Probabilidade e Estatística

Matheus Pimenta

Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Câmpus Cornélio Procópio

ADNP 2020

Variáveis Aleatórias Contínuas

Seja o seguinte exemplo, considerando as probabilidades da variável aleatória discreta X:

X	$P(X)$
1	$0,1$
2	$0,2$
3	$0,4$
4	$0,2$
5	$0,1$

Faremos o *histograma* da distribuição de probabilidades de X.

Histograma

O *histograma* é um gráfico da distribuição de X. É construído com retângulos de bases unitárias e alturas iguais às probabilidades de $X = x_0$.

Histograma

O *histograma* é um gráfico da distribuição de X. É construído com retângulos de bases unitárias e alturas iguais às probabilidades de $X = x_0$. Para calcularmos, por exemplo, $P(1 \leq X \leq 3)$, somamos as áreas dos retângulos $1, 2$ e 3.

Histograma

O *histograma* é um gráfico da distribuição de X. É construído com retângulos de bases unitárias e alturas iguais às probabilidades de $X = x_0$. Para calcularmos, por exemplo, $P(1 \leq X \leq 3)$, somamos as áreas dos retângulos $1, 2$ e 3.
Ao ligar os pontos médios de todos os retângulos teremos uma curva, se considerarmos X uma *uma variável aleatória contínua*, essa curva representará uma função contínua $f(X)$, representada no gráfico.

Definição

Variável Aleatória Contínua:
Uma variável aleatória X é contínua em $\mathbb{R}$ se existir uma função $f(x)$, tal que:

Definição

Variável Aleatória Contínua:
Uma variável aleatória X é contínua em $\mathbb{R}$ se existir uma função $f(x)$, tal que:

- $f(x) \geq 0$, isto é, $f(x)$ é não negativa;

Definição

Variável Aleatória Contínua:
Uma variável aleatória X é contínua em $\mathbb{R}$ se existir uma função $f(x)$, tal que:

- $f(x) \geq 0$, isto é, $f(x)$ é não negativa;
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

Definição

Variável Aleatória Contínua:
Uma variável aleatória X é contínua em $\mathbb{R}$ se existir uma função $f(x)$, tal que:

- $f(x) \geq 0$, isto é, $f(x)$ é não negativa;
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

A função $f(x)$ é chamada *função densidade de probabilidade (f. d. p.)*.

Definição

Variável Aleatória Contínua:
Uma variável aleatória X é contínua em $\mathbb{R}$ se existir uma função $f(x)$, tal que:

- $f(x) \geq 0$, isto é, $f(x)$ é não negativa;
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

A função $f(x)$ é chamada *função densidade de probabilidade (f. d. p.)*.

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

Definição

Esperança de uma variável aleatória contínua:

Definição

Esperança de uma variável aleatória contínua:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

Definição

Esperança de uma variável aleatória contínua:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

Também é vista como o "centro da distribuição de probabilidade".

Definição

Esperança de uma variável aleatória contínua:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

Também é vista como o "centro da distribuição de probabilidade". Veremos o significado a seguir.

Definição

Esperança de uma variável aleatória contínua:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

Também é vista como o "centro da distribuição de probabilidade". Veremos o significado a seguir.

Variância de uma variável aleatória contínua:

Definição

Esperança de uma variável aleatória contínua:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

Também é vista como o "centro da distribuição de probabilidade". Veremos o significado a seguir.

Variância de uma variável aleatória contínua:

$$VAR(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 dx$$

Definição

Esperança de uma variável aleatória contínua:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

Também é vista como o "centro da distribuição de probabilidade". Veremos o significado a seguir.

Variância de uma variável aleatória contínua:

$$VAR(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 dx$$

ou

$$VAR(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

Distribuição Uniforme

Definição:
Uma variável aleatória contínua X tem distribuição uniforme de probabilidades no intervalo $[a, b]$ se a sua função de densidade de probabilidade é dada por:

Distribuição Uniforme

Definição:
Uma variável aleatória contínua X tem distribuição uniforme de probabilidades no intervalo $[a, b]$ se a sua função de densidade de probabilidade é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} k \text{ se } a \leq x \leq b \\ 0 \text{ se } x < a \text{ ou } x > b \end{cases}$$

Distribuição Uniforme

Definição:
Uma variável aleatória contínua X tem distribuição uniforme de probabilidades no intervalo $[a, b]$ se a sua função de densidade de probabilidade é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} k \text{ se } a \leq x \leq b \\ 0 \text{ se } x < a \text{ ou } x > b \end{cases}$$

GRÁFICO

Distribuição Uniforme

Definição:
Uma variável aleatória contínua X tem distribuição uniforme de probabilidades no intervalo $[a, b]$ se a sua função de densidade de probabilidade é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} k \text{ se } a \leq x \leq b \\ 0 \text{ se } x < a \text{ ou } x > b \end{cases}$$

GRÁFICO

Exercício: Determinar o valor de k.

