Sequências e Séries

Matheus Pimenta

Universidade Estadual de Londrina
Londrina

Fev. 2022

Apresentação

Matheus Pimenta

Apresentação

Matheus Pimenta
e-mail: matheus.pimenta@outlook.com ou omatheuspimenta@outlook.com

Apresentação

Matheus Pimenta
e-mail: matheus.pimenta@outlook.com ou omatheuspimenta@outlook.com
Informações sobre a disciplina

Apresentação

Matheus Pimenta
e-mail: matheus.pimenta@outlook.com ou omatheuspimenta@outlook.com
Informações sobre a disciplina
Dúvidas gerais

Sequências

Definition (Sequências)

Uma sequência é uma função

$$a : \mathbb{N} \to \mathbb{R},$$

onde $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

Sequências

Definition (Sequências)

Uma sequência é uma função

$$a : \mathbb{N} \to \mathbb{R},$$

onde $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

Example

Considere $a(n) = n + 1, \ n \in \mathbb{N}$

Sequências

Definition (Sequências)

Uma sequência é uma função

$$a : \mathbb{N} \to \mathbb{R},$$

onde $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

Example

Considere $a(n) = n + 1, \; n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} a(1) &= 2 \\ a(2) &= 3 \\ &\vdots \\ a(5) &= 6 \end{aligned}$$

Sequências

Definition (Sequências)

Uma sequência é uma função

$$a : \mathbb{N} \to \mathbb{R},$$

onde $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

Example

Considere $a(n) = n + 1, \; n \in \mathbb{N}$

$$a(1) = 2$$

$$\vdots$$

$$a(5) = 6$$

Sequências

Definition (Sequências)

Uma sequência é uma função

$$a : \mathbb{N} \to \mathbb{R},$$

onde $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

Example

Considere $a(n) = n + 1,\ n \in \mathbb{N}$

$$a(1) = 2$$
$$a(2) = 3$$
$$\vdots$$
$$a(5) = 6$$

Sequências

Os valores de $a(n)$ são chamados de *termos da sequência*.
O termo $a(n)$ é chamado de $n-$ésimo termo da sequência.

Sequências

Os valores de $a(n)$ são chamados de *termos da sequência*.
O termo $a(n)$ é chamado de $n-$ésimo termo da sequência.
Notação: Denotaremos uma sequência $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ por:

$$(a_n) = (a(n))$$

Ou seja, a sequência (a_n) tem como $n-$ésimo termo a_n.

Sequências

Os valores de $a(n)$ são chamados de *termos da sequência*.
O termo $a(n)$ é chamado de $n-$ésimo termo da sequência.
Notação: Denotaremos uma sequência $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ por:

$$(a_n) = (a(n))$$

Ou seja, a sequência (a_n) tem como $n-$ésimo termo a_n.

Example (Considere a sequência:)

$$a_n = \frac{n}{n+1}, n \in \mathbb{N}$$

Sequências

Os valores de $a(n)$ são chamados de *termos da sequência*.
O termo $a(n)$ é chamado de $n-$ésimo termo da sequência.
Notação: Denotaremos uma sequência $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ por:

$$(a_n) = (a(n))$$

Ou seja, a sequência (a_n) tem como $n-$ésimo termo a_n.

Example (Considere a sequência:)

$$a_n = \frac{n}{n+1}, n \in \mathbb{N}$$

Os primeiros 4 elementos da sequência a_n são:

Sequências

Os valores de $a(n)$ são chamados de *termos da sequência*.
O termo $a(n)$ é chamado de $n-$ésimo termo da sequência.
Notação: Denotaremos uma sequência $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ por:

$$(a_n) = (a(n))$$

Ou seja, a sequência (a_n) tem como $n-$ésimo termo a_n.

Example (Considere a sequência:)

$$a_n = \frac{n}{n+1}, n \in \mathbb{N}$$

Os primeiros 4 elementos da sequência a_n são:
Preencher!

Sequências

Questões:

Sequências

Questões:

1. Qual é o domínio de uma sequência?

Sequências

Questões:

1. Qual é o domínio de uma sequência?
2. Podemos restringir uma sequência?

Sequências

Questões:

1. Qual é o domínio de uma sequência?
2. Podemos restringir uma sequência? Quais exemplos?

Sequências

Questões:

1. Qual é o domínio de uma sequência?
2. Podemos restringir uma sequência? Quais exemplos? Conseguimos representar uma sequência de outras maneiras?

Sequências

Questões:

1. Qual é o domínio de uma sequência?
2. Podemos restringir uma sequência? Quais exemplos? Conseguimos representar uma sequência de outras maneiras?
3. Quais exemplos de outras sequências podemos ter neste momento?

Sequências

Questões:

1. Qual é o domínio de uma sequência?
2. Podemos restringir uma sequência? Quais exemplos? Conseguimos representar uma sequência de outras maneiras?
3. Quais exemplos de outras sequências podemos ter neste momento?
4. Como podemos representar graficamente uma sequência?

