

Lista 03

Dados de Identificação	
Professor:	Matheus Pimenta
Disciplina:	Cálculo Diferencial e Integral II - 1MAT180
Aluno:	

Observação: Não precisa ser entregue. Apenas para desenvolvimento do pensamento matemático.

1. Dada a função $f(x, y) = x^2 - y^2 + 3x - 4$, determine:

(a) $f(0, 0)$

R: -4

(b) $f(3, 4)$

R: -2

(c) $f(2, t)$

R: $6 - t^2$

(d) os valores de x para os quais $f(x) = -y^2$

R: $x = -4 \vee x = 1$

2. Determinar uma função de várias variáveis que represente:

(a) O volume de água necessário para encher uma piscina redonda de x metros de raio e y metros de altura.

R: $V(x, y) = \pi x^2 y$

(b) A quantidade de rodapé, em metros, necessária para se colocar numa sala retangular de largura x e comprimento y .

R: $f(x, y) = 2(x + y)$

(c) A quantidade, em metros quadrados, de papel de parede necessária para revestir as paredes laterais de uma quarto retangular de x metros de largura, y metros de comprimento e z metros de altura.

R: $f(x, y, z) = 2(xz + yz)$

(d) O volume de um paralelepípedo retângulo de dimensões x, y e z .

R: $V(x, y, z) = xyz$

(e) A distância entre dois pontos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e $P_2(x_2, y_2, z_2)$.

R: $d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

- (f) A temperatura nos pontos de uma esfera, se ela, em qualquer ponto, é numericamente igual a distância do ponto ao centro da esfera.

R: $T(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Determine o domínio das seguintes funções de várias variáveis reais. Represente graficamente, se possível. Exercícios 3 a 10.

3. $z = x^2 + y^2$

R: \mathbb{R}^2

4. $z = \frac{7}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$

R: $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1\}$

5. $z = \frac{5}{x + y + z + u + v}$

R: $D = \{(x, y, z, u, v) \in \mathbb{R}^5; x + y + z + u + v \neq 0\}$

6. $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

R: $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \neq 0 \wedge y \neq 0\}$

7. $f(x, y, z) = \frac{x - 2y}{\sqrt{4y - y^2}} + \sqrt{12 + x - x^2}$

R: $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -2 \leq x \leq 4 \wedge 0 < y < 4\}$

8. $f(x, y) = \frac{x + y}{x - y}$

R: $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \neq y\}$

9. $z = \ln(x - y)$

R: $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > x\}$

10. $f(x, y, z) = \sqrt{16 - x^2 - y^2 - z^2}$

R: $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq 16\}$

Determine para cada função o maior subconjunto de \mathbb{R}^3 onde as funções são definidas, represente se possível este conjunto graficamente. Exercícios 11 a 14:

11. $f(x, y, z) = \frac{4xyz}{\sqrt{9 - x^2 - y^2 - z^2}}$

R: $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 < 9\}$

12. $f(x, y, z) = x^2 - yz + 4\sqrt{36 - x^2 - y^2 - z^2}$

R: $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq 36\}$

13. $f(x, y, z) = \frac{x + y - z + 2}{xyz}$

R: $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x \neq 0 \wedge y \neq 0 \wedge z \neq 0\}$

14. $f(x, y, z) = \sqrt{(x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z - 1)^2 - 25}$

R: $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z - 1)^2 \geq 25\}$

Esboce as curvas de nível de f para os seguintes valores de k . Exercícios 15 a 18.

15. $f(x, y) = \sqrt{100 - x^2 - y^2}; k = 0, 2, 4, 6, 8, 10$

$$16. f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}; k = 0, 1, 2, 3, 4$$

$$17. f(x, y) = 4x^2 + 9y^2; k = 0, 2, 4, 6$$

$$18. f(x, y) = 3x - 7y; k = 0, \pm 1, \pm 2$$

Esboce o gráfico das funções. Exercícios 19 a 22.

$$19. f(x, y) = x^2 + y^2$$

$$20. f(x, y) = 2x + 3y + 4z - 12$$

$$21. f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$22. f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$$

