omega_c}{\omega}C_k = \frac{1}{j\omega L'_k} \quad (210)$$

Donde se muestra que los inductores en serie  $L_k$  deben reemplazarse por condensadores  $C'_k$ , y los condensadores en paralelo  $C_k$  deben ser reemplazados por inductores  $L'_k$ . Los valores nuevos de los componentes vienen dados por:

$$C'_k = \frac{1}{\omega_c L_k} \quad (211)$$

$$L'_k = \frac{1}{\omega_c C_k} \quad (212)$$

Por lo tanto, el escalado de impedancia puede ser determinado por:

$$C'_k = \frac{1}{R_0 \omega_c L_k} \quad (213)$$

$$L'_k = \frac{R_0}{\omega_c C_k} \quad (214)$$

### 5.2.4 Escalado de Frecuencia para Filtro Pasa-Banda

El prototipo de diseño de filtro pasa-bajo también se puede transformar para tener un filtro de tipo pasa-banda o rechaza-banda. Donde  $\omega_1$  y  $\omega_2$  denotan los bordes de la banda de paso, entonces la respuesta de pasa-banda se puede obtener utilizando la siguiente sustitución de frecuencia [13].

$$\omega \leftarrow \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) = \frac{1}{\Delta} \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \quad (215)$$

Donde:

$$\Delta = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_0} \quad (216)$$

es el ancho de banda fraccional de la banda de paso. La frecuencia central  $\omega_0$ , puede elegirse como la media aritmética de  $\omega_1$  y  $\omega_2$ , por lo que las ecuaciones son más simples si se elige como una media geométrica:

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2} \quad (217)$$

Luego, la transformación de la Ecuación (215) establece las características del filtro pasa-banda, a partir de un prototipo pasa-bajo. Entonces, el inductor en serie  $L_k$ , se transforma en un circuito LC en serie con valores de los elementos:

$$L'_k = \frac{L_k}{\Delta \omega_0} \quad (218)$$

$$C'_k = \frac{\Delta}{\omega_0 L_k} \quad (219)$$

Similarmente, se determina para el condensador en paralelo  $C_k$ , donde se transforma en un circuito LC en paralelo con valores de los elementos:

$$L'_k = \frac{\Delta}{\omega_0 C_k} \quad (220)$$

$$C'_k = \frac{C_k}{\Delta \omega_0} \quad (221)$$

---

**Ejemplo 24.**


---

Diseñar un filtro pasa-banda que tenga una respuesta de rizado de 0.5 dB con un orden de filtro  $N = 3$ . La frecuencia central es de 1 GHz, el ancho de banda fraccional es del 10% y la impedancia característica es 50  $\Omega$ .

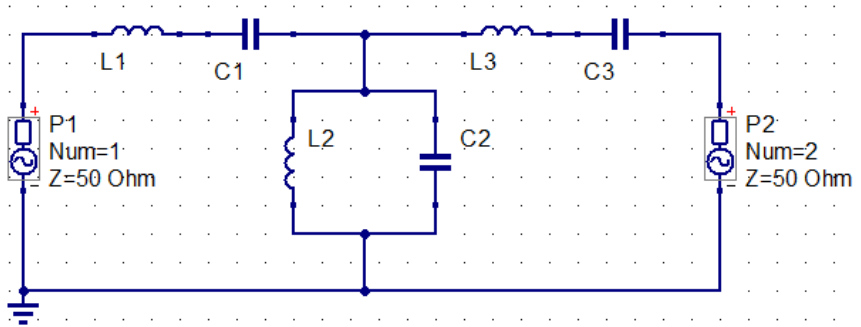
Solución:

De la Tabla 06, los valores de los elementos para el prototipo-circuito pasa-bajo, se establece como:

$$\begin{aligned} g_1 &= 1.5963 = L_1 \\ g_2 &= 1.0967 = C_2 \\ g_3 &= 1.5963 = L_3 \\ g_4 &= 1.0000 = R_L \end{aligned}$$



Por lo tanto, se tiene el diseño del filtro pasa-banda, como se muestra en la Figura 90.



**Figura 90.** Circuito básico de filtro pasa-banda de orden,  $N = 3$ .

Las Ecuaciones (196) y (197) determinan la escala de impedancia y, los valores de elementos en frecuencia transformada están definidas por las Ecuaciones (218–221), para obtener una respuesta de filtro pasa-banda. La Figura 91 muestra el filtro pasa-banda escalado.

$$L'_1 = \frac{L_1 R_0}{\omega_0 \Delta} = 127.0 \text{ nH}$$

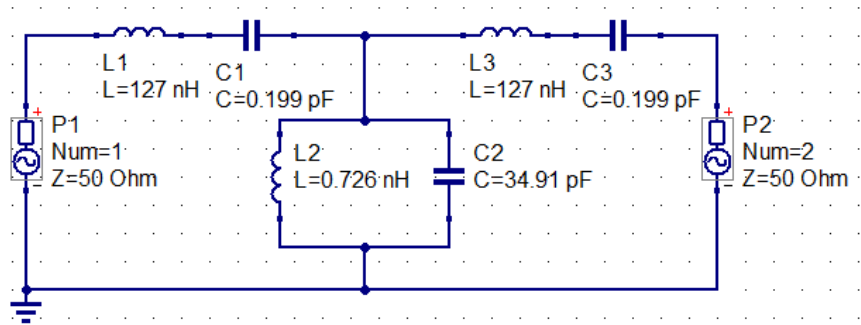
$$C'_1 = \frac{\Delta}{\omega_0 L_1 R_0} = 0.199 \text{ pF}$$

$$L'_2 = \frac{\Delta R_0}{\omega_0 C_2} = 0.726 \text{ nH}$$

$$C'_2 = \frac{C_2}{\omega_0 \Delta R_0} = 34.91 \text{ pF}$$

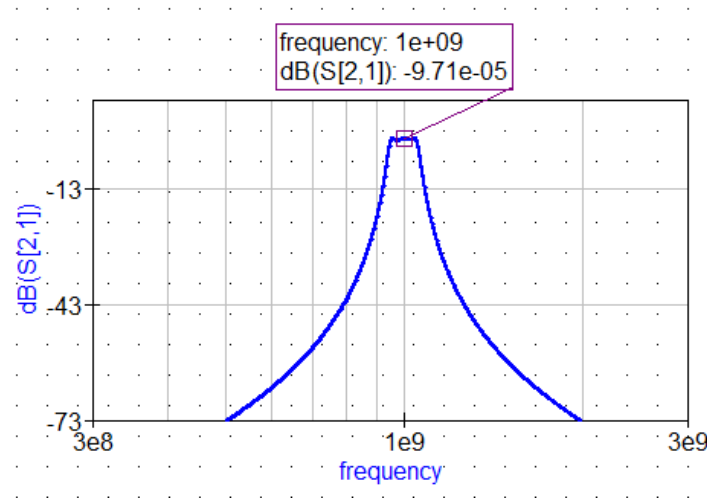
$$L'_3 = \frac{L_3 R_0}{\omega_0 \Delta} = 127.0 \text{ nH}$$

$$C'_3 = \frac{\Delta}{\omega_0 L_3 R_0} = 0.199 \text{ pF}$$



**Figura 91.** Circuito de filtro pasa-banda con escalado de impedancia y frecuencia.

Por lo tanto, se tiene la respuesta de amplitud resultante como se muestra en la Figura 92.



**Figura 92.** Respuesta del parámetro S[2.1] del filtro pasa-banda.

### 5.2.5 Escalado de Frecuencia para Filtro Rechaza-Banda

La transformación inversa se puede utilizar para obtener una respuesta de filtro rechaza-banda como:

$$\omega \leftarrow -\Delta \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^{-1} \quad (222)$$

Donde;  $\Delta$  y  $\omega_0$  tienen las mismas definiciones que las Ecuaciones (216) y (217). Entonces los inductores en serie del prototipo pasa-bajo se convierte en circuitos LC paralelos que tienen valores de elementos dados por:

$$L'_k = \frac{\Delta L_k}{\omega_0} \quad (223)$$

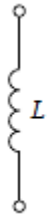
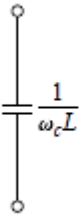
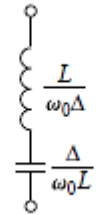
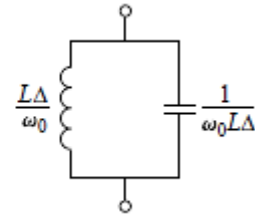
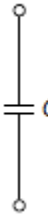
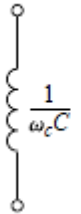
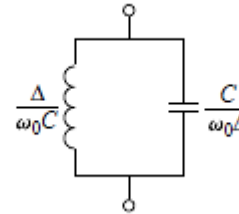
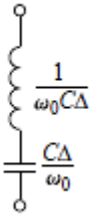
$$C'_k = \frac{1}{\omega_0 \Delta L_k} \quad (224)$$

Los condensadores en paralelo del prototipo pasa-bajo se convierte en circuitos LC en serie que tienen valores de los elementos concentrados establecidos por:

$$L'_k = \frac{1}{\omega_0 \Delta C_k} \quad (225)$$

$$C'_k = \frac{\Delta C_k}{\omega_0} \quad (226)$$

Por lo tanto, las transformaciones de elementos de un prototipo de pasa-bajo a un prototipo: pasa-alto, pasa-banda o los filtros de rechaza-banda se resumen en la Figura 93. Estos resultados no incluyen escalado de impedancia el cual se puede realizar utilizando las Ecuaciones (196-199).

Pasa-Bajo	Pasa-Alto	Pasa-Banda	Rechaza-Banda
			
			

**Figura 93.** Resumen de transformaciones de prototipos de filtros [13]

$$\left( \Delta = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_0} \right)$$

### 5.3 Filtros Pasivos con Elementos Distribuidos

El diseño de filtros con elementos agrupados definido en la sección anterior, generalmente funcionan bien a bajas frecuencias, pero surgen dos problemas a frecuencias más altas de RF y microondas. Primero, los inductores y condensadores de elementos agrupados generalmente están disponibles solo para un rango limitado de valores y, puede ser difícil de implementar a frecuencias de microonda.

Sin embargo, los elementos distribuidos como las líneas de transmisión en circuito abierto o en cortocircuito, se utilizan a menudo para elementos agrupados ideales. Además, a frecuencias de microondas las distancias entre los componentes del filtro no son despreciables.

Por lo tanto, como primera definición se analizará la transformación de Richards, el cual es utilizado para convertir elementos agrupados en secciones de líneas de transmisión. Y en segunda definición trataremos las identidades de Kuroda, el cual es utilizado para separar físicamente los elementos del filtro mediante secciones de línea. Debido a que tales secciones adicionales de la línea de transmisión no afectan la respuesta del filtro, este tipo de diseño se denomina síntesis de filtro redundante. Es posible diseñar filtros de microondas que aprovechen estas secciones para mejorar la respuesta del filtro.

