1. AUSSAGENLOGIK

1.1. GLOSSAR

Begriff	*Bedeutung*
Aussage	Feststellender Satz, dem eindeutig «wahr» oder «falsch» zugeordnet werden kann. Symbole wie $A, B, C\dots$ werden dafür verwendet
Aussagenlogische Form	Kombination von Aussagen, verknüpft durch Junktoren
Aussageform	Aussagen verknüpft mit Variablen
Normalform	Standartisierte Aussagenlogische Formen (Formeln)
Negationsnormalform	$\neg$ steht ausschliesslich direkt vor Aussagen oder Konstanten
Verallgemeinerte Disjunktion	– Einzelne Aussage oder Negation – wahr oder falsch – Disjunktion $A \lor B$, falls A und B selbst verallgemeinerte Disjunktionen sind
Verallgemeinerte Konjunktion	– Einzelne Aussage oder Negation – wahr oder falsch – Konjunktion $A \land B$, falls A und B selbst verallgemeinerte Konjunktionen sind
Disjunktive Normalform	Disjunktion von (oder eine einzelne) verallgemeinerten Konjunktionen Beispiel: $(A \land B \land C) \lor (A \land \neg B \land \neg C)$
Konjunktive Normalform	Konjunktion von (oder eine einzelne) verallgemeinerten Disjunktionen Beispiel: $(A \lor B \lor C) \land (A \lor \neg B \lor \neg C)$
Kontradiktion	Immer falsch
Tautologie	Immer wahr
Junktoren (/Konnektoren)	$\neg$ Negation $\land$ Konjunktion $\lor$ Disjunktion (einschliessliches oder!) $\Rightarrow$ Implikation $\Leftrightarrow$ Äquivalenz
Bindungsstärke	$\neg$ vor $\land, \lor$ vor $\Rightarrow, \Leftrightarrow$

1.2. FORMELN

$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$

$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \land B) \lor (\neg A \land \neg B)$

$A \lor (\neg A \land B) \Leftrightarrow A \lor B$

$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \lor B)$

$\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow A \land \neg B$

$(A \Rightarrow B \Rightarrow C) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B) \land (B \Rightarrow C)$

1.3. RECHENREGELN

Begriff	*Bedeutung*
Abtrennungsregel	$(A \land (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$
Kommutativität	$(A \land B) \Leftrightarrow (B \land A)$ $(A \lor B) \Leftrightarrow (B \lor A)$
Assoziativität	$A \land (B \land C) \Leftrightarrow (A \land B) \land C$ $A \lor (B \lor C) \Leftrightarrow (A \lor B) \lor C$
Distributivität	$A \land (B \lor C) \Leftrightarrow (A \land B) \lor (A \land C)$ $A \lor (B \land C) \Leftrightarrow (A \lor B) \land (A \lor C)$
Absorption	$A \lor (A \land B) \Leftrightarrow A$ $A \land (A \lor B) \Leftrightarrow A$
Idempotenz	$A \lor A = A$ $A \land A = A$
Doppelte Negation	$\neg(\neg A) \Leftrightarrow \neg\neg A \Leftrightarrow A$
Konstanten	W = wahr F = falsch
de Morgan	$\neg(A \land B) \Leftrightarrow \neg A \lor \neg B$ $\neg(A \lor B) \Leftrightarrow \neg A \land \neg B$

2. PRÄDIKATENLOGIK

2.1. GLOSSAR

Begriff	*Bedeutung*
Subjekt	«Konkretes Ding» / Stellvertreter einer Variable
Prädikat	«Eigenschaft», zB «ist eine Primzahl» Prädikate werden oft wie Funktionen geschrieben. Ist P ein Prädikat, dann bedeutet $P(x)$, dass x das Prädikat erfüllt. $P(x)$ ist eine Aussageform.
Quantor	$\forall$ Allquantor (Für alle) $\exists$ Existenzquantor (Es existiert)

3. BEWEISEN

3.1. INDUKTION

$A(1) \land (A(n) \Rightarrow A(n+1)) \Rightarrow A(m), m \in \mathbb{N}$

TODO: besseres beispiel

Beispiel: $2 \mid (6^n)$

1) Verankerung: $n = 0$
   – $2 \mid (6^0)$
2) Induktionsschritt $n \to n+1$
   – $2 \mid (6^{n+1})$
   a) Induktionsannahme: $2 \mid (6^n)$
   b) Behauptung: $2 \mid (6^{n+1})$
   c) Beweis: Verwendung der Annahme, um Richtigkeit der Behauptung zu zeigen $2 \mid (6^n + 6)$

3.1.1. Techniken

1) Direkter Beweis $f(n) = f_1(n) = f_2(n) = \dots = f_m(n) = g(n)$
2) Dfferenz gleich Null $f(n) - g(n) = 0 \Rightarrow f(n) = g(n)$
3) Äquivalenzumformung
4) Dritte Grösse (vereinfachen) $g(n) = h(n) = f(n)$

4. DIREKTE, ITERATIVE UND REKURSIVE BERECHNUNGEN

4.1. GLOSSAR

Begriff	*Bedeutung*
Folge	Nummerierte Liste von Objekten (Folgegliedern)
Reihe	Summe von Folgegliedern einer Zahlenfolge

5. MENGEN

5.1. GLOSSAR

Begriff	*Bedeutung*
Aufzählend	$\{1, 2, 3\}$
Beschreibend	$\{x \in \mathbb{N}^+ \mid x < 4\}$
Mächtigkeit	Anzahl Elemente einer Menge $\lvert M \rvert$
Potenzmenge	Menge aller Teilmengen einer Menge $P(M)$ $\lvert P(M) \rvert = 2^{\lvert M \rvert}$
Teilmenge	$T(n)$ = Menge der Teiler der Zahl n
Kartesisches Produkt	$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$

5.2. RECHENREGELN

Für die Mengen A und B in der Obermenge M gelten die folgenden Aussagen:

$A \setminus \emptyset = A$

$A \setminus A = \emptyset$

$\overline{\overline{A}} = A$

$A \cap \overline{A} = \emptyset$

$A \cup \overline{A} = M$

$\overline{A \cup A} = \overline{A} \cap \overline{B}$

$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

$A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$

$A \setminus B = A \cap \overline{B}$

$\overline{A \setminus B} = \overline{A} \cup B$

$(A \setminus B) \cup (A \cap B) = A$

$(A \setminus B) \cap (A \cap B) = \emptyset$

Weiteres:

$(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$

$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$

6. FORMELN, ABBILDUNGEN, RELATIONEN

6.1. GLOSSAR

Begriff	*Bedeutung*
Funktion/Abbildung	Zuordnung, die jedem Elemend der Definitionsmenge D genau ein Element einer Zielmenge Z zuordnet. Injektive Relation $f : D \to Z$ Abbildungen mit mehreren Argumenten: $f : A \times B \to Z, f(a, b) = y$
Graph	Menge von Paaren $(x, f(x))$ $G \in D \times Z$
Relation	Teilmenge des Kartesischen Produktes mehrerer Mengen $A = \prod_{i=1}^{n} A_i, \lvert A_i \rvert = n_i \Rightarrow \lvert A \rvert = \prod_{i=1}^{n} n_i$ – Kleiner-Relation: $R_< = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B, a < b\}$ – Gleich-Relation: $R_= = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B, a = b\}$ – Kleiner-Gleich-Relation: $R_\le = R_= \cup R_< = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B, a \le b\}$
Surjektiv	Alle Elemente der Definitions- und Zielmenge sind «verknüpft» / jedes Element der Bildmenge kommt als Bild vor
Injektiv	Alle Inputs haben eindeutige Outputs $a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$
Bijektiv	Surjektiv und Injektiv
Reflexiv	Alle Elemente von A stehen zu sich selbst in Beziehung $a \in A \Rightarrow (a, a) \in R$ $A \Leftrightarrow A$
Symmetrisch	$(a, b) \in R \land (b, a) \in R$ $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow A)$
Transitiv	$(a, b) \in R \land (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$ $(A \Leftrightarrow B) \land (B \Leftrightarrow C) \Rightarrow (A \Leftrightarrow C)$
Äquivalenzrelation	reflexiv, symmetrisch und transitiv $\Leftrightarrow, =$
Irreflexiv	$a \in A \Rightarrow \neg(a, a) \in R$
Asymmetrisch	$(a, b) \in R \Rightarrow \neg(b, a) \in R$
Antisymmetrisch	$((a, b) \in R) \land ((b, a) \in R) \Rightarrow a = b$
Ordnungsrelation	reflexiv, antisymmetrisch und transitiv $\le$
Symmetrische Differenz	$A \Delta B = \{x \in G \mid (x \in A \cup B) \land \neg(x \in A \cap B)\}$ $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$

7. MODULO-RECHNEN

Die Modulo-Relation ist eine ***Äquivalenzrelation*** auf $\mathbb{Z}$.

7.1. GLOSSAR

Begriff	*Bedeutung*
Teiler-Relation	Für $a, b \in \mathbb{Z}$ ist die Teiler-Relation $b \mid a \Leftrightarrow T(b, a) \Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{Z} : bq = a$ $b \mid a \Leftrightarrow -b \mid a$ $b \mid a \Leftrightarrow b \mid -a$ Ordnungsrelation auf $\mathbb{N}$
Modulo-Relation	Für $a, q, r \in \mathbb{Z}$ ist die Modulo-Relation $R_q(a, r) \Leftrightarrow q \mid a - r \Leftrightarrow a \equiv r \bmod q$
~	«relates to» $a \sim b \Leftrightarrow (a, b) \in R$
Quotient, Rest	Zu jeder Zahl $a \in \mathbb{Z}$ und jeder Zahl $b \in \mathbb{Z}$ gibt es eindeutig bestimmte Zahlen $q, r \in \mathbb{Z}$ mit $a = q \cdot b + r, 0 \le r < b$ Bsp: $7 = 2 \cdot 3 + 1$ q heisst ***Quotient*** r heisst ***Rest***
Restklassen	$[b]_q = \{a \in \mathbb{Z} \mid a \equiv b \bmod q\}, q > 0$ $\mathbb{Z}_q = \left\{[0]_q, [1]_q, [2]_q, \dots, [q-1]_q\right\} = \underbrace{\{0, 1, 2, 3, \dots, q-1\}}_{\text{Vereinfachung}}$
Multiplikatives Inverses	Für $a \in \mathbb{Z}_q$ ist $b \in \mathbb{Z}_q$ das ***multiplikative inverse*** von a, wenn $a \cdot b \equiv 1 \bmod q$
Nullteiler	Wenn für $a, b \in \mathbb{Z}_q : ab \equiv 0 \bmod q$ und $a \not\equiv 0 \bmod q \land b \not\equiv 0 \bmod q$, heissen a, b ***Nullteiler***

7.2. RECHENREGELN

1) $(a + b) \bmod n = ((a \bmod n) + (b \bmod n)) \bmod n$
2) $(a - b) \bmod n = ((a \bmod n) - (b \bmod n)) \bmod n$
3) $(a \cdot b) \bmod n = ((a \bmod n) \cdot b \bmod n)) \bmod n$
4) $a^d \bmod n = \left(a^{d-x} \cdot a^x\right) \bmod n = \left(\left(a^{d-x} \bmod n\right) \cdot (a^x \bmod n)\right) \bmod n$

7.3. PRIMFAKTORENZERLEGUNG

Begriff	*Bedeutung*
$\mathrm{ggT}(a, b)$	$\max\{d \in \mathbb{N} \mid d \mid a \land d \mid b\}$
$\mathrm{kgV}(a, b)$	$\min\{m \in \mathbb{N} \mid a \mid m \land b \mid m\}$ $\frac{ab}{\mathrm{ggT}(a,b)}$
Teilerfremd	Zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$ heissen ***Teilerfremd***, wenn $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$ Sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl und $q \in \mathbb{N}, q < p, q \neq 0$ dann ist $\mathrm{ggT}(p, q) = 1$

7.4. EUKLIDSCHER ALGORITHMUS

Seien $a, b \in \mathbb{N}, a \neq b, a \neq 0, b \neq 0$

Initialisierung: Setze $x \coloneqq a, y \coloneqq b$ und $q \coloneqq x, r \coloneqq x - q \cdot y$ (d.h. bestimme q und r so, dass $x = q \cdot y + r$ ist)

Wiederhole bis $r = 0$ ist

Ergebnis: $y = \mathrm{ggT}(a, b)$

7.4.1. Beispiel

$\mathrm{ggT}(122, 72), a = 122, b = 72$

– Init: $x_0 = a = 122, y_0 = b = 72$
– Iteration:

	$x_i = y_{i-1}$	$y_i = r_{i-1}$	$q_i = x_i \operatorname{div} y_i$	$r_i = x_i \bmod y_i = x_i - q_i \cdot y_i$
$i = 0$	122	72	1	50
$i = 1$	72	50	1	22 Muster: $r_{i+1} < r_i$
$i = 2$	50	22	2	6
$i = 3$	22	6	3	4
$i = 4$	6	4	1	2
$i = 5$	4	2 =ggT(122,72)	2	0 (immer 0 am Schluss)