Utilize as ferramentas matemáticas de limites e continuidade para calcular os limites abaixo. Exercícios 23 a 28.

$$23. \lim_{(x,y) \rightarrow (1,3)} 4xy^2 - x = 35$$

$$24. \lim_{(x,y) \rightarrow \left(\frac{1}{2}, \pi\right)} xy^2 \sin(xy) = \frac{\pi^2}{2}$$

$$25. \lim_{(x,y) \rightarrow (-1,2)} \frac{xy^3}{x+y} = -8$$

$$26. \lim_{(x,y) \rightarrow (1,-3)} e^{2x-y^2} = e^{-7}$$

$$27. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \ln(1 + x^2 + y^2) = 0$$

$$28. \lim_{(x,y) \rightarrow (4,-2)} x\sqrt{y^3 + 2x} = 0$$

Mostre que os limites não existem ao longo dos eixos coordenados. Exercícios 29 a 32.

$$29. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3}{x^2 + 2y^2}$$

$$30. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x+y}{x+y^2}$$

$$31. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x-y}{x^2 + y^2}$$

$$32. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\cos(xy)}{x+y}$$

Determine se os limites existem. Se existir, determine o seu valor. Exercícios 33 a 38.

$$33. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2} = 0$$

$$34. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 - 16y^4}{x^2 + 4y^2} = 0$$

$$35. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{3x^2 + 2y^2}; \#$$

$$36. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - x^2 - y^2}{x^2 + y^2}; \#$$

$$37. \lim_{(x,y,z) \rightarrow (2,-1,2)} \frac{xz^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{8}{3}$$

$$38. \lim_{(x,y,z) \rightarrow (2,0,-1)} \ln(2x + y - z) = \ln(5)$$

$$39. \text{ Seja } f(x, y) = \begin{cases} \frac{\text{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}. \text{ Mostre que } f \text{ é contínua em } (0, 0).$$

$$40. \text{ Seja } f(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}. \text{ É possível definir } f(0, 0) \text{ tal que } f \text{ seja contínua em } (0, 0)?$$

R:Não

$$41. \text{ Seja } f(x, y) = xy \ln(x^2 + y^2). \text{ É possível definir } f(0, 0) \text{ tal que } f \text{ seja contínua em } (0, 0)?$$

R:Sim

$$42. \text{ Dada } f(x, y) = \begin{cases} \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}. \text{ Determine se } f \text{ é contínua em } (0, 0).$$

R:Sim

Calcule as derivadas parciais das funções a seguir. Exercícios 43 a 57.

$$43. z = x^2 \text{sen}(y)$$

$$\mathbf{R:} \frac{\partial z}{\partial x} = 2x \text{sen}(y); \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 \cos(y)$$

$$44. z = x^2 + 3xy - 4y^2$$

$$\mathbf{R:} \frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 3y; \frac{\partial z}{\partial y} = 3x - 8y$$

$$45. z = \text{sen}(3x) \cos(2y)$$

$$\mathbf{R:} \frac{\partial z}{\partial x} = 3 \cos(3x) \cos(2y); \frac{\partial z}{\partial y} = -2 \text{sen}(3x) \text{sen}(2y)$$

$$46. f(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{x + y + z}$$

$$\mathbf{R:} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x^2 - y^2 - z^2 + 2xy + 2xz}{(x + y + z)^2};$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2 - z^2 + 2xy + 2yz}{(x + y + z)^2};$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{z^2 - x^2 - y^2 + 2xz + 2yz}{(x + y + z)^2}$$

$$47. z = x^2 + 3y^2 + 4xy + 4$$

$$\mathbf{R:} \frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 4y; \frac{\partial z}{\partial y} = 4x + 6y$$

48. $z = x^2 \text{sen}(2xy)$

R: $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x[\text{sen}(2xy) + xy \cos(xy)]; \frac{\partial z}{\partial y} = 2x^3 \cos(2xy)$

49. $z = e^{x^2-2y^2+4x}$

R: $\frac{\partial z}{\partial x} = (2x+4)e^{x^2-2y^2+4x}; \frac{\partial z}{\partial y} = -4ye^{x^2-2y^2+4x}$