### 5.3.1 Transformación de Richards

La transformación de Richard se define como: [1]

$$\Omega = \tan \beta \ell = \tan \left( \frac{\omega \ell}{v_p} \right) \quad (227)$$

Donde se asigna el plano  $\omega$  al plano  $\Omega$ , que se repite con un período de  $\omega \ell / v_p = 2\pi$ . Esta transformación fue introducida por P. Richards para sintetizar una red  $LC$  utilizando redes abiertas y Stubs de líneas de transmisión en cortocircuito. Por lo tanto, si reemplazamos la variable de frecuencia  $\omega$  con  $\Omega$ , podemos describir la reactancia de un inductor como:

$$jX_L = j\Omega L = jL \tan \beta \ell \quad (228)$$

y la susceptancia de un condensador

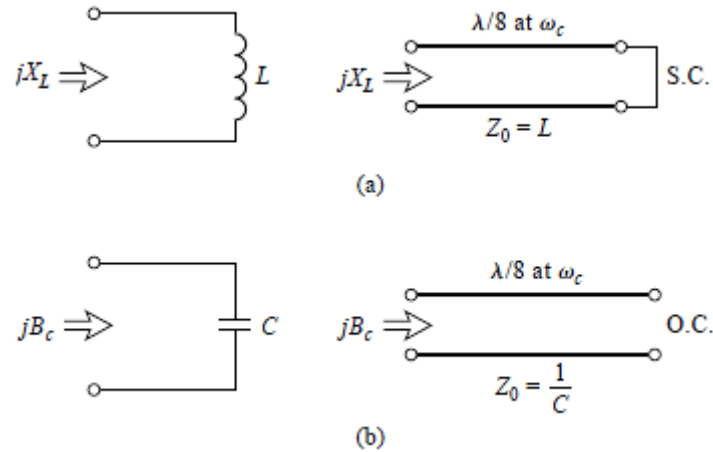
$$jB_C = j\Omega C = jC \tan \beta \ell \quad (229)$$

Estos resultados indican que un inductor se puede reemplazar por un trozo de línea (Stub) cortocircuitado de longitud  $\beta \ell$  e impedancia característica  $L$ , mientras que un condensador se puede reemplazar por un trozo (Stub) en circuito abierto de longitud  $\beta \ell$  e impedancia característica  $1/C$ . Se asume una impedancia del filtro unitaria. El corte se produce a una frecuencia unitaria para un prototipo de filtro de pasa-bajo; para obtener la misma frecuencia de corte que el filtro transformado de Richards, la Ecuación (227) muestra que:

$$\Omega = 1 = \tan \beta \ell \quad (230)$$

Donde la longitud eléctrica del Stub es  $\ell = \lambda/8$ , siendo  $\lambda$  la longitud de onda de la línea en la frecuencia de corte  $\omega_c$ . A la frecuencia  $\omega_0 = 2\omega_c$ , las líneas tendrán una longitud de  $\lambda/4$  y una atenuación se producirá en el polo. A frecuencias alejadas de  $\omega_c$ , las impedancias de los Stubs ya no estarán adaptadas con las impedancias originales del elemento agrupado, y la respuesta del filtro será diferente de la respuesta del prototipo deseado. Además, la respuesta será periódica en frecuencia, repitiéndose cada  $4\omega_c$ .

En principio, la transformación de Richards permite que los inductores y condensadores de un filtro de elementos agrupados pueda ser reemplazado con líneas de transmisión (Stubs) en cortocircuito y circuito abierto, como se ilustra en la Figura 94. Dado que las longitudes eléctricas de todos es la misma ( $\lambda/8$  en  $\omega_c$ ), estas líneas se llaman líneas conmensurables.



**Figura 94.** Transformación de Richards. (a) para un inductor a Stub en corto-circuito. (b) para un capacitor a Stub en circuito-abierto [13].

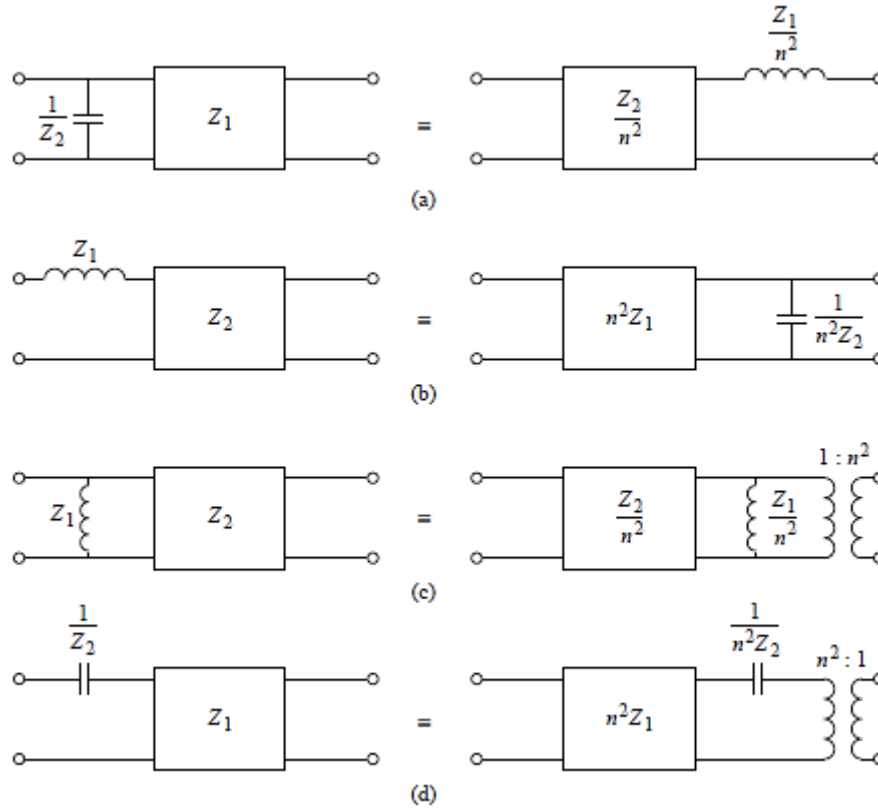
### 5.3.2 Identidades de Kuroda

Las cuatro identidades de Kuroda utilizan secciones de línea de transmisión redundantes para lograr una mayor implementación práctica del filtro de microondas, mediante la realización de cualquiera de las siguientes operaciones:

- Stubs de línea de transmisión físicamente separadas
- Transforma stubs de series en stubs en paralelo, o viceversa
- Cambia las impedancias características poco prácticas en valores más realizables

Las secciones adicionales de la línea de transmisión se denominan elementos unitarios y tienen una longitud de  $\lambda/8$  a  $\omega_c$ ; los elementos de la unidad son, por lo tanto, acordes con los Stubs utilizados para implementar los inductores y condensadores de diseño del prototipo.

Las cuatro identidades de Kuroda se ilustran en la Figura 95, donde cada cuadro representa un elemento unitario o línea de transmisión de la impedancia y, longitudes características indicadas ( $\lambda/8$  a  $\omega_c$ ). Los inductores y condensadores representan terminales en cortocircuito y circuito abierto, respectivamente [1].



**Figura 95.** Identidades de Kuroda,  $n^2 = 1 + Z_2/Z_1$  [13].

### Ejemplo 25.

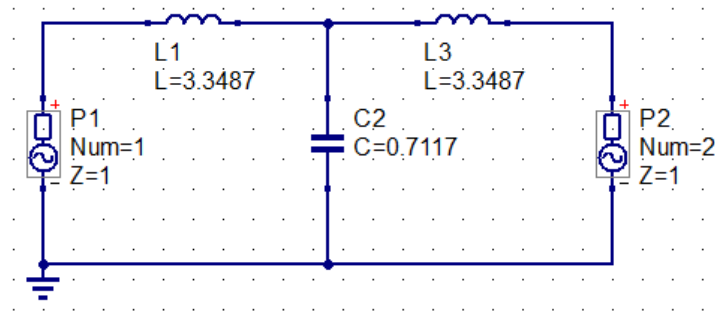
Diseñar un filtro pasa-bajo utilizando líneas de transmisión microstrip. Las especificaciones incluyen una frecuencia de corte de 4 GHz, una impedancia característica de  $50 \Omega$  y una respuesta de tercer orden de banda de paso para un rizado igual a 3 dB. El sustrato a utilizar contiene los mismos parámetros dieléctricos de ejercicios desarrollados anteriormente.

Solución:

De la Tabla 07, los valores normalizados para los elementos del prototipo filtro pasa-bajo son:

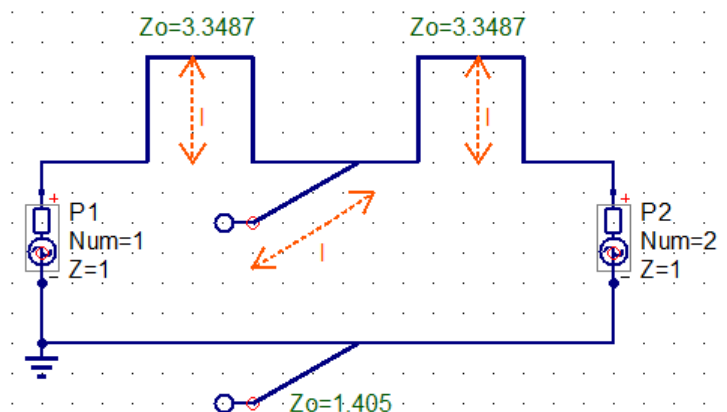
$$\begin{aligned} g_1 &= 3.3487 = L_1 \\ g_2 &= 0.7117 = C_2 \\ g_3 &= 3.3487 = L_3 \\ g_4 &= 1.0000 = R_4 \end{aligned}$$

Entonces se tiene el diseño del circuito con elementos concentrados, como se muestra en la Figura 96.



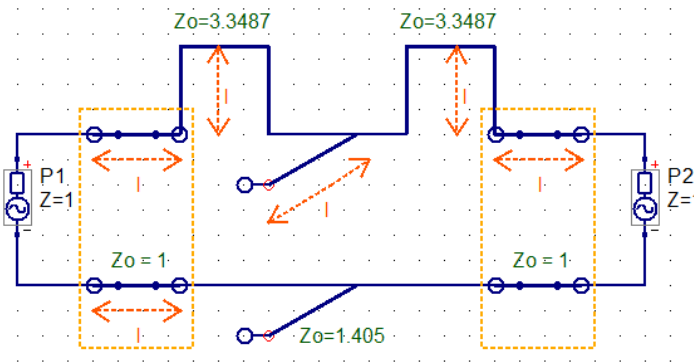
**Figura 96.** Circuito filtro pasa-bajo con elementos concentrados.

Ahora se utiliza las transformaciones de Richards para convertir inductores en serie a Stubs en serie y condensadores en paralelo a Stubs en paralelo, como se muestra en la Figura 97. Conforme a las Ecuaciones (228) y (229), la impedancia característica de un Stub en serie (inductor) es  $L$ , y la impedancia característica de un Stub en paralelo (condensador) es  $1/C$ . Todos los Stubs tienen una longitud de  $\lambda/8$  en  $\omega = \omega_c$ . Por lo general, es más conveniente trabajar con cantidades normalizadas hasta el último paso del diseño.



