Minimaler Abstand einer Parameterform zu diskreten Gitterpunkten (2D)

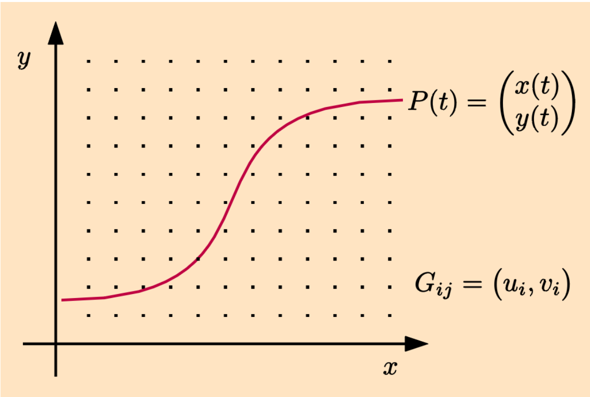
1. Theorie allgemeine Parameterfunktion

Gegeben sei die Parameterform $\boxed{P(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}}$ mit $t \in \mathbb{R}$ und t normiert auf das Intervall $t \in (0, \varepsilon, 1]$ und den beiden reellwertigen Funktionen $\boxed{x(t) = f_x(t)}$ und $\boxed{y(t) = f_y(t)}$.

Weiterhin bilden sich die diskreten Gitterpunkte $\boxed{G_{ij} = (\,u_i\,, v_i\,)}$ definiert durch die Ortsauflösungen $0 < dX \in \mathbb{R} <= 1$ und $0 < dY \in \mathbb{R} <= 1$

$c^2 = a^2 + b^2$

mit $i \in [0, 1, N_i] \in \mathbb{N}$ und $j \in [0, 1, N_j] \in \mathbb{N}$ mit $u_i = i \cdot dX$ und $v_i = i \cdot dY$.



Gesucht ist das zu einem Gitterpunkt G_{ij} zugehörige t_{min} mit der minimalen Distanz D entsprechend:

$D = \sqrt{(x(t) - u_i)^2 + (y(t) - v_i)^2} =: \sqrt{S}$ und damit

$\boxed{S = (x(t) - u_i)^2 + (y(t) - v_i)^2)}$

Die notwendigen Bedingungen für ein minimales Abstands-S_{min} folgen:

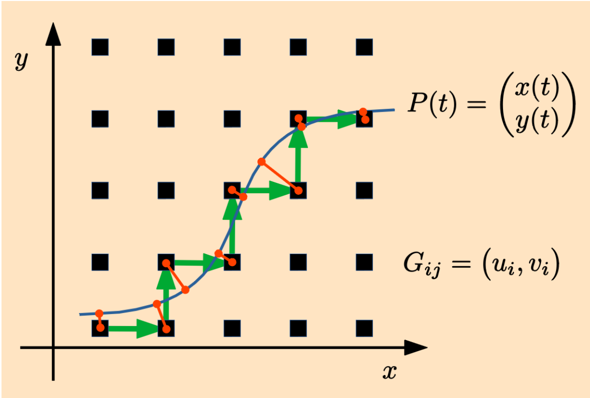
$\frac{\partial S}{\partial t} = 0 = \frac{\partial}{\partial t}[(x(t) - u_i)^2 + (y(t) - v_i)^2]$

$0 = \frac{\partial}{\partial t}(x(t) - u_i)^2 + \frac{\partial}{\partial t}(y(t) - v_i)^2]$

$0 = 2(x(t) - u_i)\frac{\partial x(t)}{\partial t} + 2(y(t) - v_i)\frac{\partial y(t)}{\partial t}$

$$\boxed{0 = (x(t) - u_i)\frac{\partial x(t)}{\partial t} + (y(t) - v_i)\frac{\partial y(t)}{\partial t}}$$

Nachbarpunkte (mit Unterschied von $dx = \{-1, 0, +1\}$ und/oder $dy = \{-1, 0, +1\}$) ergeben dann die diskrete Bahnkurve $B_k = \{(u_k, v_k)\}$ mit $k \in \{0, 1, N_B\}$ mit $N_B + 1$ Interpolations- bzw. Bearbeitungspunkten.



