Parameterformen

1. Zweidimensionale Parameterfunktion

Zwei reellwertige Funktionen $x(p) = f_x(p)$ und $y(p) = f_y(p)$ mit $p \in \mathbb{R}$ sind als Abbildung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ definiert:

$f_x(p) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $f_y(p) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Die Parameterfunktion $\overrightarrow{P(p)} = \begin{pmatrix} x(p) \\ y(p) \end{pmatrix}$ mit $p \in \mathbb{R}$ wird damit eine reellwertige Abbildung

$\mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Falls p normiert im Intervall $p \in [0, \varepsilon, 1]$ mit Schrittweite $\epsilon \in (0,1) \in \mathbb{R}$ heisst $\overrightarrow{P(p)}$ normierte Parameterfunktion.

2. Parameterfunktion: Gerade / Strecke

Wahl der Zwei-Punkte-Form einer Geraden mit den gegebenen Punkten P_0 und P_1 :

$P_0 = (x_0, y_0)$ mit $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ und $P_1 = (x_1, y_1)$ mit $x_1, y_1 \in \mathbb{R}$

Die Parameterfunktion einer Geraden ergibt sich über die Zwei-Punkte-Form:

$$\overrightarrow{P(p)}_{gerade} = \begin{pmatrix} f_x(p) \\ f_y(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_1 - x_0)p + x_0 \\ (y_1 - y_0)p + y_0 \end{pmatrix} p \in \mathbb{R}$$

Die normierte Parameterfunktion einer Gerade ergibt eine Strecke:

$$\overrightarrow{P(p)}_{strecke} = \begin{pmatrix} f_x(p) \\ f_y(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_1 - x_0)p + x_0 \\ (y_1 - y_0)p + y_0 \end{pmatrix} p \in [0..1]$$

Entsprechend die Parameterfunktionen der Steigung:

$$\frac{d\overrightarrow{P(p)}_{gerade}}{dp} = \begin{pmatrix} \frac{df_x(p)}{dp} \\ \frac{df_y(p)}{dp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{pmatrix}$$

3. Parameterfunktion: Kreis / Kreisbogen

Wahl der Zwei-Winkel-Form eines Kreises mit den gegebenen Winkeln α_0 und α_1 :

$\alpha_0 \in [0..N \cdot 2\pi]$ und $\alpha_1 \in [0..N \cdot 2\pi]$ und $N \in \mathbb{N}_0$.

($\alpha_0 < \alpha_1$: positiver Drehsinn, $\alpha_0 > \alpha_1$: negativer Drehsinn)

Bei gegebenem Kreismittelpunkt $P_m = (x_m, y_m)$ und Kreisradius $R > 0 \in \mathbb{R}$ ergibt sich die Parameterfunktion des Kreises:

$$\overrightarrow{P(p)}_{kreis} = \begin{pmatrix} f_x(p) \\ f_y(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_m + R \cdot cos((\alpha_1 - \alpha_0)p + \alpha_0) \\ y_m + R \cdot sin((\alpha_1 - \alpha_0)p + \alpha_0) \end{pmatrix} p \in \mathbb{R}$$

Die normierte Parameterfunktion eines Kreises ergibt einen Kreisbogen:

$$\overrightarrow{P(p)}_{kreisbogen} = \begin{pmatrix} f_x(p) \\ f_y(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_m + R \cdot cos((\alpha_1 - \alpha_0)p + \alpha_0) \\ y_m + R \cdot sin((\alpha_1 - \alpha_0)p + \alpha_0) \end{pmatrix} \; p \in [0..1]$$

Entsprechend die Parameterfunktionen der Steigung:

$$\frac{d\overrightarrow{P(p)}_{kreis}}{dp} = \begin{pmatrix} \frac{df_x(p)}{dp} \\ \frac{df_y(p)}{dp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R \cdot sin((\alpha_1 - \alpha_0)p + \alpha_0) \\ +R \cdot cos((\alpha_1 - \alpha_0)p + \alpha_0) \end{pmatrix}$$

4. Parameterfunktion: Ellipse / Ellipsenbogen

Wahl der Zwei-Winkel-Form einer Ellipse mit den gegebenen Winkeln α_0 und α_1 :

$\alpha_0 \in [0..N \cdot 2\pi]$ und $\alpha_1 \in [0..N \cdot 2\pi]$ und $N \in \mathbb{N}_0$.