**Figura 97.** Circuito transformado en elementos distribuidos.

Seguidamente, se adiciona un elemento unitario en los terminales característicos del filtro, como se muestra en la Figura 98.

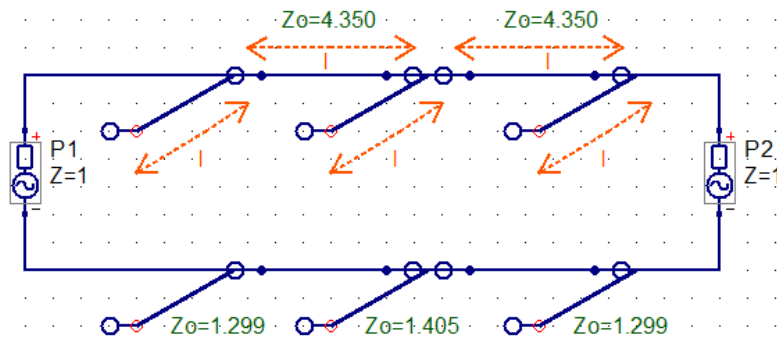


**Figura 98.** Adición de elementos unitarios en los puertos del filtro

Los Stubs en serie de la Figura 98 serían muy difíciles de implementar en forma de línea microstrip, por lo que se utilizará una de las identidades de Kuroda para convertirlos en Stubs en paralelo. Primero se agregan elementos de unidad en cualquier extremo del filtro, como se muestra en la Figura 98. Estos elementos redundantes no afectan el rendimiento del filtro ya que corresponden con la fuente y la carga ( $Z_0 = 1$ ). Entonces se puede aplicar las identidades de Kuroda (b) de la Figura 95, a ambos extremos del filtro. En ambos casos tenemos que:

$$n^2 = 1 + \frac{Z_2}{Z_1} = 1 + \frac{1}{3.3487} = 1.299$$

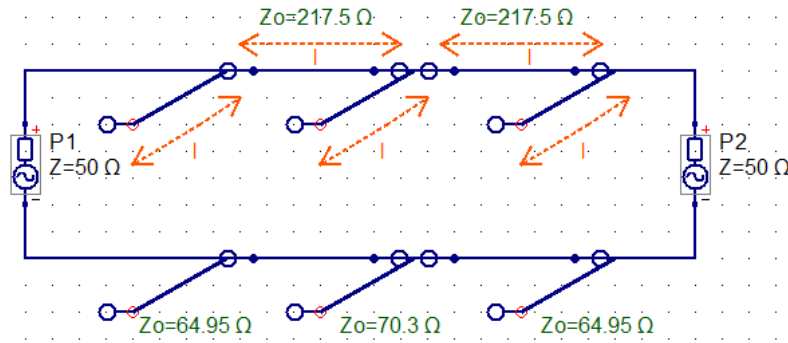
El resultado se muestra en la Figura 99.



**Figura 99.** Circuito equivalente con la aplicación de las identidades de Kuroda.

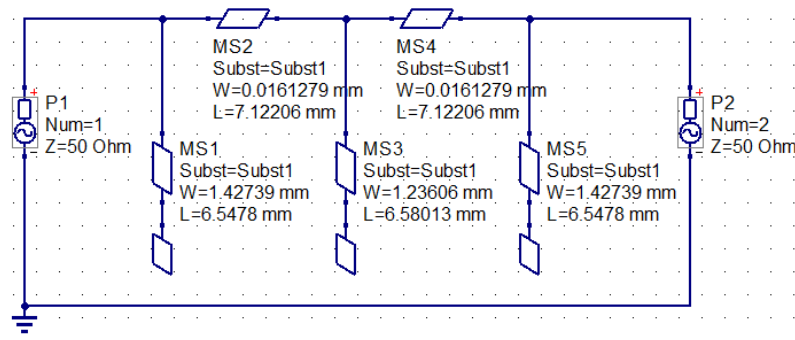


Finalmente, se realiza el escalado de impedancia y frecuencia del circuito, lo que simplemente implica multiplicar las impedancias características normalizadas por  $50\ \Omega$  y elegir las longitudes de la línea y Stub para tener  $\lambda/8$  a 4 GHz. Por lo tanto, el circuito final se muestra en la Figura 100.



**Figura 100.** Circuito final con escalado de impedancia y frecuencia.

Para la implementación del filtro con líneas microstrip, se utilizó la herramienta Line Calculation, a fin de determinar las dimensiones de las líneas en unidades métricas (mm); el cual está representado en la Figura 101.



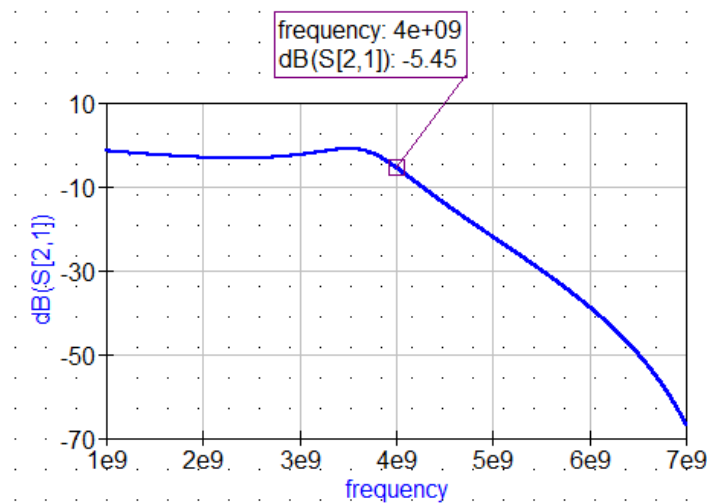
**Figura 101.** Circuito filtro pasa-bajo con líneas de transmisión microstrip.

La respuesta de amplitud calculada de este filtro se representa en la Figura 102. Teniendo en cuenta que la característica de banda de paso del filtro con un diseño de elementos distribuidos tiene un corte más definido.

La respuesta de amplitud requerida fue de 3 dB de rizado, como se puede divisar en el resultado de la simulación del filtro a frecuencia de corte de 4 GHz; se tiene un resultado de 5.45 dB de atenuación, dicho resultado se puede sintonizar al valor de la amplitud requerida; sin embargo, para fines

de implementación no es factible realizarla, debido a que se tiene una dimensión de línea;  $W = 0.0161679$  mm, el cual es extremadamente delgado para su implementación en la actualidad.

Por lo tanto, el presente ejercicio enfatiza el análisis matemático, las técnicas empleadas (Richards & Kuroda) para el diseño de componentes con líneas de transmisión microstrip, el cual desde el punto de vista académico es aceptable. Para fines de implementación; se debería caracterizar los sustratos a fin de determinar parámetros dieléctricos más reales para diseñar e implementar componentes a frecuencias de microonda, como se puede referencia en [18].



**Figura 102.** Respuesta de amplitud,  $S[2,1]$ .

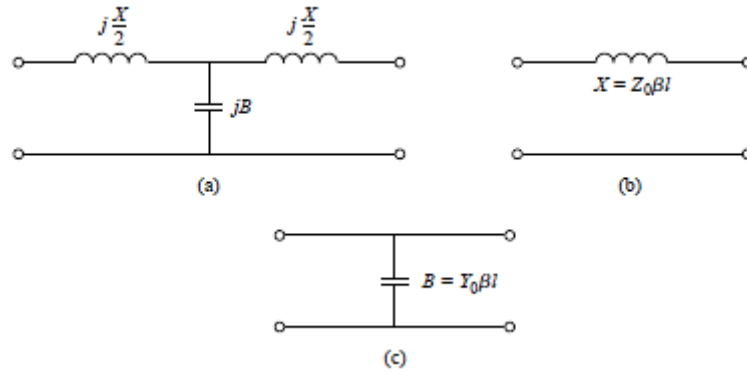
**Nota:** Se pueden utilizar procedimientos similares para diseño de filtros rechaza-banda, pero las identidades de Kuroda no es útil para filtros pasa-alto y pasa-banda [1].

## 5.4 Filtros Pasa-Bajo por Saltos de Impedancia

Otra forma relativamente fácil de implementar filtros pasa-bajo microstrip o stripline es usar alternancia, es decir secciones de líneas de impedancia característica de muy alta y muy baja. Tales filtros generalmente se conocen como filtros de impedancia escalonada o salto de impedancia (alta- $Z$  y baja- $Z$ ); son populares porque son más fáciles de diseñar y ocupan menos espacio que un filtro pasa bajo similar que usar Stubs. Sin embargo, debido a las aproximaciones involucradas, su desempeño eléctrico no es tan bueno, por lo que el uso de tales filtros generalmente se limita a aplicaciones donde un corte brusco no es requerido. Por ejemplo, al rechazar productos mezcladores fuera de banda.

### 5.4.1 Circuito Equivalente

El circuito equivalente aproximado para secciones de líneas de transmisión cortas y, para líneas que tengan impedancia característica muy grande y pequeña se modelan con el circuito mostrado en la Figura 103.



**Figura 103.** Circuito equivalente aproximado para líneas de transmisión con secciones cortas. (a) Circuito T-equivalente para línea de transmisión con  $\beta\ell \ll \pi/2$ . (b) Circuito equivalente para pequeñas  $\beta\ell$  y grandes  $Z_0$ . (c) Circuito equivalente para pequeñas  $\beta\ell$  y pequeñas  $Z_0$  [1].

Se inicia con la definición de parámetros ABCD de una longitud eléctrica  $\ell$  de una línea que tiene impedancia característica  $Z_0$ , el cual está definido en el Anexo E, donde se puede aplicar dicha conversión para encontrar los parámetros de impedancia como:

$$Z_{11} = Z_{22} = \frac{A}{C} = -jZ_0 \cot \beta\ell \quad (231)$$

$$Z_{12} = Z_{21} = \frac{1}{C} = -jZ_0 \csc \beta\ell \quad (232)$$

Donde los elementos en serie del circuito equivalente T son:

$$Z_{11} - Z_{12} = -jZ_0 \left( \frac{\cos \beta\ell - 1}{\sin \beta\ell} \right) = jZ_0 \tan \left( \frac{\beta\ell}{2} \right) \quad (233)$$

Mientras que el elemento en paralelo del circuito equivalente T es  $Z_{12}$ . Si  $\beta\ell < \pi/2$ , los elementos en serie tienen una reactancia positiva (inductores), mientras que el elemento en paralelo tiene una reactancia negativa (condensador). Por lo tanto, del circuito equivalente de la Figura (103), se tiene:

$$\frac{X}{2} = Z_0 \tan \left( \frac{\beta\ell}{2} \right) \quad (234)$$

$$B = \frac{1}{Z_0} \sin \beta \ell \quad (235)$$

Ahora se asumirá una longitud corta de línea ( $\beta \ell < \pi/4$ ) y, una gran impedancia característica. Entonces las Ecuaciones (234) y (235) se reducen aproximadamente a:

$$X \simeq Z_0 \beta \ell \quad (236)$$

$$B \simeq 0 \quad (237)$$

lo que implica que el circuito equivalente de la Figura 103-b (un inductor en serie). Por una longitud corta de línea y una pequeña impedancia característica, las Ecuaciones (234) y (235) se reducen aproximadamente a:

$$X \simeq 0 \quad (238)$$

$$B \simeq Y_0 \beta \ell \quad (239)$$

El cual implica que el circuito equivalente de la Figura 103-c (un capacitor en paralelo). Entonces los inductores en serie de un prototipo de pasa-bajo se pueden reemplazar con secciones de línea de alta impedancia ( $Z_0 = Z_h$ ) y, los condensadores en paralelo se pueden reemplazar con secciones de línea de baja impedancia ( $Z_0 = Z_\ell$ ).

