Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Câmpus Cornélio Procópio
Departamento Acadêmico de Matemática

Notas de Aula

Dados de Identificação	
Professor:	Matheus Pimenta
Disciplina:	Matemática Discreta - EC34G

1 Métodos de Prova

1.1 Noções de Lógica

A ordem dos quantificadores lógicos (existencial e universal) alteram o valor-verdade da proposição.

Exemplo:

a): $(\forall n)(\exists m)(n < m)$ é verdade;

b): $(\exists m)(\forall n)(n < m)$ é falsa.

De fato:

a): Para $(\forall n)(\exists m)(n < m)$, dado *qualquer* valor de n, é possível encontrar (*existe*) ao menos *um* m que satisfaça a proposição. Por exemplo, tome $m = n + 1$. Assim, para qualquer número natural n, vale a proposição $n < n+1$ que é trivialmente verdadeira (axiomas de Peano).

b): Já a proposição $(\exists m)(\forall n)(n < m)$ afirma que existe um número natural que é maior que *qualquer* outro número natural, isto é, o conjunto dos números naturais seria limitado, o que não ocorre. Portanto, a proposição é falsa.

Existe $\times$ Existe um único

Geralmente é necessário quantificar existencialmente de forma única, isto é, de tal forma que só exista um *único* elemento. Não é uma quantificação existencial usual, na qual pode existir qualquer elemento (mais de um). Simbolicamente é simbolizado por $(\exists!)$. Note o exemplo:

- $(\exists! n \in \mathbb{N})(n < 1)$ é verdade;
- $(\exists! n \in \mathbb{N})(n! < 10)$ é falsa;
- $(\exists! n \in \mathbb{N})(n + 1 < n)$ é falsa;
- $(\exists! n \in \mathbb{N})(2n \text{ é par})$ é falsa;

O quantificador existencial de forma única é uma abreviação da seguinte equivalência:

$$(\exists! x)p(x) \Leftrightarrow (\exists x)p(x) \land (\forall x)(\forall y)((p(x) \land p(y) \to x = y))$$

1.1.1 Negação de Proposições Quantificadas

A negação de proposições quantificadas é intuitiva. Suponha a seguinte proposição quantificada:

$$(\forall x \in A)p(x)$$

cujo o valor-verdade (já visto) é como segue:

$$(\forall x \in A)p(x) \text{ é verdade, se } p(x) \text{ for verdadeira para todos os elementos de A}$$

A negação deve significar que *não* é verdadeira para todos os elementos de A, ou seja, existe ao menos um elemento de A que não valida $p(x)$, portanto:

$$(\exists x \in A)\neg p(x)$$

Assim:

$$\neg((\forall x \in A)p(x)) \Leftrightarrow (\exists x \in A)\neg p(x)$$

Analogamente, para o caso existencial:

$$\neg((\exists x \in A)p(x)) \Leftrightarrow (\forall x \in A)\neg p(x)$$

Isto é, negar que existe um elemento, é mostrar que vale para todos os elementos de A a negação da proposição.

Exemplo:

- $\neg((\forall n \in \mathbb{N})(n < 1)) \Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{N})(n \geq 1) \Leftrightarrow V$
  $\neg((\exists n \in \mathbb{N})(n < 1)) \Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N})(n \geq 1) \Leftrightarrow F$
- $\neg((\forall n \in \mathbb{N})(n! < 10)) \Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{N})(n! \geq 10) \Leftrightarrow V$
  $\neg((\exists n \in \mathbb{N})(n! < 10)) \Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N})(n! \geq 10) \Leftrightarrow F$
- $\neg((\forall n \in \mathbb{N})(n+1 > n)) \Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{N})(n+1 \leq n) \Leftrightarrow F$
  $\neg((\exists n \in \mathbb{N})(n+1 > n)) \Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N})(n+1 \leq n) \Leftrightarrow F$
- $\neg((\forall n \in \mathbb{N})(2n \text{ é par })) \Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{N})(2n \text{ não é par }) \Leftrightarrow F$
  $\neg((\exists n \in \mathbb{N})(2n \text{ é par })) \Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N})(2n \text{ não é par }) \Leftrightarrow F$

Exercício: Negue as proposições:

a): $(\forall n)(\exists m)(n < m)$ é verdadeira
$(\exists n)(\forall m)(n \geq m)$ é falsa.

b): $(\exists m)(\forall n)(n < m)$ é falsa
$(\forall m)(\exists n)(n \geq m)$ é verdadeira.

