Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Câmpus Cornélio Procópio
Departamento Acadêmico de Matemática

Notas de Aula (em desenvolvimento) Baseado no livro: Estatística Básica, Morettin

Dados de Identificação	
Professor:	Matheus Pimenta
Disciplina:	Estatística

Tabela para valores de Z_α.

Nível de Confiança	$99,73\%$	99%	98%	96%	$95,45\%$	95%	90%	80%	$68,27\%$	50%
Z_α	$3,00$	$2,58$	$2,33$	$2,05$	$2,00$	$1,96$	$1,645$	$1,28$	$1,00$	$0,6745$

1 Probabilidade

1.1 Espaço Amostral

1.1.1 Introdução

Na natureza encontramos dois tipos de fenômenos: *determinísticos* e *aleatórios*.

Os fenômenos determinísticos são aqueles que o resultado são sempre iguais, qualquer que seja o número de ocorrências verificadas. Por exemplo, a temperatura que a água entra em ebulição.

Já os fenômenos aleatórios são do tipo que não podem ser previsíveis, mesmo que haja um grande número de repetições do mesmo fenômeno. Como exemplo pode se citar a produção de determinada lavoura, cada planta poderá produzir um tanto de produto final, mesmo que as condições sejam as mesmas para todas.

Os *experimentos aleatórios* são os fenômenos que mesmo com as mesmas condições iniciais, os resultados finais de cada tentativa do experimento são diferentes e não previsíveis.

Alguns exemplos:

1. lançamento de uma moeda honesta;
2. lançamento de um dado;
3. retirada de uma carta de um baralho de 52 cartas;

Os resultados, obtidos pelos experimentos aleatórios não são previsíveis, que é chamado de *evento aleatório*.

No exemplo 1, os eventos aleatórios associados são: *cara* ou *coroa*, já no exemplo 2 os eventos aleatórios associados são as faces do dados que poderão ocorrer $1, 2, 3, 4, 5$ ou 6.

1.1.2 Espaço Amostral

O *espaço amostral* de um experimento aleatório é o conjunto dos resultados do experimento. Os *pontos amostrais* são os elementos do espaço amostral.

A notação do espaço amostral é: Ω.

Nossos exemplos anteriores, os espaços amostrais são:

1. $\Omega = \{cara, coroa\}$
2. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
3. $\Omega = \{A_O, \ldots, K_O, A_P, \ldots, K_P, A_E, \ldots, K_E, A_C, \ldots, K_C\}$

O evento aleatório pode ser um único ponto no espaço amostral, mas também pode ser a reunião deles. Por exemplo, ao lançarmos dois dados, verifique os seguintes eventos:

1. saída de faces iguais;
2. saída de faces cuja a soma seja igual a 10;
3. saída de faces cuja a soma seja inferior a 2;
4. saída de faces cuja a soma seja inferior a 15;
5. saída de faces onde uma face é o dobro da outra;

Para determinar qual é o espaço amostral, podemos utilizar uma tabela ou um diagrama de árvore.

TABELA E DIAGRAMA DE ÁRVORE

Assim, os eventos pedidos são:

1. $\Omega = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$
2. $\Omega = \{(4, 6), (5, 5), (6, 4)\}$
3. $\Omega = \varnothing$ (evento impossível)
4. $\Omega = \Omega$ (evento certo)
5. $\Omega = \{(1, 2), (2, 1), (2, 4), (3, 6), (4, 2), (6, 3)\}$

1.1.3 Operações com Eventos Aleatórios

Considere o espaço amostral finito $\Omega = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. Sejam A e B dois eventos da classe de eventos $F(\Omega)$. As operações a seguir estão definidas:

- Reunião:

  Definição: $A \cup B = \{e_i \in \Omega; e_i \in A \vee e_i \in B\}$, $i = 1, \ldots, n$.

  O *evento reunião* é formado pelos pontos amostrais que pertencem a pelo menos um dos eventos.

DIAGRAMA DE VEEN

- Interseção:

  Definição: $A \cap B = \{e_i \in \Omega; e_i \in A \wedge e_i \in B\}$, $i = 1, \ldots, n$

  O *evento interseção* é formado pelos pontos amostrais que pertencem simultaneamente aos eventos A e B. Se $A \cap B = \varnothing$ dizemos que A e B são *eventos mutualmente exclusivos.*

DIAGRAMA DE VEEN

- Complementação:

  Definição: $\Omega - A = \bar{A} = \{e_i \in \Omega; e_i \notin A\}$

DIAGRAMA DE VEEN

Exemplo: Lançam-se duas moedas. Sejam A: saída de faces iguais; e B: saída de cara na primeira moeda.

Determine os eventos:$A \cup B$, $A \cap B$, $\bar{A}$, $\bar{B}$, $(\bar{A}\bar{\cup}\bar{B})$, $(\bar{A}\bar{\cap}\bar{B})$, $(\bar{A} \cup \bar{B})$, $(\bar{A} \cap \bar{B})$, $B - A$, $A - B$, $\bar{A} \cap B$ e $\bar{B} \cap A$.

Resolução:
$\Omega = \{(c, c), (c, k), (k, c), (k, k)\}$
$A = \{(c, c), (k, k)\}$
$B = \{(c, c), (c, k)\}$
$A \cup B = \{(c, c), (c, k), (k, k)\}$
$A \cap B = \{(c, c)\}$
$\bar{A} = \{(c, k), (k, c)\}$
$\bar{B} = \{(k, c), (k, k)\}$
$(\bar{A}\bar{\cup}\bar{B}) = \{(k, c)\}$
$(\bar{A}\bar{\cap}\bar{B}) = \{(c, k), (k, c), (k, k)\}$
$(\bar{A} \cap \bar{B}) = \{(k, c)\}$
$(\bar{A} \cup \bar{B}) = \{(c, k), (k, c), (k, k)\}$
$B - A = \{(c, k)\}$
$A - B = \{(k, k)\}$
$\bar{A} \cap B = \{(c, k)\}$
$\bar{B} \cap A = \{(k, k)\}$

1.1.4 Propriedades das Operações

Sejam A, B e C eventos associados a um espaço amostral Ω. As propriedades a seguir são válidas:

1. Comutativa:

   $A \cup B = B \cup A$

   $A \cap B = B \cap A$

2. Idempotentes:

   $A \cup A = A$

   $A \cap A = A$

3. Associativas

   $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

   $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

4. Distributivas:
   $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
   $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap B)$

5. Identidades:
   $A \cap \Omega = A$
   $A \cup \Omega = \Omega$
   $A \cap \varnothing = \varnothing$
   $A \cup \varnothing = A$

1.2 Probabilidade

1.2.1 Função de Probabilidade

Definição 1.1 *É a função P que associa a cada evento de F um número real pertencente ao intervalo $[0, 1]$, que satisfaz os seguintes axiomas:*

- $P(\Omega) = 1$*;*
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$*, se A e B forem mutualmente exclusivos;*
- $P\left(\cup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$*, se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ forem, dois a dois, eventos mutualmente exclusivos.*

Pela definição acima, temos que $0 \leq P(A) \leq 1$, para todo evento A, tal que $A \subset \Omega$.

