Georgiy Shevoroshkin 21.02.2026

# Diskrete Mathematik | DMI
## Zusammenfassung

## INHALTSVERZEICHNIS

# 1. AUSSAGENLOGIK

## 1.1. GLOSSAR

| Begriff | Bedeutung |
|---|---|
| Aussage | Feststellender Satz, dem eindeutig «wahr» oder «falsch» zugeordnet werden kann. Symbole wie $A, B, C...$ werden dafür verwendet |
| Aussagenlogische Form | Kombination von Aussagen, verknüpft durch Junktoren |
| Aussageform | Aussagen verknüpft mit Variablen |
| Normalform | Standartisierte Aussagenlogische Formen (Formeln) |
| Negationsnormalform | $\neg$ steht ausschliesslich direkt vor Aussagen oder Konstanten |
| Verallgemeinerte Disjunktion | – Einzelne Aussage oder Negation<br>– wahr oder falsch<br>– Disjunktion $A \vee B$, falls $A$ und $B$ selbst verallgemeinerte Disjunktionen sind |
| Verallgemeinerte Konjunktion | – Einzelne Aussage oder Negation<br>– wahr oder falsch<br>– Konjunktion $A \wedge B$, falls $A$ und $B$ selbst verallgemeinerte Konjunktionen sind |
| Disjunktive Normalform | Disjunktion von (oder eine einzelne) verallgemeinerten Konjunktionen<br>Beispiel: $(A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C)$ |
| Konjunktive Normalform | Konjunktion von (oder eine einzelne) verallgemeinerten Disjunktionen<br>Beispiel: $(A \vee B \vee C) \wedge (A \vee \neg B \vee \neg C)$ |
| Kontradiktion | Immer falsch |
| Tautologie | Immer wahr |
| Junktoren (/Konnektoren) | $\neg$ Negation<br>$\wedge$ Konjunktion<br>$\vee$ Disjunktion (einschliessliches oder!)<br>$\Rightarrow$ Implikation<br>$\Leftrightarrow$ Äquivalenz |
| Bindungsstärke | $\neg$ vor $\wedge, \vee$ vor $\Rightarrow, \Leftrightarrow$ |

## 1.2. FORMELN

$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ $\quad$ $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$ $\quad$ $A \vee (\neg A \wedge B) \Leftrightarrow A \vee B$

$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$ $\quad$ $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B$ $\quad$ $(A \Rightarrow B \Rightarrow C) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)$

## 1.3. RECHENREGELN

| Begriff | Bedeutung |
|---|---|
| Abtrennungsregel | $(A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$ |
| Kommutativität | $(A \wedge B) \Leftrightarrow (B \wedge A)$<br>$(A \vee B) \Leftrightarrow (B \vee A)$ |
| Assoziativität | $A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$<br>$A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow (A \vee B) \vee C$ |
| Distributivität | $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$<br>$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ |

| Begriff | Bedeutung |
|---|---|
| Absorption | $A \lor (A \land B) \Leftrightarrow A$<br>$A \land (A \lor B) \Leftrightarrow A$ |
| Idempotenz | $A \lor A = A$<br>$A \land A = A$ |
| Doppelte Negation | $\neg(\neg A) \Leftrightarrow \neg\neg A \Leftrightarrow A$ |
| Konstanten | $W$ = wahr<br>$F$ = falsch |
| de Morgan | $\neg(A \land B) \Leftrightarrow \neg A \lor \neg B$<br>$\neg(A \lor B) \Leftrightarrow \neg A \land \neg B$ |

# 2. PRÄDIKATENLOGIK

## 2.1. GLOSSAR

| Begriff | Bedeutung |
|---|---|
| Subjekt | «Konkretes Ding» / Stellvertreter einer Variable |
| Prädikat | «Eigenschaft», zB «ist eine Primzahl»<br>Prädikate werden oft wie Funktionen geschrieben. Ist $P$ ein Prädikat, dann bedeutet $P(x)$, dass $x$ das Prädikat erfüllt. $P(x)$ ist eine Aussageform. |
| Quantor | ∀ Allquantor (Für alle)<br>∃ Existenzquantor (Es existiert) |

# 3. BEWEISEN

## 3.1. INDUKTION

$A(1) \land (A(n) \Rightarrow A(n+1)) \Rightarrow A(m), m \in \mathbb{N}$

Beispiel: $2 \mid (6^n)$

1) Verankerung: $n = 0$
   - $2 \mid (6^0)$
2) Induktionsschritt $n \to n+1$
   - $2 \mid (6^{n+1})$

   a) Induktionsannahme: $2 \mid (6^n)$
   b) Behauptung: $2 \mid (6^{n+1})$
   c) Beweis: Verwendung der Annahme, um Richtigkeit der Behauptung zu zeigen $2 \mid (6^n + 6)$

### 3.1.1. Techniken

1) Direkter Beweis $f(n) = f_1(n) = f_2(n) = \ldots = f_m(n) = g(n)$
2) Dfferenz gleich Null $f(n) - g(n) = 0 \Rightarrow f(n) = g(n)$
3) Äquivalenzumformung
4) Dritte Grösse (vereinfachen) $g(n) = h(n) = f(n)$

# 4. DIREKTE, ITERATIVE UND REKURSIVE BERECHNUNGEN

## 4.1. GLOSSAR

| Begriff | Bedeutung |
|---|---|
| Folge | Nummerierte Liste von Objekten (Folgegliedern) |
| Reihe | Summe von Folgegliedern einer Zahlenfolge |

# 5. MENGEN

## 5.1. GLOSSAR

| Begriff | Bedeutung |
|---|---|
| Aufzählend | $\{1,2,3\}$ |
| Beschreibend | $\{x \in \mathbb{N}^+ \mid x < 4\}$ |
| Mächtigkeit | Anzahl Elemente einer Menge $\lvert M \rvert$ |
| Potenzmenge | Menge aller Teilmengen einer Menge $P(M)$<br>$\lvert P(M) \rvert = 2^{\lvert M \rvert}$ |
| Teilermenge | $T(n)$ = Menge der Teiler der Zahl $n$ |
| Kartesisches Produkt | $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$ |

## 5.2. RECHENREGELN

Für die Mengen A und B in der Obermenge M gelten die folgenden Aussagen:

$A \setminus \varnothing = A$

$A \setminus A = \varnothing$

$\overline{\overline{A}} = A$

$A \cap \overline{A} = \varnothing$

$A \cup \overline{A} = M$

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

$A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$

$A \setminus B = A \cap \overline{B}$

$\overline{A \setminus B} = \overline{A} \cup B$

$(A \setminus B) \cup (A \cap B) = A$

$(A \setminus B) \cap (A \cap B) = \varnothing$

Weiteres:

$(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$

$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$

# 6. FORMELN, ABBILDUNGEN, RELATIONEN

## 6.1. GLOSSAR

| Begriff | Bedeutung |
|---|---|
| Funktion/Abbildung | Zuordnung, die jedem Elemend der Definitionsmenge $D$ genau ein Element einer Zielmenge $Z$ zuordnet.<br>Injektive Relation $f : D \to Z$<br>Abbildungen mit mehreren Argumenten: $f : A \times B \to Z$, $f(a,b) = y$ |
| Graph | Menge von Paaren $(x, f(x))$<br>$G \in D \times Z$ |

| *Begriff* | *Bedeutung* |
|---|---|
| Relation | Teilmenge des Kartesischen Produktes mehrerer Mengen<br>$$A = \prod_{i=1}^{n} A_i, \lvert A_i \rvert = n_i \Rightarrow \lvert A \rvert = \prod_{i=1}^{n} n_i$$<br>– Kleiner-Relation: $R_< = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B, a < b\}$<br>– Gleich-Relation: $R_= = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B, a = b\}$<br>– Kleiner-Gleich-Relation: $R_\leq = R_= \cup R_< = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B, a \leq b\}$ |
| Surjektiv | Alle Elemente der Definitions- und Zielmenge sind «verknüpft» / jedes Element der Bildmenge kommt als Bild vor |
| Injektiv | Alle Inputs haben eindeutige Outputs $a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$ |
| Bijektiv | Surjektiv und Injektiv |
| Reflexiv | Alle Elemente von A stehen zu sich selbst in Beziehung $a \in A \Rightarrow (a, a) \in R$<br>$A \Leftrightarrow A$ |
| Symmetrisch | $(a, b) \in R \land (b, a) \in R$<br>$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow A)$ |
| Transitiv | $(a, b) \in R \land (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$<br>$(A \Leftrightarrow B) \land (B \Leftrightarrow C) \Rightarrow (A \Leftrightarrow C)$ |
| Äquivalenzrelation | reflexiv, symmetrisch und transitiv $\Leftrightarrow, =$ |
| Irreflexiv | $a \in A \Rightarrow \neg(a, a) \in R$ |
| Asymmetrisch | $(a, b) \in R \Rightarrow \neg(b, a) \in R$ |
| Antisymmetrisch | $((a, b) \in R) \land ((b, a) \in R) \Rightarrow a = b$ |
| Ordnungsrelation | reflexiv, antisymmetrisch und transitiv $\leq$ |
| Symmetrische Differenz | $A \Delta B = \{x \in G \mid (x \in A \cup B) \land \neg(x \in A \cap B)\}$<br>$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$<br>$(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$ |

# 7. MODULO-RECHNEN

Die Modulo-Relation ist eine ***Äquivalenzrelation*** auf $\mathbb{Z}$.

## 7.1. GLOSSAR

| *Begriff* | *Bedeutung* |
|---|---|
| Teiler-Relation | Für $a, b \in \mathbb{Z}$ ist die Teiler-Relation $b \mid a \Leftrightarrow T(b, a) \Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{Z} : bq = a$<br>$b \mid a \Leftrightarrow -b \mid a$<br>$b \mid a \Leftrightarrow b \mid -a$<br>Ordnungsrelation auf $\mathbb{N}$ |
| Modulo-Relation | Für $a, q, r \in \mathbb{Z}$ ist die Modulo-Relation $R_q(a, r) \Leftrightarrow q \mid a - r \Leftrightarrow a \equiv r \bmod q$ |
| ~ | «relates to» $a \sim b \Leftrightarrow (a, b) \in R$ |

| ***Begriff*** | ***Bedeutung*** |
|---|---|
| Quotient, Rest | Zu jeder Zahl $a \in \mathbb{Z}$ und jeder Zahl $b \in \mathbb{Z}$ gibt es eindeutig bestimmte Zahlen $q, r \in \mathbb{Z}$ mit $a = q \cdot b + r, 0 \leq r < b$<br>Bsp: $7 = 2 \cdot 3 + 1$<br>$q$ heisst ***Quotient***<br>$r$ heisst ***Rest*** |
| Restklassen | $[b]_q = \{a \in \mathbb{Z} \mid a \equiv b \bmod q\}, q > 0$<br>$\mathbb{Z}_q = \left\{[0]_q, [1]_q, [2]_q, \ldots, [q-1]_q\right\} = \underbrace{\{0, 1, 2, 3, \ldots, q-1\}}_{\text{Vereinfachung}}$ |
| Multiplikatives Inverses | Für $a \in \mathbb{Z}_q$ ist $b \in \mathbb{Z}_q$ das ***multiplikative inverse*** von a, wenn $a \cdot b \equiv 1 \bmod q$ |
| Nullteiler | Wenn für $a, b \in \mathbb{Z}_q : ab \equiv 0 \bmod q$ und $a \not\equiv 0 \bmod q \land b \not\equiv 0 \bmod q$, heissen $a, b$ ***Nullteiler*** |

### 7.2. RECHENREGELN

1) $(a + b) \bmod n = ((a \bmod n) + (b \bmod n)) \bmod n$
2) $(a - b) \bmod n = ((a \bmod n) - (b \bmod n)) \bmod n$
3) $(a \cdot b) \bmod n = ((a \bmod n) \cdot b \bmod n)) \bmod n$
4) $a^d \bmod n = \left(a^{d-x} \cdot a^x\right) \bmod n = \left(\left(a^{d-x} \bmod n\right) \cdot (a^x \bmod n)\right) \bmod n$

### 7.3. PRIMFAKTORENZERLEGUNG

| ***Begriff*** | ***Bedeutung*** |
|---|---|
| $\mathrm{ggT}(a, b)$ | $\max\{d \in \mathbb{N} \mid d \mid a \land d \mid b\}$ |
| $\mathrm{kgV}(a, b)$ | $\min\{m \in \mathbb{N} \mid a \mid m \land b \mid m\}$<br>$\frac{ab}{\mathrm{ggT}(a,b)}$ |
| Teilerfremd | Zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$ heissen ***Teilerfremd***, wenn $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$<br>Sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl und $q \in \mathbb{N}, q < p, q \neq 0$ dann ist $\mathrm{ggT}(p, q) = 1$ |

### 7.4. EUKLIDSCHER ALGORITHMUS

Seien $a, b \in \mathbb{N}, a \neq b, a \neq 0, b \neq 0$
Initialisierung: Setze $x \coloneqq a, y \coloneqq b$ und $q \coloneqq x, r \coloneqq x - q \cdot y$ (d.h. bestimme q und r so, dass $x = q \cdot y + r$ ist)
Wiederhole bis $r = 0$ ist
Ergebnis: $y = \mathrm{ggT}(a, b)$

#### 7.4.1. Beispiel

$\mathrm{ggT}(122, 72), a = 122, b = 72$

- Init: $x_0 = a = 122, y_0 = b = 72$
- Iteration:

| | $x = y_{-1}$ | $y = r_{-1}$ | $q = x \operatorname{div} y$ | $r = x \bmod y = x - q \cdot y$ |
|---|---|---|---|---|
| $i = 0$ | 122 | 72 | 1 | 50 |
| $i = 1$ | 72 | 50 | 1 | 22 Muster: $r_{i+1} < r_i$ |
| $i = 2$ | 50 | 22 | 2 | 6 |
| $i = 3$ | 22 | 6 | 3 | 4 |
| $i = 4$ | 6 | 4 | 1 | 2 |
| $i = 5$ | 4 | 2 =ggT(122,72) | 2 | 0 (immer 0 am Schluss) |

### 7.5. ERWEITETER EUKLIDSCHER ALGORITHMUS

Seien $a, b \in \mathbb{N}, a \neq b, a \neq 0, b \neq 0$
Initialisierung: Setze $x \coloneqq a, y \coloneqq b, q \coloneqq x \div y, r \coloneqq x - q \cdot y, (u, s, v, t) = (1, 0, 0, 1)$ (d.h. bestimme q und r so, dass $x = q \cdot y + r$ ist)
Wiederhole bis $r = 0$ ist
Ergebnis: $y = \text{ggT}(a, b) = s \cdot a + t \cdot b$
Wenn $\text{ggT}(a, b) = 1$ ist, dann folgt: $t \cdot v \equiv 1 \bmod a$

