

Árvores

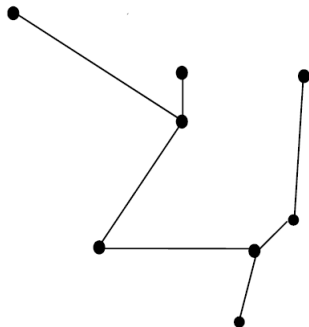
Matheus Pimenta

Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Câmpus Cornélio Procópio

Maio de 2019

Definição

Definição: Uma árvore (também chamada de árvore livre) é um grafo não dirigido acíclico e conexo.



Definição

São equivalentes as seguintes proposições. Dado um grafo G :

- 1 G é uma árvore;
- 2 G é conexo e não tem ciclos;
- 3 Entre cada par de vértices de G existe um único caminho;
- 4 G é conexo com ordem n e tamanho $n - 1$;
- 5 G é conexo, mas $G - e$ não é conexo para toda aresta e que pertence a $E(G)$ (conjunto das arestas);
- 6 G é acíclico, mas $G + uv$ contém um ciclo para todo par u, v de vértices independentes.

Árvore Geradora

Definição: Uma árvore geradora de um grafo G é um grafo que contém cada vértice de G e é uma árvore.

Árvore Geradora

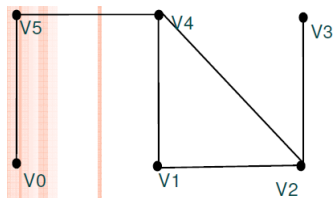
Definição: Uma árvore geradora de um grafo G é um grafo que contém cada vértice de G e é uma árvore.

Proposição:

- 1 Cada grafo conexo tem uma árvore geradora;
- 2 Duas árvores geradoras quaisquer um grafo têm a mesma quantidade de arestas.

Árvore Geradora

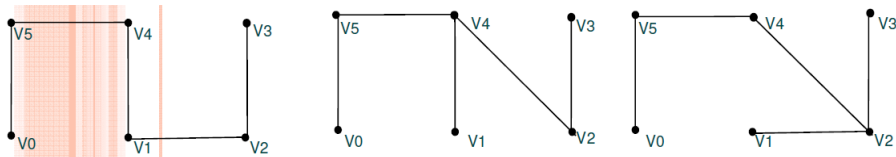
Seja o grafo G abaixo:



Este grafo possui o circuito $v_2 v_1 v_4 v_2$.

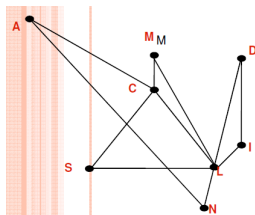
Árvore Geradora

Assim, todas as árvores geradoras são:

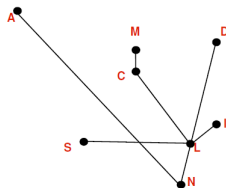


Árvore Geradora

Seja o grafo G :



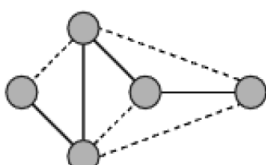
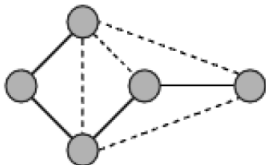
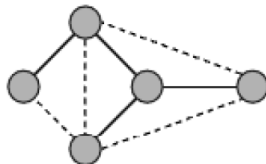
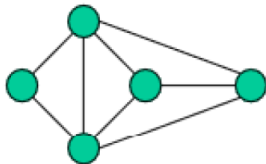
Um exemplo de árvore geradora é:



Como encontrar uma Árvore Geradora?

- 1 Se o grafo G não tem ciclos, então G é uma árvore geradora;
- 2 Se o grafo G possui ciclos, é necessário remover recursivamente arestas (até determinar uma árvore), mantendo o grafo conectado.

Como encontrar uma Árvore Geradora?

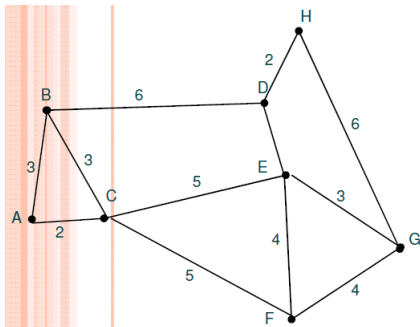


Minimal Spanning Tree (MST)

- 1 Em muitas das aplicações de relações com conexões simétricas. O grafo da relação modela uma situação na qual as arestas assim como os vértices carregam informação.
- 2 O *grafo ponderado* é um grafo no qual cada aresta é etiquetada com um valor numérico denominado peso.

Minimal Spanning Tree (MST)

Cidade de “Oz” onde as trilhas do circuito de trens entre os pontos turísticos formam um grafo ponderado, os pesos indicam a distância em quilômetros.