Sequências - Exemplos

Example

$$a_n = \frac{1}{n}$$

Sequências - Exemplos

Example

$$a_n = \frac{1}{n}$$

$a_1 = 1,$

Sequências - Exemplos

Example

$$a_n = \frac{1}{n}$$

$a_1 = 1,\ a_2 = \dfrac{1}{2},$

Sequências - Exemplos

Example

$$a_n = \frac{1}{n}$$

$a_1 = 1,\ a_2 = \frac{1}{2},\ a_3 = \frac{1}{3},$

Sequências - Exemplos

Example

$$a_n = \frac{1}{n}$$

$a_1 = 1,\ a_2 = \frac{1}{2},\ a_3 = \frac{1}{3},\ \ldots,$

Sequências - Exemplos

Example

$$a_n = \frac{1}{n}$$

$$a_1 = 1,\ a_2 = \frac{1}{2},\ a_3 = \frac{1}{3},\ \ldots,\ a_n = \frac{1}{n}$$

Example

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n}$$

Sequências - Exemplos

Example

$$a_n = \frac{1}{n}$$

$$a_1 = 1,\ a_2 = \frac{1}{2},\ a_3 = \frac{1}{3},\ \ldots,\ a_n = \frac{1}{n}$$

Example

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n}$$

$$a_1 = -1,$$

Sequências - Exemplos

Example

$$a_n = \frac{1}{n}$$

$$a_1 = 1,\ a_2 = \frac{1}{2},\ a_3 = \frac{1}{3},\ \ldots,\ a_n = \frac{1}{n}$$

Example

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n}$$

$$a_1 = -1,\ a_2 = \frac{1}{2},$$

Sequências - Exemplos

Example

$$a_n = \frac{1}{n}$$

$$a_1 = 1,\ a_2 = \frac{1}{2},\ a_3 = \frac{1}{3},\ \ldots,\ a_n = \frac{1}{n}$$

Example

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n}$$

$$a_1 = -1,\ a_2 = \frac{1}{2},\ a_3 = -\frac{1}{3}$$

Sequências

Podemos listar os termos da sequência através do uso de $\{\}$.

Sequências

Podemos listar os termos da sequência através do uso de $\{\}$.

Example

$$\{a_n\} = \{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots, \sqrt{n}, \ldots\}$$

$$\{c_n\} = \{1, -1, 1, -1, \ldots, \ldots, (-1)^{n+1}, \ldots\}$$

$$\{b_n\} = \left\{1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots, (-1)^{n+1}\frac{1}{n}, \ldots, \right\}$$

Sequências

Definition (Igualdade de sequências)

Dizemos que duas sequências (a_n) e (b_n) são iguais se e somente se, $a_n = b_n, \forall\ n \in \mathbb{N}$

Sequências

Definition (Igualdade de sequências)

Dizemos que duas sequências (a_n) e (b_n) são iguais se e somente se, $a_n = b_n, \forall\ n \in \mathbb{N}$

Example

Analise as sequências: $a_n = (-1)^n$ e $b_n = (-1)^{n+1}$

Sequências

Definition (Igualdade de sequências)

Dizemos que duas sequências (a_n) e (b_n) são iguais se e somente se, $a_n = b_n, \forall\ n \in \mathbb{N}$

Example

Analise as sequências: $a_n = (-1)^n$ e $b_n = (-1)^{n+1}$

Note que:

$$(a_n) = (-1, 1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^n)$$

Sequências

Definition (Igualdade de sequências)

Dizemos que duas sequências (a_n) e (b_n) são iguais se e somente se, $a_n = b_n, \forall\ n \in \mathbb{N}$

Example

Analise as sequências: $a_n = (-1)^n$ e $b_n = (-1)^{n+1}$

Note que:

$$(a_n) = (-1, 1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^n)$$

$$(b_n) = (1, -1, 1, -1, 1, \dots, (-1)^{n+1})$$

Sequências

Definition (Igualdade de sequências)

Dizemos que duas sequências (a_n) e (b_n) são iguais se e somente se, $a_n = b_n$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$

Example

Analise as sequências: $a_n = (-1)^n$ e $b_n = (-1)^{n+1}$

Note que:

$$(a_n) = (-1, 1, -1, 1, -1, \ldots, (-1)^n)$$

$$(b_n) = (1, -1, 1, -1, 1, \ldots, (-1)^{n+1})$$

Logo, as sequências

Sequências

Definition (Igualdade de sequências)

Dizemos que duas sequências (a_n) e (b_n) são iguais se e somente se, $a_n = b_n$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$

Example

Analise as sequências: $a_n = (-1)^n$ e $b_n = (-1)^{n+1}$

Note que:

$$(a_n) = (-1, 1, -1, 1, -1, \ldots, (-1)^n)$$

$$(b_n) = (1, -1, 1, -1, 1, \ldots, (-1)^{n+1})$$

Logo, as sequências **não são iguais**. Assim:

$$(a_n) \neq (b_n)$$

Limite de uma Sequência

Motivação: Tome $a_n = \dfrac{1}{n}$

Limite de uma Sequência

Motivação: Tome $a_n = \dfrac{1}{n}$ **Graficamente:**

Limite de uma Sequência

Motivação: Tome $a_n = \frac{1}{n}$ **Graficamente:**

Definition

Limite de uma Sequência Dizemos que uma sequência a_n converge para L se para dado $\epsilon > 0$, $\exists N > 0$ tal que $n > N$, $|a_n - L| < \epsilon$

Limite de uma Sequência

Motivação: Tome $a_n = \dfrac{1}{n}$ **Graficamente:**

Definition

Limite de uma Sequência Dizemos que uma sequência a_n converge para L se para dado $\epsilon > 0$, $\exists N > 0$ tal que $n > N$, $|a_n - L| < \epsilon$

Em outras palavras:

Limite de uma Sequência

Motivação: Tome $a_n = \dfrac{1}{n}$ **Graficamente:**

Definition

Limite de uma Sequência Dizemos que uma sequência a_n converge para L se para dado $\epsilon > 0$, $\exists N > 0$ tal que $n > N$, $|a_n - L| < \epsilon$

Em outras palavras:

$\forall \epsilon > 0, \ \exists \ N > 0 \ ; \ n > N \implies L - \epsilon < a_n < L + \epsilon$

Limite de uma Sequência

Motivação: Tome $a_n = \dfrac{1}{n}$ **Graficamente:**

Definition

Limite de uma Sequência Dizemos que uma sequência a_n converge para L se para dado $\epsilon > 0$, $\exists N > 0$ tal que $n > N$, $|a_n - L| < \epsilon$

Em outras palavras:

$\forall\epsilon > 0,\ \exists\ N > 0\ ;\ n > N \implies L - \epsilon < a_n < L + \epsilon$

Notação:

Limite de uma Sequência

Motivação: Tome $a_n = \dfrac{1}{n}$ **Graficamente:**

Definition

Limite de uma Sequência Dizemos que uma sequência a_n converge para L se para dado $\epsilon > 0$, $\exists N > 0$ tal que $n > N$, $|a_n - L| < \epsilon$

Em outras palavras:

$\forall \epsilon > 0,\ \exists\ N > 0\ ;\ n > N \implies L - \epsilon < a_n < L + \epsilon$

Notação:

Se (a_n) converge para L diremos que L é o *limite da sequência* (a_n).

