Universidade Estadual de Londrina
Centro de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Lista 03

Dados de Identificação	
Professor:	Matheus Pimenta
Disciplina:	Cálculo Diferencial e Integral II - 1MAT180
Aluno:	

Observação: Não precisa ser entregue. Apenas para desenvolvimento do pensamento matemático.

1. Dada a função $f(x, y) = x^2 - y^2 + 3x - 4$, determine:

   (a) $f(0, 0)$
   R: -4

   (b) $f(3, 4)$
   R: -2

   (c) $f(2, t)$
   R: $6 - t^2$

   (d) os valores de x para os quais $f(x) = -y^2$
   R: $x = -4 \vee x = 1$

2. Determinar uma função de várias variáveis que represente:

   (a) O volume de água necessário para encher uma piscina redonda de x metros de raio e y metros de altura.
   R: $V(x, y) = \pi x^2 y$

   (b) A quantidade de rodapé, em metros, necessária para se colocar numa sala retangular de largura x e comprimento y.
   R: $f(x, y) = 2(x + y)$

   (c) A quantidade, em metros quadrados, de papel de parede necessária para revestir as paredes laterais de uma quarto retangular de x metros de largura, y metros de comprimento e z metros de altura.
   R:$f(x, y, z) = 2(xz + yz)$

   (d) O volume de um paralelepípedo retângulo de dimensões x, y e z.
   R: $V(x, y, z) = xyz$

   (e) A distância entre dois pontos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e $P_2(x_2, y_2, z_2)$.
   R: $d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

(f) A temperatura nos pontos de uma esfera, se ela, em qualquer ponto, é numericamente igual a distância do ponto ao centro da esfera.
R: $T(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

3. Determine o domínio das sequintes funções de várias variáveis reais. Represente graficamente, se possível.

(a) $z = x^2 + y^2$
R: $\mathbb{R}^2$

(b) $z = \dfrac{7}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$
R: $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1\}$

(c) $z = \dfrac{5}{x + y + z + u + v}$
R:$D = \{(x, y, z, u, v) \in \mathbb{R}^5; x + y + z + u + v \neq 0\}$

(d) $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$
R:$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \neq 0 \wedge \ y \neq 0\}$

(e) $f(x, y, z) = \dfrac{x - 2y}{\sqrt{4y - y^2}} + \sqrt{12 + x - x^2}$
R:$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -2 \leq x \leq 4 \wedge 0 < y < 4\}$

(f) $f(x, y) = \dfrac{x + y}{x - y}$
R:$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \neq y\}$

(g) $z = \ln(x - y)$
R:$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > x\}$

(h) $f(x, y, z) = \sqrt{16 - x^2 - y^2 - z^2}$
R:$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq 16\}$

4. Determine para cada função o maior subconjunto de $\mathbb{R}^3$ onde as funções são definidas, represente se possível este conjunto graficamente:

(a) $f(x, y, z) = \dfrac{4xyz}{\sqrt{9 - x^2 - y^2 - z^2}}$
R:$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 < 9\}$

(b) $f(x, y, z) = x^2 - yz + 4\sqrt{36 - x^2 - y^2 - z^2}$
R:$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq 36\}$

(c) $f(x, y, z) = \dfrac{x + y - z + 2}{xyz}$
R:$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x \neq \wedge \ y \neq 0 \wedge \ z \neq 0\}$

(d) $f(x, y, z) = \sqrt{(x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z - 1)^2 - 25}$
R:$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z - 1)^2 \geq 25\}$

5. Esboce as curvas de nível de f para os seguintes valores de k:

(a) $f(x, y) = \sqrt{100 - x^2 - y^2}$; $k = 0, 2, 4, 6, 8, 10$

(b) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$; $k = 0, 1, 2, 3, 4$

(c) $f(x, y) = 4x^2 + 9y^2$; $k = 0, 2, 4, 6$

(d) $f(x, y) = 3x - 7y$; $k = 0, \pm 1, \pm 2$

6. Esboce o gráfico das funções:

   (a) $f(x,y) = x^2 + y^2$
   (b) $f(x,y) = 2x + 3y + 4z - 12$
   (c) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$
   (d) $f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

