Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Câmpus Cornélio Procópio
Departamento Acadêmico de Matemática

Notas de Aula

Dados de Identificação	
Professor:	Matheus Pimenta
Disciplina:	Geometria Analítica e Álgebra Linear - EC31G

1 Sistema de Coordenadas

1.1 Coordenadas de um Ponto no Plano

Em 1619, o filósofo e matemático francês René Descartes (1596-1650) percebeu que a ideia de determinar posições utilizando retas, escolhidas como referência, poderia ser aplicado à matemática. Para isso usou retas numeradas.

Descartes resolveu este problema usando duas retas numeradas, perpendiculares, cortando-se na origem. Usualmente, uma dessas retas é horizontal, com a direção positiva para a direita. Esta reta será chamada eixo x ou eixo das abscissas. A outra reta, vertical com a direção positiva para cima, é chamada eixo y, ou eixo das ordenadas.

cada ponto P do plano fica associado um par de números (x, y), que são as coordenadas deste ponto. O número x é chamado abscissa desse ponto, e o número y é a sua ordenada. O número x mede a distância orientada do ponto P ao eixo y , e o número y mede a distância orientada do ponto P ao eixo x.

Se P tem coordenadas x e y escrevemos $P(x, y)$.

FIGURA 01 - PLANO CARTESIANO

Todo ponto P determina um par ordenado de números reais e reciprocamente, todo par ordenado de números reais (a, b) determina um único ponto do plano. Temos então uma correspondência biunívoca entre os pontos do plano e os pares ordenados de números reais. Uma correspondência desse tipo é chamada um *sistema de coordenadas no plano* ou *sistema de coordenadas cartesianas*.

O eixo das abscissas e o eixo das ordenadas, usualmente colocados na posição indicada na figura abaixo, dividem o plano em quatro regiões, denominadas quadrantes.

FIGURA 02 - PLANO CARTESIANO COM QUADRANTES

O primeiro quadrante é o conjunto de todos os pontos (x, y) do plano para os quais $x > 0$ e $y > 0$; o segundo quadrante é o conjunto de todos os pontos (x, y) do plano para os quais $x < 0$ e $y > 0$; no terceiro temos $x < 0$ e $y < 0$ e, no quarto, $x > 0$ e $y < 0$.

Como a correspondência entre os pontos do plano e o conjunto de pares ordenados de números reais é biunívoca, em geral, nos referimos a um ponto P como o ponto $(1, 2)$ ou o ponto (x, y) quando, na realidade queremos nos referir ao ponto P cujas coordenadas são $(1, 2)$ ou (x, y).

1.2 Coordenadas de um Ponto no Espaço

Sistema cartesiano ortogonal no espaço: no espaço tridimensional adiciona-se um terceiro eixo, o eixo z ou eixo das cotas. Os três eixos: ordenada, abscissa e cota, dividem o espaço em oito partes chamadas de octantes ou oitantes.

No espaço um ponto fica caracterizado por uma tripla, chamada de terna:

$$P = (x, y, z)$$

FIGURA 03 - ESPAÇO

Dimensões maiores: para quatro ou mais dimensões os eixos adicionais não tem mais nomes, mas a propriedade deles serem ou não ortogonais para definirmos sistemas de coordenadas ortogonais ou não continua válida.

As seguintes observações são válidas:

- a origem do sistema de eixos ortogonais é o ponto $O = (0,0,0)$;
- os eixos do sistema são os conjuntos:

$$eixo - OX = \{(x,0,0); x \in \mathbb{R}\}$$
$$eixo - OY = \{(0,y,0); y \in \mathbb{R}\}$$
$$eixo - OZ = \{(0,0,z); z \in \mathbb{R}\}$$

- os planos cartesianos são os conjuntos:

$$\pi_{XY} = \{(x,y,0); x,y \in \mathbb{R}\}$$

ou seja, $\pi_{XY} : z = 0$

$$\pi_{XZ} = \{(x,0,z); x,z \in \mathbb{R}\}$$

ou seja, $\pi_{XZ} : y = 0$

$$\pi_{YZ} = \{(0,y,z); y,z \in \mathbb{R}\}$$

ou seja, $\pi_{YZ} : x = 0$

Um sistema de coordenadas cartesianas no espaço ε permite descrever todos os subconjuntos do espaço por meio das coordenadas de seus pontos.

2 Matrizes

Aparecem na resolução de problemas, pois ordenam e simplificam dados, fornecendo métodos de resolução.

Exemplo: Uma indústria de roupas necessita das seguintes matéria prima: golas, malha, ribana, botão e linha ou estampa, bordado e corte.

O primeiro padrão de produção é o seguinte:

	Camisa	Polo	Camiseta	Regata
Linha	1	1	1	1
Golas	1	1	0	0
Malha	3	2	2	1
Ribana	0	0	1	1
Botão	10	2	0	0

Um segundo padrão de produção é o seguinte

	Camisa	Polo	Camiseta	Regata
Estampa	0	1	2	1
Bordado	1	1	1	0
Corte	5	5	4	3

Reescrevendo em forma matricial:

O padrão 1 é o seguinte: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 10 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

O padrão 2 é o seguinte: $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

Definição 2.1 (Matriz) *Uma matriz é um conjunto de elementos dispostos em m linhas e n colunas:*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

2.1 Tipos de Matrizes

Considere uma matriz com m linhas e n colunas, denotada por $A_{m\times n}$.

2.1.1 Matriz Quadrada

É quando $m = n$ e então dizemos que A é de ordem m.

Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & 32 \\ 5 & 8 & 0 \\ 6 & 12 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 9 \end{bmatrix}$$

2.1.2 Matriz Nula

Todos os elementos são nulos, ou seja, $a_{ij} = 0$.

Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

2.1.3 Matriz Coluna

Ocorre quando $n = 1$ e m é qualquer.

Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \\ 9 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 24 \\ 43 \end{bmatrix}$$

2.1.4 Matriz Linha

Ocorre quando $m = 1$ e n é qualquer.

Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 0 & 12 & 4 & 32 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 24 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

2.1.5 Matriz Diagonal

É no caso quando:

- $m = n$;
- $a_{ij} = 0$ para todo $i \neq j$

Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 32 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$

2.1.6 Matriz Identidade

Ocorre no caso:

- $m = n$;
- $a_{ij} = 0$ para todo $i \neq j$;
- $a_{ii} = 1$

Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.1.7 Matriz Triangular Superior

É a seguinte:

- $m = n$;
- $a_{ij} = 0$ para todo $i > j$;

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 23 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

2.1.8 Matriz Triangular Inferior

É a seguinte:

- $m = n$;
- $a_{ij} = 0$ para todo $i < j$;

$$\begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 21 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 0 \\ 67 & -9 & 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 21 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 0 \\ 5 & 2 & -6 \end{bmatrix}$$

2.1.9 Matriz Simétrica

É a seguinte:

- $m = n$;
- $a_{ij} = a_{ji}$

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & e & f & g \\ c & f & h & i \\ d & g & i & k \end{bmatrix}$$

2.2 Operações com Matrizes

2.2.1 Adição de Matrizes

Duas matrizes de mesma ordem $A_{m\times n}$ e $B_{m\times n}$, podem ser somadas, operando os elementos correspondentes:

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}$$

Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & 2 & 7 \\ 3 & 10 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 12 \\ 2 & -5 & -3 \\ 6 & 2 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 16 \\ -1 & -3 & 4 \\ 9 & 12 & 3 \end{bmatrix}$$

Propriedades da Adição

Sejam A,B e C matrizes de ordem $m \times n$.

1. Comutativa
   $A + B = B + A$

2. Associativa
   $(A + B) + C = A + (B + C)$

3. Elemento Neutro
   $A + 0 = A$, onde 0 é a matriz nula de ordem $m \times n$
   Obs. $A + (-A) = 0$ onde $-A$ é a matriz oposta

Demonstrações - Exercícios

2.2.2 Multiplicação por Escalar

Sejam $A_{m\times n}$ e $k \in \mathbb{R}$, definimos $k \cdot A = [k \cdot a_{ij}]_{m\times n}$

Exemplo:

$$2 \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 & 16 \\ -1 & -3 & 4 \\ 9 & 12 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 32 \\ -2 & -6 & 8 \\ 18 & 24 & 6 \end{bmatrix}$$

Propriedades: Dadas as matrizes A e B de ordem $m \times n$ e números k, k_1 e $k_2 \in \mathbb{R}$, são válidas:

1. Distributiva
   $k(A + B) = kA + kB$

2. Distributiva
   $(k_1 + k_2)A = k_1A + k_2A$

3. $0 \cdot A = 0_{m\times n}$, onde $0 \in \mathbb{R}$

4. Associativa
   $k_1(k_2A) = (k_1k_2)A$

Demonstrações - Exercícios

2.2.3 Multiplicação de Matrizes

Sejam $A_{m\times n}$ e $B_{n\times p}$, definimos $A \cdot B = C_{m\times p}$ onde:

$A = [a_{ij}]_{m\times n}$

$B = [b_{rs}]_{n\times p}$

$C = [c_{uv}]_{m\times p}$

e $c_{uv} = \sum_{k=1}^{n} a_{vk} \cdot b_{kv} + \cdots + a_{vn} \cdot b_{nv}$

Exemplo: $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$

Propriedades: Sejam A, B e C matrizes com as ordens compatíveis para a realização da multiplicação entre sí, são válidas:

1. $AI = IA = A$, onde I é a matriz identidade

2. $A(B + C) = AB + AC$

3. $(A + B)C = AC + BC$

4. $(AB)C = A(BC)$

5. $0 \cdot A = A \cdot 0 = 0$

6. $(AB)^t = B^t \cdot A^t$

Obs. Em geral não é valida a comutativa: $AB \neq BA$.

Demonstrações - Exercícios

2.2.4 Transposição

Dada $A_{m\times n}$, podemos obter $A^t_{n\times m}$ cujas linhas de A^t são as colunas de A. A^t é chamada de matriz transposta.

Exemplo:

$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ e $A^t = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 7 \end{bmatrix}$

Propriedades:

1. A matriz A é simétrica $\Leftrightarrow A = A^t$

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & e & f & g \\ c & f & h & i \\ d & g & i & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & e & f & g \\ c & f & h & i \\ d & g & i & k \end{bmatrix}$$

2. $(A^t)^t = A$

2.3 Determinante de uma Matriz

É uma função matricial que associa cada matriz quadrada a um escalar. É de grande importância para definir se uma matriz é inversível ou não.

Inicialmente tomemos algumas definições preliminares.

Definição 2.2 *Seja I_n o conjunto dos n primeiros números naturais. Exemplo: $I_3 = \{1, 2, 3\}$, uma permutação em I_n é uma função bijetora $P : I_n \to I_n$.*

Por I_n ser finito, P é bijetora se, e somente se, P é injetora.

Exemplo: Seja I_3, apresente as permutações de I_3.