Limite de uma Sequência

Motivação: Tome $a_n = \dfrac{1}{n}$ **Graficamente:**

Definition

Limite de uma Sequência Dizemos que uma sequência a_n converge para L se para dado $\epsilon > 0$, $\exists N > 0$ tal que $n > N$, $|a_n - L| < \epsilon$

Em outras palavras:

$\forall \epsilon > 0, \ \exists \ N > 0 \ ; \ n > N \implies L - \epsilon < a_n < L + \epsilon$

Notação:

Se (a_n) converge para L diremos que L é o *limite da sequência* (a_n).

Escrevemos: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = L$, ou $\lim a_n = L$, ou simplismente, $a_n \to L$

Limite de uma Sequência

Observações:

Limite de uma Sequência

Observações:

- A noção de "sequência convergente" não depende apenas da sequência (a_n), mas também do espaço X.

Limite de uma Sequência

Observações:

- A noção de "sequência convergente" não depende apenas da sequência (a_n), mas também do espaço X.

Example

A sequência $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ converge a 0 em $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}_+$, mas não em $\mathbb{R}_+^*$.

Limite de uma Sequência

Observações:

- A noção de "sequência convergente" não depende apenas da sequência (a_n), mas também do espaço X.

Example

A sequência $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ converge a 0 em $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}_+$, mas não em $\mathbb{R}_+^*$. Pois $0 \notin \mathbb{R}_+^*$.

Limite de uma Sequência

Observações:

- A noção de "sequência convergente" não depende apenas da sequência (a_n), mas também do espaço X.

Example

A sequência $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ converge a 0 em $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}_+$, mas não em $\mathbb{R}_+^*$. Pois $0 \notin \mathbb{R}_+^*$. Dessa forma é conveniente dizer que "a_n converge (ou não) em X".

Limite de uma Sequência

Observações:

- A noção de "sequência convergente" não depende apenas da sequência (a_n), mas também do espaço X.

Example

A sequência $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ converge a 0 em $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}_+$, mas não em $\mathbb{R}_+^*$. Pois $0 \notin \mathbb{R}_+^*$. Dessa forma é conveniente dizer que "a_n converge (ou não) em X".

- Podemos reescrever a definição de limite de sequência de outras maneiras:

Limite de uma Sequência

Observações:

- A noção de "sequência convergente" não depende apenas da sequência (a_n), mas também do espaço X.

Example

A sequência $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ converge a 0 em $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}_+$, mas não em $\mathbb{R}_+^*$. Pois $0 \notin \mathbb{R}_+^*$. Dessa forma é conveniente dizer que "a_n converge (ou não) em X".

- Podemos reescrever a definição de limite de sequência de outras maneiras:
  - Dizemos que (p_n) converge se existe um ponto $p \in X$ tal que:

$$\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ n_0; d(p_n, p) < \epsilon \ \text{ sempre que } n \geq n_0$$

Limite de uma Sequência

Em particular, considerando $X = \mathbb{R}$.

Limite de uma Sequência

Em particular, considerando $X = \mathbb{R}$. Uma sequência (x_n) em $\mathbb{R}$ converge se existe um número real x tal que:

Limite de uma Sequência

Em particular, considerando $X = \mathbb{R}$. Uma sequência (x_n) em $\mathbb{R}$ converge se existe um número real x tal que:

$$\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ n_0; |x_n - x| < \epsilon \ \text{ sempre que } n \geq n_0$$

Limite de uma Sequência

Em particular, considerando $X = \mathbb{R}$. Uma sequência (x_n) em $\mathbb{R}$ converge se existe um número real x tal que:

$$\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ n_0; |x_n - x| < \epsilon \ \text{ sempre que } n \geq n_0$$

Uma outra forma de obter a definição de limite de sequência é a seguinte:

Limite de uma Sequência

Em particular, considerando $X = \mathbb{R}$. Uma sequência (x_n) em $\mathbb{R}$ converge se existe um número real x tal que:

$$\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ n_0; |x_n - x| < \epsilon \text{ sempre que } n \geq n_0$$

Uma outra forma de obter a definição de limite de sequência é a seguinte:

Definition

A sequência $\{a_n\}$ converge para o número L se para todo númro positivo ϵ corresponder um número inteiro N, de forma que para todo n,

$$n > N \implies |a_n - L| < \epsilon$$

Limite de uma Sequência

Em particular, considerando $X = \mathbb{R}$. Uma sequência (x_n) em $\mathbb{R}$ converge se existe um número real x tal que:

$$\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ n_0; |x_n - x| < \epsilon \text{ sempre que } n \geq n_0$$

Uma outra forma de obter a definição de limite de sequência é a seguinte:

Definition

A sequência $\{a_n\}$ converge para o número L se para todo númro positivo ϵ corresponder um número inteiro N, de forma que para todo n,

$$n > N \implies |a_n - L| < \epsilon$$

Se nenhum número L existir, dizemos que $\{a_n\}$ *diverge*.

Limite de uma Sequência

Exemplo 01:

Utilizando a definição mostre que $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{n}$

Limite de uma Sequência

Exemplo 01:

Utilizando a definição mostre que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}$

Solução:

Limite de uma Sequência

Exemplo 01:

Utilizando a definição mostre que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$

Solução: Queremos mostrar que $\forall \epsilon > 0, \exists\ N > 0;$

Limite de uma Sequência

Exemplo 01:

Utilizando a definição mostre que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}$

Solução: Queremos mostrar que $\forall \epsilon > 0, \exists\ N > 0;$

$$\text{se } n > N \implies |a_n - L| < \epsilon \qquad\qquad \iff$$

$$\text{se } n > N \implies \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \epsilon \qquad \iff (x \in \mathbb{N} \implies |x| \in \mathbb{N})$$

$$\text{se } n > N \implies \frac{1}{n} < \epsilon \qquad\qquad \iff$$

$$\text{se } n > N \implies n > \frac{1}{\epsilon}$$

Limite de uma Sequência

Exemplo 01:

Utilizando a definição mostre que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$

Solução: Queremos mostrar que $\forall\epsilon > 0, \exists\ N > 0;$

$$\text{se } n > N \implies |a_n - L| < \epsilon \iff$$

$$\text{se } n > N \implies \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \epsilon \qquad \iff (x \in \mathbb{N} \implies |x| \in \mathbb{N})$$

$$\text{se } n > N \implies \frac{1}{n} < \epsilon \iff$$

$$\text{se } n > N \implies n > \frac{1}{\epsilon}$$

Tome $N \geq \frac{1}{\epsilon}$, então:

Limite de uma Sequência

Exemplo 01:

Utilizando a definição mostre que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}$

Solução: Queremos mostrar que $\forall \epsilon > 0, \exists\ N > 0;$

$$\begin{aligned}
&\text{se } n > N \implies |a_n - L| < \epsilon && \iff \\
&\text{se } n > N \implies \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \epsilon && \iff (x \in \mathbb{N} \implies |x| \in \mathbb{N}) \\
&\text{se } n > N \implies \frac{1}{n} < \epsilon && \iff \\
&\text{se } n > N \implies n > \frac{1}{\epsilon}
\end{aligned}$$

Tome $N \geq \frac{1}{\epsilon}$, então: se $n > N \geq \frac{1}{\epsilon}$ implica em $n > \frac{1}{\epsilon}$

Limite de uma Sequência

Exemplo 01:

Utilizando a definição mostre que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$

Solução: Queremos mostrar que $\forall \epsilon > 0, \exists\ N > 0;$

$$\begin{array}{llll}
\text{se } n > N \implies |a_n - L| < \epsilon & & & \iff \\
\text{se } n > N \implies \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \epsilon & \iff & (x \in \mathbb{N} \implies |x| \in \mathbb{N}) & \\
\text{se } n > N \implies \frac{1}{n} < \epsilon & & & \iff \\
\text{se } n > N \implies n > \frac{1}{\epsilon} & & &
\end{array}$$

Tome $N \geq \frac{1}{\epsilon}$, então: se $n > N \geq \frac{1}{\epsilon}$ implica em $n > \frac{1}{\epsilon}$

Limite de uma Sequência

Logo, para dado $\epsilon > 0$, tome $N \geq \frac{1}{\epsilon}$, assim se $n > \frac{1}{n}$, então $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \epsilon$. $\square$

Limite de uma Sequência

Exemplo 02:

Utilizando a definição mostre que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2n+1} = \dfrac{1}{2}$

Limite de uma Sequência

Exemplo 02:

Utilizando a definição mostre que $\lim_{n \to \infty} \dfrac{n}{2n+1} = \dfrac{1}{2}$

Solução:

Limite de uma Sequência

Exemplo 02:

Utilizando a definição mostre que $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}$

Solução: Queremos mostrar que para $\forall\epsilon > 0, \exists\ N = (N(\epsilon)) > 0;$

Limite de uma Sequência

Exemplo 02:

Utilizando a definição mostre que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2n+1} = \dfrac{1}{2}$

Solução: Queremos mostrar que para $\forall \epsilon > 0, \exists\ N = (N(\epsilon)) > 0;$

$$\text{se } n > N \implies \left| \frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2} \right| < \epsilon \qquad \Longleftrightarrow$$

$$\text{se } n > N \implies \left| \frac{2n - 2n - 1}{2(2n+1)} \right| < \epsilon \qquad \Longleftrightarrow$$

$$\text{se } n > N \implies \left| \frac{-1}{2(2n+1)} \right| < \epsilon \qquad \Longleftrightarrow$$

$$\text{se } n > N \implies \frac{-1}{2(2n+1)} < \epsilon \qquad \Longleftrightarrow$$

$$\text{se } n > N \implies 2(2n+1) > \frac{1}{\epsilon} \qquad \Longleftrightarrow$$

Limite de uma Sequência

Exemplo 02:

$$\text{se } n > N \implies 2n + 1 > \frac{1}{2\epsilon} \qquad \iff$$

$$\text{se } n > N \implies n > \frac{1}{4\epsilon} - \frac{1}{2} = \frac{2 - 4\epsilon}{8\epsilon} \qquad \iff$$

$$\text{se } n > N \implies n > \frac{1 - 2\epsilon}{4\epsilon}$$

Limite de uma Sequência

Exemplo 02:

$$\text{se } n > N \implies 2n+1 > \frac{1}{2\epsilon} \iff$$
$$\text{se } n > N \implies n > \frac{1}{4\epsilon} - \frac{1}{2} = \frac{2-4\epsilon}{8\epsilon} \iff$$
$$\text{se } n > N \implies n > \frac{1-2\epsilon}{4\epsilon}$$

Logo, tomando $N > \dfrac{1-2\epsilon}{4\epsilon}$, obtemos que se $n > N$, então

$$\left| \frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2} \right| < \epsilon$$

□

Limite de uma Sequência

Exemplo 03:

Mostre que a sequência $a_n = (-1)^{n+1}$ diverge.

Limite de uma Sequência

Exemplo 03:

Mostre que a sequência $a_n = (-1)^{n+1}$ diverge.

Solução:

Limite de uma Sequência

Exemplo 03:

Mostre que a sequência $a_n = (-1)^{n+1}$ diverge.

Solução: Suponha que a sequência convirja para algum número L.

Escolha $\epsilon = \dfrac{1}{2}$, da definição de limite, temos que todos os termos a_n da sequência com índice n maior que N deve se localizar a menos de $\epsilon = \dfrac{1}{2}$ de L.

Limite de uma Sequência

Exemplo 03:

Mostre que a sequência $a_n = (-1)^{n+1}$ diverge.
Solução: Suponha que a sequência convirja para algum número L. Escolha $\epsilon = \dfrac{1}{2}$, da definição de limite, temos que todos os termos a_n da sequência com índice n maior que N deve se localizar a menos de $\epsilon = \dfrac{1}{2}$ de L. Uma vez que o número 1 aparece repetidamente como termo sim, termo não (sequência alternada), devemos ter o número 1 localizado a uma distância a menos de $\epsilon = \dfrac{1}{2}$ de L.