1.2.2 Teoremas

Teorema 1.1 *Se os eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ formam uma partição do espaço amostral, então:*

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$$

Teorema 1.2 *Se $\varnothing$ é o evento impossível, então:*

$$P(\varnothing) = 0$$

Teorema 1.3 (do evento complementar) *Para todo evento $A \subset \Omega$, é valido:*

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

Teorema 1.4 (da soma) *Sejam $A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$. Então:*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Teorema 1.5 *Para $A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$, temos:*

$$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$$

Teorema 1.6 *Dado o espaço amostral Ω e os eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, então:*

$$P\left(\cup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i \neq j}^{n} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i \neq j \neq k}^{n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap \cdots \cap A_n)$$

Teorema 1.7 *Dados os eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, então:*

$$P\left(\cup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

1.2.3 Eventos Equiprováveis

Considere o espaço amostral $\Omega = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ associado a um experimento aleatório.

Os eventos e_i, $i = 1, \ldots, n$ são *equiprováveis* quando $P(e_1) = P(e_2) = \cdots = P(e_n) = p$, isto é, todos possuem a mesma probabilidade de ocorrer, isto é:

$$p = \frac{1}{n}$$

Assim, se o evento é equiprovável, a probabilidade de cada um dos pontos amostrais ocorrer é de: $\dfrac{1}{n}$.

Exemplo 01: Retira-se uma carta de um baralho completo de 52 cartas. Qual a probabilidade de sair um *rei* ou uma *carta de espadas*?

Solução:

Seja A: retirar um *rei* e B: retirar uma *carta de espadas*.

Então: $A = \{R_O, R_E, R_C, R_P\} \implies P(A) = \dfrac{4}{52}$

$B = \{A_E, \ldots, R_E\} \implies P(B) = \dfrac{13}{52}$

Se observarmos que $P(A \cap B) = \{R_E\}$, logo $P(A \cap B) = \dfrac{1}{52}$.

Logo, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ e assim,

$$P(A \cup B) = \frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52}$$

e assim:

$$P(A \cup B) = \frac{16}{52}$$

■

Exemplo 02: O seguinte grupo de pessoas está numa sala: 5 rapazes com mais de 21 anos, 4 rapazes com menos de 21 anos, 6 moças com mais de 21 anos e 3 moças com menos de 21 anos. Uma pessoa é escolhida ao acaso entre as 18. Os seguintes eventos são definidos:

A: a pessoa tem mais de 21 anos;

B: a pessoa tem menos de 21 anos;

C: a pessoa é um rapaz;

D: a pessoa é uma moça;

Determine:

a) $P(B \cup D)$;

b) $P(\bar{A} \cap \bar{C})$

Solução:

Temos que nosso espaço amostral é definido por:

$\Omega = \{5R, 4r, 6M, 3m\} \therefore p = \dfrac{1}{18}$

$A = \{5R, 6M\} \implies P(A) = \dfrac{11}{18}$

$B = \{4r, 3m\} \implies P(B) = \dfrac{7}{18}$

$C = \{5R, 4r\} \implies P(C) = \dfrac{9}{18}$

$D = \{6M, 3m\} \implies P(D) = \dfrac{9}{18}$

$a) P(B \cup D) = P(B) + P(D) - P(B \cap D)$

De $B \cap D = \{3m\}$, segue que $P(B \cap D) = \dfrac{3}{18}$

Disto,

$$P(B \cup D) = \frac{7}{18} + \frac{9}{18} - \frac{3}{18} = \frac{13}{18}$$

$b) P(\bar{A} \cap \bar{C}) = P(\bar{A} \bar{\cup} \bar{C}) = 1 - P(A \cup C) = 1 - \{P(A) + P(C) - P(A \cap C)\}$

Como $A \cap C = \{5R\}$ e $P(A \cap C) = \dfrac{5}{18}$, segue que:

$$P(\bar{A} \cap \bar{C}) = 1 - \left\{\frac{11}{18} + \frac{9}{18} - \frac{5}{18}\right\} = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}$$

Portanto, $P(\bar{A} \cap \bar{C}) = \dfrac{1}{6}$.

■

1.2.4 Probabilidade Condicional

Definição 1.2 *Sejam $A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$. Definimos como probabilidade condicional de A, dado que B ocorre (A/B) como:*

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \textit{ se } P(B) \neq 0$$

ou no caso de (B/A):

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}, \textit{ se } P(A) \neq 0$$

Exemplo 01: Considere 250 alunos que cursam faculdade. Destes alunos, 100 são homens (H) e 150 são mulheres (M); 110 cursam física (F) e 140 cursam (Q). A distribuição dos alunos é a seguinte:

Cursam física: 40 homens e 70 mulheres;

Cursam química: 60 homens e 80 mulheres;

Um aluno é sorteado ao acaso, qual a probabilidade de que esteja cursando química, dado que é mulher?

Solução:

Com os dados acima, verificamos que a probabilidade de $\dfrac{80}{150}$.

Para definirmos esse resultado, note que: A probabilidade $P(M \cap Q) = \dfrac{80}{250}$ e $P(M) = \dfrac{150}{250}$.

Utilizando a fórmula de probabilidade condicional, segue que:

$$P(Q/M) = \frac{\frac{80}{250}}{\frac{150}{250}} = \frac{80}{150}$$

■

Exemplo 02: Sendo $P(A) = \dfrac{1}{3}$, $P(B) = \dfrac{3}{4}$ e $P(A \cup B) = \dfrac{11}{12}$, calcule $P(A/B)$.
Solução:
Temos que: $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, se $P(B) \neq 0$, devemos determinar o valor de $P(A \cap B)$.
Para isso, lembre-se de:
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, disso segue que:
$\dfrac{11}{12} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{3}{4} - P(A \cap B)$
O que resulta em: $P(A \cap B) = \dfrac{2}{12} = \dfrac{1}{6}$.
Logo, $P(A/B) = \dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{4}} = \dfrac{2}{9}$.