2. Theorie Gerade

Wahl der Zwei-Punkte-Form einer Geraden mit den gegebenen Punkten

$P_0 = (x_0, y_0)$ und $P_1 = (x_1, y_1)$ und mit

$$P(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_1 - x_0)t + x_0 \\ (y_1 - y_0)t + y_0 \end{pmatrix}$$

eingesetzt in

$$0 = (x(t) - u_i)\frac{\partial x(t)}{\partial t} + (y(t) - v_j)\frac{\partial y(t)}{\partial t}$$

$$0 = ((x_1 - x_0)t + x_0 - u_i)\frac{\partial x(t)}{\partial t} + ((y_1 - y_0)t + y_0 - v_i)\frac{\partial y(t)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial x(t)}{\partial t} = \frac{\partial[(x_1 - x_0)t + x_0]}{\partial t} = (x_1 - x_0)$$

$$\frac{\partial y(t)}{\partial t} = \frac{\partial[(y_1 - y_0)t + y_0]}{\partial t} = (y_1 - y_0)$$

$\Rightarrow$ Bestimmung t_{min}:

$$0 = ((x_1 - x_0)t_{min} + x_0 - u_i)(x_1 - x_0) + ((y_1 - y_0)t_{min} + y_0 - v_j)(y_1 - y_0)$$

$$0 = t_{min}[(x_1 - x_0)(x_1 - x_0) + (y_1 - y_0)(y_1 - y_0)] + (x_0 - u_i)(x_1 - x_0) + (y_0 - v_j)(y_1 - y_0)$$

$$0 = t_{min}[(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2] + (x_0 - u_i)(x_1 - x_0) + (y_0 - v_j)(y_1 - y_0)$$

$$t_{min}[(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2] = -(x_0 - u_i)(x_1 - x_0) - (y_0 - v_j)(y_1 - y_0)$$

$$\boxed{t_{min} = -\frac{(x_0 - u_i)(x_1 - x_0) + (y_0 - v_j)(y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}}$$

t_{min} abhängig vom Start/Endpunkt der Gerade $P_0 = (x_0, y_0)$ und $P_1 = (x_1, y_1)$ und dem gewähltem Gitterpunkt $G_{ij} = (u_i, v_j)$.

3. Theorie Kreisbogen

Wahl der Zwei-Winkel-Form eines Kreisbogens mit den gegebenen Winkeln

$\alpha_0 \in [0..2\pi)$ und $\alpha_1 \in (0..2\pi]$ und dem Kreismittelpunkt $P_m = (x_m, y_m)$ und mit

$$P(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_m + R \cdot cos((\alpha_1 - \alpha_0)t + \alpha_0) \\ y_m + R \cdot sin((\alpha_1 - \alpha_0)t + \alpha_0) \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial x(t)}{\partial t} = \frac{\partial [x_m + R \cdot cos((\alpha_1 - \alpha_0)t + \alpha_0)]}{\partial t}$$

$$\frac{\partial x(t)}{\partial t} = -R \cdot (\alpha_1 - \alpha_0) \cdot sin((\alpha_1 - \alpha_0)t + \alpha_0)$$

$$\frac{\partial y(t)}{\partial t} = \frac{\partial [y_m + R \cdot sin((\alpha_1 - \alpha_0)t + \alpha_0)]}{\partial t}$$

$$\frac{\partial y(t)}{\partial t} = +R \cdot (\alpha_1 - \alpha_0) \cdot cos((\alpha_1 - \alpha_0)t + \alpha_0)$$

eingesetzt in $0 = (x(t_{min}) - u_i)\dfrac{\partial x(t_{min})}{\partial t} + (y(t_{min}) - v_j)\dfrac{\partial y(t_{min})}{\partial t}$:

$$\begin{aligned} 0 = {} & [x_m + R \cdot cos((\alpha_1 - \alpha_0)t_{min} + \alpha_0) - u_i][-R \cdot (\alpha_1 - \alpha_0) \cdot sin((\alpha_1 - \alpha_0)t_{min} + \alpha_0)] \\ & + [y_m + R \cdot sin((\alpha_1 - \alpha_0)t_{min} + \alpha_0) - v_j][+R \cdot (\alpha_1 - \alpha_0) \cdot cos((\alpha_1 - \alpha_0)t_{min} + \alpha_0)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 = {} & [(x_m - u_i) + R \cdot cos((\alpha_1 - \alpha_0)t_{min} + \alpha_0)][-R \cdot (\alpha_1 - \alpha_0) \cdot sin((\alpha_1 - \alpha_0)t_{min} + \alpha_0)] \\ & + [(y_m - v_j) + R \cdot sin((\alpha_1 - \alpha_0)t_{min} + \alpha_0)][+R \cdot (\alpha_1 - \alpha_0) \cdot cos((\alpha_1 - \alpha_0)t_{min} + \alpha_0)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 = {} & +[R \cdot cos((\alpha_1 - \alpha_0)t_{min} + \alpha_0)][-R \cdot (\alpha_1 - \alpha_0) \cdot sin((\alpha_1 - \alpha_0)t_{min} + \alpha_0)] \\ & + [x_m - u_i][-R \cdot (\alpha_1 - \alpha_0) \cdot sin((\alpha_1 - \alpha_0)t_{min} + \alpha_0)] \\ & + [R \cdot sin((\alpha_1 - \alpha_0)t_{min} + \alpha_0)][+R \cdot (\alpha_1 - \alpha_0) \cdot cos((\alpha_1 - \alpha_0)t_{min} + \alpha_0)] \\ & + [y_m - v_j][+R \cdot (\alpha_1 - \alpha_0) \cdot cos((\alpha_1 - \alpha_0)t_{min} + \alpha_0)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 = {} & -[R \cdot cos((\alpha_1 - \alpha_0)t_{min} + \alpha_0)][R \cdot (\alpha_1 - \alpha_0) \cdot sin((\alpha_1 - \alpha_0)t_{min} + \alpha_0)] \\ & - [x_m - u_i][R \cdot (\alpha_1 - \alpha_0) \cdot sin((\alpha_1 - \alpha_0)t_{min} + \alpha_0)] \\ & + [R \cdot sin((\alpha_1 - \alpha_0)t_{min} + \alpha_0)][R \cdot (\alpha_1 - \alpha_0) \cdot cos((\alpha_1 - \alpha_0)t_{min} + \alpha_0)] \\ & + [y_m - v_j][R \cdot (\alpha_1 - \alpha_0) \cdot cos((\alpha_1 - \alpha_0)t_{min} + \alpha_0)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 = {} & -(\alpha_1 - \alpha_0)R^2 cos((\alpha_1 - \alpha_0)t_{min} + \alpha_0) sin((\alpha_1 - \alpha_0)t_{min} + \alpha_0) \\ & - (x_m - u_i)(\alpha_1 - \alpha_0)R sin((\alpha_1 - \alpha_0)t_{min} + \alpha_0) \\ & + (\alpha_1 - \alpha_0)R^2 sin((\alpha_1 - \alpha_0)t_{min} + \alpha_0) cos((\alpha_1 - \alpha_0)t_{min} + \alpha_0) \\ & + (y_m - v_j)(\alpha_1 - \alpha_0)R cos((\alpha_1 - \alpha_0)t_{min} + \alpha_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 = {} & -(\alpha_1 - \alpha_0)R^2 - \frac{(x_m - u_i)(\alpha_1 - \alpha_0)R}{cos((\alpha_1 - \alpha_0)t_{min} + \alpha_0)} \\ & + (\alpha_1 - \alpha_0)R^2 + \frac{(y_m - v_j)(\alpha_1 - \alpha_0)R}{sin((\alpha_1 - \alpha_0)t_{min} + \alpha_0)} \end{aligned}$$

$$\frac{(x_m - u_i)(\alpha_1 - \alpha_0)R}{cos((\alpha_1 - \alpha_0)t_{min} + \alpha_0)} = \frac{(y_m - v_j)(\alpha_1 - \alpha_0)R}{sin((\alpha_1 - \alpha_0)t_{min} + \alpha_0)}$$

$$\frac{sin((\alpha_1 - \alpha_0)t_{min} + \alpha_0)}{cos((\alpha_1 - \alpha_0)t_{min} + \alpha_0)} = \frac{(y_m - v_j)(\alpha_1 - \alpha_0)}{(x_m - u_i)(\alpha_1 - \alpha_0)}$$

$$tan((\alpha_1 - \alpha_0)t_{min} + \alpha_0) = \frac{(y_m - v_j)(\alpha_1 - \alpha_0)}{(x_m - u_i)(\alpha_1 - \alpha_0)}$$

$$(\alpha_1 - \alpha_0)t_{min} + \alpha_0 = \arctan\left[\frac{(y_m - v_j)(\alpha_1 - \alpha_0)}{(x_m - u_i)(\alpha_1 - \alpha_0)}\right]$$

$$\boxed{t_{min} = \frac{\arctan\left[\dfrac{(y_m - v_j)(\alpha_1 - \alpha_0)}{(x_m - u_i)(\alpha_1 - \alpha_0)}\right] - \alpha_0}{(\alpha_1 - \alpha_0)}}$$

t_{min} unabhängig vom Kreisradius R, allein bestimmt vom Start/Endwinkel α_0, α_1 , Kreismittelpunkt $P_m = (x_m, y_m)$ des Kreisbogens und dem gewähltem Gitterpunkt $G_{ij} = (u_i, v_j)$.

4. Theorie Ellipsenbogen

5. Theorie Kubischer Spline