Georgiy Shevoroshkin 06.01.2026

Analysis für Informatiker | An1I
Zusammenfassung

INHALTSVERZEICHNIS

1. FUNKTIONEN

1.1. GLOSSAR

Begriff	*Bedeutung*
Definitionsmenge	Mögliche Funktionsinputs Notation definitionsmenge der Funktion f: D_f
Zielmenge	Mögliche Funktionswerte
Definitionsbereich	Alle Funktionsinputs
Wertebereich	Alle Funktionswerte
Nullstelle einer Funktion	Argument, welches den Funktionswert 0 hat
Bild einer Funktion	Alle möglichen Funktionswerte einer Funktion
Graph	Menge aller Punkte (Tupel) einer Funktion in der Form (Argument, Funktionswert) $\text{Graph}_f = (x, y) \mid y = f(x)$
Implizite darstellung	–
Polynom	$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ Koeffizienten: $a_n, \ldots, a_0$ Grad des Polynoms: n
Streng wachsende Funktion	$x < \tilde{x} \to f(x) < f(\tilde{x})$ Bsp: – $f(x) = x + 2$ – $f(x) = e^x$ – $f(x) = a^x, e > 1$
Monoton wachsende Funktion	$x < \tilde{x} \to f(x) \leq f(\tilde{x})$ Bsp: $$f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1 \\ 1, & 1 < x \leq 2 \\ (x-2)^2 + 1, & x > 2 \end{cases}$$
Streng fallende Funktion	$x < \tilde{x} \to f(x) > f(\tilde{x})$
Monoton fallende Funktion	$x < \tilde{x} \to f(x) \geq f(\tilde{x})$
Gerade Funktion	$\forall x \in D_f : f(-x) = f(x)$ Bsp: – $f(x) = x^n, n \text{ gerade}$ – $f(x) = \lvert x \rvert$ – $f(x) = \cos(x)$
Ungerade Funktion	$\forall x \in D_f : f(-x) = -f(x)$ Bsp: – $f(x) = x^n, n \text{ ungerade}$ – $f(x) = \sin(x)$
Periodische Funktion	$\forall x \in D_f : f(x + p) = f(x)$ – Mit der Periode p – Die kleinste positive Periode heisst ***primitive Periode***
Umkehrfunktion	$f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$

Begriff	*Bedeutung*
Stetige Funktion	Funktion, deren Graph keine Sprünge oder Unterbrechungen aufweist
Stetig fortsetzbare Funktion	Funktion, die an einem bestimmten Punkt nicht definiert ist, aber erweitert werden kann, sodass die erweiterte Funktion stetig bleibt
Glatte Funktion	Funktion, die unendlich oft differenzierbar ist

1.2. ANATOMIE EINER FUNKTION

$$\underbrace{f}_{\text{Funktionsname}} : \begin{cases} \underbrace{\mathbb{R}+ \setminus \{0\}}_{\text{Definitionsmenge}} \rightarrow \underbrace{\mathbb{R}+}_{\text{Zielmenge}} \\ \underbrace{x}_{\text{Input / Argument}} \mapsto \underbrace{x+4}_{\text{Element des Wertebereichs (Output)}} \end{cases}$$

1.3. NULLSTELLENFORM

Quadratisch

- $f(x) = a^2x + bx + c$
- $f(x) = a(x - x_0)(x - x_1)$

Qubisch

- $f(x) = a^3x + b^2x + cx + d$
- $f(x) = a(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$

1.4. SCHEITELFORM

$f(x) = a(x - x_0)^2 + y_0$ -> x_0 und y_0 sind der scheitelpunkt

1.5. VERKNÜPFUNG VON FUNKTIONEN

$$g(A) = B, f(B) = C \Leftrightarrow f(g(A)) = C \Leftrightarrow (f \circ g)(A) = C$$

$$f(g(x)) \coloneqq (f \circ g)(x)$$

Fast immer ist $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$. Es gibt ein Fall, wo $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ gilt, nämlich bei Umkehrfunktionen. $(f^{-1} \circ f)(x) = (f \circ f^{-1})(x)$

1.5.1. Beispiel

$$g(x) = x^2 + 1$$
$$f(x) = \sqrt{x}$$
$$f(g(4)) = \sqrt{4^2 + 1} = \sqrt{17}$$
$$g(f(4)) = \sqrt{4}^2 + 1 = 5$$