■

Teorema 1.8 (do Produto) *Sejam $A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$. Então, $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B)$ ou $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$.*

Exemplo 03: Duas bolas vão ser retiradas de uma urna que contém 2 bolas brancas, 3 pretas e 4 verdes. Qual a probabilidade de que ambas sejam:

a) verdes;

b) da mesma cor.

Solução:
$a) P(V \cap V) = P(V) \cdot P(V/V) = \dfrac{4}{9} \cdot \dfrac{3}{8} = \dfrac{1}{6}$
$b) P(MC) = P(B \cap B) + P(P \cap P) + P(V \cap V)$
Disso segue que:
$P(MC) = \dfrac{2}{9} \cdot \dfrac{1}{8} + \dfrac{3}{9} \cdot \dfrac{2}{8} + \dfrac{4}{9} \cdot \dfrac{3}{8}$
$P(MC) = \dfrac{20}{75} = \dfrac{5}{18}$.

■

1.2.5 Eventos Independentes

Definição 1.3 *Sejam $A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$. A e B serão independentes se: $P(A/B) = P(A)$ e $P(B/A) = P(B)$.*

Em outras palavras, A e B são independentes se:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Exemplo 01:
Lançam-se 3 moedas. Verifique se são independentes os eventos:

A) saída de cara na primeira moeda;

B) saída de coroa da segunda e terceira moedas.

Solução:
Temos que:
$\Omega = \{(c,c,c),(c,c,k),(c,k,c),(c,k,k),(k,c,c),(k,c,k),(k,k,c),(k,k,k)\}$
$A = \{(c,c,c),(c,c,k),(c,k,c),(c,k,k)\} \therefore P(A) = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$
$B = \{(c,k,k),(k,k,k)\} \therefore P(B) = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4}$
Logo,

$$P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

Como:
$A \cap B = \{(c,k,k)\}$ e $P(A \cap B) = \dfrac{1}{8}$ segue que A e B são eventos independentes, pois $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

■

Para verificar se três eventos são independentes, deve-se verificar as 4 proposições a seguir:

1. $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$
2. $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
3. $P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$
4. $P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$

Todas as propriedades devem ser satisfeitas.

Se A e B são *mutualmente exclusivos*, então A e B são *dependentes*, pois se A ocorre, B não ocorre, ou seja, a ocorrência de um evento condiciona a não ocorrência do outro.

Exemplo 02: Sejam A e B eventos tais que $P(A) = 0,2$, $P(B) = P$ e $P(A \cap B) = 0,6$. Calcular P considerando A e B:

a) mutualmente exclusivos;

b) independentes

Solução:
a) A e B mutualmente exclusivos $\implies P(A \cap B) = 0$.
Como,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \implies 0,6 = 0,2 + P - 0 \therefore P = 0,4$$

b) A e B independentes $\implies P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0,2 \cdot P$
Como,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \implies 0,6 = 0,2 + P - 0,2P \implies 0,4 = 0,8P \therefore P = 0,5$$

■

Se os eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são independentes, então:

$$P\left(\cap_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i)$$

1.2.6 Teorema de Bayes

Teorema 1.9 (da probabilidade total) *Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eventos que formam uma partição do espaço amostral. Seja B um evento desse espaço, então:*

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B/A_i)$$

Exemplo 01: Uma urna contém 3 bolas brancas e 2 amarelas. Uma segunda urna contém 4 bolas brancas e 2 amarelas. Escolhe-se, ao acaso, uma urna e dela retira-se, também ao acaso, uma bola. Qual a probabilidade de que seja branca?

Solução:

Seja urna I e urna II. A probabilidade de se escolher a urna I é:

$P(I) = \dfrac{1}{2}$ e $P(II) = \dfrac{1}{2}$

Agora, a probabilidade de se retirar uma bola branca da urna I é dada por:

$P(B/I) = \dfrac{3}{5}$ e $P(B/II) = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$.

Assim, a escolha da bola branca pode ser dada por:

$B = (B \cap I) \cup (B \cap II)$ e assim:

$P(B) = P(B \cap I) + P(B \cap II)$

$P(B) = P(I) \cdot P(B/I) + P(II) \cdot P(B/II)$

$$\therefore P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{19}{30}$$

$\blacksquare$

Teorema 1.10 (de Bayes) *Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eventos que formam uma partição do Ω. Seja $B \subset \Omega$. Sejam conhecidas $P(A_i)$ e $P(B/A_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Então:*

$$P(A_j/B) = \frac{P(A_j) \cdot P(B/A_j)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B/A_i)}$$

Exemplo 01: A urna A contém 3 fichas vermelhas e 2 azuis, e a urna B contém 2 vermelhas e 8 azuis. Joga-se uma moeda honesta. Se a moeda der cara, extrai-se uma ficha da urna A; se der coroa, extrai-se uma ficha da urna B. Uma ficha vermelha é extraída. Qual a probabilidade de ter saído cara no lançamento?

Solução:

Buscamos determinar $P(C/V)$.

Assim:

$P(C) = \dfrac{1}{2}$ e $P(K) = \dfrac{1}{2}$.

E assim,

$P(V/C) = \dfrac{3}{5}$ e $P(V/K) = \dfrac{2}{10}$

Como:

$$P(V) = P(C \cap V) + P(K \cap V)$$

Segue que:

$$P(V) = P(C) \cdot P(V/C) + P(K) \cdot P(V/K)$$

$$\therefore$$

$$P(V) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{10} = \frac{4}{10}$$

Vamos determinar agora $P(C/V)$:

$$P(C/V) = \frac{P(V \cap C)}{P(V)} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{4}{10}} = \frac{3}{4}$$

■

1.3 Variáveis Aleatórias Discretas

Exemplo a ser discutido em sala de aula.

1.3.1 Definições

Definição 1.4 (Variável Aleatória) *É a função que associa a todo evento pertencente a uma partição do espaço amostral um único valor real.*

No caso discreto, a variável deve assumir valores em um conjunto finito ou em um conjunto infinito, porém enumerável.

No caso finito, será indicado por:

$$X : x_1, x_2, \ldots, x_n$$

Definição 1.5 (Função de Probabilidade) *É a função que associa a cada valor assumido pela variável aleatória a probabilidade do evento correspondente, isto é:*

$$P(X = x_i) = P(A_i), i = 1, 2, \ldots, n$$

Definição 1.6 (Distribuição de Probabilidades da Variável Aleatória X) *É o conjunto* $\{x_i, p(x_i), i = 1, 2, \ldots, n\}$.

Observação: Para que faça sentido uma distribuição de probabilidades de uma variável aleatória X, é necessário que:

$$\sum_{i=1}^{n} p(x_i) = 1$$

Exemplo 01: Lançam-se 2 dados. Seja X a soma das faces, determinar a distribuição de probabilidade de X.