1.2 Técnicas de Demonstração Matemática

Definição 1.1 (teorema) *Um teorema é uma proposição do tipo:*

$$p \rightarrow q$$

a qual prova-se ser verdadeira sempre (tautologia), ou seja, que p implique a q.

As *proposições* p e q são denominadas *hipótese* e *tese*, respectivamente.

Um *corolário* é um teorema que é uma consequência imediata de um teorema já demonstrado (ou seja, a prova é trivial). Já um *lema* é um teorema auxiliar, utilizado para a demonstração de outro teorema.

São de grande importância na Informática e Computação, pois através deles é possível validar uma implementação. Podem ser vistos como um algoritmo que, prova-se, sempre funciona.

Ao demonstrar um teorema é necessário identificar corretamente a *hipótese* e a *tese*.

Exemplo: 0 *é o único elemento neutro da adição em* $\mathbb{N}$.

Na demonstração, a hipótese é sempre suposta como verdadeira, consequentemente, a hipótese não precisa ser demonstrada. Todas as teorias possuem premissas (hipóteses) que são supostas como verdadeiras, e todo o raciocínio é construído.

Para um determinado teorema $p \to q$, existem diversas técnicas para demonstrar que de fato $p \to q$. Destacamos as seguintes:

1. Prova Direta;
2. Prova por Contraposição;
3. Prova por Redução ao Absurdo (ou apenas Prova por Absurdo);
4. Prova por Indução.

Observação:

A prova por Indução é uma aplicação do *Princípio da Indução Finita*.

Uma atenção especial aos quantificadores. Por exemplo, para provar que:

$$(\forall x \in A)p(x)$$

é necessário provar $p(x)$ para todo $x \in A$. Mostrar para um determinado $x \in A$ não é uma prova, é apenas um exemplo, já que não constitui uma prova válida *para todos* os elementos de A.

Já no caso

$$(\exists x \in A)p(x)$$

basta mostrar que para pelo menos um $a \in A$ que $p(x)$ é verdadeira. Ao contrário do caso acima, um exemplo **é** a prova.

1.2.1 Prova Direta

Uma *prova direta* é quando pressupõe como verdadeira a hipótese e, a partir desta, prova ser *verdadeira* a tese.

Exemplo: Considere o teorema abaixo:

a soma de dois números pares é um número par

reescrevendo na forma de $p \to q$:

se n e m são dois números pares quaisquer,
então $n + m$ é um número par.

Demonstração 1 *Inicialmente, lembre-se de qualquer número par n pode ser definido como $n := 2r$, para $r \in \mathbb{N}$.*

Suponha que n e m são dois números pares. Então existem $r, s \in \mathbb{N}$ tais que:

$$n = 2r$$

e

$$m = 2s$$

.

Então,

$$n + m = 2r + 2s = 2(r + s)$$

Como a soma de dois números naturais $r + s$ é um número natural, vale $n + m = 2(r + s)$. Logo $n + m$ é um número par.

1.2.2 Prova por Contraposição

Uma prova é dita *prova por contraposição* ou *demonstração por contraposição* quando, para provar $p \to q$, prova-se $\neq q \to \neg p$, já que são formas equivalentes. Para mostrar que $\neq q \to \neg p$ basta, a partir de $\neg q$, obter $\neg p$ (através da prova direta).

Exemplo: Suponha $n \in \mathbb{N}$ e mostre que:

$$n! > (n + 1) \to n > 2$$

Demonstração 2 (Por Contraposição) *Equivalentemente, pode-se demonstrar:*

$$n \leq 2 \to n! \leq n + 1$$

Que é bem mais simples de mostrar, pois bastar mostrar para os casos $n \leq 2$.

Fazer os casos $n = 0, n = 1, n = 2$.

1.2.3 Prova por Redução ao Absurdo

A prova por absurdo baseia-se no seguinte resultado:

$$p \to q \Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \to F$$

Definição 1.2 (Prova por Redução ao Absurdo) *Uma prova é dita prova por redução ao absurdo quando a prova de $p \to q$ consiste em supor a hipótese p, supor a negação da tese $\neg q$ e concluir uma contradição (em geral, $q \wedge \neg q$).*

Uma técnica de demonstração de apresentar o *contra-exemplo* também é uma forma de demonstração por absurdo.

