Minimaler Abstand einer Parameterform zu diskreten Gitterpunkten (2D)

1. Theorie allgemeine Parameterfunktion

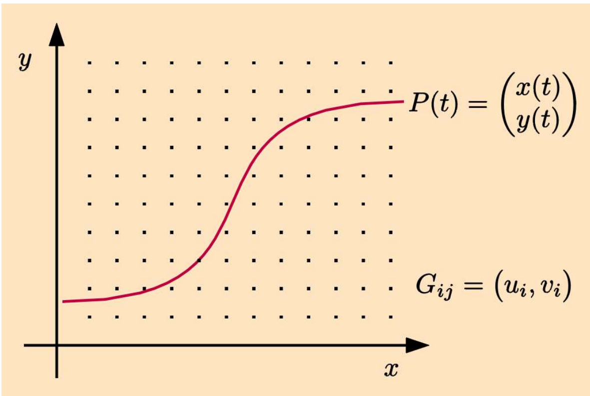
Gegeben sei die Parameterform $\boxed{\overrightarrow{P}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}}$ mit $t \in \mathbb{R}$ und t normiert auf das Intervall

$t \in (0, \varepsilon, 1]$ und den beiden reellwertigen Funktionen $\boxed{x(t) = f_x(t)}$ und $\boxed{y(t) = f_y(t)}$.

Weiterhin bilden sich die diskreten Gitterpunkte $\boxed{G_{ij} = (\,u_i\,, v_i\,)}$ definiert durch die

Ortsauflösungen $0 < dX \in \mathbb{R} <= 1$ und $0 < dY \in \mathbb{R} <= 1$

mit $i \in [0, 1, N_i] \in \mathbb{N}$ und $j \in [0, 1, N_j] \in \mathbb{N}$ mit $u_i = i \cdot dX$ und $v_i = i \cdot dY$.



Gesucht ist das zu einem Gitterpunkt G_{ij} zugehörige t_{min} mit der minimalen Distanz D entsprechend:

$D = \sqrt{(x(t) - u_i)^2 + (y(t) - v_i)^2} =: \sqrt{S}$ und damit

$$\boxed{S = (x(t) - u_i)^2 + (y(t) - v_i)^2)}$$

Die notwendigen Bedingungen für ein minimales Abstands-S_{min} folgen:

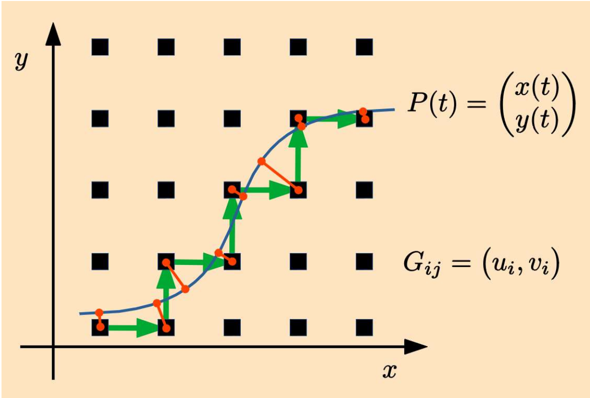
$$\frac{\partial S}{\partial t} = 0 = \frac{\partial}{\partial t}[(x(t) - u_i)^2 + (y(t) - v_i)^2]$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}(x(t) - u_i)^2 + \frac{\partial}{\partial t}(y(t) - v_i)^2]$$

$$0 = 2(x(t) - u_i)\frac{\partial x(t)}{\partial t} + 2(y(t) - v_i)\frac{\partial y(t)}{\partial t}$$

$$\boxed{0 = (x(t) - u_i)\frac{\partial x(t)}{\partial t} + (y(t) - v_i)\frac{\partial y(t)}{\partial t}}$$

Nachbarpunkte (mit Unterschied von $dx = \{-1, 0, +1\}$ und/oder $dy = \{-1, 0, +1\}$) ergeben dann die diskrete Bahnkurve $B_k = \{(u_k, v_k)\}$ mit $k \in \{0, 1, N_B\}$ mit $N_B + 1$ Interpolations- bzw. Bearbeitungspunkten.



