Probabilidade e Estatística

Matheus Pimenta

Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Câmpus Cornélio Procópio

Agosto de 2020
ADNP 2020

Conteúdo Programático

- Espaço Amostral

Conteúdo Programático

- Espaço Amostral
- Representação do Espaço Amostral

Conteúdo Programático

- Espaço Amostral
- Representação do Espaço Amostral
    - Tabelas

Conteúdo Programático

- Espaço Amostral
- Representação do Espaço Amostral
    - Tabelas
    - Diagramas

Conteúdo Programático

- Espaço Amostral
- Representação do Espaço Amostral
  - Tabelas
  - Diagramas
- Operações com Eventos Aleatórios

Conteúdo Programático

- Espaço Amostral
- Representação do Espaço Amostral
  - Tabelas
  - Diagramas
- Operações com Eventos Aleatórios
- Propriedades das Operações

Conteúdo Programático

- Espaço Amostral
- Representação do Espaço Amostral
    - Tabelas
    - Diagramas
- Operações com Eventos Aleatórios
- Propriedades das Operações
- Função de Probabilidade

Conteúdo Programático

- Espaço Amostral
- Representação do Espaço Amostral
    - Tabelas
    - Diagramas
- Operações com Eventos Aleatórios
- Propriedades das Operações
- Função de Probabilidade
- Alguns Teoremas

Espaço Amostral

Os fenômenos podem ser classificados como: *determinísticos* ou *aleatórios*.

Espaço Amostral

Os fenômenos podem ser classificados como: *determinísticos* ou *aleatórios*.
Definição fenômenos determinísticos:
São aqueles que o resultado são sempre iguais, qualquer que seja o número de ocorrências verificadas.
Por exemplo, a temperatura que a água entra em ebulição, a temperatura de solidificação de um certo composto.

Espaço Amostral

Os fenômenos podem ser classificados como: *determinísticos* ou *aleatórios*.
Definição fenômenos determinísticos:
São aqueles que o resultado são sempre iguais, qualquer que seja o número de ocorrências verificadas.
Por exemplo, a temperatura que a água entra em ebulição, a temperatura de solidificação de um certo composto.
Definição fenômenos aleatórios:
São do tipo que não podem ser previsíveis, mesmo que haja um grande número de repetições do mesmo fenômeno.
Alguns exemplos são: condições climáticas no próximo mês, resultado de lançamento de um dado, número de veículos que passam em um cruzamento em um certo período do dia.

Espaço Amostral - Exemplos

Os *experimentos aleatórios* são os fenômenos que mesmo com as mesmas condições iniciais, os resultados finais de cada tentativa do experimento são diferentes e não previsíveis.

Espaço Amostral - Exemplos

Os *experimentos aleatórios* são os fenômenos que mesmo com as mesmas condições iniciais, os resultados finais de cada tentativa do experimento são diferentes e não previsíveis.
Alguns exemplos:

1. lançamento de uma moeda honesta;

Espaço Amostral - Exemplos

Os *experimentos aleatórios* são os fenômenos que mesmo com as mesmas condições iniciais, os resultados finais de cada tentativa do experimento são diferentes e não previsíveis.
Alguns exemplos:

1. lançamento de uma moeda honesta;
2. lançamento de um dado;

Espaço Amostral - Exemplos

Os *experimentos aleatórios* são os fenômenos que mesmo com as mesmas condições iniciais, os resultados finais de cada tentativa do experimento são diferentes e não previsíveis.
Alguns exemplos:

1. lançamento de uma moeda honesta;
2. lançamento de um dado;
3. retirada de uma carta de um baralho de 52 cartas;

Espaço Amostral - Exemplos

Os *experimentos aleatórios* são os fenômenos que mesmo com as mesmas condições iniciais, os resultados finais de cada tentativa do experimento são diferentes e não previsíveis.
Alguns exemplos:

1. lançamento de uma moeda honesta;
2. lançamento de um dado;
3. retirada de uma carta de um baralho de 52 cartas;

Quando os resultados não podem ser previsíveis é definidos como *eventos aleatórios*.