Exemplo: Considere o seguinte teorema:

0 é o único elemento neutro da adição em $\mathbb{N}$

Demonstração 3 *Reescrevendo na forma $p \to q$:*

se 0 é elemento neutro da adição em $\mathbb{N}$,
então 0 é o único elemento neutro da adição em $\mathbb{N}$

A prova por absurdo é a seguinte:

a) Supor a hipótese, isto é, supor que 0 é o elemento neutro da adição em $\mathbb{N}$ e negar a tese, ou seja, 0 não é o único elemento neutro da adição em $\mathbb{N}$.
Suponha então que existe um elemento e, onde $e \neq 0$, já que 0 não é o único, então e é diferente de zero;

b) Então:

– *como 0 é elemento neutro,* $\forall n \in \mathbb{N}$, *vale* $n = 0 + n = n + 0$. *Em particular, para* $n = e$, *vale* $e = 0 + e = e + 0$

– *como e é elemento neutro,* $\forall n \in \mathbb{N}$, *vale* $n = e + n = n + e$. *Em particular, para* $n = 0$, *vale* $0 = 0 + e = e + 0$

– *portanto, como* $e = 0+e = e+0$ *e* $0 = 0+e = e+0$, *pela transitividade da igualdade, vale que* $e = 0$, *o que é uma contradição, pois foi suposto que* $e \neq 0$.

Logo, é absurdo supor que o elemento neutro da adição em $\mathbb{N}$ *não é único. Portanto, 0 é o único elemento neutro da adição em* $\mathbb{N}$.

1.2.4 Prova por Indução

Seja P uma propriedade tal que:

- 0 satisfaz P;
- Para todo $n \in \mathbb{N}$, se n satisfaz P, então $n + 1$ satisfaz P;
- Então, todo $n \in \mathbb{N}$ satisfaz P.

Exemplo 01: Mostre que:

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + \cdots + 2n - 1 = n^2$$

Exemplo 02: Verifique que:

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$$

Exemplo 03: Mostre que:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$

Exemplo 04: Verifique que:

$$1+2+3+4+\cdots+n=\frac{(n-1)(n+2)}{2}$$

1. Mostre que se $P(k)$ é verdadeira então $P(k+1)$ também é verdadeira.
2. Podemos concluir que $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}^*$

2 Conjuntos e Análise Combinatória

2.1 O Paradoxo de Russell

Considere uma cidade em que barbeiros raspam a barba apenas aqueles homens que não se barbeiam. Suponha que haja um barbeiro nessa coleção que não se barbeia; então pela definição da coleção, ele deve se barbear. Mas nenhum barbeiro na coleção pode se barbear. (Se sim, ele seria um homem que faz a barba de homens que se barbeiam.)

Ou de outra maneira, quem fará a barba ao barbeiro que tem na janela da loja uma placa a dizer: "Faço a barba a todos os homens da cidade que não se barbeiam sozinhos, e só a esses."

É um exemplo do paradoxo de Russell, que apresentou uma contradição na teoria de conjuntos formulada por Gottlob Frege, que é baseada na formulação lógica simbólica.

No desenvolvimento proposto por Frege, pode-se utilizar livremente qualquer propriedade para definir novas propriedades.

Inicialmente, definimos o conjunto membro de si próprios. Por exemplo: o conjunto de todos os conjuntos; o conjunto de todas as coisas, menos amarelo.

E depois, os conjuntos não membros de si próprio. Por exemplo: o conjunto de todas as frutas; o conjunto que contêm apenas amarelo.

E agora, defina o conjunto R como: conjunto de todos os conjuntos que não são membros de si próprios.

A questão que surge é:

1. É membro de si próprio.
   Se R é membro de si próprio, então ele deixa de ser o conjunto de todos os conjuntos que não são membros de si próprios, porque ele seria membro de si próprio. Logo, ele não é membro de sí próprio.

2. Não é membro de si próprio.
   Se R não é membro de si próprio e é o conjunto que contêm todos os conjuntos que não são membros de si próprio, então R contêm a si próprio.

A conclusão é que R é membro de si próprio e não é membro de si próprio. Logo, uma contradição.

Solução de Russell, foi a Teoria dos Tipos, isto é, um conjunto não pode se relacionar com outro conjunto de tipo inferior, essa hierarquia é infinita.

Os conjuntos estão numa hierarquia de tipos de tal modo que não é permissível dizer que um conjunto é membro de si mesmo, nem que o não é, o que elimina conjuntos contraditórios.

