REVISÃO
CÁLCULO I

Matheus Pimenta

Universidade Estadual de Londrina
Londrina

Fev. 2022

Apresentação

Matheus Pimenta

Apresentação

Matheus Pimenta
e-mail: matheus.pimenta@outlook.com ou omatheuspimenta@outlook.com

Apresentação

Matheus Pimenta
e-mail: matheus.pimenta@outlook.com ou omatheuspimenta@outlook.com
Informações sobre a disciplina

Apresentação

Matheus Pimenta
e-mail: matheus.pimenta@outlook.com ou omatheuspimenta@outlook.com
Informações sobre a disciplina
Dúvidas gerais

Conjuntos Numéricos

- $\mathbb{N}$ O conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais é caracterizado pelos axiomas de Peano.
  1. Todo número natural n tem um sucessor $s(n)$, que ainda é um número natural, números diferentes têm sucessores diferentes.

Conjuntos Numéricos

- $\mathbb{N}$ O conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais é caracterizado pelos axiomas de Peano.
  1. Todo número natural n tem um sucessor $s(n)$, que ainda é um número natural, números diferentes têm sucessores diferentes.
  2. Existe um único número natural 1 que não é sucessor de nenhum outro.

Conjuntos Numéricos

- $\mathbb{N}$ O conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais é caracterizado pelos axiomas de Peano.
  1. Todo número natural n tem um sucessor $s(n)$, que ainda é um número natural, números diferentes têm sucessores diferentes.
  2. Existe um único número natural 1 que não é sucessor de nenhum outro.
  3. Se um conjunto de números naturais contém o 1 e contém também o sucessor de cada um de seus elementos, então esse conjunto contém todos os números naturais.

Conjuntos Numéricos

- $\mathbb{N}$ O conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais é caracterizado pelos axiomas de Peano.
  1. Todo número natural n tem um sucessor $s(n)$, que ainda é um número natural, números diferentes têm sucessores diferentes.
  2. Existe um único número natural 1 que não é sucessor de nenhum outro.
  3. Se um conjunto de números naturais contém o 1 e contém também o sucessor de cada um de seus elementos, então esse conjunto contém todos os números naturais.

Conjuntos Numéricos

- $\mathbb{Z}$:

Conjuntos Numéricos

- $\mathbb{Z}$: dos números inteiros é definido por:

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$$

.

Conjuntos Numéricos

- $\mathbb{Z}$: dos números inteiros é definido por:

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$$

.

- $\mathbb{Q}$:

Conjuntos Numéricos

- $\mathbb{Z}$: dos números inteiros é definido por:

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$$

.

- $\mathbb{Q}$: dos números racionais é formado pelas razões de inteiros:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q}; p, q \in \mathbb{Z} \text{ e } q \neq 0 \right\}$$

Conjuntos Numéricos

- $\mathbb{R}$:

Conjuntos Numéricos

- $\mathbb{R}$: dos números reais pode ser definido como o conjunto de todas as possíveis expansões decimais. Assim, um número real $a, d_1 d_2 d_3 \ldots$ pode ser representado por uma "soma infinita" de números racionais:

$$a + \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \ldots$$

Equações

- Equações de 1º Grau:

Equações

- Equações de 1º Grau: são expressões do tipo $ax + b = 0$, com $a \neq 0$, onde a e b são coeficientes da equação e x é a incógnita.

Equações

- Equações de 1º Grau: são expressões do tipo $ax + b = 0$, com $a \neq 0$, onde a e b são coeficientes da equação e x é a incógnita.
- Equações de 2º Grau:

Equações

- Equações de 1º Grau: são expressões do tipo $ax + b = 0$, com $a \neq 0$, onde a e b são coeficientes da equação e x é a incógnita.
- Equações de 2º Grau: são expressões do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, onde a, b e c são coeficientes e x é a incógnita. Nem sempre possui raízes reais, mas possui uma ou duas raízes em $\mathbb{C}$.

Divisão de Polinômios

Seja $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$ e $g(x) = x - a$.
Se $f(a) = 0$, então existe $q(x) = q_0 x^{n-1} + q_1 x^{n-2} + \cdots + q_{n-2} x + q_{n-1}$ tal que $q(x).g(x) = f(x)$.

Funções Reais de uma Variável Real

Sejam D e Y conjuntos não-degenerados. Uma função $f : D \to Y$ é uma regra que associa, a cada elemento $x \in D$, um único elemento $f(x) \in Y$.