Para I_3 temos 3! funções bijetoras definidas sobre I_3, que são:

$$P(1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad P(3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad P(5) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P(2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad P(4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad P(6) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

No caso das linhas serem iguais, denomina-se como *permutação identidade*, como no caso de $P(1)$.

Definição 2.3 (Permutações par e ímpar) *Uma permutação é definida como par, quando o número de trocas para transformá-la na permutação identidade é um número par, analogamente, uma permutação será definida como ímpar, quando o número de trocas para transformá-la na permutação identidade é um número ímpar. Só pode-se efetuar troca de dois números por vez de lugar.*

Exemplo: A permutação $P(2)$ necessita apenas de uma troca para obter a permutação identidade, sendo assim, uma permutação ímpar.

Já a permutação $P(5)$ necessita de duas trocas, sendo uma permutação par.

Definição 2.4 (Sinal da Permutação) *O sinal de uma permutação é definido por $sinal(P) = +1$ se P é par e $sinal(P) = -1$ se P é ímpar.*

Exemplo: As permutações $P(1), P(5)$ e $P(6)$ são permutações pares, enquanto as permutação $P(2), P(3)$ e $P(4)$ são ímpares.

Definição 2.5 (Determinante de uma Matriz) *Seja $\mathbb{M}(\mathbb{K})$ o espaço vetorial de todas as matrizes quadradas de ordem n tendo escalares em um corpo $\mathbb{K}$ e P_n o conjunto de todas as permutações de elementos de $I_n = 1, 2, 3, \ldots, n$.*

Define-se a função determinante: $\det : \mathbb{M}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ *que associa cada matriz $A \in \mathbb{M}(\mathbb{K})$, o escalar denotado por* $\det(A)$*, definido por:*

$$\det(A) = \sum_{P \in P_n} sinal(P) a_{1P(1)} a_{2P(2)} a_{3P(3)} \ldots a_{nP(n)}$$

A soma acima deve ser realizada para todas as permutações P que pertencem ao conjunto P_n.

Exemplo: Considere uma matriz 3×3:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Utilizando as permutações de I_3

$$P(1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad P(3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad P(5) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P(2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad P(4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad P(6) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Temos que:

$P_1(1) = 1$	$P_1(2) = 2$	$P_1(3) = 3$
$P_2(1) = 1$	$P_2(2) = 3$	$P_2(3) = 2$
$P_3(1) = 3$	$P_3(2) = 2$	$P_3(3) = 1$
$P_4(1) = 2$	$P_4(2) = 1$	$P_4(3) = 3$
$P_5(1) = 3$	$P_5(2) = 1$	$P_5(3) = 2$
$P_6(1) = 2$	$P_6(2) = 3$	$P_6(3) = 1$
$sinal(P_1) = 1$	$sinal(P_2) = -1$	$sinal(P_3) = -1$
$sinal(P_4) = -1$	$sinal(P_5) = 1$	$sinal(P_6) = 1$

Assim:

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \sum_{P \in P_3} sinal(P) a_{1P(1)} a_{2P(2)} a_{3P(3)} \\
&= sinal(P_1) a_{1P1(1)} a_{2P1(2)} a_{3P1(3)} \\
&+ sinal(P_2) a_{1P2(1)} a_{2P2(2)} a_{3P2(3)} \\
&+ sinal(P_3) a_{1P3(1)} a_{2P3(2)} a_{3P3(3)} \\
&+ sinal(P_4) a_{1P4(1)} a_{2P4(2)} a_{3P4(3)} \\
&+ sinal(P_5) a_{1P5(1)} a_{2P5(2)} a_{3P5(3)} \\
&+ sinal(P_6) a_{1P6(1)} a_{2P6(2)} a_{3P6(3)} \\
&= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33}
\end{aligned}$$

Que é a forma conhecida.
Propriedades: Segue algumas propriedades de determinantes.

1. Se todos os elementos de uma linha (ou coluna) de A são nulos, então $\det(A) = 0$.
   Já que em cada termo do cálculo do determinante há um dos elementos da linha (ou colunas) nula.

2. $\det(A) = \det(A^t)$
   Se $A = [a_{ij}]$ e $A^t = [a_{ji}]$ as propriedades válidas para as linhas, são válidas para as colunas.

3. Se multiplicarmos uma linha de A por uma constante, $\det(A)$ é multiplicado pela constante.
   Seja a matriz original e B a matriz obtida de A multiplicando uma linha de A por k. No $\det(B)$, em cada termo, aparece um elemento dessa linha, podemos colocar k em evidência e obter $\det(B) = k \cdot \det(A)$.

4. Ao permutar duas linhas da matriz, o determinante troca de sinal, pois alteramos a paridade do número de inversões dos índices.

5. Se A tem duas linhas (ou colunas) iguais, seu determinante é nulo, isto é $\det(A) = 0$.
   Se trocarmos as linhas iguais o determinante é o mesmo, já que pela propriedade 4, o determinante só pode ser 0.

6. $\det(A \cdot B) - \det(A) \cdot \det(B)$

2.3.1 Desenvolvimento de Laplace

O objetivo do Desenvolvimento de Laplace é realizar o cálculo de determinantes de matrizes de ordem n, no caso $\det(A)_{n\times m}$.

Anteriormente já mostramos que se A possui ordem 3, então seu determinante é:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Pode-se escrever como:

$$a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

Ou ainda:

$$a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Então $\det(A)_{3\times 3}$ pode ser expresso em função dos determinantes das submatrizes 2×2.

$$\det A = a_{11}|A_{11}| - a_{12}|A_{12}| + a_{13}|A_{13}|$$

onde A_{ij} é a submatriz onde a $i - esima$ linha e a $j - esima$ coluna da matriz original foram retiradas.

Se $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ij}|$, obtemos: $\det(A) = a_{11}\Delta_{11} + a_{12}\Delta_{12} + a_{13}\Delta_{13}$.

Generalizando,

$$\det(A) = a_{ij}\Delta_{ij} + \cdots + a_{in}\Delta_{in}$$

Exemplo: Calcule o determinante das matrizes abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -5 & 2 & -3 & 0 \\ -8 & 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

2.3.2 Matriz dos Cofatores e Matriz Adjunta

Dada a matriz A, chamamos de *cofator* o elemento Δ_{ij} definido anteriormente.

Calculando Δ_{ij} para todos elementos a_{ij} de A, temos a *matriz de cofatores.* Notação $\overline{A}$.

Exemplo: Calcule a matriz de cofatores de A.

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 5 \end{bmatrix}$

Já a **Matriz Adjunta** de A é a transposta da matriz dos cofatores.

A adjunta da matriz do exemplo anterior é a seguinte:

$A = \begin{bmatrix} -19 & -5 & 4 \\ 19 & 10 & -8 \\ -19 & -11 & 5 \end{bmatrix}$

Ao efetuarmos $A \cdot Adj(A)$ temos:

$$\begin{bmatrix} -19 & 0 & 0 \\ 0 & -19 & 0 \\ 0 & 0 & -19 \end{bmatrix} = -19 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = -19 \cdot Id_3$$

Obs.$\det(A) = -19$

Teorema 2.1 $A \cdot Adj(A) = \det(A) \cdot Id_n$

2.4 Matriz Inversa

Definição 2.6 (Matriz Inversa) *Dada a matriz quadrada A de ordem n, chamamos de inversa de A uma matriz A^{-1} tal que:*

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$$

Exemplo: Determine a inversa da matriz A:

$A = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 11 & 4 \end{bmatrix}$

.

Obs.:

1. Se A e B são matrizes quadradas inversíveis então:

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

2. A inversa de A é única.

3. Nem toda matriz A tem inversa, pois o sistema pode não ter solução.
   Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Demonstração 1 (Propriedade 1)

Demonstração 2 (Propriedade 2)

Demonstração 3 (Propriedade 3)

Concluímos que para que exista a inversa A^{-1}, $\det(A) \neq 0$

Teorema 2.2 *Se A pode ser reduzida à Id por uma sequência de operações elementares, então A^{-1} é obtida a partir de Id pela mesma sequência de operações elementares.*

São operações elementares:

- *Permutar linhas;*

- *Multiplicar uma linha por $k \in \mathbb{R}$, sendo $k \neq 0$;*

- *Somar linhas multiplicadas por k*

Exemplo 01: Determine A^{-1}:
$A = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 11 & 4 \end{bmatrix}$

Exemplo 02: Determine B^{-1}:
$B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

3 Sistemas de Equações Lineares

3.1 Conceito de Equações Lineares e Sistema de Equações Lineares

3.1.1 Equações Lineares

Para que uma equação seja considerada linear deverá ser escrita da seguinte forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b$$

Onde os elementos $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ são os coeficientes da equação, enquanto $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ são as incógnitas da equação e o termo b é chamado de termo independente.

O valor de b é qualquer valor real, quando $b = 0$ dizemos que é uma equação linear homogênea.

A solução dessa equação será dada por um conjunto que ao ser substituído, transforme a equação $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b$ em verdade.

Exemplo 01: Dado o conjunto solução $S = (0, 1, 2)$ e a equação linear $-2x_1+x_2+5x_3 = 11$. Verifique que S é solução da equação dada.

3.1.2 Sistemas Lineares

Quando temos um conjunto de equações lineares, dizemos que temos um sistema de equações lineares, ou apenas *sistema linear*.

Definição 3.1 (Sistema Linear) *Um sistema de equações lineares com m equações e n incógnitas é um conjunto do tipo:*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{1}$$

com a_{ij} onde $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$.

A solução é uma *n-upla* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ que satisfaz as equações simultaneamente.

OBS: Dois sistemas são equivalentes se, e somente se, toda solução de um é também solução de outro.

Podemos escrever o sistema (1) através de matrizes, em sua *forma matricial*.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

ou ainda $A \cdot X = B$

Onde:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

é a matriz dos coeficientes,

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

é a matriz das incógnitas e

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

é a matriz dos termos independentes.

Uma outra matriz que pode ser associada ao sistema é a *matriz ampliada* do sistema, definida como segue:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix}$$

Onde cada linha é uma representação abreviada da equação correspondente do sistema.

Exemplo 02: Considere o seguinte sistema linear.

$$\begin{cases} 2x + y + z = 8 \\ x + y + 4z = 15 \\ 3y + 2z = 9 \end{cases}$$

Escreva as matrizes dos coeficientes, das incógnitas, dos termos independentes e a matriz ampliada.

Verifique se $(2, 1, 3)$ é solução desse sistema.

3.1.3 Operações Elementares

São três operações elementares sobre as linhas de uma matriz.

