Perpendicularidade, Ortogonalidade, Medida Angular e Distância

Matheus Pimenta

Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Câmpus Cornélio Procópio

Abril de 2019

Retas

- Duas retas ortogonais podem ser concorrentes ou reversas e duas retas perpendiculares são obrigatoriamente concorrentes.
- Duas retas são ortogonais se, e somente se, cada vetor diretor de uma é ortogonal a qualquer vetor diretor da outra.

Exemplo

- Verifique se as retas $r : X = (1,1,1) + \lambda(2,1,-3)$ e $s : X = (0,1,0) + \lambda(-1,2,0)$ são ortogonais. Caso sejam, verifique se são perpendiculares.

Vetor Normal a um Plano

Definição: Dado um plano π, qualquer vetor não-nulo ortogonal a π é um **vetor normal** a π.

Vetor Normal a um Plano

Definição: Dado um plano π, qualquer vetor não-nulo ortogonal a π é um **vetor normal** a π.
Um vetor $\overrightarrow{n}$ não-nulo é perpendicular ao plano π se, e somente se, $\overrightarrow{n}$ é ortogonal a qualquer vetor diretor de π.

Vetor Normal a um Plano

Definição: Dado um plano π, qualquer vetor não-nulo ortogonal a π é um **vetor normal** a π.
Um vetor $\overrightarrow{n}$ não-nulo é perpendicular ao plano π se, e somente se, $\overrightarrow{n}$ é ortogonal a qualquer vetor diretor de π.
Assim, se $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ é um par de vetores diretores de π, então $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ (ou qualquer um de seus múltiplos escalares) é vetor normal a π.

Proposição

Proposição: Se o sistema de coordenadas é ortogonal, então $\vec{n} = (a, b, c)$ é um vetor normal ao plano π se, e somente se, π tem uma equação geral da forma $ax + by + cz + d = 0$.

Exemplo

Obtenha a equação geral do plano π que contém o ponto $A = (1, 0, 2)$ sabendo que $\overrightarrow{n} = (1, 1, 4)$ é um vetor normal a π.

Plano e Reta

Se $\overrightarrow{n}$ é um vetor normal ao plano π e $\overrightarrow{r}$ é um vetor diretor da reta r, então r e π são perpendiculares se, e somente se, $\overrightarrow{r}$ e $\overrightarrow{n}$ são paralelos.

Planos

Se $\overrightarrow{n}_1$ e $\overrightarrow{n}_2$ são vetores normais aos planos π_1 e π_2, então os planos são perpendiculares se, e somente se, $\overrightarrow{n}_1$ e $\overrightarrow{n}_2$ são ortogonais, isto é, $\overrightarrow{n}_1 \cdot \overrightarrow{n}_2 = 0$

Exemplo

Verifique se $\pi_1 : X = (0,0,1) + \lambda(1,0,1) + \mu(-1,1,1)$ e $\pi_2 : 2x - 7y + 16z - 40 = 0$ são perpendiculares.

Definição

Definição: Sejam r e s duas retas, $\overrightarrow{r}$ e $\overrightarrow{s}$ vetores diretores. A **medida angular entre** r **e** s é a medida angular entre os vetores $\overrightarrow{r}$ e $\overrightarrow{s}$, se esta pertence ao intervalo $[0, \pi/2]$ *rad* ou $[0, 90]$ (graus) e é a medida angular entre $\overrightarrow{r}$ e $-\overrightarrow{s}$, se pertence a $[\pi/2, \pi]$ ou a $[90, 180]$. Notação: ang(r,s)
OBS: Se $\theta = 0$, então r e s são paralelas e se $\theta = 90$, então r e s são ortogonais.

Definição

Definição: Sejam r e s duas retas, $\overrightarrow{r}$ e $\overrightarrow{s}$ vetores diretores. A **medida angular entre** r **e** s é a medida angular entre os vetores $\overrightarrow{r}$ e $\overrightarrow{s}$, se esta pertence ao intervalo $[0, \pi/2]$ *rad* ou $[0, 90]$ (graus) e é a medida angular entre $\overrightarrow{r}$ e $-\overrightarrow{s}$, se pertence a $[\pi/2, \pi]$ ou a $[90, 180]$. Notação: ang(r,s)
OBS: Se $\theta = 0$, então r e s são paralelas e se $\theta = 90$, então r e s são ortogonais.

$$\cos(\theta) = \frac{|\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{s}|}{||\overrightarrow{r}||||\overrightarrow{s}||}$$

Exemplo

Calcule a medida angular θ entre as retas $r : X = (1, 1, 9) + \lambda(0, -1, 1)$ e $s : (1, 3, 2) + \mu(1, 1, 0)$

Plano e Reta

Definição: Sejam r uma reta e π um plano. A **medida angular** entre r e π é $90 - ang(r, s)$, sendo s uma reta qualquer perpendicular a π.
Notação: $ang(r, \pi)$