Solução:

■

1.3.2 Esperança Matemática

Quando trabalhamos com distribuições de probabilidades de uma variável aleatória discreta, os parâmetros da distribuição são características numéricas de grande importância.

O primeiro parâmetro é a *esperança matemática* (ou simplesmente média) de uma variável aleatória.

X	$P(X)$
2	$\frac{1}{36}$
3	$\frac{2}{36}$
4	$\frac{3}{36}$
5	$\frac{4}{36}$
6	$\frac{5}{36}$
7	$\frac{6}{36}$
8	$\frac{5}{36}$
9	$\frac{4}{36}$
10	$\frac{3}{36}$
11	$\frac{2}{36}$
12	$\frac{1}{36}$

Tabela 1: Resolução do Exemplo 01.

Definição 1.7 (Esperança Matemática)

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p(x_i)$$

A esperança matemática *é um número real. É também uma média aritmética ponderada.*
Notação: $E(X)$, $\mu(x)$, μ_x, μ.

Exemplo 01: Uma seguradora paga $R\$30.000,00$ em caso de acidente de carro e cobra uma taxa de $R\$1.000,00$. Sabe-se que a probabilidade de que um carro sofra acidente é de 3%. Quanto espera a seguradora ganhar por carro segurado?

Solução:

Suponha que em 100 carros, 97 dão lucro de $R\$1.000,00$ e 3 dão prejuízo de $R\$29.000,00$ ($R\$30.000,00 - R\$1.000,00$).

Lucro total: $97 \cdot 1.000 - 3 \cdot 29.000 = R\$10.000,00$

Lucro médio por carro: $R\$10.000,00/100 = R\$100,00$

Se chamarmos de X o lucro por carro, e o lucro médio por carro de $E(X)$, teremos:

$$E(X) = \frac{0,97 \cdot 1.000}{0,03 \cdot 29.000} = 100$$

■

1.3.3 Propriedades da Esperança Matemática

1. $E(k) = k$, onde k é uma constante;

2. $E(k \cdot X) = k \cdot E(X)$;

3. $E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$;

4. $E\left\{\sum_{i=1}^{n} X_i\right\} = \sum_{i=1}^{n}\{E(X_i)\}$;

5. $E(aX \pm b) = aE(X) \pm b$, onde a e b são constantes;

6. $E(X - \mu_x) = 0$.

1.3.4 Variância

A medida que dá o grau de dispersão (ou concentração) de probabilidade em torno da média é a *variância.*

Definição 1.8 (Variância)

$$VAR(X) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_x)^2 \cdot p(x_i)$$

Notação: $VAR(X)$, $V(X)$, $\sigma^2(X)$, σ^2_X,σ^2.

Observação: Quanto menor a variância, menor o grau de dispersão de probabilidades em torno da média e vice-versa; quanto maior a variância, maior e grau de dispersão da probabilidade em torno da média.

Definição 1.9 (Desvio Padrão) *É a raiz quadrada da variância de* X*, isto é:*

$$\sigma_x = \sqrt{VAR(X)}$$

1.3.5 Propriedades da Variância

1. $VAR(k) = 0$, onde k é constante;

2. $VAR(k \cdot X) = k^2 \cdot VAR(X)$;

3. $VAR(X \pm Y) = VAR(X) + VAR(Y) \pm 2cov(X, Y)$

   Definição 1.10 (Covariância entre X e Y)

   $$cov(X, Y) = E\{[X - E(X)] \cdot [Y - E(Y)]\}$$

   A covariância mede o grau de dependência entre as duas variáveis X *e* Y*.*

4. $VAR\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} VAR(X_i) + 2\sum_{i<j} cov(X_i, Y_j)$

5. $VAR(aX \pm b) = a^2 VAR(X)$, a e b constantes.

1.3.6 Função de Distribuição

Definição 1.11 (Função de Distribuição)

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p(x_i)$$

Exemplo a ser mostrado em sala.

1.3.7 Propriedades de $F(x)$

1. $0 \leq F(x) \leq 1$;

2. $(F - \infty) = 0$;

3. $F(+\infty) = 1$;

   As demais propriedades requer conhecimentos prévios de cálculo.

1.4 Variáveis Aleatórias Contínuas

Seja o seguinte exemplo, considerando as probabilidades da variável aleatória discreta X:

X	$P(X)$
1	$0,1$
2	$0,2$
3	$0,4$
4	$0,2$
5	$0,1$

Faremos o *histograma* da distribuição de probabilidades de X.

FEITO EM SALA

O *histograma* é um gráfico da distribuição de X. É construído com retângulos de bases unitárias e alturas iguais às probabilidades de $X = x_0$.

Para calcularmos, por exemplo, $P(1 \leq X \leq 3)$, somamos as áreas dos retângulos $1, 2$ e 3.

Ao ligar os pontos médios de todos os retângulos teremos uma curva, se considerarmos X uma *uma variável aleatória contínua*, essa curva representará uma função contínua $f(X)$, representada no gráfico.

FEITO EM SALA

Uma variável aleatória X será contínua se existir uma função $f(X)$, tal que:

1. $f(x) \geq 0$ (não negativa)

2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

A função $f(x)$ é chamada de *função densidade de probabilidade* (f.d.p.);

Pode-se estender todas as definições de variáveis aleatórias discretas para variáveis contínuas.

As extensões necessitam de conhecimentos de cálculo, devido a isso assumiremos tais propriedades como válidas.

1.4.1 Distribuições Teóricas de Probabilidade de Variáveis Aleatórias Contínuas

A primeira distribuição a ser estudada é a **Distribuição Uniforme**.

Distribuição Uniforme: Uma variável aleatória contínua X tem distribuição uniforme de probabilidades no intervalo $[a, b]$ se a sua função densidade de probabilidade é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} k \text{ se } a \leq x \leq b \\ 0 \text{ se } x < a \text{ ou } x > b \end{cases}$$

O valor de k é dado por: $k = \dfrac{1}{b-a}$, logo:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{se } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{se } x < a \text{ ou } x > b \end{cases}$$

GRÁFICO SERÁ FEITO EM SALA

A próxima distribuição teórica para variáveis aleatórias contínuas é a **Distribuição Exponencial**.

Distribuição Exponencial: Uma variável aleatória contínua X tem distribuição exponencial se a sua função densidade de probabilidade é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

GRÁFICO SERÁ FEITO EM SALA

A próxima distribuição é uma das mais utilizadas, é a **Distribuição Normal**.