7. Utilize as ferramentas matemáticas de limites e continuidade para calcular os limites abaixo:

   (a) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,3)} 4xy^2 - x = 35$
   (b) $\lim\limits_{(x,y)\to\left(\frac{1}{2},\pi\right)} xy^2\text{sen}(xy) = \dfrac{\pi^2}{2}$
   (c) $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,2)} \dfrac{xy^3}{x+y} = -8$
   (d) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,-3)} e^{2x-y^2} = e^{-7}$
   (e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \ln\big(1 + x^2 + y^2\big) = 0$
   (f) $\lim\limits_{(x,y)\to(4,-2)} x\sqrt{y^3 + 2x} = 0$

8. Mostre que os limites não existem ao longo dos eixos coordenados:

   (a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3}{x^2 + 2y^2}$
   (b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x+y}{x+y^2}$
   (c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x-y}{x^2+y^2}$
   (d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\cos(xy)}{x+y}$

9. Determine se os limites existem. Se existir, determine o seu valor.

   (a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2} = 0$
   (b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4 - 16y^4}{x^2 + 4y^2} = 0$
   (c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{3x^2 + 2y^2}; \nexists$
   (d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1 - x^2 - y^2}{x^2 + y^2}; \nexists$
   (e) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(2,-1,2)} \dfrac{xz^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \dfrac{8}{3}$
   (f) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(2,0,-1)} \ln(2x + y - z) = \ln(5)$

10. Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\text{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & \text{se}(x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{se}(x,y) = (0,0) \end{cases}$. Mostre que f é contínua em $(0,0)$.

11. Seja $f(x,y) = \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$. É possível definir $f(0,0)$ tal que f seja contínua em $(0,0)$?
R:Não

12. Seja $f(x,y) = xy\ln(x^2+y^2)$. É possível definir $f(0,0)$ tal que f seja contínua em $(0,0)$?
R:Sim

13. Dada $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2y}{x^2+y^2} & \text{se}(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se}(x,y) = (0,0) \end{cases}$. Determine se f é contínua em $(0,0)$.
R:Sim

14. Calcule as derivadas parciais das funções a seguir:

(a) $z = x^2\text{sen}(y)$

R:$\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x\text{sen}(y); \dfrac{\partial z}{\partial y} = x^2\cos(y)$

(b) $z = x^2 + 3xy - 4y^2$

R:$\dfrac{\partial z}{\partial x} 2x + 3y; \dfrac{\partial z}{\partial y} = 3x - 8y$

(c) $z = \text{sen}(3x)\cos(2y)$

R:$\dfrac{\partial z}{\partial x} = 3\cos(3x)\cos(2y); \dfrac{\partial z}{\partial y} = -2\text{sen}(3x)\text{sen}(2y)$

(d) $f(x,y,z) = \dfrac{x^2+y^2+z^2}{x+y+z}$

R:$\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{x^2-y^2-z^2+2xy+2xz}{(x+y+z)^2}$;
$\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{y^2-x^2-z^2+2xy+2yz}{(x+y+z)^2}$;
$\dfrac{\partial f}{\partial z} = \dfrac{z^2-x^2-y^2+2xz+2yz}{(x+y+z)^2}$

(e) $z = x^2 + 3y^2 + 4xy + 4$

R:$\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x + 4y; \dfrac{\partial z}{\partial y} = 4x + 6y$

(f) $z = x^2\text{sen}(2xy)$

R :$\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x[\text{sen}(2xy) + xy\cos(xy)]; \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2x^3\cos(2xy)$

(g) $z = e^{x^2-2y^2+4x}$

R:$\dfrac{\partial z}{\partial x} = (2x+4)e^{x^2-2y^2+4x}; \dfrac{\partial z}{\partial y} = -4ye^{x^2-2y^2+4x}$

(h) $z = \dfrac{1}{x+2y+1}$

R: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{1}{(x+2y+1)^2}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{2}{(x+2y+1)^2}$

(i) $z = x^3y - e^{xy^2}$

R: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y - y^2e^{xy^2}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = x^3 + 2xye^{xy^2}$

