Maxim Dolgushev

1) Dénombrements

1.1) 1 → $p = \left(\frac{1}{10}\right)^3$, car on fait ce qu'on veut pour le premier, mais pour les 3 autres on a 1 seul choix

2 → $p = \frac{9}{10} \cdot \frac{8}{10} \cdot \frac{7}{10}$

3 → $p = \frac{1}{10} \cdot \frac{\cancel{8}\,9}{10} \cdot \frac{\cancel{7}\,8}{10} \cdot \binom{4}{2}$ → combis pour placer 2 chiffres identiques

1.2) 1 → $p = \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{7} = \frac{2}{56} = \frac{1}{28} = \frac{1}{\binom{8}{2}}$ → 1 paire → reste des paires

2 → $p = \frac{4 \times 4}{\binom{8}{2}} = \frac{16}{28} = \frac{4}{7}$

4 options → pied g, 4 options → pied d

total paires

3 → $\frac{4}{8} \times \frac{3}{7} = \frac{12}{56} = \frac{6}{28} = \frac{3}{14} = \frac{\binom{4}{2}}{28}$ → combinaisons de 2 pieds droits

1 pied droit, un autre pied droit

4 → $p = \frac{6}{7}$ car 4 combinaisons pour que les 2 bottes appartiennent à la même personne

→ 24 pour personnes ≠ $p = \frac{24}{28} = \frac{6}{7}$

2) Décroissance radioactive

Pendant T, le nombre moyen de désintégrations est $\langle K \rangle = \alpha T$

On découpe T en $N \gg 1$ intervalles $\Delta t = \frac{T}{N}$. Pendant chaque N intervalle de durée Δt, il y a 0 ou 1 désintégration. On suppose désintégrations indépendantes. $p \ll 1$ proba pour désintégration pendant Δt. (Loi binomiale !)

1) N° moyen de désintégrations dans un intervalle Δt ? $\langle K' \rangle = p \cdot 1 + (1-p) \cdot 0 = p$

N° moyen de désintégrations pendant T ? $\langle K \rangle = \alpha T = N \langle K' \rangle = Np \Rightarrow p = \frac{\alpha T}{N} = \alpha \Delta t$

2) Loi binomiale $\mathcal{P}(K \text{ succès}, N \text{ tentatives}) = \binom{N}{K} p^K (1-p)^{N-K}$

Pour succès en position 17 : $(1-p)^{16} p$

1 désintégration pendant la durée T : $\mathcal{P}(1, N) = \binom{N}{1} p (1-p)^{N-1} = Np(1-p)^{N-1}$

3) $\mathcal{P}(17, 71) = (1-p)^{69} p^2$ $\mathcal{P}(2 \text{ désintégrations}) = \binom{N}{2} p^2 (1-p)^{N-2} = \frac{N(N-1)}{2} p^2 (1-p)^{N-2}$

4) $\mathcal{P}(K) = \binom{N}{K} p^K (1-p)^{N-K}$. La distribution de probabilité suit une loi binomiale.

Normalisation : $\sum_{K=0}^{N} \binom{N}{K} p^K (1-p)^{N-K} = (p + (1-p))^N = 1$ Formule du binôme de Newton.

5) $P(K) = \binom{N}{K} p^K (1-p)^{N-K} = \binom{N}{K} \left(\frac{\alpha T}{N}\right)^K \left(1 - \frac{\alpha T}{N}\right)^{N-K}$

$$= \frac{N!}{K!\,(N-K)!} \frac{(\alpha T)^K}{N^K} \left(1 - \frac{\alpha T}{N}\right)^{N-K}$$

$N \gg 1$; $N \gg K$

$$\simeq \frac{N(N-1)\dots(N-K+1)}{K!} \frac{(\alpha T)^K}{N^K} \left(1 - \frac{\alpha T}{N}\right)^N$$

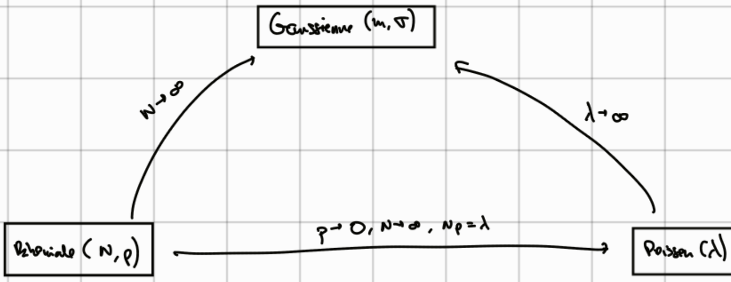
$$\simeq \frac{N^K}{K!} \frac{(\alpha T)^K}{N^K} e^{-\alpha T}$$

$$\simeq \frac{(\alpha T)^K}{K!} e^{-\alpha T}$$

6) Loi de poisson de paramètre $\lambda = \alpha T$

$Np = N \frac{\alpha T}{N} = \alpha T = \lambda$ $\quad p \to 0 \quad N \to \infty$ vérifié !

