

Дифракція світла

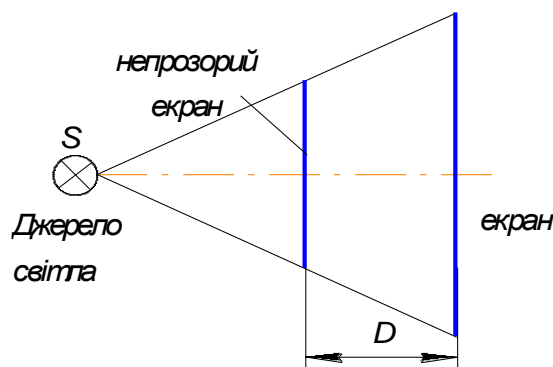
Поняття про дифракцію світла

Дифракція – явище відхилення світлових променів від напрямку прямолінійного розповсюдження світла (викривлення фронту світлової хвилі), яке не можна пояснити законами відбиття та заломлення.

Промені світла проходячи через малі отвори та огинаючи перешкоди у вигляді непрозорих екранів або гострих країв розповсюджується не тільки в прямому напрямку, але і помітно відхиляється в сторони, огинаючи краї перешкод. Відбувається деформація фронту хвилі і, як наслідок, проникнення світла в область геометричної тіні.

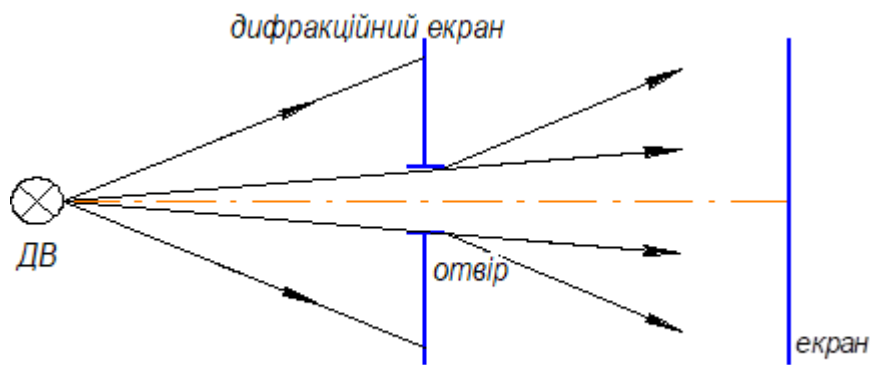
Дифракція світла виникає в тому випадку, коли фронт хвилі частково екранований, і супроводжується інтерференцією дифрагованих променів.

Основа явищ дифракції і інтерференції – хвильова природа світла.

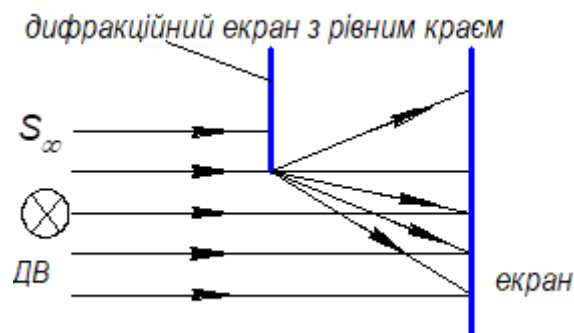


Якщо відстань D мала, то згідно з законом прямолінійного розповсюдження світла на екрані утвориться геометрична тінь від непрозорого екрану.

Якщо відстань D досягає великих значень, то на екрані утворюється дифракційна картина у вигляді світлих і темних кілець. Центр – світлий кружок.

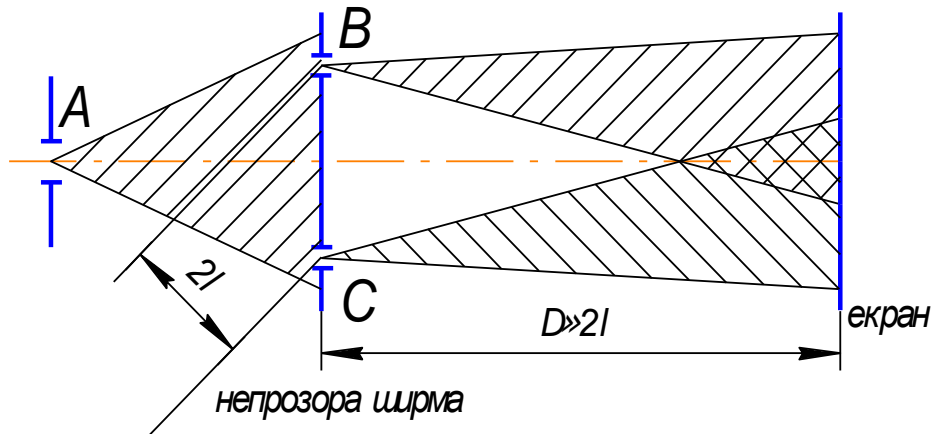


Промені відхиляються на краях отвору, тобто дифрагують. Чим отвір менший тим більше розходиться світловий пучок за дифракційним екраном.



Джерело випромінювання – монохроматичне. Спостерігається дифракційна картина у вигляді темних і світлих смуг. Перехід до геометричної тіні проходить поступово. Дифракційні смуги розташовані паралельно краю дифракційного екрану.

Класичним дослідом з дифракції є дослід Юнга:



Умови: джерела В і С малі, відстань $D \gg 2l$.

Вторинні джерела В і С – когерентні і інтерферують.