7.5. ERWEITETER EUKLIDSCHER ALGORITHMUS

Seien $a, b \in \mathbb{N}, a \neq b, a \neq 0, b \neq 0$

Initialisierung: Setze $x \coloneqq a, y \coloneqq b, q \coloneqq x \div y, r \coloneqq x - q \cdot y, (u, s, v, t) = (1, 0, 0, 1)$ (d.h. bestimme q und r so, dass $x = q \cdot y + r$ ist)

Wiederhole bis $r = 0$ ist

Ergebnis: $y = \mathrm{ggT}(a, b) = s \cdot a + t \cdot b$

Wenn $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$ ist, dann folgt: $t \cdot v \equiv 1 \bmod a$

7.5.1. Beispiel

$\mathrm{ggT}(99,79)$

i	$x = y_{-1}$	$y = r_{-1}$	$q = x \div y$	$r = x_i - q_i \cdot y_i$	$u = s_{-1}$	$s = u_{-1} - q_{-1} \cdot s_{-1}$	$v = t_{-1}$	$t = v_{-1} - q_{-1} \cdot t_{-1}$
$i=0$	99	79	1	20	1	0	0	1
$i=1$	79	20	3	19	0	1	1	−1
$i=2$	20	19	1	1	1	−3	−1	4
$i=3$	19	1	19	0	−3	4	4	−5

Daraus folgend:
- $\mathrm{ggT}(99,79) = 4 \cdot 99 + (-5) \cdot 79 \Leftrightarrow 396 - 395 = 1$
- $99 + (-5) = 94$ ist mult. Inv. von 79 in $\mathbb{Z}_{99}$
- $79 + 4 = 83$ ist mult. Inv. von 99 in $\mathbb{Z}_{79}$

7.6. KLEINER FERMAT

Sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl und $x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ mit $\mathrm{ggT}(x,p) = 1$
Dann ist: $x^{p-1} \equiv 1 \bmod p$
Daraus folgend:

$$\begin{aligned} & x^{p-1} \equiv 1 \bmod p && \mid ()^n \\ \Leftrightarrow\ & x^{n(p-1)} \equiv 1 \bmod p && \mid \cdot x \\ \Leftrightarrow\ & x^{1+n(p-1)} \equiv x \bmod p \\ \Leftrightarrow\ & x^{1 \bmod (p-1)} \equiv x \bmod p \end{aligned}$$

7.7. SATZ VON EULER

Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $z \in \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{ggT}(z,n) = 1$. Dann ist $z^{\varphi(n)} \equiv 1 \bmod n$.

7.7.1. Euler'sche φ-Funktion (Totient)

Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $\mathbb{Z}_n^* = \left\{x \in \mathbb{Z}_n \mid x \text{ hat ein multiplikatives Inverses in } \mathbb{Z}_n\right\}$.
Dann heisst $\varphi(n)$:

$$\begin{aligned} \varphi(n) &= \text{Anz. Elemente in } \mathbb{Z}_n \text{ mit mult. Inversen} \\ &= \text{Anz. Zahlen } 1 \le q \le n \text{ mit } \mathrm{ggt}(q,n) = 1 \\ &= \left|\mathbb{Z}_n^*\right| \end{aligned}$$

7.7.1.1. Rechenregeln

1) Sei $n \in \mathbb{N}$ eine Primzahl, dann $\varphi(n) = n - 1$
2) Sei $n \in \mathbb{N}$ eine Primzahl und $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, dann $\varphi(n^p) = n^{p-1} \cdot (n-1)$
3) Seien $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $\mathrm{ggT}(m,n) = 1$, dann $\varphi(n \cdot m) = \varphi(n) \cdot \varphi(m)$

7.8. RSA VERSCHLÜSSELUNG

1) Wähle 2 Primzahlen p, q
2) Berechne $n = p \cdot q$
3) Berechne $\varphi(n) = (p-1)(q-1)$
4) Wähle a, b so, dass $a \cdot b \equiv 1 \bmod \varphi(n)$
5) Vergesse $p, q, \varphi(p \cdot q)$. Brauchen wir nicht und riskieren nur, dass uns jemand hackt

Public key ist nun n, b, Private key ist n, a
Verschlüsseln: $c^a \bmod n$
Entschlüsseln: $z^b \bmod n \Leftrightarrow c^{a^b} \bmod n$
Sidenote: Fürs Alphabet muss n grösser sein als 26

8. LINEARE ALGEBRA

3b1b <3

8.1. GLOSSAR

Begriff	Bedeutung
Lineares Gleichungssystem (LGS)	TODO:
Homogenes LGS	$M \cdot \vec{x} = \vec{0}$
Inhomogenes LGS	$M \cdot \vec{x} = \vec{b}$
Lineare Abbildung	$L : \begin{cases} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \\ \vec{x} \mapsto M\vec{x} \end{cases}$ $\mathrm{kern}(L) = \{\vec{0}\} \Leftrightarrow L$ ist injektiv
Kern	Lösungsmenge des Homogenen LGS = $\left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid L(\vec{x}) = \vec{0}\right\}$
Koeffizientenmatrix	TODO:

8.2. PIVOT-GLEICHUNG

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} & 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 = -6 \\ \text{(II)} & x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -10 \\ \text{(III)} & 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 = -18 \\ \Rightarrow & \\ \text{(I')} & 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 = -6 \\ \text{(II')} = \text{(II)} - \text{(I)} & 1x_2 + 2x_3 = -4 \\ \text{(III')} = \text{(III)} - 2\text{(I)} & 1x_2 + 4x_3 = -6 \\ \Rightarrow & \\ \text{(I'')} & 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 = -6 \Rightarrow x_1 = -6 - x_2 - x_3 = -6 + 2 + 1 = -3 \\ \text{(II'')} = \text{(II)} & 1x_2 + 2x_3 = -4 \Rightarrow x_2 = -4 - 2x_3 = -4 + 2 = -2 \\ & \text{Rückwärtssubstitution} \\ \text{(III'')} = \text{(III')} - \text{(II')} & 2x_3 = -2 \Rightarrow x_3 = -1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

8.3. GAUSS-TABLEAU

	x_1	x_2	x_3	1	
I	1	1	1	−6	
II	1	2	3	−10	−(I)
III	2	3	6	−18	−2(II)
			⇒		
I'	1	1	1	−6	
II'	0	1	2	−4	
III'	0	1	4	−6	−(II')
			⇒		
I''	1	1	1	−6	
II''	0	1	2	−4	
III''	0	0	2	−2	$\cdot \frac{1}{2}$
			⇒		
I'''	1	1	1	−6	−(III''')
II'''	0	1	2	−4	−2(III''')
III'''	0	0	1	−1	
			⇒		

Koeffizientenmatrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

	x_1	x_2	x_3	1	
I''''	1	1	0	−5	−(II'''')
II''''	0	1	0	−2	
III''''	0	0	1	−1	
			⇒		
	1	0	0	−3	
	0	1	0	−2	
	0	0	1	−1	

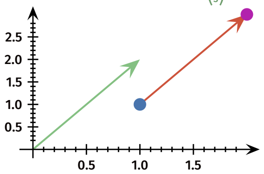
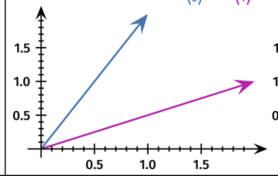
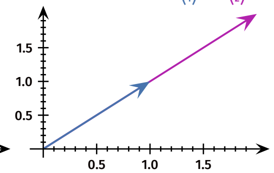
Ergebnisvektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$ Lösungsvektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ Lineares Gleichungssystem $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$

p = Anzahl Pivot-Variablen.
Wenn $b_{p+1} = \ldots = b_m = 0$ dann ist das LGS lösbar (homogenes Gleichungssystem), sonst unlösbar.
Wenn $p = n$ dann hat LGS genau eine Lösung.
Wenn $p < n$ dann hat LGS unendlich viele Lösungen.

8.4. VEKTOREN

8.4.1. Glossar

Begriff	Bedeutung
Vektor	Liste von Zahlen
Nullvektor	$\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
Ortsvektor	Ortsvektor $\vec{p}$ vom Nullpunkt des Koordinatensystems $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ zum Punkt P

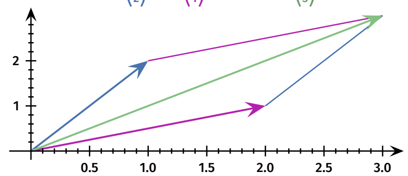
Begriff	Bedeutung
Richtungsvektor	Richtungsektor $\vec{AB}$ vom Punkt A zum Punkt B ist $\vec{b} - \vec{a}$ $A = (1;1), B = (2;3), \vec{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 
Linearkombination	Linearkombination der Variabeln x_1, x_2, x_3 (Bsp. $3 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 = -6$). Vektoren werden jeweils mit einer Zahl mutlipliziert und miteinander summiert
Lineare Unabhängigkeit	$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ heissen linear unabhängig, wenn die Gleichung $\lambda_1 \cdot \vec{v}_1, \lambda_2 \cdot \vec{v}_2, \ldots, \lambda_n \cdot \vec{v}_n = \vec{0}$ genau eine Lösung hat, nämlich $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$ $\begin{pmatrix} \uparrow & \ldots & \uparrow \\ \vec{v}_1 & \ldots & \vec{v}_n \\ \downarrow & \ldots & \downarrow \end{pmatrix} \cdot \vec{\lambda} = \vec{0}$ eindeutig lösbar = $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ sind linear unabhängig Linear unabhängig: $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  Linear abhängig: $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ 
Skalarprodukt	$\vec{a} \bullet \vec{b} = c$ $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$
Orthogonale Projektion	TODO:
Betrag/Länge eines Vektors	$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 5^2} = \sqrt{38}$
Normalenvektor	TODO:

8.4.2. Vektorenrechnen

Addition:

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

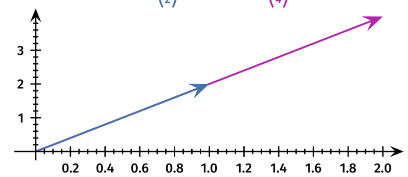
$$\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+5 \\ 2+(-9) \\ 3+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix}$$



Multiplikation mit reellen Zahlen (=Skalare):

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = 2 \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$3 \cdot \vec{v} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$



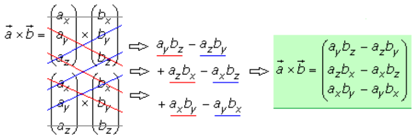
8.4.3. Rechenregeln

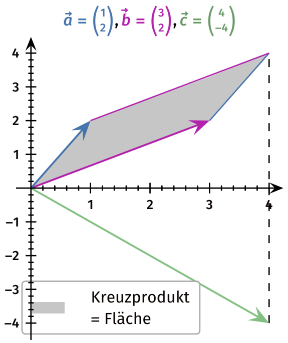
Falls die Vektoren senkrecht zueinanderstehen, ist das Skalarprodukt gleich 0

$$\lambda\vec{0} = \vec{0}$$
$$\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$$
$$-\vec{v} = -1 \cdot \vec{v}$$
$$-\vec{v} + \vec{v} = \vec{0}$$
$$(\lambda\mu)\vec{v} = \lambda(\mu\vec{v}) = \lambda\mu\vec{v}$$
$$\lambda(\vec{v} + \vec{w}) = \lambda\vec{v} + \lambda\vec{w}$$
$$\vec{v} + (\vec{u} + \vec{w}) = (\vec{v} + \vec{u}) + \vec{w} = \vec{v} + \vec{u} + \vec{w}$$

8.4.4. Kreuzprodukt

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$$
$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$





8.4.4.1. Eigenschaften

Anti-kommutativ: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$. Konsequenz: $\vec{a} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$

Distributiv: $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

Gemischt-assoziativ: $\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b})$

Das Kreuzprodukt ist **nicht** assoziativ. $\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c}$ darf man nicht! $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$

8.4.4.2. Geometrische Eigenschaften

$\vec{a} \times \vec{b}$ steht immer senkrecht auf $\vec{a}$ und auf $\vec{b}$.