1. Permuta das *i-ésima* e *j-ésima* linha. $(L_i \leftrightarrow L_j)$
   Exemplo: $L_2 \leftrightarrow L_3$

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

2. Multiplicação da *i-ésima* linha por um escalar não nulo k. $(L_i \rightarrow kL_i)$
   Exemplo: $L_2 \rightarrow 2L_2$

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 2 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

3. Substituição da *i-ésima* linha mais k vezes a $j - sima$ linha. $(L_i \rightarrow L_i + kL_j)$
   Exemplo: $L_2 \rightarrow L_2 + 2L_1$

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 5 & -6 & 17 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Se A e B são matrizes $m \times n$, dizemos que B é linha equivalente a A, se B for obtida de A através de um número finito de operações elementares sobre as linhas de A. Notação: $A \rightarrow B$ ou $A \sim B$

Teorema 3.1 *Dois sistemas que possuem matrizes ampliadas equivalentes são equivalentes.*

Definição 3.2 *Um sistema de equações lineares pode ser classificado em relação ao número de soluções.*

1. *Um sistema de equações lineares é incompatível (ou sistema impossível - S.I), se não admite nenhuma solução.*

2. *Um sistema de equações lineares que admite uma única solução é definido como compatível determinado (ou sistema possível determinado - S.P.D).*

3. *Se um sistema de equações lineares tem mais de uma solução (ou infinitas soluções) ele recebe o nome de compatível indeterminado (ou sistema possível indeterminado - S.P.I)*

Discutir um sistema de equações lineares S significa efetuar um estudo visando classificá-lo de acordo com as definições anteriores.

Solucionar um sistema de equações lineares, significa apresentar todas as soluções.

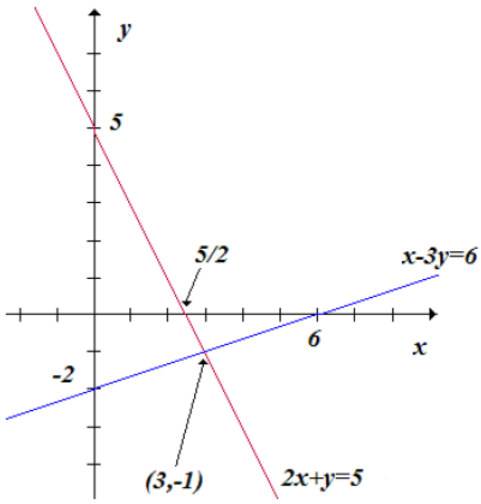

Figura 1: Solução do sistema do Exemplo 01

3.1.4 Interpretação Geométrica de Sistemas de Equações Lineares

A solução de um sistema de equação linear pode ser analisada geometricamente.

Exemplo 01: Analise o seguinte sistema de equação linear.

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - 3y = 6 \end{cases}$$

A solução do sistema é $x = 3$ e $y = -1$

Como o sistema tem solução única, esta é representada pela intersecção das retas cujas equações gerais são: $2x + y = 5$ e $x - 3y = 6$

Exemplo 02: Analise o seguinte sistema de equação linear.

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 6x + 3y = 15 \end{cases}$$

A solução do sistema é $x = -\frac{1}{2}y + \frac{5}{2}$ e $y = \lambda \in \mathbb{R}$.

Como o sistema tem infinitas soluções, estas são representadas pela intersecção das retas cujas equações gerais são: $2x + y = 5$ e $6x + 3y = 15$ (retas coincidentes).

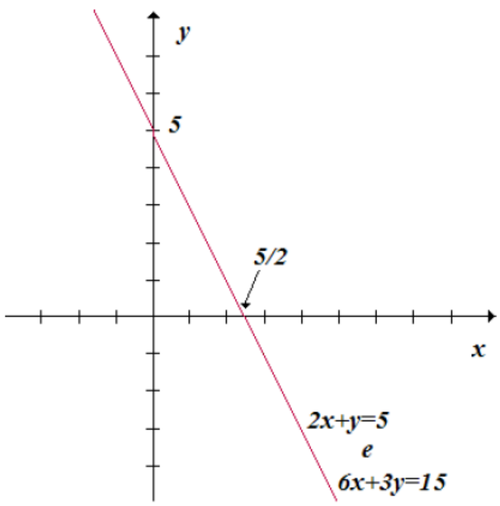

Figura 2: Solução do sistema do Exemplo 02

Exemplo 03: Analise o seguinte sistema de equação linear.

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 6x + 3y = 10 \end{cases}$$

O sistema não tem solução. De fato, as retas cujas equações gerais são: $2x + y = 5$ e $6x + 3y = 10$ são paralelas (não coincidentes).

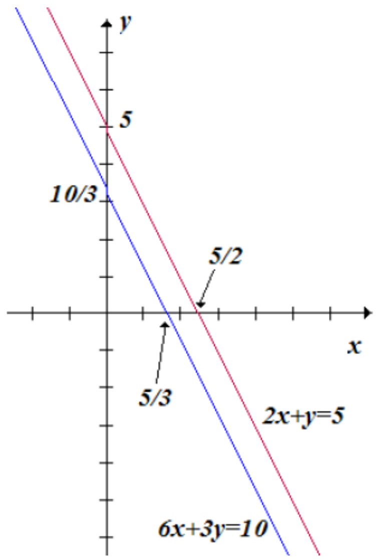

Figura 3: Solução do sistema do Exemplo 03

No caso de sistemas lineares com mais de duas incógnitas as equações representam planos e outras figuras geométricas. A solução existirá na interseção destes planos.

Considere o seguinte sistema de equações lineares com três incógnitas.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

cada equação representa um plano no espaço tridimensional. Desta forma os planos π_1, π_2 e π_3 são os planos definidos pelas equações do sistema. Assim, as soluções do referido sistema pertencem à interseção destes planos, isto é, $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$.

Se pelo menos dois desses planos são paralelos, ou se dois deles intersectam o terceiro segundo retas paralelas, a interseção $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$ é vazia e o sistema é impossível.

Se os três planos se intersectam em uma reta r, isto é, se $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = r$, o sistema é indeterminado e qualquer ponto da reta r é uma solução do sistema.

O sistema é determinado (solução única), quando os três planos se encontram em um único ponto.

Existem ao todo, oito posições relativas possíveis para os planos π_1, π_2 e π_3. Quatro dessas posições correspondem aos sistemas impossíveis e nas outras quatro, o sistema tem solução.

Caso 1: Os três planos coincidem. Neste caso o sistema é indeterminado e qualquer ponto dos planos é uma solução do sistema.

Exemplo:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x + 4y - 2z = 6 \\ 3x + 6y - 3z = 9 \end{cases}$$

Caso 2: Dois planos coincidem e o terceiro é paralelo a eles. Neste caso o sistema é impossível.

Exemplo:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x + 4y - 2z = 6 \\ 3x + 6y - 3z = 8 \end{cases}$$

Caso 3: Dois dos planos coincidem e o terceiro os intersecta segundo uma reta r. Neste caso o sistema é indeterminado e qualquer ponto da reta r é uma solução do sistema.

Exemplo:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x + 4y - 2z = 6 \\ 3x + 6y + z = 9 \end{cases}$$

Caso 4: Os três planos são paralelos dois a dois. Neste caso o sistema é impossível.

Exemplo:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x + 4y - 2z = 4 \\ 3x + 6y - 3z = 5 \end{cases}$$

Caso 5: Os planos π_1 e π_2 são paralelos e o plano π_3 os intersecta segundo duas retas paralelas. Neste caso o sistema é impossível.

Exemplo:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x + 4y - 2z = 4 \\ x + 2y + z = 9 \end{cases}$$

Caso 6: Os três planos são distintos e tem uma reta r em comum, isto é $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = r$. Neste caso o sistema é indeterminado e qualquer ponto da reta r é uma solução do sistema.

Exemplo:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y + z = 3 \\ 5x + 2y + 4z = 6 \end{cases}$$

Caso 7: Os três planos se intersectam, dois a dois, segundo retas $r = \pi_1 \cap \pi_2$, $s = \pi_1 \cap \pi_3$ e $t = \pi_2 \cap \pi_3$, paralelas umas às outras. Neste caso o sistema é impossível.

Exemplo:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ 3x + y + z = 2 \\ 8x + y + 6z = 6 \end{cases}$$

Caso 8: Os três planos se intersectam em apenas um ponto. Neste caso, o sistema é possível e determinado (solução única).

Exemplo:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + y + z = 2 \\ 3x - y + 2z = 1 \end{cases}$$

Definição 3.3 (Forma Escada) *Uma matriz $m \times n$ é reduzida à forma escada se:*

1. *O primeiro elemento não nulo de uma linha não nula é* 1*;*

2. *Cada coluna que contém o primeiro elemento não nulo de alguma linha tem todos os seus outros elementos iguais a zero;*

3. *Toda linha nula ocorre abaixo de todas as linhas não nulas (isto é, daquelas que possuem pelo menos um elemento não nulo);*

4. *Se as linhas $1, \ldots, r$ são as linhas não nulas, e se o primeiro elemento não nulo da linha i ocorre na coluna k_i, então $k_1 < k_2 < \cdots < k_r$*

Essa ultima condição impõe a forma escada à matriz. Ou seja, o número de elementos precedendo o primeiro elemento não nulo de uma linha aumentada a cada linha, até que sobrem somente linhas nulas, se houver.

Teorema 3.2 *Toda matriz $A_{m\times n}$ é linha equivalente a uma única matriz linha reduzida à forma escada.*

Definição 3.4 (Posto e Nulidade) *Dada uma matriz $A_{m\times n}$, seja $B_{m\times n}$ a matriz-linha reduzida à forma escada linha equivalente a A. O posto de A, denotado por p, é o número de linhas não nulas de B. A nulidade de A é o número $n - p$.*

Dada uma matriz A qualquer, para determinar seu posto é necessário encontrar sua matriz-linha reduzida à forma escada, e depois contar suas linhas não nulas. Este número é o posto de A. A nulidade é a diferença entre as colunas de A e o posto.

Teorema 3.3

1. *Um sistema de m equações e n incógnitas admite solução se, e somente se, o posto da matriz ampliada é igual ao posto da matriz dos coeficientes.*

2. *Se as duas matrizes têm o mesmo posto p e $p = n$, a solução será única.*

3. *Se as duas matrizes têm o mesmo posto p e $p < n$, podemos escolher $n - p$ incógnitas, e as outras p incógnitas serão dadas em função destas.*

3.1.5 Sistema de Equações Lineares Homogêneos

Um sistema linear é homogêneo se os termos independentes são todos nulos, isto é, um sistema da forma $AX = 0$. Neste caso, há sempre a solução nula $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (0, 0, \ldots, 0)$. Resta ver se tem somente a solução nula (sistema homogêneo determinado) ou se existem outras soluções (sistema homogêneo indeterminado).

Matricialmente, a última coluna da matriz ampliada sendo nula, as operações elementares sobre linhas não modifica essa situação, e por isso, muitas vezes esta coluna é omitida por economia.

Uma relação interessante entre um sistema não homogêneo $AX = B$ e o sistema homogêneo associado $AX = 0$, é que se X_0 é uma solução particular do sistema não homogêneo, isto é, $AX_0 = B$, as outras soluções podem ser escritas na forma $X = X_0 + X_1$, onde X_1 é uma solução do sistema homogêneo.