Poisson $\quad K = 0, 1, 2, \dots \quad \lambda \in \mathbb{R}^+ \quad p(K) = \frac{\lambda^K}{K!} e^{-\lambda} \quad \lambda \quad \lambda$



Normalisation: $\sum_{K=0}^{N} \frac{(\alpha T)^K}{K!} e^{-\alpha T} = e^{-\alpha T} \sum_{K=0}^{N} \frac{(\alpha T)^K}{K!}$

$$= e^{-\alpha T} e^{\alpha T} = 1$$

$$\langle K \rangle = \sum_{K=1}^{N} K \frac{(\alpha T)^K}{K!} e^{-\alpha T} = e^{-\alpha T} \sum_{K=1}^{N} \frac{(\alpha T)^K}{(K-1)!}$$

$$= e^{-\alpha T} (\alpha T) \sum_{K=1}^{N} \frac{(\alpha T)^{K-1}}{(K-1)!} \quad K = K-1$$

$$= e^{-\alpha T} \alpha T \sum_{K=0}^{N} \frac{(\alpha T)^K}{K!}$$

$$= \alpha T = \lambda$$

$$\mathrm{Var}(K) = \langle K^2 \rangle - \langle K \rangle^2 = \sum_{K=1}^{\infty} K^2 \frac{(\alpha T)^K}{K!} e^{-\alpha T} - (\alpha T)^2$$

$$= e^{-\alpha T} \sum_{K=1}^{\infty} (K(K-1) + K) \frac{(\alpha T)^K}{K!} - (\alpha T)^2$$

$$= e^{-\alpha T} \left(\sum_{K=2}^{\infty} K(K-1) \frac{(\alpha T)^K}{K!} + \underbrace{\sum_{K=1}^{\infty} K \frac{(\alpha T)^K}{K!}}_{\alpha T e^{\alpha T}} \right) - (\alpha T)^2$$

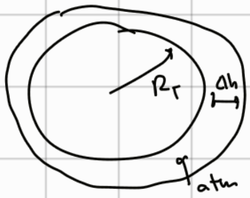
$$= e^{-\alpha T} \left(\sum_{K=2}^{\infty} \frac{(\alpha T)^K}{(K-2)!} \right) + \alpha T - (\alpha T)^2$$

$$= (\alpha T)^2 - (\alpha T)^2 + \alpha T = \alpha T = \lambda$$

3) Inspirations

n° molécules expirés par César : $1\,L \cdot \dfrac{1}{22{,}4\,L\cdot mol^{-1}} \cdot 6\cdot 10^{23}$ molécules $\cdot\, mol^{-1} \simeq 3\cdot 10^{22}$ molécules $= N_C$

volume atmosphère :



$$V_{atm} = \underbrace{4\pi R_T^2}_{\text{surface}}\ \underbrace{\Delta h}_{\text{hauteur}} = 4\pi\,[6{,}4\cdot 10^6\,m]^2 \cdot \underbrace{10^4}_{10\,km}\,m \cdot 10^3\,\frac{l}{m^3}$$

$$\simeq 4\cdot 10^{21}\,L$$

Concentration César atmosphère : $\dfrac{N_C}{V_{atm}} = \dfrac{n}{V_{poumon}}$ (n → molécules dans votre poumon) $\rightarrow\ n = \dfrac{3\cdot 10^{22}}{4\cdot 10^{21}\,L}\cdot 1L \simeq 10$ molécules

Limitation du calcul : Équidistribution des molécules ? Oui, ça va.

→ Transformation des molécules, elles se dissocient, s'associent.

→ 10 molécules ? Quantique, est-ce qu'on peut les discerner ?

4) Maths

4.1) Gaussienne

$$I_n(\alpha) = \int_0^\infty x^n e^{-\alpha x^2}\,dx\,,\quad \alpha > 0$$

1) Montrer $I_1(\alpha) = \dfrac{1}{2\alpha}$

$$I_1(\alpha) = \int_0^\infty x\, e^{-\alpha x^2}dx = \frac{1}{2\alpha}\int_0^\infty e^{-\alpha x^2} d(\alpha x^2) = \frac{1}{2\alpha}\left(-e^{-y}\right)\Big|_0^\infty = \frac{1}{2\alpha}$$

2) $I_0(\alpha) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}dx \ \rightarrow\ 2I_0(\alpha) = 2\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}dx \underset{\text{pair}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}dx$

$$[2I_0(\alpha)]^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha y^2}dy = \iint_{-\infty} \underbrace{dx\,dy}_{r\,dr\,d\theta}\, e^{-\alpha(x^2+y^2)} \underset{\text{polaire}}{=} \int_0^{2\pi}\int_0^\infty r\,dr\,d\theta\, e^{-\alpha r^2} \underset{\text{en utilisant résultat } I_1(\alpha)}{=} 2\pi\,\frac{1}{2\alpha} \Rightarrow [2I_0(\alpha)]^2 = \frac{\pi}{\alpha}$$

$$\Rightarrow I_0(\alpha) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

3) Idée : dériver par rapport à α et lier ordres n et $n-2$.