(j) $f(x,y) = e^{xy} + artg\left(\frac{x}{y}\right)$

R: $\dfrac{\partial f}{\partial x} = ye^{xy} - \dfrac{y}{x^2+y^2}$; $\dfrac{\partial f}{\partial y} = xe^{xy} + \dfrac{x}{x^2+y^2}$

(k) $z = x^2\text{sen}\left(\frac{x}{y}\right)$

R: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x\text{sen}\left(\dfrac{x}{y}\right) + \dfrac{x^2}{y}\cos\left(\dfrac{x}{y}\right)$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{x^2}{y^2} - \cos\left(\dfrac{x}{y}\right)$

(l) $z = (\text{sen}(x))^{\text{sen}(y)}$

R: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \text{sen}(y)(\text{sen}(x))^{\text{sen}(y)-1}\cos(x)$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = (\text{sen}(x)^{\text{sen}(y)}\cos(x)\ln(\text{sen}(x))$

(m) $z = \sqrt{\dfrac{e^x - y}{y - x^2}}$

R: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{e^x(y - x^2 + 2x) - 2xy}{2\sqrt{(e^x - y)(y - x^2)^3}}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{x^2 - e^x}{2\sqrt{(e^x - y)(y - x^2)^3}}$

(n) $z = e^{x^2+y^2+z^2}$

R: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2xe^{x^2+y^2+z^2}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2ye^{x^2+y^2+z^2}$; $\dfrac{\partial z}{\partial z} = 2ze^{x^2+y^2+z^2}$

15. Dado o ponto $P(-1,4)$ e $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, calcule:

(a) $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$

R: $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = -\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

(b) $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$

R: $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

(c) $\dfrac{\partial f(P)}{\partial x}$

R: $\dfrac{\partial f(-1,4)}{\partial x} = -\dfrac{\sqrt{17}}{17}$

(d) $\dfrac{\partial f(P)}{\partial y}$

R: $\dfrac{\partial f(-1,4)}{\partial y} = \dfrac{4\sqrt{17}}{17}$

16. A função $T(x, y) = 60 - 2x^2 - 3y^2$ representa a temperatura em qualquer ponto de uma chapa. Encontrar a razão de variação da temperatura em relação a distância percorrida ao longo da placa na direção dos eixos positivos x e y, no ponto $(1, 2)$. Considerar a temperatura medida em graus Celsius e a distância em cm.

    R:$\dfrac{\partial T(1,2)}{\partial x} = -4°\text{C}/\text{cm}$; $\dfrac{\partial T(1,2)}{\partial y} = -12°\text{C}/\text{cm}$

17. Determine as derivadas parciais de segunda ordem das seguintes funções:

    (a) $z = x^2 - 3y^3 + 4x^2y^2$

    R:$2 + 8y^2; 16xy; 16xy; -18y + 8x^2$

    (b) $z = x^2y^2 - xy$

    R:$2y^2; 4xy - 1; 4xy - 1; 2x^2$

    (c) $z = \ln(xy)$

    R:$-\dfrac{1}{x^2}; 0; 0; -\dfrac{1}{y^2}$

    (d) $z = e^{xy}$

    R:$y^2e^{xy}; e^{xy}(1 + xy); e^{xy}(1 + xy); x^2e^{xy}$

18. Se $z = f(x, y)$ tem derivadas parciais de segunda ordem contúnuas e satisfaz a *equação de Laplace* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$, ela é dita uma *função harmônica*. Verifique se as funções abaixo são funções harmônicas:

    (a) $z = y^3 - 3x^2y$

    R:Sim

    (b) $z = x^2 + 2xy$

    R:Não

    (c) $z = e^x \cos(y)$

    R:Sim

19. Mostre que as funções abaixo satisfazem a *equação do calor* $\dfrac{\partial z}{\partial t} = c^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

    (a) $z = e^{-t}\text{sen}\left(\frac{x}{c}\right)$

    (b) $z = e^{-t}\cos\left(\frac{x}{c}\right)$

20. Quando dois resistores R_1 ohms e R_2 ohms são conectados em paralelo, sua resistência combinada R em ohms é

    $$R = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}.$$

    Mostre que: $\dfrac{\partial^2 R}{\partial R_1^2}\dfrac{\partial^2 R}{\partial R_2^2} = \dfrac{4R^2}{(R_1 + R_2)^4}$

21. Suponha que o potencial elétrico V no ponto (x, y, z) seja dado por $V = \dfrac{100}{x^2 + y^2 + z^2}$, onde V é dado em volts e x, y e z em centímetros. Ache a taxa instantânea de variação de V em relação à distância em $(2, -1, 1)$ na direção do eixo x, do eixo y e do eixo z.