La relación  $Z_h/Z_\ell$  debe ser lo más grande posible, por lo que los valores actuales  $Z_h$  y  $Z_\ell$  sean usualmente establecidos a la impedancia característica más alta y más baja que pueda prácticamente fabricarse. Las longitudes de las líneas se pueden determinar a partir de las Ecuaciones (236-239); para obtener la mejor respuesta cerca del corte, estas longitudes deben evaluarse en  $\omega = \omega_c$ . Combinando los resultados de las Ecuaciones (236-239) con las Ecuaciones de Escala (206) y (207). Permiten calcular las secciones de longitudes eléctricas del inductor como:

$$\beta \ell = \frac{LR_0}{Z_h} \quad (240)$$

De manera similar, se puede determinar las secciones de longitudes eléctricas del capacitor como:

$$\beta \ell = \frac{CZ_\ell}{R_0} \quad (241)$$

Donde;  $R_0$ , es la impedancia del filtro, y  $L$  &  $C$ , son los valores de los elementos normalizados ( $g_k$ ) del prototipo de filtro pasa-bajo.

**Ejemplo 26.**

Diseñar un filtro pasa-bajo de impedancia escalonada que tenga una respuesta maximalmente plana a una frecuencia de corte de 2.5 GHz. Se desea tener una pérdida de inserción de más de 20 dB a 4 GHz. La impedancia del filtro es 50  $\Omega$ ; la impedancia de línea práctica más alta es de 120  $\Omega$ , y el más bajo es 20  $\Omega$ . Considerar el efecto de pérdidas cuando el filtro esté implementado en un sustrato con dimensiones dieléctricas:  $h = 1.58$  mm,  $\epsilon_r = 4.2$ ,  $\tan \delta = 0.02$  y conductores de cobre de 12.7  $\mu\text{m}$  de espesor.

Solución:

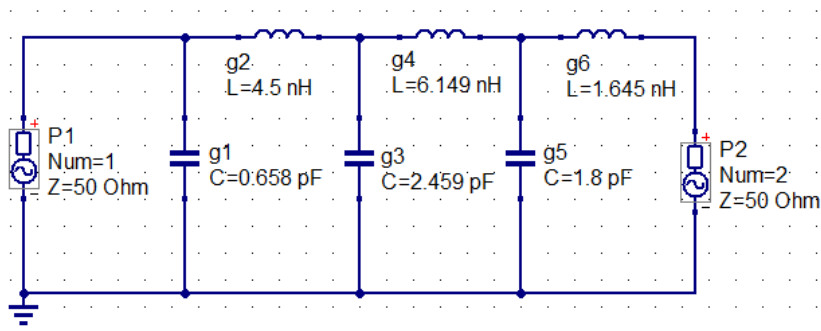
De la Figura 84 se determina el orden del filtro como:

$$\frac{\omega}{\omega_c} - 1 = \frac{2\pi(4 \times 10^9)}{2\pi(2.5 \times 10^9)} - 1 = 0.6$$

Por lo tanto, se tiene el orden del filtro  $N = 6$ , el cual debe establecer la atenuación requerida a 4.0 GHz. La Tabla 05 proporciona los valores del prototipo de pasa-bajo como:

$$\begin{aligned} g_1 &= 0.5176 = C_1 \\ g_2 &= 1.4142 = L_2 \\ g_3 &= 1.9318 = C_3 \\ g_4 &= 1.9318 = L_4 \\ g_5 &= 1.4142 = C_5 \\ g_6 &= 0.5176 = L_6 \end{aligned}$$

El prototipo de filtro pasa-bajo con componentes concentrados se muestra en la Figura 104.

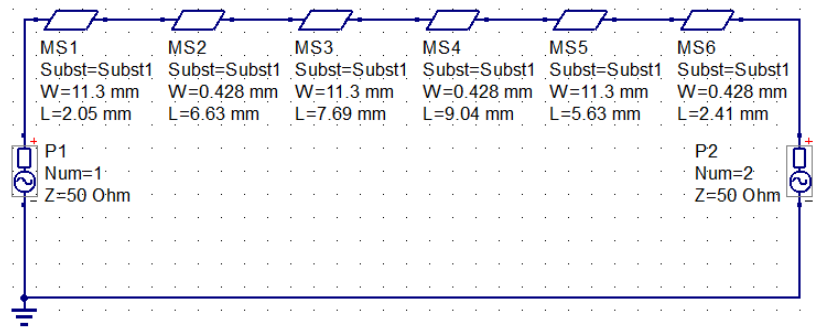


**Figura 104.** Circuito básico filtro pasa-bajo de orden,  $N = 6$ .

A continuación, se utilizan las Ecuaciones (240) y (241) para reemplazar los inductores en serie y condensadores en paralelo con secciones de líneas de alta y baja impedancia. Las longitudes de las líneas eléctricas requeridas  $\beta\ell_i$ , junto con los anchos de línea microstrip física,  $W_i$  y las longitudes  $\ell_i$  se muestran en la tabla siguiente:

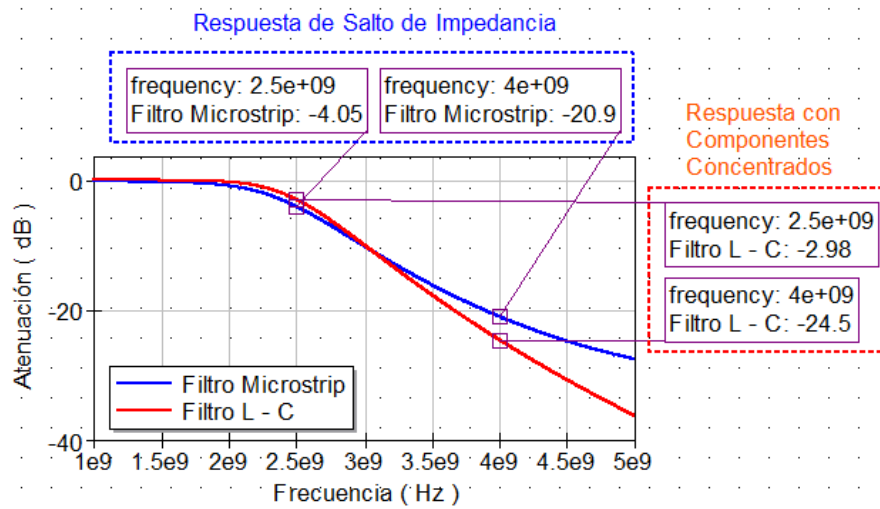
Sección	$Z_\ell$ o $Z_h$ ( $\Omega$ )	$\beta\ell_i$ (grados)	$W_i$ (mm)	$\ell_i$ (mm)
1	20	11.8	11.3	2.05
2	120	33.8	0.428	6.63
3	20	44.3	11.3	7.69
4	120	46.1	0.428	9.04
5	20	32.4	11.3	5.63
6	120	12.3	0.428	2.41

Por lo tanto, el diseño microstrip del filtro se muestra en la Figura 105, con  $Z_\ell = 20 \Omega$  y  $Z_h = 120 \Omega$ . Teniendo en cuenta que  $\beta\ell < 45^\circ$  para todas las secciones menos una.



**Figura 105.** Circuito filtro pasa-bajo con líneas microstrip.

Finalmente, la Figura 106 muestra la respuesta de amplitud calculada del filtro con y sin pérdidas. El efecto de la pérdida es aumentar la atenuación de la banda de paso aproximadamente 1 dB a 2 GHz. La respuesta del filtro de elementos agrupados correspondiente también se muestra en la Figura 106. La característica de la banda de paso es similar a la del filtro de salto de impedancia, pero el filtro con elementos concentrados da más atenuación a mayores frecuencias. Esto se debe a que los elementos del filtro de impedancia escalonada se alejan significativamente de los valores de los elementos agrupados a frecuencias altas. La impedancia escalonada del filtro puede tener otras bandas de paso a frecuencias altas.



**Figura 106.** Respuesta de amplitud de filtro pasa-bajo, por el método de diseño de salto de impedancia (línea azul), y respuesta del filtro con componentes concentrados (línea roja).

## 5.4.2 Experimentación & Caracterización

### Experiencia 01.

Diseñar, implementar y caracterizar un filtro pasa-bajo de impedancia escalonada que tenga una respuesta de banda de paso con rizado constante de 0.5 dB y, una frecuencia de corte de 1.5 GHz. Se desea tener una pérdida de inserción mayor a 25 dB a 2.4 GHz. La impedancia característica de los puertos del filtro es de  $50 \Omega$ . La dimensión de la línea práctica de más alta impedancia es  $W = 0.4 \text{ mm}$  y el de más baja impedancia es  $W = 16 \text{ mm}$ . Considerar el efecto de pérdidas cuando el filtro esté implementado en un sustrato FR4 con las características dieléctricas:

$$h = 1.50 \text{ mm}$$

$$\epsilon_r = 4.4$$

$$\tan \delta = 0.02$$

$$T = 35 \mu\text{m}$$

### Análisis Matemático:

Se procede a calcular el orden del filtro utilizando el valor absoluto de la Ecuación (200), donde se tiene:

$$\left| \frac{\omega}{\omega_c} \right| - 1 = 0.6$$

Luego, para cumplir con el valor de pérdida de inserción de más de 25 dB a 2.4 GHz, se analiza la Figura 85 de atenuación versus frecuencia normalizada para obtener un rizado contante de 0.5 dB. El cual da como resultado el orden del filtro en:

$$N = 5$$

Se tiene los valores normalizados para un filtro pasa-bajo:

$$g_1 = 1.7058 = C_1$$

$$g_2 = 1.2296 = L_2$$

$$g_3 = 2.5408 = C_3$$

$$g_4 = 1.2296 = L_4$$

$$g_5 = 1.7058 = C_5$$

Se procede a determinar la constante dieléctrica efectiva de los elementos concentrados utilizando la Ecuación (137).



$$\epsilon_e = \frac{\epsilon_r + 1}{2} + \frac{\epsilon_r - 1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + 12 \frac{d}{W}}}$$

Donde:

$$\epsilon_e = 3.862, \text{ para el capacitor}$$

$$\epsilon_e = 2.949, \text{ para el inductor}$$

Seguidamente, se procede a calcular el valor de la impedancia del inductor, utilizando la Ecuación (138).

Para;  $\frac{W}{d} \leq 1$

$$Z_h = \frac{60}{\sqrt{\epsilon_e}} \ln \left( \frac{8d}{W} + \frac{W}{4d} \right)$$

$$Z_h = 119.37 \Omega$$

De manera similar se determina el valor de la impedancia del capacitor, utilizando la Ecuación (139).