$$-\frac{\partial}{\partial\alpha} I_{n-2}(\alpha) = -\frac{\partial}{\partial\alpha}\int_0^\infty x^{n-2} e^{-\alpha x^2}dx = \int_0^\infty x^n e^{-\alpha x^2}dx = I_n(\alpha)$$

$$I_2(\alpha) = -\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = -\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\alpha^{-1/2} = \frac{1}{4}\sqrt{\pi}\,\alpha^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{4\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$$I_3(\alpha) = -\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{2\alpha}\right) = \frac{1}{2\alpha^2}$$

$\alpha^{-2}\,\alpha^{-\frac{1}{2}}$

$$I_4(\alpha) = -\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{4}\cdot\frac{1}{\alpha^{3/2}}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{4}\,\frac{3}{2}\,\alpha^{-\frac{5}{2}} \qquad \frac{3}{8\alpha^2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

4.2) Gamma $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \quad , \quad x>0$

$\hookrightarrow t = s^2 \qquad \Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-s^2} (s^2)^{x-1} d(s^2) = 2\int_0^\infty e^{-s^2} s^{2x-1} ds = 2\, I_{2x-1}(1)$

4) $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1 \qquad \Gamma(\tfrac{1}{2}) = 2 I_0(1) = \sqrt{\pi}$

$= 2 I_1(1)$

5) $\Gamma(x+1) = \int_0^\infty \underbrace{e^{-t} t^{x} dt}_{u,\ dv} = \underbrace{\left[t^x(-e^{-t})\right]_{t=0}^{t=\infty}}_{0} + \int_0^\infty e^{-t} x t^{x-1} dt = x\int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt = x\,\Gamma(x)$

$\Gamma(N+1) = N\,\Gamma(N) = N(N-1)\Gamma(N-1) = \dots = N!\ \Gamma(1) = N!$ pour N entier.

Stirling : $N! \simeq N^N e^{-N} \sqrt{2\pi N}$ pour $N \gg 1$ (ou $\ln(N!) = N\ln(N) - N$)

$\ln(N!) = \ln(N(N-1)(N-2)\dots 1)$

$= \sum_{p=1}^{N} \ln(p)$

$\simeq \int_1^N \ln x\, dx \qquad \frac{d}{dx}(x\ln x - x) = x\frac{1}{x} - 1 + \ln x = \ln x$

$= (x\ln x - x)_1^N$

Saddle point integration

$\downarrow$

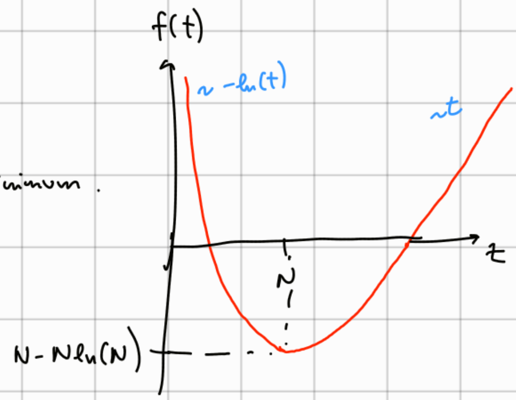
$N \gg 1 \hookrightarrow \simeq N\ln N - N$

6) $N! = \Gamma(N-1) = \int_0^\infty e^{-t} t^N dt = \int_0^\infty e^{-f(t)} dt \qquad f(t) = t - N\ln(t)$

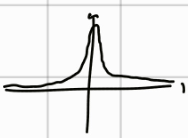
comment ?

On étudie $f(t)$: $\frac{df}{dt} = 1 - \frac{N}{t} \qquad \frac{df}{dt} = 0 \Rightarrow t_0 = N$

$\left.\frac{d^2f}{dt^2}\right|_{t=t_0=N} = \frac{N}{t^2} = \frac{1}{N} > 0 \Rightarrow t_0 = N$ est un minimum.



$e^{-f(t)}$ sera un maximum très marqué plutôt en N



7) $f(t) = f(t_0) + \underset{=0}{f'(t_0)} + \frac{1}{2}(t-t_0)^2 f''(t_0) + O((t-t_0)^3)$

$= N - N\ln(N) + \frac{1}{2}(t-N)^2 \frac{1}{N} + O((t-t_0)^3)$

$\simeq -N\ln(N) + N + \frac{1}{2N}(t-N)^2$

$\Rightarrow N! = \int_0^\infty e^{N\ln(N) - N - \frac{1}{2N}(t-N)^2} dt$

$$= e^{N\ln(N)-N}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2N}(t-N)^2}\,dt$$

$$= \left(\frac{N}{e}\right)^N \int_0^\infty e^{-\frac{(t-N)^2}{2N}}\,dt \qquad u = t-N$$

$$= N^N e^{-N}\int_{-N}^\infty e^{-\frac{u^2}{2N}}\,du$$

$N \gg 1$

$$\simeq N^N e^{-N} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2N}}\,du}_{2I_0\left(\frac{1}{2N}\right)} \simeq$$

$$= N^N e^{-N}\sqrt{2\pi N}$$

8) ... $N=10$, écart 1% $N=100$ 0,1% $N=10^{23}$ 0.......0%

4.3) Volume de l'hypersphère

Argument dimensionnel : $V_D = C_D R^D$, C_D sans dimension. $V_3 = \frac{4}{3}\pi R^3$. $\to C_3 = \frac{4}{3}\pi$ $S_3 = 4\pi R^2$