3.1.6 Resolução de Sistemas de Equações Lineares

Método de Escalonamento

Definição 3.5 *Diz-se que uma matriz é escalonada quando o primeiro elemento não-nulo de cada uma das suas linhas situa-se à esquerda do primeiro elemento não-nulo da linha seguinte. Além disso, as linhas que tiverem todos os seus elementos iguais a zero devem estar abaixo das demais.*

Definição 3.6 *Diz-se que um sistema de equações lineares é um sistema escalonado, quando a matriz aumentada associada a este sistema é uma matriz escalonada. O Método do Escalonamento para resolver ou discutir um sistema de equações lineares S consiste em se obter um sistema de equações lineares escalonado equivalente a S (equivalente no sentido de possuir as mesmas soluções que este).*

Partindo do sistema S pode-se chegar a este sistema escalonado equivalente por meio das operações elementares.

Desta forma, se um sistema de equações foi escalonado e, retiradas as equações do tipo $0 = 0$, então restam p equações com n incógnitas.

Se a última equação restante é da forma: $0.x_1 + 0.x_2 + \cdots + 0.x_{n-1} + 0.x_n = b_p$ onde $b_p \neq 0$, então o sistema de equações é impossível – S.I. (não admite soluções)

Caso contrário sobram duas opções:

1. Se $p = n$ o sistema é possível determinado - S.P.D. (admite solução única).
2. Se $p < n$, então o sistema é possível indeterminado - S.P.I. (admite infinitas soluções).

OBS. Para se escalonar um sistema S é mais prático efetuar o escalonamento da matriz aumentada associada ao sistema. Uma vez concluído o escalonamento dessa matriz aumentada, associamos a ela o novo sistema que é equivalente ao sistema original S.

Exemplos

Método de Cramer

O método de Cramer se aplica para sistemas de equações lineares onde a matriz dos coeficientes das incógnitas é quadrada.

Define-se por D o determinante da matriz dos coeficientes A, isto é, $A = \det(A)$ e D_i ao determinante da matriz obtida de A, substituindo a *i-ésima* coluna pela coluna dos termos independentes.

Assim, se $D \neq 0$, então $x_i = \frac{D_i}{D}$. A solução será única, pois $\exists A^{-1}$ e

$$\begin{aligned}
A.X &= B \\
A^{-1}(A.X) &= A^{-1}.B \\
(A^{-1}.A)X &= A^{-1}.B \\
I.X &= A^{-1}.B \\
X &= A^{-1}.B
\end{aligned}$$

OBS 1: Se $D = D_1 = D_2 = \cdots = D_n = 0$ o sistema **não** é necessariamente S.P.I. Utilizar o método de Cramer apenas quando $D \neq 0$.

OBS 2: Embora o método de Cramer apresente de forma explícita a solução do sistema de equações lineares, ele não é muito utilizado para cálculos numéricos. Isto ocorre porque o número de operações que é envolvida é muito grande quando trabalhado com muitas equações.

Exemplos

3.1.7 Sistemas Lineares - Aplicações

4 Vetores

Definição 4.1 (Vetores) *São grandezas que informam a direção, módulo e o sentido.*

Definição 4.2 (Segmento Orientado) *É um par ordenado (A, B) de pontos no espaço. A é a* origem *e B é a* extremidade *do segmento orientado (A, B). Um segmento orientado do tipo (A, A) é chamado* segmento orientado nulo.

Definição 4.3 1. *Os segmentos orientados (A, B) e (C, D) são* de mesmo comprimento *se os segmentos geométricos AB e CD têm comprimentos iguais.*

2. *Se os segmentos orientados (A, B) e (C, D) não são nulos, eles são* de mesma direção *ou* paralelos, *se os segmentos geométricos AB e CD são paralelos (isto inclui o caso em que AB e CD são colineares).*

3. *Suponha (A, B) e (C, D) sejam paralelos:*

   - *No caso em que as retas AB e CD são distintas, os segmentos orientados (A, B) e (C, D) são* de mesmo sentido *se os segmentos geométricos tem interseção vazia. Se não, (A, B) e (C, D) são de sentido contrário*
   - *No caso em que as retas AB e CD coincidem, tomemos (E, F) tal que E não pertença à reta AB, e (E, F) e (A, B) sejam do mesmo sentido, de acordo com o critério anterior. Então, os segmentos orientados (A, B) e (C, D) são* de mesmo sentido *se (E, F) e (C, D) são de mesmo sentido. Se não, (A, B) e (C, D) são* de sentido contrários.

Definição 4.4 *Os segmentos orientados (A, B) e (C, D) são* equipolentes *se forem ambos nulos, ou então, no caso de nenhum deles nulos, possuírem mesma direção, mesmo comprimento e mesmo sentido. Notação: Equipolência entre (A, B) e (C, D) por $(A, B) \sim (C, D)$*

Definição 4.5 *Dado o segmento orientado (A, B), a* classe de equipolência *de (A, B) é o conjunto de todos os segmentos orientados equipolentes a (A, B). O segmento orientado (A, B) é chamado* representante *da classe.*

Definição 4.6 (Vetor (formalmente)) *É uma classe de equipolência de segmentos orientados. Se (A, B) é um segmento orientado, o vetor que tem (A, B) como representante será representado por $\overrightarrow{AB}$. Quando não se quer destacar um representante em especial, usamos letras minúsculas com uma seta ($\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{b}$, ...). O conjunto de todos os vetores será indicado por $\mathbb{V}$.*

Proposição 4.1 1. *É dado um vetor $\overrightarrow{u}$ qualquer. Escolhido arbitrariamente um ponto P, existe um segmento orientado representante de $\overrightarrow{u}$ com origem P, isto é, existe um ponto B tal que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{PB}$*

2. *Tal representante (e, portanto, o ponto B) é único, isto é, se $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PB} \Rightarrow A = B$*

Definição 4.7 (Vetor Nulo) *É o vetor que tem como representante um segmento orientado nulo. É indicado por $\overrightarrow{0}$.*

Definição 4.8 (Vetor Oposto) *Se (A, B) é representante de um vetor $\overrightarrow{u}$ o* vetor oposto *de $\overrightarrow{u}$, indicado por $-\overrightarrow{u}$, é o vetor que tem (B, A) como representante. Portanto:*

$$-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$$

Definição 4.9 1. *Os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são* paralelos *se um representante de $\overrightarrow{u}$ é paralelo a um representante de $\overrightarrow{v}$ (neste caso, qualquer representante de um vetor é paralelo a qualquer representante do outro vetor).* **Notação:** $\overrightarrow{u}//\overrightarrow{v}$

2. *Os vetores não nulos e paralelos $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são* de mesmo sentido *se um representante de $\overrightarrow{u}$ e um de $\overrightarrow{v}$ possuem o mesmo sentido.*

3. *Analogamente para o caso de* sentidos opostos.

4. *O vetor nulo é paralelo a qualquer vetor.*

Proposição 4.2 1. *Se $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são de mesmo sentido e o mesmo acontece para $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$, então $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{w}$ são de mesmo sentido.*

2. *Se $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são de sentido contrário e o mesmo acontece para $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$, então $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{w}$ são de mesmo sentido.*

3. *Se $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são de mesmo sentido e $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ de sentido contrário, então $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{w}$ são de sentido contrário.*

Definição 4.10 (Norma) *É o comprimento de qualquer um de seus representantes. A norma do vetor $\overrightarrow{u}$ é indicada por $||\overrightarrow{u}||$. Um vetor é* unitário *se sua norma é* 1.

Proposição 4.3 *Sejam $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ vetores não-nulos. Então $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$ se, e somente se, $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ tem normais iguais, são de mesma direção e de mesmo sentido.*

5 Espaços Vetoriais

Definição 5.1 (Espaço Vetorial) *Um espaço vetorial real é um conjunto V, não vazio, com duas operações:*

1. **Soma:** $V \times V \to V$;
2. **Multiplicação por Escalar:** $\mathbb{K} \times V \to V$

tais que, para quaisquer u, v e $w \in V$ e a e $b \in \mathbb{K}$, as seguintes propriedades são validas:

1. $(u + v) + w = u + (v + w)$;
2. $u + v = v + u$;
3. $\exists 0 \in V; u + 0 = u$ *(0 é chamado vetor nulo)*;
4. $\exists - u \in V; u + (-u) = 0$;
5. $a(u + v) = au + av$;
6. $(a + b)v = av + bv$;
7. $(ab)v = a(bv)$;
8. $1u = u$.

Exemplo 01: O conjunto dos vetores do espaço.

$$V = \mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3); x_i \in \mathbb{R}\}$$

é um espaço vetorial real.

Exemplo 02: O conjunto dos vetores $n - uplas$ de números reais.

$$V = \mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n); x_i \in \mathbb{R}\}$$

Mostrando que realmente é um espaço vetorial.

Exemplo 03: O conjunto das matrizes reais $m \times n$ com a soma e produto por escalar usuais.

Exemplo 04: O conjunto dos polinômios com coeficientes reais, de grau menor ou igual a n (incluindo o zero).

Exemplo 05: O conjunto das matrizes 2×2, cujos elementos são números complexos.

5.1 Subespaços Vetoriais

As vezes, é necessário detectar, dentro de um espaço vetorial V, subconjuntos W que sejam eles próprios espaços vetoriais "menores". Tais conjuntos serão chamados de *subespaços* de V.

Exemplo 01: $V = \mathbb{R}^2$, o plano, onde W é uma reta deste plano, que passa pela origem.

Note que a reta W funciona sozinha como um espaço vetorial pois, ao somarmos dois vetores de W, obtemos outro vetor de W, igualmente se multiplicarmos um vetor de W por um escalar.

Em outras palavras, o conjunto W é "fechado" em relação à soma de vetores e a multiplicação por escalar.

Definição 5.2 (Subespaço Vetorial) *Dado um espaço vetorial V, um subconjunto W, não vazio, será um* subespaço vetorial *de V se:*

1. *Para quaisquer $u, v \in W$ tivermos $u + v \in W$;*

2. *Para quaisquer $a \in \mathbb{K}$, $u \in W$ tivermos $au \in W$*

OBS.

- As condições acima garantem que ao operarmos em W (soma e multiplicação por escalar) não obteremos um vetor fora de W. É suficiente para afirmar que W é um espaço vetorial, pois as operações estão bem definidas, e não é necessário verificar as condições de espaço vetorial, pois já são validas em V, que contém W.

- Qualquer subespaço W de V necessita conter o vetor nulo (devido a condição 2, no caso de $a = 0$).

- Todo espaço vetorial admite pelo menos dois subespaços (subespaços triviais), o conjunto formado somente pelo vetor nulo e o próprio espaço vetorial.

Exemplo 01: $V = \mathbb{R}^3$ e $W \subset V$, um plano passando pela origem.

Exemplo 02: $V = \mathbb{R}^5$ e $W = \{(0, x_2, x_3, x_4, x_5); x_i \in \mathbb{R}\}$

Mostrando que realmente é um subespaço vetorial.

Exemplo 03: $V = \mathbb{M}(n, m)$ e W é o subconjunto das matrizes triangulares superiores.