Funções Reais de uma Variável Real

Sejam D e Y conjuntos não-degenerados. Uma função $f : D \to Y$ é uma regra que associa, a cada elemento $x \in D$, um único elemento $f(x) \in Y$.
Função:

Funções Reais de uma Variável Real

Sejam D e Y conjuntos não-degenerados. Uma função $f : D \to Y$ é uma regra que associa, a cada elemento $x \in D$, um único elemento $f(x) \in Y$.
Função: É uma relação em que todos os elementos x do conjunto A, se relacionam uma **única** vez com os elementos y do conjunto B, ou seja, $f : A \to B$, ou ainda, $(f) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ou simplesmente $(f) : X \to Y = f(x)$, na prática escrevemos $y = f(x)$.

Funções Reais de uma Variável Real

Sejam D e Y conjuntos não-degenerados. Uma função $f : D \to Y$ é uma regra que associa, a cada elemento $x \in D$, um único elemento $f(x) \in Y$.
Função: É uma relação em que todos os elementos x do conjunto A, se relacionam uma **única** vez com os elementos y do conjunto B, ou seja, $f : A \to B$, ou ainda, $(f) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ou simplesmente $(f) : X \to Y = f(x)$, na prática escrevemos $y = f(x)$.
O conjunto D é denominado domínio da função. O conjunto Y é denominado contra-domínio. A imagem da função f é o conjunto formado por todos os pontos $y \in Y$ tais que existe um $x_0 \in D$ com $f(x_0) = y$.
Note que $Im(f) \subset Y$, mas não necessariamente a imagem possui todos os elementos do contra-domínio.

Funções Monótonas

Uma função $f : D \to \mathbb{R}$, com $D \subset \mathbb{R}$, chama-se:

- não-decrescente, se $x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$;
- não-crescente, se $x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$;
- crescente, se $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$;
- decrescente, se $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$.

Composição de Funções

Sejam A, B e C conjuntos e sejam as funções $f : A \to B$ e $g : B \to C$. A função $g \circ f : A \to C$ é definida por:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Note que $g \circ f$ costuma ser diferente de $f \circ g$.

Principais Funções Elementares

- Função Polinomial:

Principais Funções Elementares

- Função Polinomial:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

Principais Funções Elementares

- Função Polinomial:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

- Função Racional:

Principais Funções Elementares

- Função Polinomial:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

- Função Racional:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

onde p e q são funções polinomiais. O domínio de f é $\{x \in \mathbb{R}; q(x) \neq 0\}$

Principais Funções Elementares

- Função Polinomial:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

- Função Racional:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

onde p e q são funções polinomiais. O domínio de f é $\{x \in \mathbb{R}; q(x) \neq 0\}$

- Funções Trigonométricas:

Principais Funções Elementares

- Função Polinomial:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

- Função Racional:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

onde p e q são funções polinomiais. O domínio de f é $\{x \in \mathbb{R}; q(x) \neq 0\}$

- Funções Trigonométricas: $\sin(\alpha) = \frac{b}{a}$ e $\cos(\alpha) = \frac{c}{a}$

Principais Funções Elementares

- Função Exponencial:

Principais Funções Elementares

- Função Exponencial: A função exponencial de base a é dada por $f(x) = a^x$. Se $x = \frac{p}{q}$ é um número racional, então:

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} = (\sqrt[q]{a})^p$$

  Consideramos sempre $a > 0$ e $a \neq 1$.

- Função Logarítmica:

Principais Funções Elementares

- Função Exponencial: A função exponencial de base a é dada por $f(x) = a^x$. Se $x = \frac{p}{q}$ é um número racional, então:

  $$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} = (\sqrt[q]{a})^p$$

  Consideramos sempre $a > 0$ e $a \neq 1$.
- Função Logarítmica: A função logarítmica de base a é a inversa da função exponencial de base a, ou seja:

  $$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$$

  Seu domínio é $(0, \infty)$ e sua imagem é $(-\infty, \infty)$
  Algumas bases recebem notação especial:

  $$\log_a x = \log(x)$$

  $$\log_e x = \ln(x)$$

Limites

Definition (Limites)

Seja $f(x)$ definida em um intervalo em torno de a. Dizemos que o limite de $f(x)$, quando x tende a a, é o número L, se, para todo $\varepsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que $|x - a| < \delta$, $x \neq a$, implica em $|f(x) - L| < \varepsilon$. Simbolicamente:

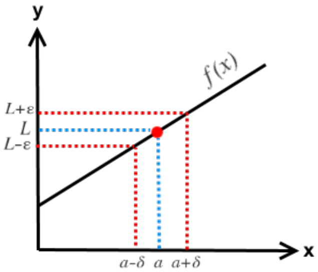
$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Limites

Definition (Limites)