1.4.2 Distribuição Normal

Uma variável aleatória contínua X tem distribuição normal de probabilidade se a sua f.d.p. é dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \text{ para } -\infty < x < \infty$$

O GRÁFICO SERÁ FEITO EM SALA

As principais características da distribuição Normal são:

1. O ponto de máximo de $f(x)$ é o ponto $X = \mu$;
2. Os pontos de inflexão da função são: $X = \mu + \sigma$ e $X = \mu - \sigma$;
3. A curva é simétrica com relação a μ;
4. $E(X) = \mu$ e $VAR(X) = \sigma^2$.

Utilizaremos a seguinte notação:

$$X : N(\mu, sigma^2)$$

X tem distribuição normal com média μ e variância σ^2.

Seja $X : N(\mu, sigma^2)$, definimos:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Z é chamada de *variável normal reduzida, normal padronizada* ou *variável normalizada.*

Z possui $E(X) = 0$ e $VAR(X) = 1$.

A vantagem de utilizar a variável Z é a utilização da tabela.

EXEMPLOS DE COMO UTILIZAR A TABELA SERÁ FORNECIDO EM SALA

UTILIZANDO O GEOGEBRA

Exemplo 01:

Um fabricante de baterias sabe, por experiência passada, que as baterias de sua fabricação têm vida média de 600 dias e desvio-padrão de 100 dias, sendo que a duração tem aproximadamente distribuição normal. Oferece uma garantia de 312 dias, isto é, troca as baterias que apresentem falhas nesse período. Fabrica 10.000 baterias mensalmente. Quantas deverá trocar pelo uso da garantia, mensalmente?

Resolução:

X : é a duração da bateria e assim $\begin{cases} \mu = 600 \text{ dias} \\ \sigma = 100 \text{ dias} \end{cases}$

Logo,

$Z = \dfrac{X - 600}{100}$

Queremos determinar a $P(X < 312)$.

Utilizando o GeoGebra determinaremos qual é essa probabilidade.

Assim, $P(X < 312) = 0,001988 \approx 0,002$.

Para determinarmos quantas baterias serão substituídas mensalmente fazemos:

$10000 \times 0,001988 = 19,88 = 20$ baterias.

■

2 Inferência

2.1 Amostragem

Este tópico sobre amostragem já abordamos nos slides iniciais, irei apenas comentar novamente em sala.

2.2 Análise Exploratória dos Dados de uma Amostra

Este tópico sobre Análise Exploratória dos Dados de uma Amostra já abordamos nos slides iniciais, irei apenas comentar novamente em sala.

2.3 Distribuição Amostral dos Estimadores

Estudaremos como se distribuem por amostragem o estimador $\bar{x}$ da média μ, ou seja é uma estimativa para o parâmetro da população.

2.3.1 Distribuição Amostral da Média

Definição 2.1 (Estimador da média μ populacional) *De uma população X retiramos uma amostra de tamanho n constituída pelos elementos $x_1, x_2, \ldots, x_n$.*

O estimador da média μ populacional da amostra é:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

O exemplo será discutido em sala, será utilizado para ilustrar a estimação do parâmetro através da média da amostragem. Com isto, chegamos as próximas definições.

Definição 2.2 *A média das médias amostras, ou $E(\bar{x})$, é igual à média μ populacional, ou $E(\bar{x}) = \mu_x$.*

Quando temos $E(\hat{\theta}) = \theta$, o estimador $\hat{\theta}$ é não viciado, não viesado ou não tendencioso. Assim $\bar{x}$ é um estimador não tendencioso de μ.

Definição 2.3 *A variância da média amostral é igual à variância populacional dividida pelo tamanho da amostra, ou seja,*

$$VAR(\bar{x}) = \sigma_x^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

Ou seja, se $X : N(\mu, \sigma^2)$ e se dessa população retiramos amostras de tamanho n, então:

$$\bar{x} : N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

A distribuição da variável $\bar{x}$ por amostragem simples será sempre normal com a mesma média da população X e a variância n vezes menor. Ou seja, quanto maior a amostra menor a variância da média, ou seja, quanto maior a amostra maior a precisão do estimador $\bar{x}$.

O Fator de Correção para populações finitas e de tamanho N conhecido , e se a amostra de tamanho n dela retirada for sem reposição, então:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

Exemplo 01: Em uma população de 5000 alunos de uma faculdade sabemos que a altura média dos alunos é 175cm e o desvio padrão, 5cm. Retiramos uma amostra sem reposição, de tamanho $n = 100$. Determine o desvio padrão dessa amostra.

Solução:

Temos que $X : N(175, 25) \begin{cases} u = 175 \\ \sigma = 5 \end{cases}$

Então, $\sigma_{\bar{x}} = E(\bar{x}) = 175$

e

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = \frac{5}{10}\sqrt{\frac{5000-100}{5000-1}} = 0,495024$$

Assim, a média das médias amostrais é 175cm e o desvio padrão da média amostral é $0,5$cm.

Se não utilizássemos o fator de correção, teríamos:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{5}{10} = 0,5$$

Isto é, quando tiramos uma amostra grande de uma população muito maior que o da amostra (pelo menos o dobro), é indiferente usar o fator de correção para populações finitas, pois o erro é muito pequeno.

■

2.3.2 Dimensionamento de uma Amostra

Para determinarmos qual o tamanho da amostra que deveremos retirar para obter um erro de amostragem dentro de um risco determinado utilizamos o seguinte exemplo:

Exemplo 01: Seja $X : N(1200, 840)$. Qual deverá ser o tamanho da amostra de tal forma que $P(1.196 < \bar{x} < 1204) = 0,9$?

Solução:

Se $X : N(1200, 840) \begin{cases} \mu = 1200 \\ \sigma^2 = 840 \end{cases} \quad \therefore \sigma_{\bar{x}} = 1200$ e $\sigma_{\bar{x}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \dfrac{28,98}{\sqrt{n}} \therefore Z = \dfrac{\bar{x} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}}$

ou

$Z_\alpha = Z_{0,45} = 1,64$

Assim,

$1,64 = \dfrac{1204 - 1200}{\frac{28,98}{\sqrt{n}}}$

É indiferente escolher o extremo inferior ou superior, sendo assim:

$\sqrt{n} = \dfrac{1,64 \cdot 28,98}{4}$

$\sqrt{n} = 11,88 \implies n = 141,13 \implies n \approx 141$

Com isso, concluímos que, se retirarmos uma amostra de 141 elementos da população X, teremos 95% de confiança que $\bar{x}$ estará no intervalo $(1.196, 1.216)$, o que significa que o risco que corremos de que o valor da média caia fora do intervalo anterior é de 5%.

