Analysis für Informatiker | An1I

Zusammenfassung

INHALTSVERZEICHNIS

1. FUNKTIONEN

1.1. ANATOMIE EINER FUNKTION

$$\underbrace{f}_{\text{Funktionsname}} : \begin{cases} \underbrace{\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}}_{\text{Definitionsmenge}} & \to \underbrace{\mathbb{R}^+}_{\text{Zielmenge}} \\ \underbrace{x}_{\text{Input / Argument}} & \mapsto \underbrace{x+4}_{\text{Element des Wertebereichs (Output)}} \end{cases}$$

Schreibweisen:

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto x+4 \end{cases}$$

$$f : \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^+, x \mapsto x+4$$

1.2. GLOSSAR

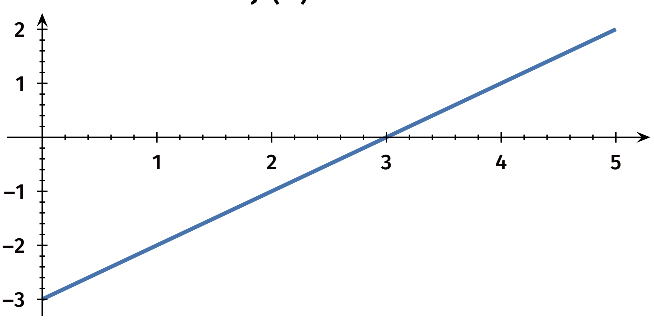
Begriff	*Bedeutung*
Definitionsmenge	Mögliche Funktionsinputs Notation definitionsmenge der Funktion f: D_f
Zielmenge	Mögliche Funktionswerte
Definitionsbereich	Alle Funktionsinputs
Wertebereich	Alle Funktionswerte
Nullstelle einer Funktion	Argument, welches den Funktionswert 0 hat
Bild einer Funktion	Alle möglichen Funktionswerte einer Funktion
Graph	Menge aller Punkte (Tupel) einer Funktion in der Form (Argument, Funktionswert) $\mathrm{Graph}_f = (x, y) \mid y = f(x)$
Polynom	$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ Koeffizienten: $a_n, \dots, a_0$ Grad des Polynoms: n

1.2.1. Stetige Funktion

Funktion, deren Graph keine Sprünge oder Unterbrechungen aufweist

Bsp:

$$f(x) = x - 3$$

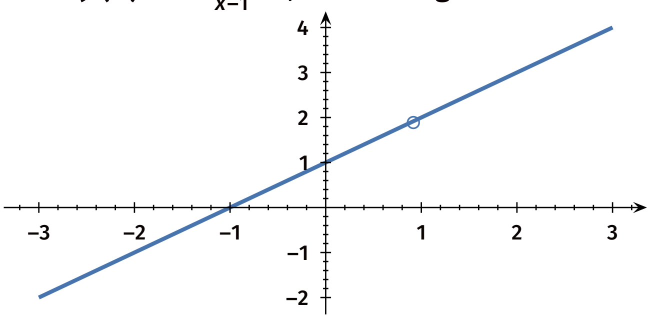


1.2.2. Stetig fortsetzbare Funktion

Funktion, die an einem bestimmten Punkt nicht definiert ist, aber erweitert werden kann, sodass die erweiterte Funktion stetig bleibt

Bsp:

$$f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1}, \text{nicht stetig bei } x = 1$$



Stetige fortsetzung: $\tilde{f}(x) = x + 1$

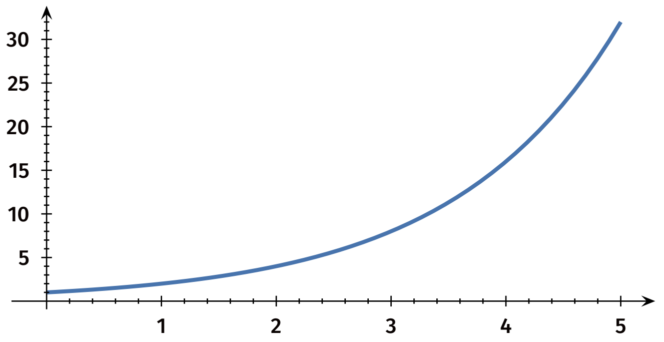
1.2.3. Streng wachsende Funktion

$x < \tilde{x} \rightarrow f(x) < f(\tilde{x})$

Bsp:

$$f(x) = a^x, a > 1$$

$$(\text{Diagramm: } f(x) = 2^x)$$

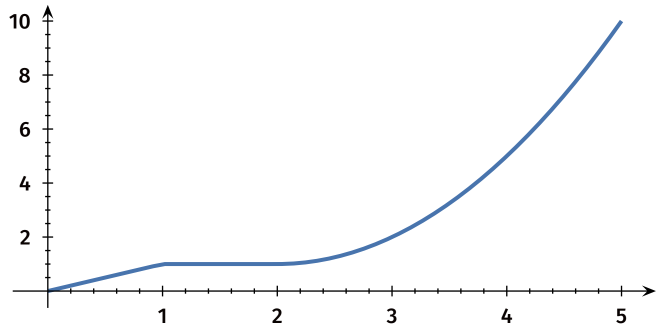


1.2.4. Monoton wachsende Funktion

$x < \tilde{x} \rightarrow f(x) \leq f(\tilde{x})$

Bsp:

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1 \\ 1, & 1 < x \leq 2 \\ (x-2)^2 + 1, & x > 2 \end{cases}$$

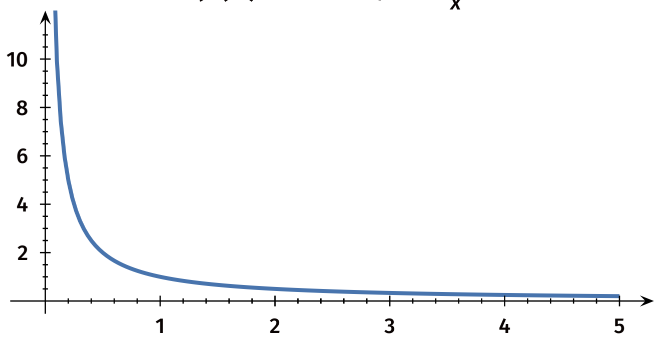


1.2.5. Streng fallende Funktion

$x < \tilde{x} \rightarrow f(x) > f(\tilde{x})$

Bsp:

$$f(x) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$$

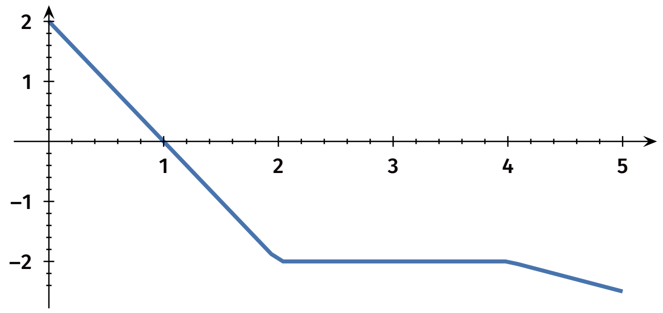


1.2.6. Monoton fallende Funktion

$x < \tilde{x} \rightarrow f(x) \geq f(\tilde{x})$

Bsp:

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 2, & x \leq 2 \\ -2 & ,1 < x \leq 4 \\ -\frac{x}{2} & , x > 4 \end{cases}$$



1.2.7. Periodische Funktion

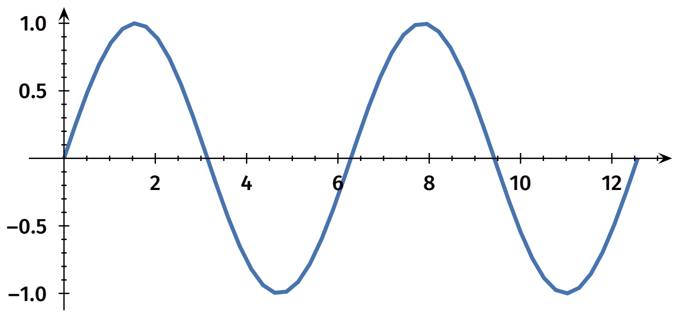
$\forall x \in D_f : f(x + p) = f(x)$

- Mit der Periode p
- Die kleinste positive Periode heisst ***primitive Periode***

Bsp:

$$f(x) = \sin(x)$$

$$p = 2\pi$$

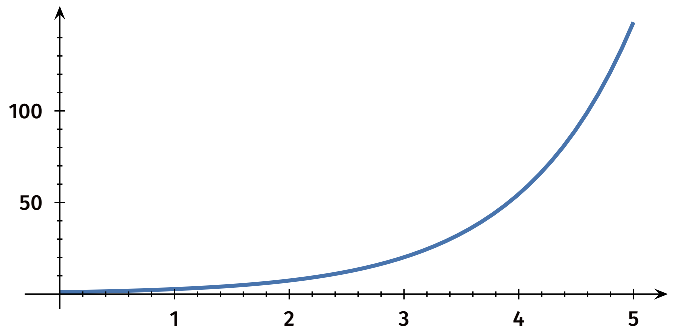


1.2.8. Glatte Funktion

Funktion, die unendlich oft differenzierbar ist

Bsp:

$$f(x) = e^x$$



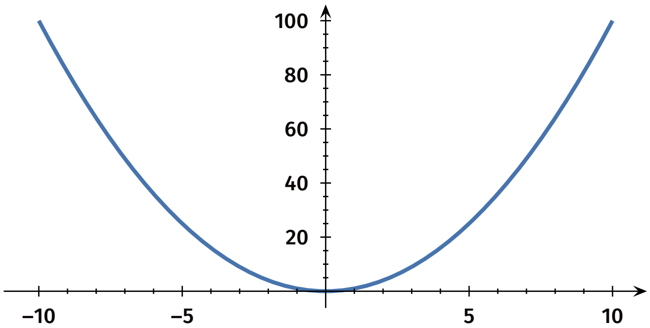
1.2.9. Gerade Funktion

$\forall x \in D_f : f(-x) = f(x)$

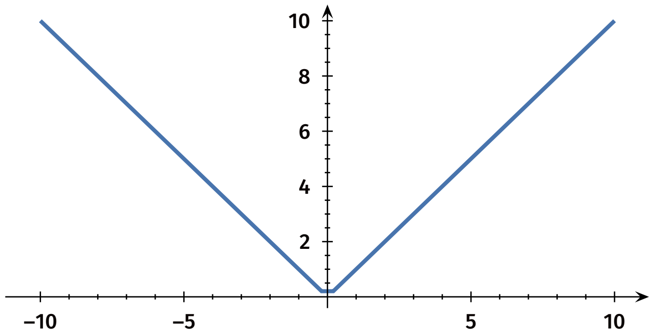
Bsp:

$f(x) = x^n, n$ gerade

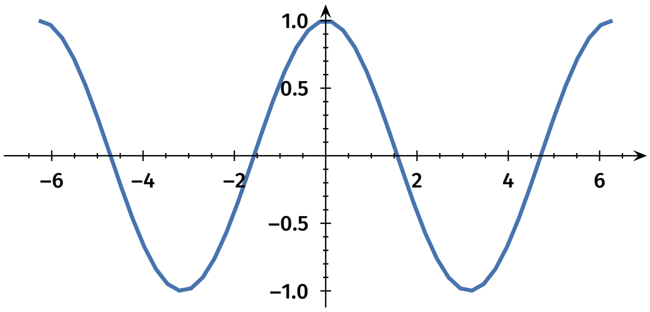
Diagramm: $f(x) = x^2$



$f(x) = |x|$



$f(x) = \cos(x)$



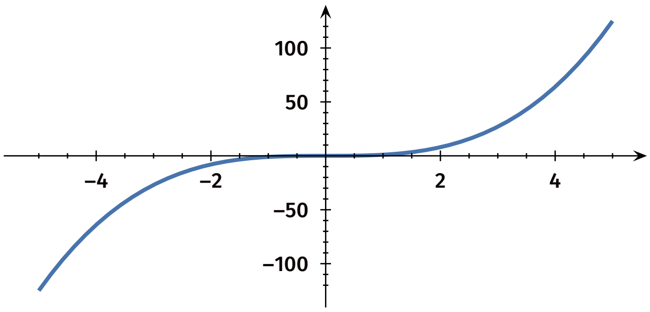
1.2.10. Ungerade Funktion

$\forall x \in D_f : f(-x) = -f(x)$

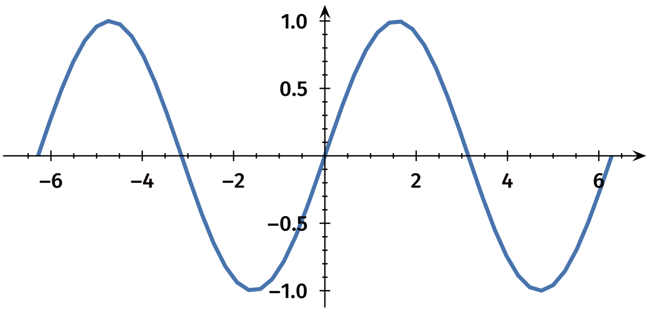
Bsp:

$f(x) = x^n, n$ ungerade

Diagramm: $f(x) = x^3$



$f(x) = \sin(x)$

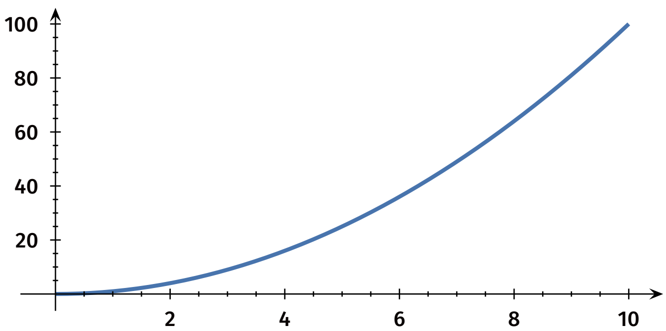


1.2.11. Umkehrfunktion

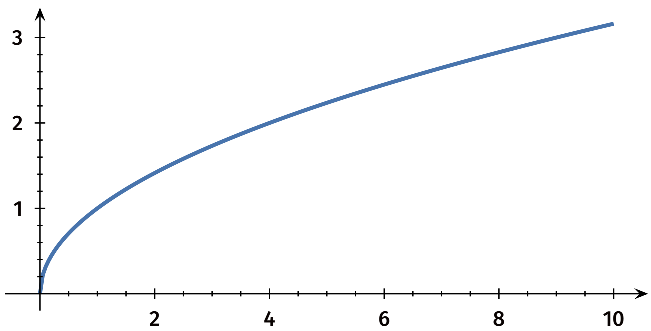
$f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$

Bsp:

$f(x) = x^2$



$f^{-1}(x) = \sqrt{x}$



1.3. NULLSTELLENFORM

Quadratisch

- $f(x) = a^2x + bx + c$
- $f(x) = a(x - x_0)(x - x_1)$

Kubisch

- $f(x) = a^3x + b^2x + cx + d$
- $f(x) = a(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$

1.4. SCHEITELFORM

$f(x) = a(x - x_0)^2 + y_0$ -> x_0 und y_0 sind der scheitelpunkt

1.5. VERKNÜPFUNG VON FUNKTIONEN

$$g(A) = B, f(B) = C \Leftrightarrow f(g(A)) = C \Leftrightarrow (f \circ g)(A) = C$$

$$f(g(x)) \coloneqq (f \circ g)(x)$$

Fast immer ist $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$. Es gibt ein Fall, wo $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ gilt, nämlich bei Umkehrfunktionen. $(f^{-1} \circ f)(x) = (f \circ f^{-1})(x)$

1.5.1. Beispiel

$$g(x) = x^2 + 1$$

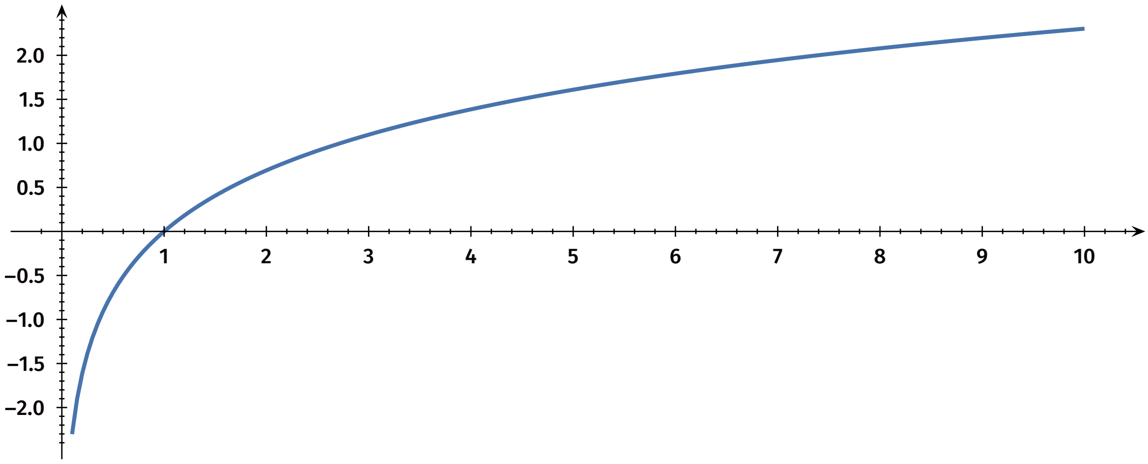
$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$f(g(4)) = \sqrt{4^2 + 1} = \sqrt{17}$$

$$g(f(4)) = \sqrt{4}^2 + 1 = 5$$

2. LOGARITHMEN

$$f(x) = \ln(x)$$

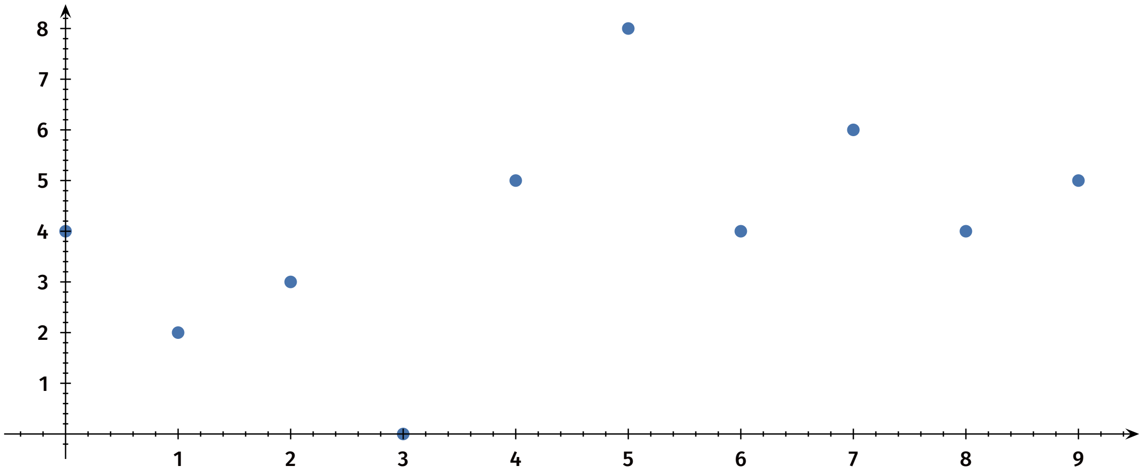


Term	Lösung	Term	Lösung
$a^{\log_a(x)}$	x	$\log_a(1)$	0 weil a hoch was ist 1
$\log_a(a)$	1	$\log_a\left(\frac{x}{y}\right)$	$\log_a(x) - \log_a(y)$
$\log_a(x * y)$	$\log_a(x) + \log_a(y)$	$\log_a(x^p)$	$\log_a(\lvert x \rvert) * p, p\%2 = 0$
$\log_a\left(\sqrt[n]{x}\right)$	$\log_a\left(x^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n} \log_a(x)$	$\ln$	$\log_e$

