



MATH60609 - Calcul numérique en Ing. Fin. –Aut.  
2025

Groupe : J01 - 3485  
Équipe : 06

### **DEVOIR 3**

#### **Programmation dynamique et Goal-based Wealth Management**

Présenté par  
Loseke-Lokika, Omba  
Berrada, Faycal  
Haidara, Mohamed

Présenté à  
Denault Michel

Montréal, le 03 Décembre 2025

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>Expériences numériques</b>	<b>6</b>
<b>Conclusion</b>	<b>13</b>

## Introduction

Dans ce problème, on cherche à construire une stratégie d'allocation qui maximise la probabilité d'atteindre une richesse cible  $G$  à un horizon  $T$ . L'investisseur prend une décision à chaque période : il observe son niveau de richesse actuel et choisit l'un des portefeuilles disponibles. Comme la décision dépend à la fois du temps et de la richesse, il devient naturel d'utiliser une approche de programmation dynamique pour déterminer, d'avance, ce qu'il faudrait faire dans chaque situation.

Pour que ce calcul soit réalisable, on travaille sur une version discrète du problème. La richesse n'est pas considérée comme une quantité continue, mais on la projette sur une grille fixe de valeurs possibles :

$$\{W_0, \dots, W_{I_{\max}}\}$$

Cette grille ne change pas au fil du temps : à toutes les dates, on utilise exactement les mêmes points de richesse, ce qui simplifie l'analyse et rend les transitions plus faciles à calculer. De la même façon, l'investisseur ne peut pas choisir n'importe quelle combinaison d'actifs ; il dispose d'un ensemble donné de portefeuilles, chacun caractérisé par un rendement espéré  $\mu_k$  et une volatilité  $\sigma_k$ . La dynamique du problème est donc définie sur un ensemble fini d'états et un ensemble fini d'actions.

La richesse évolue selon un modèle stochastique continu, que approximée ici par une dynamique lognormale. Si, au temps  $t$ , l'investisseur détient la richesse  $W_i$  et choisit le portefeuille  $k$ , alors sa richesse future  $W(t+1)$  est modélisée par une loi log-normale. La densité conditionnelle du niveau futur  $W_j(t+1)$  s'écrit :

$$\tilde{p}(W_j(t+1) \mid W_i(t), \mu_k) = \phi \left( \frac{\ln \left( \frac{W_j}{W_i + C(t)} \right) - \left( \mu_k - \frac{\sigma_k^2}{2} \right)}{\sigma_k} \right)$$

où  $C(t)$  correspond à un apport ou un retrait, et  $\phi$  est la densité de la loi normale. Cette expression donne une densité continue ; pour rester dans notre cadre discret, on la projette sur la grille puis on normalise pour obtenir les probabilités de transition :

$$p(W_j(t+1) | W_i(t), \mu) = \frac{\tilde{p}(W_j(t+1) | W_i(t), \mu)}{\sum_{k=0}^{i_{\max}} \tilde{p}(W_k(t+1) | W_i(t), \mu)}$$

$$p_{ij}(k) = \mathbb{P}(W(t+1) = W_j | W(t) = W_i, k)$$

L'objectif est de choisir à chaque période le portefeuille qui maximise les chances d'atteindre la cible. On introduit donc une fonction de valeur  $V(W_i, t)$  définie comme la probabilité maximale d'avoir au moins  $G$  à l'horizon en partant de l'état  $(W_i, t)$ . À la dernière période, cette fonction est parfaitement déterminée :

$$V(W_i, T) = \begin{cases} 1, & \text{si } W_i \geq G, \\ 0, & \text{si } W_i < G \end{cases}.$$

