Irrationalité et récurrence

Lionel Vidal

L'irrationalité, un phénomène aujourd'hui récurrent ? Certainement. Mais dans cette courte note, on démontre seulement avec des moyens très élémentaires l'irrationalité de π^2 en utilisant une suite récurrente. [1]

Soit la suite d'intégrales définies pour tout entier $n \geqslant 0$:

$$\mathrm{I}_n = \int_0^\pi f_n(x)\sin(x)\,dx\,, \quad \text{où} \quad f_n(x) = \frac{(\pi x - x^2)^n}{n!}.$$

Remarquons que pour tout $x \in\,]0;\pi[$, $f_n(x) > 0$, et donc que pour tout $n \geqslant 0$, $\mathrm{I}_n > 0$.
On calcule facilement :

$$\mathrm{I}_0 = \int_0^\pi \sin(x)\,dx = 2\,, \quad \text{et}$$

$$\mathrm{I}_1 = \int_0^\pi (\pi x - x^2)\sin(x)\,dx = \int_0^\pi (\pi - 2x)\cos(x)\,dx = \int_0^\pi 2\sin(x)\,dx = 4.$$

Puis, pour tout $n \geqslant 2$:

$$\begin{aligned}
f_n'(x) &= \frac{(\pi - 2x)(\pi x - x^2)^{n-1}}{(n-1)!}\,, \quad \text{et}\\
f_n''(x) &= \frac{-2(\pi x - x^2)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{(\pi - 2x)^2(\pi x - x^2)^{n-2}}{(n-2)!}\\
&= \frac{-2(\pi x - x^2)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{\pi^2(\pi x - x^2)^{n-2}}{(n-2)!} + \frac{(-4\pi x + 4x^2)(\pi x - x^2)^{n-2}}{(n-2)!}\\
&= (-4n+2)\frac{(\pi x - x^2)^{n-1}}{(n-1)!} + \pi^2\frac{(\pi x - x^2)^{n-2}}{(n-2)!}.
\end{aligned}$$

Et enfin, pour tout $n \geqslant 2$, en intégrant deux fois par partie :

$$\mathrm{I}_n = -\int_0^\pi f_n''(x)\sin(x)\,dx = (4n-2)\,\mathrm{I}_{n-1} - \pi^2\,\mathrm{I}_{n-2}.$$

Par une récurrence élémentaire, on en déduit que pout tout $n \geqslant 0$, I_n est un polynôme en π^2 à coefficients entiers, de degré au plus $\mathrm{E}(n/2)$.

Supposons maintenant que $\pi^2 = p/q$, avec p et q entiers naturels non nuls. Alors $q^{\mathrm{E}(n/2)}\mathrm{I}_n$ est un entier naturel non nul. Mais pour tout $x \in\,]0;\pi[$,

$$f_n(x) < \frac{(\pi^2)^n}{n!}\,\text{,et donc : } q^{\mathrm{E}(n/2)}\mathrm{I}_n \leqslant q^n \int_0^\pi \frac{(\pi^2)^n}{n!}\,dx = \pi\frac{(q\pi^2)^n}{n!}.$$

On en déduit que $q^{\mathrm{E}(n/2)}\mathrm{I}_n \to 0$, quand $n \to \infty$, ce qui est impossible. Donc π^2 est irrationnel.

1. En suivant une idée de L. Zhou and L. Markov : *Recurrent Proofs of the Irrationality of Certain Trigonometric Values.*