Seja $f(x)$ definida em um intervalo em torno de a. Dizemos que o limite de $f(x)$, quando x tende a a, é o número L, se, para todo $\varepsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que $|x - a| < \delta$, $x \neq a$, implica em $|f(x) - L| < \varepsilon$. Simbolicamente:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$



Propriedades de Limites

Theorem (Unicidade do Limite)

Se $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ *e* $\lim_{x \to a} f(x) = L_2$*, então* $L_1 = L_2$

Propriedades de Limites

Theorem (Unicidade do Limite)

Se $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ *e* $\lim_{x \to a} f(x) = L_2$, *então* $L_1 = L_2$

Theorem (Conservação de Sinal)

Se $\lim_{x \to a} = L \neq 0$ *então existe um intervalo aberto* I *contendo* a *tal que, para todo* $x \in I \cap D(f) - \{a\}$ *tem-se que* $f(x)$ *possui o mesmo sinal de* L.

Propriedades de Limites

Se L, M, a e k são números reais e $\lim_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim_{x \to a} g(x) = M$ são válidas:

1. $\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = L + M$
2. $\lim_{x \to a} (f(x) - g(x)) = L - M$
3. $\lim_{x \to a} (f(x).g(x)) = L.M$
4. $\lim_{x \to a} (k.f(x)) = k.L$
5. $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$, desde que $M \neq 0$
6. $\lim_{x \to a} (f(x))^k = L^k$, se $k \in \mathbb{Z}$
7. $\lim_{x \to a} \sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{L}$, se $k \in \mathbb{Z}$ e se $L \geq 0$ quando k é par.

Propriedades de Limites

Theorem

Se $f(x) \leq g(x)$ para todos os valores de x em certo intervalo aberto contendo a, exceto possivelmente no próprio $x = a$, e os limites de f e g existem com $x \to a$, então:

$$\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x)$$

Propriedades de Limites

Theorem

Se $f(x) \leq g(x)$ para todos os valores de x em certo intervalo aberto contendo a, exceto possivelmente no próprio $x = a$, e os limites de f e g existem com $x \to a$, então:

$$\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x)$$

Theorem (Teorema do Confronto (ou Sanduíche))

Se $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ para qualquer x em um intervalo aberto contendo a, exceto possivelmente em $x = a$ e $\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$ então: $\lim_{x \to a} f(x) = L$

Limites Laterais

Theorem

Uma função $f(x)$ terá um limite quando x se aproximar de a, sendo $f(x)$ definida na vizinhança de a, se e somente se, tiver um limite lateral à direita e um à esquerda, e os dois limites laterais forem iguais:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

Limites Infinitos

Definition

Dizemos que $f(x)$ tende ao infinito *(a menos infinito)* quando x tende a a e escrevemos $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ $(\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ *)* se para cada número real positivo *(negativo)* B existe um $\delta > 0$ tal que:

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > B$$

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < B$$

Limites no Infinito

Definition

Dizemos que $f(x)$ possui limite L quando x tende ao infinito *(menos infinito)* e escrevemos $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ *(* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$ *)* se para cada $\varepsilon > 0$, existe um número M tal que:

$$x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

$$x < M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Continuidade de Funções

Uma função é contínua num ponto interior c de seu domínio quando $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

Continuidade de Funções

Uma função é contínua num ponto interior c de seu domínio quando $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

Assim, f será contínua em c se satisfazer:

1. $f(c)$ existe $(c \in D(f))$;
2. $\lim_{x \to c} f(x)$ existe, ou seja, $\lim_{x \to c^-} f(x) = \lim_{x \to c^+} f(x)$;
3. $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

Derivadas

Definition

Seja f uma função definida em um intervalo aberto I e x_0 um elemento de I.

A derivada de f no ponto x_0 é o limite, se existir:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{1}$$

Fazendo $x - x_0 = h$ tem-se:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{2}$$

Notação: $f'(x_0)$ ou $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_0}$

Derivadas

Definition

Seja f uma função definida em um intervalo aberto I e x_0 um elemento de I.

A derivada de f no ponto x_0 é o limite, se existir:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{1}$$

Fazendo $x - x_0 = h$ tem-se:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{2}$$

Notação: $f'(x_0)$ ou $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_0}$

Derivadas

A derivada nos dá a taxa de variação da função f no ponto x_0.
Ou ainda, o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto $x = x_0$.