Exemplos:

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$
- $\{\mathbb{N}\}$
- $\varnothing$; $\{\varnothing\}$

2.2 Axiomas

Foram formuladas por *Zermelo-Fraenkel* e utilizam constantes para os indivíduos, duas relações binárias (=,$\in$), os conectivos $\vee, \wedge, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow$ e os quantificadores $\forall$ (para todo) e $\exists$ (existe). As variáveis são denotadas:$a, b, \dots, x, y, z$ (com ou sem índices). Como é usual, as fórmulas $\neg(x = y)$ e $\neg(x \in y)$ serão denotadas por $(x \neq y)$ e $(x \notin y)$, respectivamente.

1. **Axioma de Extensão:** $(\forall z)(z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow (x = y)$
   Dois conjuntos são iguais se, e somente se, tem os mesmos elementos. A implicação é recíproca, isto é $(x = y) \rightarrow (\forall z)(z \in x \leftrightarrow z \in y)$

2. **Axioma do Vazio:** $(\exists y)(\forall x)(x \in y)$
   Existe um conjunto, denotado por $\varnothing$, que não tem elementos.
   OBS: Pelo axioma de extensão o vazio é único.

3. **Axioma de União:** $(\exists y)(\forall x)(x \in y \leftrightarrow (x \in a \vee x \in b))$
   Se x é um conjunto, então existe um conjunto indicado por $\cup_x$ tal que $z \in \cup_x$ se, e somente se, existe x e y tal que $z \in y$.

4. **Axioma das Partes:** $(\exists y)(\forall x)(x \in y \leftrightarrow (\forall z)(z \in x \rightarrow z \in a))$
   Se x é um conjunto, existe um conjunto chamado *das partes de* x, é denotado:

   $$P(x)$$

   cujos elementos são precisamente os subconjuntos de x.
   Exemplo: Seja $x = \{0, 1, 2\}$, então:
   $P(x) = \{\{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}, \varnothing\}$
   $P(\varnothing) = \{\varnothing\}$
   $P(P(\varnothing)) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$

5. **Axioma da Substituição:** Seja $P(,)$, uma propriedade tal que para todo x existe um único y para o qual $P(x, y)$ é verdade.
   Exemplo: Tomando $x, y \in \mathbb{R}$, dizemos $P(x, y)$ é verdade se, e somente se, $y = 2x$.
   Para todo conjunto A, existe um conjunto B tal que para todo $x \in A$ existe $y \in B$ para o qual $P(x, y)$ é verdade.

6. **Axioma da Separação (especificação):** Se x é um conjunto e P é qualquer propriedade que possa ser aplicada a elementos z de x, então existe subconjunto y de z que contem os elementos x de z que possuem esta propriedade. Podemos, com o axioma de separação, definir intersecção de conjuntos.
   Sejam x e y conjuntos. $P(z) : z$ pertence a y?

   $$x \cap y = \{z \in x; z \in y\} = \{z \in y; z \in x\}$$

7. **Axioma do Par:** $(\exists y)(\forall x)(x \in y \leftrightarrow ((x = a) \vee (x = b)))$
   Se x e y são conjuntos no qual x e y são os únicos elementos denotados $\{x, y\}$.
   Como consequência, podemos definir a união de dois conjuntos.
   $\cup_{x,y} = x \cup y$
   $\{z; z \in x \vee z \in y\}$

8. **Axioma da Infinidade:** Existe um conjunto ω tal que:

   (a) $\varnothing \in \omega$, $\{\varnothing \in \omega\}$

   (b) Se $x \in \omega$, então $x^+ \in \omega$

   (c) Se $z \in \omega$, então ou $z = 0$ ou $z = x^+$

   (d) $A \subset \omega$, $A \neq$ então existe $y \in A$; $y \cap A = \varnothing$

   Exemplo: Seja $x = \{0, 1\}$ então $x^+ = x \cup \{x\}$, logo, $x^+ = \{0, 1, \{0, 1\}\}$
   Dizemos que A é subconjunto de B quando todo elemento de A é elemento de B denotamos $A \subset B$

9. **Axioma da Regularidade:** Se x é um conjunto não vazio, então existe $y \in x$ tal que:

$$y \cap x = \varnothing$$

A noção de conjuntos é de que são coleções, isto é, uma coleção x. Os objetos: a, que também podem ser um conjunto. Dizemos que $a \in x$ quando a é um elemento que pertence ao conjunto x.

Em geral, fixamos um *conjunto universo* U. Naturalmente U deve ficar claro no contexto.

