# Transformações Lineares, Autovalor e Autovetor, Diagonalização de Operadores


Matheus Pimenta

Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Câmpus Cornélio Procópio


Junho de 2019

# Conceitos e Teoremas

**Theorem**

*Dados dois espaços vetoriais reais $V$ e $W$ e uma base de $V$, $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, sejam $w_1, w_2, \ldots, w_n$ elementos arbitrários de $W$. Então existe uma única aplicação linear $T : V \to W$ tal que $T(v_1) = w_1, \ldots, T(v_n) = w_n$. Essa aplicação é dada por:*
*Se $v = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n$,*

$$\begin{aligned} T(v) &= a_1T(v_1) + \cdots + a_nT(v_n) \\ &= a_1w_1 + \cdots + a_nw_n \end{aligned}$$

*Verifique que $T$ assim definida é linear e que é a única que satisfaz as condições exigidas.*

**Exemplo 01:** Qual é a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(1,0) = (2,-1,0)$ e $T(0,1) = (0,0,1)$?

# Núcleo e Imagem

**Definition (Imagem de uma Transformação Linear)**

Seja $T : V \to W$ uma aplicação linear. A *imagem* de $T$ é o conjunto dos vetores $w \in W$ tais que existe um vetor $v \in V$, que satisfaz $T(v) = w$. Ou seja,

$$Im(T) = \{w \in W; T(v) = w \text{ para algum } v \in V\}$$

Note que $Im(T)$ é um subconjunto de $W$ e, além disso, é um subespaço vetorial de $W$.

# Núcleo e Imagem

### Definition (Núcleo de uma Transformação Linear)

Seja $T : V \to W$ uma transformação linear. O conjunto de todos os vetores $v \in V$ tais que $T(v) = 0$ é chamado *núcleo* de $T$, sendo denotado por $ker(T)$. Isto é:

$$ket(T) = \{v \in V; T(v) = 0\}$$

Note que $Ker(T) \subset V$ é um subconjunto de $V$ e, além disso, é um subespaço vetorial de $V$.

**Exemplo 01:** $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ onde $T(x, y) = x + y$
**Exemplo 02:** Seja a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y, z) = (x, 2y, 0)$

# Isomorfismo

### Definition

Dada uma aplicação (ou função) $T : V \to W$, diremos que $T$ é *injetora* se dados $u \in V$, $v \in V$ com $T(u) = T(v)$ tivermos $u = v$.
Equivalentemente, $T$ é injetora se dados $u, v \in V$ com $u \neq v$, então $T(u) \neq T(v)$.
Em outras palavras, $T$ é injetora se as imagens de vetores distintos são distintas.

# Isomorfismo

### Definition

Dada uma aplicação (ou função) $T : V \to W$, diremos que $T$ é *injetora* se dados $u \in V$, $v \in V$ com $T(u) = T(v)$ tivermos $u = v$.
Equivalentemente, $T$ é injetora se dados $u, v \in V$ com $u \neq v$, então $T(u) \neq T(v)$.
Em outras palavras, $T$ é injetora se as imagens de vetores distintos são distintas.

### Definition

A aplicação $T : V \to W$ será *sobrejetora* se a imagem de $T$ coincidir com $W$, ou seja $T(V) = W$.
Em outras palavras, $T$ será sobrejetora se dado $w \in W$, existir $v \in V$ tal que $T(v) = w$.

# Teorema

**Theorem**

*Seja* $T : V \to W$, *uma aplicação linear. Então* $ker(T) = \{0\}$, *se e somente se* $T$ *é injetora.*

# Teorema

**Theorem**

*Seja $T : V \to W$, uma aplicação linear. Então $ker(T) = \{0\}$, se e somente se $T$ é injetora.*

Uma consequência é que uma aplicação linear injetora leva vetores LI em vetores LI.