$V_2 = \pi R^2 \to C_2 = \pi \to S_2 = 2\pi R$ = périmètre

9) Déduire surface hypersphère de rayon R, volume $V_D = C_D R^D$

$$S_D = \frac{\partial V_D}{\partial R} = C_D \cdot D \cdot R^{D-1}$$

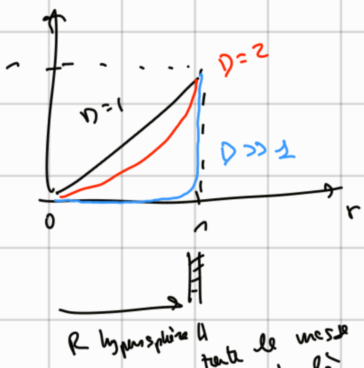
10)

$M_{env} = \rho S_D \, dR$ → petite épaisseur

$m_{SD} = \rho V_D$

$$M_{env} = \rho S_D\, dR = \rho\, D C_D R^{D-1} dR = \rho D C_D R^D \frac{dR}{R} = D M_{SD}\frac{dR}{R}$$

$v(r) = r^D$



$$\ln(M_{env}) = \underbrace{\ln(D)}_{\simeq 31} + \underbrace{\ln(M_{SD})}_{\sim R^D \to \underbrace{D}_{10^{23}}\ln(R)} + \underbrace{\ln\left(\frac{dR}{R}\right)}_{\simeq -23}$$

pour $D \sim 10^{23}$, $\frac{dR}{R} \sim 10^{-10}$

$$\ln(M_{env}) \sim \ln(M_{SD}) \to M_{env} \sim M_{SD}$$

Calcul C_D

1.1) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = 2 I_0(1) = \sqrt{\pi}$ $\quad I_D = \prod_{i=1}^{D} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x_i^2} dx_i \right) = (\sqrt{\pi})^D = \pi^{D/2}$

1.2) $\sum_{i=1}^{D} x_i^2 = \underbrace{R^2}_{\text{hyper rayon}}$ $\quad \prod_{i=1}^{D} dx_i = dV_D$ car on peut changer des x_i à avoir fixé un rayon, et intégrer tous les angles.

$\left(= d\Omega_D R^{D-1} dR\right)$

$$I_D = \int_0^{\infty} \underset{\uparrow \prod_{i=1}^{D} e^{-x_i^2}}{e^{-R^2}} \underbrace{D C_D R^{D-1} dR}_{dV_D \text{ ou } S_D dR} \underset{y=R^2}{=} D C_D \int_0^{\infty} e^{-y} \sqrt{y}^{D-1} d(\sqrt{y}) = \frac{D C_D}{2} \int_0^{\infty} e^{-y} y^{\frac{D}{2}-1} dy$$

$$= \frac{D C_D}{2} \Gamma\left(\frac{D}{2}\right) \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

$$= C_D \, \Gamma\left(\frac{D}{2}+1\right)$$

1.3)

$$= \pi^{D/2}$$

$$\Rightarrow C_D = \frac{\pi^{D/2}}{\Gamma\left(\frac{D}{2}+1\right)}$$

$C_1 = \dfrac{\sqrt{\pi}}{\frac{1}{2}\underbrace{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}_{\sqrt{\pi}}} = 2$ $\quad C_2 = \dfrac{\pi}{\Gamma(2)} = \pi$ ($\Gamma(2)$: $1!$) c'est bon ! $\quad C_3 = \dfrac{\pi^{3/2}}{\underbrace{\Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right)}_{\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}} = \dfrac{\pi^{3/2}}{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\pi} = \frac{4}{3}\pi$ c'est bon !

4.4) <u>Théorème central limite</u>

$x_1, x_2, \dots, x_N$ variables aléatoires mutuellement indépendantes ayant la même distribution de probabilité (même moyenne finie m et même variance finie σ^2.)

(de probabilité : pas nécessaire ; même moyenne finie m … : suffisant)

Leur somme divisée par N est $m_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$ est une variable aléatoire distribuée selon une distribution de probabilité qui tend vers la loi gaussienne de moyenne m et variance $\frac{\sigma^2}{N}$ lorsque $N \to \infty$:

$$P(m_N) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right)} \exp\left(-\frac{(m_N - m)^2}{2\left(\frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right)^2}\right)$$

m_N : variable aléatoire

m : nombre, c'est sa moyenne.