Exemplo: Considere o conjunto x dos números reais que são solução da equação $x^2 - x - 2 = 0$.

$$\begin{aligned} x^2 - x - 2 &= 0 \\ (x+1)(x-2) &= 0 \end{aligned}$$

$x = -1$ ou $x = 2$ isto é $x \in \{-1, 2\}$ ou seja $x = \{-1, 2\}$.

Fixando o conjunto universo U, dado um conjunto $A \subset U$ e um elemento $x \in U$ vale uma, e somente uma, das opções:

$$x \in A \text{ ou } x \notin A$$

O fato de que para $x \in U$ não existe outra opção além de $x \in A$ e $x \notin A$ é conhecido como: **PRINCÍPIO DO TERCEIRO EXCLUÍDO**.

O fato de que as alternativas $x \in A$ e $x \notin A$ não podem ser verdadeiras simultaneamente chama-se: **PRINCÍPIO DE NÃO CONTRADIÇÃO**.

FIGURA 1 - REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DO PRINCÍPIO DE NÃO CONTRADIÇÃO

Dado um conjunto A, isto é, um subconjunto de U podemos definir o complementar do conjunto A, como:

$$A^C = \{x \in U; x \notin A\}$$

FIGURA 2 - REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DO COMPLEMENTAR

OBS: A^C pode ser denotado como $U - A$ (U menos A).

2.3 Regras Operatórias

1. Para todo $A \subset U$, temos $(A^C)^C = A$
   De fato,

$$\begin{aligned}
(A^C)^C &= \{x \in U; x \notin A^C\} \\
&= \{x \in U; x \in A\} \\
&= A
\end{aligned}$$

   Exemplo: $U = \mathbb{R}$ e $A = \{-1, 2\}$

$$\begin{aligned}
(A^C)^C &= \{x \in \mathbb{R}; x \notin \{-1, 2\}^C\} \\
&= \{x \in \mathbb{R}; x \in \{-1, 2\}\} \\
&= \{-1, 2\}
\end{aligned}$$

   Logo, todo conjunto é complementar de seu complementar.

2. Se $A \subset B$ então $B^C \subset A^C$

3. Fixado o conjunto universo U. Dados A e B dois subconjuntos de U, temos:

$$A \cup B = \{x \in U; x \in A \vee x \in B\}$$

$$A \cap B = \{x \in U; x \in A \wedge x \in B\}$$

$$A - B = \{x; x \in A \wedge x \notin B\}$$

   Exemplo: Sejam $U = \mathbb{R}$ e

$$A = \{x \in \mathbb{R}; x^2 - x - 2 = 0\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R}; x^2 - 5x + 6 = 0\}$$

Logo $A = \{-1, 2\}$ e $B = \{2, 3\}$
   Determine: $A \cup B$ e $A \cap B$:

$$A \cup B = \{x \in \mathbb{R}; x^2 - x - 2 = 0 \vee x^2 - 5x + 6 = 0\}$$

$$A \cup B = \{-1, 2, 3\}$$

e

$$A \cap B = \{x \in \mathbb{R}; x^2 - x - 2 = 0 \wedge x^2 - 5x + 6 = 0\}$$

$$A \cap B = \{2\}$$

   São válidas algumas propriedades:

1. $A \cup B = B \cup A$
2. $A \cap B = B \cap A$
3. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
4. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
5. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
6. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
7. $A \cup \varnothing = A$
8. $A \cap U = A$
9. $A \cup A^C = U$
10. $A \cap A^C = \varnothing$

Exercício: Mostre que:

1. $A \cup A = A$
2. $A \cap A = A$
3. $A \cup U = U$
4. $A \cap \varnothing = \varnothing$

2.4 Relação de Ordem

Definição 2.1 *Para todo $a, b \in \mathbb{N}$ dizemos que a é menor ou igual a b quando existe um $c \in \mathbb{N}$ tal que $a + c = b$.*

Notação: $a \leq b$

Propriedades da Ordem

1. **Transitividade:** Se $m < n$ e $n < r$ então $m < r$.
   De fato, como $m < n$ e $n < r$ existem $p, q \in \mathbb{N}^*$ tais que
   $\begin{cases} \text{m + p = n} \\ \text{n + q = r} \end{cases}$
   logo, tomando $s = p + q$, temos:
   $$m + s = m + p + q = n + q = r$$
   e portanto $m < r$.
2. **Tricotomia** Dados $m, n \in \mathbb{N}$, uma e somente uma das alternativas é verdadeira:
   $$\begin{cases} m < n \\ m = n \\ n < m \end{cases}$$
3. **Monotonicidade:** Se $m < n$ e $p \in \mathbb{N}$

(a) $m + p < n + p$

(b) $p.m < p.n$ se $p \neq 0$

Prova de **(a):** De fato, se $m < n$ então existe $q \in \mathbb{N}^*$ tal que:

$$m + q = n$$

Como $m + p + q = n + p$ e $q \in \mathbb{N}^*$ temos $m + p < n + p$

Prova de **(b):** Se $p \in \mathbb{N}^*$, então $p.q \in \mathbb{N}^*$.