50. $z = \frac{1}{x+2y+1}$

R: $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{(x+2y+1)^2}; \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2}{(x+2y+1)^2}$

51. $z = x^3y - e^{xy^2}$

R: $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y - y^2e^{xy^2}; \frac{\partial z}{\partial y} = x^3 + 2xye^{xy^2}$

52. $f(x, y) = e^{xy} + \text{artg}\left(\frac{x}{y}\right)$

R: $\frac{\partial f}{\partial x} = ye^{xy} - \frac{y}{x^2+y^2}; \frac{\partial f}{\partial y} = xe^{xy} + \frac{x}{x^2+y^2}$

53. $z = x^2 \text{sen}\left(\frac{x}{y}\right)$

R: $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \text{sen}\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{x^2}{y} \cos\left(\frac{x}{y}\right); \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x^2}{y^2} - \cos\left(\frac{x}{y}\right)$

54. $z = (\text{sen}(x))^{\text{sen}(y)}$

R: $\frac{\partial z}{\partial x} = \text{sen}(y)(\text{sen}(x))^{\text{sen}(y)-1} \cos(x); \frac{\partial z}{\partial y} = (\text{sen}(x))^{\text{sen}(y)} \cos(x) \ln(\text{sen}(x))$

55. $z = \sqrt{\frac{e^x - y}{y - x^2}}$

R: $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{e^x(y - x^2 + 2x) - 2xy}{2\sqrt{(e^x - y)(y - x^2)^3}}; \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^2 - e^x}{2\sqrt{(e^x - y)(y - x^2)^3}}$

56. $z = e^{x^2+y^2+z^2}$

R: $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xe^{x^2+y^2+z^2}; \frac{\partial z}{\partial y} = 2ye^{x^2+y^2+z^2}; \frac{\partial z}{\partial z} = 2ze^{x^2+y^2+z^2}$

57. Dado o ponto $P(-1, 4)$ e $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, calcule:

(a) $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$

R: $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

$$(b) \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$$

$$\mathbf{R:} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$(c) \frac{\partial f(P)}{\partial x}$$

$$\mathbf{R:} \frac{\partial f(-1, 4)}{\partial x} = -\frac{\sqrt{17}}{17}$$

$$(d) \frac{\partial f(P)}{\partial y}$$

$$\mathbf{R:} \frac{\partial f(-1, 4)}{\partial y} = \frac{4\sqrt{17}}{17}$$

58. A função $T(x, y) = 60 - 2x^2 - 3y^2$ representa a temperatura em qualquer ponto de uma chapa. Encontrar a razão de variação da temperatura em relação a distância percorrida ao longo da placa na direção dos eixos positivos x e y , no ponto $(1, 2)$. Considerar a temperatura medida em graus Celsius e a distância em cm.

$$\mathbf{R:} \frac{\partial T(1, 2)}{\partial x} = -4^\circ\text{C/cm}; \frac{\partial T(1, 2)}{\partial y} = -12^\circ\text{C/cm}$$

Determine as derivadas parciais de segunda ordem das seguintes funções. Exercícios 59 a 62.

59. $z = x^2 - 3y^3 + 4x^2y^2$

$$\mathbf{R:} 2 + 8y^2; 16xy; 16xy; -18y + 8x^2$$

60. $z = x^2y^2 - xy$

$$\mathbf{R:} 2y^2; 4xy - 1; 4xy - 1; 2x^2$$

61. $z = \ln(xy)$

$$\mathbf{R:} -\frac{1}{x^2}; 0; 0; -\frac{1}{y^2}$$

62. $z = e^{xy}$

$$\mathbf{R:} y^2 e^{xy}; e^{xy}(1 + xy); e^{xy}(1 + xy); x^2 e^{xy}$$

63. Se $z = f(x, y)$ tem derivadas parciais de segunda ordem contínuas e satisfaz a equação de Laplace $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$, ela é dita uma *função harmônica*. Verifique se as funções abaixo são funções harmônicas:

(a) $z = y^3 - 3x^2y$

$$\mathbf{R:} \text{Sim}$$

(b) $z = x^2 + 2xy$

$$\mathbf{R:} \text{Não}$$

(c) $z = e^x \cos(y)$

R:Sim

64. Mostre que as funções abaixo satisfazem a *equação do calor* $\frac{\partial z}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

(a) $z = e^{-t} \sin\left(\frac{x}{c}\right)$

(b) $z = e^{-t} \cos\left(\frac{x}{c}\right)$

65. Quando dois resistores R_1 ohms e R_2 ohms são conectados em paralelo, sua resistência combinada R em ohms é

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

Mostre que: $\frac{\partial^2 R}{\partial R_1^2} \frac{\partial^2 R}{\partial R_2^2} = \frac{4R^2}{(R_1 + R_2)^4}$

66. Suponha que o potencial elétrico V no ponto (x, y, z) seja dado por $V = \frac{100}{x^2 + y^2 + z^2}$, onde V é dado em volts e x, y e z em centímetros. Ache a taxa instantânea de variação de V em relação à distância em $(2, -1, 1)$ na direção do eixo x , do eixo y e do eixo z .

67. Um objeto está situado em um sistema coordenado retangular tal que a temperatura T no ponto $P(x, y, z)$ seja dada por $T = 4x^2 - y^2 + 16z^2$, em que T é expressa em graus e x, y e z em centímetros. Ache a taxa instantânea de variação de T em relação à distância no ponto $P(4, -2, 1)$ na direção dos eixos x, y e z .

68. Em uma livraria, o lucro mensal L é uma função do número de vendedores, x , e do capital investido em livros, y (y em milhares de reais). Em certa época tem-se $L(x, y) = 400 - (12 - x)^2 - (40 - y)^2$.

(a) Calcule o lucro diário se a empresa tem 7 vendedores e 30 mil investidos.

(b) Calcule $\frac{\partial L}{\partial x}$ e $\frac{\partial L}{\partial y}$

(c) O que é mais lucrativo, a partir da situação do item (a):

i. aumentar de uma unidade o número de funcionários (vendedores), mantendo o capital investido, ou,

ii. investir mais mil reais, mantendo o número de vendedores?

69. Uma fábrica produz mensalmente x unidades de um produto A e y unidades de um produto B , sendo o custo mensal da produção conjunta dado por $C(x, y) = 20000 + \sqrt{x^2 + y^2}$. Em certo mês foram produzidos 3000 unidades do produto A e 2000 unidades do produto B .

(a) Calcule o custo da produção neste mês

(b) Calcule $\frac{\partial C}{\partial x}$ e $\frac{\partial C}{\partial y}$

(c) O que é mais conveniente a partir dessa situação: aumentar a produção do produto A mantendo constante a produção do produto B , ou vice versa? Justifique com base nos resultados anteriores.

70. No estudo da penetração da geada em uma rodovia, a temperatura T no instante t de horas e à profundidade x pode ser dada aproximadamente por $T = T_0 e^{-\lambda x} \sin(\omega t - \lambda x)$, em que T_0, ω, λ são constantes. O período de $\sin(\omega t - \lambda x)$ representa 24 horas.

(a) Calcule e interprete $\frac{\partial T}{\partial t}$ e $\frac{\partial T}{\partial x}$

(b) Mostre que T satisfaz a equação unidimensional do calor $\frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ em que k é constante.

71. A energia consumida num resistor elétrico é dada por $P = \frac{V^2}{R}$ watts. Se $V = 120$ volts e $R = 12$ ohms, calcular um valor aproximado para a variação de energia quando V decresce de 0,001 volts e R aumenta de 0,02 ohms.

R: $-2,02$

72. Calcular o valor aproximado da variação da hipotenusa de um triângulo cujos catetos medem 6cm e 8, quando o cateto menor é aumentado de 0,25cm e o maior é diminuído de 0,125.

R: $dh = \Delta h \approx 0,05$

73. Um orifício cilíndrico circular de 4cm de diâmetro e 12cm de profundidade, existente em um bloco metálico, deve ser aumentado para 4,12cm de diâmetro. Avaliar a quantidade de material que deve ser retirada.

