Probabilidade e Estatística

Matheus Pimenta

Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Câmpus Cornélio Procópio

Agosto de 2020
ADNP 2020

Eventos Equiprováveis

Definição:
Considere o espaço amostral $\Omega = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ associado a um experimento aleatório.
Os eventos e_i, $i = 1, \ldots, n$ são *equiprováveis* quando

$$P(e_1) = P(e_2) = \cdots = P(e_n) = p,$$

isto é, todos possuem a mesma probabilidade de ocorrer, isto é:

$$p = \frac{1}{n}$$

Eventos Equiprováveis

Definição:
Considere o espaço amostral $\Omega = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ associado a um experimento aleatório.
Os eventos e_i, $i = 1, \ldots, n$ são *equiprováveis* quando

$$P(e_1) = P(e_2) = \cdots = P(e_n) = p,$$

isto é, todos possuem a mesma probabilidade de ocorrer, isto é:

$$p = \frac{1}{n}$$

Assim, se o evento é equiprovável, a probabilidade de cada um dos pontos amostrais ocorrer é de: $\dfrac{1}{n}$.

Exemplo

Exemplo 01: Retira-se uma carta de um baralho completo de 52 cartas. Qual a probabilidade de sair um *rei* ou uma *carta de espadas*?

Exemplo

Exemplo 01: Retira-se uma carta de um baralho completo de 52 cartas. Qual a probabilidade de sair um *rei* ou uma *carta de espadas*?
Solução:

Exemplo

Exemplo 01: Retira-se uma carta de um baralho completo de 52 cartas. Qual a probabilidade de sair um *rei* ou uma *carta de espadas*?

Solução:

Seja A: retirar um *rei* e B: retirar uma *carta de espadas*.

Exemplo

Exemplo 01: Retira-se uma carta de um baralho completo de 52 cartas. Qual a probabilidade de sair um *rei* ou uma *carta de espadas*?

Solução:

Seja A: retirar um *rei* e B: retirar uma *carta de espadas*.

Então:

$A = \{R_O, R_E, R_C, R_P\}$

Exemplo

Exemplo 01: Retira-se uma carta de um baralho completo de 52 cartas. Qual a probabilidade de sair um *rei* ou uma *carta de espadas*?

Solução:

Seja A: retirar um *rei* e B: retirar uma *carta de espadas*.

Então:

$$A = \{R_O, R_E, R_C, R_P\} \implies P(A) = \frac{4}{52}$$

Exemplo

Exemplo 01: Retira-se uma carta de um baralho completo de 52 cartas. Qual a probabilidade de sair um *rei* ou uma *carta de espadas*?

Solução:

Seja A: retirar um *rei* e B: retirar uma *carta de espadas*.

Então:

$$A = \{R_O, R_E, R_C, R_P\} \implies P(A) = \frac{4}{52}$$

$$B = \{A_E, \ldots, R_E\}$$

Exemplo

Exemplo 01: Retira-se uma carta de um baralho completo de 52 cartas. Qual a probabilidade de sair um *rei* ou uma *carta de espadas*?

Solução:

Seja A: retirar um *rei* e B: retirar uma *carta de espadas*.

Então:

$$A = \{R_O, R_E, R_C, R_P\} \implies P(A) = \frac{4}{52}$$

$$B = \{A_E, \ldots, R_E\} \implies P(B) = \frac{13}{52}$$

Exemplo

Exemplo 01: Retira-se uma carta de um baralho completo de 52 cartas. Qual a probabilidade de sair um *rei* ou uma *carta de espadas*?

Solução:

Seja A: retirar um *rei* e B: retirar uma *carta de espadas*.

Então:

$$A = \{R_O, R_E, R_C, R_P\} \implies P(A) = \frac{4}{52}$$

$$B = \{A_E, \ldots, R_E\} \implies P(B) = \frac{13}{52}$$

Se observarmos que $P(A \cap B) = \{R_E\}$, logo $P(A \cap B) = \dfrac{1}{52}$.

