Sequências e Séries

Matheus Pimenta

Universidade Estadual de Londrina
Londrina

Fev. 2022

Séries Infinitas

MOTIVAÇÃO:

Séries Infinitas

MOTIVAÇÃO:

$$
\begin{aligned}
2 &= 1 + 1 \\
2 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\
2 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \\
&\vdots \\
2 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \ldots
\end{aligned}
$$

Séries Infinitas

Definition (Séries Infinitas)

Seja $\{U_n\}$ uma sequência. Defina $S_1 = u_1$ e $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$. Diremos que $\{S_n\}$ é uma *série infinita* (ou simplismente, série).

NOTAÇÃO: $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ para representar $\{S_n\}$.

Séries Infinitas

Definition (Séries Infinitas)

Seja $\{U_n\}$ uma sequência. Defina $S_1 = u_1$ e $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$. Diremos que $\{S_n\}$ é uma *série infinita* (ou simplismente, série).

NOTAÇÃO: $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ para representar $\{S_n\}$.

- Os números $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ são chamados de termos da série $\{S_n\}$.

Séries Infinitas

Definition (Séries Infinitas)

Seja $\{U_n\}$ uma sequência. Defina $S_1 = u_1$ e $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$. Diremos que $\{S_n\}$ é uma *série infinita* (ou simplismente, série).

NOTAÇÃO: $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ para representar $\{S_n\}$.

- Os números $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ são chamados de termos da série $\{S_n\}$.
- Os números $S_1, S_2, S_3, \ldots$ são chamados de somas parciais da série.

Séries Infinitas

Definition (Séries Infinitas)

Seja $\{U_n\}$ uma sequência. Defina $S_1 = u_1$ e $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$. Diremos que $\{S_n\}$ é uma *série infinita* (ou simplismente, série).

NOTAÇÃO: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ para representar $\{S_n\}$.

- Os números $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ são chamados de termos da série $\{S_n\}$.
- Os números $S_1, S_2, S_3, \ldots$ são chamados de somas parciais da série.

OBS.:

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} + u_n$$
$$S_{n-1} = u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1}$$
$$S_n - S_{n-1} = u_n, n \in \mathbb{N}$$

Séries Infinitas

EXEMPLO 01:

Considere $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$. A sequência $\{S_n\}$ é determinada por:

Séries Infinitas

EXEMPLO 01:

Considere $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$. A sequência $\{S_n\}$ é determinada por:

$$S_1 = 1$$

$$S_2 = u_1 + u_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$S_3 = u_1 + u_2 + u_3 = S_2 + u_3 = \frac{3}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$$

$$\vdots$$

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

Séries Infinitas

EXEMPLO 02:

Considere a série telescópica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. Determine S_n.

Séries Infinitas

EXEMPLO 02:

Considere a série telescópica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. Determine S_n.

Note que: $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}, \forall n \geq 1$. Dessa forma:

Séries Infinitas

EXEMPLO 02:

Considere a série telescópica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. Determine S_n.

Note que: $\displaystyle\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}, \forall n \geq 1$. Dessa forma:

$$
\begin{aligned}
S_1 &= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\
S_2 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3-2}{6} = \frac{1}{6} \\
S_3 &= \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{4-3}{12} = \frac{1}{12} \\
S_4 &= \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{5-4}{20} = \frac{1}{20} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Séries Infinitas
EXEMPLO 02:

Ou ainda:

Séries Infinitas

EXEMPLO 02:

Ou ainda:

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$$
$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + .. + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

Simplificando

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

Séries Infinitas
EXEMPLO 02:

Ou ainda:

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$$
$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + .. + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

Simplificando

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\therefore S_n = 1 - \frac{1}{n+1}, \forall n \geq 1$$

Séries Infinitas

EXEMPLO 03:

Seja $|r| < 1$. Calcule S_n para $\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}$ (série geométrica)

Séries Infinitas

EXEMPLO 03:

Seja $|r| < 1$. Calcule S_n para $\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}$ (série geométrica)

Temos que $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$, logo:

$$S_n = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^{n-1} \tag{1}$$

Pode-se multiplicar 1 por r, e dessa forma:

$$rS_n = r + r^2 + r^3 + r^4 + \cdots + r^n \tag{2}$$

Realizando a subtração de 1 - 2 segue:

$$S_n - rS_n = 1 - r^n \iff S_n(1-r) = 1 - r^n \iff S_n = \frac{1-r^n}{1-r}, \forall n \geq 1$$

Séries Infinitas

EXEMPLO 03:

Como $|r| < 1$, então:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-r^n}{1-r} = \frac{1}{1-r}$$

Já que $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$

$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \dfrac{1}{1-r}$

Séries Infinitas

Definition

Seja $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ uma série e $\{s_n\}$ a sequência de suas somas parciais. Se $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ (S é definido como soma da série), então dizemos que a *série converge*. Caso contrário, ou seja, se não existe $\lim_{n\to\infty} S_n$ então dizemos que a *série diverge*.

Séries Infinitas

Definition

Seja $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ uma série e $\{s_n\}$ a sequência de suas somas parciais. Se $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ (S é definido como soma da série), então dizemos que a *série converge*. Caso contrário, ou seja, se não existe $\lim_{n\to\infty} S_n$ então dizemos que a *série diverge*.