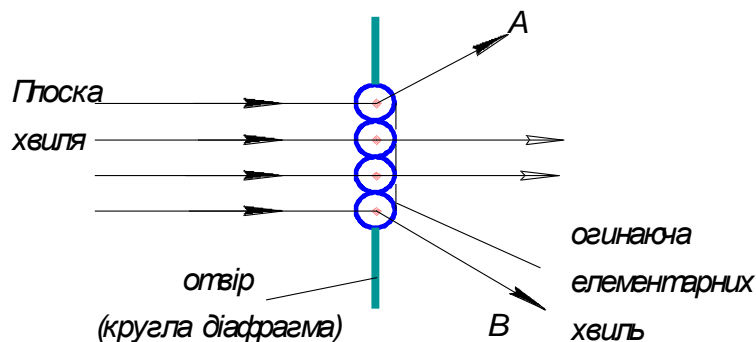
Кут відхилення світла від прямолінійного напрямку при малих довжинах хвиль невеликий.

Принцип Гюйгенса-Френеля

Згідно Гюйгенсу кожна точку хвильового фронту можна розглядати як самостійне джерело коливань, а положення хвильового фронту в наступний момент часу визначається як огибаюча елементарних сферичних хвиль, що випромінюються кожною точкою до якої дійшов фронт хвилі в даний момент часу.

Гюйгенс не врахував явища інтерференції між цими сферичними хвилями.

Але його принцип стверджував, що при наявності перешкод світлова хвиля обов'язково відхилиться від прямолінійного напрямку.



Промені А і В ортогональні хвильовому фронту, попадають в область геометричної тіні, тобто спостерігається дифракція.

Френель доповнив роздум Гюйгенса ствердженням, що вторинні елементарні хвилі інтерферують між собою, ввів поняття про амплітуду і фазу цих хвиль.

Сполучення принципу Гюйгенса з врахуванням стверджень Френеля називають *принципом Гюйгенса-Френеля*.

Такий розгляд явища дифракції дозволив розкрити закони розповсюдження хвильового фронту і розрахувати розподіл інтенсивності світла в дифракційній картині.

Згідно з принципом Гюйгенса-Френеля: Максимум світла (світлі смуги) спостерігається лише в тих місцях, де елементарні хвилі від точок хвилі взаємодіють, підсилюючи одна одну.

В тих місцях, де елементарні хвилі, знаходяться в протифазі, при складанні послаблюють одна одну, спостерігається мінімум (темнота) тобто послаблення світла.

В результаті інтерференції дифрагованих променів утворюються характерні дифракційні картини:

- дифракційне зображення діафрагми з кольоровими смугами та кільцями
- дифракційне зображення джерела випромінювання, котре залежить від форми і розмірів джерела і діафрагми.

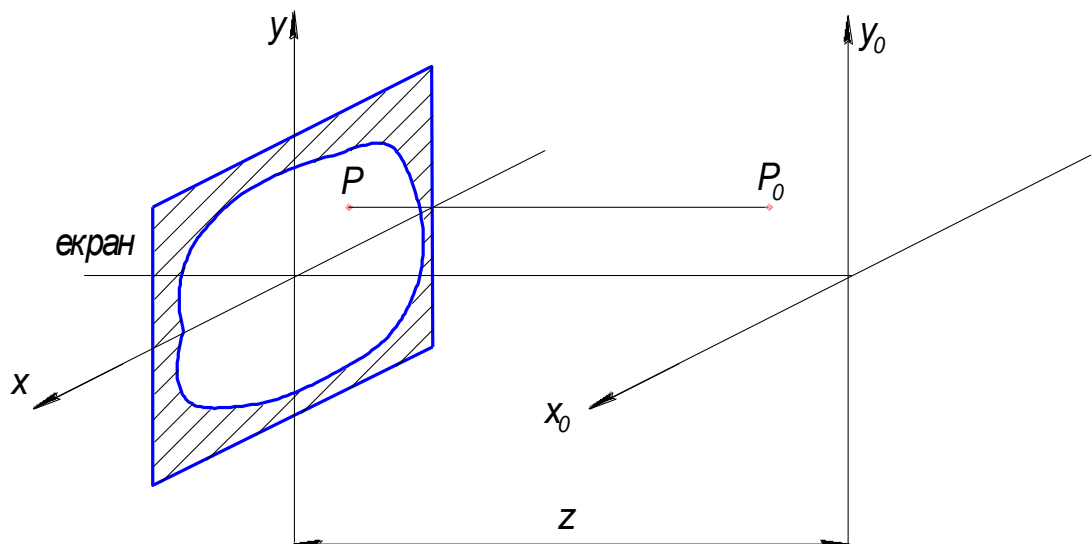
Різке зображення діафрагми відповідає відсутності дифракції, тобто прямолінійному розповсюдженню світла.

Дифракція Френеля і Фраунгофера

Проходження світлової хвилі через оптичну систему (ОС) супроводжується зміною (деформацією) хвильового фронту.

2 групи дифракційних явищ:

1) дифракція в непаралельних променях (дифракційна картина розташована на кінцевій відстані від екрану). Досліджувалась Френелем і тому отримала назву ***дифракція Френеля***.



$$(\sqrt{x^2 + y^2})_{\max} \ll z \quad (\text{розміри отвору} \ll \text{відстані } z) \quad (1)$$

Рівняння дифракції Френеля:

$$V_o(x_o, y_o) = \frac{\exp(jkz)}{j\lambda z} \iint_{-\infty}^{+\infty} V(x, y) \cdot \exp\left\{\frac{jk}{2z}[(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2]\right\} dx dy \quad (2)$$

Розкриємо дужки:

$$\begin{aligned} V_o(x_o, y_o) &= \frac{\exp(jkz)}{j\lambda z} \exp\left[\frac{jk}{2z}(x_o^2 + y_o^2)\right] \times \\ &\times \iint_{-\infty}^{+\infty} V(x, y) \exp\left[\frac{jk}{2z}(x^2 + y^2)\right] \exp\left[-\frac{j2\pi}{\lambda z}(xx_o + yy_o)\right] dx dy \end{aligned} \quad (3)$$

2) дифракція в паралельних променях (дифракційна картина розташована в нескінченості від екрану).