Exemplo 04: Uma situação importante em que aparece um subespaço é obtida ao resolvermos um sistema linear homogêneo. Por exemplo:

$$\begin{cases} 2x + 4y + z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \\ x + 3y - z = 0 \end{cases}$$

Mostrando que realmente é um subespaço vetorial.

Exemplo 05: O conjunto-solução de um sistema linear homogêneo de n incógnitas é um subespaço vetorial de $\mathbb{M}(n, 1)$.

Exemplos de conjuntos que não são subespaços vetoriais.

Exemplo 06: $V = \mathbb{R}^2$, onde W é uma reta deste plano que não passa pela origem.

Mostrando que W não é um subespaço vetorial.

Exemplo 07: $V = \mathbb{R}^2$ e $W = \{(x, x^2); x \in \mathbb{R}\}$.
Mostrando que W não é um subespaço vetorial.

Exemplo 08: $V = \mathbb{M}(n,n)$ e W é o subconjunto de todas as matrizes em que $a_{11} \leq 0$. Basta mostrar que a condição 2 não é satisfeita.

Teorema 5.1 (Interseção de subespaços) *Dados W_1 e W_2 subespaços de um espaço vetorial V, a interseção $W_1 \cap W_2$ ainda é um subespaço de V.*

Prova do Teorema.

Exemplo 01: $V = \mathbb{M}(n,n)$ e
$W_1 =$ matrizes triangulares superiores;
$W_2 =$ matrizes triangulares inferiores e então $W_1 \cap W_2 =$ matrizes diagonais.
O teorema não é valido para o caso da união de subespaços. Veja o próximo contra-exemplo.
Exemplo 01: $V = \mathbb{R}^3$ e W_1 e W_2 são retas que passam pela origem.
Mostrando que não é subespaço vetorial.

Teorema 5.2 (Soma de subespaços) *Sejam W_1 e W_2 subespaços de um espaço vetorial V. Então, o conjunto*

$$W_1 + W_2 = \{v \in V; v = w_1 + w_2, w_1 \in W_1 \text{ e } w_2 \in W_2\}$$

é subespaço de V.

Exemplo 01: O exemplo anterior, $W = W_1 + W_2$ é o plano que contém as duas retas.
Exemplo 02: Se $W_1 \subset \mathbb{R}^3$ é um plano e W_2 é uma reta contida neste plano, ambos passando pela origem, $W_1 + W_2 = W_1$.
Exemplo 03: $W_1 = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $W_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{bmatrix}$, onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Então $W_1 + W_2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \mathbb{M}(2,2)$

Quando $W_1 \cap W_2 = \{0\}$, então $W_1 + W_2$ é chamada *soma direta* de W_1 com W_2, denotada por $W_1 \oplus W_2$. O exemplo 03 é um exemplo de soma direta. O exemplo 01 das matrizes triangulares não é uma soma direta.

5.2 Combinação Linear

Definição 5.3 *Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial, $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ e $a_1, \ldots, a_n$ escalares. Então, o vetor:*

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n$$

é um elemento de V ao que chamamos combinação linear *de $v_1, \ldots, v_n$.*

Uma vez fixado os vetores $v_1, \dots, v_n$ em V, o conjunto W de todos os vetores de V que são combinações lineares destes, é um subespaço vetorial. **(MOSTRE)**.

W é chamado *subespaço gerado* por $v_1, \dots, v_n$ e usamos a notação

$$W = [v_1, \dots, v_n]$$

Formalmente,

$$W = [v_1, \dots, v_n] = \{v \in V; v = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n, a_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n\}$$

Outra definição é a seguinte: $W = [v_1, \dots, v_n]$ é o menor subespaço de V que contém o conjunto de vetores $\{v_1, \dots, v_n\}$, no sentido de que qualquer outro subespaço W' de V que contenha $\{v_1, \dots, v_n\}$ satisfará $W' \supset W$.

Exemplo 01: Se $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ são tais que $\alpha v_1 \neq v_2$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, então $[v_1, v_2]$ será o plano que passa pela origem e contém v_1 e v_2.

Exemplo 02: $V = \mathbb{R}^2$, $v_1 = (1,0), v_2 = (0,1)$. Logo $V = [v_1, v_2]$ pois, dado $v = (x,y) \in V$, temos $(x,y) = x(1,0) + y(0,1)$, ou seja, $v = xv_1 + yv_2$.

5.3 Dependência e Independência Linear

É de grande importância determinar se um vetor é ou não combinação linear de outros vetores.

Definição 5.4 *Sejam V um espaço vetorial e $v_1, \dots, v_n \in V$. Dizemos que o conjunto $\{v_1, \dots, v_n\}$ é* linearmente independente *(LI), ou que os vetores $v_1, \dots, v_n$ são LI, se a equação*

$$a_1v_1 + \cdots + a_nv_n = 0$$

implica que $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$. No caso em que exista algum $a_i \neq 0$ dizemos que $\{v_1, \dots, v_n\}$ é linearmente dependente *(LD), ou que os vetores $v_1, \dots, v_n$ são LD.*

Teorema 5.3 *$\{v_1, \dots, v_n\}$ é LD se, e somente se um destes vetores for uma combinação linear dos outros.*

Equivalentemente, um conjunto de vetores é LI se, e somente se nenhum deles for uma combinação linear dos outros.

Exemplo 01: De modo análogo, vemos que para $V = \mathbb{R}^3$, $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0)$ e $e_3 = (0,0,1)$. Então e_1, e_2, e_3 são LI.

5.4 Base de um Espaço Vetorial

Estamos interessados em encontrar, dentro de um espaço vetorial V, um conjunto finito de vetores, tais que qualquer outro vetor de V seja uma combinação linear deles. Ou seja, queremos determinar um conjunto de vetores que gere V e tal que todos os elementos sejam realmente necessários para geral V. Denominaremos tal conjunto por *base.*

Definição 5.5 *Um conjunto $\{v_1, \dots, v_n\}$ de vetores de V será uma* base *de V se:*

- *$\{v_1, \dots, v_n\}$ é LI;*
- *$[v_1, \dots, v_n] = V$*

Exemplo 01: $V = \mathbb{R}^n$, $e_1 = (1, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, 0, \ldots, 1)$ é base de V, conhecida como *base canônica* de $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 02: O conjunto $\{(1,1),(0,1)\}$ também é uma base de $V = \mathbb{R}^2$.

Mostrando que é base.

Exemplo 03: $V = \mathbb{M}(2,2)$ e $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ é uma base de V.

Teorema 5.4 *Sejam $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vetores não nulos que geram um espaço vetorial V. Então, dentre estes vetores podemos extrair uma base de V.*

Teorema 5.5 *Seja um espaço vetorial V gerado por um conjunto finito de vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Então, qualquer conjunto com mais de n vetores é necessariamente LD (e, portanto, qualquer conjunto LI tem no máximo n vetores).*

Corolário 5.1 *Qualquer base de um espaço vetorial tem sempre o mesmo número de elementos. Este número é chamado* dimensão de V, *e denotado* $\dim V$.

Exemplos: Analisar os exemplos anteriores para determinar a $\dim V$.

OBS. Quando um espaço vetorial V admite uma base finita, dizemos que V é um espaço de dimensão finita.

Teorema 5.6 *Qualquer conjunto de vetores LI de um espaço vetorial V de dimensão finita pode ser completado de modo a formar uma base de V.*

Corolário 5.2 *Se* $\dim V = n$, *qualquer conjunto de n vetores LI formará uma base de V.*

Teorema 5.7 *Se U e W são subespaços de um espaço vetorial V que tem dimensão finita, então* $\dim U \leq \dim V$ *e* $\dim W \leq \dim V$. *Alem disso,*

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$$

Teorema 5.8 *Dada uma base $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ de V, cada vetor de V é escrito de maneira única como combinação linear de $v_1, v_2, \ldots, v_n$.*

Definição 5.6 *Sejam $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ base de V e $v \in V$ onde $v = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n$. Chamamos estes números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de coordenadas de v em relação à base B e denotamos por:*

$$[v]_B = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

Exemplo 01: Se $B = \{(1,1),(0,1)\}$, então $(4,3) = x(1,1) + y(0,1)$, resultando em $x = 4$ e $y = -1$.

Então $(4,3) = 4(1,1) - 1(0,1)$, donde $[(4,3)]_B = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$

OBS. É importante notar que a ordem dos elementos de uma base também influi na matriz das coordenadas de um vetor em relação a esta base.

Por exemplo, se tivermos: $B_1 = \{(1,0),(0,1)\}$ e $B_2 = \{(0,1),(1,0)\}$ então

$[(4,3)]_{B1} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ mas $[(4,3)]_{B2} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

Devido a isso, a partir de agora, sempre que considerarmos uma base $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$, estaremos subentendendo que a base seja ordenada na ordem que aparece os vetores.

Exemplo: Considere:

$$V = \{(x, y, z); x + y - z = 0\}$$

$$W = \{(x, y, z); x = y\}$$

Determine $V + W$.

Resolvendo o exemplo.

5.5 Mudança de Base

A mudança de base tem como objetivo facilitar as operações. Nosso interesse é na seguinte situação:

Sejam $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ e $B' = \{w_1, \ldots, w_n\}$ duas bases ordenadas de um mesmo espaço vetorial V. Dado um vetor $v \in V$, podemos escrevê-lo como:

$$v = x_1u_1 + \cdots + x_nu_n \tag{2}$$

$$v = y_1w_1 + \cdots + y_nw_n \tag{3}$$

Podemos relacionar as coordenadas de v em relação à base B,

$$[v]_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

e também podemos relacionar as coordenadas de v em relação à base B',

$$[v]_{B'} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Como $\{u_1, \ldots, u_n\}$ é base de V, podemos escrever os vetores w_1 como combinação linear dos u_j, isto é,

$$\begin{cases} w_1 = a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \cdots + a_{n1}u_n \\ w_2 = a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + \cdots + a_{n2}u_n \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ w_n = a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \cdots + a_{nn}u_n \end{cases} \tag{4}$$

A matriz $[I]_B^{B'}$ é chamada *matriz de mudança de base B' para a base B.*

Compare $[I]_B^{B'}$ com (4) e observe que esta matriz é obtida, colocando as coordenadas em relação a B de w_i na i-ésima coluna. Uma vez obtida $[I]_B^{B'}$ podemos encontrar as coordenadas de v na base B' (supostamente conhecidas).

Exemplo: Sejam $B = \{(2,-1),(3,4)\}$ e $B' = \{(1,0),(0,1)\}$ bases de $\mathbb{R}^2$. Determine $[I]_B^{B'}$.

Resolvendo o exemplo.

O cálculo utilizando a matriz de mudança de base é operacionalmente vantajoso quando trabalhamos com mais vetores, pois não há necessidade de resolução de mais de um sistema de equação para cada vetor.

5.5.1 A inversa da Matriz de Mudança de Base

Um fato importante é que as matrizes $[I]_B^{B'}$ e $[I]_{B'}^{B}$ são inversíveis e $([I]_B^{B'})^{-1} = [I]_{B'}^{B}$

Exemplo: Consideremos em $\mathbb{R}^2$ a base $B = \{e_1, e_2\}$ e a base $B' = \{f_1, f_2\}$, obtida da base canônica B pela rotação de um ângulo θ. Determine $[I]_B^{B'}$.