2. Theorie Gerade

Wahl der Zwei-Punkte-Form einer Geraden mit den gegebenen Punkten

$P_0 = (x_0, y_0)$ und $P_1 = (x_1, y_1)$ und mit

$$\vec{P(t)} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_1 - x_0)t + x_0 \\ (y_1 - y_0)t + y_0 \end{pmatrix}$$

eingesetzt in

$$0 = (x(t) - u_i)\frac{\partial x(t)}{\partial t} + (y(t) - v_j)\frac{\partial y(t)}{\partial t}$$

$$0 = ((x_1 - x_0)t + x_0 - u_i)\frac{\partial x(t)}{\partial t} + ((y_1 - y_0)t + y_0 - v_i)\frac{\partial y(t)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial x(t)}{\partial t} = \frac{\partial[(x_1 - x_0)t + x_0]}{\partial t} = (x_1 - x_0)$$

$$\frac{\partial y(t)}{\partial t} = \frac{\partial[(y_1 - y_0)t + y_0]}{\partial t} = (y_1 - y_0)$$

$\Rightarrow$ Bestimmung t_{min}:

$$0 = ((x_1 - x_0)t_{min} + x_0 - u_i)(x_1 - x_0) + ((y_1 - y_0)t_{min} + y_0 - v_j)(y_1 - y_0)$$

$$0 = t_{min}[(x_1 - x_0)(x_1 - x_0) + (y_1 - y_0)(y_1 - y_0)] + (x_0 - u_i)(x_1 - x_0) + (y_0 - v_j)(y_1 - y_0)$$

$$0 = t_{min}[(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2] + (x_0 - u_i)(x_1 - x_0) + (y_0 - v_j)(y_1 - y_0)$$

$$t_{min}[(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2] = -(x_0 - u_i)(x_1 - x_0) - (y_0 - v_j)(y_1 - y_0)$$

$$\boxed{t_{min} = -\frac{(x_0 - u_i)(x_1 - x_0) + (y_0 - v_j)(y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}}$$

t_{min} abhängig vom Start/Endpunkt der Gerade $P_0 = (x_0, y_0)$ und $P_1 = (x_1, y_1)$ und dem gewähltem Gitterpunkt $G_{ij} = (u_i, v_j)$.

3. Theorie Kreisbogen

Wahl der Zwei-Winkel-Form eines Kreisbogens mit den gegebenen Winkeln

$\alpha_0 \in [0..2\pi)$ und $\alpha_1 \in (0..2\pi]$ und dem Kreismittelpunkt $P_m = (x_m, y_m)$ und mit

$$\vec{P(t)} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_m + R \cdot cos((\alpha_1 - \alpha_0)t + \alpha_0) \\ y_m + R \cdot sin((\alpha_1 - \alpha_0)t + \alpha_0) \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial x(t)}{\partial t} = \frac{\partial[x_m + R\cdot cos((\alpha_1-\alpha_0)t+\alpha_0)]}{\partial t}$$

$$\frac{\partial x(t)}{\partial t} = -R\cdot(\alpha_1-\alpha_0)\cdot sin((\alpha_1-\alpha_0)t+\alpha_0)$$

$$\frac{\partial y(t)}{\partial t} = \frac{\partial[y_m + R\cdot sin((\alpha_1-\alpha_0)t+\alpha_0)]}{\partial t}$$

$$\frac{\partial y(t)}{\partial t} = +R\cdot(\alpha_1-\alpha_0)\cdot cos((\alpha_1-\alpha_0)t+\alpha_0)$$

eingesetzt in $0 = (x(t_{min})-u_i)\dfrac{\partial x(t_{min})}{\partial t} + (y(t_{min})-v_j)\dfrac{\partial y(t_{min})}{\partial t}$:

$$\begin{aligned} 0 = {} & [x_m + R\cdot cos((\alpha_1-\alpha_0)t_{min}+\alpha_0) - u_i][-R\cdot(\alpha_1-\alpha_0)\cdot sin((\alpha_1-\alpha_0)t_{min}+\alpha_0)] \\ & + [y_m + R\cdot sin((\alpha_1-\alpha_0)t_{min}+\alpha_0) - v_j][+R\cdot(\alpha_1-\alpha_0)\cdot cos((\alpha_1-\alpha_0)t_{min}+\alpha_0)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 = {} & [(x_m-u_i) + R\cdot cos((\alpha_1-\alpha_0)t_{min}+\alpha_0)][-R\cdot(\alpha_1-\alpha_0)\cdot sin((\alpha_1-\alpha_0)t_{min}+\alpha_0)] \\ & + [(y_m-v_j) + R\cdot sin((\alpha_1-\alpha_0)t_{min}+\alpha_0)][+R\cdot(\alpha_1-\alpha_0)\cdot cos((\alpha_1-\alpha_0)t_{min}+\alpha_0)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 = {} & +[R\cdot cos((\alpha_1-\alpha_0)t_{min}+\alpha_0)][-R\cdot(\alpha_1-\alpha_0)\cdot sin((\alpha_1-\alpha_0)t_{min}+\alpha_0)] \\ & + [x_m-u_i][-R\cdot(\alpha_1-\alpha_0)\cdot sin((\alpha_1-\alpha_0)t_{min}+\alpha_0)] \\ & + [R\cdot sin((\alpha_1-\alpha_0)t_{min}+\alpha_0)][+R\cdot(\alpha_1-\alpha_0)\cdot cos((\alpha_1-\alpha_0)t_{min}+\alpha_0)] \\ & + [y_m-v_j][+R\cdot(\alpha_1-\alpha_0)\cdot cos((\alpha_1-\alpha_0)t_{min}+\alpha_0)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 = {} & -[R\cdot cos((\alpha_1-\alpha_0)t_{min}+\alpha_0)][R\cdot(\alpha_1-\alpha_0)\cdot sin((\alpha_1-\alpha_0)t_{min}+\alpha_0)] \\ & - [x_m-u_i][R\cdot(\alpha_1-\alpha_0)\cdot sin((\alpha_1-\alpha_0)t_{min}+\alpha_0)] \\ & + [R\cdot sin((\alpha_1-\alpha_0)t_{min}+\alpha_0)][R\cdot(\alpha_1-\alpha_0)\cdot cos((\alpha_1-\alpha_0)t_{min}+\alpha_0)] \\ & + [y_m-v_j][R\cdot(\alpha_1-\alpha_0)\cdot cos((\alpha_1-\alpha_0)t_{min}+\alpha_0)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 = {} & -(\alpha_1-\alpha_0)R^2 cos((\alpha_1-\alpha_0)t_{min}+\alpha_0)sin((\alpha_1-\alpha_0)t_{min}+\alpha_0) \\ & - (x_m-u_i)(\alpha_1-\alpha_0)Rsin((\alpha_1-\alpha_0)t_{min}+\alpha_0) \\ & + (\alpha_1-\alpha_0)R^2 sin((\alpha_1-\alpha_0)t_{min}+\alpha_0)cos((\alpha_1-\alpha_0)t_{min}+\alpha_0) \\ & + (y_m-v_j)(\alpha_1-\alpha_0)Rcos((\alpha_1-\alpha_0)t_{min}+\alpha_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 = {} & -(\alpha_1-\alpha_0)R^2 - \frac{(x_m-u_i)(\alpha_1-\alpha_0)R}{cos((\alpha_1-\alpha_0)t_{min}+\alpha_0)} \\ & + (\alpha_1-\alpha_0)R^2 + \frac{(y_m-v_j)(\alpha_1-\alpha_0)R}{sin((\alpha_1-\alpha_0)t_{min}+\alpha_0)} \end{aligned}$$

$$\frac{(x_m-u_i)(\alpha_1-\alpha_0)R}{cos((\alpha_1-\alpha_0)t_{min}+\alpha_0)} = \frac{(y_m-v_j)(\alpha_1-\alpha_0)R}{sin((\alpha_1-\alpha_0)t_{min}+\alpha_0)}$$

$$\frac{sin((\alpha_1-\alpha_0)t_{min}+\alpha_0)}{cos((\alpha_1-\alpha_0)t_{min}+\alpha_0)} = \frac{(y_m-v_j)(\alpha_1-\alpha_0)}{(x_m-u_i)(\alpha_1-\alpha_0)}$$

$$tan((\alpha_1-\alpha_0)t_{min}+\alpha_0) = \frac{(y_m-v_j)(\alpha_1-\alpha_0)}{(x_m-u_i)(\alpha_1-\alpha_0)}$$

$$(\alpha_1 - \alpha_0)t_{min} + \alpha_0 = \arctan\left[\frac{(y_m - v_j)(\alpha_1 - \alpha_0)}{(x_m - u_i)(\alpha_1 - \alpha_0)}\right]$$

$$\boxed{t_{min} = \frac{\arctan\left[\frac{(y_m - v_j)(\alpha_1 - \alpha_0)}{(x_m - u_i)(\alpha_1 - \alpha_0)}\right] - \alpha_0}{(\alpha_1 - \alpha_0)}}$$

t_{min} unabhängig vom Kreisradius R, allein bestimmt vom Start/Endwinkel α_0, α_1 , Kreismittelpunkt $P_m = (x_m, y_m)$ des Kreisbogens und dem gewähltem Gitterpunkt $G_{ij} = (u_i, v_j)$.