Досліджувалось Фраунгофером і тому отримало назву **дифракція Фраунгофера** (1821 р.)

Розглянемо формулу (3): збільшимо z – відстань від площини екрану до площини спостереження до такої величини, щоб виконувалась умова:

$$\exp\left[\frac{jk}{2z}(x^2 + y^2)\right] \approx 1 \quad (4)$$

$$\text{Тоді } \frac{k}{2z}(x^2 + y^2) \ll 1 \Rightarrow \boxed{z \gg \frac{\pi}{\lambda}(x^2 + y^2)} - \text{наближення Фраунгофера} \quad (5)$$

Якщо $D = 1$ см, $\lambda = 0,5$ мкм, то $z \gg 160$ м.

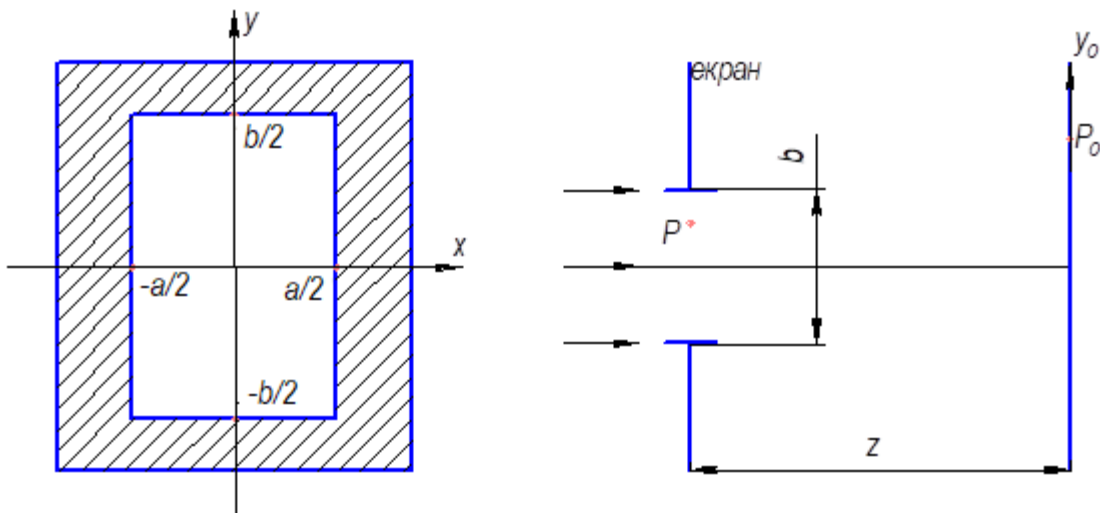
Рівняння дифракції Фраунгофера: ффф

$$V_o(x_o, y_o) = \frac{\exp(jkz)}{j\lambda z} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} V(x, y) \exp\left[-\frac{j2\pi}{\lambda z}(xx_o + yy_o)\right] dx dy \quad (6)$$

Явище дифракції в паралельних променях при круглій формі отвору має важливе значення для роботи оптичних приладів: мікроскопів, фотооб'єктивів, телескопів та ін.

Дифракція Фраунгофера на прямокутному отворі

На плоский екран з прямокутним отвором розміром $a \times b$ нормально падає плоска монохроматична світлова хвиля одиничної амплітуди.



$$V(x, y) = \begin{cases} 1, \text{при } -a/2 \leq x \leq a/2 & -b/2 \leq y \leq b/2 \\ 0, \text{в інших випадках} \end{cases} \quad (7)$$

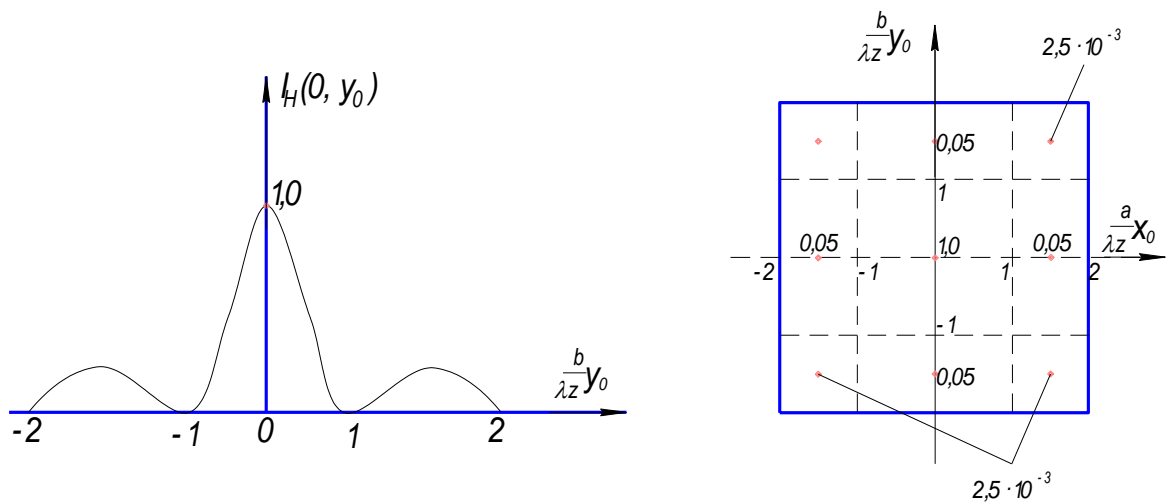
Підставивши (7) в (6), після деяких перетворень можна отримати:

$$V_o(x_o, y_o) = \frac{ab}{jkz} \frac{\sin\left(\frac{\pi x_o a}{\lambda z}\right)}{\frac{\pi x_o a}{\lambda z}} \frac{\sin\left(\frac{\pi y_o b}{\lambda z}\right)}{\frac{\pi y_o b}{\lambda z}} \quad (8)$$

Рівняння (8) – амплітуда поля при дифракції Фраунгофера на прямокутній щілині.