Plano e Reta

Definição: Sejam r uma reta e π um plano. A **medida angular** entre r e π é $90 - ang(r,s)$, sendo s uma reta qualquer perpendicular a π.
Notação: $ang(r,\pi)$

$$\sin(\theta) = \frac{|\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{r}|}{||\overrightarrow{n}||||\overrightarrow{r}||}$$

Exemplo

Obtenha a medida angular em radianos entre a reta $r : X = (0, 1, 0) + \lambda(-1, -1, 0)$ e o plano $\pi : y + z - 10 = 0$

Planos

Exemplo: Sendo $\pi_1 : x - y + z = 20$ e
$\pi_2 : X = (1, 1 - 2) + \lambda(0, -1, 1) + \mu(1, -3, 2)$

Entre Pontos

Sejam $A = (x_1, y_1, z_1)$ e $B = (x_2, y_2, z_2)$. A distância $d(A, B)$ entre A e B é $||\overrightarrow{BA}||$, ou seja,

$$d(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

Entre Ponto e Reta

Uma forma é através da projeção ortogonal do ponto a reta.

Entre Ponto e Reta

Uma forma é através da projeção ortogonal do ponto a reta.
Outra forma é: sejam A e B dois pontos quaisquer de r, distintos. A área do triângulo ABP é $||\overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{AB}||/2$, logo se h é a altura relativa ao vértice P, segue que:

$$d(P, r) = \frac{||\overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{AB}||}{||\overrightarrow{AB}||}$$

Entre Ponto e Reta

Uma forma é através da projeção ortogonal do ponto a reta.
Outra forma é: sejam A e B dois pontos quaisquer de r, distintos. A área do triângulo ABP é $||\overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{AB}||/2$, logo se h é a altura relativa ao vértice P, segue que:

$$d(P, r) = \frac{||\overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{AB}||}{||\overrightarrow{AB}||}$$

Indicando por $\overrightarrow{r}$ o vetor $\overrightarrow{AB}$, que é vetor diretor de r, obtemos

$$d(P, r) = \frac{||\overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{r}||}{||\overrightarrow{r}||}$$

onde $\overrightarrow{r}$ é um vetor diretor de r e A é um ponto qualquer de r.

Exemplo

Calcule a distância de $P = (1, 1, -1)$ à interseção de $\pi_1 : x - y = 1$ e $\pi_2 : x + y - z = 0$

Entre Ponto e Plano

Através da projeção do ponto no plano, ou através da projeção ortogonal de $\overrightarrow{AP}$ sobre $\overrightarrow{n}$, onde $\overrightarrow{n}$ é um vetor normal de π.

Entre Ponto e Plano

Através da projeção do ponto no plano, ou através da projeção ortogonal de $\overrightarrow{AP}$ sobre $\overrightarrow{n}$, onde $\overrightarrow{n}$ é um vetor normal de π.

$$d(P,\pi) = \frac{|\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{n}|}{||\overrightarrow{n}||}$$

A versão com coordenadas será:

$$d(P,\pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Onde $P = (x_0, y_0, z_0)$, $A = (x_1, y_1, z_1)$ e $\pi = ax + by + cz + d = 0$

Exemplo

Calcule a distância do ponto $P = (1, 2, -1)$ ao plano
$\pi : 3x - 4y - 5z + 1 = 0$

Distância entre Retas

Outra forma de se calcular a distância entre retas é utilizando:

$$d(r,s) = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{s}|}{||\overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{s}||}$$

Onde B é ponto qualquer de s e A é ponto qualquer de r.

Distância entre Retas

Outra forma de se calcular a distância entre retas é utilizando:

$$d(r,s) = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{s}|}{||\overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{s}||}$$

Onde B é ponto qualquer de s e A é ponto qualquer de r.
OBS: Se r e s são concorrentes a distância é zero
Se r e s são paralelas não podemos utilizar a fórmula acima, temos que selecionar pontos quaisquer entre elas e calcular a distância entre eles.

Distância entre Reta e Plano

Utilizamos um vetor diretor da reta r e um vetor normal $\overrightarrow{n}$ ao plano π e calculamos $\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{n}$, se:

- $\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{n} \neq 0$, r é transversal a π, logo, a distância é zero;
- $\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{n} = 0$, r está contida em π e neste caso a distância é zero, **pode também** a reta ser paralela ao plano π, neste caso a distância é a distância de um ponto qualquer de r ao plano π.

Distância entre Planos

Analisaremos os vetores normais, assim se:

- $(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2})$ é LI, então π_1 e π_2 são transversais e a distância é zero;
- $(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2})$ é LD, então π_1 e π_2 são paralelos e a distância entre eles é dada através da distância entre dois pontos quaisquer deles.