Derivadas

A derivada nos dá a taxa de variação da função f no ponto x_0.
Ou ainda, o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto $x = x_0$.
Se f é uma função derivável em um intervalo, podemos definir a *função derivada* f' que associa a cada $x_0 \in I$ o valor $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Derivadas - Regras de Derivação

1. **Função Constante:** se $f(x) = c$, então $f'(x) = 0$

Derivadas - Regras de Derivação

1. **Função Constante:** se $f(x) = c$, então $f'(x) = 0$
2. **Regra da Identidade:** se $f(x) = x$, então $\dfrac{\partial[x]}{\partial x} = 1$

Derivadas - Regras de Derivação

1. **Função Constante:** se $f(x) = c$, então $f'(x) = 0$
2. **Regra da Identidade:** se $f(x) = x$, então $\dfrac{\partial[x]}{\partial x} = 1$
3. **Regra da Potência:** se $f(x) = x^n$, então $\dfrac{\partial[x^n]}{\partial x} = nx^{n-1}$

Derivadas - Regras de Derivação

1. **Função Constante:** se $f(x) = c$, então $f'(x) = 0$
2. **Regra da Identidade:** se $f(x) = x$, então $\dfrac{\partial[x]}{\partial x} = 1$
3. **Regra da Potência:** se $f(x) = x^n$, então $\dfrac{\partial[x^n]}{\partial x} = nx^{n-1}$
4. **Multiplicação por Constante:** se w é uma função derivável de x e c é uma constante, então $\dfrac{\partial[cw]}{\partial x} = c\dfrac{\partial[w]}{\partial x}$

Derivadas - Regras de Derivação

1. **Função Constante:** se $f(x) = c$, então $f'(x) = 0$
2. **Regra da Identidade:** se $f(x) = x$, então $\dfrac{\partial[x]}{\partial x} = 1$
3. **Regra da Potência:** se $f(x) = x^n$, então $\dfrac{\partial[x^n]}{\partial x} = nx^{n-1}$
4. **Multiplicação por Constante:** se w é uma função derivável de x e c é uma constante, então $\dfrac{\partial[cw]}{\partial x} = c\dfrac{\partial[w]}{\partial x}$
5. **Regra da Soma e da Diferença:**
$$\frac{\partial[f(x) \pm g(x)]}{\partial x} = \frac{\partial[f(x)]}{\partial x} \pm \frac{\partial[g(x)]}{\partial x}$$

Derivadas - Regras de Derivação

1. **Função Constante:** se $f(x) = c$, então $f'(x) = 0$
2. **Regra da Identidade:** se $f(x) = x$, então $\dfrac{\partial[x]}{\partial x} = 1$
3. **Regra da Potência:** se $f(x) = x^n$, então $\dfrac{\partial[x^n]}{\partial x} = nx^{n-1}$
4. **Multiplicação por Constante:** se w é uma função derivável de x e c é uma constante, então $\dfrac{\partial[cw]}{\partial x} = c\dfrac{\partial[w]}{\partial x}$
5. **Regra da Soma e da Diferença:** $\dfrac{\partial[f(x) \pm g(x)]}{\partial x} = \dfrac{\partial[f(x)]}{\partial x} \pm \dfrac{\partial[g(x)]}{\partial x}$
6. **Derivada da Exponencial:** $\dfrac{\partial[e^x]}{\partial x} = e^x$

Derivadas - Regras de Derivação

7. **Regra do Produto:** $\dfrac{\partial[f(x).g(x)]}{\partial x} = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$,

generalizando o caso, segue $\dfrac{\partial[u.v]}{\partial x} = u'.v + u.v'$

Derivadas - Regras de Derivação

7. **Regra do Produto:** $\dfrac{\partial[f(x).g(x)]}{\partial x} = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$, generalizando o caso, segue $\dfrac{\partial[u.v]}{\partial x} = u'.v + u.v'$

8. **Regra do Quociente:** $\dfrac{\partial[\frac{f(x)}{g(x)}]}{\partial x} = \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{[g(x)]^2}$, generalizando o caso, segue que a derivada é dada por $\dfrac{\partial[\dfrac{u}{v}]}{\partial x} = \dfrac{u'.v - u.v'}{[v]^2}$

Derivadas - Regra da Cadeia

A Derivada de funções compostas é obtida através da Regra da Cadeia.

Theorem (Regra da Cadeia)

Seja $f(x)$ e $g(x)$ tal que $(g \circ f)(x)$ esteja bem definida. Sendo $f(x)$ derivável em x e $g(x)$ derivável em $f(x)$, a derivada de $(g \circ f)(x)$ é:

$$(g \circ f(x))' = (g(f(x)))' = g'(f(x)).f'(x) \tag{3}$$

Na notação de Leibniz, utilizando $u = f(x)$ e $g(f(x)) = g(u)$ temos:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial u} . \frac{\partial u}{\partial y} \tag{4}$$

Derivadas de Funções Elementares

- Derivada da Função Exponencial:

Derivadas de Funções Elementares

- Derivada da Função Exponencial: Seja $a \in \mathbb{R}$ tal que $0 < a \neq 1$ e $f(x) = a^x$, então a derivada é:

$$y' = a^x . \ln(a)$$

Derivadas de Funções Elementares

- Derivada da Função Exponencial: Seja $a \in \mathbb{R}$ tal que $0 < a \neq 1$ e $f(x) = a^x$, então a derivada é:

$$y' = a^x . \ln(a)$$

Caso particular $a = e$, logo

$$y = e^x \Rightarrow y' = e^x . \ln(e) \Rightarrow y' = e^x$$

Derivadas de Funções Elementares

- Derivada da Função Exponencial: Seja $a \in \mathbb{R}$ tal que $0 < a \neq 1$ e $f(x) = a^x$, então a derivada é:

$$y' = a^x . \ln(a)$$

Caso particular $a = e$, logo

$$y = e^x \Rightarrow y' = e^x . \ln(e) \Rightarrow y' = e^x$$

Generalizando:

$$y = a^u \Rightarrow y' = a^u . \ln(a).u'$$

$$y = e^u \Rightarrow y' = e^u.u'$$

Derivadas de Funções Elementares

- Derivada da Função Logarítmica:

Derivadas de Funções Elementares

- Derivada da Função Logarítmica: Seja $a \in \mathbb{R}$, tal que $0 < a \neq 1$ e $u(x) = \log_a x$ sendo que $f^{-1}(x) = u(x)$ e, $f(x) = a^x$, assim a derivada de $u(x)$ é:

$$u'(x) = \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]}$$

Derivadas de Funções Elementares

- Derivada da Função Logarítmica: Seja $a \in \mathbb{R}$, tal que $0 < a \neq 1$ e $u(x) = \log_a x$ sendo que $f^{-1}(x) = u(x)$ e, $f(x) = a^x$, assim a derivada de $u(x)$ é:

$$u'(x) = \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]}$$

Assim,

$$u'(x) = \frac{\log_a e}{x}$$

$$u' = \frac{1}{x.\ln(a)}$$

No caso particular que $a = e$ segue:

$$u' = \frac{1}{x}$$

Derivadas de Funções Elementares

Generalizando:

$$y = \log_a u \Rightarrow y' = \frac{u'}{u.\ln(a)} \text{ ou } y' = \frac{\log_a e}{x}$$

$$y = \ln u \Rightarrow y' = \frac{u'}{u}$$

Derivadas - Funções Trigonométricas

Algumas Relações Trigonométricas

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$\cot(x) = \frac{1}{\tan(x)} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

$$cossec(x) = \frac{1}{\sin(x)}$$

$$\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$$

Uma Relação Fundamental

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

Derivadas - Funções Trigonométricas

Relações Secundárias

$$\tan^2(x) + 1 = \sec^2(x)$$

$$1 + \cot^2(x) = cossec^2(x)$$

Soma do Seno

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$$

As funções $\sin(x)$ e $\cos(x)$ são contínuas e tem derivadas para todo x. As derivadas são:

$$\frac{\partial[\sin(x)]}{\partial x} = \cos(x)$$

$$\frac{\partial[\cos(x)]}{\partial x} = -\sin(x)$$

Derivadas - Função arco seno

Os símbolos $\sin^{-1}(x)$ e $\arcsin(x)$ significam "um ângulo cujo seno é um dado número x"

$$y = \sin(x) \Leftrightarrow y^{-1} = \arcsin(x)$$
$$y = \cos(x) \Leftrightarrow y^{-1} = \arccos(x)$$
$$y = \tan(x) \Leftrightarrow y^{-1} = \arctan(x)$$

Derivadas:

$$(\arcsin[u(x)])' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}.u'$$

$$(\arccos[u(x)])' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}.u'$$

$$(\arctan[u(x)])' = \frac{1}{1+u^2}.u'$$

Derivadas - Funções Hiiperbólicas

São combinações.

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Derivadas:

$$(\sinh(x))' = \cosh(x)$$

$$(\cosh(x))' = \sinh(x)$$

Derivadas de Ordem Superior

Se $y = f(x)$ é uma função derivável, então $f'(x)$ também é uma função. Se f' for derivável teremos $(f')' = f''$ a segunda derivada de f.

Notação: $f''(x)$ ou $\dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}$, generalizando, $f^n(x)$ ou $\dfrac{\partial^n f(x)}{\partial x^n}$

Derivadas - Aplicações

Uma função f tem um valor mínimo local (máximo local) em um ponto interior c de seu domínio se $f(x) \geq f(c)$ ($f(x) \leq f(c)$) para qualquer x em uma vizinhança de c.