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$ bilden ein Rechtssystem

$|\vec{a} \times \vec{b}|$ = Flächeninhalt des durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms $= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi)$

TODO: diagram

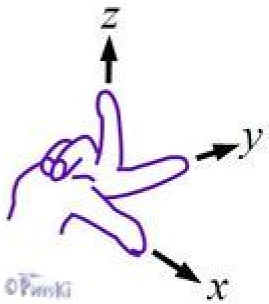


Abbildung 1: Rechtssystem

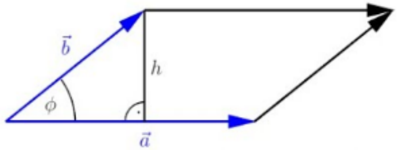


Abbildung 2: **Flächeninhalt** $h \cdot a$

8.4.5. Vektorraum

Ein Vektorraum ist eine Menge V mit den Rechenoperationen:

$$\oplus : V \times V \to V, (\vec{v}, \vec{w}) \mapsto \vec{v} \oplus \vec{w}$$
$$\odot : \mathbb{R} \times V \to V, (\lambda, \vec{v}) \mapsto \lambda \odot \vec{v}$$

Mit den Eigenschaften:

- Vektoraddition:
  - ***Assoziativgesetz***: $u \oplus (v \oplus w) = (u \oplus v) \oplus w$
  - Existenz eines ***neutralen Elements*** $0_V \in V$ mit $v \oplus 0_V = 0_V \oplus v = v$
  - Existenz eines zu $v \in V$ ***inversen Elements*** $-v \in V$ mit $v \oplus (-v) = (-v) \oplus v = 0_V$
  - ***Kommutativgesetz***: $v \oplus u = u \oplus v$
- Skalarmultiplikation:
  - $\alpha \odot (u \oplus v) = (\alpha \odot u) \oplus (\alpha \odot v)$
  - $(\alpha + \beta) \odot v = (\alpha \odot v) \oplus (\beta \odot v)$
  - $(\alpha \cdot \beta) \odot v = \alpha \odot (\beta \odot v)$
  - $1 \odot v = v$ für das ***Einselement*** $1 \in K$ des ***Skalarkörpers***

Gelten diese Eigenschaften für die Teilmenge eines grösseren Vektorraums W, so nennt man V ***Untervektorraum*** von W. Heisst: Man hat nur dann einen Untervektorraum V, wenn die Produkte der Multiplikation oder Addition der Elemente dieses Raumes auch in V liegen. Untervektorräume sind also unendliche Räume mit n Dimensionen weniger, zB W = 3-Dimensionaler Vektorraum, V = 2-Dimensionaler Untervektorraum.

Kern von $A = U = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\vec{x} = \vec{0}\}, A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$.

8.4.6. Lineare Abbildung

Eine Lineare Abbildung ist eine Funktion

$$L : \begin{cases} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \\ \vec{x} \mapsto L(\vec{x}) \end{cases}$$

mit den Eigenschaften

$$L(\vec{x} + \vec{y}) = L(\vec{x}) + L(\vec{y})$$
$$L(\lambda\vec{x}) = \lambda L(\vec{x})$$

Für jede lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gibt es eine (Abbildungs) Matrix $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit der Eigenschaft, dass $L(\vec{x}) = M\vec{x}$

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & \dots & m_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{m1} & \dots & m_{mn} \end{pmatrix}$$
$$m_{ij} = \vec{e}_i \bullet L(\vec{e}_j)$$

8.5. MATRIZEN

8.5.1. Glossar

Begriff	***Bedeutung***
Spaltenvektoren	Spalten der Matrix als Vektoren
Zeilenvektoren	Zeilen der Matrix als Vektoren
Rang	Wieviele Spaltenvektoren einer Matrix linear unabhängig sind
Nullmatrix	$0 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$
Quadratische Matrix	$M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ Gleichviele Zeichen und Spalten
Diagonalmatrix	(immer quadratisch und symmetrisch): $D = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 \end{pmatrix}, d_{ij} = 0$ für $i \neq j$
Einheitsmatrix	(immer diagonal): $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Symmetrische Matrix	(immer quadratisch): $A = A^T, a_{ij} = a_{ij}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$
Obere Dreiecksmatrix	$O = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & x_4 & x_5 \\ 0 & 0 & x_6 \end{pmatrix}, o_{ij} = 0$ für $i > j$
Kovarianzmatrix	immer symmetrisch
Reguläre Matrix	Quadratische Matrix mit höchstem Rang (Rang = Anzahl Spalten/Reihen)
Singuläre Matrix	Quadratische Matrix mit kleinerem Rang (Rang < Anzahl Spalten/Reihen)
Invertierbare Matrix	Für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heisst A invertierbar, wenn es eine Matrix A^{-1} gibt, so dass $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A =$ **Einheitsmatrix (E)**. Dies ist der Fall, wenn A Regulär ist.

8.5.2. Definition

Matrix mit 2 Zeilen und 3 Spalten

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$$

Komponenten von A: a_{ij}
i: Zeilenindex, j: Spaltenindex. Bsp: $a_{23} = 7$

8.5.3. Matrizen als Vektoren interpretieren

→ A ist ein 6-Dimensionaler VR (Vektorraum)

$$\text{Variante 1: } \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \\ a_{14} \\ a_{15} \\ a_{16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \\ 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \text{Variante 2: } \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \\ a_{14} \\ a_{15} \\ a_{16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{R}^n \text{ interpretiere als } \begin{cases} \mathbb{R}^{n \times 1} \to \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \text{ Spaltenvektor} \\ \mathbb{R}^{1 \times n} \to \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} \text{ Zeilenvektor} \end{cases}$$

Zu A gehörige Zeilenvektore $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} \leftarrow \vec{a}_1 \rightarrow \\ \leftarrow \vec{a}_2 \rightarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Zu A gehörige Spaltenvektore $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \vec{a}_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

8.5.4. Matrizen transponieren

Transponierte Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ wäre: $A^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$
$A = (a_{ij}), A^T = (a_{ji})$
Rolle von Zeile und Spalte vertauscht: $a_{ij} \to a_{ji}$
Bsp:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 2}, A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

8.5.5. Matrizen invertieren

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

8.5.6. Matrixmultiplikation

Meistens nicht kommutativ ($A \cdot B \neq B \cdot A$)
B muss genau gleich viele Zeilen haben wie A Spalten

$$A \in \mathbb{R}^{m \times l}, B \in \mathbb{R}^{l \times n}, C = A \cdot B \in \mathbb{R}^{m \times n}$$
$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{l} a_{ik}b_{kj}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 1 & 0 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2 \cdot 6 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 8) & (2 \cdot 4 + 3 \cdot 0 + 1 \cdot 9) \\ (4 \cdot 6 + -1 \cdot 1 + 7 \cdot 8) & (4 \cdot 4 + -1 \cdot 0 + 7 \cdot 9) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 17 \\ 79 & 79 \end{pmatrix}$$

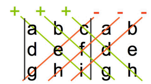
8.5.7. Determinante

Determinante einer quadratischen Matrix ist eine reelle Zahl

1×1 Matrix : $\det(a) = a$

2×2 Matrix : $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - cb$

$$3 \times 3 \text{ Matrix} : \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$-a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$



Bsp:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

$$x = \frac{\det\begin{pmatrix} e & b \\ f & d \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} = \frac{ed - fb}{ad - cb}$$

$$y = \frac{\det\begin{pmatrix} a & e \\ c & f \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} = \frac{af - ce}{ad - cb}$$