Para;  $\frac{W}{d} \geq 1$

$$Z_l = \frac{120\pi}{\sqrt{\epsilon_e} \left[ \frac{W}{d} + 1.393 + 0.667 \ln \left( \frac{W}{d} + 1.444 \right) \right]}$$

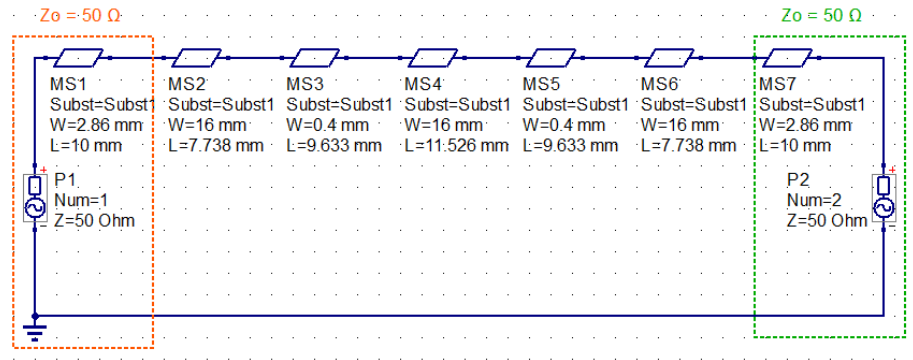
$$Z_l = 14.13 \Omega$$

Luego se determina la longitud eléctrica  $\beta \ell_i$  del inductor y condensador, utilizando las Ecuaciones (240) y (241).

Los resultados mostrados en la siguiente tabla, resumen las dimensiones de las secciones de la línea microstrip del filtro pasa-bajo.

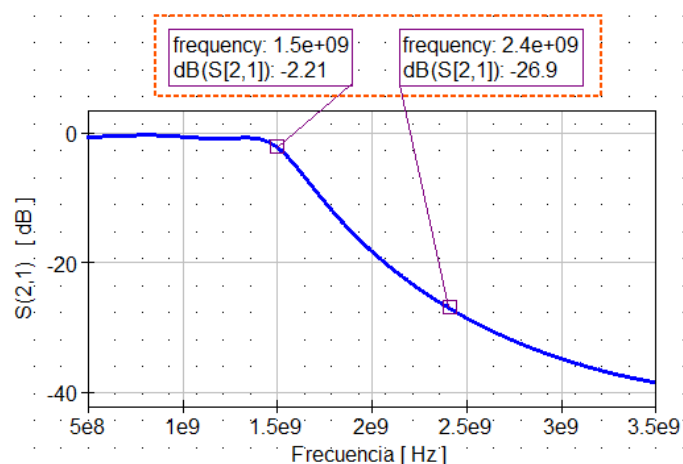
Sección	$g_n$	$Z_\ell$ o $Z_h$ ( $\Omega$ )	$\beta \ell_i$ (grados)	$W_i$ (mm)	$\ell_i$ (mm)
1	1.7058	14.13	27.62	16	7.738
2	1.2296	119.37	29.51	0.4	9.633
3	2.5408	14.13	41.14	16	11.526
4	1.2296	119.37	29.51	0.4	9.633
5	1.7058	14.13	27.62	16	7.738

La Figura 107 muestra el diseño del filtro pasa-bajo. Donde se adicionó dos líneas microstrip en los puertos con impedancia característica  $Z_0$ , a fin de tener flexibilidad en la conexión de los conectores SMA en el proceso de fabricación del filtro.



**Figura 107.** Circuito filtro pasa-bajo con líneas microstrip.

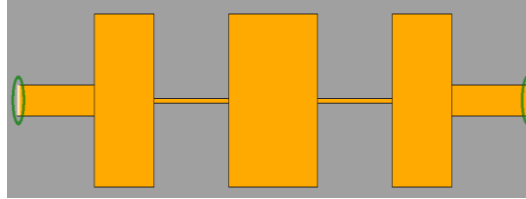
La Figura 108 muestra la respuesta de atenuación del filtro pasa-bajo; donde a la frecuencia de corte de 1.5 GHz, se tiene una atenuación de 2.21 dB, el cual difiere con el valor de rizado de 0.5 dB pretendido como valor de diseño. Estas variaciones se sintonizarán con la simulación electromagnética a fin de obtener los valores de diseño del filtro. Por otra parte, la pérdida de inserción a 2.4 GHz se tiene 26.9 dB de atenuación, el cual cumple con las expectativas del valor deseado ( $> 25$  dB).



**Figura 108.** Resultado de simulación del filtro pasa-bajo.

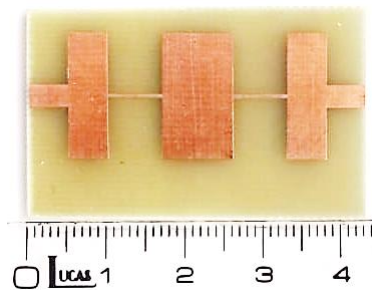
**Simulación Electromagnética:**

En este punto, se procede a realizar la simulación electromagnética del filtro pasa-bajo, a fin de obtener los valores de diseño como: una respuesta de banda de paso con rizado constante de 0.5 dB a frecuencia de corte de 1.5 GHz, como también una pérdida de inserción mayor a 25 dB a 2.4 GHz. La generación del filtro pasa-bajo en formato Layout para su respectiva simulación y fabricación se muestra en la Figura 109.



**Figura 109.** Generación layout del filtro pasa-bajo.

En esta etapa del experimento, se realizó una sintonización en las longitudes de las líneas de transmisión para no alterar sus respectivas impedancias; este proceso también es realizable con la herramienta Tune que dispone el software. La Figura 110 muestra el filtro fabricado utilizando el método de insolación.

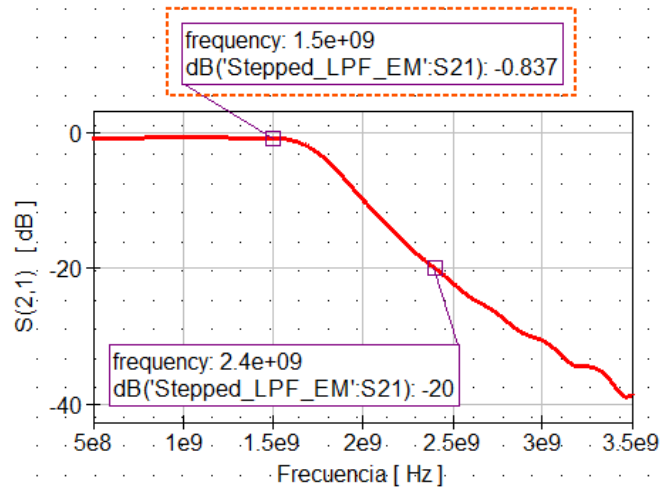


**Figura 110.** Filtro pasa-bajo implementado.

A continuación, se muestra los valores sintonizados de las longitudes de la línea microstrip para obtener valores aproximados de diseño.

Sección	$g_n$	$Z_\ell$ o $Z_h$ ( $\Omega$ )	$\beta\ell_i$ (grados)	$W_i$ (mm)	$\ell_i$ (mm)
1	1.7058	14.13	17.85	16	5
2	1.2296	119.37	21.51	0.4	7
3	2.5408	14.13	32.12	16	9
4	1.2296	119.37	21.51	0.4	7
5	1.7058	14.13	17.85	16	5

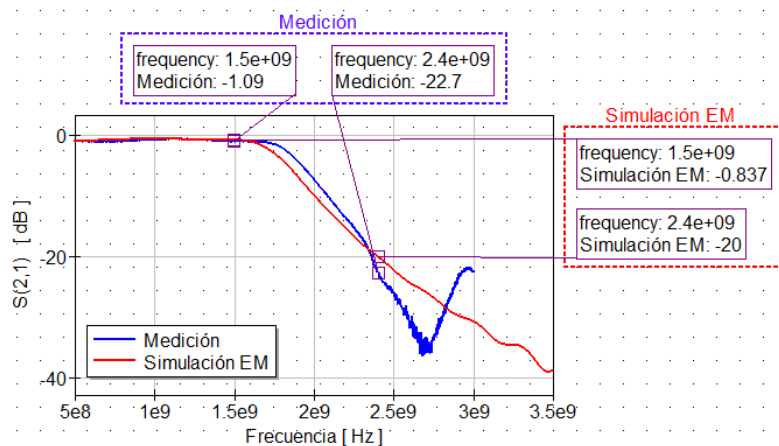
La Figura 111 muestra el resultado de la simulación electromagnética del filtro pasa-bajo, con valores sintonizados de las longitudes de cada línea de transmisión microstrip. Donde se puede ver una respuesta de atenuación de rizado constante de 0.837 dB a frecuencia de corte de 1.5 GHz, el cual es un valor ligeramente aproximado al valor de diseño de 0.5 dB. Sin embargo, se tiene una pérdida de inserción de 20 dB a 2.4 GHz, dicho resultado difiere en comparación al valor de diseño de obtener una pérdida de inserción mayor a 25 dB. Este resultado puede ser mejorado aumentando el orden del filtro.



**Figura 111.** Simulación electromagnética del filtro pasa-bajo.

### Medición:

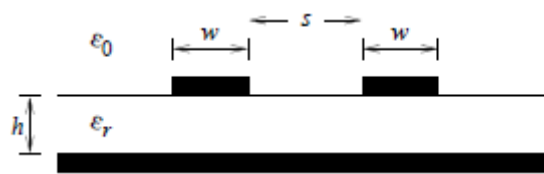
En esta etapa final del proyecto, la Figura 112 muestra el resultado de la simulación electromagnética y el resultado de la medición del filtro. Por lo tanto, la medición de la atenuación de rizado constante es de 1.09 dB a frecuencia de corte de 1.5 GHz, mientras que la medición de la pérdida de inserción es de 22.7 dB a 2.4 GHz.



**Figura 112.** Coeficiente de reflexión directa del filtro; medición real (línea azul) y, resultado de la simulación EM (línea roja).

## 5.5 Filtros Pasa-Banda de Líneas Acopladas

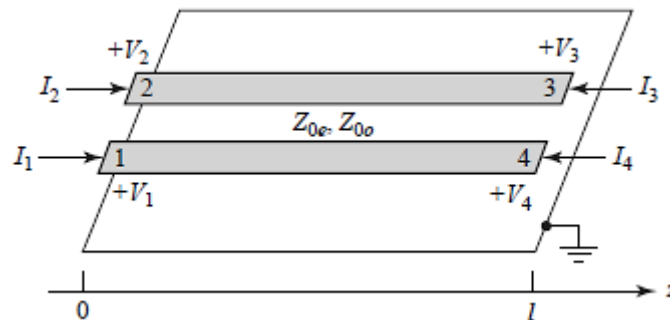
Las líneas de transmisión acopladas en paralelo, se puede utilizar para construir varios tipos de filtros; como la fabricación de pasa-banda en multisección o los filtros de líneas acopladas para respuesta de rechaza-banda. Dichas aplicaciones son particularmente fáciles en forma de microstrip o stripline para anchos de banda aproximadamente menores al 20%. Los filtros para anchos de banda más amplio generalmente requieren líneas muy estrechas que son difíciles de fabricar. Primero se estudiará las características del filtro de una sola sección de línea acoplada de cuarto de onda, como se muestra en la Figura 113; luego se analizará cómo estas secciones se pueden usar para diseñar un filtro de pasa-banda.



