Rudis indigestaque moles, ou (ru)bric-à-brac mathématique

Lionel VIDAL

1. Les trois deux. Comment représenter un nombre entier strictement positif quelconque avec seulement trois 2 et des symboles mathématiques ?

On écrit cet entier N sous la forme :

$$\mathrm{N} = -\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt{\ldots \sqrt{2}}}$$

où le nombre de radicaux est égal au nombre entier voulu ! Une démonstration de cette formule serait à demander à un lycéen pour vérifier sa maîtrise des règles de calcul sur les logarithmes...

2. Question très bête. Quel est le triangle qui a la plus grande aire : celui de côtés 5, 5, 6 ou celui de côtés 5, 5, 8 ?

3. C'est sûrement vrai, j'ai fait de (très) nombreux tests. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les nombres $n^{17} + 9$ et $(n+1)^{17} + 9$ sont premiers entre eux... ou pas ! Le premier contre-exemple [1] n'apparait que pour :

$$n = 8424432925592889329288197322308900672459420460792433\,.$$

4. Citation. Attribuée à Lipman Bers, sur mon objet mathématique préféré :

> *God, if She exists, created the natural numbers* $\{0, 1, 2, \ldots\}$*, and compact Riemann surfaces. The rest of mathematics is man made.*

5. Citation. Jugement définitif de Robert A. Heinlein, qui montre que les auteurs de science-fiction ont une vision souvent très claire des mathématiques :

> *Anyone who cannot cope with mathematics is not fully human. At best, he is a tolerable subhuman who has learned to wear his shoes, bathe, and not make messes in the house.*

6. Un problème renversant. On fixe un point I sur une sphère $\mathrm{S}(\mathrm{O}, r)$ de l'espace affine de dimension 3, et on considère l'ensemble des tétraèdres IABC inscrits dans la sphère et tri-rectangles en I. On demande [2] le lieu du centre de gravité G des triangles variables ABC...

En analytique, c'est cauchemardesque, mais c'est très simple si on pense à renverser le point de vue pour regarder la sphère depuis le fauteuil variable du repère orthonormé centré en I, qui suit les arêtes du tétraèdre.

Dans ce repère, on a $\mathrm{A}(\alpha, 0, 0)$, $\mathrm{B}(0, \beta, 0)$, $\mathrm{C}(0, 0, \gamma)$, où α, β et γ sont trois réels. On a donc $\mathrm{G}(\alpha/3, \beta/3, \gamma/3)$, et comme O est à l'intersection des trois plans médiateurs des segments [IA], [IB] et [IC], on a aussi $\mathrm{O}(\alpha/2, \beta/2, \gamma/2)$. Mais I et O sont fixes, donc G est fixe !

7. La suite des anciens. Moins de cinquante ans, passez votre chemin... Il s'agit de déterminer les nombres suivants de la suite :

$$6; \quad 2; \quad 5; \quad 5; \quad 4; \quad 5; \quad 6; \quad 3; \quad ?$$

Impossible à trouver, mais sentant bon la nostalgie technologique : pensez au nombre de segments utilisés par un affichage électronique, en commençant par 0...

1. Voir le livre, *Merveilleux nombres premiers*, de J.-P. Delahaye.
2. Problème lu dans l'excellent polycopié, *Compléments de géométrie*, de J.-M. Exbrayat.

8. 6accdæ13eff7i3l9n4o4qrr4s8t12ux. Ou comment cacher pour un temps une découverte importante tout en assurant la paternité. Isaac Newton (1642-1727) dissimule son travail sur les équations différentielles dans cette anagramme célèbre qui se lit (avec une erreur sur le nombre de t !) :

> *Data æquatione quotcunque fluentes quantitates involvente fluxiones invenire et vice versa.*

Une traduction libre en termes modernes pourrait en être : *les lois naturelles s'expriment par des équations différentielles.* [3]

9. Célèbre note marginale. Trois cent cinquante ans de recherches, de Pierre de Fermat à Andrew Wiles, pour une marge trop étroite !

> *Cubum autem in duos cubos, aut quadrato quadratum in duos quadrato quadratos, et generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duos ejusdem nominis fas est dividere ; cujus rei demonstrationem mirabile sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.*

10. L'énorme marteau et le petit moucheron. Démontrer que 56 n'est pas un cube ? Trop facile : $56 = 4^3 - 2^3$, et donc 56 ne peut être un cube d'après le dernier théorème de Fermat ! [4]

11. Somme de cubes et carré de somme. On peut être surpris par la très jolie égalité :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2 .$$

Mais sa généralisation [5] à $\tau(n)$, nombre de diviseurs positifs de n, est incroyable :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{d|n} \tau(d)^3 = \left(\sum_{d|n} \tau(d) \right)^2 .$$

3. Voir l'introduction du remarquable livre, *Équations différentielles ordinaires*, de V. Arnold.
4. Cela n'est valide que depuis 1995 et la démonstration de A. Wiles !
5. Attribuée à J. Liouville.