■

2.4 Estimação

Definição 2.4 (Inferência Estatística) *As conjunto de técnicas e procedimentos que permitem dar ao pesquisador um grau de confiabilidade, de confiança, nas afirmações que faz para a população baseadas nos resultados das amostras.*

O problema fundamental da inferência estatística, portanto, é medir o *grau de incerteza ou risco* dessas generalizações.

2.4.1 Estimação de Parâmetros

É um dos objetivos básicos da experimentação. São dois tipos de estimação: por pontos e por intervalos.

Estimação por Pontos: a partir das observações, calcula-se uma estimativa, usando o estimador ou "estatística".

2.4.2 Qualidades de um Bom Estimador

Quanto maior o grau de concentração da distribuição amostral do estimador em torno do verdadeiro valor do parâmetro populacional, tanto melhor será o estimador.

As principais qualidades de um estimador são:

a) consistência;

b) ausência de vício;

c) eficiência;

d) suficiência.

As definições formais requerem conhecimentos de cálculo.

Estimação por Intervalo: A estimação por pontos de um parâmetro não possui uma medida do possível erro cometido na estimação. Para solucionar isto, uma alternativa é estabelecer *limites*, que com certa probabilidade incluam o verdadeiro valor do parâmetro da população.

Estes limites, são definidos como *limites de confiança* e determinam um intervalo de confiança, no qual deverá estar o verdadeiro valor do parâmetro.

Assim, a estimação por intervalos consiste na fixação de dois valores, tais que $(1-\alpha)$ seja a probabilidade de que o intervalo, por eles determinado, contenha o verdadeiro valor do parâmetro.

Onde:
α : é o nível de incerteza ou grau de desconfiança;
$1-\alpha$: é o nível de confiabilidade.
Logo, α nos da o nível de incerteza desta inferência, chamamos de grau de significância.

2.5 Intervalos de Confiança para Médias

2.5.1 Intervalos de Confiança (IC) para a média μ de uma população Normal com variância σ^2 conhecida

Considerando uma população normal com média desconhecida que desejamos estimar e com σ^2 conhecida, $X : N(?, \sigma^2)$.

O passo a passo para obter intervalos de confiança são:

1. Retiramos uma amostra casual simples com n elementos;

2. Calculamos a média da amostra $\bar{x}$;

3. Calculamos o desvio padrão da média amostral: $\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\dfrac{\sigma^2}{n}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{x}}$;

4. Fixamos um nível de significância α, e com ele determinamos z_α, tal que $P(|z| > z_\alpha) = \alpha$, ou seja: $P(z > z_\alpha) = \dfrac{\alpha}{2}$ e $P(z < -z_\alpha) = \dfrac{\alpha}{2}$. Logo devemos ter: $P(|z| < z_\alpha) = 1 - \alpha$.

   Com isso, desenvolvendo a fórmula anterior chegamos a:

$$P(\bar{x} - z_\alpha \cdot \sigma_{\bar{x}} < \mu < \bar{x} + z_\alpha \cdot \sigma_{\bar{x}})$$

   Que é a fórmula do IC para a média de populações normais com variância conhecidas.

Simplificando a notação temos com os limites anteriores: $\mu_1 = \bar{x} - z_\alpha \cdot \sigma_{\bar{x}}$ e $\mu_2 = \bar{x} + z_\alpha \cdot \sigma_{\bar{x}}$, com isto segue que:

$$IC(\mu, (1-\alpha)\%) = (\mu_1, \mu_2)$$

Em outras palavras, tomando $\alpha = 5\%$, podemos esperar que 95 dos IC contenham o verdadeiro valor de μ e 5 não contenham o valor de μ, em 100 amostras de mesmo tamanho n, onde obteremos 100 estimativas para $\bar{x}$, com as quais construiremos 100 IC para μ.

Isto é, em uma amostra qualquer, a probabilidade de que o IC determinado contenha o valor da média é de 95%, ou seja, uma confiança de 95% de que o IC determinado contenha o verdadeiro valor de μ. O risco que corremos de que não contenha o verdadeiro valor é de 5%.

Exemplo 01: De uma população normal X, com $\sigma^2 = 9$, tiramos uma amostra de 25 observações, obtendo $\displaystyle\sum_{i=1}^{25} x_i = 152$. Determinar um IC de limites de 90% para μ.

Solução:

$\alpha = 10\%$ e $\bar{x} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = \dfrac{152}{25} = 6,08$

$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\dfrac{\sigma^2}{25}} = \sqrt{\dfrac{9}{25}} = \dfrac{3}{5} \implies \sigma_{\bar{x}} = 0,6$

Utilizando a tabela do inicio das notas de aula, segue que:

$z_\alpha = z_{45\%} = z_{0,45} = 1,64$

Com isto, nosso intervalo de confiança é dado por:

$$P(6,08 - 1,64 \cdot 0,6 < \mu < 6,08 + 1,64 \cdot 0,6) = 0,9$$

$$P(5,096 < \mu < 7,064) = 0,90$$

Ou ainda,

$$IC(\mu, 90\%) = (5,096; 7,064)$$

Portanto, temos 90% de confiança que o verdadeiro valor μ populacional se encontra entre 5,096 e 7,064, ou então corremos um risco de 10% de que o verdadeiro valor da média μ populacional seja menor que 5,096 ou maior que 7,064.

■

2.5.2 Intervalos de Confiança para a Média de Populações Normais com Variâncias Desconhecidas

Quando queremos estimar a média de uma população normal com variância desconhecida, consideramos dois procedimentos:

- se $n \leq 30$, então usa-se a distribuição t de Student, que veremos a diante;
- se $n > 30$, então usa-se a distribuição normal com o estimador s^2 de σ^2.

Nesta seção nosso interesse é no segundo caso. Vejamos um exemplo.

Exemplo 01: De uma população normal com parâmetros desconhecidos, tiramos uma amostra de tamanho 100, obtendo-se $\bar{x} = 112$ e $s = 11$. Fazer um IC para μ ao nível de 10%.

Solução:

Como a amostra é superior a 30, utilizamos:

$\sigma_{\bar{x}} \approx \dfrac{s}{\sqrt{n}} = \dfrac{11}{10} = 1,1$

$z_{\alpha} = z_{45\%} = z_{0,45} = 1,64$

Logo,

$$P(112 - 1,64 \cdot 1,1 < \mu < 112 + 1,64 \cdot 1,1) = 0,90$$
$$P(110,20 < \mu < 113,80) = 0,90$$

Ou

$$IC(\mu, 90\%) = (110,20; 113,80)$$

O que concluímos que apesar de usar o desvio padrão da amostra, temos um grau de certeza de 90% de que o verdadeiro valor da média populacional está entre $110,20$ e $113,80$.