**Figura 113.** Sección transversal de líneas microstrip acopladas simétricamente [7].

### 5.5.1 Propiedades del Filtro Pasa-Banda de una Sección de Líneas Acopladas

En la Figura 114 se muestra una sección de líneas acopladas en paralelo, con puertos de voltaje y corriente definidos. Se analizará la matriz de impedancia de circuito abierto para esta red de cuatro puertos, mediante la superposición de excitaciones en modo par e impar. Por lo tanto, las fuentes de corriente  $i_1$  e  $i_3$  impulsan la línea en modo par, mientras que  $i_2$  e  $i_4$  conducen la línea en el modo impar. Por superposición, vemos que las corrientes totales del puerto  $I_i$ , se puede expresar en términos de las corrientes en modo par e impar.

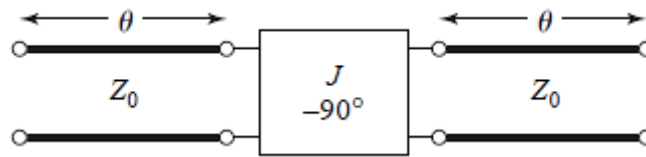


**Figura 114.** Geometría de líneas acopladas en paralelo con definiciones de puertos de voltaje y corriente [1].

### 5.5.2 Diseño de Filtros Pasa-Banda de Líneas Acopladas

Un filtro pasa-banda transfiere la señal deseada a la carga en una banda de frecuencias entre la frecuencia de corte inferior  $\omega_{c1}$ , y la frecuencia de corte superior  $\omega_{c2}$ . Entre la frecuencia de corte inferior y superior está la frecuencia central  $\omega_c$ , definida por la media geométrica de  $\omega_{c1}$  y  $\omega_{c2}$  [6]. Por lo tanto, un diseño de filtro pasa-banda puede formarse a partir de prototipos de diseños de filtro pasa-bajo, mediante el uso de una transformación de frecuencia que asignará la banda de paso del filtro pasa-bajo a la banda de paso del filtro pasa-banda.

Los filtros pasa-banda de banda estrecha se pueden diseñar con secciones de líneas acopladas en cascada. Para derivar las ecuaciones de diseño para filtros de este tipo, primero se analiza que una sola sección de línea acoplada puede ser modelada aproximadamente por el circuito equivalente que se muestra en la Figura 115, lo cual se realizará calculando la impedancia y la propagación de la imagen constante del circuito equivalente y, mostrando que son aproximadamente iguales a los de la sección de línea acoplada para  $\theta = \pi/2$ , que corresponderá a la frecuencia central de la respuesta del filtro pasa-banda.



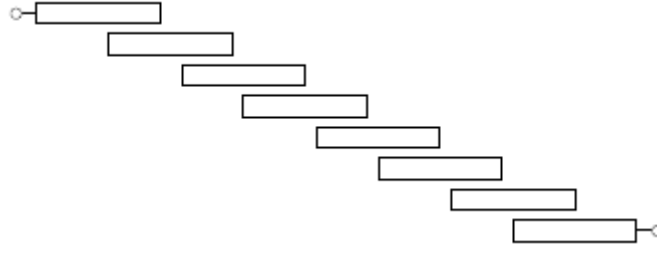
**Figura 115.** Circuito equivalente de una sección de líneas acopladas [13].

Las ecuaciones para resolver las impedancias de la línea de transmisión microstrip en modo par e impar se determinan por:

$$Z_{0e} = Z_0[1 + JZ_0 + (JZ_0)^2] \quad (242)$$

$$Z_{0o} = Z_0[1 - JZ_0 + (JZ_0)^2] \quad (243)$$

Ahora se considera un filtro de pasa-banda compuesto por secciones en cascada de línea acopladas  $N + 1$ , como se muestra en la Figura 116. Las secciones están numeradas de izquierda a derecha, con la carga en el lado derecho, pero el filtro se puede invertir sin afectar la respuesta. Dado que cada sección de línea acoplada tiene un circuito equivalente de la forma que se muestra en la Figura 115. Entre dos inversores consecutivos tenemos una sección de línea de transmisión que tiene efectivamente  $2\theta$  de longitud. Esta línea es aproximadamente  $\lambda/2$  de largo en las proximidades de la región de pasa-banda del filtro.



**Figura 116.** Diseño microstrip de siete secciones para un filtro pasa-banda con líneas acopladas [7].

Los resultados generales se pueden derivar para cualquier número de secciones y, para el caso donde  $Z_L \neq Z_0$  o cuando  $g_{N+1} \neq 1$ , como en el caso de una respuesta de rizado con  $N$  par.

Por lo tanto, las ecuaciones de diseño para un filtro de pasa-banda con secciones de línea acopladas  $N + 1$  son:

$$\text{Para } n = 1 \rightarrow Z_0 J_1 = \sqrt{\frac{\pi \Delta}{2g_1}} \quad (244)$$

$$\text{Para } n = 2, 3, \dots, N \rightarrow Z_0 J_n = \frac{\pi \Delta}{2\sqrt{g_{n-1}g_n}} \quad (245)$$

$$\text{Para } n = N + 1 \rightarrow Z_0 J_{N+1} = \sqrt{\frac{\pi \Delta}{2g_N g_{N+1}}} \quad (246)$$

**Ejemplo 27.** Diseñar un filtro pasa-banda de líneas acopladas con un orden del filtro  $N = 3$ , y con un rizado constante igual a 0.5 dB. La frecuencia central es de 2 GHz, el ancho de banda es del 10% y  $Z_0 = 50 \Omega$ . ¿Cuál será la atenuación del filtro a 1.8 GHz? [13].

**Solución:**

El ancho de banda fraccional es  $\Delta = 0.1$ , donde se puede usar la Figura 85 para obtener la atenuación del filtro a 1.8 GHz, pero primero se usará la Ecuación (215) para convertir esta frecuencia a la forma normalizada de pasa-bajo ( $\omega_c = 1$ ) como:

$$\omega \leftarrow \left| \frac{\omega}{\omega_c} \right| - 1 = \left| \frac{1}{\Delta} \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right| - 1$$

Entonces el valor en la escala horizontal de la Figura 85 está definido por la Ecuación 215 como:

$$\omega \leftarrow \left| \frac{1}{\Delta} \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right| - 1$$

$$\omega \leftarrow \left| \frac{1}{0.1} \left( \frac{2\pi(1.8 \times 10^9)}{2\pi(2.0 \times 10^9)} - \frac{2\pi(2.0 \times 10^9)}{2\pi(1.8 \times 10^9)} \right) \right| - 1 = 1.11$$

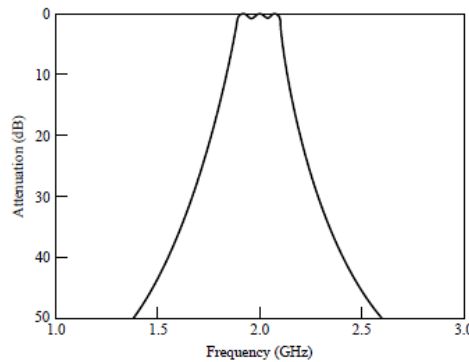
Lo que indica una atenuación de aproximadamente 20 dB para  $N = 3$ .

Los valores del prototipo de pasa-bajo  $g_n$ , se establecen en la Tabla 06; entonces las Ecuaciones (244-246) puede utilizarse para calcular las constantes de admitancia invertida  $J_n$ . Finalmente, las impedancias características del modo par e impar pueden ser determinados a partir de las Ecuaciones (242) y (243). Este resultado es resumido en la tabla siguiente:

$n$	$g_n$	$Z_0 J_n$	$Z_{0e} (\Omega)$	$Z_{0o} (\Omega)$
1	1.5963	0.3137	70.61	39.24
2	1.0967	0.1187	56.64	44.77
3	1.5963	0.1187	56.64	44.77
4	1.0000	0.3137	70.61	39.24

Teniendo en cuenta que las secciones del filtro son simétricas con respecto al punto medio. La respuesta espectral de este filtro se muestra en la Figura 117; las bandas de paso también ocurren a 6 GHz, 10 GHz, etc.

Se pueden construir muchos tipos de filtros utilizando secciones de línea acopladas. La mayoría de estos son de variedad pasa-banda o rechaza-banda. Un diseño particularmente compacto es el filtro inter-digitado, que se puede obtener de un filtro de línea acoplado, doblando las líneas en sus puntos medios.



**Figura 117.** Respuesta de amplitud del filtro pasa-banda de líneas acopladas [13].



### 5.5.3 Experimentación & Caracterización

#### Experiencia 02.

Diseñar, implementar y caracterizar un filtro pasa-banda de líneas acopladas para obtener una banda de paso maximalmente plana para una frecuencia central;  $f_c=2.1$  GHz, y un ancho de banda relativo  $\Delta = 12\%$ , cuya impedancia característica del filtro  $Z_0 = 50 \Omega$ . Las pérdidas de inserción se establecen en: 1.6 GHz igual a 27 dB y 2.6 GHz igual a 32 dB.

Para el diseño físico del filtro se utilizará los valores dieléctricos definidos del sustrato de la experiencia anterior.

#### Análisis Matemático:

Primero se determina el orden del filtro con los valores de diseño, para dicho análisis se utiliza la Ecuación (215).

$$w \leftarrow \left| \frac{w}{w_c} \right| - 1 = \left| \frac{1}{\Delta} \left( \frac{w}{w_0} - \frac{w_0}{w} \right) \right| - 1$$

Para normalizar la frecuencia de inserción a 1.6 GHz, se obtiene:

$$w \leftarrow \left| \frac{1}{0.12} \left( \frac{2\pi \times 1.6 \times 10^9}{2\pi \times 2.1 \times 10^9} - \frac{2\pi \times 2.1 \times 10^9}{2\pi \times 1.6 \times 10^9} \right) \right| - 1 = 3.588$$

Luego, para normalizar la frecuencia de inserción a 2.6 GHz, se obtiene:

$$w \leftarrow \left| \frac{1}{0.12} \left( \frac{2\pi \times 2.6 \times 10^9}{2\pi \times 2.1 \times 10^9} - \frac{2\pi \times 2.1 \times 10^9}{2\pi \times 2.6 \times 10^9} \right) \right| - 1 = 2.587$$

Analizando ambas frecuencias normalizadas de inserción con sus respectivas atenuaciones según la Figura 84, se considera el orden del filtro de mayor valor; por lo tanto, se asignará un orden del filtro  $N=4$  para obtener una mejor respuesta de atenuación del filtro.

$$g_1 = 0.7654 = C_1$$

$$g_2 = 1.8478 = L_2$$

$$g_3 = 1.8478 = C_3$$

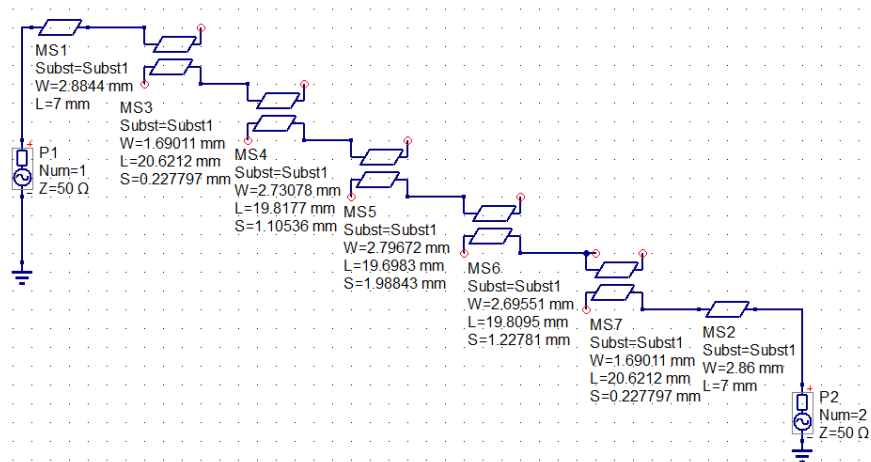
$$g_4 = 0.7654 = L_4$$

Luego se procede a determinar los valores de las impedancias de modo par e impar de las líneas acopladas que conformará el diseño del filtro pasa-banda.