#### 7.5.1. Beispiel

$\text{ggT}(99, 79)$

| $i$ | $x = y_{-1}$ | $y = r_{-1}$ | $q = x \div y$ | $r = x - q \cdot y$ | $u = s_{-1}$ | $s = u_{-1} - q_{-1} \cdot s_{-1}$ | $v = t_{-1}$ | $t = v_{-1} - q_{-1} \cdot t_{-1}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $i = 0$ | 99 | 79 | 1 | 20 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| $i = 1$ | 79 | 20 | 3 | 19 | 0 | 1 | 1 | $-1$ |
| $i = 2$ | 20 | 19 | 1 | 1 | 1 | $-3$ | $-1$ | 4 |
| $i = 3$ | 19 | 1 | 19 | 0 | $-3$ | 4 | 4 | $-5$ |

Daraus folgend:
- $\text{ggT}(99, 79) = 4 \cdot 99 + (-5) \cdot 79 \Leftrightarrow 396 - 395 = 1$
- $99 + (-5) = 94$ ist mult. Inv. von $79$ in $\mathbb{Z}_{99}$
- $79 + 4 = 83 \equiv 4$ ist mult. Inv. von $99$ in $\mathbb{Z}_{79}$

### 7.6. KLEINER FERMAT

Sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl und $x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ mit $\text{ggT}(x, p) = 1$
Dann ist: $x^{p-1} \equiv 1 \bmod p$
Daraus folgend:

$$\begin{aligned} & x^{p-1} \equiv 1 \bmod p && \mid ()^n \\ \Leftrightarrow\ & x^{n(p-1)} \equiv 1 \bmod p && \mid \cdot\, x \\ \Leftrightarrow\ & x^{1+n(p-1)} \equiv x \bmod p \\ \Leftrightarrow\ & x^{1 \bmod (p-1)} \equiv x \bmod p \end{aligned}$$

### 7.7. SATZ VON EULER

Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $z \in \mathbb{Z}$ mit $\text{ggT}(z, n) = 1$. Dann ist $z^{\varphi(n)} \equiv 1 \bmod n$.

#### 7.7.1. Euler'sche $\varphi$-Funktion (Totient)

Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $\mathbb{Z}_n^* = \left\{x \in \mathbb{Z}_n \;\middle|\; x \text{ hat ein multiplikatives Inverses in } \mathbb{Z}_n\right\}$.
Dann heisst $\varphi(n)$:

$$\begin{aligned} \varphi(n) &= \text{Anz. Elemente in } \mathbb{Z}_n \text{ mit mult. Inversen} \\ &= \text{Anz. Zahlen } 1 \leq q \leq n \text{ mit ggt}(q, n) = 1 \\ &= \left|\mathbb{Z}_n^*\right| \end{aligned}$$

##### 7.7.1.1. Rechenregeln

1) Sei $n \in \mathbb{N}$ eine Primzahl, dann $\varphi(n) = n - 1$
2) Sei $n \in \mathbb{N}$ eine Primzahl und $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, dann $\varphi(n^p) = n^{p-1} \cdot (n - 1)$
3) Seien $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $\text{ggT}(m, n) = 1$, dann $\varphi(n \cdot m) = \varphi(n) \cdot \varphi(m)$

### 7.8. RSA VERSCHLÜSSELUNG

1) Wähle 2 Primzahlen $p, q$
2) Berechne $n = p \cdot q$
3) Berechne $\varphi(n) = (p - 1)(q - 1)$
4) Wähle $a, b$ so, dass $a \cdot b \equiv 1 \bmod \varphi(n)$
5) Vergesse $p, q, \varphi(p \cdot q)$. Brauchen wir nicht und riskieren nur, dass uns jemand hackt

Public key ist nun $n, b$, Private key ist $n, a$
Verschlüsseln: $c^a \bmod n$
Entschlüsseln: $z^b \bmod n \Leftrightarrow c^{a^b} \bmod n$
Sidenote: Fürs Alphabet muss $n$ grösser sein als $26$

# 8. LINEARE ALGEBRA

3b1b <3

## 8.1. GLOSSAR

| *Begriff* | *Bedeutung* |
|---|---|
| Homogenes LGS | $M \cdot \vec{x} = \vec{0}$ |
| Inhomogenes LGS | $M \cdot \vec{x} = \vec{b}$ |
| Lineare Abbildung | $L : \begin{cases} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \\ \vec{x} \mapsto M\vec{x} \end{cases}$<br>$\text{kern}(L) = \{\vec{0}\} \Leftrightarrow L$ ist injektiv |
| Kern | Lösungsmenge des Homogenen LGS = $\left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid L(\vec{x}) = \vec{0}\right\}$ |

## 8.2. PIVOT-GLEICHUNG

$$
\begin{array}{ll}
(\mathrm{I}) & 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 = -6 \\
(\mathrm{II}) & x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -10 \\
(\mathrm{III}) & 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 = -18 \\
\Rightarrow & \\
(\mathrm{I'}) & 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 = -6 \\
(\mathrm{II'}) = (\mathrm{II}) - (\mathrm{I}) & 1x_2 + 2x_3 = -4 \\
(\mathrm{III'}) = (\mathrm{III}) - 2(\mathrm{I}) & 1x_2 + 4x_3 = -6 \\
\Rightarrow & \\
(\mathrm{I''}) & 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 = -6 \Rightarrow x_1 = -6 - x_2 - x_3 = -6 + 2 + 1 = -3 \\
(\mathrm{II''}) = (\mathrm{II}) & 1x_2 + 2x_3 = -4 \underbrace{\Rightarrow x_2 = -4 - 2x_3 = -4 + 2 = -2}_{\text{Rückwärtssubstitution}} \\
(\mathrm{III''}) = (\mathrm{III'}) - (\mathrm{II'}) & 2x_3 = -2 \Rightarrow x_3 = -1
\end{array}
$$

$$
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}
$$

## 8.3. GAUSS-TABLEAU

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | 1 | |
|---|---|---|---|---|---|
| **I** | 1 | 1 | 1 | −6 | |
| **II** | 1 | 2 | 3 | −10 | **−(I)** |
| **III** | 2 | 3 | 6 | −18 | **−2(II)** |
| | | | ⇒ | | |
| **I'** | 1 | 1 | 1 | −6 | |
| **II'** | 0 | 1 | 2 | −4 | |
| **III'** | 0 | 1 | 4 | −6 | **−(II')** |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | ⇒ | | |
| **I"** | 1 | 1 | 1 | −6 | |
| **II"** | 0 | 1 | 2 | −4 | |
| **III"** | 0 | 0 | 2 | −2 | $\cdot \frac{1}{2}$ |
| | | | ⇒ | | |
| **I'''** | 1 | 1 | 1 | −6 | **−(III''')** |
| **II'''** | 0 | 1 | 2 | −4 | **−2(III''')** |
| **III'''** | 0 | 0 | 1 | −1 | |

⇒

Koeffizientenmatrix $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | 1 | |
|---|---|---|---|---|---|
| **I''''** | 1 | 1 | 0 | −5 | **−(II'''')** |
| **II''''** | 0 | 1 | 0 | −2 | |
| **III''''** | 0 | 0 | 1 | −1 | |
| | | | ⇒ | | |
| | 1 | 0 | 0 | −3 | |
| | 0 | 1 | 0 | −2 | |
| | 0 | 0 | 1 | −1 | |