R: $dV = \Delta V \approx 9,05 \text{ cm}^3$

74. A resistência R , em Ohms, de um circuito é dada por $R = \frac{E}{I}$, onde I é a corrente em ampéres e E é a força eletromotriz, em volts. Num certo instante, quando $E = 120$ volts e $I = 15$ ampéres, E aumenta numa velocidade de 0,1 volts/s e I diminui à velocidade de 0,05 ampéres/s. Determine a taxa de variação instantânea de R .

R: $\frac{1}{30}$ ohm/s

75. Seja $T = x^2 y - xy^3 + 2$; $x = r \cos(\theta)$; $y = r \sin(\theta)$. Use a regra da cadeia para determinar $\frac{\partial T}{\partial r}$ e $\frac{\partial T}{\partial \theta}$

R: $\frac{\partial T}{\partial r} = 3r^3 \sin(\theta) \cos^2(\theta) - 4r^3 \sin^3(\theta) \cos(\theta)$

$\frac{\partial T}{\partial \theta} = -2r^3 \sin^2(\theta) \cos(\theta) + r^3 \cos^3(\theta) + r^4 \sin^4(\theta) - 3r^4 \sin^2(\theta) \cos^2(\theta)$

76. Suponha que $z = \sqrt{xy + y}$; $x = \cos(\theta)$; $y = \sin(\theta)$. Use a regra da cadeia para determinar $\frac{\partial z}{\partial \theta}$ quando $\theta = \frac{\pi}{2}$

R: $\left. \frac{\partial z}{\partial \theta} \right|_{\theta = \frac{\pi}{2}} = \frac{32}{5}$

Utilize derivadas parciais para calcular $\frac{\partial y}{\partial x}$ se $y = f(x)$ é definida implicitamente pelas equações dadas abaixo. Exercícios 77 a 80.

77. $2x^3 + x^2y + y^3 = 1$

78. $6x + \sqrt{xy} = 3y - 4$

79. $x^4 + 2x^2y^2 - 3xy^3 + 2x = 0$

80. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{1}{3}} = 4$

81. Determine a derivada direcional de $f(x, y) = 3x^2y$ no ponto $(1, 2)$ na direção do vetor $\vec{v} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$

R: $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = \frac{48}{5}$

82. Determine a derivada direcional de $f(x, y) = e^{xy}$ em $(-2, 0)$ na direção do vetor unitário que faz um ângulo de $\theta = \frac{\pi}{3}$ com eixo x positivo.

R: $-\sqrt{3}$

83. Seja $f(x, y) = x^2e^y$. Determine o valor máximo de uma derivada direcional em $(-2, 0)$ e determine o vetor unitário na direção do qual o valor máximo ocorre.

R: $\|\nabla f(-2, 0)\| = 4\sqrt{2}$ (valor máximo) e $\vec{u} = \frac{\nabla f(-2, 0)}{\|\nabla f(-2, 0)\|} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$ (vetor unitário)

84. Suponha que o potencial numa lâmina plana é dado por $V(x, y) = 80 - 20xe^{-\frac{x^2 + y^2}{20}}$ em volts, x e y em centímetros.

(a) Determine a taxa de variação do potencial em qualquer direção paralela ao eixo dos x .

R: $\frac{\partial V}{\partial x} = 2(x^2 - 10)e^{-\frac{x^2 + y^2}{20}}$

(b) Determine a taxa de variação do potencial em qualquer direção paralela ao eixo dos y .

R: $\frac{\partial V}{\partial y} = 2xye^{-\frac{x^2 + y^2}{20}}$

(c) Qual a taxa máxima de variação do potencial no ponto $(1, 2)$?

R: $\|\nabla f(1, 2)\| = \frac{2\sqrt{85}}{\sqrt[4]{e}}$ volts

85. Seja $U = 2x^3y - 3y^2z$

(a) Calcule a derivada direcional de U em $P = (1, 2, -1)$ em direção de P a $Q(3, -1, 5)$

R: $\frac{\partial U}{\partial \vec{u}} = \frac{48}{7}$

(b) Em qual direção a partir de P a derivada direcional é máxima?