TCL

Si $N \to \infty$, $\frac{\sqrt{\sigma}}{N} \to 0$, P devient de plus en plus étroit, avec un max qui tend vers ∞, mais reste intégrable et égale à 1. P tend vers distribution de Dirac en $m_N = m$

14) $\langle m_N \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \underbrace{\langle x_i \rangle}_{m}$ (moyenne de la somme = somme moyennes car x_i indep)

$= m$

$$\sigma_{m_N}^2 = \langle (m_N - \langle m_N \rangle)^2 \rangle = \langle \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i - m\right)^2 \rangle = \langle \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} m\right)^2 \rangle$$

$$= \langle \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - m)\right)^2 \rangle$$

$$= \frac{1}{N^2}\left[\langle \sum_{i=1}^{N}(x_i-m)^2 \rangle + \underbrace{\langle \sum_{i \neq j}(x_i - m)(x_j - m) \rangle}_{=0}\right]$$

$$= \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\sigma^2$$

$$= \frac{\sigma^2}{N}$$

car $\langle x_i x_j \rangle = \langle x_i \rangle \langle x_j \rangle = m^2$
car indep
ce terme est la covariance

15) Une distri $P(x)$ est déterminée par sa fonction carac. $\phi_x(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{iux} p(x) = \langle e^{iux} \rangle$

Pour la gaussienne : $\phi_x(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{iux} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$

On complète le carré : $-\frac{1}{2\sigma^2}(x-m)^2 + iux = -\frac{1}{2\sigma^2}(x-a)^2 + b$

$$-\frac{1}{2\sigma^2}x^2 - \frac{1}{2\sigma^2}m^2 + \frac{xm}{\sigma^2} + iux = -\frac{1}{2\sigma^2}x^2 - \frac{1}{2\sigma^2}a^2 + \frac{xa}{\sigma^2} + b$$

$$\begin{cases} a = m + iu\sigma^2 \\ b = ium - \frac{u^2\sigma^2}{2} \end{cases}$$

à refaire

$\left(\frac{m}{\sigma^2} + iu\right) = \frac{a}{\sigma^2} \Rightarrow a = m + iu\sigma^2$

$-\frac{m^2}{2\sigma^2} = -\frac{1}{2\sigma^2}a^2 + b$

$\Leftrightarrow -\frac{m^2}{2\sigma^2} = -\frac{1}{2\sigma^2}(m^2 - u^2\sigma^4 + 2miu\sigma^2) + b$

$\Rightarrow b = -\frac{u^2\sigma^2}{2} + ium$

$$\Rightarrow \phi_x(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x - m - iu\sigma^2)^2} e^{ium - \frac{u^2\sigma^2}{2}}$$

gaussienne

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{ium - \frac{u^2\sigma^2}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{\frac{1}{2\sigma^2}}}$$

$$= e^{ium - \frac{u^2\sigma^2}{2}}$$

→ fct caractéristique des distribution gaussiennes

16) Exprimer $\phi_{m_N}(u)$, fct carac de m_N, en fct de $\phi_{\frac{x_i}{N}}(u)$, fct carac de $\frac{x_i}{N}$.

On avait $\sigma_{m_N}^2 = \frac{\sigma^2}{N}$

$$\phi_{m_N}(u) = \langle e^{ium_N} \rangle$$

$$= \langle e^{iu\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i} \rangle$$

$$= \langle \prod_{i=1}^{N} e^{iu\frac{x_i}{N}} \rangle$$

$$= \prod_{i=1}^{N} \langle e^{iu\frac{x_i}{N}} \rangle$$

car $\{x_i\}$ indep.

$$= \prod_{i=1}^{N} \phi_{\frac{x_i}{N}}(u)$$

17)

$$\phi_{\frac{x_i}{N}}(u) = \langle e^{iu\frac{x_i}{N}} \rangle \overset{N\to\infty}{\simeq} \langle 1 + iu\frac{x_i}{N} + \frac{1}{2}(iu\frac{x_i}{N})^2 + o(\frac{u^2}{N^2}) \rangle$$

$$= 1 + iu\frac{\langle x_i \rangle}{N} - u\frac{\langle x_i^2 \rangle}{2N^2}$$

$$= 1 + iu\frac{m}{N} - u\frac{\sigma^2+m^2}{2N^2} + o(\frac{u^2}{N^2}) \quad \text{car} \quad \sigma^2 = \langle x_i^2 \rangle - m^2$$

$$\phi_{m_N}(u) \simeq \prod_{i=1}^{N} \left(1 + iu\frac{m}{N} - u\frac{\sigma^2+m^2}{2N^2} + o(\frac{u^2}{N^2})\right)$$

$$= \left(1 + iu\frac{m}{N} - u\frac{\sigma^2+m^2}{2N^2} + o(\frac{u^2}{N^2})\right)^N$$

car aucun terme ne dépend de i.

$$\ln(\phi_{m_N}(u)) = N \ln(\cdots) \quad \text{et} \quad \ln(1+y) \overset{y\to 0}{=} y - \frac{y^2}{2}$$

$$= N\left(iu\frac{m}{N} - u\frac{\sigma^2+m^2}{2N^2} - \frac{1}{2}\left(-u^2\frac{m^2}{N^2}\right) + o(\frac{u^2}{N^2})\right)$$

$$\Rightarrow \phi_{m_N}(u) = e^{ium - \frac{u\sigma^2}{2N}}$$ → fct carac de gaussienne de moyenne m et variance $\frac{\sigma^2}{N}$

→ on vérifie $P(m_N)$

5) Marche aléatoire à 1D

À chaque pas de longueur ℓ, il a une proba p d'aller à droite et $1-p$ d'aller à gauche. X sa position relative par rapport au point de départ après N pas.