Definition der Determinante:

$$\det : \begin{cases} \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R} \\ M \quad \mapsto \det(M) \end{cases}$$

Definition über Eigenschaften:

$$\det(\mathbb{1}) = 1$$

$$\det\begin{pmatrix} \dots & \vec a_1 & \dots \\ \dots & \lambda \vec a_k & \dots \\ \dots & \vec a_n & \dots \end{pmatrix} = \lambda \det\begin{pmatrix} \dots & \vec a_1 & \dots \\ \dots & \vec a_k & \dots \\ \dots & \vec a_n & \dots \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} \dots & \vec a_1 & \dots \\ \dots & \vec a_k + \vec b_k & \dots \\ \dots & \vec a_n & \dots \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \dots & \vec a_1 & \dots \\ \dots & \vec a_k & \dots \\ \dots & \vec a_n & \dots \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} \dots & \vec a_1 & \dots \\ \dots & \vec b_k & \dots \\ \dots & \vec a_n & \dots \end{pmatrix}$$

$\det M = 0$ wenn M 2 gleiche Zeilen hat

Bsp:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 10 & 12 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} = 2\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 10 & 12 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 8 & 10 & 12 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 8 & 10 & 12 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 10 & 12 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 8 & 10 & 12 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} + 2\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 8 & 10 & 12 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} + 3\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 8 & 10 & 12 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Bsp:

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} = -2\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + 0\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - 4\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= -2(2-3) + 0 - 4(-1)$$
$$= 2 + 4 = 6$$

$$\text{Vorzeichen}: \begin{pmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$\text{Vorgehen}: \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \to -2\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \to 0\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \to -4\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Weitere Eigenschaften:
- Die Determinante wechselt beim Vertauschen von Zeilen ihr Vorzeichen
- Wenn wir zu einer Zeile einer Matrix ein Vielfaches einer anderen Zeile dazuzählen, ändert die Determinante ihren Wert nicht

$$\Rightarrow \det(M) \underset{\text{Gauss}}{=} (-)\det\begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n$$

Weiteres:

$$\det(\lambda M) = \lambda^n \det(M), M \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

$$\det\begin{pmatrix} A & * \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det(A) \cdot \det(B)$$

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

$$\det(A^T) = \det(A)$$

$$\text{Volumen eines Spats} = \det\begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \vec a & \vec b & \vec c \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix}$$

$= \vec a \cdot (\vec b \times \vec c)$

Volumen = Grundfläche $\cdot$ Höhe

$= |\vec b \times \vec c| \cdot |\vec a| \cdot \cos(\varphi)$

$= |\vec a \cdot (\vec b \times \vec c)|$

8.5.8. Eigenwerte

Gegeben: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

$\vec x$ heisst **Eigenvektor** zum **Eigenwert** λ

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Gegeben: Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

Ein Vektor $\vec v \neq \vec 0$ heisst Eigenvektor zum Eigenvenwert λ, wenn $A\vec v = \lambda \vec v$ ist.

$$A\vec v - \lambda \vec v = 0$$
$$\Leftrightarrow (A - \lambda\mathbb{1})\vec v = 0$$

Wenn λ gegeben ist, ist das ein homogenes lineares Gleichungssystem in $\vec v$. Davon suchen wir nicht-triviale Lösungen ($\vec v \neq \vec 0$).

λ heisst Eigenwert von $A \Leftrightarrow A - \lambda\mathbb{1}$ ist singulär $\Leftrightarrow \operatorname{rang}(A - \lambda\mathbb{1}) < n \Leftrightarrow \det(A - \lambda\mathbb{1}) = 0$

Wenn $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, dann ist $\det(A - \lambda\mathbb{1})$ ein Polynom von Grad n. (Charakteristisches Polynom). Eigenwerte sind Nullstellen des charakteristischen Polynoms.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

$$\det(A - \lambda\mathbb{1})$$
$$= \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$
$$= (1-\lambda)(4-\lambda) - (-2) \cdot 1$$
$$= \lambda^2 - 5\lambda + 4 + 2$$
$$= \lambda^2 - 5\lambda + 6 \qquad = \text{Charakteristisches Polynom}$$

Nullstelle des char. Polynoms

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$
$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2}$$
$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{5 \pm 1}{2}$$
$$\Leftrightarrow \lambda \in \{3, 2\}$$

Eigenwerte von A sind $\lambda = 2$ und $\lambda = 3$

Für diese Zahlen ist die Matrix $A - \lambda\mathbb{1}$ singulär, d.h. die Gleichung $(A - \lambda\mathbb{1})\vec v = \vec 0$ hat nicht-triviale Lösungen. Diese heissen Eigenvektoren.

8.5.9. Eigenwert $\lambda = 2$

$$(A - 2 \cdot \mathbb{1})$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

8.5.10. Eigenwert $\lambda = 3$

$$(A - 3 \cdot \mathbb{1})$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrizen haben Rang von 1

$$(A - 2\mathbb{1})\vec v = \vec 0$$

v_1	v_2	1
−1	1	0
−2	2	0

$$\Rightarrow -v_1 + v_2 = 0$$
$$\Rightarrow v_1 = v_2$$
$$\vec v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu \\ \mu \end{pmatrix} = \mu\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(A - 3\mathbb{1})\vec v = \vec 0$$

v_1	v_2	1
−2	1	0
−2	1	0

$$\Rightarrow -2v_1 + v_2 = 0$$
$$\Rightarrow v_2 = 2v_1$$
$$\vec v = \mu\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mu \neq 0$$

Für alle $\mu \neq 0$ ist $\vec v$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda = 2$

$\vec v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda = 3$.

8.5.11. Diagonalisierbar

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heisst **diagonalisierbar**, wenn es eine invertierbare Matrix X gibt, so dass $X^{-1}AX = D$ (D ist eine Diagonalmatrix $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$)

Wenn A diagonalisierbar ist, dann sind die Spalten von X linear unabhängige Eigenvektoren, also eine Basis von $\mathbb{R}^n$, die nur aus Eigenvektoren von A besteht.