À partir de cette condition terminale, on remonte le temps en utilisant l'équation de Bellman. Si l'on connaît  $V(\cdot, t+1)$ , choisir un portefeuille  $k$  lorsqu'on possède  $W_i$  au temps  $t$  mène à la probabilité :

$$\text{Score}(W_i, t, k) = \sum_j p_{ij}(k) V(W_j, t+1)$$

La meilleure décision consiste donc à prendre le portefeuille qui maximise ce score :

$$V(W_i, t) = \max_k \sum_j p_{ij}(k) V(W_j, t+1)$$

et la politique optimale s'obtient en prenant l'argument du maximum :

$$\pi^*(W_i, t) = \arg \max_k \sum_j p_{ij}(k) V(W_j, t+1)$$

Une fois cette politique entièrement déterminée, on peut simuler ou propager sa conséquence dans le temps. En partant d'une distribution initiale concentrée en la richesse de départ, on fait avancer la distribution de la richesse année par année selon :

$$P_{t+1}(W_j) = \sum_i P_t(W_i) p_{ij}(\pi^*(W_i, t))$$

Cela permet d'analyser ce que la stratégie optimale produit réellement : comment la richesse se répartit au fil des années, quelles sont les chances d'atteindre différents niveaux intermédiaires, comment se déplace la médiane, ou encore comment évoluent les queues de distribution.

Ainsi, toute la méthode repose sur une idée simple : transformer un problème continu difficile en un modèle discret parfaitement manipulable. Les probabilités de transition décrivent comment la richesse évolue d'un point de la grille à un autre, la programmation dynamique permet d'identifier la meilleure décision à chaque étape, et la propagation forward montre concrètement ce que cette décision implique. L'ensemble nous donne une approche intuitive, robuste et transparente pour analyser une stratégie d'investissement orientée vers l'atteinte d'un objectif donné.

## Expériences numériques

### Test A – Effet de la granularité de la grille de richesse

Dans un premier temps, nous étudions l'effet du nombre de points de la grille  $n_w$  sur les résultats du modèle. A partir du cas de référence - richesse initiale  $W_0$ , cible  $G = 200$ , horizon  $T = 10$  et paramètre  $n_s = 3$  - nous faisons varier la  $n_w$  entre 50 et 500, tout en conservant inchangés les portefeuilles de la frontière efficiente et le modèle de dynamique de la richesse.

**Tableau 1 - Effet du nombre de points  $n_w$  sur la probabilité des résultats en échantillon d'atteindre la cible  $G$**

Valeur de $n_w$	Temps d'exécution (s)	$\Pr [W(T) \geq G = 200]$
50	0,05	0,670
100	0,04	0,671
200*	0,06	0,670
300	0,09	0,670
400	0,11	0,670
500	0,15	0,670

**Tableau 2 - Effet du nombre de points  $n_w$  sur la probabilité des résultats hors - échantillon d'atteindre la cible  $G$**

Valeur de $n_w$	Temps de Programmation Dynamique (s)	$\Pr [W(T) \geq G = 200]$	IC 95 %
50	0,05	0,663	[0.654, 0.672]
100	0,04	0,671	[0.662, 0.680]
200*	0,06	0,672	[0.663, 0.681]
300	0,09	0,673	[0.664, 0.682]
400	0,11	0,672	[0.663, 0.681]
500	0,15	0,672	[0.663, 0.681]

La probabilité optimale d'atteindre la cible reste très stable lorsque l'on modifie la granularité de la grille : les variations des résultats en échantillons et des résultats hors échantillon sont de l'ordre de quelques millièmes.

En revanche, le temps de calcul de la programmation dynamique augmente nettement avec la granularité de la grille. Empiriquement, il passe d'environ **0,05 s** lorsque  $n_w = 50$  à environ **0,15 s** lorsque  $n_w = 500$ , soit une augmentation d'un **facteur d'environ 3**. Cette évolution correspond à ce que l'on attend théoriquement : comme la programmation dynamique requiert de multiplier des matrices de taille  $n_w \times n_w$ , la complexité est **en ordre de grandeur proportionnelle à  $n_w^2$** . Autrement dit, **décupler** la taille de la grille augmente typiquement le temps de calcul par un facteur **d'environ  $10^2 = 100$** , tandis que **doubler  $n_w$**  conduit en moyenne à un temps multiplié par **environ 4**.