Espaço Amostral - Exemplos

Os *experimentos aleatórios* são os fenômenos que mesmo com as mesmas condições iniciais, os resultados finais de cada tentativa do experimento são diferentes e não previsíveis.
Alguns exemplos:

1. lançamento de uma moeda honesta;
2. lançamento de um dado;
3. retirada de uma carta de um baralho de 52 cartas;

Quando os resultados não podem ser previsíveis é definidos como *eventos aleatórios*.
No exemplo 1, os eventos aleatórios associados são: *cara* ou *coroa*, já no exemplo 2 os eventos aleatórios associados são as faces do dados que poderão ocorrer $1, 2, 3, 4, 5$ ou 6.

Espaço Amostral

Definição Espaço Amostral:
É o conjunto dos resultados do experimento. Os *pontos amostrais* são os elementos do espaço amostral.

Espaço Amostral

Definição Espaço Amostral:
É o conjunto dos resultados do experimento. Os *pontos amostrais* são os elementos do espaço amostral.
A notação do espaço amostral é: Ω.

Espaço Amostral

Definição Espaço Amostral:
É o conjunto dos resultados do experimento. Os *pontos amostrais* são os elementos do espaço amostral.
A notação do espaço amostral é: Ω.
Nossos exemplos anteriores, os espaços amostrais são:

1. $\Omega = \{cara, coroa\}$

Espaço Amostral

Definição Espaço Amostral:
É o conjunto dos resultados do experimento. Os *pontos amostrais* são os elementos do espaço amostral.
A notação do espaço amostral é: Ω.
Nossos exemplos anteriores, os espaços amostrais são:

1. $\Omega = \{cara, coroa\}$
2. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Espaço Amostral

Definição Espaço Amostral:
É o conjunto dos resultados do experimento. Os *pontos amostrais* são os elementos do espaço amostral.
A notação do espaço amostral é: Ω.
Nossos exemplos anteriores, os espaços amostrais são:

1. $\Omega = \{cara, coroa\}$
2. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
3. $\Omega = \{A_O, \ldots, K_O, A_P, \ldots, K_P, A_E, \ldots, K_E, A_C, \ldots, K_C\}$

Espaço Amostral

Pode-se ter a união de vários eventos aleatórios como interesse.

Espaço Amostral

Pode-se ter a união de vários eventos aleatórios como interesse.

1. saída de faces iguais;

Espaço Amostral

Pode-se ter a união de vários eventos aleatórios como interesse.

1. saída de faces iguais;
2. saída de faces cuja a soma seja igual a 10;

Espaço Amostral

Pode-se ter a união de vários eventos aleatórios como interesse.

1. saída de faces iguais;
2. saída de faces cuja a soma seja igual a 10;
3. saída de faces cuja a soma seja inferior a 2;

Espaço Amostral

Pode-se ter a união de vários eventos aleatórios como interesse.

1. saída de faces iguais;
2. saída de faces cuja a soma seja igual a 10;
3. saída de faces cuja a soma seja inferior a 2;
4. saída de faces cuja a soma seja inferior a 15;

Espaço Amostral

Pode-se ter a união de vários eventos aleatórios como interesse.

1. saída de faces iguais;
2. saída de faces cuja a soma seja igual a 10;
3. saída de faces cuja a soma seja inferior a 2;
4. saída de faces cuja a soma seja inferior a 15;
5. saída de faces onde uma face é o dobro da outra;

Espaço Amostral

Pode-se ter a união de vários eventos aleatórios como interesse.

1. saída de faces iguais;
2. saída de faces cuja a soma seja igual a 10;
3. saída de faces cuja a soma seja inferior a 2;
4. saída de faces cuja a soma seja inferior a 15;
5. saída de faces onde uma face é o dobro da outra;

Para determinar qual é o espaço amostral, podemos utilizar uma tabela ou um diagrama de árvore.