Derivadas - Aplicações

Uma função f tem um valor mínimo local (máximo local) em um ponto interior c de seu domínio se $f(x) \geq f(c)$ $(f(x) \leq f(c))$ para qualquer x em uma vizinhança de c.
Se f possui um valor máximo ou mínimo local em um ponto c interior de seu domínio e se f é derivável em c, então $f'(c) = 0$. O contrário não se aplica.

Derivadas - Aplicações

Uma função f tem um valor mínimo local (máximo local) em um ponto interior c de seu domínio se $f(x) \geq f(c)$ ($f(x) \leq f(c)$) para qualquer x em uma vizinhança de c.
Se f possui um valor máximo ou mínimo local em um ponto c interior de seu domínio e se f é derivável em c, então $f'(c) = 0$. O contrário não se aplica.
Um ponto interior do domínio de f tal que f' é zero ou indefinida é chamado *ponto crítico* de f.

Derivadas - Aplicações

Teste da Primeira Derivada:

Derivadas - Aplicações

Teste da Primeira Derivada: Uma função $f(x)$ é crescente nos intervalos em que $f'(x) > 0$ e é decrescente nos intervalos em que $f'(x) < 0$.

Derivadas - Aplicações

Teste da Primeira Derivada: Uma função $f(x)$ é crescente nos intervalos em que $f'(x) > 0$ e é decrescente nos intervalos em que $f'(x) < 0$.
Teste da Segunda Derivada: O sinal da segunda derivada é usado para decidir se um ponto crítico é ponto de máximo ou de mínimo.

Derivadas - Aplicações

Theorem (de Rolle)

Se f é uma função contínua em $[a, b]$, derivável em (a, b) e $f(a) = f(b)$, então existe ao menos um ponto $x_0 \in (a, b)$ tal que $f'(x_0) = 0$.

Derivadas - Aplicações

Theorem (de Rolle)

Se f é uma função contínua em $[a,b]$, derivável em (a,b) e $f(a)=f(b)$, então existe ao menos um ponto $x_0 \in (a,b)$ tal que $f'(x_0)=0$.

Theorem (do Valor Médio)

Se f é uma função contínua em $[a,b]$ e derivável em (a,b) então existe ao menos um ponto $x_0 \in (a,b)$ tal que $f'(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Regra de L'Hôpital

Sejam f e g funções contínuas e deriváveis em um intervalo aberto I contendo a e suponha que $g'(x) \neq 0$ em I, se $x \neq a$ e $f(a) = g(a) = 0$. Então:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

desde que o limite do lado direito da igualdade exista.

Regra de L'Hôpital

Sejam f e g funções contínuas e deriváveis em um intervalo aberto I contendo a e suponha que $g'(x) \neq 0$ em I, se $x \neq a$ e $f(a) = g(a) = 0$. Então:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

desde que o limite do lado direito da igualdade exista.

ATENÇÃO: A Regra de L'Hôpital só pode ser aplicada a limites que resultam em formas indeterminadas.

Taxas Relacionadas

São problemas onde as quantidades variáveis estão relacionadas entre sí.
Considere a função composta $h(x) = f(g(x))$.
Pela Regra da Cadeia, $h'(x) = f'(g(x)).g'(x)$ ou $\dfrac{\partial h}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial g}.\dfrac{\partial g}{\partial x}$

Integrais definidas

Definition (Integral Definida)

Se f é uma função definida em $a \leq x \leq b$, dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos de comprimentos iguais $\Delta x = \frac{(b-a)}{n}$.
Sejam $a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = b$ os extremos desses subintervalos de forma x_i^* está no $i - esimo$ subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$.
Então a **Integral Definida** em $[a, b]$ é:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x$$

Integrais definidas

Definition (Integral Definida)

Se f é uma função definida em $a \leq x \leq b$, dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos de comprimentos iguais $\Delta x = \frac{(b-a)}{n}$.
Sejam $a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = b$ os extremos desses subintervalos de forma x_i^* está no $i - esimo$ subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$.
Então a **Integral Definida** em $[a, b]$ é:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x$$

As funções monótonas ou contínuas por partes (incluindo contínuas) são integráveis.