Minimal Spanning Tree (MST)

- 1 Os pesos de uma aresta (v_i, v_j) é algumas vezes referenciada como a distância entre vértices v_i e v_j .
- 2 Um vértice u é um vizinho próximo do vértice v se u e v são adjacentes e não há nenhum outro vértice unido a v por uma aresta de peso menor do que (u, v) .
- 3 Note que v pode ter mais do que um vizinho próximo.

Minimal Spanning Tree (MST)

Definição: Um *grafo com peso* é um grafo onde cada aresta possui um peso representado por um número real. A soma de todos os pesos de todas as arestas é o peso total do grafo.

Uma *árvore geradora mínima* para um grafo com peso é uma árvore geradora que tem o menor peso total possível uma árvore geradora que tem o menor peso total possível dentre todas as possíveis árvores geradoras do grafo.

Minimal Spanning Tree (MST)

Definição: Um *grafo com peso* é um grafo onde cada aresta possui um peso representado por um número real. A soma de todos os pesos de todas as arestas é o peso total do grafo.

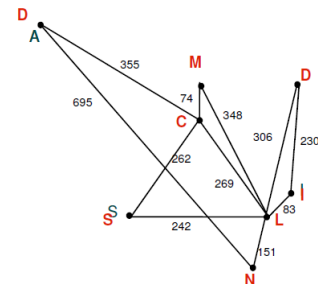
Uma *árvore geradora mínima* para um grafo com peso é uma árvore geradora que tem o menor peso total possível uma árvore geradora que tem o menor peso total possível dentre todas as possíveis árvores geradoras do grafo.

Se G é um grafo com peso e e é uma aresta de G , então:

- 1 $w(e)$ indica o peso da aresta e ;
- 2 $w(G)$ indica o peso total do grafo G .

Minimal Spanning Tree (MST)

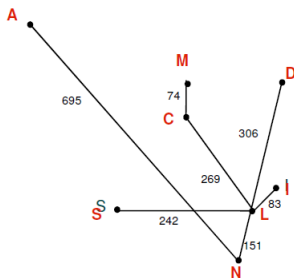
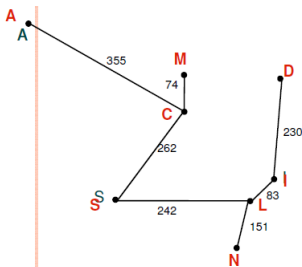
Uma companhia aérea recebeu permissão para voar nas seguintes rotas. O grafo de rotas da companhia aérea que recebeu permissão para voar pode ser “rotulado” com as distâncias entre as cidades:



Minimal Spanning Tree (MST)

A companhia deseja voar para todas as cidades mas usando um conjunto de rotas que minimiza o total de distâncias percorridas:

- Precisa-se determinar a árvore geradora;
- A árvore geradora deve ser mínima.

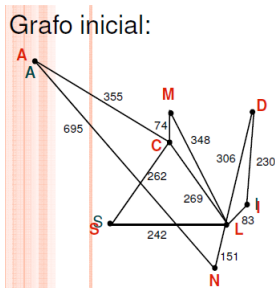


Algoritmos para obter a Árvore Geradora Mínima

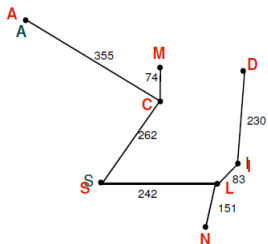
Serão apresentados dois algoritmos:

- Algoritmo de Prim;
- Algoritmo de Kruskal.

Grafo inicial:



Árvore geradora mínima:



Algoritmo de Prim

Ideia básica:

- Passo 01: Escolher o vértice v_1 de G .
Seja $V = \{v_1\}$ e $E = \{\}$
- Passo 02: Escolher o vizinho próximo de v_1 de V que seja adjacente a v_1 , (por exemplo, $v_j \in V$) e para o qual a aresta (v_1, v_j) não forma ciclo com os membros de E . Adicionar v_j para V e adicionar (v_1, v_j) para E .
- Passo 03: Repetir 02 até todos os vértices sejam visitados. Logo V contém todos os vértices de G e E contém todas as arestas da MST de G .

Algoritmo de Kruskal

Ideia básica:

- Passo 01: Ordenar as arestas por ordem crescente do comprimento (ou custo), sendo os desempates feitos arbitrariamente, formando uma lista.
- Passo 02: Selecionar a primeira aresta da lista.
Se originar um ciclo, retirá-la da lista e voltar ao início do Passo 02.
Caso contrário, adicioná-la à árvore e retirá-la da lista.
- Passo 03: Repetir o passo 2 até que a árvore esteja formada (todos os vértices conectados).