Resolvendo o exemplo.

6 Transformações Lineares

Definição 6.1 (Transformação Linear) *Sejam V e W dois espaços vetoriais. Uma* transformação linear *(aplicação linear) é uma função de V em W, $T : V \to W$, que satisfaz as seguintes condições:*

1. *Quaisquer que sejam u e v em V,*

$$T(u+v) = T(u) + T(v)$$

2. *Quaisquer que sejam $\lambda \in \mathbb{R}$ e $v \in V$,*

$$T(\lambda v) = \lambda T(v)$$

6.1 Exemplos de Transformações Lineares

1. $V = \mathbb{R}$ e $W = \mathbb{R}$, onde $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $T(u) = \alpha u$;
   Mostrando que é Transformação Linear

2. $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $T(u) = u^2$;
   Mostrando que não é Transformação Linear

3. $V = \mathbb{R}^2$ e $W = \mathbb{R}^3$, onde $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y) = (2x, 0, x + y)$;
   Mostrando que é Transformação Linear

OBS. Da definição de Transformação Linear, $T : V \to W$ leva o vetor nulo de V no vetor nulo de W, isto é, se $0 \in V, T(0) = 0 \in W$. Isto é, se $T(0) \neq 0$ então T não é Transformação Linear. **CUIDADO!** $T(0) = 0$ não implica em T ser linear, ver exemplo 02 anterior.

4. A aplicação nula.

5. $V = W = \mathbb{P}_n$, onde $D : \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_n$ dada por $D(f) = f'$ (aplicação derivada);
   Mostrando que é Transformação Linear

O próximo exemplo é um caso particular do seguinte resultado, a toda matriz $m \times n$ está associada uma transformação linear de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$. Isto é, uma matriz produz uma transformação linear, e a recíproca também é verdade, isto é, uma transformação linear produz uma matriz.

6. $V = \mathbb{R}^n$ e $W = \mathbb{R}^m$, onde $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, seja A uma matriz $m \times n$. Definimos $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ por $L_A(v) = Av$, onde v é um vetor coluna de tamanho n;
   Mostrando que é Transformação Linear

6.2 Transformações do Plano no Plano

Os seguintes exemplos são para ilustrar geometricamente as transformações lineares no plano $\mathbb{R}^2$.

6.2.1 Exemplos de Transformações no Plano

1. **Expansão (ou Contração) Uniforme:** $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$ onde $T(v) = \alpha v$.
   Exemplo: $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$ onde $T(v) = 2v$ ou $T(x, y) = 2(x, y)$. Essa função leva cada vetor do plano num vetor de mesma direção e sentido de v, mas de módulo maior.

   Escrevendo na forma de vetores-coluna,
   $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to 2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ou $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

2. **Reflexão em Torno do Eixo x:** $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, onde $F(x, y) = (x, -y)$.

   $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$ ou $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

3. **Reflexão na Origem:** $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, onde $F(x, y) = (-x, -y)$.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

4. **Rotação de um Ângulo θ:** (no sentido anti-horário)

   $x' = r\cos(\alpha+\theta) = r\cos(\alpha)\cos(\theta) - r\sin(alpha)\sin(\theta)$

   Mas $r\cos(\theta) = x$ e $r\sin(\theta) = y$

   Então, $x' = x\cos(\theta) - y\sin(\theta)$

   Analogamente, $y' = r\sin(\alpha+\theta) = r(\sin(\alpha)\cos(\theta) + \cos(\alpha)\sin(\theta)) = y\cos(\theta) + x\sin(\theta)$

   Assim, $R_\theta(x,y) = (x\cos(\theta) - y\sin(\theta), y\cos(\theta) + x\sin(\theta))$ ou na forma coluna,

   $$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x\cos(\theta) - y\sin(\theta) \\ y\cos(\theta) + x\sin(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

   COnsiderando o caso particular onde $\theta = \frac{\pi}{2}$. Neste caso, $\cos(\theta) = 0$ e $\sin(\theta) = 1$

   Então,

   $$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

5. **Cisalhamento horizontal:** $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$ onde $T(x,y) = (x+\alpha y, y)$.

   Por exemplo, $T(x,y) = (x+2y, y)$

   $$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x+2y \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

   Um exemplo de Transformação que não é linear.

6. **Translação:** $T(x,y) = (x+a, y+b)$ ou

   $$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

6.3 Conceitos e Teoremas

Teorema 6.1 *Dados dois espaços vetoriais reais V e W e uma base de V, $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, sejam $w_1, w_2, \dots, w_n$ elementos arbitrários de W. Então existe uma única aplicação linear $T : V \to W$ tal que $T(v_1) = w_1, \dots, T(v_n) = w_n$. Essa aplicação é dada por:*

Se $v = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n$,

$$\begin{aligned} T(v) &= a_1T(v_1) + \cdots + a_nT(v_n) \\ &= a_1w_1 + \cdots + a_nw_n \end{aligned}$$

Verifique que T assim definida é linear e que é a única que satisfaz as condições exigidas.

Exemplo 01: Qual é a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(1, 0) = (2, -1, 0)$ e $T(0, 1) = (0, 0, 1)$?

Definiremos os conjuntos *núcleo* e *imagem* de uma Transformação Linear.

Definição 6.2 (Imagem de uma Transformação Linear) *Seja $T : V \to W$ uma aplicação linear. A* imagem *de T é o conjunto dos vetores $w \in W$ tais que existe um vetor $v \in V$, que safisfaz $T(v) = w$. Ou seja,*

$$Im(T) = \{w \in W; T(v) = w \text{ para algum } v \in V\}$$

Note que $Im(T)$ é um subconjunto de W e, além disso, é um subespaço vetorial de W.

Definição 6.3 (Núcleo de uma Transformação Linear) *Seja $T : V \to W$ uma transformação linear. O conjunto de todos os vetores $v \in V$ tais que $T(v) = 0$ é chamado* núcleo *de T, sendo denotado por $ker(T)$. Isto é:*

$$ket(T) = \{v \in V; T(v) = 0\}$$

Note que $Ker(T) \subset V$ é um subconjunto de V e, além disso, é um subespaço vetorial de V.

Exemplo 01: $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ onde $T(x, y) = x + y$

Exemplo 02: Seja a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y, z) = (x, 2y, 0)$

Recordaremos as definições de função injetora e sobrejetora para relacionarmos tais conceitos com transformações lineares.

Definição 6.4 *Dada uma aplicação (ou função) $T : V \to W$, diremos que T é* injetora *se dados $u \in V$, $v \in V$ com $T(u) = T(v)$ tivermos $u = v$. Equivalentemente, T é injetora se dados $u, v \in V$ com $u \neq v$, então $T(u) \neq T(v)$.*

Em outras palavras, T é injetora se as imagens de vetores distintos são distintas.

Definição 6.5 *A aplicação* $T : V \to W$ *será* sobrejetora *se a imagem de* T *coincidir com* W*, ou seja* $T(V) = W$.

Em outras palavras, T *será sobrejetora se dado* $w \in W$*, existir* $v \in V$ *tal que* $T(v) = w$.

Teorema 6.2 *Seja* $T : V \to W$*, uma aplicação linear. Então* $ker(T) = \{0\}$*, se e somente se* T *é injetora.*

PROVA:

Uma consequência é que uma aplicação linear injetora leva vetores LI em vetores LI.

Teorema 6.3 (do Núcleo e Imagem) *Seja* $T : V \to W$ *uma aplicação linear. Então:*

$$dim(V) = dim(ker(T)) + dim(Im(T))$$

PROVA:

Corolário 6.1 *Se $dimV = dimW$, então T linear é injetora se e somente se T é sobrejetora.*

Corolário 6.2 *Seja $T : V \to W$ uma aplicação linear injetora. Se $dimV = dimW$, então T leva base em base.*

PROVA:

Quando $T : V \to W$ for injetora e sobrejetora, ao mesmo tempo, dá-se o nome de *isomorfismo*. Quando há uma tal transformação entre dois espaços vetoriais dizemos que estes são *isomorfos*.

No ponto de vista da álgebra linear, dois espaços vetoriais *isomorfos* são, por assim dizer, idênticos. Devido aos resultados anteriores, os espaços isomorfos possuem a mesma dimensão e um isomorfismo leva base a base.

Além, disso $T : V \to W$ tem uma aplicação inversa $T^{-1} : W \to V$ que é linear **(MOSTRE)** e também é um isomorfismo.

Exemplo 01: Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y, z) = (x - 2y, z, x + y)$. Mostre que T é isomorfismo e determine T^{-1}.

6.4 Aplicações Lineares e Matrizes

Já sabemos que a toda matriz $m \times n$ está associada uma transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Nesta seção será formalizado para espaços vetoriais V e W e também será estabelecido o recíproco, isto é, uma vez fixadas as bases, toda transformação linear $T : V \to W$ estará associada uma única matriz.

Exemplo 01: Consideramos $\mathbb{R}^2$ e as bases:

$B = \{(1,0),(0,1)\}$ e $B' = \{(1,1),(-1,1)\}$ e a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Queremos associar a esta matriz A uma aplicação linear que depende de A e das bases dadas B e B', isto é,

$$T_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$v \to T_A(v)$$

Exemplo 02: $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \{(1,0),(0,1)\}$ e $B' = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ e $T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$. Determine T_A.

Agora vamos encontrar a matriz associada a uma transformação linear. Seja $T : V \to W$ linear, $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de V e $B' = \{w_1, \dots, w_m\}$ base de W. Então $T(v_1), \dots, T(v_n)$ são vetores de W e portanto

$$\begin{aligned} T(v_1) &= a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \cdots + a_{m1}w_m \\ &\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ T(v_n) &= a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \cdots + a_{mn}w_m \end{aligned}$$

A transposta da matriz de coeficientes deste sistema, denotada por $[T]^B_{B'}$, é chamada matriz de T em relação às bases B e B'.

$$[T]^B_{B'} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = A$$

Note que T passa a ser a aplicação linear associada à matriz A e bases B e B', isto é $T = T_A$.

Exemplo 03: Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x,y,z) = (2x + y - z, 3x - 2y + 4z)$. Sejam $B = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ e $B' = \{(1,3),(1,4)\}$. Determine $[T]^B_{B'}$.

OBS. Se fossem utilizadas outras bases, teríamos outra matriz associada a T.

Exemplo 04: Dadas as bases $B = \{(1,1),(0,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ e $B' = \{(0,3,0),(-1,0,0),(0,1,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$, encontremos a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ cuja matriz é: $[T]^B_{B'} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

Teorema 6.4 *Sejam V e W espaços vetoriais, α base de V, β base de W e $T : V \to W$ uma aplicação linear. Então, para todo $v \in V$ vale:*

$$[T(v)]_\beta = [T]^\alpha_\beta \cdot [v]_\alpha$$

Através deste teorema, o estudo de transformações lineares entre espaços de dimensão finita é reduzido ao estudo de matrizes. No caso particular de $V = W$ e $T = I$, o resultado é o mesmo da matriz de mudança de base.

