Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Câmpus Cornélio Procópio
Departamento Acadêmico de Matemática

Lista 03

Dados de Identificação	
Professor:	Matheus Pimenta
Disciplina:	Matemática Discreta - EC34G
Aluno:	

1. Explique a diferença principal entre um par ordenado (a, b) e um conjunto $\{a, b\}$ com dois elementos.

2. Determine x e y onde $(3x, x - 2y) = (6, -8)$.

3. Determine o número de relações de $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{1, 2\}$.
R: 64

4. Seja R uma relação definida no conjunto $X = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ dos números inteiros não negativos definidos pela equação $x^2 + y^2 = 25$. Determine R.
R: $R = \{(0, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 0)\}$

5. Suponha que A é um conjunto qualquer finito. Determine o número m de relações em A onde:

   (a) A possui três elementos;
   R: 512

   (b) A possui n elementos;
   R: $m = 2^{n^2}$

6. Seja R e S relações sobre $A = \{1, 2, 3\}$ dadas por: $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 3)\}$ e $S = \{(1, 2), (1, 3), (2, 1), (3, 3)\}$. Determine: $R \cap S$ e $R \cup S$.

7. Determine o grafo da relação R no conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$ onde
$R = \{(1, 2), (2, 2), (2, 4), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 3)\}$

8. Seja S uma relação sobre $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ definido por:
$S = \{(a, b), (b, b), (b, c), (c, f), (d, b), (e, a), (e, b), (e, f)\}$
Determine o seu grafo.

9. Considere as seguintes relações sobre o conjunto $A = \{1, 2, 3\}$

   - $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 3)\}$
   - $S = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3)\}$
   - $T = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3)\}$
   - $\emptyset$ (relação vazia)
   - $A \times A$ (relação universal)

   Quais relações são:

(a) Reflexivas.
R: S , $A \times A$

(b) Simétricas.
R: S, $\emptyset$ e $A \times A$

(c) Transitivas.
R: A única que não é transitiva é T.

(d) Antissimétricas.
R: S e $A \times A$ não são antissimétricas.

10. Considere o conjunto $A = \{1, 2, 3\}$ dê exemplos de relações R que são:

    (a) R é simétrica e antissimétrica.
    R: $R = \{(1, 1), (2, 2)\}$

    (b) R não é nem simétrica e nem antissimétrica
    R: $R = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3)\}$

    (c) R é transitiva, porém $R \cup R^{-1}$ não é transitiva
    R: $R = \{(1, 2)\}$

11. Sejam as relações R, S e T sobre o conjunto $A = \{1, 2, 3\}$ definidas por:
    $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\} = \Delta_A$
    $S = \{(1, 2), (2, 1), (3, 3)\}$
    $T = \{(1, 2), (2, 3), (1, 3)\}$ Quais relações são:

    (a) Reflexivas.
    R: Δ_A

    (b) Simétricas.
    R: R e S

    (c) Transitivas.
    R: R e T

    (d) Antissimétricas.
    R: R e T

12. Considere a relação $|$ divisão no conjunto $\mathbb{N}$. Determine se a $|$ é uma relação: reflexiva, simétrica, antissimétrica ou transitiva.
    Lembre-se: a divisão $x|y$ é quando existe z tal que $xz = y$.

13. Seja R uma relação sobre $A = \{1, 2, 3\}$ definida por
    $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3)\}$. Determine:

    (a) O fecho reflexivo de R.
    R: O fecho será o conjunto $\{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (2, 2), (3, 3)\}$

    (b) O fecho simétrico de R.
    R: O fecho será o conjunto $\{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (2, 1), (3, 2)\}$

14. Seja $R = \{(1, 1), (1, 3), (3, 1), (3, 3)\}$. R é uma relação de equivalência em $A = \{1, 2, 3\}$? E em $B = \{1, 3\}$?
    R: Não.

15. Seja A o conjunto de todos os números inteiros não nulos e seja $\simeq$ uma relação sobre $A \times A$ definida por:
$$(a, b) \simeq (c, d) \text{ sempre que } ad = bc$$
Prove que $\simeq$ é uma relação de equivalência.

16. Seja A o conjunto dos inteiros e seja $\sim$ uma relação sobre $A \times A$ definida por:
$$(a, b) \sim (c, d) \text{ se } a + d = b + c$$
. Prove que $\sim$ é uma relação de equivalência.