Integrais - Propriedades

Ao definirmos $\int_a^b f(x)dx$, consideramos $a < b$.
Se $b < a$, Δx mudará de $\dfrac{b-a}{n}$ para $\dfrac{a-b}{n}$. Portanto

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

Se $a = b$ então $\Delta x = 0$, logo

$$\int_a^b f(x)dx = 0$$

Integrais - Propriedades

Outras propriedades:

1. $\displaystyle\int_a^b c\,dx = c(b-a)$
2. $\displaystyle\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$
3. $\displaystyle\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$
4. $\displaystyle\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$

Integrais - Propriedades Comparativas

Vamos supor que $a < b$. Então:

1. Se $f(x) \geq 0$ para $a \leq x \leq b$, então $\int_a^b f(x)dx > 0$
2. Se $f(x) \geq g(x)$ para $a \leq x \leq b$, então $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$
3. Se $m \leq f(x) \leq M$ para $a \leq x \leq b$, então $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$

Integrais - Diferenciais

Seja $y = f(x)$ uma função derivável. A *diferencial* dx é uma variável independente. A *diferencial* dy é:

$$dy = f'(x)dx$$

Assim, $dy/dx = f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$

Teorema Fundamental do Cálculo

Lemma

Se duas funções $f(x)$ *e* $g(x)$ *possuem a mesma derivada* $f'(x) = g'(x)$*, então elas diferem por uma constante, ou seja, existe* $c \in \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = g(x) + c$

Teorema Fundamental do Cálculo

Lemma

Se duas funções $f(x)$ e $g(x)$ possuem a mesma derivada $f'(x) = g'(x)$, então elas diferem por uma constante, ou seja, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = g(x) + c$

O Teorema Fundamental do Cálculo nos dará uma relação entre derivadas e integrais.
Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua e $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \int_a^x f(t)dt$

Teorema Fundamental do Cálculo

Theorem (Fundamental do Cálculo)

Seja f contínua em $[a, b]$, então:

1. *A função $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \int_a^x f(t)dt$ $(a \leq x \leq b)$ é contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b) e $g'(x) = F(x)$*
2. *Dado $x \in [a, b]$,*
$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$$
onde F é qualquer função tal que $F' = f$ (F é primitiva de f)

Integrais Indefinidas

O conjunto de todas as primitivas da função é denominado *integral indefinida de f em relação a x* e é denotado por

$$\int f(x)dx$$

Integrais Indefinidas

O conjunto de todas as primitivas da função é denominado *integral indefinida de* f *em relação a* x e é denotado por

$$\int f(x)dx$$

Este será representado por uma função (uma primitiva de f) mais uma constante arbitrária, considerando que duas primitivas quaisquer de f diferem por uma constante.

Integrais - Regra da Substituição

Seja $u = g(x)$. Pela regra da cadeia, se F é uma primitiva de f, então

$$\frac{\partial[F(g(x))]}{\partial x} = f(g(x))g'(x)$$

e

$$\int f(u)du = F(u) + c$$

Logo

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$$

Observe que $g'(x)dx = du$, o que pode ser obtido com:

$$\begin{aligned} u &= g(x) \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= g'(x) \\ \partial x g'(x) &= \partial u \end{aligned}$$

Integrais - Cálculo de Áreas

Se $f(x) \geq g(x)$ em $[a, b]$, a área da região entre as curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ de a até b é a integral de $(f - g)$ desde a até b:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

Integrais - log

O logaritmo natural de um número positivo x é

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

O número e é o número no domínio do logaritmo natural cuja imagem é 1, ou seja,

$$\ln(e) = \int_1^e \frac{1}{t} dt = 1$$

Integrais - log

O logaritmo natural de um número positivo x é

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

O número e é o número no domínio do logaritmo natural cuja imagem é 1, ou seja,

$$\ln(e) = \int_1^e \frac{1}{t} dt = 1$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$\frac{\partial[\ln(x)]}{\partial x} = \frac{\partial \left[\int_1^x \frac{1}{t} dt \right]}{\partial x} = \frac{1}{x}$$

Integrais - log

Como a derivada é sempre positiva, o logaritmo natural é uma função crescente. Logo, é injetora e tem uma inversa.

Integrais - log

Como a derivada é sempre positiva, o logaritmo natural é uma função crescente. Logo, é injetora e tem uma inversa.
Ainda, $\dfrac{\partial[\ln(bx)]}{\partial x} = \frac{1}{bx}b = \frac{1}{x}$ onde b é constante qualquer não nula.

Integrais - log

Como a derivada é sempre positiva, o logaritmo natural é uma função crescente. Logo, é injetora e tem uma inversa.

Ainda, $\dfrac{\partial[\ln(bx)]}{\partial x} = \frac{1}{bx}b = \frac{1}{x}$ onde b é constante qualquer não nula.

