Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Câmpus Cornélio Procópio
Departamento Acadêmico de Matemática

Lista 04

Dados de Identificação	
Professor:	Matheus Pimenta
Disciplina:	Cálculo Diferencial e Integral I - MA31G
Aluno:	

1. Determine o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = -3x^2 + 2x$ no ponto $P(2, f(2))$.
   R: -10

2. Determine o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = \sqrt{x}$, no ponto $P(1, 1)$.
   R: $\frac{1}{2}$

3. Determine a equação da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$ no ponto $P(2, 3)$.
   R: $y = 7x - 11$

4. Um ponto em movimento obedece à equação horária $S = t^2 + 3t$ (onde S está em metros e t em segundos). Determinar a velocidade do móvel no instante $t = 4s$.
   R: $v(t_0) = S'(t_0) = 11m/s$

5. Um móvel se desloca segundo a função horária $S = t^3 + t^2 + t$ (onde S está em metros e t em segundos). Determinar a aceleração do móvel no instante $t = 1s$
   R: $a(t_0) = 8m/s^2$

6. Calcule as derivadas das funções abaixo:

   (a) $f(x) = 5x^3 - 2x^2 + x - 4$
   R: $f'(x) = 15x^2 - 4x + 1$

   (b) $f(x) = x^4 - \frac{2}{x^3} - \frac{8}{x} + 2$
   R: $f'(x) = 4x^3 + \frac{6}{x^4} + \frac{8}{x^2}$

   (c) $f(x) = (5x - 2)^6(3x - 1)^3$
   R: $f'(x) = (5x - 2)^5(3x - 1)^2(135x - 48)$

   (d) $f(x) = \sqrt[3]{(3x^2 + 6x - 2)^2}$
   R: $f'(x) = \frac{4(x+1)}{\sqrt[3]{3x^2+6x-2}}$

   (e) $f(x) = \frac{a+\sqrt{x}}{a-\sqrt{x}}$
   R: $f'(x) = \frac{a}{\sqrt{x}(a-\sqrt{x})^2}$

(f) $f(r) = \sqrt{\frac{1+r}{1-r}}$
R: $f'(r) = \frac{1}{(1-r)^2\sqrt{\frac{1+r}{1-r}}}$

7. Calcule as derivadas das funções abaixo:

   (a) $f(x) = \sqrt[4]{x^3}$
   R: $f'(x) = \frac{15}{4}x^2\sqrt[4]{x^3}$

   (b) $f(x) = \frac{1+\cos(x)}{1-\cos(x)}$
   R: $f'(x) = \frac{-2\sin(x)}{(1-\cos(x))^2}$

   (c) $f(x) = \frac{2-\sin(x)}{2+\cos(x)}$
   R: $f'(x) = \frac{2\sin(x)-2\cos(x)-1}{(2+\cos(x))^2}$

   (d) $f(x) = \frac{\sin(x)+\cos(x)}{\sin(x)-\cos(x)}$
   R: $f'(x) = \frac{-2}{(\sin(x)-\cos(x))^2}$

   (e) $f(x) = \frac{e^x}{\ln(x)}$
   R:$f'(x) = \frac{xe^x\ln(x)-e^x}{x(\ln(x))^2}$

   (f) $f(x) = \log_e(\frac{a+x}{a-x})$
   R:$f'(x) = \frac{2a}{a^2-x^2}$

8. Calcule as derivadas das funções abaixo:

   (a) $f(x) = (x^3-2x)^{\ln(x)}$
   R: $f'(x) = x^{\ln\left(x^3-2x\right)}\left(\frac{\ln\left(x^3-2x\right)}{x} + \frac{\ln(x)\left(3x^2-2\right)}{x^3-2x}\right)$

   (b) $f(x) = (\ln(x))^{\tan(x)}$
   R: $f'(x) = (\ln(x))^{\tan(x)}\left[\frac{\tan(x)}{x\ln(x)} + (\sec^2(x))\ln(\ln(x))\right]$

   (c) $f(x) = (\sin(x))^{\cos(x)}$
   R: $f'(x) = (\sin(x))^{\cos(x)}.\left[-\sin(x)\ln(\sin(x)) + \frac{\cos^2(x)}{\sin(x)}\right]$