Exemplo

Exemplo 01: Retira-se uma carta de um baralho completo de 52 cartas. Qual a probabilidade de sair um *rei* ou uma *carta de espadas*?
Solução:
Seja A: retirar um *rei* e B: retirar uma *carta de espadas*.
Então:

$A = \{R_O, R_E, R_C, R_P\} \implies P(A) = \frac{4}{52}$

$B = \{A_E, \ldots, R_E\} \implies P(B) = \frac{13}{52}$

Se observarmos que $P(A \cap B) = \{R_E\}$, logo $P(A \cap B) = \frac{1}{52}$.
Logo, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ e assim,

$$P(A \cup B) = \frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52}$$

e assim:

Exemplo

Exemplo 01: Retira-se uma carta de um baralho completo de 52 cartas. Qual a probabilidade de sair um *rei* ou uma *carta de espadas*?
Solução:
Seja A: retirar um *rei* e B: retirar uma *carta de espadas*.
Então:
$A = \{R_O, R_E, R_C, R_P\} \implies P(A) = \frac{4}{52}$
$B = \{A_E, \ldots, R_E\} \implies P(B) = \frac{13}{52}$
Se observarmos que $P(A \cap B) = \{R_E\}$, logo $P(A \cap B) = \frac{1}{52}$.
Logo, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ e assim,

$$P(A \cup B) = \frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52}$$

e assim:

$$P(A \cup B) = \frac{16}{52}$$

Probabilidade Condicional

Definição:
Sejam $A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$. Definimos como *probabilidade condicional de A, dado que B ocorre* (A/B) como:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \text{ se } P(B) \neq 0$$

ou no caso de (B/A):

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}, \text{ se } P(A) \neq 0$$

Exemplo

Considere 250 alunos que cursam faculdade. Destes alunos, 100 são homens (H) e 150 são mulheres (M); 110 cursam física (F) e 140 cursam (Q). A distribuição dos alunos é a seguinte:

Cursam física: 40 homens e 70 mulheres;

Cursam química: 60 homens e 80 mulheres;

Um aluno é sorteado ao acaso, qual a probabilidade de que esteja cursando química, dado que é mulher?

Exemplo

Considere 250 alunos que cursam faculdade. Destes alunos, 100 são homens (H) e 150 são mulheres (M); 110 cursam física (F) e 140 cursam (Q). A distribuição dos alunos é a seguinte:
Cursam física: 40 homens e 70 mulheres;
Cursam química: 60 homens e 80 mulheres;
Um aluno é sorteado ao acaso, qual a probabilidade de que esteja cursando química, dado que é mulher?
Solução:

Note que: A probabilidade $P(M \cap Q)$

Exemplo

Considere 250 alunos que cursam faculdade. Destes alunos, 100 são homens (H) e 150 são mulheres (M); 110 cursam física (F) e 140 cursam (Q). A distribuição dos alunos é a seguinte:
Cursam física: 40 homens e 70 mulheres;
Cursam química: 60 homens e 80 mulheres;
Um aluno é sorteado ao acaso, qual a probabilidade de que esteja cursando química, dado que é mulher?
Solução:
Note que: A probabilidade $P(M \cap Q) = \dfrac{80}{250}$ e $P(M)$

Exemplo

Considere 250 alunos que cursam faculdade. Destes alunos, 100 são homens (H) e 150 são mulheres (M); 110 cursam física (F) e 140 cursam (Q). A distribuição dos alunos é a seguinte:
Cursam física: 40 homens e 70 mulheres;
Cursam química: 60 homens e 80 mulheres;
Um aluno é sorteado ao acaso, qual a probabilidade de que esteja cursando química, dado que é mulher?
Solução:
Note que: A probabilidade $P(M \cap Q) = \frac{80}{250}$ e $P(M) = \frac{150}{250}$.
Utilizando a fórmula de probabilidade condicional, segue que:

$$P(Q/M)$$

Exemplo

Considere 250 alunos que cursam faculdade. Destes alunos, 100 são homens (H) e 150 são mulheres (M); 110 cursam física (F) e 140 cursam (Q). A distribuição dos alunos é a seguinte:
Cursam física: 40 homens e 70 mulheres;
Cursam química: 60 homens e 80 mulheres;
Um aluno é sorteado ao acaso, qual a probabilidade de que esteja cursando química, dado que é mulher?
Solução:
Note que: A probabilidade $P(M \cap Q) = \dfrac{80}{250}$ e $P(M) = \dfrac{150}{250}$.
Utilizando a fórmula de probabilidade condicional, segue que:

$$P(Q/M) = \frac{\frac{80}{250}}{\frac{150}{250}} = \frac{80}{150}$$

Teorema do Produto

Teorema (do Produto):
Sejam $A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$. Então, $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B)$ ou $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$.