17. Defina igualdade de funções.

18. Seja $X = \{1, 2, 3, 4\}$. Determine se as relações abaixo (são pares ordenados) é uma função de X em X.
    (a) $f = \{(2, 3), (1, 4), (2, 1), (3, 2), (4, 4)\}$
    R: Não
    (b) $g = \{(3, 1), (4, 2), (1, 1)\}$
    R: Não
    (c) $h = \{(2, 1), (3, 4), (1, 4), (2, 1), (4, 4)\}$
    R: Sim

19. Seja $W = \{a, b, c, d\}$. Determine quais conjuntos de pares ordenados abaixo são funções de W em W.
    (a) $\{(b, a), (c, d), (d, a), (c, d), (a, d)\}$
    R: Sim
    (b) $\{(d, d), (c, a), (a, b), (d, b)\}$
    R: Não
    (c) $\{(a, b), (b, b), (c, b), (d, b)\}$
    R: Sim
    (d) $\{(a, a), (b, a), (a, b), (c, d), (d, a)\}$
    R: Não

20. Determine o domínio D das funções abaixo:
    (a) $f(x) = \frac{1}{x-2}$
    R: $D = \mathbb{R} \backslash \{2\}$
    (b) $g(x) = x^2 - 5x - 4$
    R: $D = \mathbb{R}$
    (c) $h(x) = \sqrt{25 - x^2}$
    R: $D = [-5, 5]$

21. Sendo $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4$, calcule:
    (a) $f(0)$ R=-4
    (b) $f(2)$ R=12
    (c) $f(\frac{1}{2})$ R=$-\frac{27}{8}$
    (d) $f(\sqrt{x})$

22. Determine a função inversa em cada um dos exercícios. Faça seus gráficos e restrinja o domínio, se necessário:

(a) $f(x) = x - 4$ R:$f^{-1}(x) = x + 4$

(b) $f(x) = x^2 + 1$ R:$f^{-1}(x) = \sqrt{x-1}$

(c) $f(x) = e^{4x}$ R:$f^{-1}(x) = \frac{1}{4}\ln(x)$

(d) $f(x) = \log(\frac{x}{3})$ R:$f^{-1}(x) = 3 \cdot 10^x$

(e) $f(x) = \arctan(8x)$ R:$f^{-1}(x) = \frac{\tan(x)}{8}$

23. Determine o domínio das seguintes funções de uma variável real:

(a) $f(x) = \sqrt{(x-4)(x+3)}$
R:$D(f) = \{x \in \mathbb{R}; x \leq -3 \vee x \geq 4\}$

(b) $f(x) = \frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{x^2-9}}$
R:$D(f) = \{x \in \mathbb{R}; x > 3\}$

(c) $f(x) = \sqrt{\frac{x}{x+1}}$
R:$D(f) = \{x \in \mathbb{R}; x < -1 \vee x \geq 0\}$

(d) $f(x) = \log(\frac{x^2-3x+2}{x+1})$
R:$D(f) = \{x \in \mathbb{R}; -1 < x < 1 \vee x > 2\}$

24. Se $f(x) = \frac{3x-1}{x-7}$ determine:

(a) $\frac{5(f(-1))-2(f(0))+3f(5)}{7}$

(b) $f(-\frac{1}{2})$

(c) $f(3x-2)$

(d) $f[f(5)]$

25. Dadas as funções$f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = 2x - 1$:

(a) Determine o domínio e o conjunto imagem de $f(x)$;

(b) Determine o domínio e o conjunto imagem de $g(x)$;

(c) Construa os gráficos de $f(x)$ e $g(x)$;

(d) Calcule: $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$, $g \circ f$ e $f \circ g$.

26. Determine $(g \circ f)^{-1}$ onde $f(x) = \frac{2+x}{3}$ e $g(x) = \frac{2x+3}{5}$:
R:$\frac{15x-13}{2}$

27. Sejam as funções reais $f(x) = x^2 + 4x - 5$ e $g(x) = 2x - 3$

(a) Obtenha $f \circ g$ e $g \circ f$;

(b) Calcule $(f \circ g)(2)$ e $(g \circ f)(2)$

(c) Determine os valores do domínio de $f \circ g$ que produzem como imagem 16.

28. Dada a função $f(x) = \frac{x}{3x-1}$. Determine:

(a) O domínio D.

(b) $f(x)$ é injetora? Prove sua resposta.

29. Dadas as funções abaixo. Mostre ou de um contra-exemplo para a injetividade e sobrejetividade delas.

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - |x|$

(b) $f : (0, 1] \to [1, +\infty)$, $f(x) = \frac{1}{x}$

30. Mostre que uma função afim qualquer $(a \neq 0)$ é injetiva.

31. Mostre que $f : \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R}\backslash\{2\}$ definida por $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ é injetora.

32. Mostre que uma função afim qualquer $(a \neq 0)$ é sobrejetora.

33. Mostre que $a + a = a$ e $a \cdot a = a$, $\forall a \in B$

34. Mostre que $a + 1 = 1$, $a \cdot 0 = 0$, $\forall a \in B$

35. Mostre que $a + (a \cdot b) = a$, $a \cdot (a + b) = a$

36. Mostre que $a + (a' \cdot b) = a + b$

37. Mostre que o complemento de cada elemento de uma álgebra de Boole é único.

38. Mostre que $(a')' = a$.

39. Mostre que $ab + ab' = a$

40. Mostre que $0' = 1$ e $1' = 0$

41. Mostre a Lei de Morgan. $(a \cdot b)' = a' + b'$ e $(a + b)' = a' \cdot b'$

42. Mostre que $ab + a'c + bc = ab + a'c$