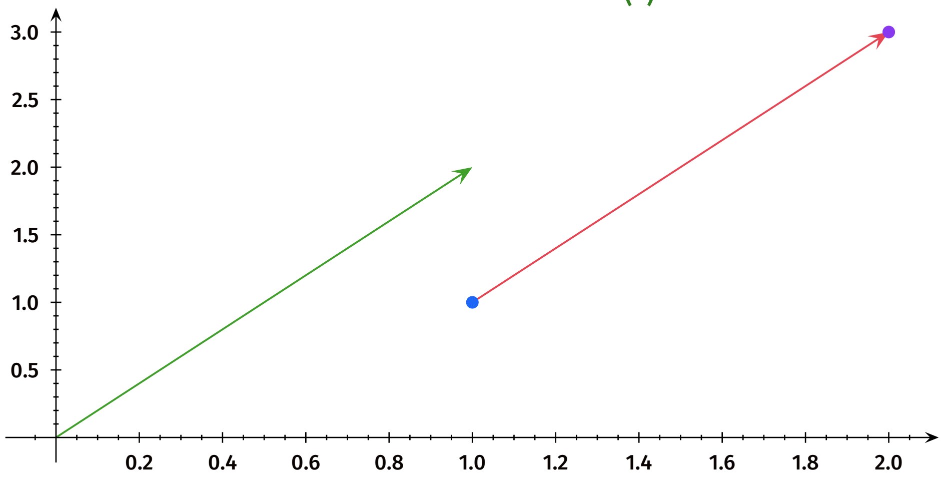
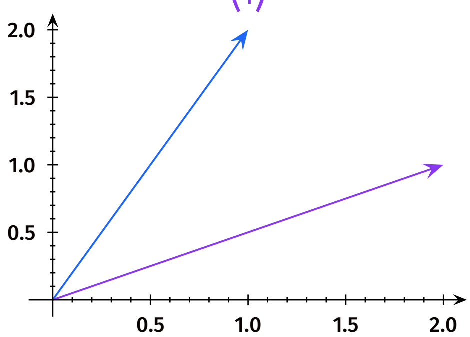
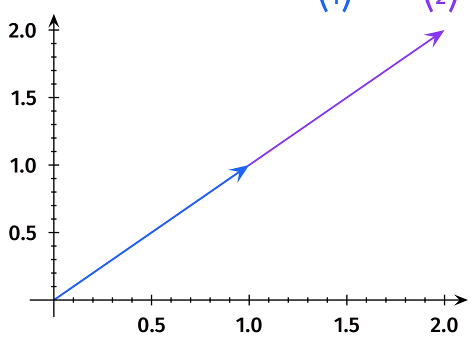
Ergebnisvektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$ Lösungsvektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ Lineares Gleichungssystem $\boldsymbol{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}$

$p$ = Anzahl Pivot-Variablen.
Wenn $b_{p+1} = \ldots = b_m = 0$ dann ist das LGS lösbar (homogenes Gleichungssystem), sonst unlösbar.
Wenn $p = n$ dann hat LGS genau eine Lösung.
Wenn $p < n$ dann hat LGS unendlich viele Lösungen.

## 8.4. VEKTOREN

### 8.4.1. Glossar

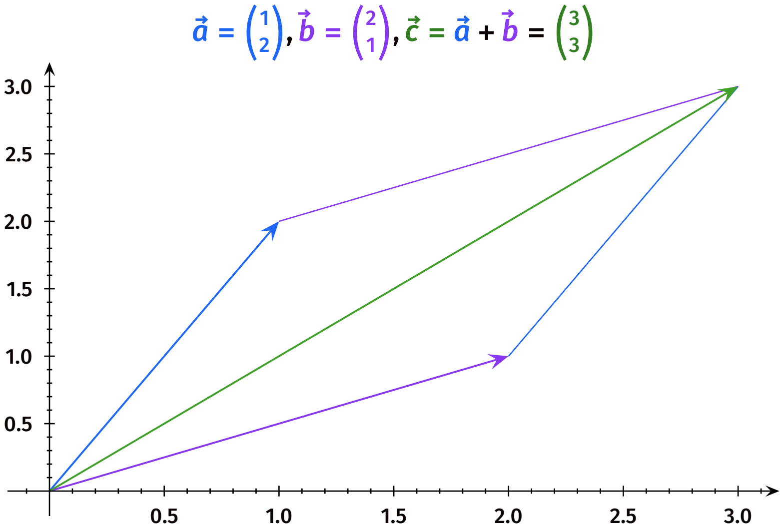
| *Begriff* | *Bedeutung* |
|---|---|
| Vektor | Liste von Zahlen |
| Nullvektor | $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ |
| Ortsvektor | Ortsvektor $\vec{p}$ vom Nullpunkt des Koordinatensystems $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ zum Punkt $\boldsymbol{P}$ |

| ***Begriff*** | ***Bedeutung*** |
|---|---|
| Richtungsvektor | Richtungsektor $\vec{AB}$ vom Punkt $A$ zum Punkt $B$ ist $\vec{b} - \vec{a}$<br>$A = (1;1), B = (2;3), \vec{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$<br> |
| Linearkombination | Linearkombination der Variabeln $x_1, x_2, x_3$ (Bsp. $3 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 = -6$). Vektoren werden jeweils mit einer Zahl mutlipliziert und miteinander summiert |
| Lineare Unabhängigkeit | $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ heissen linear unabhängig, wenn die Gleichung<br>$\lambda_1 \cdot \vec{v}_1, \lambda_2 \cdot \vec{v}_2, \ldots, \lambda_n \cdot \vec{v}_n = \vec{0}$ genau eine Lösung hat, nämlich<br>$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$<br>$\begin{pmatrix} \uparrow & \ldots & \uparrow \\ \vec{v}_1 & \ldots & \vec{v}_n \\ \downarrow & \ldots & \downarrow \end{pmatrix} \cdot \vec{\lambda} = \vec{0}$ eindeutig lösbar = $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ sind linear unabhängig<br>Linear unabhängig: $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$<br><br>Linear abhängig: $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$<br> |
| Skalarprodukt | $\vec{a} \bullet \vec{b} = c$<br>$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$ |
| Betrag/Länge eines Vektors | $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$<br>$\lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 5^2} = \sqrt{38}$ |

### 8.4.2. Vektorenrechnen

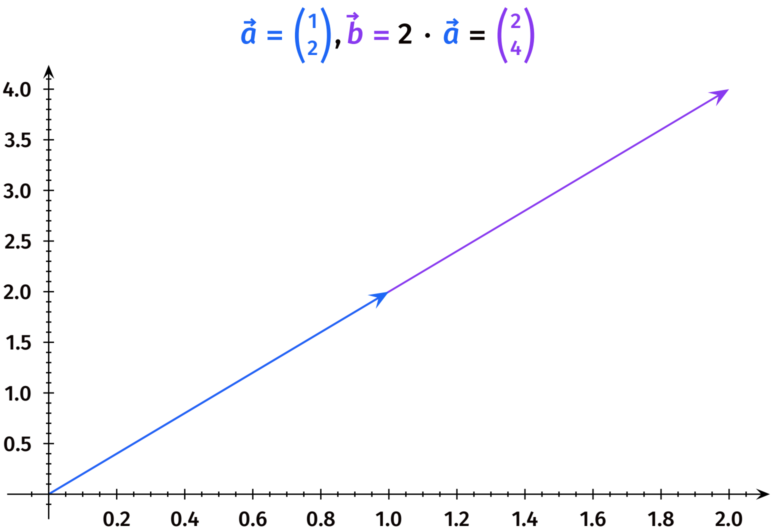
Addition:

$$\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+5 \\ 2+(-9) \\ 3+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix}$$