Інтенсивність в площині зображень:

$$I_o(x_o, y_o) = \frac{cn}{8\pi} |V_o|^2 = \frac{cn}{8\pi} \cdot V_o \cdot V_o^* = \frac{cn}{8\pi} \left(\frac{ab}{\lambda z}\right)^2 \cdot \overbrace{\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi a y_o}{\lambda z}\right)}{\left(\frac{\pi a y_o}{\lambda z}\right)} \right]^2 \cdot \left[\frac{\sin\left(\frac{\pi b x_o}{\lambda z}\right)}{\left(\frac{\pi b x_o}{\lambda z}\right)} \right]^2}^{I_{H0} = \frac{I_o(x_o, y_o)}{I(0,0)}} \quad (9)$$

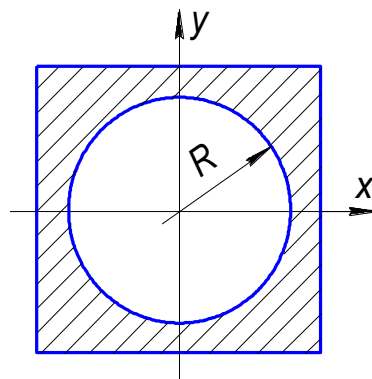


Чим щілина менша, тобто $b \downarrow$, тим більш широка картина ($y_{o \min} \uparrow$) (точка 1-го \min).

Дифракція Фраунгофера на отворі

Дифракція плоских світлових хвиль на круглому отворі якісно не відрізняється від відповідної дифракції Френеля сферичних хвиль. Картина представляє собою центральну яскраву пляму, навколо якої розміщені темні та світлі концентричні кільця. Інтенсивність світлих кілець до периферії швидко зменшується. При цьому оком можна спостерігати лише декілька кілець.

Умови та картина дифракції Фраунгофера типові для багатьох оптичних систем.



Коефіцієнт пропускання:

$$t(x, y) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq R \\ 0, & \sqrt{x^2 + y^2} > R \end{cases} \quad (10)$$

В полярній системі координат: $r^2 = x^2 + y^2$

$$t(r) = \begin{cases} 1, & \text{при } 0 \leq r \leq R \\ 0, & \text{при } r > R \end{cases} \quad (11)$$

Враховуючи:

$$r_o = \sqrt{x_o^2 + y_o^2}$$

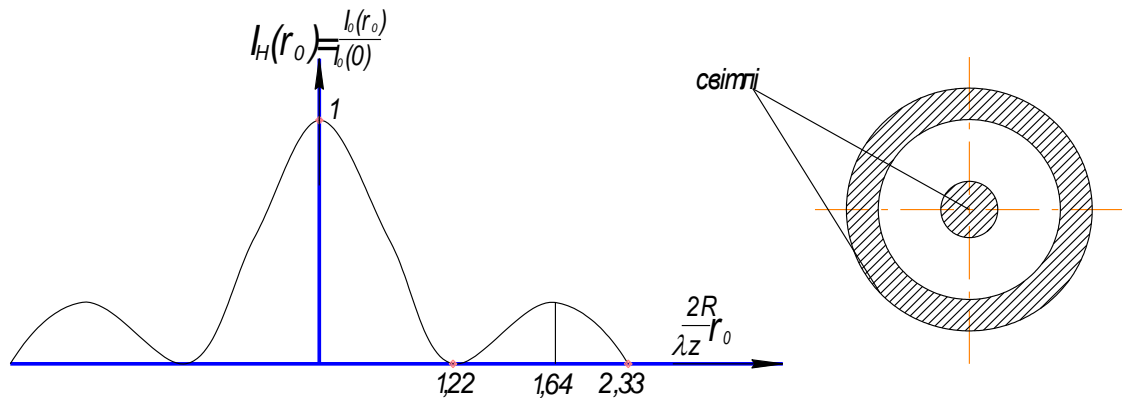
Амплітуда поля в площині зображення:

$$V_o(r_o) = \frac{\pi R^2}{j\lambda z} \left[2 \cdot \frac{J_1\left(2\pi \frac{r_o}{\lambda z} R\right)}{\left(\frac{2\pi r_o R}{\lambda z}\right)} \right] \quad (12)$$

Інтенсивність в площині зображення:

$$I_o(r_o) = \frac{cn}{8\pi} \cdot \left(\frac{\pi R^2}{\lambda z} \right)^2 \left[2 \cdot \frac{J_1\left(2\pi \frac{r_o}{\lambda z} R\right)}{\left(2\pi \frac{r_o}{\lambda z} R\right)} \right]^2 \quad (13)$$

J_1 – функція Бесселя 1-го роду 1-го порядку



$\frac{2R}{\lambda z} r_o$	$I_o(r_o)$	max min
0	1	max
1,22	0	min
1,66	0,018	max
2,33	0	min

Розподіл освітленості в дифракційному зображенні точки. Кружок Ейрі

Світлова енергія в дифракційному зображенні точки розподіляється нерівномірно.

Вперше розподіл освітленості в дифракційних кільцях був досліджений англійським вченим Ейрі (1811-1892), а центральний кружок дифракційної плями отримав назву *кружка Ейрі*.

