

Analysis für Informatiker | An1I

Zusammenfassung

INHALTSVERZEICHNIS

1. Funktionen	2
1.1. Glossar	2
1.2. Anatomie einer Funktion	3
1.3. Nullstellenform	3
1.4. Scheitelform	3
1.5. Verknüpfung von Funktionen	3
1.5.1. Beispiel	3
2. Logarithmen	3
3. Splines	3
3.1. Lineare interpolation	4
3.2. Quadratische interpolation	4
4. misc	4
4.1. Ungleichungen	4
4.2. Mitternachtsformel	4
5. Trigonometrie	4
5.1. Umkehrfunktionen	4
6. Ableitungsregeln	4

1. FUNKTIONEN

1.1. GLOSSAR

Begriff	Bedeutung
Definitionsmenge	Notation definitionsmenge der Funktion $f: D_f$
Zielmenge	Mögliche Funktionswerte
Definitionsbereich	Alle Funktionsinputs
Wertebereich	Alle Funktionswerte
Nullstelle einer Funktion	Argument, welches den Funktionswert 0 hat
Bild einer Funktion	Alle möglichen Funktionswerte einer Funktion
Graph	Menge aller Punkte (Tupel) einer Funktion in der Form (Argument, Funktionswert) $\text{Graph}_f = (x, y) \mid y = f(x)$
Implizite Darstellung	–
Polynom	–
Koeffizient	–
Interpolation	–
Streng wachsende Funktion	$x < \tilde{x} \rightarrow f(x) < f(\tilde{x})$ Bsp: – $f(x) = x + 2$ – $f(x) = e^x$ – $f(x) = a^x, a > 1$
Wachsende Funktion	$x < \tilde{x} \rightarrow f(x) \leq f(\tilde{x})$ Bsp: $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1 \\ 1, & 1 < x \leq 2 \\ (x - 2)^2 + 1, & x > 2 \end{cases}$
Streng fallende Funktion	$x < \tilde{x} \rightarrow f(x) > f(\tilde{x})$
Fallende Funktion	$x < \tilde{x} \rightarrow f(x) \geq f(\tilde{x})$
Gerade Funktion	$\forall x \in D_f : f(-x) = f(x)$ Bsp: – $f(x) = x^n, n$ gerade – $f(x) = x $ – $f(x) = \cos(x)$
Ungerade Funktion	$\forall x \in D_f : f(-x) = -f(x)$ Bsp: – $f(x) = x^n, n$ ungerade – $f(x) = \sin(x)$
Periodische Funktion	– mit der Periode p – $\forall x \in D_f : f(x + p) = f(x)$ – Die kleinste positive Periode heißt primitive Periode
Umkehrfunktion	$f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$

1.2. ANATOMIE EINER FUNKTION

$$\underbrace{f}_{\text{Funktionsname}} : \begin{cases} \underbrace{\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}}_{\substack{\text{Definitionsmenge} \\ \underbrace{x}_{\text{Input / Argument}}} \rightarrow \underbrace{\mathbb{R}^+}_{\substack{\text{Zielmenge} \\ \underbrace{x+4}_{\text{Element des Wertebereichs (Output)}}}} \end{cases}$$

1.3. NULLSTELLENFORM

Quadratisch

- $f(x) = a^2x + bx + c$
- $f(x) = a(x - x_0)(x - x_1)$

Kubisch

- $f(x) = a^3x + b^2x + cx + d$
- $f(x) = a(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$

1.4. SCHEITELFORM

$f(x) = a(x - x_0)^2 + y_0 \rightarrow x_0$ und y_0 sind der Scheitelpunkt

1.5. VERKNÜPFUNG VON FUNKTIONEN

$$A - g(x) \rightarrow B - f(y) \rightarrow C \Leftrightarrow A - f(g(x)) \rightarrow C$$

$$f(g(x)) = (f \circ g)(x)$$

Fast immer ist $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$. Es gibt ein Fall, wo $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ gilt, nämlich bei Umkehrfunktionen. $(f^{-1} \circ f)(x) = (f \circ f^{-1})(x)$

1.5.1. Beispiel

$$g(x) = x^2 + 1$$

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$f(g(4)) = \sqrt{4^2 + 1} = \sqrt{17}$$

$$g(f(4)) = \sqrt{4}^2 + 1 = 5$$

2. LOGARITHMEN

$$a^{\log_a(x)} = x$$

$$\log_a(1) = 0 \text{ weil } a \text{ hoch was ist } 1$$

$$\log_a(a) = 1$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$$

$$\log_a(x * y) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

$$\log_a(x^p) = \log_a(|x|) * p, p \in \mathbb{R}$$

$$\log_a\left(\sqrt[n]{x}\right) = \log_a\left(x^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n} \log_a(x)$$

$$\frac{\log_a(b^y)}{\log_a(b)} = \frac{y \log_a(b)}{\log_a(b)}$$

$$\log_a(x) = -2 \Leftrightarrow a^{-2} = x$$

3. SPLINES

Spline 1. Grades = lineare Splines n-te Splines = Splines aus Polynomen maximal n-ten Grades

3.1. LINEARE INTERPOLATION

$$P_{i(x)} = y_i + \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \right) (x - x_i)$$

3.2. QUADRATISCHE INTERPOLATION

$$P_{i(x)} = a_i x^2 + b_i x + c_i$$

4. MISC

4.1. UNGLEICHUNGEN

Wenn man mit negativen Termen multipliziert oder eine fallende Funktion anwendet, muss das Ungleichzeichen geändert werden.

4.2. MITTERNACHTSFORMEL

$$an^2 + bn + c = 0 \Rightarrow u_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

5. TRIGONOMETRIE

x	0	$30 = \frac{\pi}{6}$	$45 = \frac{\pi}{4}$	$60 = \frac{\pi}{3}$	$90 = \frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	0.5	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0.5	0

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

Trigonometrischer Satz des Pythagoras: $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

5.1. UMKEHRFUNKTIONEN

$$\arccos : \begin{cases} [-1; 1] \rightarrow [0; \pi] \\ x \mapsto \text{Lösung } y \in [0; \pi] \text{ der Gleichung } \cos(y) = x \end{cases}$$

$$\arcsin : \begin{cases} [-1; 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right] \\ x \mapsto \text{Lösung } y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right] \text{ der Gleichung } \sin(y) = x \end{cases}$$

$$\arctan : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right) \\ x \mapsto \text{Lösung } y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right) \text{ der Gleichung } \tan(y) = x \end{cases}$$

6. ABLEITUNGSREGELN

Funktion	Ableitungsfunktion
$x \mapsto 1$	$x \mapsto 0$
$\text{id} := x \mapsto x$	$x \mapsto 1$
$\text{sqr} := x \mapsto x^2$	$x \mapsto 2x$
$\text{rez} := x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto -\left(\frac{1}{x^2}\right)$

Funktion	Ableitungsfunktion
$\text{sqrt} := x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$x \mapsto x^n$	$x \mapsto nx^{n-1}$
$x \mapsto e^x$	$x \mapsto e^x$
$x \mapsto e^{-x}$	$x \mapsto -e^{-x}$
$x \mapsto a^x$	$x \mapsto \ln(a)a^x$
\ln	$x \mapsto \frac{1}{x}$ für $x > 0$
$\log_b(x)$	$\frac{1}{\ln(b)x}$
\sin	\cos
\cos	$-\sin$
\tan	$1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$
\arcsin	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
\arccos	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
\arctan	$\frac{1}{1+x^2}$