Probabilidade e Estatística

Matheus Pimenta

Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Câmpus Cornélio Procópio

Agosto de 2020
ADNP 2020

Exemplo

São lançadas três moedas.Seja X o número de ocorrências de "cara". Qual a distribuição de probabilidade de X?

Exemplo

São lançadas três moedas.Seja X o número de ocorrências de "cara". Qual a distribuição de probabilidade de X?

Solução:

$\Omega = \{(c,c,c),(c,c,k),(c,k,c),(c,k,k),(k,c,c),(k,c,k),(k,k,c),(k,k,k)$

Exemplo

São lançadas três moedas.Seja X o número de ocorrências de "cara". Qual a distribuição de probabilidade de X?

Solução:

$\Omega = \{(c, c, c), (c, c, k), (c, k, c), (c, k, k), (k, c, c), (k, c, k), (k, k, c), (k, k, k)$

Se X é o número de "cara" que pode-se ter então X tem os seguintes valores: $0, 1, 2$ e 3. Associando os valores a Ω, segue:

X	Evento Associado

Exemplo

São lançadas três moedas.Seja X o número de ocorrências de "cara". Qual a distribuição de probabilidade de X?

Solução:

$\Omega = \{(c,c,c),(c,c,k),(c,k,c),(c,k,k),(k,c,c),(k,c,k),(k,k,c),(k,k,k)\}$

Se X é o número de "cara" que pode-se ter então X tem os seguintes valores: $0, 1, 2$ e 3. Associando os valores a Ω, segue:

X	Evento Associado
0	$A_1 = \{(k,k,k)\}$

Exemplo

São lançadas três moedas.Seja X o número de ocorrências de "cara". Qual a distribuição de probabilidade de X?

Solução:

$\Omega = \{(c,c,c),(c,c,k),(c,k,c),(c,k,k),(k,c,c),(k,c,k),(k,k,c),(k,k,k)\}$

Se X é o número de "cara" que pode-se ter então X tem os seguintes valores: $0,1,2$ e 3. Associando os valores a Ω, segue:

X	Evento Associado
0	$A_1 = \{(k,k,k)\}$
1	$A_2 = \{(c,k,k),(k,c,k),(k,k,c)\}$

Exemplo

São lançadas três moedas.Seja X o número de ocorrências de "cara". Qual a distribuição de probabilidade de X?

Solução:

$\Omega = \{(c, c, c), (c, c, k), (c, k, c), (c, k, k), (k, c, c), (k, c, k), (k, k, c), (k, k, k)$

Se X é o número de "cara" que pode-se ter então X tem os seguintes valores: $0, 1, 2$ e 3. Associando os valores a Ω, segue:

X	Evento Associado
0	$A_1 = \{(k, k, k)\}$
1	$A_2 = \{(c, k, k), (k, c, k), (k, k, c)\}$
2	$A_3 = \{(c, c, k), (c, k, c), (k, c, c)\}$

Exemplo

São lançadas três moedas.Seja X o número de ocorrências de "cara". Qual a distribuição de probabilidade de X?
Solução:
$\Omega = \{(c,c,c),(c,c,k),(c,k,c),(c,k,k),(k,c,c),(k,c,k),(k,k,c),(k,k,k)\}$
Se X é o número de "cara" que pode-se ter então X tem os seguintes valores: $0, 1, 2$ e 3. Associando os valores a Ω, segue:

X	Evento Associado
0	$A_1 = \{(k,k,k)\}$
1	$A_2 = \{(c,k,k),(k,c,k),(k,k,c)\}$
2	$A_3 = \{(c,c,k),(c,k,c),(k,c,c)\}$
3	$A_4 = \{(c,c,c)\}$

Tabela: Resolução do Exemplo 01.

Exemplo

São lançadas três moedas.Seja X o número de ocorrências de "cara". Qual a distribuição de probabilidade de X?

Solução:

$\Omega = \{(c,c,c),(c,c,k),(c,k,c),(c,k,k),(k,c,c),(k,c,k),(k,k,c),(k,k,k)\}$

Se X é o número de "cara" que pode-se ter então X tem os seguintes valores: $0, 1, 2$ e 3. Associando os valores a Ω, segue:

X	Evento Associado
0	$A_1 = \{(k,k,k)\}$
1	$A_2 = \{(c,k,k),(k,c,k),(k,k,c)\}$
2	$A_3 = \{(c,c,k),(c,k,c),(k,c,c)\}$
3	$A_4 = \{(c,c,c)\}$

Tabela: Resolução do Exemplo 01.

