**Rudis indigestaque moles, ou (ru)bric-à-brac mathématique**

Lionel VIDAL

**1. Les trois deux.** Comment représenter un nombre entier strictement positif quelconque avec seulement trois 2 et des symboles mathématiques ?

On écrit cet entier N sous la forme :

$$\mathrm{N} = -\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt{\dots\sqrt{2}}}$$

où le nombre de radicaux est égal au nombre entier voulu ! Une démonstration de cette formule serait à demander à un lycéen pour vérifier sa maîtrise des règles de calcul sur les logarithmes…

**2. Question très bête.** Quel est le triangle qui a la plus grande aire : celui de côtés 5, 5, 6 ou celui de côtés 5, 5, 8 ?

**3. C'est sûrement vrai, j'ai fait de (très) nombreux tests.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les nombres $n^{17}+9$ et $(n+1)^{17}+9$ sont premiers entre eux... ou pas ! Le premier contre-exemple [1] n'apparait que pour :

$$n = 8424432925592889329288197322308900672459420460792433\,.$$

**4. Citation.** Attribuée à Lipman Bers, sur mon objet mathématique préféré :

> *God, if She exists, created the natural numbers* $\{0,1,2,\dots\}$*, and compact Riemann surfaces. The rest of mathematics is man made.*

**5. Citation.** Jugement définitif de Robert A. Heinlein, qui montre que les auteurs de science-fiction ont une vision souvent très claire des mathématiques :

> *Anyone who cannot cope with mathematics is not fully human. At best, he is a tolerable subhuman who has learned to wear his shoes, bathe, and not make messes in the house.*

**6. Un problème renversant.** On fixe un point I sur une sphère $\mathrm{S}(\mathrm{O}, r)$ de l'espace affine de dimension 3, et on considère l'ensemble des tétraèdres IABC inscrits dans la sphère et tri-rectangles en I. On demande [2] le lieu du centre de gravité G des triangles variables ABC…

En analytique, c'est cauchemardesque, mais c'est très simple si on pense à renverser le point de vue pour regarder la sphère depuis le fauteuil variable du repère orthonormé centré en I, qui suit les arêtes du tétraèdre.

Dans ce repère, on a $\mathrm{A}(\alpha,0,0)$, $\mathrm{B}(0,\beta,0)$, $\mathrm{C}(0,0,\gamma)$, où $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ sont trois réels. On a donc $\mathrm{G}(\alpha/3,\beta/3,\gamma/3)$, et comme O est à l'intersection des trois plans médiateurs des segments [IA], [IB] et [IC], on a aussi $\mathrm{O}(\alpha/2,\beta/2,\gamma/2)$. Mais I et O sont fixes, donc G est fixe !

**7. La suite des anciens.** Moins de cinquante ans, passez votre chemin… Il s'agit de déterminer les nombres suivants de la suite :

$$6;\quad 2;\quad 5;\quad 5;\quad 4;\quad 5;\quad 6;\quad 3;\quad ?$$

Impossible à trouver, mais sentant bon la nostalgie technologique : pensez au nombre de segments utilisés par un affichage électronique, en commençant par 0…

1. Voir le livre, *Merveilleux nombres premiers*, de J.-P. Delahaye.
2. Problème lu dans l'excellent polycopié, *Compléments de géométrie*, de J.-M. Exbrayat.

**8. 6accdæ13eff7i3l9n4o4qrr4s8t12ux.** Ou comment cacher pour un temps une découverte importante tout en assurant la paternité. Isaac Newton (1642-1727) dissimule son travail sur les équations différentielles dans cette anagramme célèbre qui se lit (avec une erreur sur le nombre de $t$ !) :

> *Data æquatione quotcunque fluentes quantitates involvente fluxiones invenire et vice versa.*

Une traduction libre en termes modernes pourrait en être : *les lois naturelles s'expriment par des équations différentielles.* [3]

**9. Célèbre note marginale.** Trois cent cinquante ans de recherches, de Pierre de Fermat à Andrew Wiles, pour une marge trop étroite !

> *Cubum autem in duos cubos, aut quadrato quadratum in duos quadrato quadratos, et generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duos ejusdem nominis fas est dividere ; cujus rei demonstrationem mirabile sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.*

**10. L'énorme marteau et le petit moucheron.** Démontrer que 56 n'est pas un cube ? Trop facile : $56 = 4^3 - 2^3$, et donc 56 ne peut être un cube d'après le dernier théorème de Fermat !

**11. Somme de cubes et carré de somme.** On peut être surpris par la très jolie égalité :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2 .$$

Mais sa généralisation [4] à $\tau(n)$, nombre de diviseurs positifs de $n$, est incroyable :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{d|n} \tau(d)^3 = \left( \sum_{d|n} \tau(d) \right)^2 .$$

3. Voir l'introduction du remarquable livre, *Équations différentielles ordinaires*, de V. Arnold.
4. Attribuée à J. Liouville.