Distribuição Exponencial

Definição:
Uma variável aleatória contínua X tem distribuição exponencial de probabilidades se a sua função de densidade de probabilidade é dada por:

Distribuição Exponencial

Definição:
Uma variável aleatória contínua X tem distribuição exponencial de probabilidades se a sua função de densidade de probabilidade é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Distribuição Exponencial

Definição:
Uma variável aleatória contínua X tem distribuição exponencial de probabilidades se a sua função de densidade de probabilidade é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

GRÁFICO

Distribuição Normal

Uma variável aleatória contínua X tem distribuição normal de probabilidades se a sua função de densidade de probabilidade é dada por:

Distribuição Normal

Uma variável aleatória contínua X tem distribuição normal de probabilidades se a sua função de densidade de probabilidade é dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \text{ para } -\infty < x < \infty$$

Distribuição Normal

Uma variável aleatória contínua X tem distribuição normal de probabilidades se a sua função de densidade de probabilidade é dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \text{ para } -\infty < x < \infty$$

GRÁFICO

Distribuição Normal

As principais características da distribuição Normal são:

Distribuição Normal

As principais características da distribuição Normal são:

1. O ponto de máximo de $f(x)$ é o ponto $X = \mu$;

Distribuição Normal

As principais características da distribuição Normal são:

1. O ponto de máximo de $f(x)$ é o ponto $X = \mu$;
2. Os pontos de inflexão da função são: $X = \mu + \sigma$ e $X = \mu - \sigma$;

Distribuição Normal

As principais características da distribuição Normal são:

1. O ponto de máximo de $f(x)$ é o ponto $X = \mu$;
2. Os pontos de inflexão da função são: $X = \mu + \sigma$ e $X = \mu - \sigma$;
3. A curva é simétrica com relação a μ;

Distribuição Normal

As principais características da distribuição Normal são:

1. O ponto de máximo de $f(x)$ é o ponto $X = \mu$;
2. Os pontos de inflexão da função são: $X = \mu + \sigma$ e $X = \mu - \sigma$;
3. A curva é simétrica com relação a μ;
4. $E(X) = \mu$ e $VAR(X) = \sigma^2$.

Distribuição Normal

As principais características da distribuição Normal são:

1. O ponto de máximo de $f(x)$ é o ponto $X = \mu$;
2. Os pontos de inflexão da função são: $X = \mu + \sigma$ e $X = \mu - \sigma$;
3. A curva é simétrica com relação a μ;
4. $E(X) = \mu$ e $VAR(X) = \sigma^2$.

Utilizaremos a seguinte notação:

$$X : N(\mu, \sigma^2)$$

Distribuição Normal

As principais características da distribuição Normal são:

1. O ponto de máximo de $f(x)$ é o ponto $X = \mu$;
2. Os pontos de inflexão da função são: $X = \mu + \sigma$ e $X = \mu - \sigma$;
3. A curva é simétrica com relação a μ;
4. $E(X) = \mu$ e $VAR(X) = \sigma^2$.

Utilizaremos a seguinte notação:

$$X : N(\mu, \sigma^2)$$

X tem distribuição normal com média μ e variância σ^2.

Distribuição Normal

Seja $X : N(\mu, \sigma^2)$, definimos:

Distribuição Normal

Seja $X : N(\mu, \sigma^2)$, definimos:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Distribuição Normal

Seja $X : N(\mu, \sigma^2)$, definimos:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Z é chamada de *variável normal reduzida, normal padronizada* ou *variável normalizada*.

Distribuição Normal

Seja $X : N(\mu, \sigma^2)$, definimos:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Z é chamada de *variável normal reduzida, normal padronizada* ou *variável normalizada*.
Z possui $E(X) = 0$ e $VAR(X) = 1$.

Distribuição Normal

Seja $X : N(\mu, \sigma^2)$, definimos:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Z é chamada de *variável normal reduzida, normal padronizada* ou *variável normalizada*.
Z possui $E(X) = 0$ e $VAR(X) = 1$.
A vantagem de utilizar a variável Z é a utilização da tabela.

Uso da Tabela

Exemplo: Seja $X : N(100, 25)$.

1. $P(100 \leq X \leq 106)$

Uso da Tabela

Exemplo: Seja $X : N(100, 25)$.

1. $P(100 \leq X \leq 106)$
2. $P(89 \leq X \leq 107)$

Uso da Tabela

Exemplo: Seja $X : N(100, 25)$.

1. $P(100 \leq X \leq 106)$
2. $P(89 \leq X \leq 107)$
3. $P(112 \leq X \leq 116)$

Uso da Tabela

Exemplo: Seja $X : N(100, 25)$.

1. $P(100 \leq X \leq 106)$
2. $P(89 \leq X \leq 107)$
3. $P(112 \leq X \leq 116)$
4. $P(X \geq 108)$

Uso do GeoGebra

Exemplo: Seja $X : N(100, 25)$.