5.1) $X = \sum_{i=1}^{N} \ell_i$, $\ell_i = \begin{cases} +\ell & \text{avec proba } p \\ -\ell & \text{avec proba } 1-p \end{cases}$

$$\langle X \rangle = \langle \sum_{i=1}^{N} \ell_i \rangle \overset{\text{indep}}{=} \sum_{i=1}^{N} \langle \ell_i \rangle = N(\ell p - \ell(1-p)) = N\ell(2p-1) \quad \to p = \tfrac{1}{2} : \langle X \rangle = 0$$

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_{i=1}^{N} \mathrm{Var}(\ell_i) + \underbrace{\sum_{i\neq j} \mathrm{cov}(\ell_i, \ell_j)}_{\text{pas sont indep, donc } =0} = \sum_{i=1}^{N} (\langle \ell_i^2 \rangle - \langle \ell_i \rangle^2) = \sum_{i=1}^{N} \left(\underbrace{\ell^2 p + \ell^2(1-p)}_{\ell^2} - (\ell(2p-1))^2\right)$$

$$= N\ell^2(1 - (2p-1)^2)$$

$$= N\ell^2(1 - 4p^2 - 1 + 4p)$$

$$= 4p(1-p)N\ell^2$$

5.2) pour $p = \frac{1}{2}$, $\langle X \rangle = 0$, $d = \sigma = \ell\sqrt{N}$, car $\mathrm{Var}(X) = N\ell^2$

5.3) Δt, $t = N\Delta t \Rightarrow N = \frac{t}{\Delta t}$ $\quad d \simeq \ell\sqrt{\frac{t}{\Delta t}} \propto \sqrt{t}$ → c'est une diffusion.

$Var(X) = \ell^2 N = \ell^2 \frac{t}{\Delta t} = 2Dt$, avec $D = \frac{\ell^2}{2\Delta t}$, la constante de diffusion.

5.4) $\frac{X}{N} = \frac{1}{N} \sum \ell_i$, $\langle \ell_i \rangle = \ell(2p-1) \equiv m$

$Var(\ell_i) = \ell^2 4p(1-p) = \sigma^2$

$$P\left(\frac{X}{N}\right) \overset{TCL}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\frac{\sigma}{\sqrt{N}}} e^{-\frac{\left(\frac{X}{N}-m\right)^2}{2\frac{\sigma^2}{N}}}$$

et comme $\langle X \rangle = mN$, $Var(X) = \sigma^2 N$

$\underbrace{\frac{\sigma^2}{N}}_{TCL} = Var\left(\frac{X}{N}\right) = \frac{1}{N^2} Var(X)$

$\hookrightarrow Var(X) = N\sigma^2$

$$= \frac{N}{\sqrt{2\pi Var(X)}} e^{-\frac{(X - \langle X \rangle)^2}{2 Var(X)}}$$

ou $Var(X) = \sum Var(\ell_i) = N Var(\ell_i) = N\sigma^2$

6) Fluctuation dans un gaz parfait

Gaz parfait de N molécules indépendantes et uniformément réparties en moyenne dans un récipient de volume V. Soit K le nombre (aléatoire) de molécules contenues dans un sous-volume v du récipient.

1) Quelle est la valeur moyenne $\langle K \rangle$ de K?

$\left(\langle K \rangle = \frac{v}{V} N ? \right)$ oui! car $\frac{N}{V} = \frac{\langle K \rangle}{v}$: homogène $\Rightarrow$ densité dans volume et sous volume est égale.

On peut voir $\frac{v}{V}$ comme une proba d'être dans le sous-volume v.

Chaque molécule a une proba $p = \frac{v}{V}$ d'occuper le sous-volume.

2) On considère N variables aléatoires, une par particule.

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{si particule } i \text{ occupe } v \text{ (avec proba } p = \frac{v}{V}) \\ 0 & \text{sinon. (avec proba } 1-p) \end{cases}$$

$\{x_i\}$ sont indépendants!