OBS. 01: A série telescópica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$, pois

$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{1+n} = 1$

OBS. 02: A série geométrica (como apresentada anteriormente) é convergente, pois $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-r^n}{1-r} = \frac{1}{1-r}$

Séries Infinitas

Theorem

Se $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *é convergente, então* $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

Séries Infinitas

Theorem

Se $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *é convergente, então* $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

OBSERVAÇÃO: O teorema anterior não diz que $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge se $a_n \to 0$. É possível para uma série divergir quando $u_n \to 0$.

Séries Infinitas

Theorem

Se $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *é convergente, então* $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

OBSERVAÇÃO: O teorema anterior não diz que $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge se $a_n \to 0$. É possível para uma série divergir quando $u_n \to 0$.
OBSERVAÇÃO: NEM TODA SEQUÊNCIA $\{u_n\}$ TAL QUE $u_n \to 0$ É DO TIPO $\sum u_n$ CONVERGENTE.

Séries Infinitas

Theorem

Se $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *é convergente, então* $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

OBSERVAÇÃO: O teorema anterior não diz que $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge se $a_n \to 0$. É possível para uma série divergir quando $u_n \to 0$.
OBSERVAÇÃO: NEM TODA SEQUÊNCIA $\{u_n\}$ TAL QUE $u_n \to 0$ É DO TIPO $\sum u_n$ CONVERGENTE.
EXEMPLO??

Séries Infinitas

Theorem

Se $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *é convergente, então* $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

OBSERVAÇÃO: O teorema anterior não diz que $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge se $a_n \to 0$. É possível para uma série divergir quando $u_n \to 0$.
OBSERVAÇÃO: NEM TODA SEQUÊNCIA $\{u_n\}$ TAL QUE $u_n \to 0$ É DO TIPO $\sum u_n$ CONVERGENTE.
EXEMPLO??
TEMOS SIM! E é bem famoso.

Séries Infinitas

EXEMPLO:

A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge. Esta série é chamada de *Série Harmônica*.

Séries Infinitas

EXEMPLO:

A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge. Esta série é chamada de *Série Harmônica*.

Fazendo (s_n), a sequência de somas parciais de $\frac{1}{n}$, isto é:

$$
\begin{aligned}
s_1 &= 1 \\
s_2 &= a_1 + a_2 = 1 + \frac{1}{2} \\
s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \\
s_4 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \\
&\vdots \\
s_8 &= a_1 + \cdots + a_8 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}
\end{aligned}
$$

Séries Infinitas

Podemos analisar a sequência auxiliar como

$$s_k^{aux} = 1 + \frac{(k-1)}{2}$$

e mais que isso, s_k^{aux} é monótona crescente.

Séries Infinitas

Podemos analisar a sequência auxiliar como

$$s_k^{aux} = 1 + \frac{(k-1)}{2}$$

e mais que isso, s_k^{aux} é monótona crescente.
Note que:

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} s_k^{aux} &= \lim_{k\to\infty}\left[1 + \frac{(k-1)}{2}\right] \\ &= \infty\end{aligned}$$

Como $s_n > s_k^{aux}$ então $s_n \to \infty$, por também ser uma sequência monótona crescente.

Séries Infinitas

Podemos analisar a sequência auxiliar como

$$s_k^{aux} = 1 + \frac{(k-1)}{2}$$

e mais que isso, s_k^{aux} é monótona crescente.
Note que:

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} s_k^{aux} &= \lim_{k\to\infty}\left[1 + \frac{(k-1)}{2}\right]\\ &= \infty\end{aligned}$$

Como $s_n > s_k^{aux}$ então $s_n \to \infty$, por também ser uma sequência monótona crescente.

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ é divergente.}$$

Séries Infinitas

Do Teorema anterior é possível determinar o primeiro teste.

Séries Infinitas

Do Teorema anterior é possível determinar o primeiro teste.

TESTE DO n-ÉSIMO TERMO PARA DIVERGÊNCIA:

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ é divergente se $\lim_{n\to\infty} u_n$ não existe ou é diferente de zero.

Propriedades de Séries Convergentes

Theorem

Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ *e* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$ *são séries convergentes, então:*

- **Regra da Soma:** $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = A + B$

Propriedades de Séries Convergentes

Theorem

Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ *e* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$ *são séries convergentes, então:*

- **Regra da Soma:** $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = A + B$
- **Regra da Diferença:** $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n = A - B$

Propriedades de Séries Convergentes

Theorem

Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ *e* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$ *são séries convergentes, então:*

- **Regra da Soma:** $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = A + B$
- **Regra da Diferença:** $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n = A - B$
- **Regra da Multiplicação por constante:** $\sum_{n=1}^{\infty} ka_n = k\sum_{n=1}^{\infty} a_n = kA$

  (qualquer número k)

Propriedades de Séries Convergentes

Corollary

- *Todo múltiplo constante diferente de zero de uma série divergente diverge.*

Propriedades de Séries Convergentes

Corollary

- *Todo múltiplo constante diferente de zero de uma série divergente diverge.*
- *Se* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge e* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *diverge, então tanto* $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ *quanto* $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n)$ *divergem.*

Propriedades de Séries Convergentes

Corollary

- *Todo múltiplo constante diferente de zero de uma série divergente diverge.*
- *Se* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge e* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *diverge, então tanto* $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ *quanto* $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n)$ *divergem.*

OBSERVAÇÃO: $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ pode convergir quando tanto $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ quanto $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergem.