■

2.6 Testes de Hipóteses para Médias

Suponha que uma certa distribuição dependa de um parâmetro θ e que não se conheça θ ou, então, haja razões para acreditar que o θ variou, seja pelo passar do tempo ou por modificações do processo de produção, por exemplo.

A inferência estatística fornece um processo de análise denominado *teste de hipóteses*, que permite se decidir por um valor do parâmetro θ ou por sua modificação com um grau de risco conhecido.

São formuladas duas hipóteses básicas:

H_0: chamada de hipótese nula ou da existência;

H_1: chamada de hipótese alternativa.

Testamos hipóteses para tomarmos uma decisão entre duas alternativas. Por essa razão, o *teste de hipótese* é um processo de decisão estatística.

Alguns exemplos serão discutidos em sala.

De maneira genérica podemos apresentar as hipóteses genéricas que englobam a maioria dos casos:

1. $\begin{cases} H_0 : \theta = \theta_0 \\ H_1 : \theta \neq \theta_0 \end{cases}$ São os testes bilaterais.

2. $\begin{cases} H_0 : \theta = \theta_0 \\ H_1 : \theta > \theta_0 \end{cases}$ São os testes unilaterais à direita.

3. $\begin{cases} H_0 : \theta = \theta_0 \\ H_1 : \theta < \theta_0 \end{cases}$ São os testes unilaterais à esquerda.

4. E ainda é possível realizar um teste de hipótese após realizar um dos testes acima.

2.6.1 Procedimento Padrão para a Realização de um Teste de Hipótese

- Definem-se as hipóteses do teste: nula e alternativa;
- Fixa-se um nível de significância α;
- Levanta-se uma amostra de tamanho n e calcula-se uma estimativa $\hat{\theta}_0$ do parâmetro θ;
- Usa-se para cada tipo de teste uma variável cuja distribuição amostral do estimador do parâmetro seja a mais concentrada em torno do verdadeiro valor do parâmetro;
- Calcula-se com o valor do parâmetro θ_0, dado por H_0, o valor crítico, valor observado na amostra ou valor calculado (V_{calc});
- Fixam-se duas regiões: uma de *não rejeição* de H_0 *(RNR)* e uma de *rejeição* de H_0 ou *crítica (RC)* para o valor calculado, ao nível de risco dado;
- Se o valor observado (V_{calc}) $\in$ região de não rejeição, a decisão é a de não rejeitar H_0;
- Se (V_{calc}) $\in$ região crítica, a decisão é a de rejeitar H_0.

No caso dos testes bilaterais, quando se fixa α os valores críticos, V_α são dados, tais que:

- $P(|V_{calc}| < V_\alpha) = 1 - \alpha \implies RNR$
- $P(|V_{calc}| \geq V_\alpha) = \alpha \implies RC$

2.6.2 Testes de Hipóteses para a Média de Populações Normais com Variâncias (σ^2) Conhecidas

As explicações serão feitas através de um exemplo.

Testes Bilaterais

Exemplo 01: De uma população normal com variância 36, toma-se uma amostra casual de tamanho 16. obtendo-se $\bar{x} = 43$. Ao nível de 10%, testar as hipóteses:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 45 \\ H_1 : \mu \neq 45 \end{cases}$$

Solução:

As hipóteses já estão definidas no enunciado, isto é, o nível de significância é de $\alpha = 10\%$. O tamanho da amostra $n = 16$ e a média da amostra já é dada, logo $\bar{x} = 43$.

Como a variância é conhecida, utilizamos um *Teste de Hipótese para a Média de Populações Normais com Variância Conhecida*, e utilizamos a variável $Z : N(0,1)$ com as seguintes variáveis:

$$\sigma^2 = 36 \; ; \; \bar{x} = 43 \; ; \; n = 16$$

Assim,

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu_{H_0}}{\sigma_{\bar{x}}}$$

Onde $\sigma_{\bar{x}}$ é dada por:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{6}{\sqrt{16}} = \frac{6}{4} \implies \sigma_{\bar{x}} = 1,5$$

. Sendo $\mu_{H_0} = 45$, segue:

$$Z_{calc} = \frac{\bar{x} - \mu_{H_0}}{\sigma_{\bar{x}}} = Z_{calc} = \frac{43 - 45}{1,5} = -1,33$$

.

Como o teste é um teste bilateral e $\alpha = 10\%$, a região de não rejeição, RNR, é:

$$P(|Z| < Z_\alpha) = 1 - \alpha \implies P(|Z| < 1,64) = 0,90$$

E assim, $Z_\alpha = Z_{5\%} = 1,64$.

A região de rejeição (RC) é dada por $P(|Z| \geq Z_\alpha) = \alpha \implies P(|Z| \geq 1,64) = 0,10$.

GRÁFICO EM SALA

Como $Z_{calc} = -1,33$ temos que $Z_{calc} \in RNR$.

Assim, a decisão é de não rejeitar H_0, isto é, a média é 45 com 10% de risco de não rejeitarmos uma hipótese falsa.

□

Uma outra forma de resolver o mesmo exercício é utilizando os Intervalos de Confiança, como segue:

$$RNR \implies P(\mu_{H_0} - Z_\alpha \cdot \sigma_{\bar{x}} < \bar{x} < \mu_{H_0} + Z_\alpha \cdot \sigma_{\bar{x}}) = 1 - \alpha$$

Ou ainda,

$$P(\bar{x}_1 < \bar{x} < \bar{x}_2) = 1 - \alpha$$

$$RC \implies P(\bar{x} \leq \bar{x}_1 \text{ ou } \bar{x} \geq \bar{x}_2)$$

Assim, temos:

$\bar{x}_1 = \mu_{H_0} - Z_\alpha \cdot \sigma_{\bar{x}} = 45 - 1,64 \cdot 1,5 = 42,54$

$\bar{x}_2 = \mu_{H_0} + Z_\alpha \cdot \sigma_{\bar{x}} = 45 + 1,64 \cdot 1,5 = 47,46$

O que produz:

$RNR = (42,54; 47,46)$

$RC = (\infty; 42,54] \cup [47,46; +\infty)$

Como $\bar{x} = 43$, então $\bar{x} \in RNR$.

Logo, não se rejeita H_0 também.

■

Testes Unilateral (monocaudal)

Os testes unilaterais são quando não estamos interessados em verificar uma desigualdade do tipo $\neq$ e sim quando estamos em busca de verificar $<$ ou $>$. Será realizado um exemplo para a explicação, no caso do Teste Unilateral à esquerda, o caso unilateral a direita é análogo.