On voit bien que pour la variable aléatoire $K = \sum_{i=1}^{N} x_i$

$$\langle K \rangle = \sum_{i=1}^{N} \langle x_i \rangle = N \underbrace{(1 \cdot p + 0 \cdot (1-p))}_{\text{on aura loi binomiale!}} = Np = N\frac{v}{V}$$

$$Var(K) = \sum_{i=1}^{N} Var(x_i) \quad \text{car indep}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} (\langle x_i^2 \rangle - \langle x_i \rangle^2) = \sum_{i=1}^{N} (\underbrace{p}_{p\,1^2 + (1-p)\,0^2} - p^2) = Np(1-p)$$

$$\sigma_K = \sqrt{Var(K)} = \sqrt{Np(1-p)}$$

3) $p = \frac{1}{2}$ $\quad N = 10$ $\quad \langle K \rangle = 5$ particules

$\sigma_K = \frac{1}{2}\sqrt{10} = 1{,}6$ particules

} m̃ ordre de grandeur

$N = 10^{12}$ $\quad \langle K \rangle = 5 \quad 10^{11}$ = particules

$\sigma_K = \frac{1}{2}\sqrt{10^{12}} = \quad 5 \cdot 10^{5}$ particules

} fluctuations faibles.

4) Gaussienne à faire

5) $p^n = \left(\frac{v}{V}\right)^n$

6) $\binom{N}{K} = \frac{N!}{K!(N-K)!}$ choix

7) $p^K (1-p)^{N-K} = p^4 (1-p)^{96}$

8) $P(K) \equiv$ binomiale $= \binom{N}{K} p^K (1-p)^{N-K}$

9) $\sum_{K=0}^{N} \binom{N}{K} p^K (1-p)^{N-K} = (p + (1-p))^N = 1.$

10) $\langle K \rangle = \sum_{K=1}^{N} K \binom{N}{K} p^K (1-p)^{N-K}$. Je considère $\sum_{K=0}^{N} K \binom{N}{K} p^K q^{N-K} = p \frac{\partial}{\partial p} \sum_{K=0}^{N} \binom{N}{K} p^K q^{N-K}$

$$= p \frac{\partial}{\partial p} (p+q)^N$$

$$= Np(p+q)^{N-1}$$

$$\langle K \rangle = Np(p+q)^{N-1}\Big|_{q=1-p} = Np$$

Redemande de la m̃ réponse avec la fct caractéristique:

$$\varphi(u) = \langle e^{iuK} \rangle = \sum_{K=0}^{N} \underbrace{e^{iuK} \binom{N}{K} p^K}_{(pe^{iu})^K} (1-p)^{N-K} = (pe^{iu} + 1-p)^N$$

$$= (p(e^{iu} - 1) + 1)^N$$

K-ième moment

$$\langle K^n \rangle = \frac{1}{i^n} \frac{d^n \varphi(u)}{du^n}\Big|_{u=0}$$

$$\langle K \rangle = \frac{1}{i} Npie^{iu}(pe^{iu} + 1-p)^{N-1}\Big|_{u=0} = Np$$

$$\langle K^2 \rangle = -\left(Npi\left(ie^{iu}(pe^{iu}+1-p)^{N-1} + (N-1)pie^{iu}(pe^{iu}+1-p)^{N-2}\right)\right)\Big|_{u=0}$$

$$= Np(1 + (N-1)p)$$

$$= Np + N(N-1)p^2$$

$$\langle K^2\rangle = \sum_{K=1}^{N} K^2 \binom{N}{K} p^K(1-p)^{N-K} = p\frac{\partial}{\partial p}\, p\frac{\partial}{\partial p}(p+q)^N$$

$$= p\frac{\partial}{\partial p}\, Np(p+q)^{N-1}$$

$$= Np\left((p+q)^{N-1} + p(N-1)(p+q)^{N-2}\right)$$

$q = 1-p$ ↳ $= Np(1 + p(N-1))$

$$Var(K) = \langle K^2\rangle - \langle K\rangle^2 = Np + N^2p^2 - Np^2 - (Np)^2 = Np(1-p)$$

II) $\langle K\rangle = Np$; $Var(K) = Npq = \sigma_K^2$ $q = 1-p$

$s = \frac{K - \langle K\rangle}{\sigma_K} = \frac{K - Np}{\sqrt{Npq}}$ s est une nouvelle variable aléatoire $\langle s\rangle = 0$ $Var(s) = 1$

↳ s est la variable centrée et réduite de K

$$P(K)\,dK \left(= Q(s)\,ds\right) = P(Np + s\sqrt{Npq})\sqrt{Npq}\,ds \Rightarrow Q(s) = P(Np + s\sqrt{Npq})\sqrt{Npq}$$

$\binom{N}{K}p^K(1-p)^{N-K}$

$K = s\sigma_K + \langle K\rangle$
$= s\sqrt{Npq} + Np$
$dK = \sigma_K ds = \sqrt{Npq}\,ds$

Objectif : montrer $Q(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{s^2}{2}}$ (car on sait) que pour $N \to \infty$ c'est ça

$$Q(s) = P(Np + s\sqrt{Npq})\sqrt{Npq} = \sqrt{Npq}\,\frac{N!\; p^{Np + s\sqrt{Npq}}\; q^{Nq - s\sqrt{Npq}}}{(Np + s\sqrt{Npq})!\,(Nq - s\sqrt{Npq})!}$$