22. Um objeto está situado em um sistema coordenado retangular tal que a temperatura T no ponto $P(x, y, z)$ seja dada por $T = 4x^2 - y^2 + 16z^2$, em que T é expressa em graus e x, y e z em centímetros. Ache a taxa instantânea de variação de T em relação à distância no ponto $P(4, -2, 1)$ na direção dos eixos x, y e z.

23. Em uma livraria, o lucro mensal L é uma função do número de vendedores, x, e do capital investido em livros, y (y em milhares de reais). Em certa época tem-se $L(x, y) = 400 - (12 - x)^2 - (40 - y)^2$.

    (a) Calcule o lucro diário se a empresa tem 7 vendedores e 30 mil investidos.

    (b) Calcule $\dfrac{\partial L}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial L}{\partial y}$

    (c) O que é mais lucrativo, a partir da situação do item (a):

        i. aumentar de uma unidade o número de funcionários (vendedores), mantendo o capital investido, ou,

        ii. investir mais mil reais, mantendo o número de vendedores?

24. Uma fábrica produz mensalmente x unidades de um produto A e y unidades de um produto B, sendo o custo mensal da produção conjunta dado por $C(x, y) = 20000 + \sqrt{x^2 + y^2}$. Em certo mês foram produzidos 3000 unidades do produto A e 2000 unidades do produto B.

    (a) Calcule o custa da produção neste mês

    (b) Calcule $\dfrac{\partial C}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial C}{\partial y}$

    (c) O que é mais conveniente a partir dessa situação: aumentar a produção do produto A mentendo constante a produção do produto B, ou vice versa? Justifique com base nos resultados anteriores.

25. No estudo da penetração da geada em uma rodovia, a temperatura T no instante t de horas e à produndidade x pode ser dada aproximadamente por $T = T_0 e^{-\lambda x} \operatorname{sen}(\omega t - \lambda x)$, em que T_0, ω, λ são constantes. O período de $\operatorname{sen}(\omega t - \lambda x)$ representa 24 horas.

    (a) Calcule e interprete $\dfrac{\partial T}{\partial t}$ e $\dfrac{\partial T}{\partial x}$

    (b) Mostre que T satisfaz a equação unidimensional do calor $\dfrac{\partial T}{\partial t} = k\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ em que k é constante.

26. A energia consumida num resistor elétrico é dada por $P = \dfrac{V^2}{R}$ watts. Se $V = 120$ watts e $R = 12$ ohms, calcular um valor aproximado para a variação de energia quando V decresce de $0,001$ volts e R aumenta de $0,02$ ohms.

    R:$-2,02$

27. Calcular o valor aproximada da variação da hipotenusa de um triângulo cujos catetos medem 6cm e 8, quando o cateto menor é aumentado de $0,25$cm e o maior é diminuído de $0,125$.

    R:$dh = \Delta h \approx 0,05$

28. Um orifício cilíndrico circular de 4cm de diâmetro e 12cm de profundidade, existente em um bloco metálico, deve ser aumentado para $4,12$cm de diâmetro. Avaliar a quantidade de material que deve ser retirada.

    R:$dV = \Delta V \approx 9,05\text{cm}^3$

29. A resistência R, em Ohms, de um circuito é dada por $R = \dfrac{E}{I}$, onde I é a corrente em ampéres e E é a força eletromotriz, em volts. Num certo instante, quando $E = 120$ volts e $I = 15$ ampéres, E aumenta numa velocidade de $0,1$ volts/s e I diminui à velocidade de $0,05$ ampéres/s. Determine a taxa de variação instantânea de R.