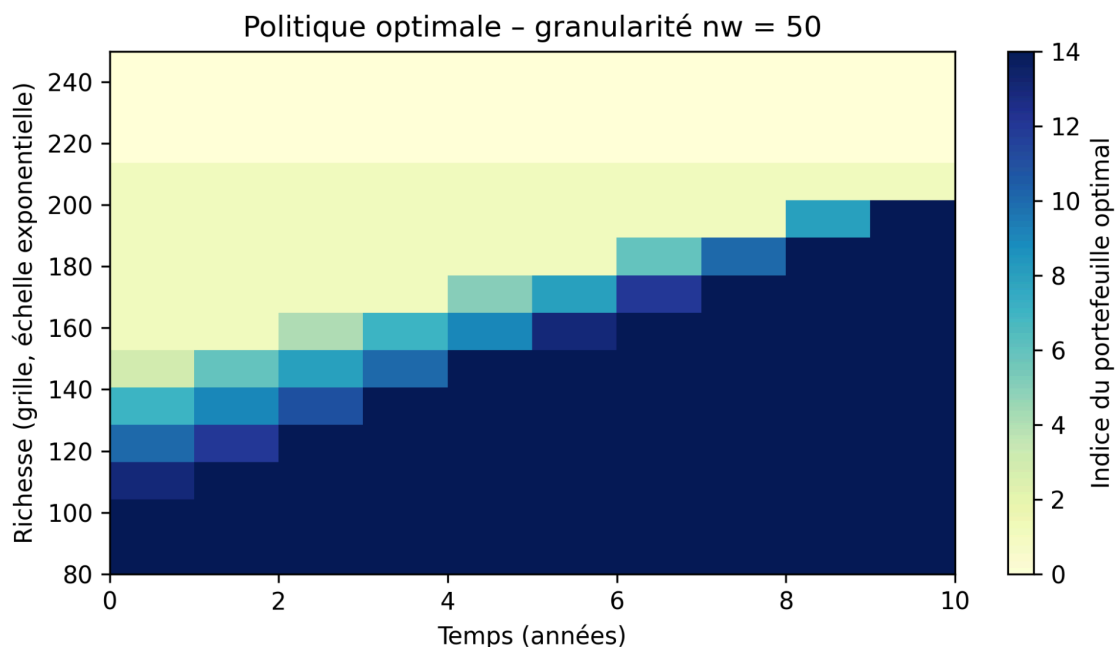
L'analyse visuelle des politiques optimales confirme également l'effet de la granularité de la grille. La Figure 1 (grille grossière,  $n_w=50$ ) présente une surface de décision assez irrégulière, avec des transitions abruptes entre portefeuilles risqués et prudents. Ces discontinuités proviennent uniquement de

la faible résolution de la grille. À l'inverse, la Figure 2 (grille fine, de  $n_w=500$ ) révèle une frontière bien plus lisse : lorsque la richesse est faible, la stratégie privilégie systématiquement les portefeuilles plus risqués (teintes sombres), tandis qu'une richesse élevée conduit à des choix plus prudents (teintes claires). Ce comportement est exactement celui décrit dans l'article de Das et al. (2020) : augmenter le risque lorsque l'on est "en retard" et le réduire lorsque l'on est "en avance" par rapport à l'objectif.

Ainsi, une grille plus fine améliore donc principalement la **qualité visuelle et la stabilité** de la politique optimale, mais n'apporte presque **aucune amélioration probabiliste**.

