Automaten und Sprachen | AutoSpr

Zusammenfassung

INHALTSVERZEICHNIS

1. PRÄDIKATE

Prädikate sind Aussagen über mathematische Objekte, die wahr oder falsch sein können. «Funktionen» mit booleschen Rückgabewerten: $P, Q(n), R(x, y, z)$. Siehe DMI .

1.1. NORMALFORMEN

Normalformen (allgemein, ***kanonische Formen***) helfen, das Vergleichsproblem zu lösen (ob zwei Aussagen dieselben sind).

$$P_1 \wedge \ldots \wedge P_n = \forall i \in \{1, \ldots, n\}(P_i) = \bigwedge_{i=1}^{n} P_i$$

$$P_1 \vee \ldots \vee P_n = \exists i \in \{1, \ldots, n\}(P_i) = \bigvee_{i=1}^{n} P_i$$

1.2. NEGATION

Nicht für alle = Es gibt einen Fall, für den nicht

$$\neg \forall i \in \{1, \ldots, n\}(P_i) \Leftrightarrow \neg(P_1 \wedge \ldots \wedge P_n) \Leftrightarrow \neg P_1 \vee \ldots \vee \neg P_n \Leftrightarrow \exists i \in \{1, \ldots, n\}(\neg P_i)$$

2. MENGEN

2.1. KONSTRUKTION

Grundmenge G, Prädikat $P(x)$. Konstruierte Menge $A = \{x \in G \mid P(x)\}$

2.2. OPERATIONEN

Begriff	***Bedeutung***
Vereinigung	$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$
Schnittmenge	$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$
Komplement	$\overline{A} = \{x \mid x \notin A\}$
Differenz	$A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$

2.3. TUPEL

$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge bnB\}$
$\bigtimes_{i=1}^{n} A_i = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) | a_i \in A_i\}$

3. BEWEISE

Eine Folge von logischen Schlüssen, die zeigen, dass die Aussage aus den gegebenen Voraussetzungen folgt.

Begriff	***Bedeutung***
Konstruktiver Beweis	Liefert explizite «Lösung» / Algorithmus
Widerspruchsbeweis	Geeignet für Unmöglichkeitsaussagen. Z.B. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$
Vollständige Induktion	Für Aussagen, die für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten.

4. SPRACHEN

Begriff	*Bedeutung*
Alphabet	Eine nichtleere endliche menge Σ heisst ***Alphabet***. Die Elemente von Σ heissen ***Zeichen***
Wort	Eine Zeichenkette der Länge n ist ein n-Tupel in $\Sigma^n = \Sigma \times \ldots \times \Sigma$. Ein Element von Σ^n heisst ***Wort*** der Länge n
Leeres Wort	Die Zeichenkette $\varepsilon \in \Sigma^0 = \{\varepsilon\}$ der Länge 0 heisst das ***leere Wort***.
Menge aller Wörter	Leeres Wort ist **immer** drin $$\Sigma^* = \{\varepsilon\} \cup \Sigma \cup \Sigma^2 \cup \Sigma^3 \cup \ldots = \bigcup_{k=0}^{\infty} \Sigma^k$$
Abgekürzte Schreibweisen von Wörtern	$$(A, u, t, o, S, p, r) = AutoSpr$$ $$a^3b^5 = aaabbbbb$$ $$b^5a^3 = bbbbbaaa$$
Sprache	Teilmenge $L \subset \Sigma^*$

4.1. WORTLÄNGE

Begriff	*Bedeutung*
Länge des Wortes w	$w \in \Sigma^n \Rightarrow \lvert w \rvert = n$
Anzahl Zeichen a im Wort w	$\lvert w \rvert_a, w \in \Sigma^n, a \in \Sigma$

Beispiele

$$|\varepsilon| = 0$$
$$|01010|_0 = 3$$
$$|01010|_1 = 2$$
$$|01010|_3 = 0$$
$$\left|a^3b^5\right| = 8$$
$$\left|(1291)^7\right| = 7|1291| = 7 \cdot 4 = 28$$

$$\Rightarrow |w^n| = n \cdot |w|$$

4.2. SPRACHE

Beispiele

$$L = \Sigma^* \subset \Sigma^*$$
$$L = \varnothing \subset \Sigma^*, \text{die leere Sprache}$$
$$\Sigma = \{0, 1\}, \text{Sprache aller Binärstrings: } L = \Sigma^*$$
$$\Sigma = \text{Unicode}, J = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ wird vom Java-Compiler akzeptiert}\}$$
$$M \text{ eine "Maschine"}, L(M) = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ wird von } M \text{ akzeptiert}\}$$