R: A derivada direcional é máxima na direção do gradiente $\nabla f(1, 2, -1) = 12\vec{i} + 14\vec{j} - 12\vec{k}$

(c) Qual a magnitude da derivada direcional máxima?

R:22

86. Uma indústria produz dois produtos denotados por A e B . O lucro da indústria pela venda de x unidades do produto A e y unidades do produto B é dado por:

$$L(x, y) = 60x + 100y - \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}y^2 - xy$$

Supondo que toda a produção da indústria seja vendida, determinar a produção que maximiza o lucro. Determine também esse lucro.

R:(10, 30) \rightarrow 1,600

87. Quais as dimensões de uma caixa retangular sem tampa com volume 4m^3 e com a menor área de superfície possível?

R:(2, 2, 1)

Determine os pontos críticos das funções, a seguir investigue a sua natureza. Exercícios 88 a 96.

88. $f(x, y) = 3x^2 + 2xy + y^2 + 10x + 20y + 1$

R:(-2, 1) Ponto de mínimo.

89. $f(x, y) = x^2 + y^3 - 6xy$

R:(0, 0) Ponto de sela, (18, 6) Ponto de mínimo

90. $f(x, y) = xy - x^2 - y^2 - 2x - 2y + 4$

R:(-2, -2)

91. $f(x, y) = \frac{x^3}{3} + 9y^3 - 4xy$

R:(0, 0) e $\frac{4}{3}, \frac{4}{9}$

92. $f(x, y) = e^{-2x} \cos(y)$

R:Não tem ponto crítico

93. $f(x, y) = xy + 2x - \ln(x^2y)$ $x > 0, y > 0$

R:($\frac{1}{2}, 0$) Ponto de mínimo.

94. $f(x, y) = -x^2 - 4x - y^2 + 2y - 1$

R:(-2, 1) Ponto de máximo

95. $f(x, y) = x^2 + 2xy + 3y^2$

R:(0, 0) Ponto de mínimo

96. $f(x, y) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^3 + 4xy + y^2$

R: (0, 0) Ponto de sela, (4, -8) Ponto de mínimo, (-1, 2) Ponto de máximo

97. Determine os pontos de máximos e/ou mínimos das funções dadas, sujeito às restrições:

(a) $z = 4 - 2x - 3y; x^2 + y^2 = 1$

R: $\left(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}\right)$ Ponto de mínimo, $\left(-\frac{2}{\sqrt{13}}, -\frac{3}{\sqrt{13}}\right)$ Ponto de máximo

(b) $z = 2x + y; x^2 + y^2 = 4$

R: $\left(-\frac{4}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ Ponto de mínimo, $\left(\frac{4}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ Ponto de máximo

(c) $f(x, y) = xy; x^2 + y^2 = 1$

R:

(d) $f(x, y) = x^2 + y^2; xy = 1$

R: $f(1, 1) = f(-1, -1) = 2$

(e) $f(x, y) = x^2 - y^2; x^2 + y^2 = 4$

R: $f(0, 2) = f(0, -2) = -4$

98. O departamento de estrada está planejando construir uma área de piquenique para motoristas ao longo de uma grande auto-estrada. Ela deve ser retangular, com uma área de 5000 metros quadrados, e cercada nos três lados não-adjacentes à auto-estrada. Qual é a quantidade mínima de cerca que será necessária para realizar o trabalho?

R: 200m

99. Há 320 metros de cerca disponíveis para cercar um campo retangular. Como a cerca deve ser usada de tal forma que a área incluída seja a máxima possível?

R: 40 metros de lado. Campo quadrado.

100. Deseja-se construir um aquário, na forma de um paralelepípedo retangular de volume 1m^3 (1000)L. Determine as dimensões do aquário que minimizam o custo, sabendo que o custo do material usado na confecção do fundo é o dobro do da lateral e que o aquário não terá tampa.

R: $\begin{cases} \min 2xy + 2xz + 2yz \\ \text{s.a } xyz = 1 \end{cases}$, usando os multiplicados de Lagrange. Deverá ser um cubo com aresta de 1m.