Exemplo

Associando a cada evento uma probabilidade temos que:

$$P(X = 0) = P(A_1) = \frac{1}{8}$$

Exemplo

Associando a cada evento uma probabilidade temos que:

$$P(X=0) = P(A_1) = \frac{1}{8}$$

$$P(X=1) = P(A_2) = \frac{3}{8} = P(X=2) = P(A_3)$$

Exemplo

Associando a cada evento uma probabilidade temos que:

$$P(X=0)=P(A_1)=\frac{1}{8}$$

$$P(X=1)=P(A_2)=\frac{3}{8}=P(X=2)=P(A_3)$$

$$P(X=3)=P(A_4)=\frac{1}{8}$$

Exemplo

Dessa maneira:

X	Evento Associado

Exemplo

Dessa maneira:

X	Evento Associado
0	$\frac{1}{8}$

Exemplo

Dessa maneira:

X	Evento Associado
0	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{3}{8}$

Exemplo

Dessa maneira:

X	Evento Associado
0	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{3}{8}$
2	$\frac{3}{8}$

Exemplo

Dessa maneira:

X	Evento Associado
0	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{3}{8}$
2	$\frac{3}{8}$
3	$\frac{1}{8}$
	1

Tabela: Resolução do Exemplo 01.

Exemplo

Dessa maneira:

X	Evento Associado
0	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{3}{8}$
2	$\frac{3}{8}$
3	$\frac{1}{8}$
	1

Tabela: Resolução do Exemplo 01.

Através do Gráfico e Diagrama

Definição

Definição de Variável Aleatória:
É a função que associa a todo evento pertencente a uma partição do espaço amostral um único valor real.
No caso discreto, a variável deve assumir valores em um conjunto finito ou em um conjunto infinito, porém enumerável.
No caso finito, será indicado por:

$$X : x_1, x_2, \ldots, x_n$$

Definição

Definição Função de Probabilidade:
É a função que associa a cada valor assumido pela variável aleatória a probabilidade do evento correspondente, isto é:

$$P(X = x_i) = P(A_i), i = 1, 2, \ldots, n$$

Definição

Definição Distribuição de Probabilidades da Variável Aleatória X:
É o conjunto $\{x_i, p(x_i), i = 1, 2, \dots, n\}$.

Definição

Definição Distribuição de Probabilidades da Variável Aleatória X: É o conjunto $\{x_i, p(x_i), i = 1, 2, \ldots, n\}$.

Observação: Para que faça sentido uma distribuição de probabilidades de uma variável aleatória X, é necessário que:

$$\sum_{i=1}^{n} p(x_i) = 1$$

Esperança Matemática

Quando trabalhamos com distribuições de probabilidades de uma variável aleatória discreta, os parâmetros da distribuição são características numéricas de grande importância.

Esperança Matemática

Quando trabalhamos com distribuições de probabilidades de uma variável aleatória discreta, os parâmetros da distribuição são características numéricas de grande importância.

O primeiro parâmetro é a *esperança matemática* (ou simplesmente média) de uma variável aleatória.

Esperança Matemática

Quando trabalhamos com distribuições de probabilidades de uma variável aleatória discreta, os parâmetros da distribuição são características numéricas de grande importância.
O primeiro parâmetro é a *esperança matemática* (ou simplesmente média) de uma variável aleatória.
Definição Esperança Matemática:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p(x_i)$$

A *esperança matemática* é um número real. É também uma média aritmética ponderada.
Notação: $E(X)$, $\mu(x)$, μ_x, μ.

Exemplo

Exemplo 01: Uma seguradora paga $R\$30.000,00$ em caso de acidente de carro e cobra uma taxa de $R\$1.000,00$. Sabe-se que a probabilidade de que um carro sofra acidente é de 3%. Quanto espera a seguradora ganhar por carro segurado?

Exemplo

Exemplo 01: Uma seguradora paga $R\$30.000,00$ em caso de acidente de carro e cobra uma taxa de $R\$1.000,00$. Sabe-se que a probabilidade de que um carro sofra acidente é de 3%. Quanto espera a seguradora ganhar por carro segurado?

Solução:

Exemplo

Exemplo 01: Uma seguradora paga $R\$30.000,00$ em caso de acidente de carro e cobra uma taxa de $R\$1.000,00$. Sabe-se que a probabilidade de que um carro sofra acidente é de 3%. Quanto espera a seguradora ganhar por carro segurado?

Solução:

Suponha que em 100 carros, 97 dão lucro de $R\$1.000,00$ e 3 dão prejuízo de $R\$29.000,00$ ($R\$30.000,00 - R\$1.000,00$).

