Georgiy Shevoroshkin 08.12.2025

Analysis für Informatiker | An1I

Zusammenfassung

INHALTSVERZEICHNIS

1. FUNKTIONEN

1.1. GLOSSAR

Begriff	*Bedeutung*
Definitionsmenge	Mögliche Funktionsinputs Notation definitionsmenge der Funktion f: D_f
Zielmenge	Mögliche Funktionswerte
Definitionsbereich	Alle Funktionsinputs
Wertebereich	Alle Funktionswerte
Nullstelle einer Funktion	Argument, welches den Funktionswert 0 hat
Bild einer Funktion	Alle möglichen Funktionswerte einer Funktion
Graph	Menge aller Punkte (Tupel) einer Funktion in der Form (Argument, Funktionswert) $\text{Graph}_f = (x, y) \mid y = f(x)$
Implizite darstellung	–
Polynom	–
Koeffizient	–
Interpolation	–
Streng wachsende Funktion	$x < \tilde{x} \to f(x) < f(\tilde{x})$ Bsp: – $f(x) = x + 2$ – $f(x) = e^x$ – $f(x) = a^x, e > 1$
Monoton wachsende Funktion	$x < \tilde{x} \to f(x) \leq f(\tilde{x})$ Bsp: $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1 \\ 1, & 1 < x \leq 2 \\ (x-2)^2 + 1, & x > 2 \end{cases}$
Streng fallende Funktion	$x < \tilde{x} \to f(x) > f(\tilde{x})$
Monoton fallende Funktion	$x < \tilde{x} \to f(x) \geq f(\tilde{x})$
Gerade funktion	$\forall x \in D_f : f(-x) = f(x)$ Bsp: – $f(x) = x^n, n \text{ gerade}$ – $f(x) = \lvert x \rvert$ – $f(x) = \cos(x)$
Ungerade funktion	$\forall x \in D_f : f(-x) = -f(x)$ Bsp: – $f(x) = x^n, n \text{ ungerade}$ – $f(x) = \sin(x)$
Periodische funktion	$\forall x \in D_f : f(x + p) = f(x)$ – Mit der Periode p – Die kleinste positive Periode heisst ***primitive Periode***

Begriff	Bedeutung
Umkehrfunktion	$f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$
Stetige Funktion	
Stetig fortsetzbare Funktion	
Glatte Funktion	

1.2. ANATOMIE EINER FUNKTION

$$\underbrace{f}_{\text{Funktionsname}} : \begin{cases} \underbrace{\mathbb{R}+ \setminus \{0\}}_{\text{Definitionsmenge}} \to \underbrace{\mathbb{R}+}_{\text{Zielmenge}} \\ \underbrace{x}_{\text{Input / Argument}} \mapsto \underbrace{x+4}_{\text{Element des Wertebereichs (Output)}} \end{cases}$$

1.3. NULLSTELLENFORM

Quadratisch
- $f(x) = a^2x + bx + c$
- $f(x) = a(x - x_0)(x - x_1)$

Qubisch
- $f(x) = a^3x + b^2x + cx + d$
- $f(x) = a(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$

1.4. SCHEITELFORM

$f(x) = a(x - x_0)^2 + y_0$ -> x_0 und y_0 sind der scheitelpunkt

1.5. VERKNÜPFUNG VON FUNKTIONEN

$$A - g(x) \to B - f(y) \to C \Leftrightarrow A - f(g(x)) \to C$$

$$f(g(x)) \coloneqq (f \circ g)(x)$$

Fast immer ist $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$. Es gibt ein Fall, wo $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ gilt, nämlich bei Umkehrfunktionen. $(f^{-1} \circ f)(x) = (f \circ f^{-1})(x)$

1.5.1. Beispiel

$$g(x) = x^2 + 1$$
$$f(x) = \sqrt{x}$$
$$f(g(4)) = \sqrt{4^2 + 1} = \sqrt{17}$$
$$g(f(4)) = \sqrt{4}^2 + 1 = 5$$