1. $P(100 \leq X \leq 106)$

Uso do GeoGebra

Exemplo: Seja $X : N(100, 25)$.

1. $P(100 \leq X \leq 106)$
2. $P(89 \leq X \leq 107)$

Uso do GeoGebra

Exemplo: Seja $X : N(100, 25)$.

1. $P(100 \leq X \leq 106)$
2. $P(89 \leq X \leq 107)$
3. $P(112 \leq X \leq 116)$

Uso do GeoGebra

Exemplo: Seja $X : N(100, 25)$.

1. $P(100 \leq X \leq 106)$
2. $P(89 \leq X \leq 107)$
3. $P(112 \leq X \leq 116)$
4. $P(X \geq 108)$

Exemplo

Um fabricante de baterias sabe, por experiência passada, que as baterias de sua fabricação têm vida média de 600 dias e desvio-padrão de 100 dias, sendo que a duração tem aproximadamente distribuição normal. Oferece uma garantia de 312 dias, isto é, troca as baterias que apresentem falhas nesse período. Fabrica 10.000 baterias mensalmente. Quantas deverá trocar pelo uso da garantia, mensalmente?

Exemplo - Solução

Resolução:

Exemplo - Solução

Resolução:

X : é a duração da bateria e assim

Exemplo - Solução

Resolução:

$$X : \text{é a duração da bateria e assim} \begin{cases} \mu = 600 \text{ dias} \\ \sigma = 100 \text{ dias} \end{cases}$$

Exemplo - Solução

Resolução:

X : é a duração da bateria e assim $\begin{cases} \mu = 600 \text{ dias} \\ \sigma = 100 \text{ dias} \end{cases}$

Logo,

Exemplo - Solução

Resolução:

X : é a duração da bateria e assim $\begin{cases} \mu = 600 \text{ dias} \\ \sigma = 100 \text{ dias} \end{cases}$

Logo,

$Z = \dfrac{X - 600}{100}$

Exemplo - Solução

Resolução:

X : é a duração da bateria e assim $\begin{cases} \mu = 600 \text{ dias} \\ \sigma = 100 \text{ dias} \end{cases}$

Logo,

$Z = \dfrac{X - 600}{100}$

Queremos determinar a $P(X < 312)$.

Exemplo - Solução

Resolução:

X : é a duração da bateria e assim $\begin{cases} \mu = 600 \text{ dias} \\ \sigma = 100 \text{ dias} \end{cases}$

Logo,

$Z = \dfrac{X - 600}{100}$

Queremos determinar a $P(X < 312)$.

Utilizando o GeoGebra (e a Tabela) determinaremos qual é essa probabilidade.

Exemplo - Solução

Resolução:

X : é a duração da bateria e assim $\begin{cases} \mu = 600 \text{ dias} \\ \sigma = 100 \text{ dias} \end{cases}$

Logo,

$Z = \dfrac{X - 600}{100}$

Queremos determinar a $P(X < 312)$.

Utilizando o GeoGebra (e a Tabela) determinaremos qual é essa probabilidade.

Assim, $P(X < 312) = 0,001988 \approx 0,002$.

Exemplo - Solução

Resolução:

X : é a duração da bateria e assim $\begin{cases} \mu = 600 \text{ dias} \\ \sigma = 100 \text{ dias} \end{cases}$

Logo,

$Z = \dfrac{X - 600}{100}$

Queremos determinar a $P(X < 312)$.

Utilizando o GeoGebra (e a Tabela) determinaremos qual é essa probabilidade.

Assim, $P(X < 312) = 0,001988 \approx 0,002$.

Para determinarmos quantas baterias serão substituídas mensalmente fazemos:

Exemplo - Solução

Resolução:

X : é a duração da bateria e assim $\begin{cases} \mu = 600 \text{ dias} \\ \sigma = 100 \text{ dias} \end{cases}$

Logo,

$Z = \dfrac{X - 600}{100}$

Queremos determinar a $P(X < 312)$.

Utilizando o GeoGebra (e a Tabela) determinaremos qual é essa probabilidade.

Assim, $P(X < 312) = 0,001988 \approx 0,002$.

Para determinarmos quantas baterias serão substituídas mensalmente fazemos:

$10000 \times 0,001988 = 19,88 = 20$ baterias.

Exemplo - Solução

Resolução:

X : é a duração da bateria e assim $\begin{cases} \mu = 600 \text{ dias} \\ \sigma = 100 \text{ dias} \end{cases}$

Logo,

$Z = \dfrac{X - 600}{100}$

Queremos determinar a $P(X < 312)$.

Utilizando o GeoGebra (e a Tabela) determinaremos qual é essa probabilidade.

Assim, $P(X < 312) = 0,001988 \approx 0,002$.

Para determinarmos quantas baterias serão substituídas mensalmente fazemos:

$10000 \times 0,001988 = 19,88 = 20$ baterias.

■