Exemplo

Exemplo 01: Uma seguradora paga $R\$30.000,00$ em caso de acidente de carro e cobra uma taxa de $R\$1.000,00$. Sabe-se que a probabilidade de que um carro sofra acidente é de 3%. Quanto espera a seguradora ganhar por carro segurado?

Solução:

Suponha que em 100 carros, 97 dão lucro de $R\$1.000,00$ e 3 dão prejuízo de $R\$29.000,00$ ($R\$30.000,00 - R\$1.000,00$).

Lucro total:

Exemplo

Exemplo 01: Uma seguradora paga $R\$30.000,00$ em caso de acidente de carro e cobra uma taxa de $R\$1.000,00$. Sabe-se que a probabilidade de que um carro sofra acidente é de 3%. Quanto espera a seguradora ganhar por carro segurado?

Solução:

Suponha que em 100 carros, 97 dão lucro de $R\$1.000,00$ e 3 dão prejuízo de $R\$29.000,00$ $(R\$30.000,00 - R\$1.000,00)$.

Lucro total: $97 \cdot 1.000 - 3 \cdot 29.000 = R\$10.000,00$

Exemplo

Exemplo 01: Uma seguradora paga $R\$30.000,00$ em caso de acidente de carro e cobra uma taxa de $R\$1.000,00$. Sabe-se que a probabilidade de que um carro sofra acidente é de 3%. Quanto espera a seguradora ganhar por carro segurado?

Solução:

Suponha que em 100 carros, 97 dão lucro de $R\$1.000,00$ e 3 dão prejuízo de $R\$29.000,00$ $(R\$30.000,00 - R\$1.000,00)$.

Lucro total: $97 \cdot 1.000 - 3 \cdot 29.000 = R\$10.000,00$

Lucro médio por carro:

Exemplo

Exemplo 01: Uma seguradora paga $R\$30.000,00$ em caso de acidente de carro e cobra uma taxa de $R\$1.000,00$. Sabe-se que a probabilidade de que um carro sofra acidente é de 3%. Quanto espera a seguradora ganhar por carro segurado?

Solução:

Suponha que em 100 carros, 97 dão lucro de $R\$1.000,00$ e 3 dão prejuízo de $R\$29.000,00$ $(R\$30.000,00 - R\$1.000,00)$.

Lucro total: $97 \cdot 1.000 - 3 \cdot 29.000 = R\$10.000,00$

Lucro médio por carro: $R\$10.000,00/100 = R\$100,00$

Exemplo

Exemplo 01: Uma seguradora paga $R\$30.000,00$ em caso de acidente de carro e cobra uma taxa de $R\$1.000,00$. Sabe-se que a probabilidade de que um carro sofra acidente é de 3%. Quanto espera a seguradora ganhar por carro segurado?

Solução:

Suponha que em 100 carros, 97 dão lucro de $R\$1.000,00$ e 3 dão prejuízo de $R\$29.000,00$ $(R\$30.000,00 - R\$1.000,00)$.

Lucro total: $97 \cdot 1.000 - 3 \cdot 29.000 = R\$10.000,00$

Lucro médio por carro: $R\$10.000,00/100 = R\$100,00$

Se chamarmos de X o lucro por carro, e o lucro médio por carro de $E(X)$, teremos:

Exemplo

Exemplo 01: Uma seguradora paga $R\$30.000,00$ em caso de acidente de carro e cobra uma taxa de $R\$1.000,00$. Sabe-se que a probabilidade de que um carro sofra acidente é de 3%. Quanto espera a seguradora ganhar por carro segurado?

Solução:

Suponha que em 100 carros, 97 dão lucro de $R\$1.000,00$ e 3 dão prejuízo de $R\$29.000,00$ $(R\$30.000,00 - R\$1.000,00)$.

Lucro total: $97 \cdot 1.000 - 3 \cdot 29.000 = R\$10.000,00$

Lucro médio por carro: $R\$10.000,00/100 = R\$100,00$

Se chamarmos de X o lucro por carro, e o lucro médio por carro de $E(X)$, teremos:

$$E(X) = \frac{0,97 \cdot 1.000}{0,03 \cdot 29.000} = 100$$

Propriedades da Esperança Matemática

1. $E(k) = k$, onde k é uma constante;

Propriedades da Esperança Matemática

1. $E(k) = k$, onde k é uma constante;
2. $E(k \cdot X) = k \cdot E(X)$;

Propriedades da Esperança Matemática

1. $E(k) = k$, onde k é uma constante;
2. $E(k \cdot X) = k \cdot E(X)$;
3. $E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$;