Exemplo 05: Seja a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$[T]^\beta_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

onde $\alpha = \{(1,0),(0,1)\}$ é base de $\mathbb{R}^2$, $\beta = \{(1,0,1),(-2,0,1),(0,1,0)\}$ é base de $\mathbb{R}^3$. Qual a imagem do vetor $v = (2,-3)$ gerada por T.

O relacionamento entre as dimensões do núcleo e da imagem de uma transformação linear e o posto de uma matriz associada é dado no teorema a seguir.

Teorema 6.5 *Seja $T : V \to W$ uma aplicação linear e α e β bases de V e W respectivamente. Então:*

$$\dim Im(T) = \textit{posto de } [T]^\alpha_\beta$$

$$\dim ker(T) = \textit{nulidade de } [T]^\alpha_\beta$$

ou ainda, $\dim ker(T) =$ *número de colunas - posto de* $[T]^\alpha_\beta$.

Teorema 6.6 *Sejam $T_1 : V \to W$ e $T_2 : W \to U$ transformações lineares e α, β e γ bases de V, W e U respectivamente. Então a composta de T_1 com T_2, $T_1 \circ T_2 : V \to U$ é linear e*

$$[T_2 \circ T_1]^\alpha_\gamma = [T_2]^\beta_\gamma \cdot [T_1]^\alpha_\beta$$

Exemplo 01: Consideramos uma expansão do plano $\mathbb{R}^2$ dada por $T_1(x,y) = 2(x,y)$, e um cisalhamento dado por $T_2(x,y) = (x+2y, y)$.

Exemplo 02: Sejam as transformações lineares $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ e $T_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ cujas matrizes são:

$$[T_1]^{\alpha}_{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } [T]^{\beta}_{\gamma} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

em relação às bases $\alpha = \{(1,0),(0,2)\}$, $B = \{(\frac{1}{3}, 0, -3), (1,1,15), (2,0,5)\}$ e $\gamma = \{(2,0),(1,1)\}$. Determine a transformação linear composta $T_2 \circ T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, isto é, $(T_2 \circ T_1)(x,y)$.

Corolário 6.3 *Se $T : V \to W$ é uma transformação linear inversível (T é um isomorfismo) e α e β são bases de V e W, então $T^{-1} : W \to V$ é um operador linear e*

$$[T^{-1}]_{\alpha}^{\beta} = ([T]_{\beta}^{\alpha})^{-1}$$

Corolário 6.4 *Seja $T : V \to W$ uma transformação linear e α e β bases de V e W. Então T é inversível se e somente se $\det[T]_{\beta}^{\alpha} \neq 0$.*

Exemplo 01: Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear dada por:

$$[T]_{\xi}^{\xi} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

onde ξ é a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Determine T^{-1}.

Corolário 6.5 *Conhecendo a matriz de uma transformação linear em relação a certas bases α e β e as matrizes de mudança de base para novas bases α' e β', podemos achar a matriz da mesma transformação linear, desta vez em relação às novas bases α' e β'. Matematicamente,*

$$[T]_{\beta'}^{\alpha'} = [I \circ T \circ I]_{\beta'}^{\alpha'} = [I]_{\beta'}^{\beta}[T]_{\beta}^{\alpha}[I]_{\alpha}^{\alpha'}$$

Como caso particular, se $T : V \to V$ é uma transformação linear e α e β são bases de V, então

$$[T]_{\beta}^{\beta} = [I \circ T \circ I]_{\beta}^{\beta} = [I]_{\beta}^{\alpha}[T]_{\alpha}^{\alpha}[I]_{\alpha}^{\beta}$$

Lembre-se que $[I]_{\alpha}^{\beta} = ([I]_{\beta}^{\alpha})^{-1}$ denotando $[I]_{\alpha}^{\beta} = A$, segue que

$$[T]_{\beta}^{\beta} = A \cdot [T]_{\alpha}^{\alpha} \cdot A^{-1}$$

Dizemos neste caso que as matrizes $[T]_{\alpha}^{\alpha}$ e $[T]_{\beta}^{\beta}$ são *semelhantes.*

Exemplo: Seja a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuja matriz em relação à base canônica ξ é:

$$[T]_{\xi}^{\xi} = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -4 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -6 & 5 \end{bmatrix}$$

Calculemos a matriz desta transformação em relação à base $B = \{(0,1,1), (-1,0,1), (1,1,1)\}$.

7 Autovalores e Autovetores

Ao estudarmos conceitos de autovalores e autovetores estaremos interessados em determinar uma classe especial de vetores no espaço vetorial, que satisfaça a propriedade definida. Como forma de introduzir esses conceitos, tomemos os seguintes exemplos.

Exemplo 01: Dada $T : V \to V$, quais vatores $v \in V$ tais que $T(v) = v$? (v é denominado *vetor fixo*).

O primeiro exemplo é o trivial, a aplicação identidade, onde todo vetor é definido como vetor fixo.

Exemplo 02: $r_x : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $r_x(x, y) = (x, -y)$ ou
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

Esses vetores são únicos.

Dada uma transformação linear de um espaço vetorial $T : V \to V$, nosso interesse é descobrir quais vetores são levados em um múltiplo de si mesmo, isto é, procuramos um vetor $v \in V$ e um escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que:

$$T(v) = \lambda v$$

.

Neste caso, $T(v)$ será um vetor de mesma "direção" que v (sobre a mesma reta suporte). Como $v = 0$ satisfaz a equação para todo λ, estamos interessados em determinar vetores $v \neq 0$ satisfazendo a condição acima.

Definição 7.1 (Autovetor e Autovalor) *Seja $T : V \to V$ um operador linear. Se existirem $v \in V$, $v \neq 0$, e $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que $T(v) = \lambda v$, λ é um* autovalor *de T e v é um* autovetor *de T associado a λ.*

Note que λ pode ser igual a 0, embora $v \neq 0$.

Exemplo 01: $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ onde $T(x, y) = 2(x, y)$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Neste caso, 2 é um autovalor de T e qualquer $(x, y) \neq (0, 0)$ é um autovetor de T associado ao autovalor 2.

De modo geral toda transformação do tipo $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ onde $T(x, y) = \alpha(x, y), \alpha \neq 0$ tem α como autovalor e qualquer $(x, y) \neq (0, 0)$ como autovetor correspondente. Note que $T(v)$ é sempre um vetor de mesma direção que v. Ainda mais se,

1. $\alpha < 0$, T inverte o sentido do vetor;
2. $|\alpha| > 1$, T dilata o vetor;
3. $|\alpha| < 1$, T contrai o vetor;
4. $\alpha = 1$, T é a identidade

Exemplo 02: Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Teorema 7.1 *Dada uma transformação $T : V \to V$ e um autovetor v associado a um autovalor λ, qualquer vetor $w = \alpha v (\alpha \neq 0)$ também é um autovetor de T associado a λ.*

MOSTRE QUE: o conjunto formado pelos autovetores associados a um autovalor λ e o vetor nulo é um subespaço vetorial de V, isto é, $V_\lambda = \{v \in V; T(v) = \lambda v\}$ é subespaço de V.

Definição 7.2 *O subespaço $V_\lambda = \{v \in V; T(v) = \lambda v\}$ é chamado o* subespaço associado ao autovalor λ.

7.1 Autovalores e Autovetores de uma Matriz

Dada uma matriz quadrada de ordem n, A, estaremos entendendo por *autovalor* e *autovetor* de A, autovalor e autovetor da transformação linear $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, associada à matriz A em relação à base canônica, isto é, $T_A(v) = A \cdot v$ (na forma coluna). Assim, um autovalor $\lambda \in \mathbb{R}$ de A, e um autovetor $v \in \mathbb{R}^n$, são soluções da equação $A \cdot v = \lambda v, v \neq 0$.

Exemplo 01: Dada a matriz diagonal

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

e dados os vetores da base canônica de $\mathbb{R}^n$, temos

$$A \cdot e_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = a_{11} e_1$$

e em geral, $A \cdot e_i = a_{ii} e_i$. Então, estes vetores da base canônica de $\mathbb{R}^n$ são autovetores para A, e o autovetor e_i é associado ao autovalor a_{ii}.

A próxima seção mostrará que dada uma transformação linear $T : V \to V$ e fixada uma base B podemos reduzir o problema de encontrar autovalores e autovetores para T à determinação de autovalores para a matriz $[T]_B^B$.

7.2 Polinômio Característico

Nesta seção determinaremos um método prático para determinar autovalores e autovetores de uma matriz real A de ordem n.

Inicialmente tomaremos um exemplo onde $n = 3$ e depois será generalizado para n qualquer.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Nosso interesse esta em determinar vetores $v \in \mathbb{R}^3$ e escalares $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que $A \cdot v = \lambda v$.

Observe que se I for a matriz identidade de ordem 3, então a equação acima pode ser escrita na forma $Av = (\lambda I)v$, ou ainda, $(A - \lambda I)v = 0$.

Escrevendo explicitamente, temos:

$$\left(\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Disso temos a seguinte equação matricial:

$$\begin{bmatrix} 4-\lambda & 2 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Escrevendo o sistema de equações lineares equivalente a esta equação matricial, obteremos um sistema de três equações e três incógnitas.

Se o determinante da matriz dos coeficientes foi igual a 0, implica que o sistema só possuíra uma única solução, neste caso a solução trivial, ou seja, $x = y = z = 0$. Como nosso interesse é calcular os autovetores de A, isto é, $v \neq 0$, tais que $(A-\lambda I)v = 0$ Assim, neste caso $\det(A-\lambda I)$ deve ser zero.

$$\begin{bmatrix} 4-\lambda & 2 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

E portanto, $-\lambda^3 + 7\lambda^2 - 16\lambda + 12 = 0$. Vemos que $\det(A-\lambda I)$ é um polinômio em λ. Este polinômio é chamado o *polinômio característico* de A.

Continuando a resolução, temos $(\lambda-2)^2(\lambda-3) = 0$. Dessa forma, $\lambda = 2$ e $\lambda = 3$ são as raízes do polinômio característico de A, e portanto os autovalores da matriz A.

Conhecendo os autovalores, podemos determinar os autovetores, resolvendo a equação $Av = \lambda v$, para os casos:

i) $\lambda = 2$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4x + 2y = 2x \\ -x + y = 2y \\ y + 2z = 2z \end{cases}$$

Resolvendo o sistema segue que: na terceira equação $y = 0$ e substituindo na segunda, tem-se $x = 0$. Como não há nenhuma restrição em relação a z, os autovetores associados a $\lambda = 2$ são do tipo $(0, 0, z)$, ou seja, pertecem ao subespaço $[(0, 0, 1)]$.

ii) $\lambda = 3$

Resolvendo a equação $Av = 3v$, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 4x + 2y = 3x \\ -x + y = 3y \\ y + 2z = 3z \end{cases}$$

Tanto na primeira, quanto na segunda equação implica em $x = -2y$ e da terceira segue que $z = y$. Assim, os autovetores associados ao autovalor $\lambda = 3$ são do tipo $(-2y, y, y)$, ou seja, pertencem ao subespaço $[(-2, 1, 1)]$.

