Probabilidade e Estatística

Matheus Pimenta

Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Câmpus Cornélio Procópio

ADNP 2020

Distribuição t de Student

A variável $Z = \dfrac{\bar{x} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}}$ tem distribuição normal. Quando não conhecemos a variância σ^2 devemos utilizar s^2, como estimador de σ^2.

Distribuição t de Student

A variável $Z = \dfrac{\bar{x} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}}$ tem distribuição normal. Quando não conhecemos a variância σ^2 devemos utilizar s^2, como estimador de σ^2.

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \text{ e } s_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{s^2}{n}}$$

Distribuição t de Student

A variável $Z = \dfrac{\bar{x} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}}$ tem distribuição normal. Quando não conhecemos a variância σ^2 devemos utilizar s^2, como estimador de σ^2.

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \text{ e } s_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{s^2}{n}}$$

A variável definida como $t_\phi = \dfrac{\bar{x} - \mu}{s_{\bar{x}}}$ é definida como variável com distribuição de "t de Student" com ϕ graus de liberdade.

Distribuição t de Student

A variável $Z = \dfrac{\bar{x} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}}$ tem distribuição normal. Quando não conhecemos a variância σ^2 devemos utilizar s^2, como estimador de σ^2.

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \text{ e } s_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{s^2}{n}}$$

A variável definida como $t_\phi = \dfrac{\bar{x} - \mu}{s_{\bar{x}}}$ é definida como variável com distribuição de "t de Student" com ϕ graus de liberdade.
A utilização da distribuição *t de Student* como vimos anteriormente é para os casos em que o número de observações (n) na amostra é pequeno.

Distribuição t de Student

A variável $Z = \dfrac{\bar{x} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}}$ tem distribuição normal. Quando não conhecemos a variância σ^2 devemos utilizar s^2, como estimador de σ^2.

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \text{ e } s_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{s^2}{n}}$$

A variável definida como $t_\phi = \dfrac{\bar{x} - \mu}{s_{\bar{x}}}$ é definida como variável com distribuição de "t de Student" com ϕ graus de liberdade.
A utilização da distribuição *t de Student* como vimos anteriormente é para os casos em que o número de observações (n) na amostra é pequeno.
Novamente, como na utilização da distribuição Normal, iremos utilizar a tabela como auxílio.

Graus de Liberdade

Pode-se definir como graus de liberdade o número de informações independentes da amostra (n) menos o número (K) de parâmetros da população a serem estimados além do parâmetro inerente ao estudo.

Graus de Liberdade

Pode-se definir como graus de liberdade o número de informações independentes da amostra (n) menos o número (K) de parâmetros da população a serem estimados além do parâmetro inerente ao estudo.

$$\phi = n - K$$

Graus de Liberdade

Pode-se definir como graus de liberdade o número de informações independentes da amostra (n) menos o número (K) de parâmetros da população a serem estimados além do parâmetro inerente ao estudo.

$$\phi = n - K$$

Em nosso caso, como iremos estimar a média de uma população normal com σ^2 desconhecida, além de $\bar{x}$, estimador inerente ao estudo, estimaremos σ^2, um parâmetro a mais.

Graus de Liberdade

Pode-se definir como graus de liberdade o número de informações independentes da amostra (n) menos o número (K) de parâmetros da população a serem estimados além do parâmetro inerente ao estudo.

$$\phi = n - K$$

Em nosso caso, como iremos estimar a média de uma população normal com σ^2 desconhecida, além de $\bar{x}$, estimador inerente ao estudo, estimaremos σ^2, um parâmetro a mais. Isto significa que em nossos estudos, utilizaremos a distribuição *t de Student* com $n - 1$ graus de liberdade.

Graus de Liberdade - Gráfico

GRÁFICO

IC e TH para a média μ de uma população Normal com σ^2 desconhecida

O Procedimento Padrão para a determinação de IC e TH é o mesmo anteriormente dado:

IC e TH para a média μ de uma população Normal com σ^2 desconhecida

O Procedimento Padrão para a determinação de IC e TH é o mesmo anteriormente dado:

1. Retiramos uma amostra de n elementos da população.

IC e TH para a média μ de uma população Normal com σ^2 desconhecida

O Procedimento Padrão para a determinação de IC e TH é o mesmo anteriormente dado:

1. Retiramos uma amostra de n elementos da população.
   - Se $n > 30$, usa-se a distribuição Normal com s^2;

IC e TH para a média μ de uma população Normal com σ^2 desconhecida

O Procedimento Padrão para a determinação de IC e TH é o mesmo anteriormente dado:

1. Retiramos uma amostra de n elementos da população.
    - Se $n > 30$, usa-se a distribuição Normal com s^2;
    - Se $n \leq 30$, usa-se a distribuição *t de Student*, com $\phi = n - 1$ graus de liberdade.

IC e TH para a média μ de uma população Normal com σ^2 desconhecida

O Procedimento Padrão para a determinação de IC e TH é o mesmo anteriormente dado:

1. Retiramos uma amostra de n elementos da população.
   - Se $n > 30$, usa-se a distribuição Normal com s^2;
   - Se $n \leq 30$, usa-se a distribuição *t de Student*, com $\phi = n - 1$ graus de liberdade.
2. Calculamos $\bar{x} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i$

IC e TH para a média μ de uma população Normal com σ^2 desconhecida

O Procedimento Padrão para a determinação de IC e TH é o mesmo anteriormente dado:

1. Retiramos uma amostra de n elementos da população.
    - Se $n > 30$, usa-se a distribuição Normal com s^2;
    - Se $n \leq 30$, usa-se a distribuição *t de Student*, com $\phi = n - 1$ graus de liberdade.
2. Calculamos $\bar{x} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i$
3. Calculamos $s^2 = \dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$

IC e TH para a média μ de uma população Normal com σ^2 desconhecida

O Procedimento Padrão para a determinação de IC e TH é o mesmo anteriormente dado:

1. Retiramos uma amostra de n elementos da população.
   - Se $n > 30$, usa-se a distribuição Normal com s^2;
   - Se $n \leq 30$, usa-se a distribuição *t de Student*, com $\phi = n - 1$ graus de liberdade.
2. Calculamos $\bar{x} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$
3. Calculamos $s^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$
4. Determinamos $s_{\bar{x}} = \sqrt{\dfrac{s^2}{n}}$, que é o estimador de $\sigma_{\bar{x}}$.