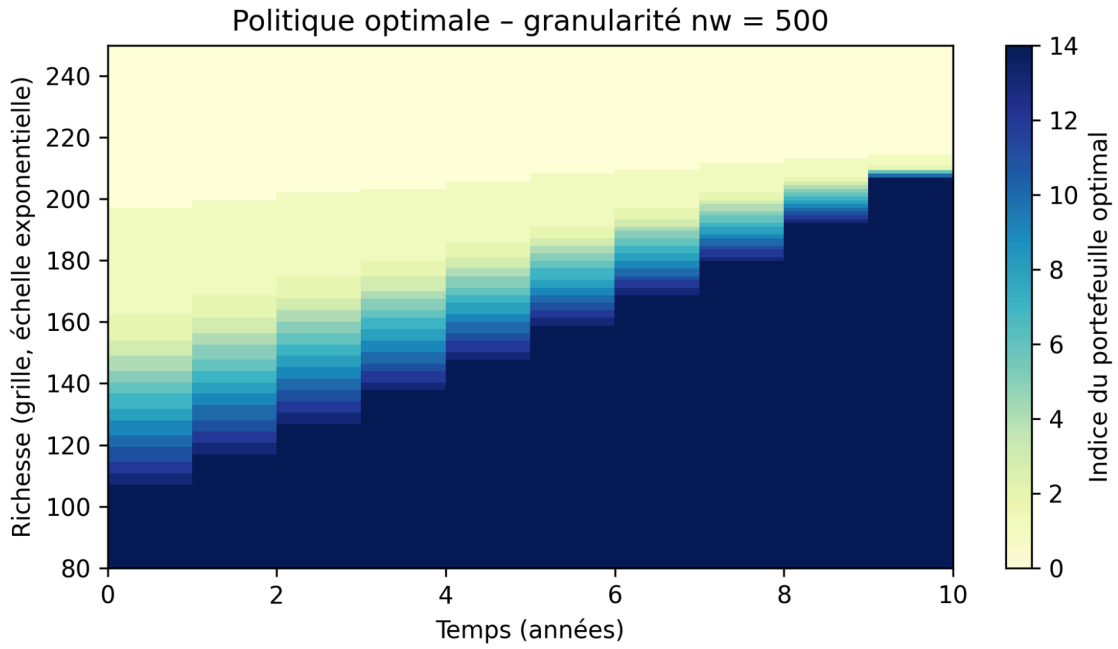
Étant donné que la probabilité d'atteindre la cible reste presque identique dès  $n_w = 50$ , augmenter exagérément la granularité ne procure pas de bénéfice substantiel et **augmente inutilement le temps de calcul**.

**Figure 1 -Politique optimale pour une grille de 50 points**





**Figure 2-Politique optimale pour une grille de 500 points**



### Test B –Effet du paramètre $n_s$ (nombre d'écarts-types)

Dans ce second test, nous analysons l'effet du paramètre  $n_s$ , qui contrôle l'amplitude de la grille de richesse. Plus précisément, le minimum et le maximum de la grille sont donnés par :

$$W_{\min} = W_0 e^{(\mu_{\min} - \frac{1}{2}\sigma_{\max}^2)T - n_s\sigma_{\max}\sqrt{T}},$$

$$W_{\max} = W_0 e^{(\mu_{\max} - \frac{1}{2}\sigma_{\max}^2)T + n_s\sigma_{\max}\sqrt{T}}$$

Ainsi, augmenter  $n_s$  considérablement la plage de richesses représentées dans le modèle. Nous faisons varier  $n_s \in \{1, \dots, 5\}$  tout en conservant une granularité fixe  $n_w = 200$ , et les portefeuilles efficients construits précédemment.

**Tableau 3 - Effet du nombre de points  $n_w$  sur les probabilités et les temps d'exécution**

$n_s$	Temps de Programmation Dynamique (s)	$W_{\min}$	$W_{\max}$	$P_{IS}$	$P_{OOS}$
1	0.07	74.1	371.8	0.718	0.670
2	0.07	39.6	694.9	0.670	0.673
3	0.05	21.2	1300.9	0.670	0.672
4	0.05	11.3	2426.5	0.670	0.671
5	0.04	6.0	4489.7	0.670	0.6710