# Teorema do Núcleo e Imagem

**Theorem (do Núcleo e Imagem)**

*Seja $T : V \to W$ uma aplicação linear. Então:*

$$dim(V) = dim(ker(T)) + dim(Im(T))$$

# Teorema do Núcleo e Imagem

### Theorem (do Núcleo e Imagem)

*Seja $T : V \to W$ uma aplicação linear. Então:*

$$dim(V) = dim(ker(T)) + dim(Im(T))$$

### Corollary

*Se $dimV = dimW$, então $T$ linear é injetora se e somente se $T$ é sobrejetora.*

# Teorema do Núcleo e Imagem

**Theorem (do Núcleo e Imagem)**

*Seja $T : V \to W$ uma aplicação linear. Então:*

$$dim(V) = dim(ker(T)) + dim(Im(T))$$

**Corollary**

*Se $dimV = dimW$, então $T$ linear é injetora se e somente se $T$ é sobrejetora.*

**Corollary**

*Seja $T : V \to W$ uma aplicação linear injetora. Se $dimV = dimW$, então $T$ leva base em base.*

# Isomorfismo

Quando $T : V \to W$ for injetora e sobrejetora, ao mesmo tempo, dá-se o nome de *isomorfismo*. Quando há uma tal transformação entre dois espaços vetoriais dizemos que estes são *isomorfos*.

# Isomorfismo

Quando $T : V \to W$ for injetora e sobrejetora, ao mesmo tempo, dá-se o nome de *isomorfismo*. Quando há uma tal transformação entre dois espaços vetoriais dizemos que estes são *isomorfos*.
No ponto de vista da álgebra linear, dois espaços vetoriais *isomorfos* são, por assim dizer, idênticos. Devido aos resultados anteriores, os espaços isomorfos possuem a mesma dimensão e um isomorfismo leva base a base.

# Isomorfismo

Além, disso $T : V \to W$ tem uma aplicação inversa $T^{-1} : W \to V$ que é linear e também é um isomorfismo.

**Exemplo 01:** Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y, z) = (x - 2y, z, x + y)$. Mostre que $T$ é isomorfismo e determine $T^{-1}$.

# Exemplo

**Exemplo 01:** $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \{(1,0),(0,1)\}$ e $B' = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ e $T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$. Determine $T_A$.

# Exemplo

Agora vamos encontrar a matriz associada a uma transformação linear.

# Exemplo

Agora vamos encontrar a matriz associada a uma transformação linear.
**Exemplo 02:** Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que
$T(x,y,z) = (2x + y - z, 3x - 2y + 4z)$. Sejam
$B = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ e $B' = \{(1,3),(1,4)\}$. Determine $[T]_{B'}^{B}$.

# Exemplo

**Exemplo 03:** Dadas as bases $B = \{(1,1),(0,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ e $B' = \{(0,3,0),(-1,0,0),(0,1,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$, encontremos a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ cuja matriz é: $[T]^B_{B'} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

# Exemplo

**Theorem**

*Sejam $V$ e $W$ espaços vetoriais, $\alpha$ base de $V$, $\beta$ base de $W$ e $T : V \to W$ uma aplicação linear. Então, para todo $v \in V$ vale:*

$$[T(v)]_\beta = [T]^\alpha_\beta \cdot [v]_\alpha$$

# Exemplo

**Theorem**

*Sejam $V$ e $W$ espaços vetoriais, $\alpha$ base de $V$, $\beta$ base de $W$ e $T : V \to W$ uma aplicação linear. Então, para todo $v \in V$ vale:*

$$[T(v)]_\beta = [T]_\beta^\alpha \cdot [v]_\alpha$$

Através deste teorema, o estudo de transformações lineares entre espaços de dimensão finita é reduzido ao estudo de matrizes. No caso particular de $V = W$ e $T = I$, o resultado é o mesmo da matriz de mudança de base.

# Exemplo

**Exemplo 04:** Seja a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$[T]_{\alpha}^{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

onde $\alpha = \{(1,0),(0,1)\}$ é base de $\mathbb{R}^2$, $\beta = \{(1,0,1),(-2,0,1),(0,1,0)\}$ é base de $\mathbb{R}^3$. Qual a imagem do vetor $v = (2,-3)$ gerada por $T$.