Assim, $p.m + p.q = p(m + q) = p.q$, portanto $pm < pn$.

4. **Boa Ordenação:** Todo subconjunto não vazio $X \subset \mathbb{N}$ possui um menor elemento.

2.5 Cardinalidade

Informalmente, o cardinal de um conjunto (finito) A (que representaremos por $\#(A)$, ou $\#A$) é o número de elementos de A. Daí decorre que se $A \subseteq B$ então $\#A \leq \#B$, e se $A \subset B$, então A tem menos elementos do que B, pelo que $\#A < \#B$.

Para conjuntos finitos essa relação é natural, porém ao adentrar em conjuntos infinitos, tais relações necessitam de maiores definições.

Para realizar a contagem pode-se operar da seguinte maneira: retira-se um elemento de um conjunto finito e associa o número natural 1, retira-se outro elemento do conjunto e associa-se o número natural 2, e assim sucessivamente até esgotar os elementos do conjunto. O último número natural a ser associado resultará na cardinalidade do conjunto finito.

Matematicamente, diremos que um conjunto será finito quando existir uma bijeção entre esse conjunto e o conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

Definição 2.2 (Conjunto Finito/Infinito e de Cardinal) *1. Dado um natural n, diremos que um conjunto A tem n elementos, ou que A tem cardinal n, se e somente se, podemos estabelecer uma bijecção entre A e o conjunto dos números $\{1, ..., n\}$. Escreve-se $\#A = n$ para designar que A tem n elementos.*

2. Diremos que o conjunto A é finito, se existe algum número n tal que $\#A = n$.

3. No caso do conjunto não ser finito, diremos que é infinito.

Definição 2.3 (Conjuntos Equipotentes) *Diremos que um conjunto A tem o mesmo número de elementos que um conjunto B, ou que A tem o mesmo cardinal que B, se e somente se, existe uma bijecção entre A e B.*

Notação: $A \sim B$

Exemplo: Mostrar que os números $\mathbb{N}$ e os números naturais pares P tem a mesma cardinalidade.

Definição 2.4 *Um conjunto será chamado de infinito se ele for equivalente a um subconjunto próprio.*

Definição 2.5 (Conjunto Enumerável) *Qualquer conjunto equivalente ao conjunto dos números naturais é chamado enumerável.*

Definição 2.6 (Conjunto Contável e Incomensurável) *Todo conjunto que é finito ou enumerável é chamado de contável.*

Já um conjunto infinito e não-enumerável é chamado incomensurável.

2.5.1 Princípio da Adição

Definição 2.7 *Se A e B são conjuntos disjuntos, então:*

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B$$

Exemplo: Um estudante tem que escolher um projeto em uma de 3 listas. As 3 listas contêm $23, 15$ e 19 possíveis projetos, respectivamente. Quantas possibilidades de projetos há para escolher.

2.5.2 Princípio da Multiplicação

Definição 2.8 *Se A e B são conjuntos finitos, então:*

$$\#(A \times B) = \#A \times \#B$$

Exemplo: A última parte de um número de telefone tem 4 dígitos. Quantos números de 4 dígitos existem?

2.5.3 Princípio da Inclusão e Exclusão

Definição 2.9 *Se A e B são conjuntos finitos, então:*

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$$

Exemplo: Suponha que haja 1807 calouros no Campus de Curitiba da UTFPR. Destes, 453 estão cursando Computação, 567 estão cursando Eng. Mecânica e 299 estão em ambos os cursos. Quantos não estão cursando nem Computação nem Engenharia Mecânica?

Ampliando a definição, segue que:

$$\#(A \cup B \cup C) = \#A + \#B + \#C - \#(A \cap B) - \#(A \cap C) - \#(B \cap C) + \#(A \cap B \cap C)$$

2.6 Análise Combinatória