Em particular, $\dfrac{\partial[\ln(-x)]}{\partial x} = \frac{1}{x}$

Portanto, para qualquer $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$

$$\frac{\partial[\ln|x|]}{\partial x} = \frac{1}{x}$$

e

$$\int \frac{1}{u} du = \ln|u| + c$$

Integrais - Técnicas de Integração

- Separando frações;

Integrais - Técnicas de Integração

- Separando frações;
- Reduzindo uma Fração Imprópria;

Integrais - Técnicas de Integração

- Separando frações;
- Reduzindo uma Fração Imprópria;
- Completando o quadrado;

Integrais - Técnicas de Integração

- Separando frações;
- Reduzindo uma Fração Imprópria;
- Completando o quadrado;
- Utilizando Identidades Trigonométricas;

Integrais - Técnicas de Integração

- Separando frações;
- Reduzindo uma Fração Imprópria;
- Completando o quadrado;
- Utilizando Identidades Trigonométricas;
- Multiplicando por uma forma de 1;

Integrais - Técnicas de Integração

- Separando frações;
- Reduzindo uma Fração Imprópria;
- Completando o quadrado;
- Utilizando Identidades Trigonométricas;
- Multiplicando por uma forma de 1;
- Através de Frações Parciais;

Integrais - Integração por Partes

Sejam u e v funções deriváveis de x. A regra do produto diz que:

$$\begin{aligned}
(uv)' &= u'v + uv' \\
\frac{\partial[uv]}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial x}v + \frac{\partial v}{\partial x}u \\
\partial[uv] &= \partial uv + \partial vu \\
uv &= \int vdu + \int udv \\
\int udv &= uv - \int vdu
\end{aligned}$$

Integrais - Integração por Partes

Sejam u e v funções deriváveis de x. A regra do produto diz que:

$$
\begin{aligned}
(uv)' &= u'v + uv' \\
\frac{\partial[uv]}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial x}v + \frac{\partial v}{\partial x}u \\
\partial[uv] &= \partial uv + \partial vu \\
uv &= \int vdu + \int udv \\
\int udv &= uv - \int vdu
\end{aligned}
$$

Assim, obtemos a fórmula da integração por partes:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Integrais Impróprias

Vamos atribuir um valor para a área abaixo da curva $y = e^{-\frac{x}{2}}$, $x > 0$.

Integrais Impróprias

Vamos atribuir um valor para a área abaixo da curva $y = e^{-\frac{x}{2}}$, $x > 0$. Primeiro, calculamos a área para x variando de 0 até b, e depois calculamos o seu limite quando $b \to \infty$.

$$\begin{aligned} A(b) &= \int_0^b e^{-\frac{x}{2}} dx \\ &= [-2e^{-\frac{x}{2}}]|_0^b \\ &= -2(e^{-\frac{b}{2}} - 1) \end{aligned}$$

Integrais Impróprias

Daí,

$$\begin{aligned} \lim_{b \to \infty} A(b) &= \lim_{b \to \infty} (-2(e^{-\frac{b}{2}} - 1)) \\ &= (-2(0-1)) \\ &= 2 \end{aligned}$$

Integrais Impróprias

Daí,

$$\begin{aligned} \lim_{b\to\infty} A(b) &= \lim_{b\to\infty}(-2(e^{-\frac{b}{2}}-1)) \\ &= (-2(0-1)) \\ &= 2 \end{aligned}$$

Podemos escrever:

$$\int_0^\infty e^{-\frac{x}{2}}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-\frac{x}{2}}\,dx$$

Integrais Impróprias

Generalizando,

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx$$

Se o limite existe (finito), dizemos que a integral *converge*, caso contrário, dizemos que ela *diverge*.

Integrais Impróprias - Testes de Convergência

- $$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx \Rightarrow \begin{cases} \text{converge, se } p > 1 \\ \text{diverge, se } p \leq 1 \end{cases}$$

- $$\int_1^{\infty} a^x dx \Rightarrow \begin{cases} \text{converge, se } a < 1 \\ \text{diverge, se } a \geq 1 \end{cases}$$

Integrais Impróprias - Testes de Convergência

- $$\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx \Rightarrow \begin{cases} \text{converge, se } p > 1 \\ \text{diverge, se } p \leq 1 \end{cases}$$

- $$\int_1^\infty a^x dx \Rightarrow \begin{cases} \text{converge, se } a < 1 \\ \text{diverge, se } a \geq 1 \end{cases}$$

Teste da Comparação: sejam f e g contínuas em $[a, \infty)$, com $0 \leq f(x) \leq g(x)$ para qualquer $x \geq a$. Então:

1. $\int_a^\infty f(x)dx$ converge se $\int_a^\infty g(x)dx$ converge;
2. $\int_a^\infty g(x)dx$ diverge se $\int_a^\infty f(x)dx$ diverge.

Integrais Impróprias - Testes de Convergência

Teste da Comparação no Limite: se f e g são funções positivas contínuas em $[a, \infty)$ e se

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L, \ 0 < L < \infty$$

então $\int_a^\infty f(x)dx$ e $\int_a^\infty g(x)dx$ são ambas convergentes ou ambas divergentes.