3. SPLINES

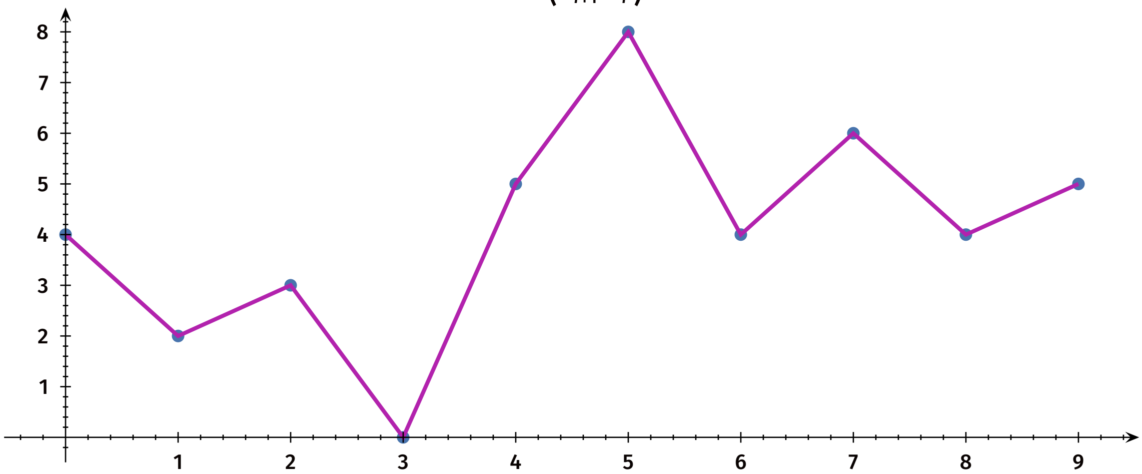
Spline 1. Grades = lineare Splines n-te Splines = Splines aus Polynomen maximal n-ten Grades

Datenpunkte



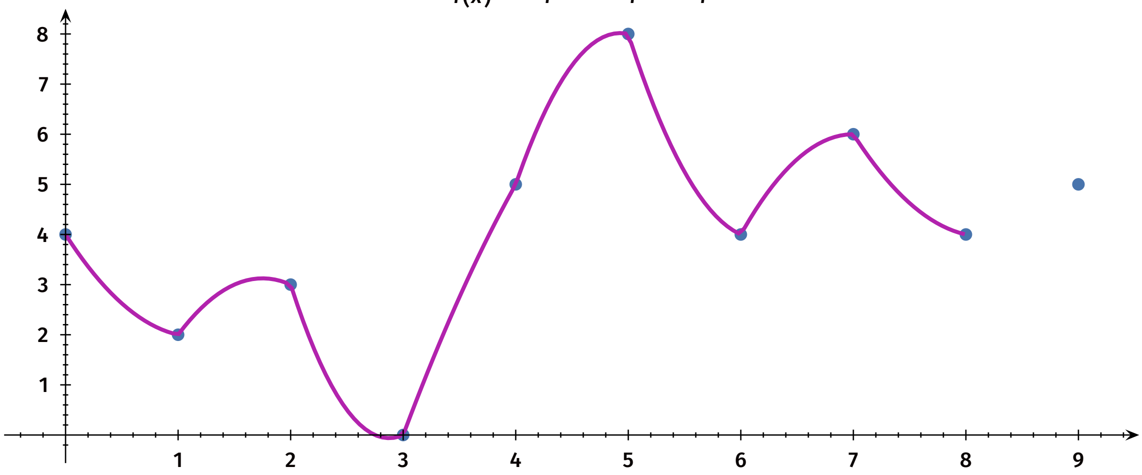
3.1. LINEARE INTERPOLATION

$$P_{i(x)} = y_i + \left(\frac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}-x_i}\right)(x - x_i)$$



3.2. QUADRATISCHE INTERPOLATION

$$P_{i(x)} = a_i x^2 + b_i x + c_i$$



4. MISC

4.1. UNGLEICHUNGEN

Wenn man mit negativen Termen multipliziert oder eine fallende Funktion anwendet, muss das Ungleichzeichen geändert werden.

4.2. MITTERNACHTSFORMEL

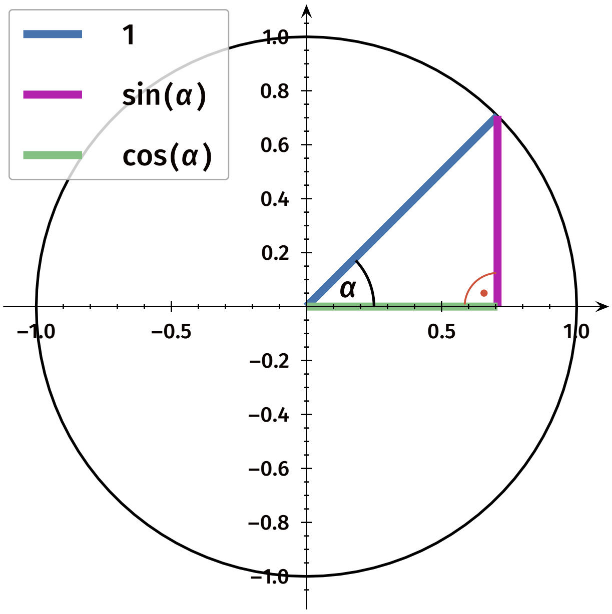
$$an^2 + bn + c = 0 \Rightarrow u_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

5. TRIGONOMETRIE

x	0	$30 = \frac{\pi}{6}$	$45 = \frac{\pi}{4}$	$60 = \frac{\pi}{3}$	$90 = \frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan(x)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	

$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

Trigonometrischer Satz des Pythagoras:
$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