Приблизно 84 % всієї світлової енергії припадає на кружок Ейрі.

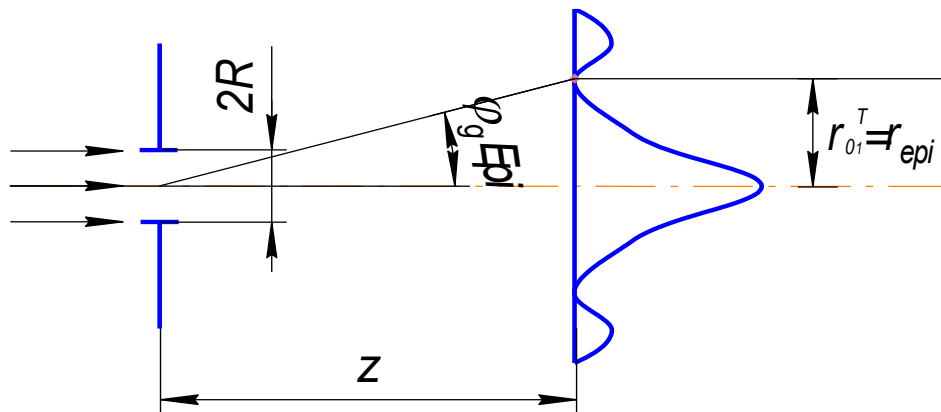
Перше кільце + друге кільце = 91 %

Перше кільце + друге + третє = 93,8 %

Рівняння для першого темного кільця:

$$\frac{2R}{\lambda z} r_{o_1}^T = 1,22 \quad (\text{із дифракції Фраунгофера на круглому отворі}) \Rightarrow$$

$$r_{o_1}^T = \frac{1,22 \lambda z}{2R} \quad - \text{ радіус кружка Ейрі}$$

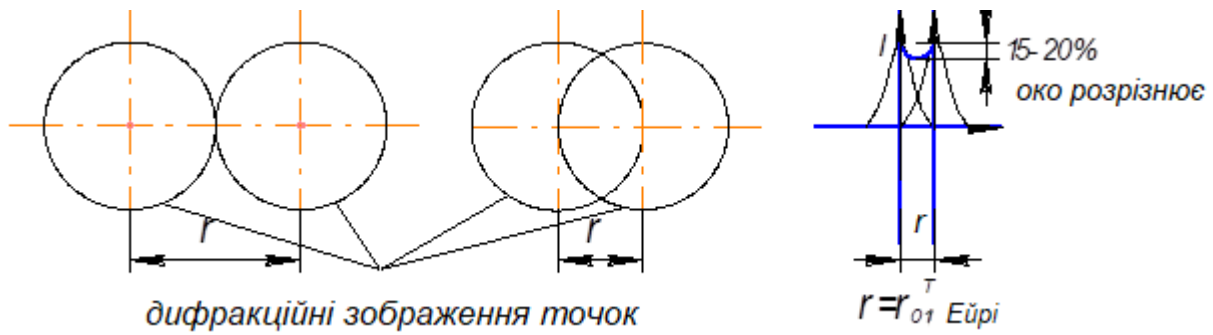


$$\varphi_{gEйpi} = \frac{r_{o_1}^T}{z} = 1,22 \frac{\lambda}{2R}$$

Роздільна здатність оптичної системи. Критерій Релея

Нехай є два близько розташованих точених джерела світла. Промені від цих джерел світла пройшовши через ОС будуть утворювати в площині зображення ОС дифракційну картину. При цьому дифракційні фігури можуть накладатися або зливатися.

Якщо в такій дифракційній картині зображення точкових джерел спостерігається роздільно (окремо), то ОС «розрізняє» ці точки (точки мають на увазі в площині предметів).



Якщо $r > r_{01}^T(\text{Ейрі})$, то точки в площині предметів ОС розрізняє.

Межа розрізнення – гранична найменша відстань між двома точками, при якій ці точки можна спостерігати окремо.

Величина обернена межі розрізнення називається роздільною здатністю оптичної системи.

Критерій Релея – центральний дифракційний максимум однієї із точок при цьому співпадає з першим мінімумом іншої точки.

Якщо $r < r_{01}^T(\text{Ейрі})$ – дифракційні зображення точок зливаються (ОС не розрізняє точок)

Межу розділення визначають в лінійній або кутовій мірі.

Наприклад,

- для мікроскопів – в [мкм]
- для фотооб'єктивів → роздільна здатність [ліній/мм]
- для телескопічних систем – в кутовій мірі [хвилини і секунди]

Межу розрізнення ідеальної ОС за критерієм Релея в лінійній мірі можна визначити за формулою:

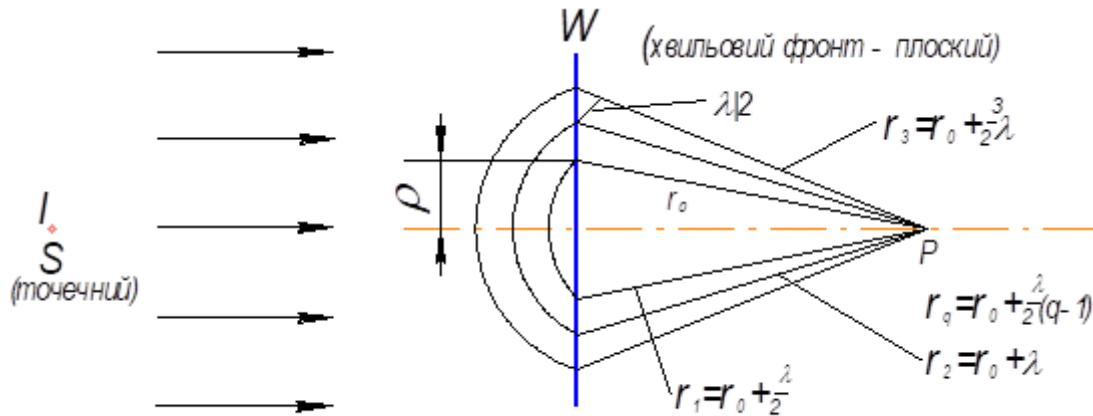
$$r_{01}^T = 1,22\lambda \frac{f'}{D} = 0,61 \frac{\lambda}{\sin \sigma'_A}$$

Межа розрізнення ОС в секундах:

$$\Psi'' = \frac{140''}{D},$$

де D – діаметр отвору, тобто діаметр входної зіниці в [мм].