Limite de uma Sequência

Exemplo 03:

Segue que $|L-1| < \frac{1}{2}$, de forma equivalente, $\frac{1}{2} < L < \frac{3}{2}$. De forma análoga o número (-1) aparece repetidamente na sequência com índice arbitrariamente alto. E de forma análoga, segue que: $|L-(-1)| < \frac{1}{2}$, de forma equivalente, $-\frac{1}{2} < L < -\frac{3}{2}$.

Limite de uma Sequência

Exemplo 03:

Segue que $|L-1|<\dfrac{1}{2}$, de forma equivalente, $\dfrac{1}{2}<L<\dfrac{3}{2}$. De forma análoga o número (-1) aparece repetidamente na sequência com índice arbitrariamente alto. E de forma análoga, segue que: $|L-(-1)|<\dfrac{1}{2}$, de forma equivalente, $-\dfrac{1}{2}<L<-\dfrac{3}{2}$. Contudo o número L não pode estar contido em dois intervalos disjuntos, isto é, os intervalos $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right)$ e $\left(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{3}{2}\right)$ não possuem sobreposição.

Limite de uma Sequência

Exemplo 03:

Segue que $|L-1|<\dfrac{1}{2}$, de forma equivalente, $\dfrac{1}{2}<L<\dfrac{3}{2}$. De forma análoga o número (-1) aparece repetidamente na sequência com índice arbitrariamente alto. E de forma análoga, segue que: $|L-(-1)|<\dfrac{1}{2}$, de forma equivalente, $-\dfrac{1}{2}<L<-\dfrac{3}{2}$. Contudo o número L não pode estar contido em dois intervalos disjuntos, isto é, os intervalos $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right)$ e $\left(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{3}{2}\right)$ não possuem sobreposição.Dessa forma, não existe tal limite L e portanto a sequência diverge. $\square$

Sequências

Definition

A sequência a_n *diverge ao infinito* se para cada número M houver um número inteiro N, tal que para todo n maior que N, $a_n > M$. Se essa condição for verdadeira, então:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \infty \quad \text{ou} \quad a_n \to \infty$$

Sequências

Definition

A sequência a_n *diverge ao infinito* se para cada número M houver um número inteiro N, tal que para todo n maior que N, $a_n > M$. Se essa condição for verdadeira, então:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \infty \quad \text{ou} \quad a_n \to \infty$$

De maneira análoga a definição ocorre quando a sequência possui como limite $-\infty$.

Sequências

Definition

A sequência a_n *diverge ao infinito* se para cada número M houver um número inteiro N, tal que para todo n maior que N, $a_n > M$. Se essa condição for verdadeira, então:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \text{ou} \quad a_n \to \infty$$

De maneira análoga a definição ocorre quando a sequência possui como limite $-\infty$.

Definition (Imagem de Sequência)

A *imagem* de uma sequência $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é o conjunto de seus pontos, isto é, $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$.

Sequências

Definition

A sequência a_n *diverge ao infinito* se para cada número M houver um número inteiro N, tal que para todo n maior que N, $a_n > M$. Se essa condição for verdadeira, então:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \infty \quad \text{ou} \quad a_n \to \infty$$

De maneira análoga a definição ocorre quando a sequência possui como limite $-\infty$.

Definition (Imagem de Sequência)

A *imagem* de uma sequência $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é o conjunto de seus pontos, isto é, $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$.

Sequências

Definition (Sequência limitada)

Dizemos que uma sequência é *limitada superiormente* (ou inferiormente) se existir $M \in X$ ($m \in X$) tal que:

$$p_n < M, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

$$m < p_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Dizemos que uma sequência é limitada se existem $q \in X$ e $M > 0$ tal que $d(p_n, q) < M$ para todo n. Em outras palavras, se existirem $m, M \in X$ tal que $m < p_n < M, \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Sequências

Definition (Sequência limitada)

Dizemos que uma sequência é *limitada superiormente* (ou inferiormente) se existir $M \in X$ ($m \in X$) tal que:

$$p_n < M, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

$$m < p_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Dizemos que uma sequência é limitada se existem $q \in X$ e $M > 0$ tal que $d(p_n, q) < M$ para todo n. Em outras palavras, se existirem $m, M \in X$ tal que $m < p_n < M, \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Theorem

Se $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ e f estiver definida em X, então $\lim_{n \to \infty} f(n) = L$. Em particular, $X = \mathbb{N}$.

Sequências

Definition (Sequência limitada)

Dizemos que uma sequência é *limitada superiormente* (ou inferiormente) se existir $M \in X$ ($m \in X$) tal que:

$$p_n < M, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

$$m < p_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Dizemos que uma sequência é limitada se existem $q \in X$ e $M > 0$ tal que $d(p_n, q) < M$ para todo n. Em outras palavras, se existirem $m, M \in X$ tal que $m < p_n < M, \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Theorem

Se $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = L$ *e* f *estiver definida em* X*, então* $\lim\limits_{n \to \infty} f(n) = L$*. Em particular,* $X = \mathbb{N}$*.*

Demonstração: Utilizar a definição de limite

Limite de Sequências

Utilizando o Teorema anterior é possível utilizar as propriedades de limites que já foram estudadas.

Limite de Sequências

Utilizando o Teorema anterior é possível utilizar as propriedades de limites que já foram estudadas.

Theorem

Sejam $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sequências de números reais, e sejam A e B números reais. As seguintes regras de aplicam se $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ e $\lim_{n\to\infty} b_n = B$

- $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = A \pm B$

Limite de Sequências

Utilizando o Teorema anterior é possível utilizar as propriedades de limites que já foram estudadas.

Theorem

Sejam $\{a_n\}$ *e* $\{b_n\}$ *sequências de números reais, e sejam* A *e* B *números reais. As seguintes regras de aplicam se* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ *e* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$

- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = A \pm B$
- $\lim\limits_{n\to\infty}(k \cdot b_n) = k \cdot B$ *, para todo* k *constante*

Limite de Sequências

Utilizando o Teorema anterior é possível utilizar as propriedades de limites que já foram estudadas.