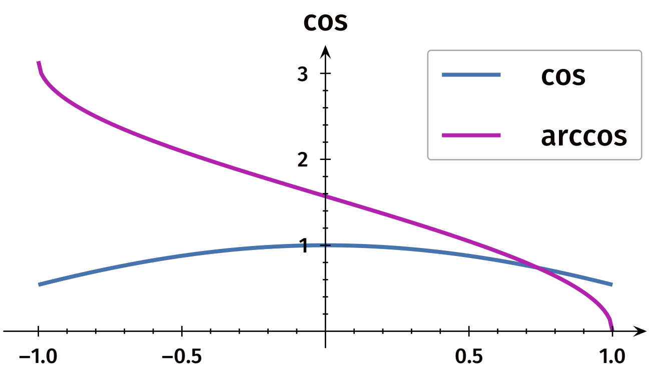


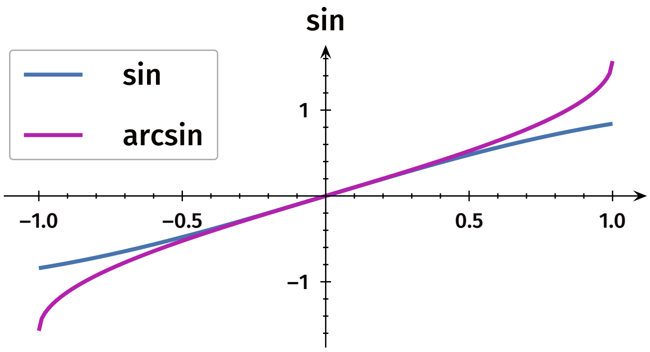
5.1. UMKEHRFUNKTIONEN

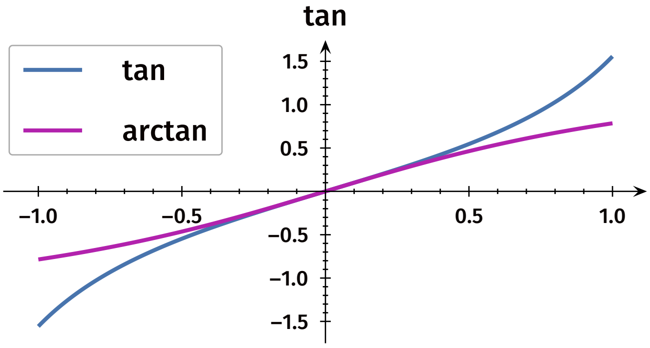
$$\arccos : \begin{cases} [-1;1] \to [0;\pi] \\ x \quad \mapsto \text{Lösung } y \in [0;\pi] \text{ der Gleichung} \cos(y) = x \end{cases}$$

$$\arcsin : \begin{cases} [-1;1] \to \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \\ x \quad \mapsto \text{Lösung } y \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \text{ der Gleichung} \sin(y) = x \end{cases}$$

$$\arctan : \begin{cases} \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right) \\ x \mapsto \text{Lösung } y \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right) \text{ der Gleichung} \tan(y) = x \end{cases}$$







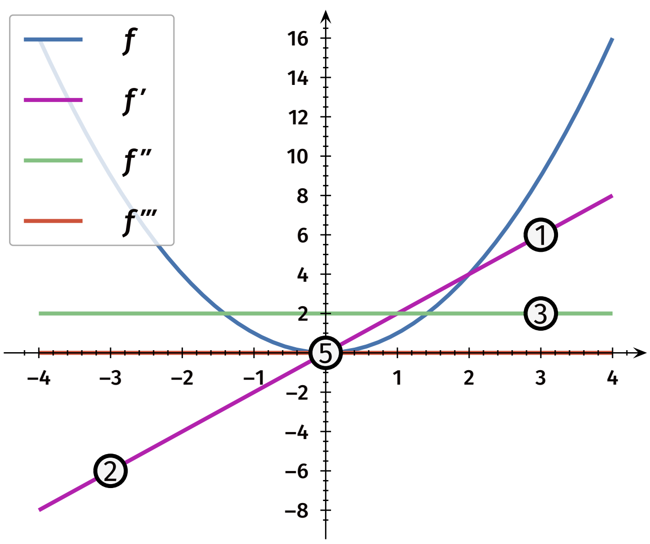
6. ABLEITUNGEN

Ableitung	***Bedeutung***
f'	Steigung
$f'(x) > 0$	Funktion steigt
$f'(x) < 0$	Funktion fällt
$f'(x) = 0$	Mögliche Extremstelle
f''	Form der Parabel
$f''(x) > 0$	Nach oben geöffnet
$f''(x) < 0$	Nach unten geöffnet
$f'(x) = 0 \land f''(x) > 0$	Lokales Minimum
$f'(x) = 0 \land f''(x) < 0$	Lokales Maximum
$f'(x) = 0 \land f''(x) = 0 \land f'''(x) \neq 0$	Lokaler Sattelpunkt
f'''	Änderung der Form / Wendepunkt-Richtung bei $f''(x) = 0$
$f''(x) = 0 \land f'''(x) \neq 0$	Wendepunkt
$f''(x) = 0 \land f'''(x) > 0$	Krümmung ändert sich von oben nach unten
$f''(x) = 0 \land f'''(x) < 0$	Krümmung ändert sich von unten nach oben

Beispiele

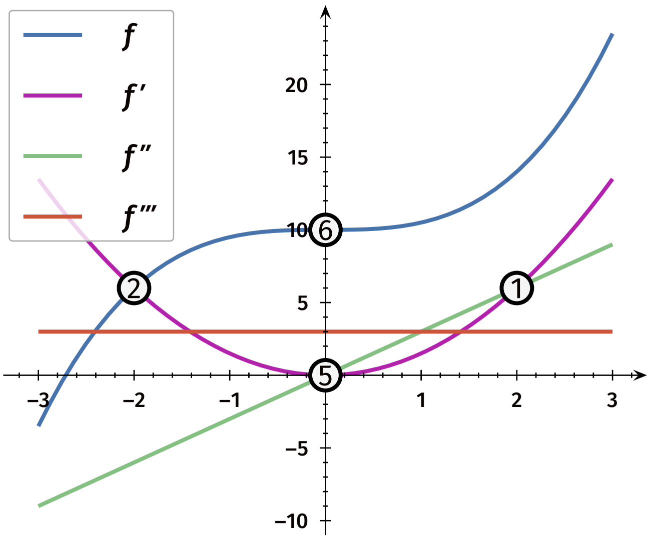
$$f(x) = x^2, f'(x) = 2x, f''(x) = 2, f'''(x) = 0$$

1) $f'(3) = 6$ $\Rightarrow$ **Steigend**
2) $f'(-3) = -6$ $\Rightarrow$ **Fallend**
3) $f''(3) = 2$ $\Rightarrow$ **Nach oben geöffnet**
4) $f'(0) = 0$ $\Rightarrow$ **Mögliche Extremstelle**
5) $f'(0) = 0 \land f''(0) = 2$ $\Rightarrow$ **Lokales Minimum**