($\alpha_0 < \alpha_1$: positiver Drehsinn, $\alpha_0 > \alpha_1$: negativer Drehsinn)

Bei gegebenem Ellipsenmittelpunkt $P_m = (x_m, y_m)$ und grosser Halbachse $A > 0 \in \mathbb{R}$ und kleiner Halbachse $B > 0 \in \mathbb{R}$ ergibt sich die Parameterfunktion der Ellipse:

$$\overrightarrow{P(p)}_{ellipse} = \begin{pmatrix} f_x(p) \\ f_y(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_m + A \cdot cos((\alpha_1 - \alpha_0)p + \alpha_0) \\ y_m + B \cdot sin((\alpha_1 - \alpha_0)p + \alpha_0) \end{pmatrix} \; p \in \mathbb{R}$$

Die normierte Parameterfunktion eines Kreises ergibt einen Kreisbogen:

$$\overrightarrow{P(p)}_{ellipsenbogen} = \begin{pmatrix} f_x(p) \\ f_y(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_m + A \cdot cos((\alpha_1 - \alpha_0)p + \alpha_0) \\ y_m + B \cdot sin((\alpha_1 - \alpha_0)p + \alpha_0) \end{pmatrix} \; p \in [0..1]$$

Entsprechend die Parameterfunktionen der Steigung:

$$\frac{d\overrightarrow{P(p)}_{ellipse}}{dp} = \begin{pmatrix} \frac{df_x(p)}{dp} \\ \frac{df_y(p)}{dp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A \cdot sin((\alpha_1 - \alpha_0)p + \alpha_0) \\ +B \cdot cos((\alpha_1 - \alpha_0)p + \alpha_0) \end{pmatrix}$$

5. Parameterfunktion: Kubischer Spline

Mit der Vier-Punkte-Form eines kubischen Splines ergibt sich mit den gegebenen Randpunkten

$P_0 = (x_0, y_0)$ mit $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ und $P_1 = (x_1, y_1)$ mit $x_1, y_1 \in \mathbb{R}$

und den Randsteigungen

$$S_0\big|_{P_0} = \begin{pmatrix} s_{0x} \\ s_{0y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{df_x(p)}{dp}\big|_{P_0} \\ \frac{df_y(p)}{dp}\big|_{P_0} \end{pmatrix} \text{ und } S_1\big|_{P_1} = \begin{pmatrix} s_{1x} \\ s_{1y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{df_x(p)}{dp}\big|_{P_1} \\ \frac{df_y(p)}{dp}\big|_{P_1} \end{pmatrix}$$

und den zwei Parameterfunktionen dritten Grades

$f_x(p) = a_x p^3 + b_x p^2 + c_x p + d_x$ mit $a_x, b_x, c_x, d_x \in \mathbb{R}$

$f_y(p) = a_y p^3 + b_y p^2 + c_y p + d_y$ mit $a_y, b_y, c_y, d_y \in \mathbb{R}$

$$\overrightarrow{P(p)}_{spline} = \begin{pmatrix} f_x(p) \\ f_y(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x p^3 + b_x p^2 + c_x p + d_x \\ a_y p^3 + b_y p^2 + c_y p + d_y \end{pmatrix}$$

mit den acht zu bestimmenden Polynomkoeffizienten a_x, b_x, c_x, d_x und a_y, b_y, c_y, d_y .

Entsprechend die Parameterfunktionen der Steigung:

$$\frac{d\overrightarrow{P(p)}_{spline}}{dp} = \begin{pmatrix} \frac{df_x(p)}{dp} \\ \frac{df_y(p)}{dp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a_x p^2 + 2b_x p + c_x \\ 3a_y p^2 + 2b_y p + c_y \end{pmatrix}$$

Für Berechnungen der Randsteigungen S_0 und S_1 vergleiche **Anhang - Berechnung der Randsteigung**.

6. Anhang

Berechnung der Randsteigungen

Bei den untersuchten Parameterfunktionen $\overrightarrow{P(t)}$ in $\mathbb{R}^2$ geben die, falls vorhanden, Randparameterfunktionen die notwendigen Steigungen

$$S_0 = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_x(t)}{\partial t}\Big|_{x_0} \\ \frac{\partial f_y(t)}{\partial t}\Big|_{y_0} \end{pmatrix} \text{ und } S_1 = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_x(t)}{\partial t}\Big|_{x_1} \\ \frac{\partial f_y(t)}{\partial t}\Big|_{y_1} \end{pmatrix}$$