**Note:** PIS : résultat dans l'échantillons et POOS: résultat hors échantillons

Les résultats numériques montrent que la probabilité d'atteindre la cible est remarquablement stable dès que la largeur de la grille est suffisante. Pour toutes les valeurs  $n_s \geq 2$  : les probabilités in-sample et hors-échantillon restent très proches de 0,67, avec des intervalles de confiance pratiquement identiques. Le seul cas atypique est celui où  $n_s = 1$  : la grille y est trop étroite, les niveaux de richesse élevés ne sont pas représentés, et la probabilité in-sample atteint artificiellement 0,718. Cette surestimation confirme qu'une grille trop restreinte ne permet pas de capturer correctement les trajectoires extrêmes du processus log-normal.

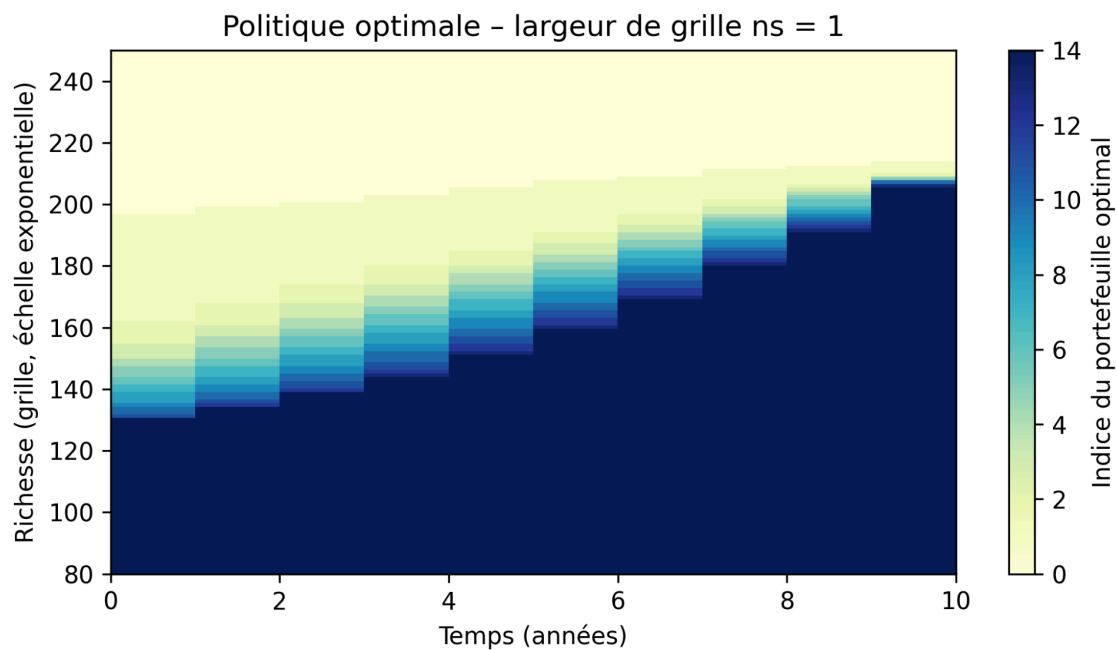
Les heatmaps illustrent également cet effet. La Figure 3 (cas  $n_s = 1$ ) montre une frontière de décision tronquée : la stratégie devient prudente beaucoup trop tôt, simplement parce que la grille ne couvre pas les richesses élevées. À l'inverse, la Figure 4 (cas  $n_s = 3$  référence) présente une structure de décision régulière et cohérente : les portefeuilles risqués sont privilégiés lorsque la richesse est faible, puis la stratégie devient progressivement plus prudente lorsque la richesse augmente.