Tabela e Diagrama de Árvore

Tabela e Diagrama de Árvore

Espaço Amostral

Assim, os eventos pedidos são:

Espaço Amostral

Assim, os eventos pedidos são:

1. $\Omega = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$

Espaço Amostral

Assim, os eventos pedidos são:

1. $\Omega = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$
2. $\Omega = \{(4,6),(5,5),(6,4)\}$

Espaço Amostral

Assim, os eventos pedidos são:

1. $\Omega = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$
2. $\Omega = \{(4,6),(5,5),(6,4)\}$
3. $\Omega = \varnothing$ (evento impossível)

Espaço Amostral

Assim, os eventos pedidos são:

1. $\Omega = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$
2. $\Omega = \{(4,6),(5,5),(6,4)\}$
3. $\Omega = \varnothing$ (evento impossível)
4. $\Omega = \Omega$ (evento certo)

Espaço Amostral

Assim, os eventos pedidos são:

1. $\Omega = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$
2. $\Omega = \{(4,6),(5,5),(6,4)\}$
3. $\Omega = \varnothing$ (evento impossível)
4. $\Omega = \Omega$ (evento certo)
5. $\Omega = \{(1,2),(2,1),(2,4),(3,6),(4,2),(6,3)\}$

Operações com Eventos Aleatórios

Considere o espaço amostral finito $\Omega = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. Sejam A e B dois eventos da classe de eventos $F(\Omega)$. As seguintes operações estão definidas:

Operações com Eventos Aleatórios

Considere o espaço amostral finito $\Omega = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. Sejam A e B dois eventos da classe de eventos $F(\Omega)$. As seguintes operações estão definidas:

- União:
  Definição: $A \cup B = \{e_i \in \Omega; e_i \in A \vee e_i \in B\}$, $i = 1, \ldots, n$.
  O *evento reunião* é formado pelos pontos amostrais que pertencem a pelo menos um dos eventos.

DIAGRAMA DE VEEN

Operações com Eventos Aleatórios

Considere o espaço amostral finito $\Omega = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. Sejam A e B dois eventos da classe de eventos $F(\Omega)$. As seguintes operações estão definidas:

- União:
  Definição: $A \cup B = \{e_i \in \Omega; e_i \in A \vee e_i \in B\}$, $i = 1, \ldots, n$.
  O *evento reunião* é formado pelos pontos amostrais que pertencem a pelo menos um dos eventos.

  DIAGRAMA DE VEEN

- Interseção:
  Definição: $A \cap B = \{e_i \in \Omega; e_i \in A \wedge e_i \in B\}$, $i = 1, \ldots, n$
  O *evento interseção* é formado pelos pontos amostrais que pertencem simultaneamente aos eventos A e B. Se $A \cap B = \varnothing$ dizemos que A e B são *eventos mutualmente exclusivos*.

  DIAGRAMA DE VEEN

Operações com Eventos Aleatórios

Considere o espaço amostral finito $\Omega = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. Sejam A e B dois eventos da classe de eventos $F(\Omega)$. As seguintes operações estão definidas:

- União:
  Definição: $A \cup B = \{e_i \in \Omega; e_i \in A \vee e_i \in B\}$, $i = 1, \ldots, n$.
  O *evento reunião* é formado pelos pontos amostrais que pertencem a pelo menos um dos eventos.

  DIAGRAMA DE VEEN

- Interseção:
  Definição: $A \cap B = \{e_i \in \Omega; e_i \in A \wedge e_i \in B\}$, $i = 1, \ldots, n$
  O *evento interseção* é formado pelos pontos amostrais que pertencem simultaneamente aos eventos A e B. Se $A \cap B = \varnothing$ dizemos que A e B são *eventos mutualmente exclusivos*.

  DIAGRAMA DE VEEN

- Complementação:
  Definição: $\Omega - A = \bar{A} = \{e_i \in \Omega; e_i \notin A\}$

Propriedades das Operações

Sejam A, B e C eventos associados a um espaço amostral Ω. As propriedades a seguir são válidas:

Propriedades das Operações

Sejam A, B e C eventos associados a um espaço amostral Ω. As propriedades a seguir são válidas:

1. Comutativa:
   $A \cup B = B \cup A$
   $A \cap B = B \cap A$

Propriedades das Operações

Sejam A, B e C eventos associados a um espaço amostral Ω. As propriedades a seguir são válidas:

1. Comutativa:
   $A \cup B = B \cup A$
   $A \cap B = B \cap A$
2. Idempotentes:
   $A \cup A = A$
   $A \cap A = A$

Propriedades das Operações

Sejam A, B e C eventos associados a um espaço amostral Ω. As propriedades a seguir são válidas:

1. Comutativa:
   $A \cup B = B \cup A$
   $A \cap B = B \cap A$
2. Idempotentes:
   $A \cup A = A$
   $A \cap A = A$
3. Associativas
   $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
   $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

Propriedades das Operações

Sejam A, B e C eventos associados a um espaço amostral Ω. As propriedades a seguir são válidas:

1. Comutativa:
   $A \cup B = B \cup A$
   $A \cap B = B \cap A$
2. Idempotentes:
   $A \cup A = A$
   $A \cap A = A$
3. Associativas
   $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
   $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
4. Distributivas:
   $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
   $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap B)$

Propriedades das Operações

Sejam A, B e C eventos associados a um espaço amostral Ω. As propriedades a seguir são válidas:

1. Comutativa:
   $A \cup B = B \cup A$
   $A \cap B = B \cap A$
2. Idempotentes:
   $A \cup A = A$
   $A \cap A = A$
3. Associativas
   $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
   $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
4. Distributivas:
   $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
   $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap B)$
5. Identidades:
   $A \cap \Omega = A$
   $A \cup \Omega = \Omega$
   $A \cap \varnothing = \varnothing$
   $A \cup \varnothing = A$

Função de Probabilidade

Definição:
É a função P que associa a cada evento de F um número real pertencente ao intervalo $[0, 1]$, que satisfaz os seguintes axiomas:

Função de Probabilidade

Definição:
É a função P que associa a cada evento de F um número real pertencente ao intervalo $[0, 1]$, que satisfaz os seguintes axiomas:

- $P(\Omega) = 1$;

Função de Probabilidade

Definição:
É a função P que associa a cada evento de F um número real pertencente ao intervalo $[0, 1]$, que satisfaz os seguintes axiomas:

- $P(\Omega) = 1$;
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, se A e B forem mutualmente exclusivos;

Função de Probabilidade

Definição:
É a função P que associa a cada evento de F um número real pertencente ao intervalo $[0, 1]$, que satisfaz os seguintes axiomas:

- $P(\Omega) = 1$;
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, se A e B forem mutualmente exclusivos;
- $P\left(\cup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$, se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ forem, dois a dois, eventos mutualmente exclusivos.

Função de Probabilidade

Definição:
É a função P que associa a cada evento de F um número real pertencente ao intervalo $[0,1]$, que satisfaz os seguintes axiomas:

- $P(\Omega) = 1$;
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, se A e B forem mutualmente exclusivos;
- $P\left(\cup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$, se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ forem, dois a dois, eventos mutualmente exclusivos.

Pela definição acima, temos que $0 \leq P(A) \leq 1$, para todo evento A, tal que $A \subset \Omega$.

Teoremas

Teorema:

Se os eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ formam uma partição do espaço amostral, então:

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$$

Teoremas

Teorema:
Se os eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ formam uma partição do espaço amostral, então:

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$$

Teorema:
Se $\varnothing$ é o evento impossível, então:

$$P(\varnothing) = 0$$

Teoremas

Teorema:
Se os eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ formam uma partição do espaço amostral, então:

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$$

Teorema:
Se $\varnothing$ é o evento impossível, então:

$$P(\varnothing) = 0$$

Teorema: do evento complementar
Para todo evento $A \subset \Omega$, é valido:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

Teoremas

Teorema: da soma

Sejam $A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$. Então:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Teoremas

Teorema: da soma
Sejam $A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$. Então:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Teorema:
Para $A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$, temos:

$$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$$

Teoremas

Teorema: da soma
Sejam $A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$. Então:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Teorema:
Para $A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$, temos:

$$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$$

Teorema:
Dado o espaço amostral Ω e os eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, então:

$$P\left(\cup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i \neq j}^{n} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i \neq j \neq k}^{n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap \cdots \cap A_n)$$

Teoremas

Teorema:
Dados os eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, então:

$$P\left(\cup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$