Eventos Independentes

Definição:
Sejam $A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$. A e B serão independentes se: $P(A/B) = P(A)$ e $P(B/A) = P(B)$.

Eventos Independentes

Definição:
Sejam $A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$. A e B serão independentes se: $P(A/B) = P(A)$ e $P(B/A) = P(B)$.
Em outras palavras, A e B são independentes se:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Exemplo

Lançam-se 3 moedas. Verifique se são independentes os eventos:

A) saída de cara na primeira moeda;

B) saída de coroa da segunda e terceira moedas.

Exemplo

Solução:

Temos que:

$\Omega =$

Exemplo

Solução:

Temos que:

$\Omega =$
$\{(c,c,c),(c,c,k),(c,k,c),(c,k,k),(k,c,c),(k,c,k),(k,k,c),(k,k,k)\}$

$A =$

Exemplo

Solução:

Temos que:

$\Omega =$
$\{(c,c,c),(c,c,k),(c,k,c),(c,k,k),(k,c,c),(k,c,k),(k,k,c),(k,k,k)\}$

$A = \{(c,c,c),(c,c,k),(c,k,c),(c,k,k)\} \therefore P(A) = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$

$B =$

Exemplo

Solução:
Temos que:
$\Omega =$
$\{(c,c,c),(c,c,k),(c,k,c),(c,k,k),(k,c,c),(k,c,k),(k,k,c),(k,k,k)\}$
$A = \{(c,c,c),(c,c,k),(c,k,c),(c,k,k)\} \therefore P(A) = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$
$B = \{(c,k,k),(k,k,k)\} \therefore P(B) = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4}$
Logo,

$$P(A) \cdot P(B) =$$

Exemplo

Solução:
Temos que:
$\Omega =$
$\{(c,c,c),(c,c,k),(c,k,c),(c,k,k),(k,c,c),(k,c,k),(k,k,c),(k,k,k)\}$
$A = \{(c,c,c),(c,c,k),(c,k,c),(c,k,k)\} \therefore P(A) = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$
$B = \{(c,k,k),(k,k,k)\} \therefore P(B) = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4}$
Logo,

$$P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

Como:
$A \cap B =$

Exemplo

Solução:

Temos que:

$\Omega =$
$\{(c,c,c),(c,c,k),(c,k,c),(c,k,k),(k,c,c),(k,c,k),(k,k,c),(k,k,k)\}$

$A = \{(c,c,c),(c,c,k),(c,k,c),(c,k,k)\} \therefore P(A) = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$

$B = \{(c,k,k),(k,k,k)\} \therefore P(B) = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4}$

Logo,

$$P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

Como:

$A \cap B = \{(c,k,k)\}$ e $P(A \cap B) =$

Exemplo

Solução:

Temos que:

$\Omega = \{(c,c,c),(c,c,k),(c,k,c),(c,k,k),(k,c,c),(k,c,k),(k,k,c),(k,k,k)\}$

$A = \{(c,c,c),(c,c,k),(c,k,c),(c,k,k)\} \therefore P(A) = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$

$B = \{(c,k,k),(k,k,k)\} \therefore P(B) = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4}$

Logo,

$$P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

Como:

$A \cap B = \{(c,k,k)\}$ e $P(A \cap B) = \dfrac{1}{8}$ segue que A e B são eventos independentes, pois $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Eventos Independentes

Para verificar se três eventos são independentes, deve-se verificar as 4 proposições a seguir:

Eventos Independentes

Para verificar se três eventos são independentes, deve-se verificar as 4 proposições a seguir:

1. $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$

Eventos Independentes

Para verificar se três eventos são independentes, deve-se verificar as 4 proposições a seguir:

1. $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$
2. $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Eventos Independentes

Para verificar se três eventos são independentes, deve-se verificar as 4 proposições a seguir:

1. $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$
2. $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
3. $P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$

Eventos Independentes

Para verificar se três eventos são independentes, deve-se verificar as 4 proposições a seguir:

1. $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$
2. $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
3. $P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$
4. $P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$

Eventos Independentes

Para verificar se três eventos são independentes, deve-se verificar as 4 proposições a seguir:

1. $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$
2. $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
3. $P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$
4. $P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$

Todas as propriedades devem ser satisfeitas.

Eventos Independentes

Para verificar se três eventos são independentes, deve-se verificar as 4 proposições a seguir:

1. $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$
2. $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
3. $P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$
4. $P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$

Todas as propriedades devem ser satisfeitas.
Se A e B são *mutualmente exclusivos*, então A e B são *dependentes*, pois se A ocorre, B não ocorre, ou seja, a ocorrência de um evento condiciona a não ocorrência do outro.

Eventos Independentes

Para verificar se três eventos são independentes, deve-se verificar as 4 proposições a seguir:

1. $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$
2. $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
3. $P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$
4. $P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$

Todas as propriedades devem ser satisfeitas.

Se A e B são *mutualmente exclusivos*, então A e B são *dependentes*, pois se A ocorre, B não ocorre, ou seja, a ocorrência de um evento condiciona a não ocorrência do outro.

Se os eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são independentes, então:

$$P\left(\cap_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i)$$

Teorema da Probabilidade Total

Teorema da Probabilidade Total:
Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eventos que formam uma partição do espaço amostral. Seja B um evento desse espaço, então:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B/A_i)$$

Teorema de Bayes

Teorema de Bayes:
Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eventos que formam uma partição do Ω. Seja $B \subset \Omega$. Sejam conhecidas $P(A_i)$ e $P(B/A_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Então:

$$P(A_j/B) = \frac{P(A_j) \cdot P(B/A_j)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B/A_i)}$$

Exemplo

Exemplo 01: A urna A contém 3 fichas vermelhas e 2 azuis, e a urna B contém 2 vermelhas e 8 azuis. Joga-se uma moeda honesta. Se a moeda der cara, extrai-se uma ficha da urna A; se der coroa, extrai-se uma ficha da urna B. Uma ficha vermelha é extraída. Qual a probabilidade de ter saído cara no lançamento?

Exemplo

Solução:
Buscamos determinar $P(C/V)$.
Assim:
$P(C) = \frac{1}{2}$ e $P(K) = \frac{1}{2}$.

Exemplo

Solução:
Buscamos determinar $P(C/V)$.
Assim:
$P(C) = \frac{1}{2}$ e $P(K) = \frac{1}{2}$.
E assim,
$P(V/C) = \frac{3}{5}$ e $P(V/K) = \frac{2}{10}$

Exemplo

Solução:
Buscamos determinar $P(C/V)$.
Assim:
$P(C) = \frac{1}{2}$ e $P(K) = \frac{1}{2}$.
E assim,
$P(V/C) = \frac{3}{5}$ e $P(V/K) = \frac{2}{10}$
Como:

$$P(V) = P(C \cap V) + P(K \cap V)$$

Exemplo

Segue que:

$$P(V) = P(C) \cdot P(V/C) + P(K) \cdot P(V/K)$$

$$\therefore$$

$$P(V) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{10} = \frac{4}{10}$$

Exemplo

Segue que:

$$P(V) = P(C) \cdot P(V/C) + P(K) \cdot P(V/K)$$

$$\therefore$$

$$P(V) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{10} = \frac{4}{10}$$

Vamos determinar agora $P(C/V)$:

Exemplo

Segue que:

$$P(V) = P(C) \cdot P(V/C) + P(K) \cdot P(V/K)$$
$$\therefore$$
$$P(V) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{10} = \frac{4}{10}$$

Vamos determinar agora $P(C/V)$:

$$P(C/V) = \frac{P(V \cap C)}{P(V)} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{4}{10}} = \frac{3}{4}$$

$\blacksquare$