Para dicho análisis se utiliza las Ecuaciones (242) y (243), como también las Ecuaciones (244 – 246) para calcular las secciones del filtro. Por lo tanto, la siguiente tabla resume los valores determinados de impedancia par e impar de cada sección de línea microstrip.

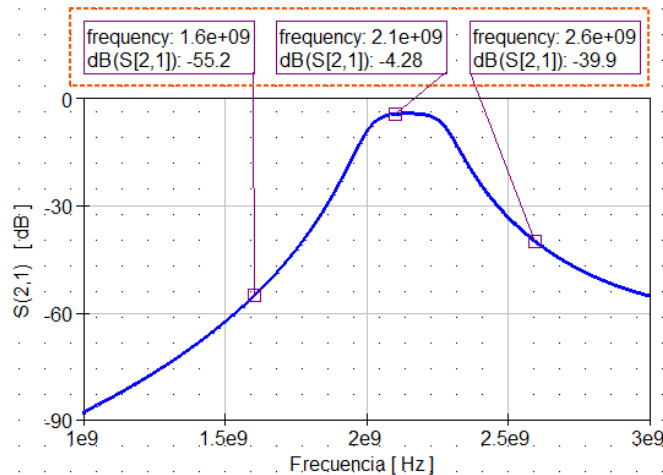
N	$G_i$	$Z_oJ$	$Z_{oe}$	$Z_{o0}$
1	0.7654	0.4963	87.13	37.50
2	1.8478	0.1585	59.18	42.33
3	1.8478	0.1020	55.62	45.42
4	0.7654	0.1585	59.18	43.33
5	1	0.4963	87.13	37.50

Determinado los valores de las impedancias par e impar, se procede a diseñar el filtro pasa-banda por el método de líneas acopladas; para lo cual se utiliza la herramienta Line Calculation del software [19], a fin de determinar las dimensiones de las líneas de transmisión microstrip en unidades métricas (milímetros). La Figura 118 muestra el diseño del filtro pasa-banda con líneas acopladas microstrip.



**Figura 118.** Filtro pasa-banda con líneas acopladas microstrip.

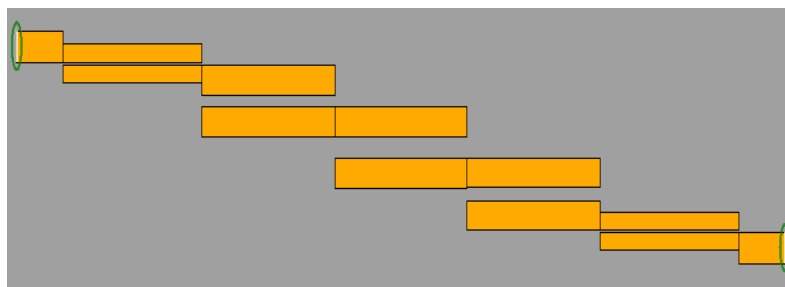
En esta etapa del laboratorio, se procede a realizar la simulación correspondiente a fin de verificar la respuesta de atenuación versus frecuencia del filtro. Como se puede ver en la Figura 119 la atenuación constante en la frecuencia central de 2.1 GHz es 4.19 dB, mientras que las pérdidas de inserción en las frecuencias laterales son mayores a lo establecido en los valores de diseño; 1.6 GHz dispone de 51.9 dB, y en la frecuencia superior de 2.6 GHz se obtiene 44.4 dB de atenuación.



**Figura 119.** Respuesta de atenuación del filtro pasa-banda de líneas acopladas.

### **Simulación Electromagnética:**

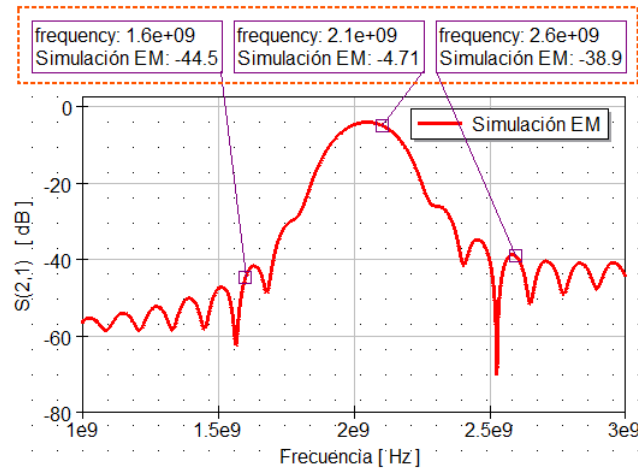
El proceso anterior desarrollado establece una simulación ideal del filtro, ahora se procede a realizar la simulación electromagnética del diseño, a fin de obtener un resultado más preciso a la realidad (implementación física de filtro). Para lo cual se procede a generar el diseño *Layout* del filtro pasa-banda con todas las configuraciones de diseño; la frecuencia de simulación, la definición de parámetros dieléctricos del sustrato FR4 a utilizar y, la fuente de excitación en los puertos. Por lo tanto, la Figura 120 muestra el diseño *Layout* del filtro pasa-banda.



**Figura 120.** Generación layout del filtro pasa-banda.

Realizado las configuraciones del diseño *Layout* del filtro, se procede a realizar la simulación correspondiente, donde se puede realizar configuraciones de sintonización del diseño a fin de tener resultados más precisos acorde a los valores de diseño.

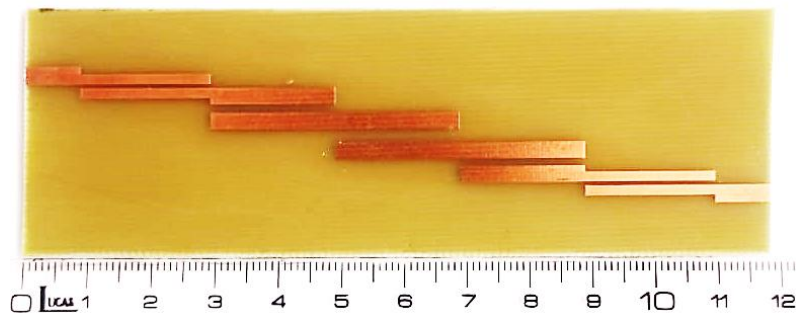
Como se puede ver en la Figura 121, la atenuación constante en la frecuencia central de 2.1 GHz es 4.71 dB, mientras que las pérdidas de inserción en las frecuencias laterales son mayores a lo establecido en los valores de diseño; 1.6 GHz dispone de 44.5 dB, y en la frecuencia superior de 2.6 GHz se obtiene 38.9 dB de atenuación.



**Figura 121.** Respuesta de simulación electromagnética del filtro pasa-banda.

### Medición:

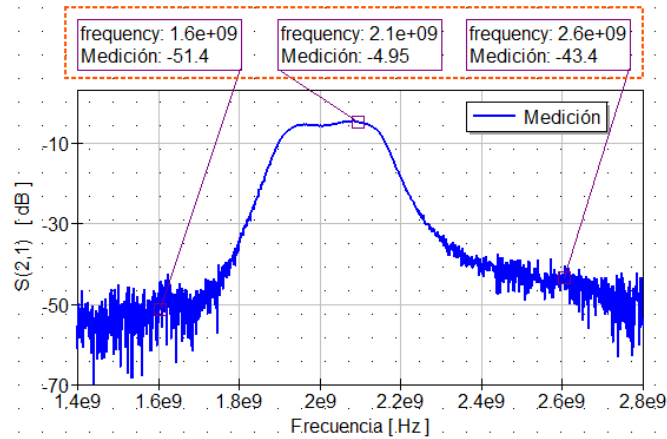
La Figura 122 muestra la implementación física del filtro realizado con la técnica de insolación.



**Figura 122.** Implementación del filtro pasa-banda de líneas acopladas.

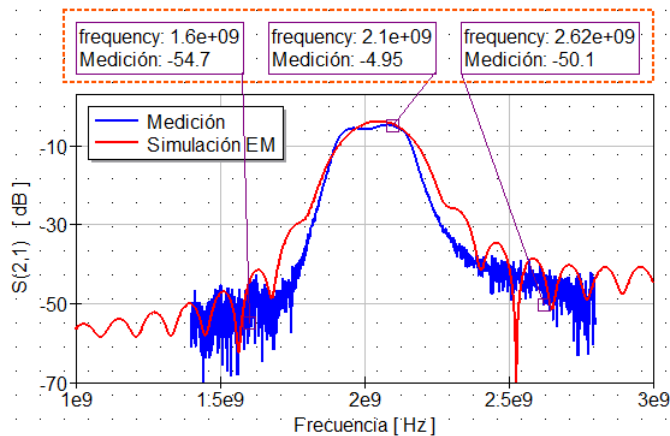
Para la caracterización del filtro, se procede a realizar la configuración necesaria en el analizador vectorial de redes, a fin de calibrar un rango de frecuencia de medición de 0.5 GHz a 3 GHz.

La Figura 123 muestra el resultado de la medición del filtro, donde se obtiene una atenuación de 4.95 dB a la frecuencia central de 2.1 GHz, mientras que los valores medidos de pérdida de inserción en las frecuencias laterales son mayores que los datos establecidos en el diseño.



**Figura 123.** Medición del filtro pasa-banda de líneas acopladas.

Finalmente, la Figura 124 muestra una comparación de resultados de la medición realizada al filtro, con el resultado de la simulación EM.



**Figura 124.** Comparación de respuestas de amplitud del filtro pasa-banda. Medición real (línea azul), y simulación electromagnética del filtro (línea roja).