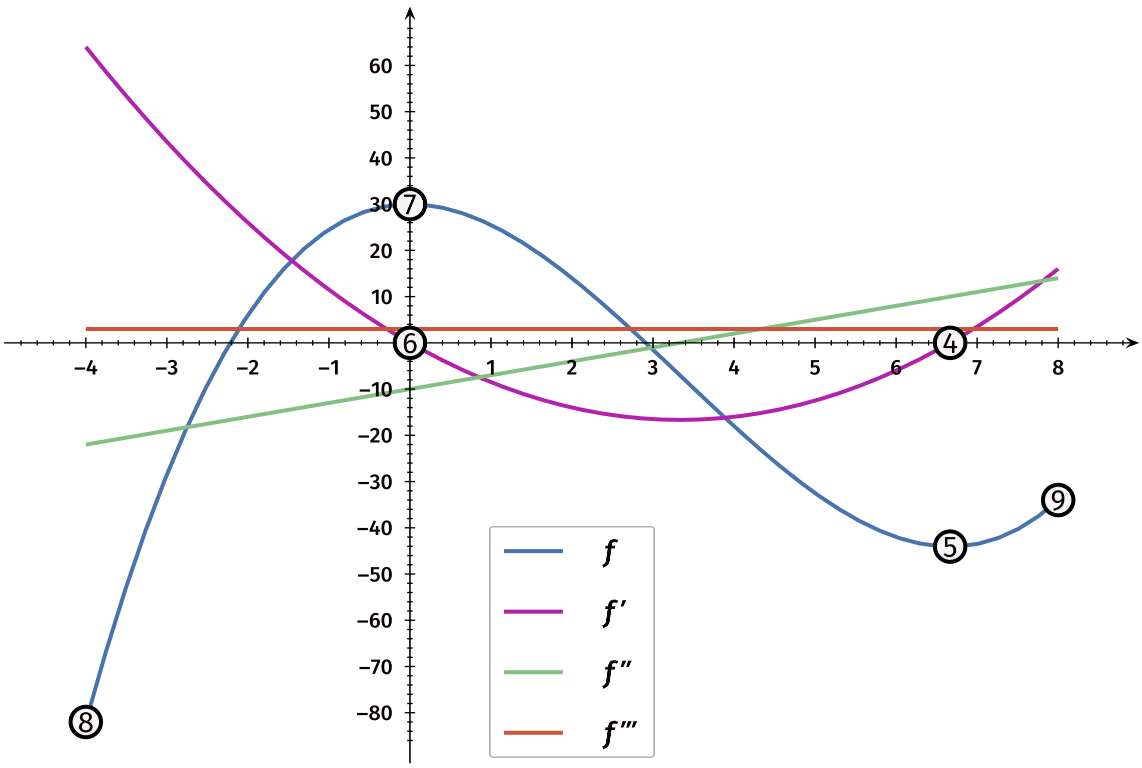
$f(x) = \frac{1}{2}x^3 + 10, f'(x) = \frac{3}{2}x^2, f''(x) = 3x, f'''(x) = 3$

1) $f'(2) = 6$ ⇒ Steigend
2) $f'(-2) = 6$ ⇒ Steigend
3) $f''(2) = 6$ ⇒ Nach oben geöffnet
4) $f''(-2) = -6$ ⇒ Nach unten geöffnet
5) $f'(0) = 0$ ⇒ Mögliche Extremstelle
6) $f'(0) = 0 \wedge f''(0) = 0 \wedge f'''(0) = 3$ ⇒ Lokaler Sattelpunkt



$f: \begin{cases} [-4;8] \mapsto \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{2}x^3 - 5x^2 + 30 \end{cases}$ $f': \begin{cases} [-4;8] \mapsto \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{3}{2}x^2 - 10x \end{cases}$ $f'': \begin{cases} [-4;8] \mapsto \mathbb{R} \\ x \mapsto 3x - 10 \end{cases}$ $f''': \begin{cases} [-4;8] \mapsto \mathbb{R} \\ x \mapsto 3 \end{cases}$

1) $f'(-3) = -28.5$ ⇒ Steigend
2) $f'(2) = 14$ ⇒ Fallend
3) $f''(2) = -14$ ⇒ Nach unten geöffnet
4) $f'\left(\frac{20}{3}\right) = 0$ ⇒ Mögliche Extremstelle
5) $f'\left(\frac{20}{3}\right) = 0 \wedge f''\left(\frac{20}{3}\right) = 10$ ⇒ Lokales Minimum
6) $f'(0) = 0$ ⇒ Mögliche Extremstelle
7) $f'(0) = 0 \wedge f''(0) = -10$ ⇒ Lokales & Globales Maximum
8) $f(-4) = -82$ ⇒ Globales Minimum
9) $f(8) = -34$ ⇒ Lokales Minimum



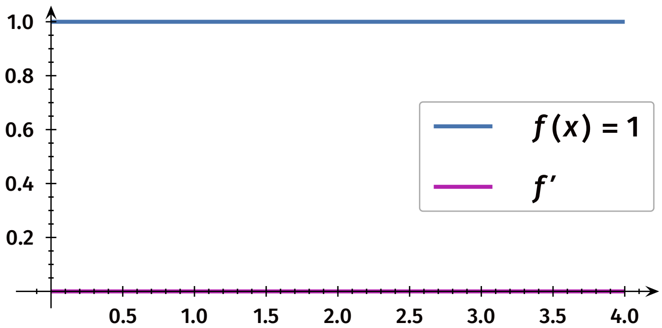
6.1. GLOSSAR

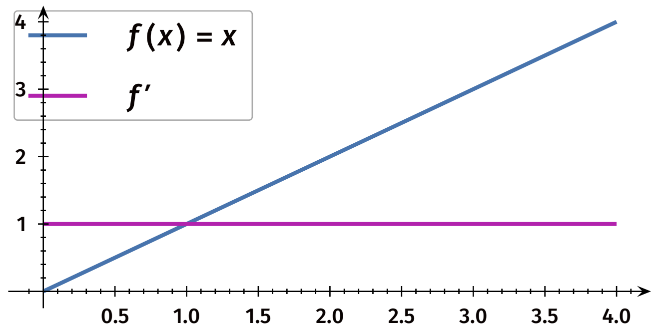
Begriff	*Bedeutung*
Differenzenquotient	$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$

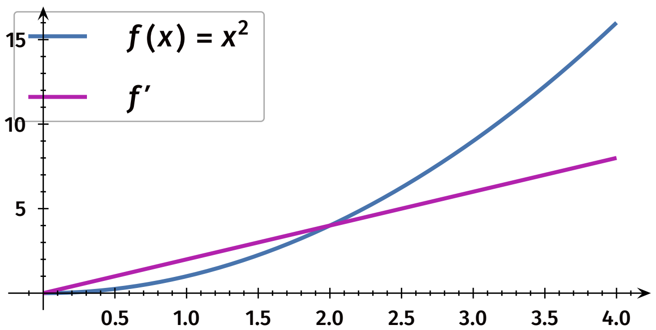
Begriff	*Bedeutung*
Differentialquotient	$\lim(x \to x_0)\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