    R:$\dfrac{1}{30}$ ohm/s

30. Seja $T = x^2y - xy^3 + 2; x = r\cos(\theta); y = r\text{sen}(\theta)$. Use a regra da cadeia para determinar $\dfrac{\partial T}{\partial r}$ e $\dfrac{\partial T}{\partial \theta}$

    R:$\dfrac{\partial T}{\partial r} = 3r^3\text{sen}(\theta)\cos^2(\theta) - 4r^3\text{sen}^3(\theta)\cos(\theta)$
    $\dfrac{\partial T}{\partial \theta} = -2r^3\text{sen}^2(\theta)\cos(\theta) + r^3\cos^3(\theta) + r^4\text{sen}^4(\theta) - 3r^4\text{sen}^2(\theta)\cos^2(\theta)$

31. Suponha que $z = \sqrt{xy + y}; x = \cos(\theta); y = \text{sen}(\theta)$. Use a regra da cadeia para determinar $\dfrac{\partial z}{\partial \theta}$ quando $\theta = \dfrac{\pi}{2}$

    R:$\left.\dfrac{\partial z}{\partial t}\right|_{\theta = \frac{\pi}{2}} = \dfrac{32}{5}$

32. Utilize derivadas parciais para calcular $\dfrac{\partial y}{\partial x}$ se $y = f(x)$ é definida implicitamente pelas equações dadas abaixo:

    (a) $2x^3 + x^2y + y^3 = 1$
    (b) $6x + \sqrt{xy} = 3y - 4$
    (c) $x^4 + 2x^2y^2 - 3xy^3 + 2x = 0$
    (d) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{1}{3}} = 4$

33. Determine a derivada direcional de $f(x, y) = 3x^2y$ no ponto $(1, 2)$ na direção do vetor $\vec{v} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$

    R:$\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}} = \dfrac{48}{5}$

34. Determine a derivada direcional de $f(x, y) = e^{xy}$ em $(-2, 0)$ na direção do vetor unitário que faz um ângulo de $\theta = \frac{\pi}{3}$ com eixo x positivo.

    R:$-\sqrt{3}$

35. Seja $f(x,y) = x^2e^y$. Determine o valor máximo de uma derivada direcional em $(-2,0)$ e determine o vetor unitário na direção do qual o valor máximo ocorre.

    R: $\|\nabla f(-2,0)\| = 4\sqrt{2}$ (valor máximo) e $\vec{u} = \dfrac{\nabla f(-2,0)}{\|\nabla f(-2,0)\|} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$ (vetor unitário)

36. Suponha que o potencial numa lâmina plana é dado por $V(x,y) = 80 - 20xe^{-\dfrac{x^2+y^2}{20}}$ em volts, x e y em centímetros.

    (a) Determine a taxa de variação do potencial em qualquer direção paralela ao eixo dos x.

    R: $\dfrac{\partial V}{\partial x} = 2(x^2-10)e^{-\frac{x^2+y^2}{20}}$

    (b) Determine a taxa de variação do potencial em qualquer direção paralela ao eixo dos y.

    R: $\dfrac{\partial V}{\partial y} = 2xye^{-\frac{x^2+y^2}{20}}$

    (c) Qual a taxa máxima de variação do potencial no ponto $(1,2)$?

    R: $\|\nabla f(1,2)\| = \dfrac{2\sqrt{85}}{\sqrt[4]{e}}$ volts

37. Seja $U = 2x^3y - 3y^2z$

    (a) Calcule a derivada direcional de U em $P = (1,2,-1)$ em direção de P a $Q(3,-1,5)$

    R: $\dfrac{\partial U}{\partial \vec{u}} = \dfrac{48}{7}$

    (b) Em qual direção a partir de P a derivada direcional é máxima?

    R: A derivada direcional é máxima na direção do gradiente $\nabla f(1,2,-1) = 12\vec{i} + 14\vec{j} - 12\vec{k}$

    (c) Qual a magnitude da derivada direcional máxima?

