Probabilidade e Estatística

Matheus Pimenta

Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Câmpus Cornélio Procópio

ADNP 2020

Distribuição Amostral dos Estimadores

Distribuição Amostral dos Estimadores

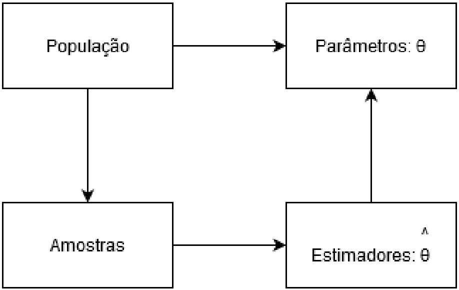

Figura: Esquema geral da Inferência.

Distribuição Amostral dos Estimadores

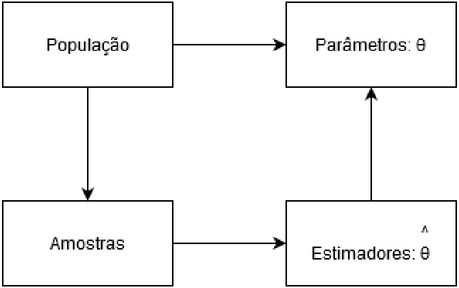

Figura: Esquema geral da Inferência.

Estudaremos como se distribuem por amostragem o estimador $\bar{x}$ da média μ, ou seja é uma estimativa para o parâmetro da população.

Distribuição Amostral da Média

Estimador da média μ populacional: De uma população X retiramos uma amostra de tamanho n constituída pelos elementos $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Distribuição Amostral da Média

Estimador da média μ populacional: De uma população X retiramos uma amostra de tamanho n constituída pelos elementos $x_1, x_2, \ldots, x_n$. O estimador da média μ populacional da amostra é:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Exemplo

Considere uma população finita X, onde:

$$X : 1, 2, 3, 4, 5$$

Exemplo

Considere uma população finita X, onde:

$$X : 1, 2, 3, 4, 5$$

Logo, $N = 5$.

Exemplo

Considere uma população finita X, onde:

$$X : 1, 2, 3, 4, 5$$

Logo, $N = 5$.
Queremos mostrar que a esperança amostral $E(\bar{x})$ é igual a média μ populacional.

Exemplo

Considere uma população finita X, onde:

$$X : 1, 2, 3, 4, 5$$

Logo, $N = 5$.
Queremos mostrar que a esperança amostral $E(\bar{x})$ é igual a média μ populacional.

$$E(x) = \mu_x = \sum_{i=1}^{N} x_i . p(x_i).$$

Exemplo

Considere uma população finita X, onde:

$$X : 1, 2, 3, 4, 5$$

Logo, $N = 5$.
Queremos mostrar que a esperança amostral $E(\bar{x})$ é igual a média μ populacional.

$E(x) = \mu_x = \sum_{i=1}^{N} x_i.p(x_i)$. Dessa maneira, temos que:

$$E(x) = \mu_x =$$

Exemplo

Considere uma população finita X, onde:

$$X : 1, 2, 3, 4, 5$$

Logo, $N = 5$.
Queremos mostrar que a esperança amostral $E(\bar{x})$ é igual a média μ populacional.

$E(x) = \mu_x = \sum_{i=1}^{N} x_i.p(x_i)$. Dessa maneira, temos que:

$$E(x) = \mu_x = \frac{1+2+3+4+5}{5} =$$

Exemplo

Considere uma população finita X, onde:

$$X : 1, 2, 3, 4, 5$$

Logo, $N = 5$.
Queremos mostrar que a esperança amostral $E(\bar{x})$ é igual a média μ populacional.

$E(x) = \mu_x = \sum_{i=1}^{N} x_i.p(x_i)$. Dessa maneira, temos que:

$$E(x) = \mu_x = \frac{1+2+3+4+5}{5} = \frac{15}{5} =$$

Exemplo

Considere uma população finita X, onde:

$$X : 1, 2, 3, 4, 5$$

Logo, $N = 5$.
Queremos mostrar que a esperança amostral $E(\bar{x})$ é igual a média μ populacional.

$E(x) = \mu_x = \sum_{i=1}^{N} x_i.p(x_i)$. Dessa maneira, temos que:

$$E(x) = \mu_x = \frac{1+2+3+4+5}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

Exemplo

Considere uma população finita X, onde:

$$X : 1, 2, 3, 4, 5$$

Logo, $N = 5$.
Queremos mostrar que a esperança amostral $E(\bar{x})$ é igual a média μ populacional.