Theorem

Sejam $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sequências de números reais, e sejam A e B números reais. As seguintes regras de aplicam se $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ e $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$

- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = A \pm B$
- $\lim\limits_{n\to\infty}(k \cdot b_n) = k \cdot B$ *, para todo k constante*
- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = A \cdot B$

Limite de Sequências

Utilizando o Teorema anterior é possível utilizar as propriedades de limites que já foram estudadas.

Theorem

Sejam $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sequências de números reais, e sejam A e B números reais. As seguintes regras de aplicam se $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ e $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$

- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = A \pm B$
- $\lim\limits_{n\to\infty}(k \cdot b_n) = k \cdot B$, *para todo k constante*
- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = A \cdot B$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{A}{B}$, *se* $B \neq 0$

Sequências

Theorem

Seja (a_n) uma sequência em um espaço métrico X.

- *Se $a_n \to A$ e $a_n \to A'$, então $A = A'$*

Sequências

Theorem

Seja (a_n) uma sequência em um espaço métrico X.

- *Se $a_n \to A$ e $a_n \to A'$, então $A = A'$* **Unicidade do Limite**

Sequências

Theorem

Seja (a_n) uma sequência em um espaço métrico X.

- *Se $a_n \to A$ e $a_n \to A'$, então $A = A'$* **Unicidade do Limite**
- *Se (a_n) converge então (a_n) é limitada.*

Sequências

OBSERVAÇÃO:

Cuidado ao aplicar as regras de limite em sequências, pois em alguns casos mesmo sequências divergentes podem, dentro de hipóteses serem convergentes quando aplicamos alguma operação.

Sequências

OBSERVAÇÃO:

Cuidado ao aplicar as regras de limite em sequências, pois em alguns casos mesmo sequências divergentes podem, dentro de hipóteses serem convergentes quando aplicamos alguma operação.
Explico: Suponha as sequências $\{a_n\} = \{1, 2, 3, 4, \ldots, ...\}$ e $\{b_n\} = \{-1, -2, -3, \ldots, ...\}$. Ambas as sequências sozinhas são sequências divergentes, contudo quando realizamos $\lim\limits_{n\to\infty} \{a_n + b_n\}$ esta soma converge para 0.

Sequências

OBSERVAÇÃO:

Cuidado ao aplicar as regras de limite em sequências, pois em alguns casos mesmo sequências divergentes podem, dentro de hipóteses serem convergentes quando aplicamos alguma operação.
Explico: Suponha as sequências $\{a_n\} = \{1, 2, 3, 4, \ldots, ...\}$ e $\{b_n\} = \{-1, -2, -3, \ldots, ...\}$. Ambas as sequências sozinhas são sequências divergentes, contudo quando realizamos $\lim\limits_{n\to\infty} \{a_n + b_n\}$ esta soma converge para 0.
Uma consequência é que toda sequência divergente quando multiplicada por algum escalar qualquer não nulo, também será uma sequência divergente. **PENSAR SOBRE!**

Sequências

Theorem (do confronto para sequências)

Sejam $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ e $\{c_n\}$ sequências de números reais. Se $a_n \leq b_n \leq c_n$ for verdade para todo n além de algum índice N, e se $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$, então $\lim_{n\to\infty} b_n = L$.

Sequências

Theorem (do confronto para sequências)

Sejam $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ e $\{c_n\}$ sequências de números reais. Se $a_n \leq b_n \leq c_n$ for verdade para todo n além de algum índice N, e se $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$, então $\lim_{n\to\infty} b_n = L$.

Corollary

Se $|b_n| \leq c_n$ e $c_n \to 0$, então $b_n \to 0$.

Sequências

Theorem (do confronto para sequências)

Sejam $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ e $\{c_n\}$ sequências de números reais. Se $a_n \leq b_n \leq c_n$ for verdade para todo n além de algum índice N, e se $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$, então $\lim_{n\to\infty} b_n = L$.

Corollary

Se $|b_n| \leq c_n$ e $c_n \to 0$, então $b_n \to 0$.

Ideia: Já que $-c_n \leq b_n \leq c_n$, então segue o resultado.

Sequências

Theorem (da função contínua para sequências)

Seja $\{a_n\}$ uma sequência de números reais. Se $a_n \to L$ e se f for uma função que é contínua em L e definida em todo a_n, então $f(a_n) \to f(L)$.

Sequências

Theorem (da função contínua para sequências)

Seja $\{a_n\}$ uma sequência de números reais. Se $a_n \to L$ e se f for uma função que é contínua em L e definida em todo a_n, então $f(a_n) \to f(L)$.

Example

Mostre que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$, onde $a_n = \sqrt{\dfrac{n+1}{n}}$.

Sequências

Theorem (da função contínua para sequências)

Seja $\{a_n\}$ uma sequência de números reais. Se $a_n \to L$ e se f for uma função que é contínua em L e definida em todo a_n, então $f(a_n) \to f(L)$.

Example

Mostre que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$, onde $a_n = \sqrt{\dfrac{n+1}{n}}$.

Solução:

Sequências

Theorem (da função contínua para sequências)

Seja $\{a_n\}$ uma sequência de números reais. Se $a_n \to L$ e se f for uma função que é contínua em L e definida em todo a_n, então $f(a_n) \to f(L)$.

Example

Mostre que $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$, onde $a_n = \sqrt{\dfrac{n+1}{n}}$.

Solução: Sabemos que $\dfrac{n+1}{n} \to 1$. Tomando $f(x) = \sqrt{x}$ e $L = 1$.

Aplicando o Teorema anterior tem-se que: $\sqrt{\dfrac{n+1}{n}} \to \sqrt{1} = 1 \quad \square.$

Sequências

Theorem

- $a_n \to a$ *se e somente se* $a_{n_k} \to a$ *para toda subsequência* (a_{n_k}).

