Les surprises du sinus cardinal

Lionel VIDAL

Où une remarquable suite d'intégrales de sinus cardinaux [1] peut inciter, au mépris de toute prudence mathématique, à généraliser hâtivement.

1. Une suite peu commune. On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction continue, dite sinus cardinal, par :

$$\operatorname{sinc}(x) := \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{si } x \neq 0\,; \\ 1, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Un logiciel de calcul formel donne alors :

$$\int_0^\infty \operatorname{sinc}(x)\,dx = \frac{\pi}{2}\,,$$
$$\int_0^\infty \operatorname{sinc}(x)\operatorname{sinc}\left(\frac{x}{3}\right)\,dx = \frac{\pi}{2}\,,$$
$$\int_0^\infty \operatorname{sinc}(x)\operatorname{sinc}\left(\frac{x}{3}\right)\operatorname{sinc}\left(\frac{x}{5}\right)\,dx = \frac{\pi}{2}\,,$$
$$\vdots$$
$$\int_0^\infty \operatorname{sinc}(x)\operatorname{sinc}\left(\frac{x}{3}\right)\operatorname{sinc}\left(\frac{x}{5}\right)\dots\operatorname{sinc}\left(\frac{x}{13}\right)\,dx = \frac{\pi}{2}\,,$$

La valeur constante est déjà très remarquable, mais le plus extraordinaire est à venir :

$$\int_0^\infty \operatorname{sinc}(x)\operatorname{sinc}\left(\frac{x}{3}\right)\operatorname{sinc}\left(\frac{x}{5}\right)\dots\operatorname{sinc}\left(\frac{x}{15}\right)\,dx = \frac{467807924713440738696537864469}{935615849440640907310521750000}\pi\,.$$

Il semble que le logiciel ait un sérieux *bug*... Sinon, comment expliquer une valeur aussi inattendue ?

2. Préliminaires. Soient a_0, a_1, ..., a_n des nombres réels, avec $n \geqslant 1$. Pour chacun des 2^n n-uplets $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \{-1; 1\}^n$, on définit :

$$b_\gamma := a_0 + \sum_{k=1}^n \gamma_k\, a_k\,, \quad \text{et} \quad \epsilon_\gamma := \prod_{k=1}^n \gamma_k\,.$$

Par simple développement de produit, on remarque alors que :

$$e^{a_0 x}\prod_{k=1}^n (e^{a_k x} - e^{-a_k x}) = \sum_\gamma \epsilon_\gamma\, e^{b_\gamma x}\,.$$

Mais d'une part, quand x tend vers 0, on a :

$$e^{a_0 x} = 1 + \mathrm{O}(x)\,, \quad \text{et} \quad e^{a_k x} - e^{-a_k x} = 2a_k x + \mathrm{O}(x^2)\,;$$

et donc :

$$e^{a_0 x}\prod_{k=1}^n (e^{a_k x} - e^{-a_k x}) = 2^n\left(\prod_{k=1}^n a_k\right)x^n + \mathrm{O}(x^{n+1})\,.$$

1. Voir l'article : *Some Remarkable Properties of Sinc and Related Integrals*, de D. Borwein et J. M. Borwein, dont on suit ici une partie des développements.

D'autre part, toujours quand x tend vers 0, on a :

$$\sum_\gamma \epsilon_\gamma\, e^{b_\gamma x} = \Big(\sum_\gamma \epsilon_\gamma\Big) + \Big(\sum_\gamma \epsilon_\gamma\, b_\gamma\Big)\frac{x}{1!} + \ldots + \Big(\sum_\gamma \epsilon_\gamma\, b_\gamma^n\Big)\frac{x^n}{n!} + \mathrm{O}(x^{n+1})\,.$$

D'où, par identification des coefficients :

$$\sum_\gamma \epsilon_\gamma\, b_\gamma^r = \begin{cases} 0\,, & \text{pour } r = 0, \ldots, n-1\,; \\ 2^n\, n! \displaystyle\prod_{k=1}^n a_k\,, & \text{pour } r = n. \end{cases} \tag{1}$$

En utilisant la même remarque que précédemment, on a aussi :

$$\begin{aligned} \prod_{k=0}^n \sin(a_k x) &= \frac{1}{(2i)^{n+1}}(e^{ia_0 x} - e^{-ia_0 x}) \prod_{k=1}^n (e^{ia_k x} - e^{-ia_k x}) \\ &= \frac{1}{(2i)^{n+1}} \sum_\gamma \epsilon_\gamma (e^{ib_\gamma x} - (-1)^n e^{-ib_\gamma x}) \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} e^{-i(n+1)\frac{\pi}{2}} \sum_\gamma \epsilon_\gamma (e^{ib_\gamma x} + e^{-i(b_\gamma x - (n+1)\pi)}) \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_\gamma \epsilon_\gamma (e^{i(b_\gamma x - (n+1)\frac{\pi}{2})} + e^{-i(b_\gamma x - (n+1)\frac{\pi}{2})})\,, \end{aligned}$$

et donc finalement :

$$\prod_{k=0}^n \sin(a_k x) = \frac{1}{2^n} \sum_\gamma \epsilon_\gamma \cos\Big(b_\gamma x - (n+1)\frac{\pi}{2}\Big)\,. \tag{2}$$