Multiplikation mit reellen Zahlen (=Skalare):

$$3 \cdot \vec{v} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$




### 8.4.3. Rechenregeln

Falls die Vektoren senkrecht zueinanderstehen, ist das Skalarprodukt gleich 0

$$\lambda\vec{0} = \vec{0}$$

$$\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$$

$$-\vec{v} = -1 \cdot \vec{v}$$

$$-\vec{v} + \vec{v} = \vec{0}$$

$$(\lambda\mu)\vec{v} = \lambda(\mu\vec{v}) = \lambda\mu\vec{v}$$

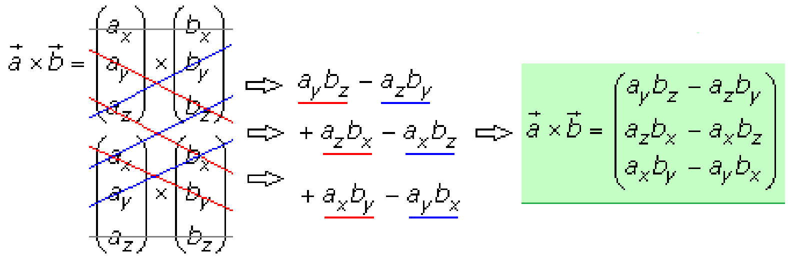
$$\lambda(\vec{v} + \vec{w}) = \lambda\vec{v} + \lambda\vec{w}$$

$$\vec{v} + (\vec{u} + \vec{w}) = (\vec{v} + \vec{u}) + \vec{w} = \vec{v} + \vec{u} + \vec{w}$$

### 8.4.4. Kreuzprodukt

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$




#### 8.4.4.1. Eigenschaften

Anti-kommutativ: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$. Konsequenz: $\vec{a} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$

Distributiv: $\vec{a} \times \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

Gemischt-assoziativ: $\lambda\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = \left(\lambda\vec{a}\right) \times \vec{b} = \vec{a} \times \left(\lambda\vec{b}\right)$

Das Kreuzprodukt ist **nicht** assoziativ. $\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c}$ darf man nicht! $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$

#### 8.4.4.2. Geometrische Eigenschaften

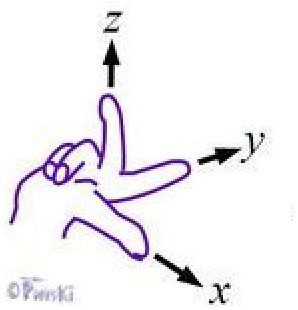



Abbildung 1: Rechtssystem

$\vec{a} \times \vec{b}$ steht immer senkrecht auf $\vec{a}$ und auf $\vec{b}$.

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$ bilden ein Rechtssystem

$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$ = Flächeninhalt des durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms $= \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin(\varphi)$

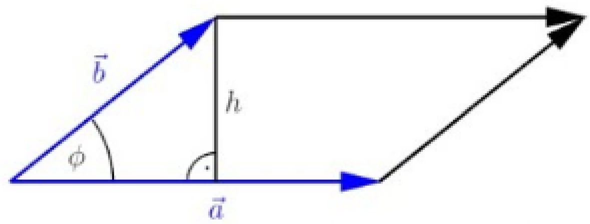



Abbildung 2: **Flächeninhalt** $h \cdot a$

### 8.4.5. Vektorraum

Ein Vektorraum ist eine Menge $V$ mit den Rechenoperationen:

$$\oplus : V \times V \to V, \left(\vec{v}, \vec{w}\right) \mapsto \vec{v} \oplus \vec{w}$$

$$\odot : \mathbb{R} \times V \to V, \left(\lambda, \vec{v}\right) \mapsto \lambda \odot \vec{v}$$

Mit den Eigenschaften:

- Vektoraddition:
  - ***Assoziativgesetz***: $u \oplus (v \oplus w) = (u \oplus v) \oplus w$
  - Existenz eines ***neutralen Elements*** $0_V \in V$ mit $v \oplus 0_V = 0_V \oplus v = v$
  - Existenz eines zu $v \in V$ ***inversen Elements*** $-v \in V$ mit $v \oplus (-v) = (-v) \oplus v = 0_V$
  - ***Kommutativgesetz***: $v \oplus u = u \oplus v$
- Skalarmultiplikation:
  - $\alpha \odot (u \oplus v) = (\alpha \odot u) \oplus (\alpha \odot v)$
  - $(\alpha + \beta) \odot v = (\alpha \odot v) \oplus (\beta \odot v)$
  - $(\alpha \cdot \beta) \odot v = \alpha \odot (\beta \odot v)$
  - $1 \odot v = v$ für das ***Einselement*** $1 \in K$ des ***Skalarkörpers***

Gelten diese Eigenschaften für die Teilmenge eines grösseren Vektorraums $W$, so nennt man $V$ ***Untervektorraum*** von $W$. Heisst: Man hat nur dann einen Untervektorraum $V$, wenn die Produkte der Multiplikation oder Addition der Elemente dieses Raumes auch in $V$ liegen. Untervektorräume sind also unendliche

Räume mit n Dimensionen weniger, zB $\boldsymbol{W}$ = 3-Dimensionaler Vektorraum, $\boldsymbol{V}$ = 2-Dimensionaler Untervektorraum.

Kern von $A = U = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; A\vec{x} = \vec{0}\right\}, A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$.

### 8.4.6. Lineare Abbildung

Eine Lineare Abbildung ist eine Funktion

$$L : \begin{cases} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \\ \vec{x} \quad \mapsto L(\vec{x}) \end{cases}$$

mit den Eigenschaften

$$L(\vec{x} + \vec{y}) = L(\vec{x}) + L(\vec{y})$$
$$L(\lambda\vec{x}) = \lambda L(\vec{x})$$

Für jede lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gibt es eine (Abbildungs) Matrix $M \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit der Eigenschaft, dass $L(\vec{x}) = M\vec{x}$

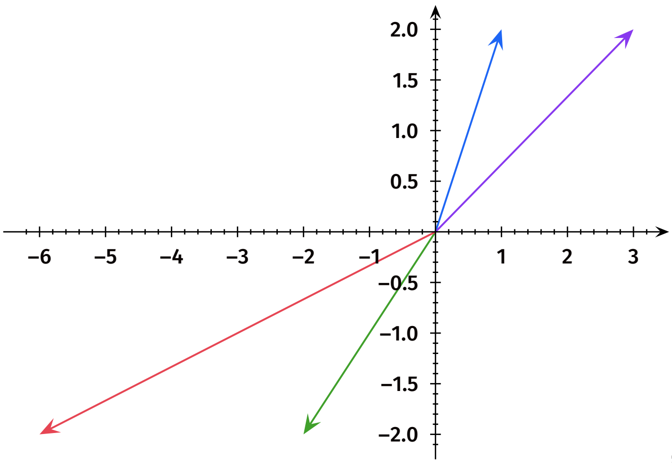
$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & \dots & m_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{m1} & \dots & m_{mn} \end{pmatrix}$$

$$m_{ij} = \vec{e}_i \bullet L(\vec{e}_j)$$

Beispiel

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{c} = M\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{d} = M\vec{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix}$$