# Teoremas

**Theorem**

*Seja* $T : V \to W$ *uma aplicação linear e* $\alpha$ *e* $\beta$ *bases de* $V$ *e* $W$ *respectivamente. Então:*

$$\dim Im(T) = posto\ de\ [T]_\beta^\alpha$$

$$\dim ker(T) = nulidade\ de\ [T]_\beta^\alpha$$

*ou ainda,* $\dim ker(T) =$ *número de colunas - posto de* $[T]_\beta^\alpha$.

# Teorema

## Theorem

*Sejam* $T_1 : V \to W$ *e* $T_2 : W \to U$ *transformações lineares e* $\alpha, \beta$ *e* $\gamma$ *bases de* $V, W$ *e* $U$ *respectivamente. Então a composta de* $T_1$ *com* $T_2$*,* $T_1 \circ T_2 : V \to U$ *é linear e*

$$[T_2 \circ T_1]^{\alpha}_{\gamma} = [T_2]^{\beta}_{\gamma} \cdot [T_1]^{\alpha}_{\beta}$$

# Exemplo

**Exemplo 02:** Sejam as transformações lineares $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ e $T_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ cujas matrizes são:

$$[T_1]^{\alpha}_{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } [T]^{\beta}_{\gamma} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

em relação às bases $\alpha = \{(1,0),(0,2)\}$,
$B = \{(\frac{1}{3}, 0, -3), (1,1,15), (2,0,5)\}$ e $\gamma = \{(2,0),(1,1)\}$. Determine a transformação linear composta $T_2 \circ T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, isto é, $(T_2 \circ T_1)(x,y)$.

# Corolário

## Corollary

*Se $T : V \to W$ é uma transformação linear inversível ($T$ é um isomorfismo) e $\alpha$ e $\beta$ são bases de $V$ e $W$, então $T^{-1} : W \to V$ é um operador linear e*

$$[T^{-1}]^{\beta}_{\alpha} = ([T]^{\alpha}_{\beta})^{-1}$$

# Corolário

**Corollary**

*Se* $T : V \to W$ *é uma transformação linear inversível (*$T$ *é um isomorfismo) e* $\alpha$ *e* $\beta$ *são bases de* $V$ *e* $W$*, então* $T^{-1} : W \to V$ *é um operador linear e*

$$[T^{-1}]^{\beta}_{\alpha} = ([T]^{\alpha}_{\beta})^{-1}$$

**Corollary**

*Seja* $T : V \to W$ *uma transformação linear e* $\alpha$ *e* $\beta$ *bases de* $V$ *e* $W$*. Então* $T$ *é inversível se e somente se* $\det[T]^{\alpha}_{\beta} \neq 0$*.*

# Corolário

**Corollary**

*Conhecendo a matriz de uma transformação linear em relação a certas bases $\alpha$ e $\beta$ e as matrizes de mudança de base para novas bases $\alpha'$ e $\beta'$, podemos achar a matriz da mesma transformação linear, desta vez em relação às novas bases $\alpha'$ e $\beta'$. Matematicamente,*

$$[T]_{\beta'}^{\alpha'} = [I \circ T \circ I]_{\beta'}^{\alpha'} = [I]_{\beta'}^{\beta}[T]_{\beta}^{\alpha}[I]_{\alpha}^{\alpha'}$$

# Corolário

Como caso particular, se $T : V \to V$ é uma transformação linear e $\alpha$ e $\beta$ são bases de $V$, então

$$[T]_\beta^\beta = [I \circ T \circ I]_\beta^\beta = [I]_\beta^\alpha [T]_\alpha^\alpha [I]_\alpha^\beta$$

Lembre-se que $[I]_\alpha^\beta = ([I]_\beta^\alpha)^{-1}$ denotando $[I]_\alpha^\beta = A$, segue que

$$[T]_\beta^\beta = A \cdot [T]_\alpha^\alpha \cdot A^{-1}$$

Dizemos neste caso que as matrizes $[T]_\alpha^\alpha$ e $[T]_\beta^\beta$ são *semelhantes*.