$E(x) = \mu_x = \sum_{i=1}^{N} x_i.p(x_i)$. Dessa maneira, temos que:

$$E(x) = \mu_x = \frac{1+2+3+4+5}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

Para a Variância usaremos:

Exemplo

Considere uma população finita X, onde:

$$X : 1, 2, 3, 4, 5$$

Logo, $N = 5$.
Queremos mostrar que a esperança amostral $E(\bar{x})$ é igual a média μ populacional.

$E(x) = \mu_x = \sum_{i=1}^{N} x_i.p(x_i)$. Dessa maneira, temos que:

$$E(x) = \mu_x = \frac{1+2+3+4+5}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

Para a Variância usaremos: $VAR(x) = \sigma_x^2 = \sum_{i=1}^{N} (x_i - \mu_x)^2.p(x_i)$

Exemplo

Criando uma Tabela:

x	$P(x)$	$x - \mu_x$	$(x - \mu_x)^2$	$(x - \mu_x)^2.P(x)$
1	$\frac{1}{5}$	-2	4	$\frac{4}{5}$
2	$\frac{1}{5}$	-1	1	$\frac{1}{5}$
3	$\frac{1}{5}$	0	0	0
4	$\frac{1}{5}$	1	1	$\frac{1}{5}$
5	$\frac{1}{5}$	2	4	$\frac{4}{5}$
$\sum$	1			2

Exemplo

Criando uma Tabela:

x	$P(x)$	$x - \mu_x$	$(x - \mu_x)^2$	$(x - \mu_x)^2.P(x)$
1	$\frac{1}{5}$	-2	4	$\frac{4}{5}$
2	$\frac{1}{5}$	-1	1	$\frac{1}{5}$
3	$\frac{1}{5}$	0	0	0
4	$\frac{1}{5}$	1	1	$\frac{1}{5}$
5	$\frac{1}{5}$	2	4	$\frac{4}{5}$
$\sum$	1			2

Dessa maneira:

$$\sigma_x^2 = VAR(x) = 2$$

Exemplo

Agora, seguindo nosso esquema inicial iremos retirar todas as amostras com reposição desta população finita. As amostras terão tamanho $n = 2$. Assim, o número de amostras será: $N^n = 5^2 = 25$. Calcularemos a média amostral de todas as amostras.

Exemplo

Agora, seguindo nosso esquema inicial iremos retirar todas as amostras com reposição desta população finita. As amostras terão tamanho $n = 2$. Assim, o número de amostras será: $N^n = 5^2 = 25$. Calcularemos a média amostral de todas as amostras.

Amostras		$\bar{x}_i$
1	(1,1)	1,0
2	(1,2)	1,5
3	(1,3)	2,0
4	(1,4)	2,5
5	(1,5)	3,0
6	(2,1)	1,5
7	(2,2)	2,0
8	(2,3)	2,5
9	(2,4)	3,0
10	(2,5)	2,5

Exemplo

Agora, seguindo nosso esquema inicial iremos retirar todas as amostras com reposição desta população finita. As amostras terão tamanho $n = 2$. Assim, o número de amostras será: $N^n = 5^2 = 25$. Calcularemos a média amostral de todas as amostras.

Amostras		$\bar{x}_i$	Amostras		$\bar{x}_i$
1	(1,1)	1,0	11	(3,1)	2,0
2	(1,2)	1,5	12	(3,2)	2,5
3	(1,3)	2,0	13	(3,3)	3,0
4	(1,4)	2,5	14	(3,4)	3,5
5	(1,5)	3,0	15	(3,5)	4,0
6	(2,1)	1,5	16	(4,1)	2,5
7	(2,2)	2,0	17	(4,2)	3,0
8	(2,3)	2,5	18	(4,3)	3,5
9	(2,4)	3,0	19	(4,4)	4,0
10	(2,5)	2,5	20	(4,5)	4,5

Exemplo

Agora, seguindo nosso esquema inicial iremos retirar todas as amostras com reposição desta população finita. As amostras terão tamanho $n = 2$. Assim, o número de amostras será: $N^n = 5^2 = 25$. Calcularemos a média amostral de todas as amostras.