Beispiel Steigung einer angrenzenden Strecke:

$$\overrightarrow{S}_{strecke} = \begin{pmatrix} \frac{dx(p)}{dp} \\ \frac{dy(p)}{dp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{pmatrix} \text{ mit } p \in [0..1]$$

Beispiel Steigung eines angrenzenden Kreisbogens:

$$\overrightarrow{S(p)}_{kreisbogen} = \begin{pmatrix} \frac{dx(p)}{dp} \\ \frac{dy(p)}{dp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(\alpha_1 - \alpha_0)R \cdot sin[(\alpha_1 - \alpha_0)p + \alpha_0] \\ +(\alpha_1 - \alpha_0)R \cdot cos[(\alpha_1 - \alpha_0)p + \alpha_0] \end{pmatrix} \text{ mit } p \in [0..1]$$

Beispiel Steigung eines angrenzenden Ellipsenbogens:

$$\overrightarrow{S(p)}_{ellipsenbogen} = \begin{pmatrix} \frac{dx(p)}{dp} \\ \frac{dy(p)}{dp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(\alpha_1 - \alpha_0)A \cdot sin[(\alpha_1 - \alpha_0)p + \alpha_0] \\ +(\alpha_1 - \alpha_0)B \cdot cos[(\alpha_1 - \alpha_0)p + \alpha_0] \end{pmatrix} \text{ mit } p \in [0..1]$$

Umrechnung von unnormierten in normierte Parameterfunktionen

$f(t) = at^2 + bt + c$ mit $t \in \mathbb{R}$

$F(T) = AT^2 + BT + C$ mit $T \in [0, 1]$

alle Punkte müssen gleich sein :

$f(t) = F(T)$

$at^2 + bt + c = AT^2 + BT + C$

Drei Punkte P_0, P_1 und P_2 gegeben (mit $T_0 = 0$ und $T_2 = 1$) :

$P_0 = (t_0, f_0) == (T_0, F_0) = (0, C) = (0, f_0)$

$P_1 = (t_1, f_1) == (T_1, F_1)$

$P_2 = (t_2, f_2) == (T_2, F_2) = (1, A + B + C)$

$f_0 = C$

$f_1 = AT_1^2 + BT_1 + C$

$f_2 = A + B + C$

A	B	C	Inhomogen
0	0	1	f_0
T_1^2	T_1	1	f_1
1	1	1	f_2

A	B	Inhomogen
T_1^2	T_1	f_1
1	1	f_2

$D = T_1^2 - T_1$

$D_A = f_1 - T_1$

$D_B = T_1^2 - f_2$

$$A = \frac{D_A}{D} = \frac{f_1 - T_1}{T_1^2 - T_1}$$

$$B = \frac{D_B}{D} = \frac{T_1^2 - f_2}{T_1^2 - T_1}$$

Mit $f_1 = AT_1^2 + BT_1 + C$

$$\Rightarrow f_1 = \frac{f_1 - T_1}{T_1^2 - T_1} T_1^2 + \frac{T_1^2 - f_2}{T_1^2 - T_1} T_1 + f_0$$

$f_1(T_1^2 - T_1) = (f_1 - T_1)T_1^2 + (T_1^2 - f_2)T_1 + f_0(T_1^2 - T_1)$

$f_1 T_1^2 - f_1 T_1 = f_1 T_1^2 - T_1^3 + T_1^3 - f_2 T_1 + f_0 T_1^2 - f_0 T_1$

$0 = f_1 T_1 - f_2 T_1 + f_0 T_1^2 - f_0 T_1$

$0 = T_1^2(f_0) + T_1(f_1 - f_2 - f_0)$

Lösung der quadratischen Gleichung:

$$ux^2 + vx + w = 0 \;\;\Rightarrow\;\; x_{1/2} = -\frac{v}{2u} \pm \sqrt{\frac{v^2}{4u^2} - \frac{w}{u}}$$

hier: $u = f_0$ und $v = f_1 - f_2 - f_0$ und $w = 0$

$$\Rightarrow\;\; T_{1\pm} = -\frac{f_1 - f_2 - f_0}{2f_0} \pm \sqrt{\frac{(f_1 - f_2 - f_0)^2}{4f_0^2} - \frac{w}{f_0}}$$

und damit

$$A_\pm = \frac{f_1 - T_{1\pm}}{T_{1\pm}^2 - T_{1\pm}}$$

$$B = \frac{T_{1\pm}^2 - f_2}{T_{1\pm}^2 - T_{1\pm}}$$