Exemplo 01: Uma fábrica anuncia que o índice de nicotina dos cigarros da marca X apresenta-se abaixo de 26mg por cigarro. Um laboratório realiza 10 análises do índice obtendo: $26, 24, 23, 22, 28, 25, 27, 26, 28, 24$. Sabe-se que o índice de nicotina dos cigarros da marca X se distribui normalmente com variância $5,36\text{mg}^2$. Pode-se aceitar a afirmação do fabricante, ao nível de 5%?

Solução:

Temos as seguintes hipóteses:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 26 \\ H_1 : \mu < 26 \end{cases}$$

Com $\alpha = 5\%$ e $n = 10$.

Para determinarmos a média:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i = \frac{253}{10} \implies \bar{x} = 25,3$$

E o desvio padrão da amostra:

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{5,36}{10}} = \sqrt{0,536} = 0,73$$

O valor de $Z_{calc} = \frac{25,3-26}{0,73} = -0,959$.
O valor de $Z_{\alpha} = z_{5\%} = 1,64$.
Com isto, temos: $RNR = (-1,64; +\infty)$
$RC = (-\infty; -1,64]$
$\therefore Z_{calc} \in RNR$.
Ou seja, ao nível de 5%, podemos concluir que a afirmação do fabricante é falsa, ou seja, não se rejeita H_0.

$\square$

Resolvendo através de Intervalos de Confiança, segue:

$$RNR \implies P(\bar{x} > \mu_{H_0} - Z_{\alpha} \cdot \sigma_{\bar{x}}) = 1 - \alpha$$

Ou ainda,

$$RC \implies P(\bar{x} \leq \mu_{H_0} - Z_{\alpha} \cdot \sigma_{\bar{x}}) = \alpha$$

$\therefore$
$P(\bar{x} > 26 - 1,64 \cdot 0,73) = 0,95$
$RNR \implies P(\bar{x} > 24,803) = 0,95$
$RC \implies P(\bar{x} \leq 24,803) = 0,10$.
Como $\bar{x} = 25,3$, concluímos que $\bar{x} \in RNR$, o que conclui para não rejeitar H_0.

$\blacksquare$

No caso do teste unilateral à direita, a resolução é análoga, levando em consideração que estamos interessados na região à direita.

2.7 Erros de Decisão

Podemos cometer um erro de decisão quando feito o teste de hipótese:

1. Rejeitamos uma hipótese nula verdadeira: é o erro do tipo I;
2. Não rejeitamos uma hipótese nula falsa: é o erro do tipo II.

Resumidamente, se:

- H_0 é verdadeira, e rejeitamos, cometemos o erro do tipo I;
- H_0 é falsa, e não rejeitamos, cometemos o erro do tipo II.

A Função Poder de um Teste será discutida em sala.

2.8 Distribuição de t de student IC e TH para a Média de População Normal com Variância Desconhecida

2.8.1 Distribuição t de Student

A variável $Z = \dfrac{\bar{x} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}}$ tem distribuição normal. Quando não conhecemos a variância σ^2 devemos utilizar s^2, como estimador de σ^2.

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \text{ e } s_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{s^2}{n}}$$

A variável definida como $t_\phi = \dfrac{\bar{x} - \mu}{s_{\bar{x}}}$ é definida como variável com distribuição de "t de Student" com ϕ graus de liberdade.

A utilização da distribuição *t de Student* como vimos anteriormente é para os casos em que o número de observações (n) na amostra é pequeno.

Novamente, como na utilização da distribuição Normal, iremos utilizar a tabela como auxílio.

2.8.2 Graus de Liberdade

Pode-se definir como graus de liberdade o número de informações independentes da amostra (n) menos o número (K) de parâmetros da população a serem estimados além do parâmetro inerente ao estudo.

$$\phi = n - K$$

Em nosso caso, como iremos estimar a média de uma população normal com σ^2 desconhecida, além de $\bar{x}$, estimador inerente ao estudo, estimaremos σ^2, um parâmetro a mais. Isto significa que em nossos estudos, utilizaremos a distribuição *t de Student* com $n - 1$ graus de liberdade.

GRÁFICO DA DISTRIBUIÇÃO EM COMPARAÇÃO COM A DISTRIBUIÇÃO NORMAL

2.8.3 IC e TH para a média μ de uma população Normal com σ^2 desconhecida

O Procedimento Padrão para a determinação de IC e TH é o mesmo anteriormente dado:

1. Retiramos uma amostra de n elementos da população.
   - Se $n > 30$, usa-se a distribuição Normal com s^2;
   - Se $n \leq 30$, usa-se a distribuição *t de Student*, com $\phi = n - 1$ graus de liberdade.
2. Calculamos $\bar{x} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i$
3. Calculamos $s^2 = \dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$
4. Determinamos $s_{\bar{x}} = \sqrt{\dfrac{s^2}{n}}$, que é o estimador de $\sigma_{\bar{x}}$.
5. Ao nível $\alpha\%$ fazemos:
   (a) $P(\bar{x} - t_\alpha \cdot s_{\bar{x}} < \mu < \bar{x} + t_\alpha \cdot s_{\bar{x}}) = 1 - \alpha$

(b) $\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0, \mu > \mu_0, \mu < \mu_0 \end{cases}$

Com o t_α, determinamos a RNR e RC. Calculamos $t_{calc} = \dfrac{\bar{x} - \mu_{H_0}}{s_{\bar{x}}}$:

- Se $t_{calc} \in RNR \implies$ não rejeita H_0;
- Se $t_{calc} \in RC \implies$ rejeita-se H_0.

Observação: Quando a população é normal com parâmetros desconhecidos, teoricamente a solução $N(0,1)$ só é aconselhável quando $n > 120$. Ná prática, para $n > 30$ usa-se $N(0,1)$.

Exemplo 01: De uma população normal com parâmetros desconhecidos, retirou-se uma amostra de 25 elementos para se estimar μ, obtendo-se $\bar{x} = 15$ e $s^2 = 36$. Determinar um IC para a média ao nível de 5%.

Solução:

$s_{\bar{x}} = \sqrt{\dfrac{s^2}{n}} = \dfrac{6}{\sqrt{25}} = \dfrac{6}{5} = 1,2$

$\phi = n - 1 = 25 - 1 = 24$

$t_{24;2,5\%} = 2,0639$

$P(15 - 2,0639 \cdot 1,2 < \mu < 15 + 2,0639 \cdot 1,2) = 0,95$

$P(12,523 < \mu < 17,477) = 0,95$

■

2.9 Comparação de duas médias: TH para a diferença de duas médias

No caso de comparação de duas médias, iremos realizar uma discussão em sala sobre o caso de dados emparelhados.