Enfin, la Figure 5 (cas  $n_s = 8$ ) élargit fortement l'axe vertical, mais la politique dans la zone pertinente (proche de la richesse initiale) reste presque

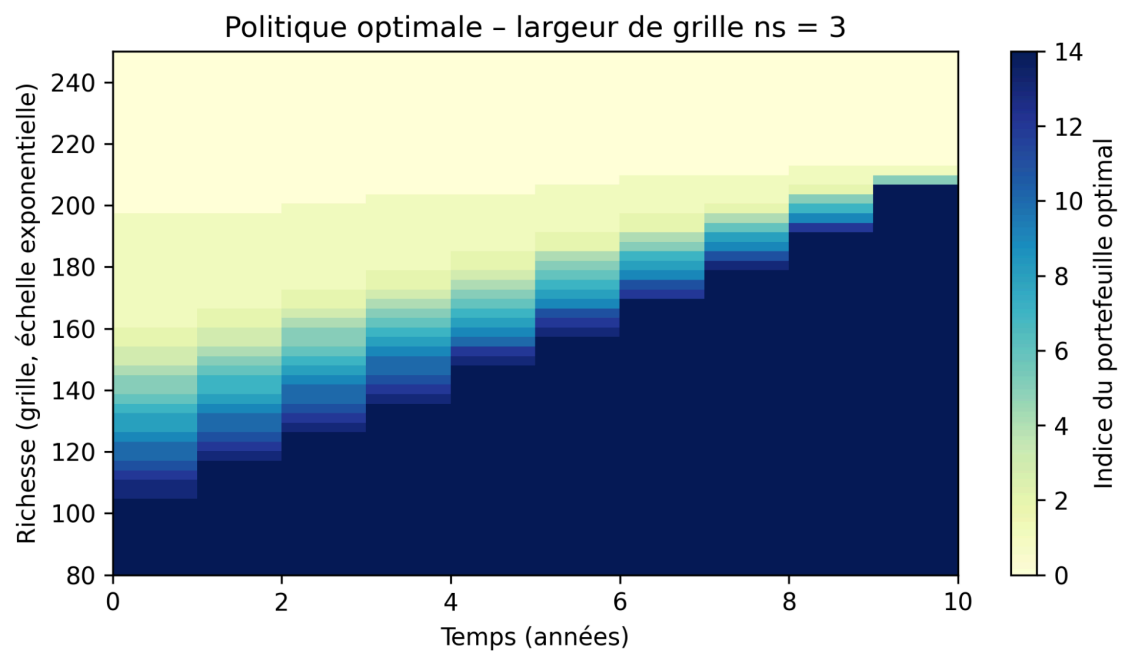
identique à celle du cas de référence, ce qui montre que la stratégie optimale est robuste même lorsque la grille couvre des valeurs extrêmes peu probables.

En résumé, une valeur trop faible de  $n_s$  produit une grille inadéquate et peut biaiser les résultats, tandis que des valeurs trop élevées modifient surtout l'échelle graphique sans améliorer la stratégie optimale ni les probabilités de succès. Une valeur intermédiaire comme  $n_s = 3$  constitue donc un choix approprié et suffisant pour ce modèle.