Зони Френеля



Згідно з принципом Гюйгенса-Френеля всі точки хвильового фронту можна розглядати як множину самостійних джерел, які утворюють сферичні хвилі (коливання).

Для визначення інтенсивності світла в точці P необхідно визначити результуючу амплітуди.

Френель для визначення результуючої амплітуди запропонував розбити хвильовий фронт на кінцеві зони – зони Френеля.

Розбивку на зони Френеля виконують таким чином, щоб різниця ходу променів, що йдуть від країв кожної сусідньої зони до точки спостереження P були рівні половині довжини хвилі $\lambda/2$.

Із точки P через утворені точки на хвильовому фронті (утворені через $\lambda/2$) проведемо сфери. В результаті на фронті з'являться кільцеві зони Френеля. Радіус першого кола – ρ .

Амплітуда поля в точці P буде визначатись:

$$V(p) = \sum_{q=1}^n V_q = V_1 - V_2 + V_3 - V_4 + \dots \pm V_n,$$

де q – номер зони,

$n = 2m <->$,

$n = 2m+1 <+>$

Використовуючи метод Шустера:

$$V(p) = \frac{1}{2}V_1 + \left(\frac{1}{2}V_1 - V_2 + \frac{1}{2}V_3\right) + \left(\frac{1}{2}V_3 - V_4 + \frac{1}{2}V_5\right) + \frac{1}{2}V_5 - \dots =$$

$$= \left| \frac{V_1 + V_3}{2} - V_2 \approx 0 \right| = \frac{1}{2}V_1 \pm \frac{1}{2}V_n = \frac{1}{2}[V_1 \pm V_n]$$

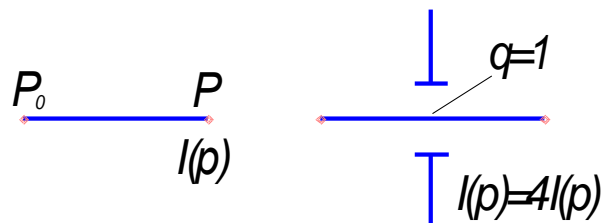
Оскільки $n \rightarrow$ великому числу, тоді $V_n \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V(p) = \frac{1}{2}V_1(p)}$

Властивості зон Френеля

1. При повністю відкритому хвильовому фронті, результуюча інтенсивність дорівнює 1/4 інтенсивності, що утворюється першою зоною Френеля.

$$V(p) = \frac{1}{2}V_1(p) \qquad I(p) = \frac{1}{4}I_1(p)$$

2. Якщо площа круглого отвору дорівнює площі першої зони Френеля, то в точці P спостерігається інтенсивність в 4 рази більша інтенсивності при відсутності екрану.



3. Якщо закрити всі парні зони (непарні), то результуюча інтенсивність значно збільшиться (зменшиться).

$$V(p) = V_1 + V_3 + V_5 + \dots$$

4. Якщо парні зони мають фазу, що відрізняється на π від непарних зон, то результуюча інтенсивність ще більше зросте.

$$V(p) = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 \dots$$

5. Якщо закрити тільки 1-у зону, то в точці P буде спостерігатись світла пляма, рівна інтенсивності при відсутності екрану.

$$V(p) = -V_2 + V_3 - V_4 + \dots = -\frac{1}{2V_2} - \left(\frac{1}{2}V_2 - V_3 + \frac{1}{2}V_4\right) - \dots \approx -\frac{1}{2}V_2 \approx -\frac{1}{2}V_1$$

$$I(p) = |V|^2 \approx \frac{1}{4} I_4 = I_{\text{відкр}}$$

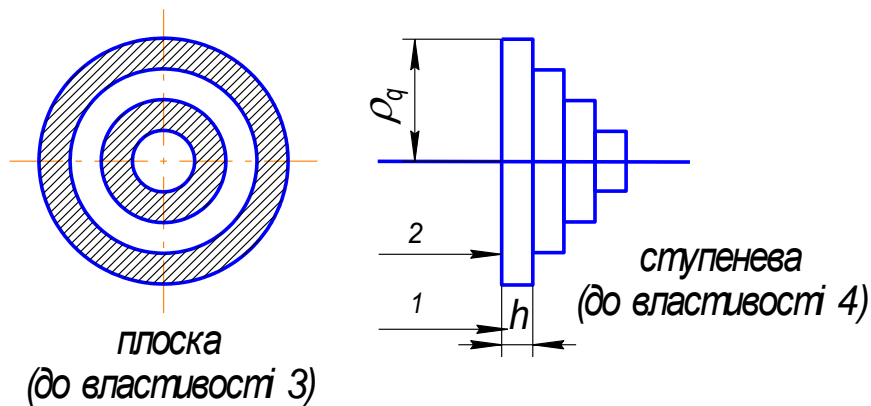
6. Якщо в непрозорому екрані з круглим отвором розміщуються дві зони Френеля, то інтенсивність в точці Р буде близькою до нуля.

$$V(p) = V_1 - V_2 = 0 \quad I = 0$$

Зонна пластинка Френеля

На 3 і 4 властивостях зон Френеля базується робота зонної пластинки Френеля.