Amostras		$\bar{x}_i$	Amostras		$\bar{x}_i$	Amostras		$\bar{x}_i$
1	(1,1)	1,0	11	(3,1)	2,0	21	(5,1)	3,0
2	(1,2)	1,5	12	(3,2)	2,5	22	(5,2)	3,5
3	(1,3)	2,0	13	(3,3)	3,0	23	(5,3)	4,0
4	(1,4)	2,5	14	(3,4)	3,5	24	(5,4)	4,5
5	(1,5)	3,0	15	(3,5)	4,0	25	(5,5)	5,0
6	(2,1)	1,5	16	(4,1)	2,5			
7	(2,2)	2,0	17	(4,2)	3,0			
8	(2,3)	2,5	18	(4,3)	3,5			
9	(2,4)	3,0	19	(4,4)	4,0			
10	(2,5)	2,5	20	(4,5)	4,5			

Exemplo

Verificamos que $\bar{x}_i$ varia em cada uma das 25 amostras, logo podemos analisar $\bar{x}_i$ como uma variável aleatória, neste caso, uma variável aleatória discreta.

Exemplo

Verificamos que $\bar{x}_i$ varia em cada uma das 25 amostras, logo podemos analisar $\bar{x}_i$ como uma variável aleatória, neste caso, uma variável aleatória discreta.

$\bar{x}$	$P(\bar{x})$	$\bar{x}.P(\bar{x})$	$\bar{x}^2.P(\bar{x})$
1,0	$\frac{1}{25}$	$\frac{1,0}{25}$	$\frac{1}{25}$
1,5	$\frac{2}{25}$	$\frac{3,0}{25}$	$\frac{4,5}{25}$
2,0	$\frac{3}{25}$	$\frac{6,0}{25}$	$\frac{12}{25}$
2,5	$\frac{4}{25}$	$\frac{10,0}{25}$	$\frac{25}{25}$
3,0	$\frac{5}{25}$	$\frac{15,0}{25}$	$\frac{45}{25}$
3,5	$\frac{4}{25}$	$\frac{14}{25}$	$\frac{49}{25}$
4,0	$\frac{3}{25}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{48}{25}$
4,5	$\frac{2}{25}$	$\frac{9}{25}$	$\frac{40,5}{25}$
5,0	$\frac{1}{25}$	$\frac{5,0}{25}$	$\frac{25}{25}$
$\sum$	1	3	10

Exemplo

Dessa forma, utilizando a fórmula da Esperança, temos:

Exemplo

Dessa forma, utilizando a fórmula da Esperança, temos:

$$E(\bar{x}) = \mu_{\bar{x}} = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i . P(\bar{x}_i) = 3$$

Exemplo

Dessa forma, utilizando a fórmula da Esperança, temos:

$$E(\bar{x}) = \mu_{\bar{x}} = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i . P(\bar{x}_i) = 3$$

O que resulta em:

$$\mu_{\bar{x}} = E(\bar{x}) = 3$$

Exemplo

Dessa forma, utilizando a fórmula da Esperança, temos:

$$E(\bar{x}) = \mu_{\bar{x}} = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i.P(\bar{x}_i) = 3$$

O que resulta em:

$$\mu_{\bar{x}} = E(\bar{x}) = 3$$

Como $E(\bar{x}^2) = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i^2.p(\bar{x}_i)$, resulta em: $E(\bar{x}^2) = 10$

Exemplo

Dessa forma, utilizando a fórmula da Esperança, temos:

$$E(\bar{x}) = \mu_{\bar{x}} = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i.P(\bar{x}_i) = 3$$

O que resulta em:

$$\mu_{\bar{x}} = E(\bar{x}) = 3$$

Como $E(\bar{x}^2) = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i^2.p(\bar{x}_i)$, resulta em: $E(\bar{x}^2) = 10$

Vimos que uma outra forma de obter a variância é:

$$VAR(\bar{x}) = E(\bar{x}^2) - \{E(\bar{x})\}^2$$

Exemplo

Dessa forma, utilizando a fórmula da Esperança, temos:

$$E(\bar{x}) = \mu_{\bar{x}} = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i.P(\bar{x}_i) = 3$$

O que resulta em:

$$\mu_{\bar{x}} = E(\bar{x}) = 3$$

Como $E(\bar{x}^2) = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i^2.p(\bar{x}_i)$, resulta em: $E(\bar{x}^2) = 10$