Propriedades de Séries Convergentes

Corollary

- *Todo múltiplo constante diferente de zero de uma série divergente diverge.*
- *Se* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge e* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *diverge, então tanto* $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ *quanto* $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n)$ *divergem.*

OBSERVAÇÃO: $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ pode convergir quando tanto $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ quanto $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergem.

EXEMPLO?????????:

Propriedades de Séries Convergentes

Exemplo:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 + 1 + 1 + \dots$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = (-1) + (-1) + (-1) + \dots$ divergem,

enquanto $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = 0 + 0 + 0 + \dots$ converge para 0.

Propriedades de Séries Convergentes

Theorem

Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge e* $\{s_n\}$ *é a sequência das somas parciais de* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*, então, para dado* $\epsilon > 0$*, existe* $N > 0$ *tal que se* $m, n > N$ *então* $|s_n - s_m| < \epsilon$

Propriedades de Séries Convergentes

Theorem

Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge e* $\{s_n\}$ *é a sequência das somas parciais de* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, *então, para dado* $\epsilon > 0$, *existe* $N > 0$ *tal que se* $m, n > N$ *então* $|s_n - s_m| < \epsilon$

Theorem

Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *séries que diferem somente de uma quantidade ffinita de termos, isto é, existe* $N > 0$ *tal que* $a_n = b_n$, $\forall n > N$. *Então ambas convergem ou ambas divergem.*

Séries Infinitas

- Adicionando ou retirando termos;

Séries Infinitas

- Adicionando ou retirando termos;
- Reindexação;

Séries Infinitas

- Adicionando ou retirando termos;
- Reindexação;

Vimos um exemplo quando apresentada a Série Geométrica.

Séries Infinitas

Se todos os termos de uma série for positivos temos que $\{s_n\}$, sequência das somas parciais, é monótina crescente.

Séries Infinitas

Se todos os termos de uma série for positivos temos que $\{s_n\}$, sequência das somas parciais, é monótina crescente.

Logo, para que uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ de termos positivos seja convergente basta que $\{s_n\}$ seja limitada superiormente.

Séries Infinitas

Corollary

Uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *de termos não negativos converge se, e somente se, suas somas parciais são limitadas superiormente.*

Séries Infinitas

MOTIVAÇÃO:

Estudaremos o comportamento da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Séries Infinitas

MOTIVAÇÃO:

Estudaremos o comportamento da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Para determinarmos a convergência de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ utilizamos a comparação com a seguinte integral $\displaystyle\int_1^{\infty} \left(\frac{1}{x^2}\right) dx$. Para a comparação, pensaremos nos termos da série como valores da função $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ e interpretamos esses valores cmo as áreas de retângulos sob a curva $y = \dfrac{1}{x^2}$.

Séries Infinitas

MOTIVAÇÃO:

Estudaremos o comportamento da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Para determinarmos a convergência de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ utilizamos a comparação com a seguinte integral $\int_1^{\infty} \left(\frac{1}{x^2}\right) dx$. Para a comparação, pensaremos nos termos da série como valores da função $f(x) = \frac{1}{x^2}$ e interpretamos esses valores cmo as áreas de retângulos sob a curva $y = \frac{1}{x^2}$.

FIGURA

Séries Infinitas

Da figura temos que:

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{n^2} \\ &= f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(n) \\ &< f(1)+\int_1^n \frac{1}{x^2}dx \\ &< 1+\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx \\ &< 1+1=2 \end{aligned}$$

OBS.: $\displaystyle\int_1^n \frac{1}{x^2}dx < \int^\infty \frac{1}{x^2}dx$

OBS.: $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = 1$

Séries Infinitas

Então, as somas parciais de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ são limitadas superiormente (por 2) e a série converge.

Séries Infinitas

Então, as somas parciais de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ são limitadas superiormente (por 2) e a série converge.

A soma da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ é conhecida por ser $\dfrac{\pi^2}{6} \approx 1,64493$

Séries Infinitas

Então, as somas parciais de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ são limitadas superiormente (por 2) e a série converge.

A soma da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ é conhecida por ser $\frac{\pi^2}{6} \approx 1,64493$

OBS.: A série e a integral não precisam ter o mesmo valor no caso convergente. Conforme o exemplo anterior, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ e a integral $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1$

Teste da Integral

Theorem (Teste da Integral)

Seja $\{a_n\}$ uma sequência de termos positivos. Suponha que $a_n = f(n)$, onde f é uma função continua, positiva e decrescente de x para todo $x \geq N$ (sendo N um inteiro positivo). Então, tanto a série $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ quanto a integral $\int_N^{\infty} f(x)dx$ simultaneamente convergem ou divergem.