# Autovalores e Autovetores

**Exemplo 01:** Dada $T : V \to V$, quais vetores $v \in V$ tais que $T(v) = v$? ($v$ é denominado *vetor fixo*).
O primeiro exemplo é o trivial, a aplicação identidade, onde todo vetor é definido como vetor fixo.
**Exemplo 02:** $r_x : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $r_x(x, y) = (x, -y)$ ou

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

# Autovalores e Autovetores

Dada uma transformação linear de um espaço vetorial $T : V \to V$, nosso interesse é descobrir quais vetores são levados em um múltiplo de si mesmo, isto é, procuramos um vetor $v \in V$ e um escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que:

$$T(v) = \lambda v$$

.

# Autovalores e Autovetores

Dada uma transformação linear de um espaço vetorial $T : V \to V$, nosso interesse é descobrir quais vetores são levados em um múltiplo de si mesmo, isto é, procuramos um vetor $v \in V$ e um escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que:

$$T(v) = \lambda v$$

.

Neste caso, $T(v)$ será um vetor de mesma "direção" que $v$ (sobre a mesma reta suporte). Como $v = 0$ satisfaz a equação para todo $\lambda$, estamos interessados em determinar vetores $v \neq 0$ satisfazendo a condição acima.

# Autovalores e Autovetores

**Definition (Autovetor e Autovalor)**

Seja $T : V \to V$ um operador linear. Se existirem $v \in V$, $v \neq 0$, e $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que $T(v) = \lambda v$, $\lambda$ é um *autovalor* de $T$ e $v$ é um *autovetor* de $T$ associado a $\lambda$.
Note que $\lambda$ pode ser igual a 0, embora $v \neq 0$.

# Autovalores e Autovetores

**Theorem**

*Dada uma transformação $T : V \to V$ e um autovetor $v$ associado a um autovalor $\lambda$, qualquer vetor $w = \alpha v (\alpha \neq 0)$ também é um autovetor de $T$ associado a $\lambda$.*

# Autovalores e Autovetores

**Theorem**

*Dada uma transformação* $T: V \to V$ *e um autovetor* $v$ *associado a um autovalor* $\lambda$*, qualquer vetor* $w = \alpha v (\alpha \neq 0)$ *também é um autovetor de* $T$ *associado a* $\lambda$*.*

**MOSTRE QUE:** o conjunto formado pelos autovetores associados a um autovalor $\lambda$ e o vetor nulo é um subespaço vetorial de $V$, isto é, $V_\lambda = \{v \in V; T(v) = \lambda v\}$ é subespaço de $V$.

**Definition**

O subespaço $V_\lambda = \{v \in V; T(v) = \lambda v\}$ é chamado o *subespaço associado ao autovalor* $\lambda$.

# Autovalores e Autovetores

Dada uma matriz quadrada de ordem $n$, $A$, estaremos entendendo por *autovalor* e *autovetor* de $A$, autovalor e autovetor da transformação linear $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, associada à matriz $A$ em relação à base canônica, isto é, $T_A(v) = A \cdot v$ (na forma coluna). Assim, um autovalor $\lambda \in \mathbb{R}$ de $A$, e um autovetor $v \in \mathbb{R}^n$, são soluções da equação $A \cdot v = \lambda v, v \neq 0$.

# Polinômio Característico

Nesta seção determinaremos um método prático para determinar autovalores e autovetores de uma matriz real $A$ de ordem $n$.

# Polinômio Característico

Nesta seção determinaremos um método prático para determinar autovalores e autovetores de uma matriz real $A$ de ordem $n$.

**Exemplo:**

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Nosso interesse esta em determinar vetores $v \in \mathbb{R}^3$ e escalares $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que $A \cdot v = \lambda v$.

# Autovalores e Autovetores

**Exemplo 02:**

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

**OBS:** Quando trabalhamos em espaços algebricamente fechados, o polinômio característico sempre apresentará raízes (o caso quando estamos em $\mathbb{C}$).
No exemplo anterior, as raízes seriam $\lambda = \sqrt{3} + i$ e $\lambda = \sqrt{3} - i$. Os autovetores encontrados, da mesma maneira que no caso real, são do tipo $(x, -ix)$ e $(x, ix)$, respectivamente. Porém, não se tem a visão geométrica do comportamento do vetor. Autovalores e autovetores complexos são utilizados na resolução de um sistema de equações diferenciais.