Vimos que uma outra forma de obter a variância é:

$$VAR(\bar{x}) = E(\bar{x}^2) - \{E(\bar{x})\}^2$$

Substituindo, segue:

$$VAR(\bar{x}) = 10 - 3^2 = 1$$

Exemplo

Dessa forma, utilizando a fórmula da Esperança, temos:

$$E(\bar{x}) = \mu_{\bar{x}} = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i . P(\bar{x}_i) = 3$$

O que resulta em:

$$\mu_{\bar{x}} = E(\bar{x}) = 3$$

Como $E(\bar{x}^2) = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i^2 . p(\bar{x}_i)$, resulta em: $E(\bar{x}^2) = 10$

Vimos que uma outra forma de obter a variância é:

$$VAR(\bar{x}) = E(\bar{x}^2) - \{E(\bar{x})\}^2$$

Substituindo, segue:

$$VAR(\bar{x}) = 10 - 3^2 = 1$$

Dessa forma:

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = VAR(\bar{x}) = 1$$

Proposição 01

Proposição 01: A média das médias amostras, ou $E(\bar{x})$, é igual à média μ populacional, ou $E(\bar{x}) = \mu_x$.

Proposição 01

Proposição 01: A média das médias amostras, ou $E(\bar{x})$, é igual à média μ populacional, ou $E(\bar{x}) = \mu_x$.
Quando temos $E(\hat{\theta}) = \theta$, o estimador $\hat{\theta}$ é não viciado, não viesado ou não tendencioso. Assim $\bar{x}$ é um estimador não tendencioso de μ.

Proposição 02

Proposição 02: A variância da média amostral é igual à variância populacional dividida pelo tamanho da amostra, ou seja,

$$VAR(\bar{x}) = \sigma_x^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

Proposição 02

Proposição 02: A variância da média amostral é igual à variância populacional dividida pelo tamanho da amostra, ou seja,

$$VAR(\bar{x}) = \sigma_x^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

Ou seja, se $X : N(\mu, \sigma^2)$ e se dessa população retiramos amostras de tamanho n, então:

$$\bar{x} : N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

Distribuição Amostral dos Estimadores

A distribuição da variável $\bar{x}$ por amostragem simples será sempre normal com a mesma média da população X e a variância n vezes menor. Ou seja, quanto maior a amostra menor a variância da média, ou seja, quanto maior a amostra maior a precisão do estimador $\bar{x}$.

Distribuição Amostral dos Estimadores

A distribuição da variável $\bar{x}$ por amostragem simples será sempre normal com a mesma média da população X e a variância n vezes menor. Ou seja, quanto maior a amostra menor a variância da média, ou seja, quanto maior a amostra maior a precisão do estimador $\bar{x}$.

O Fator de Correção para populações finitas e de tamanho N conhecido , e se a amostra de tamanho n dela retirada for sem reposição, então:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

Exemplo 01

Exemplo 01: Em uma população de 5000 alunos de uma faculdade sabemos que a altura média dos alunos é 175cm e o desvio padrão, 5cm. Retiramos uma amostra sem reposição, de tamanho $n = 100$. Determine o desvio padrão dessa amostra.

Exemplo 01 - Solução

Solução:

Temos que $X : N(175, 25) \begin{cases} u = 175 \\ \sigma = 5 \end{cases}$

Exemplo 01 - Solução

Solução:

Temos que $X : N(175, 25) \begin{cases} u = 175 \\ \sigma = 5 \end{cases}$

Então, $\sigma_{\bar{x}} = E(\bar{x}) = 175$

Exemplo 01 - Solução

Solução:

Temos que $X : N(175, 25) \begin{cases} u = 175 \\ \sigma = 5 \end{cases}$

Então, $\sigma_{\bar{x}} = E(\bar{x}) = 175$

e

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = \frac{5}{10}\sqrt{\frac{5000-100}{5000-1}} = 0,495024$$

Exemplo 01 - Solução

Solução:

Temos que $X : N(175, 25) \begin{cases} u = 175 \\ \sigma = 5 \end{cases}$

Então, $\sigma_{\bar{x}} = E(\bar{x}) = 175$

e

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = \frac{5}{10}\sqrt{\frac{5000-100}{5000-1}} = 0,495024$$

Assim, a média das médias amostrais é 175cm e o desvio padrão da média amostral é $0,5$cm.