Rappel Stirling : $N! = \sqrt{2\pi N}\left(\frac{N}{e}\right)^N \to$

$$\simeq \sqrt{Npq}\,\frac{\sqrt{2\pi N}\left(\frac{N}{\cancel{e}}\right)^N p^{Np+s\sqrt{Npq}}\, q^{Nq-s\sqrt{Npq}}}{\sqrt{2\pi(Np + s\sqrt{Npq})}\left(\frac{Np+s\sqrt{Npq}}{\cancel{e}}\right)^{Np+s\sqrt{Npq}} \cdot \sqrt{2\pi(Nq - s\sqrt{Npq})}\left(\frac{Nq - s\sqrt{Npq}}{\cancel{e}}\right)^{Nq-s\sqrt{Npq}}}$$

$Np + s\sqrt{Npq} + Nq - s\sqrt{Npq} = N$

$N^N = N^{Np + s\sqrt{Npq}}\, N^{Nq - s\sqrt{Npq}}$

$$= \sqrt{Npq}\,\frac{\sqrt{2\pi N}\,(Np)^{Np+s\sqrt{Npq}}\,(Nq)^{Nq-s\sqrt{Npq}}}{\sqrt{2\pi(Np+s\sqrt{Npq})}\,(Np+s\sqrt{Npq})^{Np+s\sqrt{Npq}} \cdot \sqrt{2\pi(Nq-s\sqrt{Npq})}\,(Nq-s\sqrt{Npq})^{Nq-s\sqrt{Npq}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{1}{\left(1+s\sqrt{\frac{q}{Np}}\right)^{Np+s\sqrt{Npq}+\frac{1}{2}}\left(1 - s\sqrt{\frac{p}{Nq}}\right)^{Nq - s\sqrt{Npq}+\frac{1}{2}}}$$

mais on néglige — mais on néglige

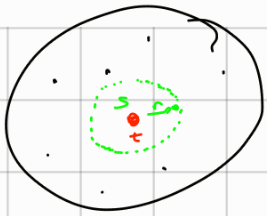
$$\ln(Q(s)) \simeq (Np + s\sqrt{Npq})\underbrace{\ln\left(1+s\sqrt{\frac{q}{Np}}\right)}_{s\sqrt{\frac{q}{Np}} - \frac{s^2 q}{2Np}} + (Nq - s\sqrt{Npq})\underbrace{\ln\left(1-s\sqrt{\frac{p}{Nq}}\right)}_{-s\sqrt{\frac{p}{Nq}} - \frac{s^2 p}{2Nq}} + \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)$$

$\ln(1+y) \simeq y - \frac{y^2}{2}$

— s'annulent

$$\ln(Q(s)) \underset{N\to\infty}{\simeq} -\frac{s^2}{2} + \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)$$

7) Distance moyenne entre deux particules sur le plan



$N \gg 1$ confinées sur un plan de surface S. $\rho = \frac{N}{S}$ densité surfacique

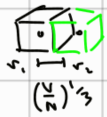
On suppose gaz parfait, positions indépendantes. On choisit particule test au centre du plan. On cherche à déterminer la distribution de probabilité de la distance entre la particule test et sa plus proche voisine.

1) 3D : OG distance d entre 2 particules : $d \sim \left(\frac{V}{N}\right)^{1/3}$

$\sim \rho^{-\frac{1}{3}}$

On divise V en N sous volumes, chaque sous-volume ne contenant qu'1 seule particule

$N r = V$



2D : $d \sim \left(\frac{S}{N}\right)^{1/2} \sim \rho^{-1/2}$

2) $s = \pi r^2$

proba 1 particule dans la surface : $\frac{s}{S}$ 1 particule dehors $1 - \frac{s}{S}$

proba toutes dehors sauf 2, $A(r) = \left(1 - \frac{s}{S}\right)^{N-2} = \left(1 - \frac{\pi r^2}{S}\right)^2$

$(N-2)$ dehors

3) Une particule soit à une distance entre r et $r+dr$ de la particule test :

$$B(r)dr = \frac{\pi(r+dr)^2 - \pi r^2}{S} \underset{dr^2 \ll dr}{=} \frac{2\pi r\,dr}{S} \rightarrow B(r) = \frac{2\pi r}{S}$$

4) $P(r)dr = (N-1)\, B(r)dr \cdot A(r) = (N-1) \frac{2\pi r}{S} \left(1 - \frac{\pi r^2}{S}\right)^{N-2} dr$

n° possibilités choix particule voisine

la particule est effectivement là

les autres sont dehors

$$= (N-1) \frac{2\pi r \rho}{N} \left(1 - \frac{\pi r^2 \rho}{N}\right)^{N-2} dr$$

$$\underset{N \to \infty}{\simeq} 2\pi r \rho\, e^{-\pi r^2 \rho}\, dr$$

$P(r) = 2\rho\pi r\, e^{-\rho\pi r^2}$

5) $\int_0^\infty r\, P(r)\, dr = 2\pi\rho \int_0^\infty r^2 e^{-\pi\rho r^2} dr = 2\pi\rho \frac{1}{4\pi\rho} \sqrt{\frac{\pi}{\pi\rho}}$

$= \frac{1}{2} \rho^{-1/2} \sim \rho^{-1/2}$ (1)