   (d) $f(x) = x^{(e^x)}$
   R: $f'(x) = x^{(e^x)}e^x\left[\ln(x) + \frac{1}{x}\right]$

   (e) $f(x) = (e^x)^{\tan(3x)}$
   R: $f'(x) = (e^x)^{\tan(3x)}[3x\sec^2(3x) + \tan(3x)]$

   (f) $f(x) = e^{\sin^3(x^2)}$
   R: $f'(x) = 6xe^{\sin^3(x^2)}\sin^2(x^2)\cos(x^2)$

9. Calcule as derivadas das funções abaixo:

   (a) $f(x) = e^{3x^2}\tan(\sqrt{x})$
   R: $f'(x) = e^{3x^2}\left[\frac{\sec^2(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} + 6\tan(\sqrt{x})\right]$

   (b) $f(x) = \sqrt{4 + cossec^2(3x)}$
   R:$f'(x) = \frac{-3cossec^2(3x)\cot(3x)}{\sqrt{4+cossec^2(3x)}}$

   (c) $f(\theta) = \tan^4(\sqrt[4]{\theta})$
   R: $f'(\theta) = \frac{\tan^3(\sqrt[4]{\theta})}{(\sqrt[4]{\theta^3})}$

(d) $f(x) = \sqrt{\cos(x)}a^{\sqrt{\cos(x)}}$
R: $f'(x) = -\frac{y}{2}\tan(x)(1+\sqrt{x}\ln(a))$

(e) $f(\theta) = \sec(\sqrt{\theta})\tan(\frac{1}{\theta})$
R: $f'(\theta) = \sec(\sqrt{\theta})\left[\frac{\tan(\sqrt{\theta})\tan(\frac{1}{\theta})}{2\sqrt{\theta}} - \frac{\sec^2(\frac{1}{\theta})}{\theta^2}\right]$

(f) $f(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}}\right)$
R: $f'(x) = \sec(x)$

10. Calcule as derivadas das funções abaixo:

(a) $f(x) = \ln(\frac{\cos(\sqrt{(x)})}{1+\sin(\sqrt{x})})$
R: $f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}\cos(\sqrt{x})}$

(b) $f(x) = \frac{1}{2}\cot^2(5x) + \ln(\sin(5x))$
R: $f'(x) = -5\cot^3(5x)$

(c) $f(x) = (\arcsin(x))^2$
R: $f'(x) = \frac{2\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$

(d) $f(x) = \frac{\ln(\sinh(x))}{x}$
R: $f'(x) = \frac{x\coth(x) - \ln(\sinh(x))}{x^2}$

(e) $f(x) = sech(\ln(x))$
R: $f'(x) = \frac{-sech(\ln(x))\tanh(\ln(x))}{x}$

(f) $f(x) = arctgh(\frac{1}{2}x^2)$
R: $f'(x) = \frac{4x}{4-x^4}$

11.
- Trace um esboço do gráfico das funções;
- Determine se f é contínua em a;
- Calcule $f'_-(a)$ e $f'_+(a)$;
- Determine se f é diferenciável em a.

(a) $f(x) = \begin{cases} x+2 \text{ se } x \leq -4 \\ -x-6 \text{ se } x > -4 \end{cases} \quad a = -4$
R: Sim;1;-1;Não

(b) $f(x) = |x-3|$ $a = 3$
R: Sim;-1;1,Não

(c) $f(x) = \begin{cases} -1 \text{ se } x < 0 \\ x-1 \text{ se } x \geq 0 \end{cases} \quad a = 0$
R: Sim;0;1;Não

(d) $f(x) = \begin{cases} x \text{ se } x \leq 0 \\ -x^2 \text{ se } x > 0 \end{cases} \quad a = 0$
R: Sim;0;0;Sim

(e) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x} \text{ se } x < 1 \\ (1-x)^2 \text{ se } x \geq 1 \end{cases} \quad a = 1$
R: Sim; $\nexists$; 0; Não