,

## 8.5. MATRIZEN

### 8.5.1. Glossar

| *Begriff* | *Bedeutung* |
|---|---|
| Spaltenvektoren | Spalten der Matrix als Vektoren |
| Zeilenvektoren | Zeilen der Matrix als Vektoren |
| Rang | Wieviele Spaltenvektoren einer Matrix linear unabhängig sind |
| Nullmatrix | $0 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ |
| Quadratische Matrix | $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ Gleichviele Zeichen und Spalten |
| Diagonalmatrix | (immer quadratisch und symmetrisch): $D = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 \end{pmatrix}, d_{ij} = 0 \text{ für } i \neq j$ |
| Einheitsmatrix | (immer diagonal): $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ |
| Symmetrische Matrix | (immer quadratisch): $A = A^T, a_{ij} = a_{ij}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ |
| Obere Dreiecksmatrix | $O = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & x_4 & x_5 \\ 0 & 0 & x_6 \end{pmatrix}, o_{ij} = 0 \text{ für } i > j$ |
| Kovarianzmatrix | immer symmetrisch |
| Reguläre Matrix | Quadratische Matrix mit höchstem Rang (Rang = Anzahl Spalten/Reihen) |
| Singuläre Matrix | Quadratische Matrix mit kleinerem Rang (Rang < Anzahl Spalten/Reihen) |

| ***Begriff*** | ***Bedeutung*** |
|---|---|
| Invertierbare Matrix | Für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heisst $A$ invertierbar, wenn es eine Matrix $A^{-1}$ gibt, so dass $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = \textbf{Einheitsmatrix (E)}$. Dies ist der Fall, wenn $A$ Regulär ist. |

### 8.5.2. Definition

Matrix mit 2 Zeilen und 3 Spalten

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$$

Komponenten von $A$: $a_{ij}$

$i$: Zeilenindex, $j$: Spaltenindex. Bsp: $a_{23} = 7$

### 8.5.3. Matrizen als Vektoren interpretieren

→ $A$ ist ein 6-Dimensionaler VR (Vektorraum)

$$\textbf{Variante 1: } \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \\ a_{14} \\ a_{15} \\ a_{16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \\ 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \textbf{Variante 2: } \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \\ a_{14} \\ a_{15} \\ a_{16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{R}^n \textbf{ interpretiere als } \begin{cases} \mathbb{R}^{n \times 1} \to \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \textbf{ Spaltenvektor} \\ \mathbb{R}^{1 \times n} \to \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} \textbf{ Zeilenvektor} \end{cases}$$

Zu $A$ gehörige Zeilenvektore

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \leftarrow \vec{a}_1 \rightarrow \\ \leftarrow \vec{a}_2 \rightarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Zu $A$ gehörige Spaltenvektore

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \vec{a}_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

### 8.5.4. Matrizen transponieren

Transponierte Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ wäre: $A^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$

$A = (a_{ij}), A^T = (a_{ji})$

Rolle von Zeile und Spalte vertauscht: $a_{ij} \to a_{ji}$

Bsp:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 2}, A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3},$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

### 8.5.5. Matrizen invertieren

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

### 8.5.6. Matrixmultiplikation

Meistens nicht kommutativ ($A \cdot B \neq B \cdot A$)

$B$ muss genau gleich viele Zeilen haben wie $A$ Spalten

$$A \in \mathbb{R}^{m \times l}, B \in \mathbb{R}^{l \times n}, C = A \cdot B \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{l} a_{ik} b_{kj}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 1 & 0 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2 \cdot 6 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 8) & (2 \cdot 4 + 3 \cdot 0 + 1 \cdot 9) \\ (4 \cdot 6 + -1 \cdot 1 + 7 \cdot 8) & (4 \cdot 4 + -1 \cdot 0 + 7 \cdot 9) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 17 \\ 79 & 79 \end{pmatrix}$$

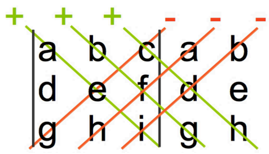
### 8.5.7. Determinante

Determinante einer quadratischen Matrix ist eine reelle Zahl

$$1 \times 1 \text{ Matrix}: \det(a) = a$$

$$2 \times 2 \text{ Matrix}: \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - cb$$

$$3 \times 3 \text{ Matrix}: \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$-a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$




Bsp:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

$$x = \frac{\det\begin{pmatrix} e & b \\ f & d \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} = \frac{ed - fb}{ad - cb}$$

$$y = \frac{\det\begin{pmatrix} a & e \\ c & f \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} = \frac{af - ce}{ad - cb}$$

Definition der Determinante:

$$\det : \begin{cases} \mathbb{R}^{n \times n} & \to \mathbb{R} \\ M & \mapsto \det(M) \end{cases}$$

Definition über Eigenschaften:

$$\det(\mathbb{1}) = 1$$

$$\det\begin{pmatrix} \cdots & \vec{a}_1 & \cdots \\ \cdots & \lambda\vec{a}_k & \cdots \\ \cdots & \vec{a}_n & \cdots \end{pmatrix} = \lambda \det\begin{pmatrix} \cdots & \vec{a}_1 & \cdots \\ \cdots & \vec{a}_k & \cdots \\ \cdots & \vec{a}_n & \cdots \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} \cdots & \vec{a}_1 & \cdots \\ \cdots & \vec{a}_k + \vec{b}_k & \cdots \\ \cdots & \vec{a}_n & \cdots \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \cdots & \vec{a}_1 & \cdots \\ \cdots & \vec{a}_k & \cdots \\ \cdots & \vec{a}_n & \cdots \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} \cdots & \vec{a}_1 & \cdots \\ \cdots & \vec{b}_k & \cdots \\ \cdots & \vec{a}_n & \cdots \end{pmatrix}$$

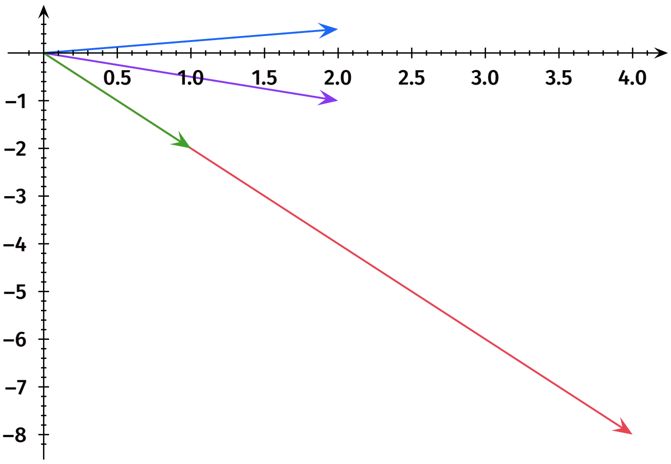
$\det M = 0$ wenn M 2 nicht linear unabhängige Zeilen hat. Heisst: Transformierte Vektoren auch linear abhängig.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \det(M) = 0$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{c} = M\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{d} = M\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{c} \text{ linear abhängig zu } \vec{d}$$




Bsp:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 10 & 12 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} = 2\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 10 & 12 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 8 & 10 & 12 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 8 & 10 & 12 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 10 & 12 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 8 & 10 & 12 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} + 2\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 8 & 10 & 12 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} + 3\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 8 & 10 & 12 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Bsp:

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} = -2\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + 0\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - 4\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= -2(2-3) + 0 - 4(-1)$$

$$= 2 + 4 = 6$$

$$\text{Vorzeichen}: \begin{pmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$\text{Vorgehen}: \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \to -2\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \to 0\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \to -4\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Weitere Eigenschaften:
– Die Determinante wechselt beim Vertauschen von Zeilen ihr Vorzeichen
– Wenn wir zu einer Zeile einer Matrix ein Vielfaches einer anderen Zeile dazuzählen, ändert die Determinante ihren Wert nicht

$$\Rightarrow \det(M) \underbrace{=}_{\text{Gauss}} (-)\det\begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n$$

Weiteres:

$$\det(\lambda M) = \lambda^n \det(M), M \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

$$\det\begin{pmatrix} A & * \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det(A) \cdot \det(B)$$

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

$$\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det(A)}$$

$$\det\left(A^T\right) = \det(A)$$

Volumen eines Spats = $\det\begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix}$

$= \vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$

Volumen = Grundfläche · Höhe

$= \left|\vec{b} \times \vec{c}\right| \cdot \left|\vec{a}\right| \cdot \cos(\varphi)$

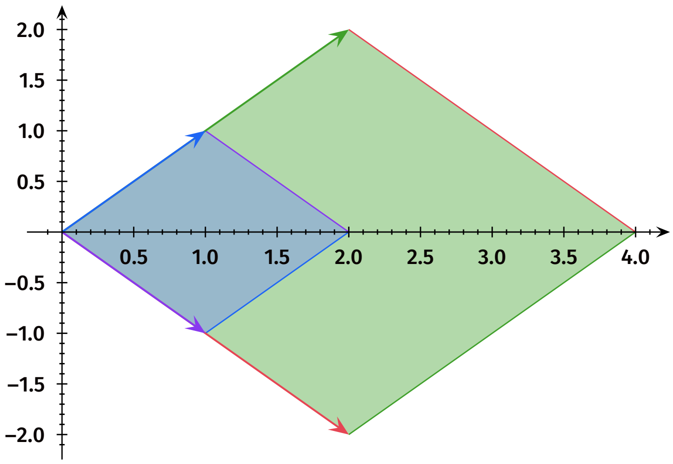
$= \left|\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)\right|$

Determinante im 2D-Raum sagt aus, wie stark eine Fläche auf dem Koordinatensystem skaliert wird sobald durch die Matrix transformiert. Beispiel: $\det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 4$ bedeutet, dass die Fläche vervierfacht wird.

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{c} = M\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{d} = M\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$




### 8.5.8. Eigenwerte

Gegeben: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

$\vec{x}$ heisst **Eigenvektor** zum **Eigenwert** $\lambda$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Gegeben: Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

Ein Vektor $\vec{v} \neq \vec{0}$ heisst Eigenvektor zum Eigenvenwert $\lambda$, wenn $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ ist.

$$A\vec{v} - \lambda\vec{v} = 0$$
$$\Leftrightarrow (A - \lambda\mathbb{1})\vec{v} = 0$$

Wenn $\lambda$ gegeben ist, ist das ein homogenes lineares Gleichungssystem in $\vec{v}$. Davon suchen wir nicht-triviale Lösungen ($\vec{v} \neq \vec{0}$).

$\lambda$ heisst Eigenwert von $A \Leftrightarrow A - \lambda\mathbb{1}$ ist singulär $\Leftrightarrow \operatorname{rang}(A - \lambda\mathbb{1}) < n \Leftrightarrow \det(A - \lambda\mathbb{1}) = 0$

Wenn $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, dann ist $\det(A - \lambda\mathbb{1})$ ein Polynom von Grad $n$. (Charakteristisches Polynom). Eigenwerte sind Nullstellen des charakteristischen Polynoms.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} & \det(A - \lambda\mathbb{1}) \\ &= \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 4-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda)(4-\lambda) - (-2)\cdot 1 \\ &= \lambda^2 - 5\lambda + 4 + 2 \\ &= \lambda^2 - 5\lambda + 6 && = \textbf{Charakteristisches Polynom} \end{aligned}$$

Nullstelle des char. Polynoms

$$\begin{aligned} &\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \\ \Leftrightarrow\ &\lambda = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} \\ \Leftrightarrow\ &\lambda = \frac{5 \pm 1}{2} \\ \Leftrightarrow\ &\lambda \in \{3, 2\} \end{aligned}$$

Eigenwerte von $A$ sind $\lambda = 2$ und $\lambda = 3$

Für diese Zahlen ist die Matrix $A - \lambda\mathbb{1}$ singulär, d.h. die Gleichung $(A - \lambda\mathbb{1})\vec{v} = \vec{0}$ hat nicht-triviale Lösungen. Diese heissen Eigenvektoren.

### 8.5.9. Eigenwert $\lambda = 2$

$$\begin{aligned} &(A - 2 \cdot \mathbb{1}) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

### 8.5.10. Eigenwert $\lambda = 3$

$$\begin{aligned} &(A - 3 \cdot \mathbb{1}) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Matrizen haben Rang von 1

$$(A - 2\mathbb{1})\vec{v} = \vec{0}$$

| $v_1$ | $v_2$ | $1$ |
|---|---|---|
| −1 | 1 | 0 |
| −2 | 2 | 0 |

$$\begin{aligned} &\Rightarrow -v_1 + v_2 = 0 \\ &\Rightarrow v_1 = v_2 \\ &\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu \\ \mu \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Für alle $\mu \neq 0$ ist $\vec{v}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda = 2$

$$(A - 3\mathbb{1})\vec{v} = \vec{0}$$

| $v_1$ | $v_2$ | $1$ |
|---|---|---|
| −2 | 1 | 0 |
| −2 | 1 | 0 |

$$\begin{aligned} &\Rightarrow -2v_1 + v_2 = 0 \\ &\Rightarrow v_2 = 2v_1 \\ &\vec{v} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mu \neq 0 \end{aligned}$$

$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda = 3$.

### 8.5.11. Diagonalisierbar

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heisst **diagonalisierbar**, wenn es eine invertierbare Matrix $X$ gibt, so dass $X^{-1}AX = D$ ($D$ ist eine Diagonalmatrix $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$)

Wenn $A$ diagonalisierbar ist, dann sind die Spalten von $X$ linear unabhängige Eigenvektoren, also eine Basis von $\mathbb{R}^n$, die nur aus Eigenvektoren von $A$ besteht.

Das umgekehrte gilt auch. Das erlaubt uns, $X$ zu konstruieren.

$$
\begin{aligned}
& X^{-1}AX = D \\
\Leftrightarrow\ & AX = XD \\
\Leftrightarrow\ & AX = X\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow\ & A\begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \vec{v}_1 & \dots & \vec{v}_n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \vec{v}_1 & \dots & \vec{v}_n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ A\vec{v}_1 & \dots & A\vec{v}_n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \lambda_1\vec{v}_1 & \dots & \lambda_n\vec{v}_n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow\ & A\vec{v}_1 = \lambda_1\vec{v}_1 \land A\vec{v}_2 = \lambda_2\vec{v}_2 \land \dots \land A\vec{v}_n = \lambda_n\vec{v}_n
\end{aligned}
$$

### 8.5.12. Rechenregeln

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) = A \cdot B \cdot C$$

$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$$

$$C \cdot (A + B) = C \cdot A + C \cdot B$$

$$E \cdot A = A \cdot E = A \text{ für } A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$\left(A^T\right)^T = A$$

$$(A + B)^T = A^T + B^T$$

$$(\lambda A)^T = \lambda A^T$$

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

### 8.5.13. Alternative Berechnungsstrategie von Eigenwerten

$$\text{Mean } m = \frac{1}{2} \operatorname{tr}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{a + d}{2} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$$

$$\text{Product } p = \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc = \lambda_1\lambda_2$$