IC e TH para a média μ de uma população Normal com σ^2 desconhecida

5. Ao nível $\alpha\%$ fazemos:

IC e TH para a média μ de uma população Normal com σ^2 desconhecida

5. Ao nível $\alpha\%$ fazemos:
   1. $P(\bar{x} - t_\alpha \cdot s_{\bar{x}} < \mu < \bar{x} + t_\alpha \cdot s_{\bar{x}}) = 1 - \alpha$

IC e TH para a média μ de uma população Normal com σ^2 desconhecida

5. Ao nível $\alpha\%$ fazemos:
    1. $P(\bar{x} - t_\alpha \cdot s_{\bar{x}} < \mu < \bar{x} + t_\alpha \cdot s_{\bar{x}}) = 1 - \alpha$
    2. $\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0, \mu > \mu_0, \mu < \mu_0 \end{cases}$

IC e TH para a média μ de uma população Normal com σ^2 desconhecida

Com o t_α, determinamos a *RNR* e *RC*.

IC e TH para a média μ de uma população Normal com σ^2 desconhecida

Com o t_α, determinamos a RNR e RC. Calculamos $t_{calc} = \dfrac{\bar{x} - \mu_{H_0}}{s_{\bar{x}}}$:

IC e TH para a média μ de uma população Normal com σ^2 desconhecida

Com o t_α, determinamos a RNR e RC. Calculamos $t_{calc} = \dfrac{\bar{x} - \mu_{H_0}}{s_{\bar{x}}}$:

- Se $t_{calc} \in RNR \implies$ não rejeita H_0;

IC e TH para a média μ de uma população Normal com σ^2 desconhecida

Com o t_α, determinamos a RNR e RC. Calculamos $t_{calc} = \dfrac{\bar{x} - \mu_{H_0}}{s_{\bar{x}}}$:

- Se $t_{calc} \in RNR \implies$ não rejeita H_0;
- Se $t_{calc} \in RC \implies$ rejeita-se H_0.

IC e TH para a média μ de uma população Normal com σ^2 desconhecida

Com o t_α, determinamos a RNR e RC. Calculamos $t_{calc} = \dfrac{\bar{x} - \mu_{H_0}}{s_{\bar{x}}}$:

- Se $t_{calc} \in RNR \implies$ não rejeita H_0;
- Se $t_{calc} \in RC \implies$ rejeita-se H_0.

Observação: Quando a população é normal com parâmetros desconhecidos, teoricamente a solução $N(0,1)$ só é aconselhável quando $n > 120$. Ná prática, para $n > 30$ usa-se $N(0,1)$.

Exemplo 01

Exemplo 01: De uma população normal com parâmetros desconhecidos, retirou-se uma amostra de 25 elementos para se estimar μ, obtendo-se $\bar{x} = 15$ e $s^2 = 36$. Determinar um IC para a média ao nível de 5%.

Exemplo 01 - Solução

Solução:

$$s_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{s^2}{n}} = \frac{6}{\sqrt{25}} = \frac{6}{5} = 1,2$$

Exemplo 01 - Solução

Solução:

$$s_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{s^2}{n}} = \frac{6}{\sqrt{25}} = \frac{6}{5} = 1,2$$

$$\phi = n - 1 = 25 - 1 = 24$$

Exemplo 01 - Solução

Solução:

$s_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{s^2}{n}} = \frac{6}{\sqrt{25}} = \frac{6}{5} = 1,2$

$\phi = n - 1 = 25 - 1 = 24$

$t_{24;2,5\%} = 2,0639$

Exemplo 01 - Solução

Solução:

$$s_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{s^2}{n}} = \frac{6}{\sqrt{25}} = \frac{6}{5} = 1,2$$

$$\phi = n - 1 = 25 - 1 = 24$$

$$t_{24;2,5\%} = 2,0639$$

$$P(15 - 2,0639 \cdot 1,2 < \mu < 15 + 2,0639 \cdot 1,2) = 0,95$$

Exemplo 01 - Solução

Solução:

$s_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{s^2}{n}} = \frac{6}{\sqrt{25}} = \frac{6}{5} = 1,2$

$\phi = n - 1 = 25 - 1 = 24$

$t_{24;2,5\%} = 2,0639$

$P(15 - 2,0639 \cdot 1,2 < \mu < 15 + 2,0639 \cdot 1,2) = 0,95$

$P(12,523 < \mu < 17,477) = 0,95$

Exemplo 01 - Solução

Solução:

$$s_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{s^2}{n}} = \frac{6}{\sqrt{25}} = \frac{6}{5} = 1,2$$

$$\phi = n - 1 = 25 - 1 = 24$$

$$t_{24;2,5\%} = 2,0639$$

$$P(15 - 2,0639 \cdot 1,2 < \mu < 15 + 2,0639 \cdot 1,2) = 0,95$$

$$P(12,523 < \mu < 17,477) = 0,95$$

$\blacksquare$