Propriedades da Esperança Matemática

1. $E(k) = k$, onde k é uma constante;
2. $E(k \cdot X) = k \cdot E(X)$;
3. $E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$;
4. $E\left\{\sum_{i=1}^{n} X_i\right\} = \sum_{i=1}^{n}\{E(X_i)\}$;

Propriedades da Esperança Matemática

1. $E(k) = k$, onde k é uma constante;
2. $E(k \cdot X) = k \cdot E(X)$;
3. $E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$;
4. $E\left\{\sum_{i=1}^{n} X_i\right\} = \sum_{i=1}^{n}\{E(X_i)\}$;
5. $E(aX \pm b) = aE(X) \pm b$, onde a e b são constantes;

Propriedades da Esperança Matemática

1. $E(k) = k$, onde k é uma constante;
2. $E(k \cdot X) = k \cdot E(X)$;
3. $E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$;
4. $E\left\{\sum_{i=1}^{n} X_i\right\} = \sum_{i=1}^{n}\{E(X_i)\}$;
5. $E(aX \pm b) = aE(X) \pm b$, onde a e b são constantes;
6. $E(X - \mu_x) = 0$.

Propriedades da Esperança Matemática

1. $E(k) = k$, onde k é uma constante;
2. $E(k \cdot X) = k \cdot E(X)$;
3. $E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$;
4. $E\left\{\sum_{i=1}^{n} X_i\right\} = \sum_{i=1}^{n}\{E(X_i)\}$;
5. $E(aX \pm b) = aE(X) \pm b$, onde a e b são constantes;
6. $E(X - \mu_x) = 0$.

Variância

A medida que dá o grau de dispersão (ou concentração) de probabilidade em torno da média é a *variância*.

Variância

A medida que dá o grau de dispersão (ou concentração) de probabilidade em torno da média é a *variância*.

Definição Variância:

$$VAR(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu_x)^2 \cdot p(x_i)$$

Notação: $VAR(X)$, $V(X)$, $\sigma^2(X)$, σ_X^2,σ^2.

Variância

A medida que dá o grau de dispersão (ou concentração) de probabilidade em torno da média é a *variância*.
Definição Variância:

$$VAR(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu_x)^2 \cdot p(x_i)$$

Notação: $VAR(X)$, $V(X)$, $\sigma^2(X)$, σ_X^2,σ^2.
Observação: Quanto menor a variância, menor o grau de dispersão de probabilidades em torno da média e vice-versa; quanto maior a variância, maior e grau de dispersão da probabilidade em torno da média.

Desvio Padrão

Definição Desvio Padrão:
É a raiz quadrada da variância de X, isto é:

$$\sigma_X = \sqrt{VAR(X)}$$

Desvio Padrão

Definição Desvio Padrão:
É a raiz quadrada da variância de X, isto é:

$$\sigma_X = \sqrt{VAR(X)}$$

Propriedades da Variância

1. $VAR(k) = 0$, onde k é constante;

Desvio Padrão

Definição Desvio Padrão:
É a raiz quadrada da variância de X, isto é:

$$\sigma_x = \sqrt{VAR(X)}$$

Propriedades da Variância

1. $VAR(k) = 0$, onde k é constante;
2. $VAR(k \cdot X) = k^2 \cdot VAR(X)$;

Desvio Padrão

Definição Desvio Padrão:
É a raiz quadrada da variância de X, isto é:

$$\sigma_X = \sqrt{VAR(X)}$$

Propriedades da Variância

1. $VAR(k) = 0$, onde k é constante;
2. $VAR(k \cdot X) = k^2 \cdot VAR(X)$;
3. $VAR(X \pm Y) = VAR(X) + VAR(Y) \pm 2cov(X, Y)$

Desvio Padrão

Definição Desvio Padrão:
É a raiz quadrada da variância de X, isto é:

$$\sigma_X = \sqrt{VAR(X)}$$

Propriedades da Variância

1. $VAR(k) = 0$, onde k é constante;
2. $VAR(k \cdot X) = k^2 \cdot VAR(X)$;
3. $VAR(X \pm Y) = VAR(X) + VAR(Y) \pm 2cov(X, Y)$
   Definição Covariância entre X e Y:

   $$cov(X, Y) = E\{[X - E(X)] \cdot [Y - E(Y)]\}$$

   A covariância mede o grau de dependência entre as duas variáveis X e Y.
4. $VAR\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} VAR(X_i) + 2\sum_{i<j}^{n} cov(X_i, Y_j)$