4. Theorie Ellipsenbogen

5. Theorie Kubischer Spline

Mit der Vier-Punkte-Form eines kubischen Splines ergibt sich mit den gegebenen Randpunkten

$P_0 = (x_0, y_0)$ mit $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ und $P_1 = (x_1, y_1)$ mit $x_1, y_1 \in \mathbb{R}$

und den Randsteigungen

$$S_0\big|_{P_0} = \begin{pmatrix} s_{0x} \\ s_{0y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{df_x(p)}{dp}\big|_{P_0} \\ \frac{df_y(p)}{dp}\big|_{P_0} \end{pmatrix} \text{ und } S_1\big|_{P_1} = \begin{pmatrix} s_{1x} \\ s_{1y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{df_x(p)}{dp}\big|_{P_1} \\ \frac{df_y(p)}{dp}\big|_{P_1} \end{pmatrix}$$

die Parameterfunktion des kubischen Splines :

$$\overrightarrow{P(p)}_{spline} = \begin{pmatrix} f_x(p) \\ f_y(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x p^3 + b_x p^2 + c_x p + d_x \\ a_y p^3 + b_y p^2 + c_y p + d_y \end{pmatrix}$$

und die Parameterfunktionen der Steigung :

$$\frac{d\overrightarrow{P(p)}_{spline}}{dp} = \begin{pmatrix} \frac{df_x(p)}{dp} \\ \frac{df_y(p)}{dp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a_x p^2 + 2b_x p + c_x \\ 3a_y p^2 + 2b_y p + c_y \end{pmatrix}$$

Die Polynom-Koeffizienten $a_x, b_x, c_x, d_x \in \mathbb{R}$ und $a_y, b_y, c_y, d_y \in \mathbb{R}$ mit $t \in [0..1] \in \mathbb{R}$

berechnen sich aus der Annahme:

$$S = \min_t = [x(p) - u_i]^2 + [y(p) - v_j]^2$$

(für einen Gitterpunkt $G_{ij} = (x_i, y_j)$ wird :

$$0 = [f_x(p_{min}) - u_i]\frac{\partial f_x(p_{min})}{\partial p} + [f_y(p_{min}) - v_j]\frac{\partial f_y(p_{min})}{\partial p}$$

Zu bestimmen sind 8 Koeffizienten $a_x, b_x, c_x, d_x, a_y, b_y, c_y, d_y$ mit 8 Bestimmungsgleichungen:

$$\frac{df_x(p)}{dp} = 3a_x p^2 + 2b_x p + c_x$$

$$\frac{d^2 f_x(p)}{dp^2} = 6a_x p + 2b_x$$

$$\frac{d f_y(p)}{dp} = 3a_y p^2 + 2b_y p + c_y$$

$$\frac{d^2 f_y(p)}{dp^2} = 6a_y p + 2b_y$$

Der gesuchte Spline $P(p)$ muss durch die Punkte P_0 und P_1 laufen:

$f_x(0) = x_0 = d_x$ (1)

$f_y(0) = y_0 = d_y$ (2)

$f_x(1) = x_2 = a_x + b_x + c_x + d_x$ (3)

$f_y(1) = y_2 = a_y + b_y + c_y + d_y$ (4)

Der gesuchte Spline $P(p)$ muss stetig an $S_0\big|_{P_0}$ und $S_2\big|_{P_2}$ anschliessen:

$\frac{d f_x(p)}{dp}\Big|_{x_0} = c_x = S_{0x}$ (5)

$\frac{d f_x(p)}{dp}\Big|_{x_2} = 3a_x + 2b_x + c_x = S_{2x}$ (6)

$\frac{d f_y(p)}{\partial t}\Big|_{y_0} = c_y = S_{0y}$ (7)

$\frac{d f_y(p)}{dp}\Big|_{y_2} = 3a_y + 2b_y + c_y = S_{2y}$ (8)

a_x	b_x	c_x	d_x	a_y	b_y	c_y	d_y	**Inhomogen**
0	0	0	1	0	0	0	0	x_0
0	0	0	0	0	0	0	1	y_0
1	1	1	1	0	0	0	0	x_2
0	0	0	0	1	1	1	1	y_2
0	0	1	0	0	0	0	0	S_0_x
3	2	1	0	0	0	0	0	S_2_x
0	0	0	0	0	0	1	0	S_0_y
0	0	0	0	3	2	1	0	S_2_y

a_x	b_x	a_y	b_y	**Inhomogen**
1	1	0	0	x_2
0	0	1	1	y_2
3	2	0	0	S_2_x
0	0	3	2	S_2_y

a_x	b_x	**Inhomogen**
1	1	x_2
3	2	S_2_x

a_y	b_y	**Inhomogen**
1	1	y_2
3	2	S_2_y

$$\boxed{\begin{aligned} a_x &= +S_{2x} - 2x_2 \\ b_x &= -S_{2x} + 3x_2 \\ a_y &= +S_{2y} - 2y_2 \\ b_y &= -S_{2y} + 3y_2 \end{aligned}}$$ und von oben $$\boxed{\begin{aligned} c_x &= S_{0x} \\ c_y &= S_{0y} \\ d_x &= x_0 \\ d_y &= y_0 \end{aligned}}$$