# Autovalores e Autovetores

**Exemplo:**

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

# Autovalores e Autovetores

Pode-se também definir o polinômio característico de uma matriz, cuja a transformação linear $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ esta associada a ela.

# Autovalores e Autovetores

Pode-se também definir o polinômio característico de uma matriz, cuja a transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ esta associada a ela.

**Definition**

Chamamos de *multiplicidade algébrica de um autovalor* a quantidade de vezes que ele aparece como raiz do polinômio característico.
A *multiplicidade geométrica de um autovalor* $\lambda$ é a dimensão do subespaço $V_\lambda$ de autovetores associados a $\lambda$.

# Diagonalização de Operadores

Dado um operador linear $T : V \to V$, nosso objetivo é conseguir uma base $B$ de $V$ na qual a matriz do operador nesta base ($[T]_B^B$) seja uma matriz diagonal, que é a forma mais simples possível de se representar um operador.

# Diagonalização de Operadores

Dado um operador linear $T : V \to V$, nosso objetivo é conseguir uma base $B$ de $V$ na qual a matriz do operador nesta base ($[T]_B^B$) seja uma matriz diagonal, que é a forma mais simples possível de se representar um operador.

### Theorem

*Autovetores associados a autovalores distintos são linearmente independentes.*

### Corollary

*Se $V$ é um espaço vetorial de dimensão $n$ e $T : V \to V$ é um operador linear que possui $n$ autovalores distintos, então $V$ possui uma base cujos vetores são todos autovetores de $T$.*

Em outras palavras, se conseguirmos encontrar tantos autovalores distintos quanto for a dimensão do espaço, podemos garantir a existência de uma base de autovetores.

# Diagonalização de Operadores

**Exemplo 02:** Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear cuja matriz em relação à base canônica $\alpha$ é:

$$[T]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

# Diagonalização de Operadores

Dada uma transformação linear qualquer $T : V \to V$, se conseguirmos uma base $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ formada por autovetores de $T$, então, como

$$\begin{aligned}
T(v_1) &= \lambda_1 v_1 + 0v_2 + \cdots + 0v_n \\
T(v_2) &= 0v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + 0v_n \\
&\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\
T(v_n) &= 0v_1 + 0v_2 + \cdots + \lambda_n v_n
\end{aligned}$$

# Diagonalização de Operadores

A matriz $[T]_B^B$ será uma matriz diagonal onde os elementos da diagonal principal são os autovalores $\lambda_i$, isto é,

$$[T]_B^B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

# Diagonalização de Operadores

Um autovalor aparecerá na diagonal quantas vezes forem os autovetores LI a ele associados.

Por outro lado, se $\gamma = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ é uma base de $V$ tal que

$$[T]_\gamma^\gamma = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_n \end{bmatrix}$$

# Diagonalização de Operadores

Dessa forma, $u_1, \ldots, u_n$ são necessariamente autovetores de $T$ com autovalores $a_1, \ldots, a_n$ respectivamente. De fato, da definição de $[T]_\gamma^\gamma$ temos:

$$
\begin{aligned}
T(u_1) &= a_1 u_1 + 0u_2 + \cdots + 0u_n = a_1 u_1 \\
T(u_2) &= 0u_1 + a_2 u_2 + \cdots + 0u_n = a_2 u_2 \\
&\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\
T(u_n) &= 0u_1 + 0u_2 + \cdots + a_n u_n = a_n u_n
\end{aligned}
$$

# Diagonalização de Operadores

Dessa forma, concluímos que um operador $T : V \to V$ admite uma base $B$ em relação à qual sua matriz $[T]_B^B$ é diagonal se, e somente se essa base $B$ for formada por autovetores de $T$.