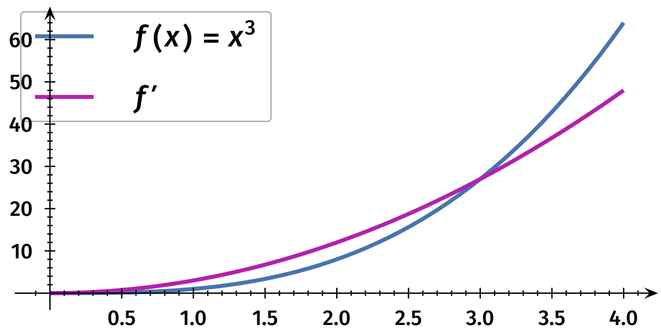
6.2. ABLEITUNGSREGELN

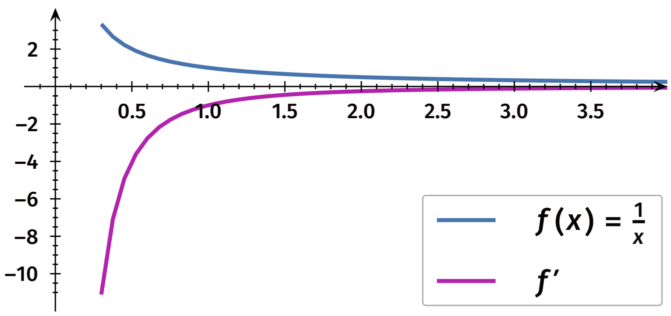
Term	*Ableitung*	*Term*	*Ableitung*
1	0	x	1
x^2	$2x$	x^n	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
e^x	e^x	e^{-x}	$-e^{-x}$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$ für $x > 0$	$\ln(y \cdot x)$	$\frac{1}{x}$ für $x > 0$
a^x	$\ln(a) \cdot a^x$ für $a > 0, a \neq 1$	$\log_b(x)$	$\frac{1}{\ln(b) \cdot x}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\sin(2x)$	$2\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\cos(ax)$	$-a\sin(x)$
$\tan(x)$	$1+\tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$

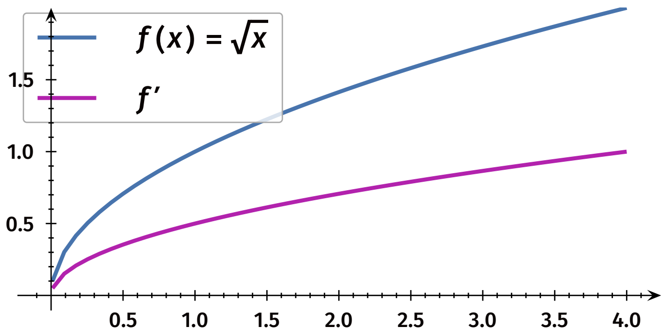


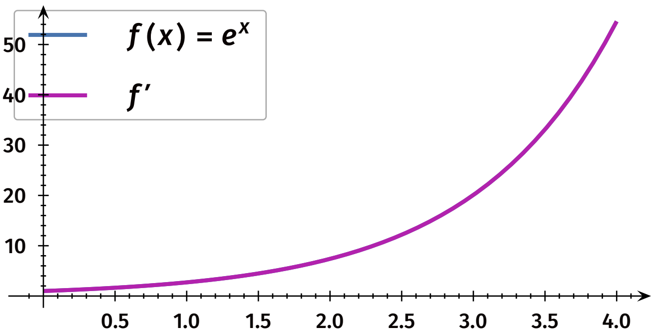


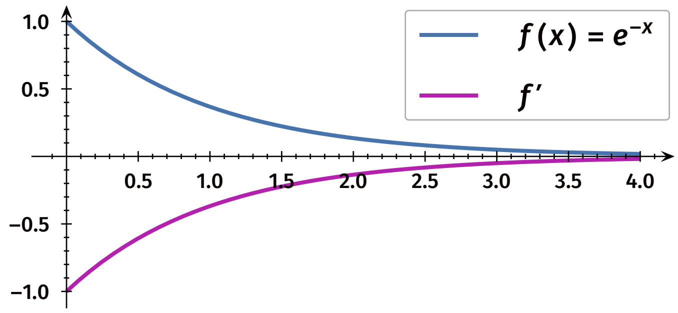


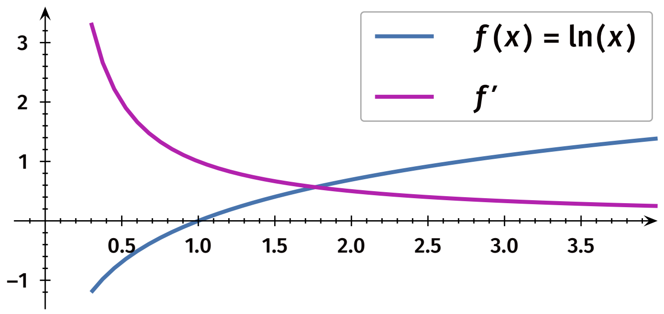


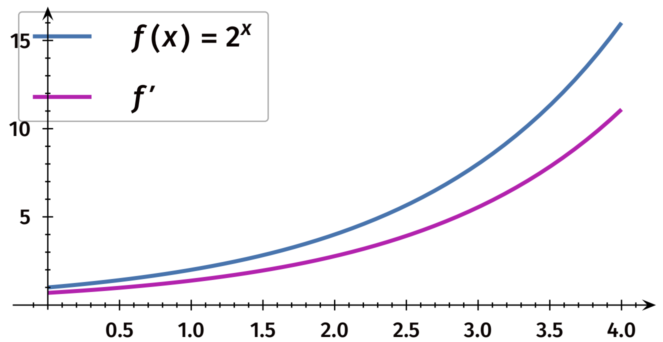


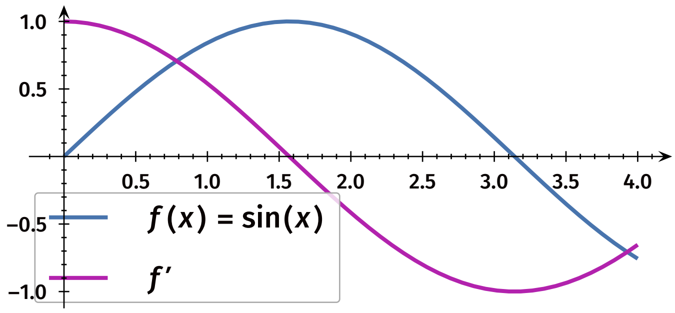


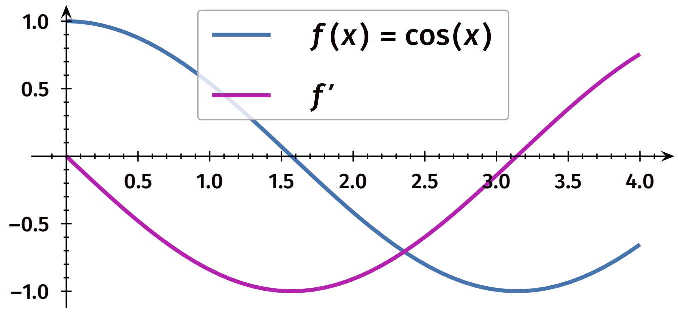












6.3. FUNKTIONEN

Begriff	*Bedeutung*
Addition	$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$
Multiplikation	$(\alpha \cdot f(x))' = \alpha \cdot f'(x)$
Produkteregel	$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
Mit 3	$(f \cdot g \cdot h)' = f' \cdot g \cdot h + f \cdot g' \cdot h + f \cdot g \cdot h'$
Kettenregel	$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
Quotientenregel	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