Das umgekehrte gilt auch. Das erlaubt uns, X zu konstruieren.

$$X^{-1}AX = D$$
$$\Leftrightarrow AX = XD$$
$$\Leftrightarrow AX = X\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow A\begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \vec v_1 & \dots & \vec v_n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \vec v_1 & \dots & \vec v_n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ A\vec v_1 & \dots & A\vec v_n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \lambda_1\vec v_1 & \dots & \lambda_n\vec v_n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow A\vec v_1 = \lambda_1\vec v_1 \wedge A\vec v_2 = \lambda_2\vec v_2 \wedge \dots \wedge A\vec v_n = \lambda_n\vec v_n$$

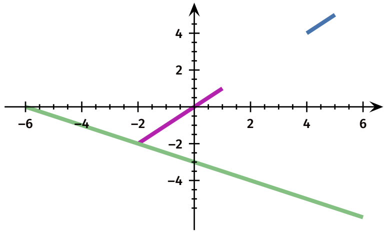
8.5.12. Rechenregeln

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) = A \cdot B \cdot C$$
$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$$
$$C \cdot (A + B) = C \cdot A + C \cdot B$$
$$E \cdot A = A \cdot E = A \text{ für } A \in \mathbb{R}^{n\times n}$$
$$(A^T)^T = A$$
$$(A + B)^T = A^T + B^T$$
$$(\lambda A)^T = \lambda A^T$$
$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

8.6. ANALYTISCHE GEOMETRIE

beste playlist

8.6.1. Geraden



FIXME: this is very wrong

8.6.1.1. Parameterform

$$g : \underbrace{\vec x}_{\binom{x}{y}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}}_{\text{Stützvektor } \vec p} + t \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{Richtungsvektor } \overrightarrow{PX}}, t \in \mathbb{R}$$

8.6.1.2. Koordinatenform

$$ax + by + c = 0$$

Aus Parameterform umwandeln:

$$x = 4 - 2t$$
$$y = 5 + 1t$$
$$t = y - 5$$
$$x = 4 - 2(y - 5) = -2y - 6$$
$$\Leftrightarrow x + 2y + 6 = 0$$

8.6.1.3. Normalenform

$$\left(\vec{x} - \underbrace{\begin{pmatrix}-8\\1\end{pmatrix}}_{\text{Stützvektor }\vec{p}}\right) \bullet \underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}}_{\text{Normalenvektor }\vec{n}} = 0$$

Aus Koordinatenform umwandeln:

$$1x + 2y + 6 = 0 \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

$$y \overset{!}{=} 1 \Rightarrow x + 2 + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -8$$

$$\Rightarrow \vec{p} = \begin{pmatrix}-8\\1\end{pmatrix}$$

8.6.2. Ebenen

8.6.2.1. Parameterform

$$E : \underbrace{\vec{x}}_{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}} = \underbrace{\begin{pmatrix}4\\5\\1\end{pmatrix}}_{\text{Stützvektor }\vec{p}} + s \cdot \underbrace{\begin{pmatrix}-2\\1\\6\end{pmatrix}}_{\text{Spannvektor }\overrightarrow{AB}} + t \cdot \underbrace{\begin{pmatrix}-1\\5\\4\end{pmatrix}}_{\text{Spannvektor }\overrightarrow{AC}}, s, t \in \mathbb{R}$$

8.6.2.2. Normalenform

$$\left(\vec{x} - \underbrace{\begin{pmatrix}4\\5\\1\end{pmatrix}}_{\text{Stützvektor }\vec{p}}\right) \bullet \underbrace{\begin{pmatrix}-26\\-2\\-9\end{pmatrix}}_{\text{Normalenvektor }\vec{n}} = 0$$

Aus Parameterform umwandeln:

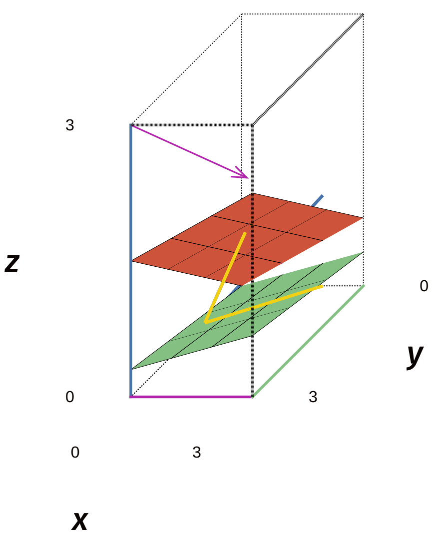
$$\vec{n} = \begin{pmatrix}-2\\1\\6\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-1\\5\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-26\\-2\\-9\end{pmatrix}$$

8.6.2.3. Koordinatenform

$$ax + by + cz + d = 0$$

8.6.2.4. Hessesche Normalform

skidaddle skidoodle that line looks like a noodle



$$\vec{x} \bullet \vec{n}_0 - b_0 = 0$$

$$\vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}, b_0 = \frac{b}{|\vec{n}|}, b = \vec{p} \bullet \vec{n}$$

Abstand a von Punkt Q zur Ebene $\vec{x} \bullet \vec{n}_0 - b_0 = 0$

$a = \vec{q} \bullet \vec{n}_0 - b_0$

Abstand von Punkt $P(2, 8, 2)$ zur Ebene $E : 2x - y + 4z = 1$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix}$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{21}$$

$$\frac{2x - y + 4z - 1}{\sqrt{21}}$$

$$\Rightarrow \frac{2 \cdot 2 - 1 \cdot 8 + 4 \cdot 2 - 1}{\sqrt{21}}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{21}}$$

9. VORGEHENSWEISE, UM

9.1. DIAGONALE UND FLÄCHE BERECHNEN

Gegeben: $A = (0;1;0), B = (2;1;0), C = (0;0;1), D = (1;0;0)$

Diagonale $\overrightarrow{BD} = \vec{r}_D - \vec{r}_B = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}$

Fläche $F = \left|(\vec{r}_B - \vec{r}_A) \times (\vec{r}_D - \vec{r}_A)\right| = \left|\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}0\\0\\-2\end{pmatrix}\right| = 2$

9.2. ABBILDUNGSMATRIX BERECHNEN

Gegeben: $A = (1;-1), B = (1;1), A' = (2;1), B' = (0;1)$

$M_U = \begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix}, M_B = \begin{pmatrix}2 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}, M_U^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}$

$M = M_B \cdot M_U^{-1} = \begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}$

9.3. NULLTEILER VON $\mathbb{Z}_n$ FINDEN

Multiplikationstabelle?

Können nicht Teilerfremd zu n sein.

9.4. ELEMENTE VON $\mathbb{Z}_n^*$ FINDEN (MULT. INV. IN $\mathbb{Z}_n$)

Multiplikationstabelle?

9.5. $|\mathbb{Z}_n^*|$ BERECHNEN

$|\mathbb{Z}_n^*| = \varphi(n)$

9.6. LÖSUNGSMENGE GAUSS-TABLEAU MIT NULLZEILE

...