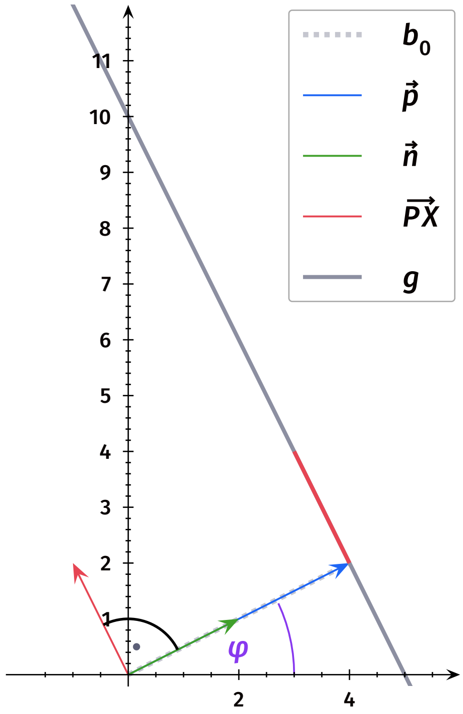
$$\lambda_{1,2} = m \pm \sqrt{m^2 - p}$$

## 8.6. ANALYTISCHE GEOMETRIE

[beste playlist]

## 8.6.1. Geraden

### 8.6.1.1. Parameterform (Punktrichtungsform)




$$g : \underbrace{\vec{x}}_{\binom{x}{y}} = \underbrace{\vec{p}}_{\text{Stützvektor}} + t \cdot \underbrace{\overrightarrow{PX}}_{\text{Richtungsvektor}}, t \in \mathbb{R}$$

$$g_{bsp} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Aus Koordinatenform umwandeln: Richtungsvektor steht senkrecht zum Normalenvektor

### 8.6.1.2. Koordinatenform

$$g : ax + by + c = 0$$

$$g_{bsp} : 2x + y - 10 = 0$$

Aus Parameterform umwandeln:

$$x = 4 - 1t$$
$$y = 2 + 2t$$
$$t = 4 - x$$
$$y = 2 + 2(4 - x) = 10 - 2x$$
$$\Leftrightarrow 2x + y - 10 = 0$$

### 8.6.1.3. Normalenform

$$g : \left(\vec{x} - \underbrace{\vec{p}}_{\text{Stützvektor}}\right) \bullet \underbrace{\vec{n}}_{\text{Normalenvektor}} = 0$$

$$g_{bsp} : \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Aus Koordinatenform umwandeln ($\vec{p}$ bleibt gleich):

$$2x + 1y - 10 = 0 \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

### 8.6.1.4. Hessesche Normalenform

$$g : \vec{x} \bullet \vec{n}_0 - b_0 = 0$$

$$g_{bsp} : \vec{x} \bullet \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{10}{\sqrt{5}} = 0$$

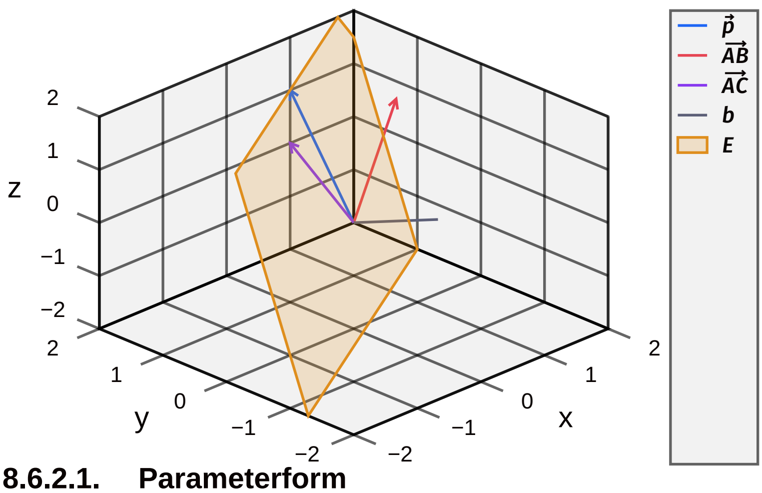
$b_0$ = Abstand der Geraden $g$ vom Ursprung.

### 8.6.1.5. Abstand berechnen

Abstand $a$ von Punkt $P$ zur Geraden $\vec{x} \bullet \vec{n}_0 - b_0 = 0$

$$a = \vec{P} \bullet \vec{n}_0 - b_0$$

### 8.6.2. Ebenen




#### 8.6.2.1. Parameterform

$$E : \underbrace{\vec{x}}_{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}} = \underbrace{\vec{p}}_{\text{Stützvektor}} + s \cdot \underbrace{\overrightarrow{AB}}_{\text{Spannvektor}} + t \cdot \underbrace{\overrightarrow{AC}}_{\text{Spannvektor}}, s, t \in \mathbb{R}$$

$$E_{bsp} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

#### 8.6.2.2. Normalenform

$$E : \left( \vec{x} - \underbrace{\vec{p}}_{\text{Stützvektor}} \right) \bullet \underbrace{\vec{n}}_{\text{Normalenvektor}} = 0$$

$$E_{bsp} : \left( \vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \bullet \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

Aus Parameterform umwandeln ($\vec{p}$ bleibt gleich):

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

#### 8.6.2.3. Koordinatenform

$$E : ax + by + cz + d = 0$$

$$E_{bsp} : 4x - 7y + 2z + 3 = 0$$

Aus Normalenform umwandeln (ausmultiplizieren):

$$\begin{pmatrix} x - 0 \\ y - 1 \\ z - 2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 = 4x - 7y + 2z + 3$$

### 8.6.2.4. Vereinfachte Normalenform

$$E : \vec{x} \bullet \underbrace{\vec{n}}_{\text{Normalenvektor}} - \underbrace{b}_{\vec{p} \bullet \vec{n}} = 0$$

$$E_{bsp} : \vec{x} \bullet \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} + 3 = 0$$

Aus Koordinatenform umwandeln: $1x - 7y + 2z + 3 = 0$

$$\vec{x} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} + 3 = 0$$

### 8.6.2.5. Hessesche Normalform

$$E : \vec{x} \bullet \underbrace{\vec{n}_0}_{\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}} - \underbrace{b_0}_{\frac{b}{|\vec{n}|}} = 0$$

$$E_{bsp} : \vec{x} \bullet \frac{1}{\sqrt{69}} \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{3}{\sqrt{69}} = 0$$

Aus Normalenform umwandeln:

$$b = 3, \ |\vec{n}| = \sqrt{69}, \ \vec{n}_0 = \frac{1}{\sqrt{69}} \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}, \ b_0 = \frac{3}{\sqrt{69}}$$

### 8.6.2.6. Abstand berechnen

Abstand $a$ von Punkt $Q$ zur Ebene $\vec{x} \bullet \vec{n}_0 - b_0 = 0$

$a = \vec{q} \bullet \vec{n}_0 - b_0$

Abstand von Punkt $P(2, 8, 2)$ zur Ebene $E : 2x - y + 4z = 1$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{21}$$

$$\frac{2x - y + 4z - 1}{\sqrt{21}}$$

$$\Rightarrow \frac{2 \cdot 2 - 1 \cdot 8 + 4 \cdot 2 - 1}{\sqrt{21}}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{21}}$$