(f) $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 3 \text{ se } x \leq 2 \\ 8x - 11 \text{ se } x > 2 \end{cases} \qquad a = 2$

R: Sim;8;8;Sim

12. Determinar as derivadas de segunda ordem das seguintes funções:

   (a) $y = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2})$
   R: $y'' = \frac{-x}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}}$

   (b) $y = \ln(\sqrt[3]{1 + x^2})$
   R: $y'' = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$

   (c) $y = e^{x^2}$
   R: $y'' = e^{x^2}(4x^2 + 2)$

   (d) $y = (\arcsin(x))^2$
   R: $y'' = \frac{2}{1-x^2} + \frac{2x \arcsin(x)}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$

   (e) $y = (1 + x^2)\arctan(x)$
   R: $y'' = 2\arctan(x) + \frac{2x}{1+x^2}$

13. Expresse $\dfrac{\partial y}{\partial x}$ em termos de x e y, onde $y = y(x)$, é uma função derivável, dada implicitamente pela equação:

   (a) $e^y + \ln(y) = x$
   R: $\dfrac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{e^y + \frac{1}{y}}$

   (b) $xy + x - 2y = 1$
   R: $\dfrac{\partial y}{\partial x} = -\frac{(y+1)}{x-2}$

   (c) $2y + \sin(y) = x$
   R: $\dfrac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{(2+\cos(y))}$

   (d) $5y + \cos(y) = xy$
   R:$\dfrac{\partial y}{\partial x} = \frac{y}{5-\sin(y)-x}$

14. Determinar a derivada de ordem 123 da função $y = \sin(x)$
   R: $y^{(123)} = -\cos(x)$

15. Demonstrar que a função $y = \frac{1}{2}x^2e^x$, satisfaz a equação diferencial $y'' - 2y' + y = e^x$

16. Um retângulo de dimensões x e y tem perímetro $2a$ (a é constante dada). Determinar x e y para que sua área seja máxima.
   R: $x = y = \frac{a}{2}$

17. A prefeitura de um município pretende construir um parque retangular, com uma área de 3600m^2 e pretende protegê-lo com uma cerca. Que dimensões devem ter o parque para que o comprimento da cerca seja mínimo?
   R:60m

18. Estima-se que daqui a t anos, a circulação de um jornal será $C(t) = 100t^2 + 400t + 5000$.

(a) Encontre uma expressão para a taxa de variação da circulação com o tempo daqui a t anos.
R: $C'(t) = 200t + 400$

(b) Qual será a taxa de variação da circulação com o tempo daqui a 5 anos? Nessa ocasião a circulação esta aumentando ou diminuindo?
R: 1400, aumentando

(c) Qual será a variação da circulação durante o sexto ano?
R: 1500

19. Quando um determinado modelo de liquidificador é vendido a p reais a unidade, são vendidos $D(p) = \frac{8000}{p}$ liquidificadores por mês. Calcula-se que daqui a t meses o preço dos liquidificadores será $p(t) = 0,04^{\frac{3}{2}} + 15$ reais. Calcule a taxa de variação da demanda mensal de liquidificadores com o tempo daqui a 25 meses. A demanda estará aumentando ou diminuindo nessa ocasião?
R: 6 por mês.

20. A concentração de um remédio t horas após ter sido injetado no braço de um paciente é dada por $C(t) = \frac{0,15t}{t^2+0,81}$. Trace a função concentração. Para que valor de t a concentração é máxima?
R:$t = 0,9$

21. Usando a regra de L'Hôpital calcule os limites abaixo:

(a) $\lim \lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1}$
R: 1

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x \ln(x)$
R: 0

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2}$
R:$+\infty$

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2x}{e^x-1}$
R:2

(e) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan(x)-x}{x^3}$
R:$\frac{1}{3}$

(f) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)-x}{\tan(x)-x}$
R:$-\frac{1}{2}$

(g) $\lim\limits_{x\to\pi^-} \frac{\sin(x)}{1-\cos(x)}$
R:0

(h) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln(\sin(x))}{\ln(\sin(2x))}$
R: 1

(i) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{cossec(x)}$
R:0

(j) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x-1}{x^3+4x}$
R:$+\infty$