Sequências

Theorem

- *$a_n \to a$ se e somente se $a_{n_k} \to a$ para toda subsequência (a_{n_k}).*
- *$a_n \to a$ se e somente se toda subsequência (a_{n_k}) possui uma subsubsequência $(a_{n_{k_i}})$ que converge a a, isto é, $\lim_{i\to\infty} a_{n_{k_i}} = a$*

Sequências

Theorem

- *$a_n \to a$ se e somente se $a_{n_k} \to a$ para toda subsequência (a_{n_k}).*
- *$a_n \to a$ se e somente se toda subsequência (a_{n_k}) possui uma subsubsequência $(a_{n_{k_i}})$ que converge a a, isto é, $\lim\limits_{i\to\infty} a_{n_{k_i}} = a$*

Definition

Uma sequência (a_n) num espaço métrico X é dita *de Cauchy* se:

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists\ n_0; d(a_n, a_m) < \epsilon \text{ sempre que } n, m \geq n_0$$

Sequências

Theorem

- *$a_n \to a$ se e somente se $a_{n_k} \to a$ para toda subsequência (a_{n_k}).*
- *$a_n \to a$ se e somente se toda subsequência (a_{n_k}) possui uma subsubsequência $(a_{n_{k_i}})$ que converge a a, isto é, $\lim_{i\to\infty} a_{n_{k_i}} = a$*

Definition

Uma sequência (a_n) num espaço métrico X é dita *de Cauchy* se:

$$\forall \epsilon > 0, \ \exists \ n_0; d(a_n, a_m) < \epsilon \text{ sempre que } n, m \geq n_0$$

Theorem (Cauchy)

Em um espaço métrico, toda sequência convergente é de Cauchy. Em outras palavras, se (a_n) é convergente então para dado $\epsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que $n, m > N$, então $|a_n - a_m| < \epsilon$, no caso do conjunto dos números reais.

Definição recursiva

Uma sequência pode ser definida de maneira *recursiva*, dessa forma a sequência fornece:

- O(s) valor(es) do termo inicial ou termos iniciais, e

Definição recursiva

Uma sequência pode ser definida de maneira *recursiva*, dessa forma a sequência fornece:

- O(s) valor(es) do termo inicial ou termos iniciais, e
- Uma regra, chamada *fórmula de recursão*, para o cálculo de qualquer termo posterior a partir dos termos que o precederem.

Definição recursiva

Uma sequência pode ser definida de maneira *recursiva*, dessa forma a sequência fornece:

- O(s) valor(es) do termo inicial ou termos iniciais, e
- Uma regra, chamada *fórmula de recursão*, para o cálculo de qualquer termo posterior a partir dos termos que o precederem.

Example

- As sentenças $a_1 = 1$ e $a_n = a_{n-1} + 1$ para $n > 1$ definem a sequência $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$.. de números inteiros positivos.

Definição recursiva

Uma sequência pode ser definida de maneira *recursiva*, dessa forma a sequência fornece:

- O(s) valor(es) do termo inicial ou termos iniciais, e
- Uma regra, chamada *fórmula de recursão*, para o cálculo de qualquer termo posterior a partir dos termos que o precederem.

Example

- As sentenças $a_1 = 1$ e $a_n = a_{n-1} + 1$ para $n > 1$ definem a sequência $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$.. de números inteiros positivos. Para $a_1 = 1, a_2 = a_1 + 1 = 2, \ldots$

Definição recursiva

Uma sequência pode ser definida de maneira *recursiva*, dessa forma a sequência fornece:

- O(s) valor(es) do termo inicial ou termos iniciais, e
- Uma regra, chamada *fórmula de recursão*, para o cálculo de qualquer termo posterior a partir dos termos que o precederem.

Example

- As sentenças $a_1 = 1$ e $a_n = a_{n-1} + 1$ para $n > 1$ definem a sequência $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$.. de números inteiros positivos. Para $a_1 = 1, a_2 = a_1 + 1 = 2, \ldots$
- As sentenças $a_1 = 1$ e $a_n = n \cdot a_{n-1}$ para $n > 1$ definem a sequência $1, 2, 6, 24, \ldots, n!, \ldots$ de fatoriais.

Definição recursiva

Uma sequência pode ser definida de maneira *recursiva*, dessa forma a sequência fornece:

- O(s) valor(es) do termo inicial ou termos iniciais, e
- Uma regra, chamada *fórmula de recursão*, para o cálculo de qualquer termo posterior a partir dos termos que o precederem.

Example

- As sentenças $a_1 = 1$ e $a_n = a_{n-1} + 1$ para $n > 1$ definem a sequência $1, 2, 3, \dots, n, \dots$. de números inteiros positivos. Para $a_1 = 1, a_2 = a_1 + 1 = 2, \dots$
- As sentenças $a_1 = 1$ e $a_n = n \cdot a_{n-1}$ para $n > 1$ definem a sequência $1, 2, 6, 24, \dots, n!, \dots$ de fatoriais. Com $a_1 = 1$, temos $a_2 = 2 \cdot a_1 = 2$, $a_3 = 3 \cdot a_2 = 6$ e assim por diante.

Definição recursiva

Uma sequência pode ser definida de maneira *recursiva*, dessa forma a sequência fornece:

- O(s) valor(es) do termo inicial ou termos iniciais, e
- Uma regra, chamada *fórmula de recursão*, para o cálculo de qualquer termo posterior a partir dos termos que o precederem.

Example

- As sentenças $a_1 = 1$ e $a_n = a_{n-1} + 1$ para $n > 1$ definem a sequência $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$. de números inteiros positivos. Para $a_1 = 1, a_2 = a_1 + 1 = 2, \ldots$
- As sentenças $a_1 = 1$ e $a_n = n \cdot a_{n-1}$ para $n > 1$ definem a sequência $1, 2, 6, 24, \ldots, n!, \ldots$ de fatoriais. Com $a_1 = 1$, temos $a_2 = 2 \cdot a_1 = 2$, $a_3 = 3 \cdot a_2 = 6$ e assim por diante.
- Outros examplos são *números de Fibonacci* e o método de Newton.