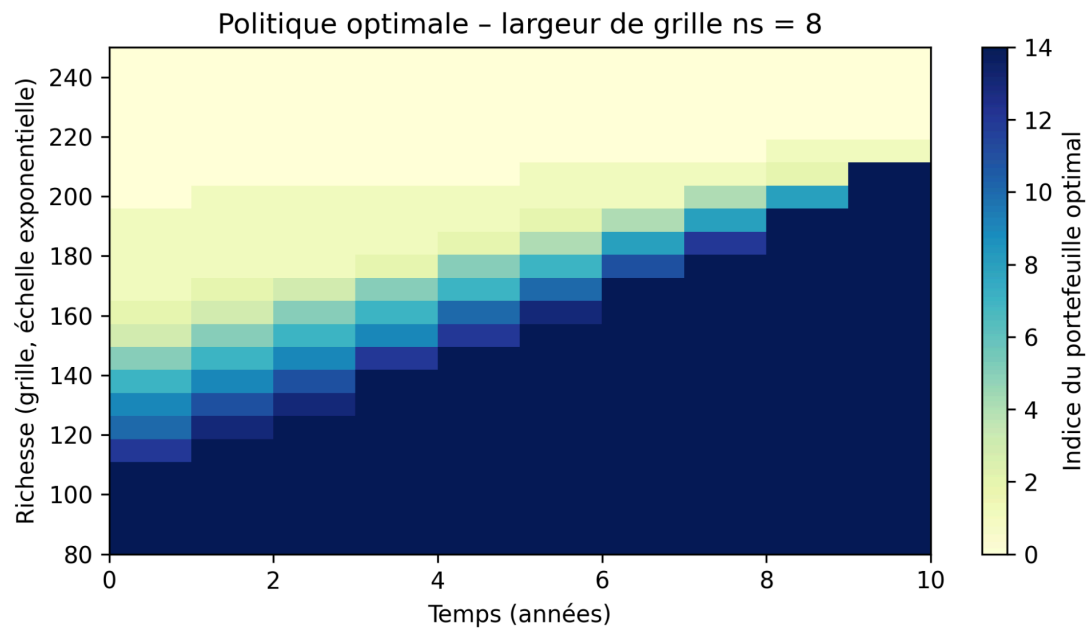
**Figure 3 -Politique optimale pour un écart type de 1**



**Figure 4-Politique optimale pour un écart type de 3**



**Figure 5 Politique optimale pour un écart type de 8**



## Conclusion

Dans ce travail, nous avons développé et analysé une stratégie d'allocation dynamique visant à maximiser la probabilité d'atteindre une richesse cible à un horizon donné. Pour rendre le problème calculable, nous avons discrétisé la richesse sur une grille fixe et appliqué une programmation dynamique rétrograde, en utilisant un ensemble de portefeuilles situés sur la frontière efficiente.

Les expériences numériques ont permis d'étudier en détail l'impact des paramètres de discrétisation - la granularité de la grille  $n_w$  et son amplitude via le paramètre  $n_s$  - sur les résultats obtenus.

Le **Test A** a montré que la probabilité d'atteindre la cible est remarquablement stable, même lorsque l'on augmente fortement le nombre de points de la grille. En revanche, le temps de calcul croît sensiblement avec  $n_w$ , sans bénéfice notable sur la précision probabiliste. Les heatmaps révèlent toutefois une amélioration visuelle et une plus grande régularité des politiques lorsque la grille est fine.

Le **Test B** a mis en évidence qu'une grille trop étroite ( $n_s = 1$ ) conduit à une représentation inadéquate de la richesse, faussant la politique optimale et surestimant la probabilité d'atteindre la cible. À l'inverse, une très grande amplitudes ( $n_s \geq 6$ ) augmente seulement l'échelle graphique sans changer la stratégie ni les probabilités. Une valeur intermédiaire, comme  $n_s = 3$  apparaît donc suffisante et appropriée.

Dans l'ensemble, l'étude confirme que la stratégie optimale retrouve exactement le comportement attendu en gestion orientée-objectif : **prendre davantage de risque lorsque la richesse est insuffisante et sécuriser le portefeuille lorsque l'objectif est à portée**. Le modèle est robuste aux variations raisonnables des paramètres de discrétisation, ce qui valide la pertinence de l'approche retenue.

## Références

**Das, S. R., Ostrov, D., Radhakrishnan, A., & Srivastav, D. (2020).**  
*Dynamic portfolio allocation in goals-based wealth management. Computational Management Science*, 17, 613–640. <https://doi.org/10.1007/s10287-019-00351-7>

# Utilisation de l'intelligence artificielle

1. Utilisation de chatgpt pour expliquer le fonctionnement des librairies python.
2. Utilisation de chatgpt pour corriger et mettre des titres dans le code au propre.
3. Utilisation de chatgpt pour raffiner les graphique produit par le code, incluent format du texte, couleur, présentation en générale

## Répartition du travail

Nom	Répartition
Berrada, Faycal	1/3
Loseke-Lokika, Omba	1/3
Haidara, Mohamed	1/3