6.4. TANGENTE BERECHNEN

$$\underbrace{m}_{\text{Steigung}} \cdot \underbrace{x}_{\text{Abstand}} + \underbrace{y}_{\text{Funktionswert}}$$

$$= f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

Beispiel

Gegeben: $f(x) = 2x^2 - 6x + 4$

$x_0 = 3$

Funktionswert: $y = f(3) = 4$

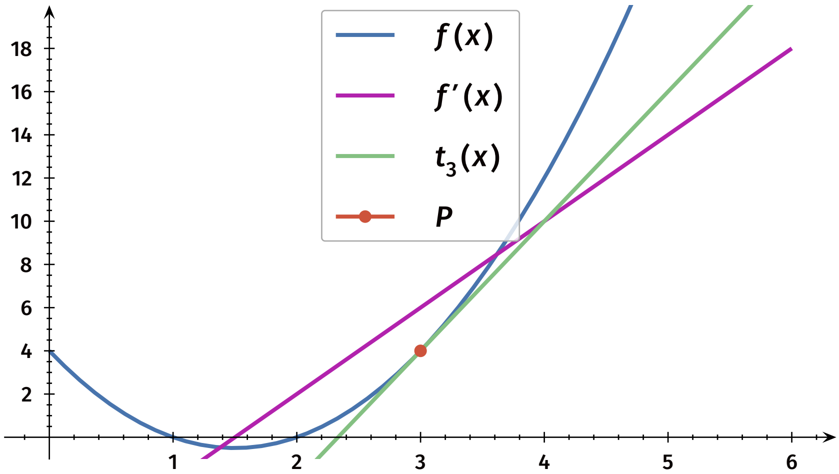
$\Rightarrow P = (3; 4)$

Ableitung: $f'(x) = 4x - 6$

Steigung: $m = f'(3) = 6$

Tangentenformel: $t_3(x) = 6 \cdot (x - 3) + 4$

$= 6x - 14$



6.5. APPROXIMATION DURCH LINEARISIERUNG (NEWTONVERFAHREN)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

```
for i in range(1, max_iter):
  x_neu = x_alt - f(x_alt) / f_prime(x_alt)
  x_alt = x_neu
```

Beispiel

Ziel: Nullstelle finden

Gegeben: $e^x = \ln(x) + 3, x > 0$

$x \approx 1$

Als Funktion: $f(x) = e^x - \ln(x) - 3$

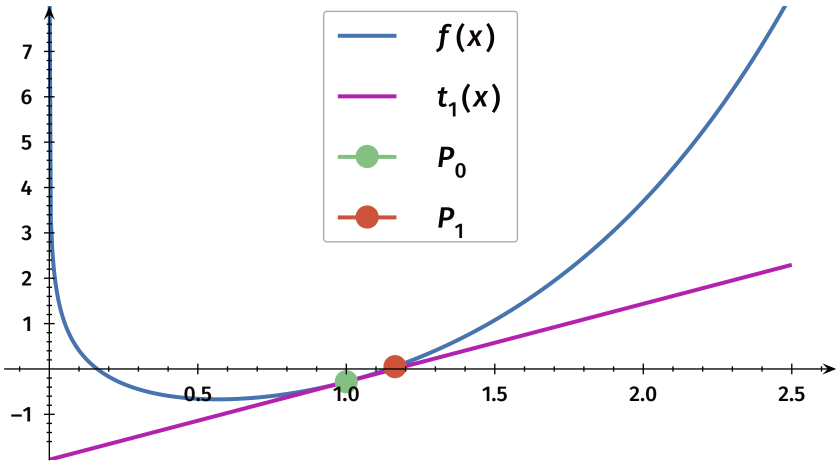
Ableitung: $f'(x) = e^x - \frac{1}{x}$

Linearisierung: $t_1(x) = f'(1)(x - 1) + f(1)$

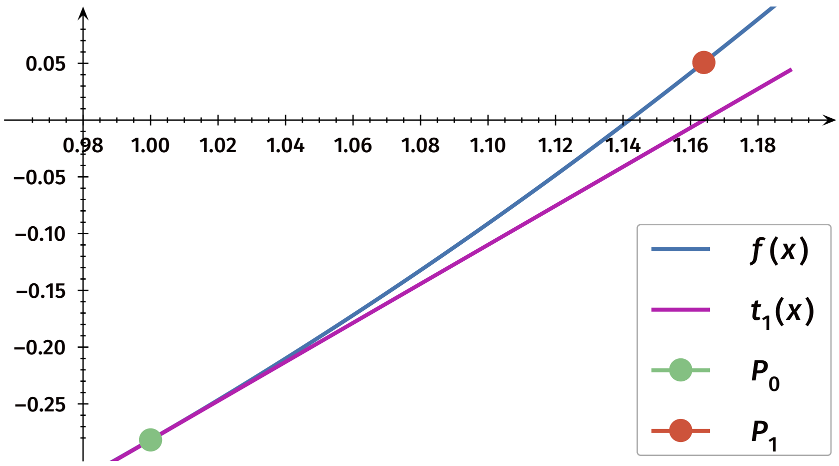
$= ex - x - 2$

Nullstelle: $ex - x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow x_1 = \frac{2}{e - 1}$



Vergrössert:



Beispiel

Ziel: Nullstelle finden

Gegeben: $f(x) = x^3 + 4x - 4$

$x_0 = \frac{1}{2}$

Ableitung: $f'(x) = 3x^2 + 4$

Annäherung

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 4\left(\frac{1}{2}\right) - 4 = -\frac{15}{8}$$

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4 = \frac{19}{4}$$

$$x_1 = \frac{1}{2} - \frac{-\frac{15}{8}}{\frac{19}{4}} = \frac{17}{19}$$