Sequências monotônicas

Definition

Dizemos que uma sequência $\{a_n\}$ é:

Sequências monotônicas

Definition

Dizemos que uma sequência $\{a_n\}$ é:

- **Decrescente:** se $a_{n+1} \leq a_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$, ou ainda $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1, \ \forall n \in \mathbb{N}$

Sequências monotônicas

Definition

Dizemos que uma sequência $\{a_n\}$ é:

- **Decrescente:** se $a_{n+1} \leq a_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$, ou ainda $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1, \ \forall n \in \mathbb{N}$
- **Estritamente Decrescente:** se $a_{n+1} < a_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$, ou ainda $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1, \ \forall n \in \mathbb{N}$

Sequências monotônicas

Definition

Dizemos que uma sequência $\{a_n\}$ é:

- **Decrescente:** se $a_{n+1} \leq a_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$, ou ainda $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1, \ \forall n \in \mathbb{N}$
- **Estritamente Decrescente:** se $a_{n+1} < a_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$, ou ainda $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1, \ \forall n \in \mathbb{N}$
- **Crescente:** se $a_{n+1} \geq a_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$, ou ainda $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1, \ \forall n \in \mathbb{N}$

Sequências monotônicas

Definition

Dizemos que uma sequência $\{a_n\}$ é:

- **Decrescente:** se $a_{n+1} \leq a_n, \; \forall n \in \mathbb{N}$, ou ainda $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1, \; \forall n \in \mathbb{N}$
- **Estritamente Decrescente:** se $a_{n+1} < a_n, \; \forall n \in \mathbb{N}$, ou ainda $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1, \; \forall n \in \mathbb{N}$
- **Crescente:** se $a_{n+1} \geq a_n, \; \forall n \in \mathbb{N}$, ou ainda $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1, \; \forall n \in \mathbb{N}$
- **Estritamente Crescente:** se $a_{n+1} > a_n, \; \forall n \in \mathbb{N}$, ou ainda $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1, \; \forall n \in \mathbb{N}$

Sequências monotônicas

Definition

Dizemos que uma sequência $\{a_n\}$ é:

- **Decrescente:** se $a_{n+1} \leq a_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$, ou ainda $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1, \ \forall n \in \mathbb{N}$
- **Estritamente Decrescente:** se $a_{n+1} < a_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$, ou ainda $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1, \ \forall n \in \mathbb{N}$
- **Crescente:** se $a_{n+1} \geq a_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$, ou ainda $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1, \ \forall n \in \mathbb{N}$
- **Estritamente Crescente:** se $a_{n+1} > a_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$, ou ainda $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1, \ \forall n \in \mathbb{N}$

Se $\{a_n\}$ é uma sequência satisfazendo qualquer um dos itens anteriores dizemos que $\{a_n\}$ é monótona.

Sequências monotônicas

Voltaremos a discutir sequências limitadas.

Definition

Um número $c \in \mathbb{R}$ é chamado de *limitante inferior* para a sequência $\{a_n\}$ se

$$c \leq a_n, \forall n \in \mathbb{N}$$

Um número $D \in \mathbb{R}$ é chamado de *limitante superior* para $\{a_n\}$ se

$$a_n \leq D, \forall n \in \mathbb{N}$$

Sequências monotônicas

Voltaremos a discutir sequências limitadas.

Definition

Um número $c \in \mathbb{R}$ é chamado de *limitante inferior* para a sequência $\{a_n\}$ se

$$c \leq a_n, \forall n \in \mathbb{N}$$

Um número $D \in \mathbb{R}$ é chamado de *limitante superior* para $\{a_n\}$ se

$$a_n \leq D, \forall n \in \mathbb{N}$$

Example

Para a sequência $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ qualquer $c \leq 0$ é limitante inferior de $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ e qualquer $D \geq 1$ é limitante superior de $\left\{\frac{1}{n}\right\}$.

Sequências monotônicas

Theorem

Se uma sequência $\{a_n\}$ é limitada e monótona, então a sequência converge.

Sequências monotônicas

Theorem

Se uma sequência $\{a_n\}$ é limitada e monótona, então a sequência converge.

OBSERVAÇÃO: O Teorema não afirma que sequências convergentes são monótonas.

Sequências monotônicas

Theorem

Se uma sequência $\{a_n\}$ é limitada e monótona, então a sequência converge.

OBSERVAÇÃO: O Teorema não afirma que sequências convergentes são monótonas.

EXEMPLO: A sequência $\left\{\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\right\}$ converge e é limitada, mas não é monótona, uma vez que ela altera entre valores positivos e negativos à medida que tende a 0.

Exemplos

Exemplo 01:

Mostre que a sequência $\left\{ \frac{2^n}{n!} \right\}$ converge.

Exemplos

Exemplo 01:

Mostre que a sequência $\left\{\frac{2^n}{n!}\right\}$ converge.

Solução: Inicialmente vamos determinar a monotocidade da sequência:

$$\frac{2^n}{n!} > \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \iff 1 > \frac{2}{n+1}, n > 1$$

Isto ocorre pois: $2^{n+1} = 2^n \cdot 2$ e $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$

VERIFICAR AS CONTAS!

$\therefore a_n > a_{n+1},\ n > 1$. Logo a sequência é estritamente decrescente a partir de $n = 2$.

Exemplos

Exemplo 01:

Mostre que a sequência $\left\{\frac{2^n}{n!}\right\}$ converge.

Solução: Inicialmente vamos determinar a monotocidade da sequência:

$$\frac{2^n}{n!} > \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \iff 1 > \frac{2}{n+1}, n > 1$$

Isto ocorre pois: $2^{n+1} = 2^n \cdot 2$ e $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$

VERIFICAR AS CONTAS!

$\therefore a_n > a_{n+1},\ n > 1$. Logo a sequência é estritamente decrescente a partir de $n = 2$.

Agora note que, $\forall c \leq 0$ e então

$$\frac{2^n}{n!} > c,\ \forall n \geq 1$$

Dessa forma, como a sequência é estritamente decrescente e limitada inferiormente, segue que $\left\{\frac{2^n}{n!}\right\}$ converge. $\square$