Зонна пластинка Френеля – плоска скляна пластинка, на поверхні якої нанесені концентричні прозорі і непрозорі кільця, побудовані за принципом розташування зон Френеля.



$$\varphi = kx \quad \varphi_1 = \frac{2\pi}{\lambda} h \quad \varphi_2 = \frac{2\pi}{\lambda} hn \quad \Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} h(n-1) = \pi$$

$$h = \frac{\lambda}{n-1}$$

Ступенева зонна пластина працює так як і фокусуюча лінза. На відміну від лінзи, ступенева пластина має ряд фокусів.

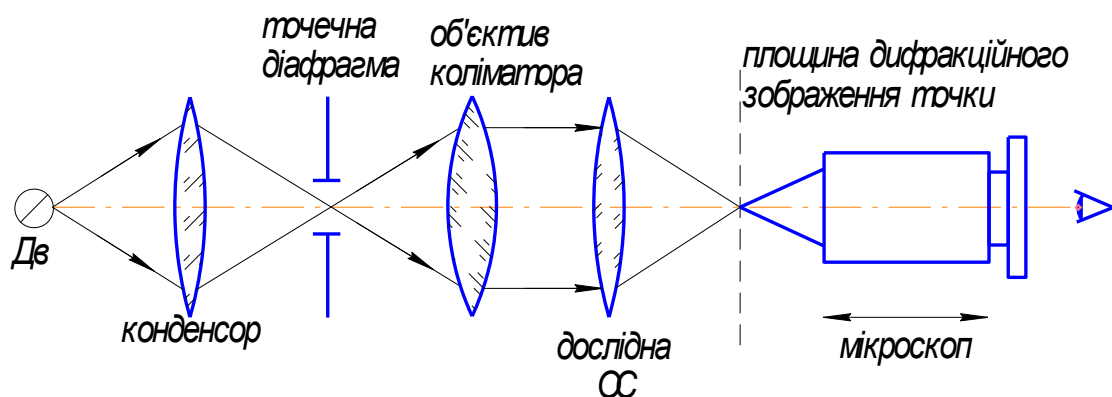
$$f'_{zn_q} = \frac{\rho_q^2}{\lambda q}$$

Практичне застосування дифракції

Явище дифракції покладено в основу дії приладів коліматорного типу, котрі використовуються для контролю якості зображення ОС і їх окремих компонентів (об'єктивів, окулярів, пластин, дзеркал, призм та інших).

Явище дифракції використовують в приладах спектрального аналізу в якості диспергуючих елементів для отримання спектрів, як і диспергуючі призми.

Контроль ОС за виглядом дифракційного зображення точки



- 1) ОС без дефектів: кружок Ері – яскравий центральний диск і перше світле кільце.
- 2) є децентрування, дефект скла (свилі, натяги).
- 3) ОС з хроматичною аберацією.
- 4) Якщо зображення точки при зміні фокусування в обидві сторони залишається круглим, але змінюється неоднаково, то ця обставина вказує на наявність сферичної аберації.
- 5) Астигматизм в ОС

- 6) При наявності неоднорідності в склі
- 7) Внутрішні напруги в склі або напруги в склі викликані деформацією лінз із-за пережиму їх в оправках.

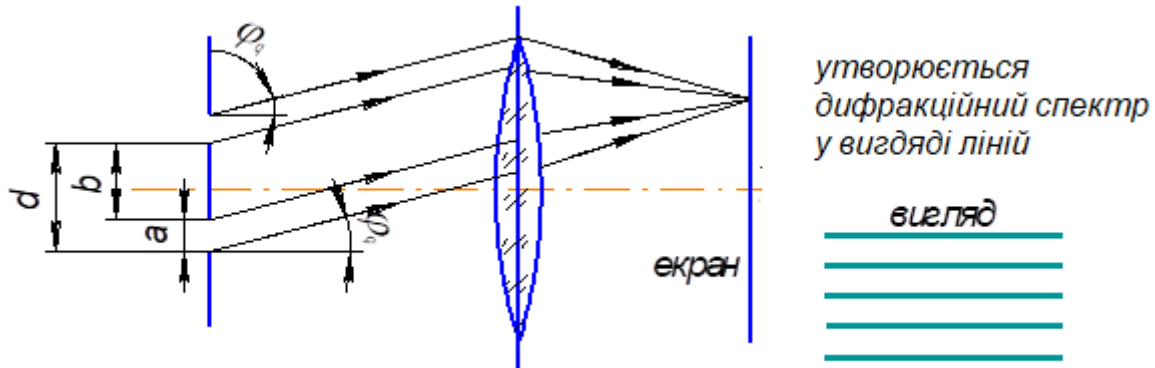
Для виявлення окремої деталі, що має дефект необхідно саме її обернути навколо оптичної осі при цьому дифракційне зображення буде обертатись

Дифракційні ґратки та їх основні характеристики

Дифракційна ґратка – періодична структура з паралельно розташованими прозорими та непрозорими ділянками.

Д.Г.: 200...1200 ліній/мм – видима область

1200...1800 ліній/мм – ультрафіолетова область



Період ґратки: $d = b + a$

Кут дифракції (ϕ_q) – кут на який відхиляться промені при проходженні через дифракційну ґратку.

Якщо освітлювати ґратку монохроматичним світлом, то дифракційна картина буде являти собою систему кольорових смуг, що накладаються одна на одну. Смуги зміщені одна від іншої в залежності від різних довжин хвиль дифрагованих променів.

