Théorème des valeurs intermédiaires et base 13

Lionel Vidal

Où une remarquable fonction, définie par un détour en base 13, sert de contre-exemple fort à la réciproque du théorème des valeurs intermédiaires.

Voici comment Frédéric Testard présente le théorème des valeurs intermédiaires, dans son remarquable livre, *Analyse mathématique, la maîtrise de l'implicite* :

> *Élémentaire par son caractère intuitif, [...], mais profond dans sa preuve qui, quoique simple, s'appuie sur la propriété topologique la plus importante de $\mathbb{R}$: la complétude, et profond aussi dans ces conséquences, car c'est lui qui garantit l'existence d'une multitude d'objets mathématiques tels que les fonctions racines, exponentielles, etc.*

Mais rappelons-en d'abord l'énoncé ainsi qu'une démonstration possible :

Théorème des valeurs intermédiaires. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction réelle continue. Si y est compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$.

Démonstration. L'intervalle $[a, b]$ est connexe, donc son image par f continue est connexe. Comme les seuls connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles et que $f(a)$ et $f(b)$ sont dans $f([a, b])$, tout nombre y compris entre $f(a)$ et $f(b)$ est aussi élément de $f([a, b])$.

Cette démonstration est aussi courte qu'efficace, mais il faut prendre garde alors, comme le fait remarquer F. Testard dans son ouvrage cité, à ne pas utiliser ce théorème pour démontrer que les connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles, sous peine de raisonnement circulaire !

Considérons maintenant la réciproque de ce théorème : une fonction f vérifiant la propriété des valeurs intermédiaires est-elle continue ? La réponse est négative, comme le montre classiquement la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) := \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0\,; \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Ce contre-exemple, suffisant bien sûr, semble toutefois un peu faible dans la mesure où f n'est discontinue qu'en un seul point. Pour trouver mieux, on peut chercher quelle condition naturelle devrait vérifier f, en plus de la propriété des valeurs intermédiaires, pour assurer sa continuité. Par exemple :

Théorème. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction injective vérifiant la propriété des valeurs intermédiaires, alors f est continue sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. Supposons que f soit discontinue en un point x. Il existe alors une suite (x_n) convergeant vers x, telle que la suite des $f(x_n)$ ne converge pas vers $f(x)$. Donc, il existe $\epsilon > 0$ et une sous-suite (x_{n_k}) de (x_n), telle que pour tout n_k, $f(x_{n_k}) \notin \,]f(x) - \epsilon, f(x) + \epsilon[$.

Quitte à extraire une sous-suite de (x_{n_k}), notée encore (x_{n_k}), on peut considérer que les $f(x_{n_k})$ sont, soit tous inférieurs à $f(x) - \epsilon$, soit tous supérieurs à $f(x) + \epsilon$. Le raisonnement étant le même dans les deux cas, supposons par exemple que pour tout n_k, $f(x_{n_k}) \leqslant f(x) - \epsilon < f(x)$.

Pour tout n_k, il existe alors, d'après la propriété des valeurs intermédiaires, un réel c_k compris entre x_{n_k} et x, tel que $f(c_k) = f(x) - \epsilon$. Mais comme f est injective, tous les c_k sont égaux à un réel c. Et comme la suite (x_{n_k}) tend vers x, on en déduit par encadrement que $x = c$. Ce qui contredit : $f(c) = f(x) - \epsilon \neq f(x)$.

Peut-être faudrait-il considérer une fonction qui ne soit vraiment pas injective ? Que penser alors de la propriété suivante, où f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$:

Propriété (P). Pour tout intervalle ouvert non vide $\mathrm{I} \subseteq \mathbb{R}$, $f(\mathrm{I}) = \mathbb{R}$.

Il n'est pas évident qu'une fonction vérifiant (P) existe, mais supposons que cela soit le cas. Alors pour sûr, f n'est pas injective ! Et elle vérifie évidemment la propriété des valeurs intermédiaires. Que dire de la continuité d'une telle fonction ?

Théorème. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction vérifiant (P), alors f est discontinue en tout point de $\mathbb{R}$.

Démonstration. Supposons que f soit continue en $x \in \mathbb{R}$, et considérons un intervalle V ouvert de longueur finie contenant $f(x)$. Il existe alors un voisinage ouvert U de x tel que $f(\mathrm{U}) \subseteq \mathrm{V}$. Mais comme f vérifie (P), $f(\mathrm{U}) = \mathbb{R}$, et donc $\mathbb{R} \subseteq \mathrm{V}$, ce qui contredit la longueur finie de V.

Une fonction vérifiant (P) constituerait donc, en un sens, un contre-exemple fort à la réciproque du théorème des valeurs intermédiaires. Mais comment trouver un tel monstre ?

En utilisant la représentation des nombres réels en base 13 (quelle idée !), le mathématicien John H. Conway a construit dans ce but l'incroyable fonction présentée ci-après.

Tout nombre réel peut s'écrire de façon unique en base 13 sous la forme

$$\pm\, c_0 c_1 \dots c_k \cdot c_{k+1} c_{k+2} \dots$$

où $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\{0, 1, \dots, 9, \mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}\}$, telle que si $c_0 = 0$, alors $k = 0$ (la partie entière ne comporte pas de zéros inutiles), et telle que pour tout entier $n \geqslant 0$, il existe un entier $m > n$ tel que $c_m \neq \mathrm{C}$ (l'expansion trédécimale ne peut pas se terminer par une suite infinie de C). Ce type d'écriture unique, normalisée, existe bien sûr pour toute base.

On définit alors une fonction f réelle de la façon suivante :
— pour tout x réel écrit comme ci-dessus en base 13, le signe et le point trédécimal sont ignorés ;
— si la fin de l'expansion trédécimale de x est de la forme $\mathrm{A}x_1x_2 \dots x_n\mathrm{C}y_1y_2 \dots$, où tous les x_i et tous les y_i sont des chiffres décimaux, alors $f(x) = x_1x_2 \dots x_n.y_1y_2 \dots$, considéré comme un nombre en base 10 ;
— de façon similaire, si la fin de l'expansion de x est de la forme $\mathrm{B}x_1x_2 \dots x_n\mathrm{C}y_1y_2 \dots$, alors $f(x) = -x_1x_2 \dots x_n.y_1y_2 \dots$;
— sinon, $f(x) = 0$.

Quelques exemples pour fixer les idées :

$$\begin{aligned} f(-1.23\mathrm{A}3\mathrm{C}14159 \dots_{13}) &= 3.14159 \dots \\ f(+123\mathrm{B}4\mathrm{C}567.00 \dots_{13}) &= -4.567 \\ f(+1\mathrm{C}23\mathrm{A}4.500 \dots_{13}) &= 0 \end{aligned}$$

Soient maintenant un intervalle ouvert I non vide de $\mathbb{R}$, c un élément de I et y un réel quelconque. Partant de l'écriture normalisée de y en base 10 et de c en base 13, on construit alors un réel c' en base 13, en changeant, à partir d'un certain rang, la fin de l'expansion suivant le point trédécimale de c en Ay ou By, suivant le signe de y, et en remplaçant le point décimal de y par C.

En effectuant cette modification suffisamment loin dans l'expansion de c, on peut s'assurer que c' est également dans l'intervalle I. Et comme par construction $f(c') = y$, on en déduit que f vérifie la propriété (P).

La fonction f vérifie donc la propriété des valeurs intermédiaires en étant partout discontinue !