Exemplo 01 - Solução

Se não utilizássemos o fator de correção, teríamos:

Exemplo 01 - Solução

Se não utilizássemos o fator de correção, teríamos:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{5}{10} = 0,5$$

Exemplo 01 - Solução

Se não utilizássemos o fator de correção, teríamos:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{5}{10} = 0,5$$

Isto é, quando tiramos uma amostra grande de uma população muito maior que o da amostra (pelo menos o dobro), é indiferente usar o fator de correção para populações finitas, pois o erro é muito pequeno.

■

Dimensionamento de uma Amostra

Para determinarmos qual o tamanho da amostra que deveremos retirar para obter um erro de amostragem dentro de um risco determinado utilizamos o seguinte exemplo:

Dimensionamento de uma Amostra

Para determinarmos qual o tamanho da amostra que deveremos retirar para obter um erro de amostragem dentro de um risco determinado utilizamos o seguinte exemplo:

Exemplo 01: Seja $X : N(1200, 840)$. Qual deverá ser o tamanho da amostra de tal forma que $P(1.196 < \bar{x} < 1204) = 0,9$?

Dimensionamento de uma Amostra

Para determinarmos qual o tamanho da amostra que deveremos retirar para obter um erro de amostragem dentro de um risco determinado utilizamos o seguinte exemplo:
Exemplo 01: Seja $X : N(1200, 840)$. Qual deverá ser o tamanho da amostra de tal forma que $P(1.196 < \bar{x} < 1204) = 0,9$?
Solução:

Se $X : N(1200, 840) \begin{cases} \mu = 1200 \\ \sigma^2 = 840 \end{cases} \quad \therefore \sigma_{\bar{x}} = 1200$

Dimensionamento de uma Amostra

Para determinarmos qual o tamanho da amostra que deveremos retirar para obter um erro de amostragem dentro de um risco determinado utilizamos o seguinte exemplo:
Exemplo 01: Seja $X : N(1200, 840)$. Qual deverá ser o tamanho da amostra de tal forma que $P(1.196 < \bar{x} < 1204) = 0,9$?
Solução:

Se $X : N(1200, 840) \begin{cases} \mu = 1200 \\ \sigma^2 = 840 \end{cases} \quad \therefore \sigma_{\bar{x}} = 1200$ e

Dimensionamento de uma Amostra

Para determinarmos qual o tamanho da amostra que deveremos retirar para obter um erro de amostragem dentro de um risco determinado utilizamos o seguinte exemplo:

Exemplo 01: Seja $X : N(1200, 840)$. Qual deverá ser o tamanho da amostra de tal forma que $P(1.196 < \bar{x} < 1204) = 0,9$?

Solução:

Se $X : N(1200, 840) \begin{cases} \mu = 1200 \\ \sigma^2 = 840 \end{cases} \quad \therefore \sigma_{\bar{x}} = 1200$ e

$\sigma_{\bar{x}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \dfrac{28,98}{\sqrt{n}} \therefore Z = \dfrac{\bar{x} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}}$

ou

$Z_\alpha = Z_{0,45} = 1,64$

Dimensionamento de uma Amostra

Assim,

Dimensionamento de uma Amostra

Assim,

$$1,64 = \frac{1204 - 1200}{\frac{28{,}98}{\sqrt{n}}}$$

Dimensionamento de uma Amostra

Assim,

$$1,64 = \frac{1204 - 1200}{\frac{28{,}98}{\sqrt{n}}}$$

É indiferente escolher o extremo inferior ou superior, sendo assim:

$$\sqrt{n} = \frac{1,64 \cdot 28,98}{4}$$

$$\sqrt{n} = 11,88 \implies n = 141,13 \implies n \approx 141$$

Dimensionamento de uma Amostra

Assim,

$$1,64 = \frac{1204 - 1200}{\frac{28{,}98}{\sqrt{n}}}$$

É indiferente escolher o extremo inferior ou superior, sendo assim:

$$\sqrt{n} = \frac{1,64 \cdot 28,98}{4}$$

$$\sqrt{n} = 11,88 \implies n = 141,13 \implies n \approx 141$$

Com isso, concluímos que, se retirarmos uma amostra de 141 elementos da população X, teremos 95% de confiança que $\bar{x}$ estará no intervalo $(1.196, 1.216)$, o que significa que o risco que corremos de que o valor da média caia fora do intervalo anterior é de 5%.

■