Різниця ходу променів:

$$\Delta = d \sin \varphi_q$$

Максимум інтенсивності в дифракційній картині визначається за формулою:

$$d \sin \varphi_q = m\lambda$$

$m = 0, 1, 2, 3 \dots$ (рівняння дифракційної решітки)

Дифракційна картина:

Центральний (нульовий) максимум – білий (так як сходяться всі промені (для різних λ) при $\Delta = 0$ і кут $\varphi_q = 0$)

З обох сторін центрального максимуму розташовані кольорові смуги.

При збільшенні кількості щілин ґратки (N) максимуми отримуються у вигляді вузьких ліній.

Чим $d \downarrow$ (і відповідно $a \downarrow$), тим $\varphi_q \uparrow$ для променів з даною довжиною хвилі і більша різниця між кутами дифрагування променів двох сусідніх хвиль, тобто легше можна розділити λ складного випромінювання.

Умова мінімумів:

$$d \sin \varphi = (2m + 1) \frac{\lambda}{2} \quad (m = 1, 2, 3 \dots)$$

Основні характеристики дифракційної ґратки

1) Кутова або лінійна дисперсія

$$D_y = \frac{\partial \varphi_g}{\partial \lambda} = \frac{m}{d \cos \varphi_q} \quad - \quad \text{кутова дисперсія}$$

де $m = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$ – порядок дифракції;

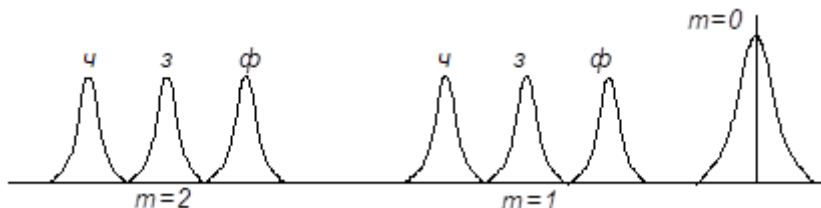
d – період дифракційної решітки;

φ_q – кут дифракції.

Для малих кутів дифракції: $D_{cp} \approx \frac{m}{d}$

Лінійна дисперсія: $D_e = D_\varphi f' = \frac{m}{d \cos \varphi_q} f'$

2) **Дисперсійна область** – інтервал довжин хвиль, вільний від перекриття сусідніх порядків.

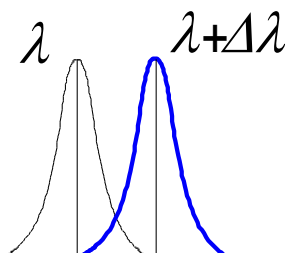


$\phi_{m=1, \text{червон}} \leq \phi_{m=2, \text{фіолет}} \rightarrow$ перекриття спектрів немає.

$$m(\lambda + \Delta\lambda) = (m+1)\lambda$$

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{m}$$

3) **Роздільна здатність** – спроможність дифракційної ґратки розрізнявати окремо дві спектральні лінії з довжинами хвиль λ і $\lambda + \Delta\lambda$.



$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = mN$$

де m – порядок дифракції, N – число штрихів

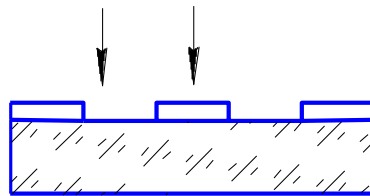
У відповідності з критерієм Релея дві спектральні лінії вважаються розрізненими, якщо max інтенсивності однієї з них співпадає з першим min іншої.

Пропускаючи та відбиваючи дифракційні ґратки

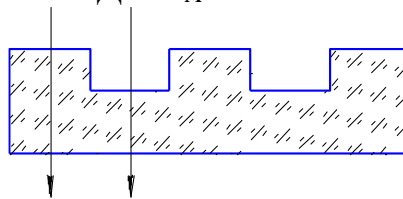
1. Пропускаючи: $t(x, y)$ – амплітудний коефіцієнт пропускання

$$t(x, y) = t_A(x, y) \cdot e^{j\varphi_t(x, y)}$$

1.1 Амплітудно–пропускаючи ДГ: $t(x, y) = t_A(x, y)$ $\varphi_t(x, y) = \text{const} = 0$



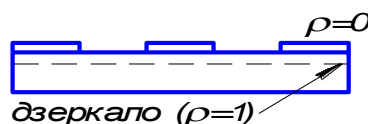
1.2 Фазова пропускаючи ДГ: $t_A \approx 1 = \text{const}$ $t(x, y) = e^{j\varphi_t(x, y)}$



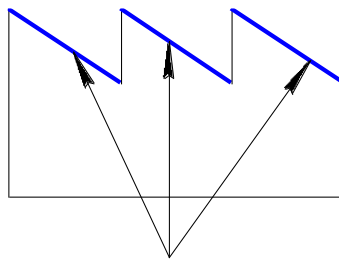
1.3 Амплітудно-фазова пропускаюча ДГ: $t = t_A e^{j\varphi_t}$

2. Відбиваючи: $\rho(x, y) = \rho_A e^{j\varphi_g(x, y)}$ – амплітудний коефіцієнт відбиття.

2.1 Амплітудна відбиваюча ДГ: $\varphi_\rho(x, y) = 0$ $\rho(x, y) = \rho_A(x, y)$



2.2 Фазова відбиваюча ДГ: $\rho_A = 1$ $\rho(x, y) = e^{j\varphi_\rho(x, y)}$



дзеркало

2.3 Амплітудно-фазова відбиваюча ДГ: $\rho = \rho_A \cdot e^{j\varphi_\rho}$