    R: 22

38. Uma indústria produz dois produtos denotados por A e B. O lucro da indústria pela venda de x unidades do produto A e y unidades do produto B é dado por:

$$L(x,y) = 60x + 100y - \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}y^2 - xy$$

    Supondo que toda a produção da indústria seja vendida, determinar a produção que maximiza o lucro. Determine também esse lucro.

    R: $(10,30) \rightarrow 1,600$

39. Quais as dimensões de uma caixa retangular sem tampa com volume 4m^3 e com a menor área de superfície possível?

    R: $(2,2,1)$

40. Determine os pontos críticos das funções, a seguir investigue a sua natureza:

(a) $f(x,y) = 3x^2 + 2xy + y^2 + 10x + 20y + 1$

R:$(-2,1)$ Ponto de mínimo.

(b) $f(x,y) = x^2 + y^3 - 6xy$

R:$(0,0)$ Ponto de sela, $(18,6)$ Ponto de mínimo

(c) $f(x,y) = xy - x^2 - y^2 - 2x - 2y + 4$

R:$(-2,-2)$

(d) $f(x,y) = \dfrac{x^3}{3} + 9y^3 - 4xy$

R:$(0,0)$ e $\dfrac{4}{3}, \dfrac{4}{9}$

(e) $f(x,y) = e^{-2x}\cos(y)$

R:Não tem ponto crítico

(f) $f(x,y) = xy + 2x - \ln(x^2y)$ $x > 0, y > 0$

R:$(\frac{1}{2}, 0)$ Ponto de mínimo.

(g) $f(x,y) = -x^2 - 4x - y^2 + 2y - 1$

R:$(-2,1)$ Ponto de máximo

(h) $f(x,y) = x^2 + 2xy + 3y^2$

R:$(0,0)$ Ponto de mínimo

(i) $f(x,y) = \dfrac{1}{2}x^4 - 2x^3 + 4xy + y^2$

R:$(0,0)$ Ponto de sela, $(4,-8)$ Ponto de mínimo, $(-1,2)$ Ponto de máximo

41. Determine os pontos de máximos e/ou mínimos das funções dadas, sujeito às restrições:

(a) $z = 4 - 2x - 3y;\ x^2 + y^2 = 1$

R:$\left(\dfrac{2}{\sqrt{13}}, \dfrac{3}{\sqrt{13}}\right)$ Ponto de mínimo, $\left(-\dfrac{2}{\sqrt{13}}, -\dfrac{3}{\sqrt{13}}\right)$ Ponto de máximo

(b) $z = 2x + y; x^2 + y^2 = 4$

R:$\left(-\dfrac{4}{\sqrt{5}}, -\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$ Ponto de mínimo, $\left(\dfrac{4}{\sqrt{5}}, \dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$ Ponto de máximo

(c) $f(x,y) = xy; x^2 + y^2 = 1$

R:

(d) $f(x,y) = x^2 + y^2; xy = 1$

R:$f(1,1) = f(-1,-1) = 2$

(e) $f(x, y) = x^2 - y^2; x^2 + y^2 = 4$

R:$f(0, 2) = f(0, -2) = -4$

42. O departamento de estrada está planejando construir uma área de piquenique para motoristas ao longo de uma grande auto-estrada. Ela deve ser retangular, com uma área de 5000 metros quadrados, e cercada nos três lados não-adjacentes à auto-estrada. Qual é a quantidade mínima de cerca que será necessária para realizar o trabalho?

    R:200m

43. Há 320 metros de cerca disponíveis para cercar um campo retangular. Como a cerca deve ser usada de tal forma que a área incluída seja a máxima possível?

    R:40 metros de lado. Campo quadrado.

44. Deseja-se construir um aquário, na forma de um paralelepípedo retangular de volume 1m^3 (1000)L. Determine as dimensões do aquário que minimizam o custo, sabendo que o custo do material usado na confecção do fundo é o dobro do da lateral e que o aquário não terá tampa.

    R:$\begin{cases} \text{min } 2xy + 2xz + 2yz \\ \text{s.a } xyz = 1 \end{cases}$, usando os multiplicados de Lagrange. Deverá ser um cubo com aresta de 1m.