1	0	2	3
0	1	1	0
0	0	0	4

$\Rightarrow$ Unlösbar

...

1	0	2	3
0	1	1	0
0	0	0	0

$$x_1 = 3 - 2t, x_2 = -t, x_3 = t$$

$$\mathbb{L}(A, \vec{b}) = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}\right\}$$

9.7. DISJUNKTIVE/KONJUNKTIVE NORMALFORM ANGEBEN

Wahrheitstafel. Für konjunktive Normalform zuerst disjunktive erstellen, danach negieren und umformen. Beispiel:

$$\neg R = (A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \Leftrightarrow R = \neg(A \wedge B \wedge C) \wedge \neg(A \wedge \neg B \wedge C) \Leftrightarrow R = (\neg A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee B \vee \neg C)$$

9.8. x^y MOD p BERECHNEN

Rechenregeln Totient (φ)

9.9. ZAHL $x \in \mathbb{Z}_n$ FINDEN, FÜR DIE $y \cdot x \equiv 1 \bmod n$ GILT (MULT. INV.)

Falls $\mathrm{ggT}(y, n) \neq 1 \Rightarrow$ gibt kein mult. Inv. Ansonsten: Euklidscher Algorithmus.

Beispiel: $x \in \mathbb{Z}_{32}, 21 \cdot x \equiv 1 \bmod 32$

x	y	q	r	u	s	v	t
32	21	1	11	1	0	0	1
21	11	1	10			1	−1
11	10	1	1			−1	2
10	1	10	0			2	−3

$\Rightarrow x = -3 + 32 = 29$

Beispiel: $x \in \mathbb{Z}_{32}, 22 \cdot x \equiv 1 \bmod 32$

$\mathrm{ggT}(22, 32) = 2 \Rightarrow$ gibt kein mult. Inv.

9.10. AUS GERADEN G_1 UND G_2 FOLGENDES HERAUSFINDEN:

Gegeben: $G_1 = (2;3) \cdot \vec{x} - 1 = 0, G_2 = (3;4) \cdot \vec{x} + 5 = 0, P = (1;1)$

Welche Gerade liegt näher an Punkt P:

Hessesche Normalenform $\left|\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\right| = \sqrt{13}$

$$G_1 = \frac{1}{\sqrt{13}} \cdot (2;3) \cdot \vec{x} - \frac{1}{\sqrt{13}} = 0$$

Abstand $a_1 = \frac{1}{\sqrt{13}} \cdot (2;3) \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{13}} = \frac{4}{\sqrt{13}}$

Hessesche Normalenform $\left|\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\right| = 5$

$$G_2 = \left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right) \cdot \vec{x} + 1 = 0$$

Abstand $a_2 = \left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right) \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + 1 = \frac{12}{5}$

$\frac{4}{\sqrt{13}} < \frac{12}{5} \Rightarrow G_1$

Wo schneiden sich die Geraden: Koordinatengleichung

$$2s_x + 3s_y = 1$$

$$3s_x + 4s_y = -5$$

$$S = (-19; 13)$$

Für welche Gerade liegt P auf derselben Seite wie der Ursprung: Ursprung in HNF einsetzen

Abstand $b_1 = \frac{1}{\sqrt{13}} \cdot (2;3) \cdot \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{13}} = -\frac{1}{\sqrt{13}}$

$b_1 < 0 \wedge a_1 > 0 \Rightarrow$ **verschiedene Seiten**

Abstand $b_2 = \left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right) \cdot \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + 1 = 1$

$b_1 > 0 \wedge a_1 > 0 \Rightarrow$ **dieselben Seiten**

9.11. EBENEN

Gegeben: Punkte $A = (-1;1;4), B = (-7;3;1), C = (2;1;5)$

Ebene $E \in \mathbb{R}^3$ verläuft durch oben genannte Punkte. Gib sie in Parameterform unter Verwendung des Ortsvektors zum Punkt A als Stützvektor an:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}-6\\2\\-3\end{pmatrix}, \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$E : \begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-6\\2\\-3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$$

Hessesche Normalenform der Ebene E:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix}-6\\2\\-3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-3\\-6\end{pmatrix}$$

$$|\vec{n}| = 7, \vec{n}_0 = \begin{pmatrix}\frac{2}{7}\\-\frac{3}{7}\\-\frac{6}{7}\end{pmatrix}, b_0 = \begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix} \bullet \vec{n}_0 = -\frac{29}{7}$$

$$E : (\vec{x} - \vec{a}) \bullet \vec{n}_0 = 0 \Leftrightarrow \vec{x} \bullet \vec{n}_0 - b_0 = 0$$

Abstand des Punktes $Q = (10;2;-1)$ von der Ebene E: $\begin{pmatrix}10\\2\\-1\end{pmatrix} \bullet \vec{n}_0 - b_0$

Für welchen Wert von z liegt $R = (-4;1;z)$ auf der Ebene E: $\begin{pmatrix}-4\\1\\z\end{pmatrix} \bullet \vec{n}_0 - b_0 = 0$

9.12. RSA VERSCHLÜSSELUNG

Gegeben: $n = 119$

Zahlen angeben, die als Schlüssel infrage kommen: Teilerfremd zu $\varphi(n)$

Zum Schlüssel a den Schlüssel b berechnen: Euklidscher Algorithmus mit $\varphi(n), a$

Mit dem Schlüssel a die Zahl x ent- / verschlüsseln: $x^a \bmod n$

9.13. ALLE ELEMENTE VON $R = \{(a,b) \in M \times M \mid a \cdot b \equiv 1 \text{ MOD } x\}$

9.14. ALLE ELEMENTE VON $R = \left\{(a,b) \in \mathbb{Z}_x^* \times \mathbb{Z}_x^* \,\middle|\, a \cdot b \equiv y \text{ MOD } x\right\}$

Falls y teilerfremd zu x: Multiplikationstabelle mit Fremdteilern zu x erstellen.

Beispiel: $R = \left\{(a,b) \in \mathbb{Z}_{12}^* \times \mathbb{Z}_{12}^* \,\middle|\, a \cdot b \equiv 7 \bmod 12\right\}$

$= \{(1,7),(5,11),(7,1),(11,5)\}$

$\cdot$	1	5	7	11
1	1	5	7	11
5	5	1	11	7
7	7	11	1	5
11	11	7	5	1

9.15. LÖSUNG VON $M \cdot \vec{x} = \vec{y}$ ZU $\vec{x}$

$\vec{x} = M^{-1} \cdot \vec{y}$

9.16. EIGENWERTE DER MATRIX M BERECHNEN

9.17. EIGENVEKTOREN DER MATRIX M BERECHNEN