Desvio Padrão

Definição Desvio Padrão:
É a raiz quadrada da variância de X, isto é:

$$\sigma_X = \sqrt{VAR(X)}$$

Propriedades da Variância

1. $VAR(k) = 0$, onde k é constante;
2. $VAR(k \cdot X) = k^2 \cdot VAR(X)$;
3. $VAR(X \pm Y) = VAR(X) + VAR(Y) \pm 2cov(X, Y)$
   Definição Covariância entre X e Y:
   $$cov(X, Y) = E\{[X - E(X)] \cdot [Y - E(Y)]\}$$
   A covariância mede o grau de dependência entre as duas variáveis X e Y.
4. $VAR\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} VAR(X_i) + 2\sum_{i<j}^{n} cov(X_i, Y_j)$
5. $VAR(aX \pm b) = a^2 VAR(X)$, a e b constantes.

Função de Distribuição

Definição Função de Distribuição:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p(x_i)$$

Função de Distribuição

Definição Função de Distribuição:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p(x_i)$$

Propriedades de $F(x)$

Função de Distribuição

Definição Função de Distribuição:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p(x_i)$$

Propriedades de $F(x)$

1. $0 \leq F(x) \leq 1$;

Função de Distribuição

Definição Função de Distribuição:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p(x_i)$$

Propriedades de $F(x)$

1. $0 \leq F(x) \leq 1$;
2. $(F - \infty) = 0$;

Função de Distribuição

Definição Função de Distribuição:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p(x_i)$$

Propriedades de $F(x)$

1. $0 \leq F(x) \leq 1$;
2. $(F - \infty) = 0$;
3. $F(+\infty) = 1$;

Função de Distribuição

Definição Função de Distribuição:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p(x_i)$$

Propriedades de $F(x)$

1. $0 \leq F(x) \leq 1$;
2. $(F - \infty) = 0$;
3. $F(+\infty) = 1$;
   As demais propriedades requer conhecimentos prévios de cálculo.

Exemplo

Suponha que uma variável aleatória X tenha a seguinte distribuição de probabilidades:

Exemplo

Suponha que uma variável aleatória X tenha a seguinte distribuição de probabilidades:

X	$P(X)$
1	$0,1$
2	$0,2$
3	$0,4$
4	$0,2$
5	$0,1$

Tabela: Resolução do Exemplo 01.

Exemplo

Dessa maneira:

Exemplo

Dessa maneira:

$$
\begin{aligned}
F(1) &= P(X \leq 1) = P(X = 1) = 0,1 \\
F(2) &= P(X \leq 2) = P(X = 1) + P(X = 2) = 0,3 \\
F(3) &= P(X \leq 3) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) \\
&= F(2) + P(X = 3) = 0,3 + 0,4 = 0,7 \\
&\vdots \\
F(5) &= P(X \leq 4) + P(X = 5) = F(4) + P(X = 5) = 0,9 + 0,1 = 1
\end{aligned}
$$

Exemplo

Dessa maneira:

$$
\begin{aligned}
F(1) &= P(X \leq 1) = P(X = 1) = 0,1 \\
F(2) &= P(X \leq 2) = P(X = 1) + P(X = 2) = 0,3 \\
F(3) &= P(X \leq 3) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) \\
&= F(2) + P(X = 3) = 0,3 + 0,4 = 0,7 \\
&\vdots \\
F(5) &= P(X \leq 4) + P(X = 5) = F(4) + P(X = 5) = 0,9 + 0,1 = 1
\end{aligned}
$$

Pode-se utilizar valores contínuos também.

Exemplo

Dessa maneira pode-se resumir através de:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & ,\text{se } X < 1 \\ 0,1 & ,\text{se } 1 \leq X < 2 \\ 0,3 & ,\text{se } 2 \leq X < 3 \\ 0,7 & ,\text{se } 3 \leq X < 4 \\ 0,9 & ,\text{se } 4 \leq X < 5 \\ 1 & ,\text{se } X \geq 5 \end{cases}$$

Exemplo

Dessa maneira pode-se resumir através de:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & ,\text{se } X < 1 \\ 0,1 & ,\text{se } 1 \leq X < 2 \\ 0,3 & ,\text{se } 2 \leq X < 3 \\ 0,7 & ,\text{se } 3 \leq X < 4 \\ 0,9 & ,\text{se } 4 \leq X < 5 \\ 1 & ,\text{se } X \geq 5 \end{cases}$$

O domínio de $F(x)$ será $D = \{\mathbb{R}\}$ e o contradomínio será o conjunto $\{0,1; 0,3; 0,7; 0,9; 1\}$.