3. Intégration. Maintenant que l'on sait, grâce à (2), transformer un produit de sinus en somme, on peut s'essayer à son intégration ! On écrit :

$$\int_0^\infty \prod_{k=0}^n \frac{\sin(a_k x)}{x}\, dx = \frac{1}{2^n} \int_0^\infty \frac{1}{x^{n+1}} \mathrm{C}_n(x)\, dx\,, \quad \text{où} \quad \mathrm{C}_n(x) := \sum_\gamma \epsilon_\gamma \cos\Big(b_\gamma x - (n+1)\frac{\pi}{2}\Big)\,.$$

La fonction C_n est entière, bornée sur $\mathbb{R}$, et admet un zéro d'ordre $n+1$ en $x = 0$. On peut donc intégrer n fois par parties le membre de droite de la dernière égalité en garantissant la convergence des intégrales successives :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{1}{x^{n+1}} \mathrm{C}_n(x)\, dx &= -\int_0^\infty -\frac{1}{nx^n} \Bigg(\sum_\gamma -\epsilon_\gamma\, b_\gamma \sin\Big(b_\gamma x - (n+1)\frac{\pi}{2}\Big)\Bigg)\, dx \\ &= \frac{1}{n} \int_0^\infty \frac{1}{x^n} \Bigg(\sum_\gamma \epsilon_\gamma\, b_\gamma \cos\Big(b_\gamma x - n\frac{\pi}{2}\Big)\Bigg)\, dx \\ &= \frac{1}{n} \int_0^\infty \frac{1}{x^n} \mathrm{C}_{n-1}(x)\, dx \\ &\vdots \\ &= \frac{1}{n!} \int_0^\infty \frac{1}{x} \mathrm{C}_0(x)\, dx \\ &= \frac{1}{n!} \int_0^\infty \frac{1}{x} \Bigg(\sum_\gamma \epsilon_\gamma\, b_\gamma^n \cos\Big(b_\gamma x - \frac{\pi}{2}\Big)\Bigg)\, dx \\ &= \frac{1}{n!} \sum_\gamma \epsilon_\gamma\, b_\gamma^n \int_0^\infty \frac{\sin(b_\gamma x)}{x}\, dx\,. \end{aligned}$$

On suppose connu le résultat classique :

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\,, \quad \text{d'où} \quad \int_0^\infty \frac{\sin(b_\gamma x)}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{sign}(b_\gamma)\,,$$

où la fonction sign est définie par :

$$\mathrm{sign}(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

D'où finalement la jolie formule :

$$\left(\prod_{k=0}^{n} a_k\right) \int_0^\infty \prod_{k=0}^{n} \mathrm{sinc}(a_k x)\,dx = \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{2^n n!} \sum_\gamma \epsilon_\gamma\, b_\gamma^n\, \mathrm{sign}(b_\gamma)\,. \tag{3}$$

4. Application. On choisit maintenant :

$$a_0 = 1, \quad a_1 = \frac{1}{3}, \quad a_2 = \frac{1}{5}, \quad \ldots, \quad \text{et } a_7 = \frac{1}{15}\,.$$

Remarquons que : $a_1 + a_2 + \cdots + a_6 < a_0 < a_1 + a_2 + \cdots + a_7$.

Pour $1 \leqslant n \leqslant 6$, on a donc $b_\gamma > 0$, pour tout γ. En utilisant les relations (1) et (3), et comme $a_0 = 1$, on obtient alors les premières valeurs de la suite initiale :

$$\int_0^\infty \prod_{k=0}^{n} \mathrm{sinc}(a_k x)\,dx = \frac{\pi}{2}\,, \quad \text{pour } n = 0,\, 1,\, \ldots,\, 6\,.$$

Pour $n = 7$, on a également $b_\gamma > 0$, pour tout γ sauf pour $\gamma' := (-1, \ldots, -1)$. En utilisant la relation (1), et comme $\epsilon_{\gamma'} = -1$, on a :

$$\sum_\gamma \epsilon_\gamma\, b_\gamma^7\, \mathrm{sign}(b_\gamma) = \sum_\gamma \epsilon_\gamma\, b_\gamma^7 - 2\epsilon_{\gamma'}\, b_{\gamma'}^7 = 2^7 7! \prod_{k=1}^{7} a_k + 2(a_0 - a_1 - \ldots - a_7)^7\,.$$

Finalement, en utilisant la relation (3), et comme $a_0 = 1$, on obtient :

$$\int_0^\infty \prod_{k=0}^{7} \mathrm{sinc}(a_k x)\,dx = \pi\left(\frac{1}{2} + \frac{(1 - a_1 - a_2 - \cdots - a_7)^7}{2^7 7!\, a_1 a_2 \ldots a_7}\right)\,.$$

Voilà qui explique la monstrueuse fraction de la dernière valeur de la suite initiale !