2. LOGARITHMEN

Term	*Lösung*
$a^{\log_a(x)}$	x
$\log_a(1)$	0 weil a hoch was ist 1
$\log_a(a)$	1
$\log_a\left(\frac{x}{y}\right)$	$\log_a(x) - \log_a(y)$
$\log_a(x * y)$	$\log_a(x) + \log_a(y)$
$\log_a(x^p)$	$\log_a(\lvert x \rvert) * p, p\%2 = 0$

Term	Lösung
$\log_a\left(\sqrt[n]{x}\right)$	$\log_a\left(x^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n}\log_a(x)$
$\frac{\log_a(b^y)}{\log_a(b)}$	$\frac{y\log_a(b)}{\log_a(b)}$
$\log_{a(x)}$	$-2 \Leftrightarrow a^{-2} = x$

3. SPLINES

Spline 1. Grades = lineare Splines n-te Splines = Splines aus Polynomen maximal n-ten Grades

3.1. LINEARE INTERPOLATION

$$P_{i(x)} = y_i + \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}\right)(x - x_i)$$

3.2. QUADRATISCHE INTERPOLATION

$$P_{i(x)} = a_i x^2 + b_i x + c_i$$

4. MISC

4.1. UNGLEICHUNGEN

Wenn man mit negativen Termen multipliziert oder eine fallende Funktion anwendet, muss das Ungleichzeichen geändert werden.

4.2. MITTERNACHTSFORMEL

$$an^2 + bn + c = 0 \Rightarrow u_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

5. TRIGONOMETRIE

x	0	$30 = \frac{\pi}{6}$	$45 = \frac{\pi}{4}$	$60 = \frac{\pi}{3}$	$90 = \frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	0.5	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0.5	0

$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

Trigonometrischer Satz des Pythagoras: $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

5.1. UMKEHRFUNKTIONEN

$$\arccos : \begin{cases} [-1;1] \to [0;\pi] \\ x \mapsto \text{Lösung } y \in [0;\pi] \text{ der Gleichung } \cos(y) = x \end{cases}$$

$$\arcsin : \begin{cases} [-1;1] \to \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \\ x \mapsto \text{Lösung } y \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \text{ der Gleichung } \sin(y) = x \end{cases}$$

$$\arctan : \begin{cases} \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right) \\ x \mapsto \text{Lösung } y \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right) \text{ der Gleichung } \tan(y) = x \end{cases}$$

6. ABLEITUNGEN

Begriff	Bedeutung
Differenzenquotient	$m = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$
Differentialquotient	$m = \lim\left(x \to x_0\right)\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

6.1. ABLEITUNGSREGELN

Term	Ableitung	Term	Ableitung
1	0	x	1
x^2	$2x$	x^n	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
e^x	e^x	e^{-x}	$-e^{-x}$
a^x	$\ln(a) \cdot a^x$ für $a > 0, a \neq 1$	$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$ für $x > 0$
$\ln(y \cdot x)$	$\frac{1}{x}$ für $x > 0$	$\log_b(x)$	$\frac{1}{\ln(b) \cdot x}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\sin(2x)$	$2\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\cos(ax)$	$-a\sin(x)$
$\tan(x)$	$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$

6.2. FUNKTIONEN

Begriff	Bedeutung
Addition	$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$ $(\alpha + f(x))' = \alpha \cdot f'(x)$
Produkteregel	$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
Mit 3	$(f \cdot g \cdot h)' = f' \cdot g \cdot h + f \cdot g' \cdot h + f \cdot g \cdot h'$
Kettenregel	$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
Quotientenregel	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

6.3. TANGENTE BERECHNEN

$$m\left(x - x_0\right) + y_0 = f'\left(x_0\right)\left(x - x_0\right) + f\left(x_0\right)$$

6.4. APPROXIMATION DURCH LINEARISIERUNG (NEWTONVERFAHREN)

```
for i in range(1,max_iter):
  x_neu = x_alt - f(x_alt) / f_prime(x_alt)
  x_alt = x_neu
```

6.5. EXTREMWERTE

Falls die Ableitung von f in $x = x_0$ verschwindet, kann folgendes passieren:

Begriff	***Bedeutung***
Lokales Minimum	$(f'(x_0) = 0) \land (f''(x_0) > 0)$
Lokales Maximum	$(f'(x_0) = 0) \land (f''(x_0) < 0)$
Lokaler Sattelpunkt	$(f'(x_0) = 0) \land (f''(x_0) = 0) \land (f'''(x_0) \neq 0)$
Wendepunkt	$f''(x_0) = 0 \land f(x_0)''' \neq 0$