Generalizando para o caso n qualquer. Seja A uma matriz de ordem n. Quais são os autovalores e autovetores correspondentes de A? Serão exatamente aqueles que satisfazem a equação $Av = \lambda v$ ou $Av = (\lambda I)v$ ou ainda $(A-\lambda I)v = 0$. Explicitamente, temos:

$$\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se B é a primeira matriz acima, então $B \cdot v = 0$. Se $\det B \neq 0$, então o posto da matriz é n e portanto o sistema de equações lineares homogêneo indicado acima tem uma única solução (solução trivial $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$), o que não é o buscado, já que v deve ser diferente de 0. Assim, a única maneira de encontrarmos autovetores v (soluções não nulas da equação acima) é termos $\det B = 0$, ou seja,

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

.

Impondo esta condição determinamos primeiramente os autovalores λ que satisfazem a equação e depois os autovetores a eles associados. Note que

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix}$$

é um polinômio em λ de grau n.

$P(\lambda) = (a_{11} - \lambda) \dots (a_{nn} - \lambda)$ + termos de grau $< n$, e os autovalores procurados são as raízes deste polinômio. $P(\lambda)$ é chamado *polinômio característico* da matriz A.

Exemplo 01:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o exemplo.

Exemplo 02:

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

Resolvendo o exemplo.

OBS: Quando trabalhamos em espaços algebricamente fechados, o polinômio característico sempre apresentará raízes (o caso quando estamos em $\mathbb{C}$).

No exemplo anterior, as raízes seriam $\lambda = \sqrt{3} + i$ e $\lambda = \sqrt{3} - i$. Os autovetores encontrados, da mesma maneira que no caso real, são do tipo $(x, -ix)$ e (x, ix), respectivamente. Porém, não se tem a visão geométrica do comportamento do vetor. Autovalores e autovetores complexos são utilizados na resolução de um sistema de equações diferenciais.

Exemplo 03:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o exemplo.

Exemplo 04:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o exemplo.

Pode-se também definir o polinômio característico de uma matriz, cuja a transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ esta associada a ela.

Podemos estender este conceito para qualquer operador linear $T : V \to V$, partindo do seguinte argumento.

Seja B uma base de V, então temos as equivalências:

Observamos que a última condição é dada por $P(\lambda) = 0$, onde $P(\lambda)$ é o polinômio característico da matriz $[T]_B^B$.

Neste caso, $P(\lambda)$ também será chamado *polinômio característico da transformação* T e suas raízes serão os autovalores de T. Não há dependência da base na utilização.

Exemplo 01: Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (-3x + 4y, -x + 2y)$.

Resolvendo o exemplo.

Exemplo 02: *Resolvendo o exemplo.*

Definição 7.3 *Chamamos de* multiplicidade algébrica de um autovalor *a quantidade de vezes que ele aparece como raiz do polinômio característico.*

A multiplicidade geométrica de um autovalor λ *é a dimensão do subespaço* V_λ *de autovetores associados a* λ*.*

Exemplos da M.A. e da M.G.

8 Diagonalização de Operadores

8.1 Base de Autovetores

Dado um operador linear $T : V \to V$, nosso objetivo é conseguir uma base B de V na qual a matriz do operador nesta base ($[T]_B^B$) seja uma matriz diagonal, que é a forma mais simples possível de se representar um operador.

Teorema 8.1 *Autovetores associados a autovalores distintos são linearmente independentes.*

Ideia da Prova.

Corolário 8.1 *Se V é um espaço vetorial de dimensão n e $T : V \to V$ é um operador linear que possui n autovalores distintos, então V possui uma base cujos vetores são todos autovetores de T.*

Em outras palavras, se conseguirmos encontrar tantos autovalores distintos quanto for a dimensão do espaço, podemos garantir a existência de uma base de autovetores.

Exemplo 01: Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear dada por $T(x, y) = (-3x+4y, -x+2y)$. Determine uma base B de autovetores.

Resolvendo o exemplo.

Exemplo 02: Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear cuja matriz em relação à base canônica α é:

$$[T]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o exemplo.

Note que em relação a esta base de autovetores, a matriz de T é uma matriz diagonal.

É óbvio que as matrizes diagonais $[T]_B^B$ que foram obtidas nos exemplos 01 e 02 não foram por acaso. Dada uma transformação linear qualquer $T : V \to V$, se conseguirmos uma base $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ formada por autovetores de T, então, como

$$\begin{aligned} T(v_1) &= \lambda_1 v_1 + 0v_2 + \cdots + 0v_n \\ T(v_2) &= 0v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + 0v_n \\ &\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ T(v_n) &= 0v_1 + 0v_2 + \cdots + \lambda_n v_n \end{aligned}$$

a matriz $[T]_B^B$ será uma matriz diagonal onde os elementos da diagonal principal são os autovalores λ_i, isto é,

$$[T]_B^B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Um autovalor aparecerá na diagonal quantas vezes forem os autovetores LI a ele associados. Por outro lado, se $\gamma = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ é uma base de V tal que

$$[T]_\gamma^\gamma = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{bmatrix}$$

Dessa forma, $u_1, \dots, u_n$ são necessariamente autovetores de T com autovalores $a_1, \dots, a_n$ respectivamente. De fato, da definição de $[T]_\gamma^\gamma$ temos:

$$\begin{aligned} T(u_1) &= a_1u_1 + 0u_2 + \dots + 0u_n = a_1u_1 \\ T(u_2) &= 0u_1 + a_2u_2 + \dots + 0u_n = a_2u_2 \\ &\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ T(u_n) &= 0u_1 + 0u_2 + \dots + a_nu_n = a_nu_n \end{aligned}$$

Dessa forma, concluímos que um operador $T : V \to V$ admite uma base B em relação à qual sua matriz $[T]_B^B$ é diagonal se, e somente se essa base B for formada por autovetores de T.

Definição 8.1 *Seja $T : V \to V$ um operador linear. Dizemos que T é um operador* diagonalizável *se existe uma base de V cujos elementos são autovetores de T.*

Os operadores do exemplo 01 e 02 são diagonalizáveis. Agora seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear cuja matriz em relação à base canônica α é:

$$[T]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o exemplo.

8.2 Polinômio Minimal

Definição 8.2 *Seja $p(x) = a_nx^n + \dots + a_1x + a_0$ um polinômio e A uma matriz quadrada. Então $p(A)$ é a matriz*

$$p(A) = a_nA^n + \dots + a_1A + a_0I$$

Quando $p(A) = 0$, dizemos que o polinômio anula *a matriz A.*

Exemplo: Sejam $p(x) = x^2 - 9$ e $q(x) = 2x + 3$. Se $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Determine $p(A)$ e $q(A)$.

Resolvendo o exemplo.

Definição 8.3 *Seja A uma matriz quadrada. O* polinômio minimal *de A é um polinômio*

$$m(x) = x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_0$$

tal que:

i) $m(A) = 0$, isto é, $m(x)$ anula a matriz A.

ii) $m(x)$ é o polinômio de menor grau entre aqueles que anulam A.

Note que o coeficiente do termo x^k do polinômio minimal é 1 ($a_k = 1$).

Os próximos resultados envolvendo polinômio minimal serão utilizados para determinar um procedimento para verificar se um operador é diagonalizável ou não, sem calcular os autovetores. As provas destes teoremas serão exibidas em futuras atualizações destas notas de aula.

Teorema 8.2 *Sejam $T : V \to V$ um operador linear e α uma base qualquer de V de dimensão n. Então T é diagonalizável se, e somente se o polinômio minimal de $[T]^\alpha_\alpha$ é da forma*

$$m(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)\dots(x - \lambda_r)$$

com $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ distintos.

Teorema 8.3 (de Cayley-Hamilton) *Seja $T : V \to V$ um operador linear, α uma base de V e $p(x)$ o polinômio característico de T. Então*

$$p([T]^\alpha_\alpha) = 0$$

Isto significa que o polinômio característico é um candidato ao polinômio minimal, já que satisfaz a condição i) da definição de polinômio minimal.

Exemplo: Seja $[T]^\alpha_\alpha = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

Resolvendo o exemplo.

Teorema 8.4 *As raízes do polinômio minimal são as mesmas raízes (distintas) do polinômio característico.*

Estes dois teoremas juntos nos permitem definir o polinômio minimal de um operador linear $T : V \to V$. O polinômio minimal deve ser de grau menor ou no máximo igual ao do polinômio característico e ainda deve ter as mesmas raízes.

Exemplo: Seja $T : V \to V$ um operador linear e α uma base de V. Suponhamos que o polinômio característico de T seja $p(\lambda) = (\lambda - 3)^2(\lambda - 1)^3(\lambda - 5)$. Qual seu polinômio minimal?

Resolvendo o exemplo.

Teorema 8.5 *Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ os autovalores distintos de um operador linear T. Então T será diagonalizável se, e somente se o polinômio*

$$(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\ldots(x-\lambda_r)$$

anular a matriz de T.

Exemplo 01: O operador linear $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definido por $T(x, y, z, t) = (3x - 4z, 3y + 5z, -z, -t)$ é diagonalizável?

Resolvendo o exemplo.

8.3 Diagonalização Simultânea de dois Operadores

Suponhamos que sejam dados $T_1 : V \to V$ e $T_2 : V \to V$ operadores lineares, ambos diagonalizáveis. Isto significa que existem bases α_1 e α_2 de V tais que $[T_1]_{\alpha_1}^{\alpha_1}$ e $[T_2]_{\alpha_2}^{\alpha_2}$ são diagonais. No entanto não podemos garantir que $\alpha_1 = \alpha_2$, isto é, não podemos garantir sempre que existe uma mesma base α de V em relação à qual as matrizes de T_1 e T_2 admitem o mesmo conjunto de autovetores LI. Em que situação vale tal relação entre T_1 e T_2?

Através de resultados, obtemos que T_1 e T_2 operadores diagonalizáveis, então T_1 e T_2 são simultaneamente diagonalizáveis se e somente se T_1 e T_2 comutam ($T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1$).

Na prática, dados T_1 e T_2, tomamos uma base B qualquer de V e verificamos se T_1 e T_2 são diagonalizáveis. Se isto acontecer e, além disso, $[T_1]_B^B[T_2]_B^B = [T_2]_B^B[T_1]_B^B$, então podemos concluir que T_1 e T_2 são simultaneamente diagonalizáveis.

Exemplo: Sejam $T_1, T_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ operadores lineares cujas matrizes em relação à base canônica são respectivamente

$$[T_1] = \begin{bmatrix} \frac{9}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{6}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } [T_2] = \begin{bmatrix} \frac{11}{5} & \frac{8}{5} & 0 \\ \frac{8}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o exemplo.