## Referencias

- [1] D. M. Pozar, Microwave Engineering, 4<sup>th</sup> ed., John Willey & Sons, Inc., 2012.
- [2] W. Tomasi, Sistemas de Comunicaciones Electrónicas, 4<sup>th</sup> ed., Pearson Educación, 2003.
- [3] P. G. Huray, Maxwell's Equations, IEEE Press, John Willey & Sons, Inc., 2010.
- [4] J. Kong, Electromagnetic Wave Theory, Massachusetts: John Willey & Sons, Inc., 2005.
- [5] Y. Shestopalov, E. Smolkin, Electromagnetic Fields and Waves: Mathematical Models and Numerical Methods, URSI Commission B School for Young Scientists, HiG, 2016.
- [6] W. A. Davis, K. Agarwal, Radio Frequency Circuit Design, John Willey & Sons, Inc. 2001.
- [7] M. Steer, Microwave and RF Design a Systems Approach, Scitech Publishing, Inc., 2010.
- [8] K. C. Gupta, R. Garg, I. Bahl, P. Bhartia, Microstrip Lines and Slotlines, 2<sup>nd</sup> ed., Artech House, Inc., 1996.
- [9] C. A. Balanis, Antenna Theory: Analysis and Design, 3<sup>rd</sup> ed., John Willey & Sons, Inc., New York, 2005.
- [10] R. N. Vela, L. H. Porragas Beltrán, Líneas de Transmisión, Universidad Veracruzana, 2013.
- [11] R. E. Collin, Foundations for Microwave Engineering, 2<sup>nd</sup> ed., Wiley-IEEE Press, Hoboken, N. J., 2001.
- [12] M. Golio, J. Golio, RF and Microwave Passive and Active Technology, 2<sup>nd</sup> ed., HWI Semiconductor, Inc., 2008.
- [13] D. M. Pozar, Microwave and RF Design of Wireless Systems, John Willey & Sons, Inc., 2001.
- [14] C. Bowick, RF Circuit Design, Newnes an Imprint of Elsevier Science, 1982.
- [15] R. Chi-Hsi Li, RF Circuit Design, John Willey & Sons, Inc., 2009.

- [16] T. L. Floyd, Principios de Circuitos Eléctricos, 8<sup>va</sup> ed., Pearson Educación, Mexico, 2007.
- [17] C. K. Alexander, M. N. O. Sadiku, Fundamentos de Circuitos Eléctricos, 3<sup>ra</sup> ed., McGraw-Hill Interamericana, 2006.
- [18] J. A. Rivera Suaña, “Design of a Low-Noise Amplifier for Radar Application in the 5 GHz Frequency Band”, Thesis Submitted for Publication, University of Gavle, Sweden, 2017.
- [19] Getting started with QUCS:

**Anexo A:** Prefijos y Constantes Físicas

Factor de Multiplicación		Prefijo	Símbolo
.....	$10^{12}$	tera	T
	$10^9$	giga	G
	$10^6$	mega	M
	$10^3$	kilo	k
	$10^2$	hecto	h
	$10^1$	deka	da
	$10^{-1}$	deci	d
	$10^{-2}$	centi	c
	$10^{-3}$	milli	m
	$10^{-6}$	micro	$\mu$
	$10^{-9}$	nano	n
	$10^{-12}$	pico	p
	$10^{-15}$	femto	f

**Constantes Físicas**

Permitividad del espacio libre	$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ F/m}$
Permeabilidad del espacio libre	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$
Impedancia del espacio libre	$\eta_0 = 376.7 \text{ } \Omega$
Velocidad de la luz en el espacio libre	$c = 2.998 \times 10^8 \text{ m/s}$
Carga del electrón	$q = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$
Masa del electrón	$m = 9.107 \times 10^{-31} \text{ kg}$
Constante de Boltzmann	$k = 1.380 \times 10^{-23} \text{ J/}^\circ\text{K}$
Constante de Planck	$h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ J} - \text{seg}$



**Anexo B:** Conductividad y Propiedades Dieléctricas de Materiales Comunes

Material	Conductividad S/m ( 20° C )	Material	Conductividad S/m ( 20° C )
Aluminio	$3.816 \times 10^7$	Nicromo	$1.000 \times 10^6$
Latón	$2.564 \times 10^7$	Níquel	$1.449 \times 10^7$
Bronce	$1.000 \times 10^7$	Platino	$9.520 \times 10^6$
Cromo	$3.846 \times 10^7$	Agua de mar	3 – 5
Cobre	$5.813 \times 10^7$	Silicio	$4.400 \times 10^{-4}$
Agua destilada	$2.000 \times 10^{-4}$	Plata	$6.173 \times 10^7$
Germanio	$2.200 \times 10^6$	Acero (silicona)	$2.000 \times 10^6$
Oro	$4.098 \times 10^7$	Acero (inoxidable)	$1.100 \times 10^6$
Grafito	$7.000 \times 10^4$	Soldar	$7.000 \times 10^6$
Fierro	$1.030 \times 10^7$	Tungsteno	$1.825 \times 10^7$
Mercurio	$1.040 \times 10^6$	Zinc	$1.670 \times 10^7$
Plomo	$4.560 \times 10^6$		

Material	$10^{-4} * \tan \delta$ (Hasta 10 GHz)	$\epsilon_r$
Aire (seco)	$\approx 0$	1
Alúmina, 99.5 %	1 – 2	10.1
Zafiro	0.4 – 0.7	9.4, 11.6
Vidrio (típico)	20	5
Poliimida	50	3.2
Cuarzo (fusionado)	1	3.8
FR4 placa de circuito	100	4.3 – 4.5
RT-duroid 5880	5 – 15	2.16 – 2.24
RT-duroid 6010	10 – 60	10.2 – 10.7
AT-1000	20	10.0 – 13.0
Silicio Si (alta resistividad)	10 – 100	11.9
GaAs	6	12.85
InP	10	12.4
SiO <sub>2</sub> (en-chip)	---	4.0 – 4.2
LTCC (típico, tapa verde TM 951)	15	7.8

## Anexo C: Resultados Útiles

### Ecuaciones de Maxwell

$$\begin{aligned}\nabla \times \bar{E} &= -j\omega\mu\bar{H} - \bar{M} & \nabla \cdot \bar{D} &= \rho \\ \nabla \times \bar{H} &= j\omega\epsilon\bar{E} + \bar{J} & \nabla \cdot \bar{B} &= 0\end{aligned}$$

### Resistencia de Superficie & Skim Depth

$$R_s = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} \quad \delta_s = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}$$

### Impedancia de Entrada de Líneas de Transmisión Terminadas sin Pérdidas

$$Z_{ent} = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan \beta\ell}{Z_0 + jZ_L \tan \beta\ell} \quad \text{Carga arbitraria}$$

$$Z_{ent} = jZ_0 \tan \beta\ell \quad \text{Línea cortocircuitada}$$

$$Z_{ent} = -jZ_0 \cot \beta\ell \quad \text{Línea en circuito abierto}$$

### Relación entre la Impedancia de Carga y el Coeficiente de Reflexión

$$\Gamma = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \quad Z_L = Z_0 \frac{1 + \Gamma}{1 - \Gamma}$$

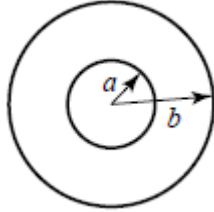
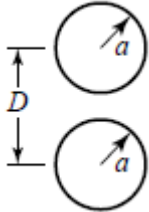
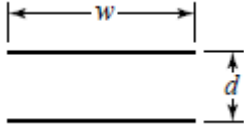
### Definición de Pérdida de Retorno, Pérdida de Inserción y VSWR

$$RL = -20 \log |\Gamma| \quad IL = -20 \log |T| \quad VSWR = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|}$$

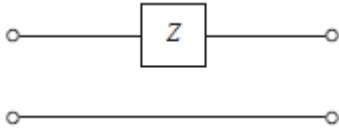
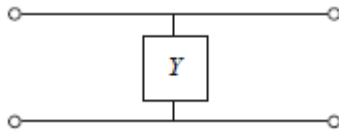
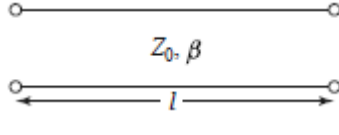
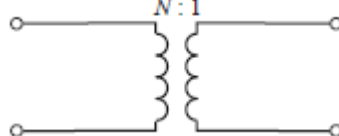
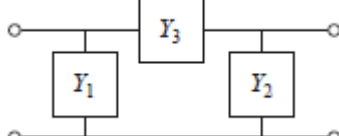
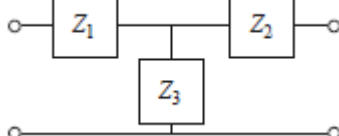
### Conversión entre Valores del Coeficiente de Reflexión, VSWR y Pérdida de Retorno

\Gamma	0.024	0.032	0.048	0.050	0.056	0.100	0.178	0.200	0.316	0.330
VSWR	1.05	1.07	1.10	1.11	1.12	1.22	1.43	1.50	1.92	2.00
RL (dB)	32.3	30.0	26.4	26.0	25.0	20.0	15.0	14.0	10.0	9.60

**Anexo D:** Parámetros de Líneas de Transmisión para Líneas Comunes

	Cable Coaxial	Linea Bifilar	Linea Plana Paralela
			
$L$	$\frac{\mu}{2\pi} \ln \left( \frac{b}{a} \right)$	$\frac{\mu}{\pi} \cosh^{-1} \left( \frac{D}{2a} \right)$	$\frac{\mu d}{w}$
$C$	$\frac{2\pi\epsilon'}{\ln \left( \frac{b}{a} \right)}$	$\frac{\pi\epsilon'}{\cosh^{-1} \left( \frac{D}{2a} \right)}$	$\frac{\epsilon' w}{d}$
$R$	$\frac{R_s}{2\pi} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$	$\frac{R_s}{\pi a}$	$\frac{2R_s}{w}$
$G$	$\frac{2\pi\omega\epsilon''}{\ln \left( \frac{b}{a} \right)}$	$\frac{\pi\omega\epsilon''}{\cosh^{-1} \left( \frac{D}{2a} \right)}$	$\frac{\omega\epsilon'' w}{d}$

**Anexo E:** Parámetros ABCD de Circuitos Usuales de dos Puertos

Circuito	Parámetros ABCD	
	$A = 1$ $C = 0$	$B = Z$ $D = 1$
	$A = 1$ $C = Y$	$B = 0$ $D = 1$
	$A = \cos \beta \ell$ $C = jY_0 \sin \beta \ell$	$B = jZ_0 \sin \beta \ell$ $D = \cos \beta \ell$
	$A = N$ $C = 0$	$B = 0$ $D = \frac{1}{N}$
	$A = 1 + \frac{Y_2}{Y_3}$ $C = Y_1 + Y_2 + \frac{Y_1 Y_2}{Y_3}$	$B = \frac{1}{Y_3}$ $D = 1 + \frac{Y_1}{Y_3}$
	$A = 1 + \frac{Z_1}{Z_3}$ $C = \frac{1}{Z_3}$	$B = Z_1 + Z_2 + \frac{Z_1 Z_2}{Z_3}$ $D = 1 + \frac{Z_2}{Z_3}$