# Diagonalização de Operadores

Dessa forma, concluímos que um operador $T : V \to V$ admite uma base $B$ em relação à qual sua matriz $[T]_B^B$ é diagonal se, e somente se essa base $B$ for formada por autovetores de $T$.

**Definition**

Seja $T : V \to V$ um operador linear. Dizemos que $T$ é um operador *diagonalizável* se existe uma base de $V$ cujos elementos são autovetores de $T$.

# Diagonalização de Operadores

Os operadores do exemplo 01 e 02 são diagonalizáveis. Agora seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear cuja matriz em relação à base canônica $\alpha$ é:

$$[T]_{\alpha}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

# Polinômio Minimal

**Definition**

Seja $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ um polinômio e $A$ uma matriz quadrada. Então $p(A)$ é a matriz

$$p(A) = a_n A^n + \cdots + a_1 A + a_0 I$$

Quando $p(A) = 0$, dizemos que o polinômio *anula* a matriz $A$.

# Polinômio Minimal

**Exemplo:** Sejam $p(x) = x^2 - 9$ e $q(x) = 2x + 3$. Se $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Determine $p(A)$ e $q(A)$.

# Polinômio Minimal

**Definition**

Seja $A$ uma matriz quadrada. O *polinômio minimal* de $A$ é um polinômio

$$m(x) = x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_0$$

tal que:

i) $m(A) = 0$, isto é, $m(x)$ anula a matriz $A$.

ii) $m(x)$ é o polinômio de menor grau entre aqueles que anulam $A$.

Note que o coeficiente do termo $x^k$ do polinômio minimal é 1 ($a_k = 1$).

# Polinômio Minimal

**Theorem**

*Sejam* $T : V \to V$ *um operador linear e* $\alpha$ *uma base qualquer de* $V$ *de dimensão* $n$*. Então* $T$ *é diagonalizável se, e somente se o polinômio minimal de* $[T]_\alpha^\alpha$ *é da forma*

$$m(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)\dots(x - \lambda_r)$$

*com* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ *distintos.*

# Polinômio Minimal

**Theorem (de Cayley-Hamilton)**

*Seja $T : V \to V$ um operador linear, $\alpha$ uma base de $V$ e $p(x)$ o polinômio característico de $T$. Então*

$$p([T]_{\alpha}^{\alpha}) = 0$$

# Polinômio Minimal

**Theorem (de Cayley-Hamilton)**

*Seja* $T : V \to V$ *um operador linear,* $\alpha$ *uma base de* $V$ *e* $p(x)$ *o polinômio característico de* $T$*. Então*

$$p([T]_{\alpha}^{\alpha}) = 0$$

Isto significa que o polinômio característico é um candidato ao polinômio minimal, já que satisfaz a condição $i)$ da definição de polinômio minimal.

# Polinômio Minimal

**Theorem**

*As raízes do polinômio minimal são as mesmas raízes (distintas) do polinômio característico.*

# Polinômio Minimal

**Theorem**

*Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ os autovalores distintos de um operador linear $T$. Então $T$ será diagonalizável se, e somente se o polinômio*

$$(x - \lambda_1)(x - \lambda_2)\ldots(x - \lambda_r)$$

*anular a matriz de $T$.*

# Polinômio Minimal

**Exemplo 01:** O operador linear $T:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definido por $T(x,y,z,t) = (3x - 4z, 3y + 5z, -z, -t)$ é diagonalizável?

# Polinômio Minimal

Obtemos que $T_1$ e $T_2$ operadores diagonalizáveis, então $T_1$ e $T_2$ são simultaneamente diagonalizáveis se e somente se $T_1$ e $T_2$ comutam $(T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1)$.
Na prática, dados $T_1$ e $T_2$, tomamos uma base $B$ qualquer de $V$ e verificamos se $T_1$ e $T_2$ são diagonalizáveis. Se isto acontecer e, além disso, $[T_1]_B^B[T_2]_B^B = [T_2]_B^B[T_1]_B^B$, então podemos concluir que $T_1$ e $T_2$ são simultaneamente diagonalizáveis.