2. LOGARITHMEN

$a^{\log_a(x)} = x$

$\log_a(1) = 0$ weil a hoch was ist 1

$\log_a(a) = 1$

$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$

$\log_a(x * y) = \log_a(x) + \log_a(y)$

$\log_a(x^p) = \log_a(|x|) * p, p\%2 = 0$

$\log_a\left(\sqrt[n]{x}\right) = \log_a\left(x^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n}\log_a(x)$

$\frac{\log_a(b^y)}{\log_a(b)} = \frac{y \log_a(b)}{\log_a(b)}$

$\log_{a(x)} = -2 \Leftrightarrow a^{-2} = x$

3. SPLINES

Spline 1. Grades = lineare Splines n-te Splines = Splines aus Polynomen maximal n-ten Grades

3.1. LINEARE INTERPOLATION

$$P_{i(x)} = y_i + \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}\right)(x - x_i)$$

3.2. QUADRATISCHE INTERPOLATION

$$P_{i(x)} = a_i x^2 + b_i x + c_i$$

4. MISC

4.1. UNGLEICHUNGEN

Wenn man mit negativen Termen multipliziert oder eine fallende Funktion anwendet, muss das Ungleichzeichen geändert werden.

4.2. MITTERNACHTSFORMEL

$$an^2 + bn + c = 0 \Rightarrow u_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

5. TRIGONOMETRIE

x	0	$30 = \frac{\pi}{6}$	$45 = \frac{\pi}{4}$	$60 = \frac{\pi}{3}$	$90 = \frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	0.5	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0.5	0

$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

Trigonometrischer Satz des Pythagoras: $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

5.1. UMKEHRFUNKTIONEN

$$\arccos : \begin{cases} [-1;1] \to [0;\pi] \\ x \quad \mapsto \text{Lösung } y \in [0;\pi] \text{ der Gleichung} \cos(y) = x \end{cases}$$

$$\arcsin : \begin{cases} [-1;1] \to \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \\ x \quad \mapsto \text{Lösung } y \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \text{ der Gleichung} \sin(y) = x \end{cases}$$

$$\arctan : \begin{cases} \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right) \\ x \mapsto \text{Lösung } y \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right) \text{ der Gleichung} \tan(y) = x \end{cases}$$

6. ABLEITUNGEN

Begriff	*Bedeutung*
Differenzenquotient	$m = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$
Differentialquotient	$m = \lim(x \to x_0)\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

6.1. ABLEITUNGSREGELN

Funktion	*Ableitungsfunktion*
1	0
x	1
x^2	$2x$
x^n	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
e^x	e^x
e^{-x}	$-e^{-x}$
a^x	$\ln(a) \cdot a^x$ für $a > 0, a \neq 1$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$ für $x > 0$
$\ln(y \cdot x)$	$\frac{1}{x}$ für $x > 0$
$\log_b(x)$	$\frac{1}{\ln(b) \cdot x}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$

6.2. FUNKTIONEN

Addition

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

$$(\alpha + f(x))' = \alpha \cdot f'(x)$$

Produkteregel

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

Mit 3

$$(f \cdot g \cdot h)' = f' \cdot g \cdot h + f \cdot g' \cdot h + f \cdot g \cdot h'$$

Kettenregel

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Quotientenregel

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

6.3. TANGENTE BERECHNEN

$$m(x - x_0) + y_0 = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

6.4. APPROXIMATION DURCH LINEARISIERUNG (NEWTONVERFAHREN)

```
for i in range(1,max_iter):
  x_neu = x_alt - f(x_alt) / f_prime(x_alt)
  x_alt = x_neu
```

6.5. STATIONÄRE PUNKTE

Falls die Ableitung von f in $x = x_0$ verschwindet, kann folgendes passieren: lokales minimum, lokales maximum, sattelpunkt.

Gilt: $(f'(x_0) = 0) \wedge (f''(x_0) > 0) \Rightarrow x_0$ ist lokal ein Minimum.

Gilt: $(f'(x_0) = 0) \wedge (f''(x_0) < 0) \Rightarrow x_0$ ist lokal ein Maximum.

Gilt: $(f'(x_0) = 0) \wedge (f''(x_0) = 0) \wedge (f'''(x_0) \neq 0) \Rightarrow x_0$ ist lokal ein Sattelpunkt.