

1. AUSSAGENLOGIK

1.1. GLOSSAR

Begriff	Bedeutung
Aussage	Feststellender Satz, dem eindeutig «wahr» oder «falsch» zugeordnet werden kann. Symbole wie A, B, C,... werden dafür verwendet
Aussagenlogische Form	Kombination von Aussagen, verknüpft durch Junktoren
Aussageform	Aussagen verknüpft mit Variablen
Normalform	Standardisierte Aussagenlogische Formen (Formeln)
Negationsnormalform	¬ steht ausschliesslich direkt vor Aussagen oder Konstanten
Verallgemeinerte Disjunktion	– Einzelne Aussage oder Negation – wahr oder falsch – Disjunktion A ∨ B , falls A und B selbst verallgemeinerte Disjunktionen sind
Verallgemeinerte Konjunktion	– Einzelne Aussage oder Negation – wahr oder falsch – Konjunktion A ∧ B , falls A und B selbst verallgemeinerte Konjunktionen sind
Disjunktive Normalform	Disjunktion von (oder eine einzelne) verallgemeinerten Konjunktionen Beispiel: (A ∧ B ∧ C) ∨ (A ∧ ¬B ∧ ¬C)
Konjunktive Normalform	Konjunktion von (oder eine einzelne) verallgemeinerten Disjunktionen Beispiel: (A ∨ B ∨ C) ∧ (A ∨ ¬B ∨ ¬C)
Kontradiktion	Immer falsch
Tautologie	Immer wahr
Junktoren (/Konnektoren)	¬ Negation ∧ Konjunktion ∨ Disjunktion (einschliessliches oder!) ⇒ Implikation ⇔ Äquivalenz
Bindungsstärke	¬ vor ∧, ∨ vor ⇒, ⇔

1.2. FORMELN

(A ⇒ B) ⇔ (¬B ⇒ ¬A)**(A ⇔ B) ⇔ (A ∧ B) ∨ (¬A ∧ ¬B)****A ∨ (¬A ∧ B) ⇔ A ∨ B****(A ⇒ B) ⇔ (¬A ∨ B)****¬(A ⇒ B) ⇔ A ∧ ¬B****(A ⇒ B ⇒ C) ⇔ (A ⇒ B) ∧ (B ⇒ C)**

1.3. RECHENREGELN

Begriff	Bedeutung
Abtrennungsregel	(A ∧ (A ⇒ B)) ⇒ B
Kommutativität	(A ∧ B) ⇔ (B ∧ A) (A ∨ B) ⇔ (B ∨ A)
Assoziativität	A ∧ (B ∧ C) ⇔ (A ∧ B) ∧ C A ∨ (B ∨ C) ⇔ (A ∨ B) ∨ C
Distributivität	A ∧ (B ∨ C) ⇔ (A ∧ B) ∨ (A ∧ C) A ∨ (B ∧ C) ⇔ (A ∨ B) ∧ (A ∨ C)
Absorption	A ∨ (A ∧ B) ⇔ A A ∧ (A ∨ B) ⇔ A
Idempotenz	A ∨ A = A A ∧ A = A
Doppelte Negation	¬(¬A) ⇔ ¬¬A ⇔ A
Konstanten	W = wahr F = falsch
de Morgan	¬(A ∧ B) ⇔ ¬A ∨ ¬B ¬(A ∨ B) ⇔ ¬A ∧ ¬B

2. PRÄDIKATENLOGIK

2.1. GLOSSAR

Begriff	Bedeutung
Subjekt	«Konkretes Ding» / Stellvertreter einer Variable
Prädikat	«Eigenschaft», zB «ist eine Primzahl» Prädikate werden oft wie Funktionen geschrieben. Ist P ein Prädikat, dann bedeutet P(x) , dass x das Prädikat erfüllt. P(x) ist eine Aussageform.
Quantor	∀ Allquantor (Für alle) ∃ Existenzquantor (Es existiert)

3. BEWEISEN

3.1. INDUKTION

A(1) ∧ (A(n) ⇒ A(n + 1)) ⇒ A(m), m ∈ ℕ

TODO: besseres beispiel

Beispiel: **2 | (6ⁿ)**

1) Verankerung: **n = 0**

- 2 | (6⁰)**
- 2) Induktionsschritt **n → n + 1**

– 2 | (6ⁿ⁺¹)

a) Induktionsannahme: **2 | (6ⁿ)**

b) Behauptung: **2 | (6ⁿ⁺¹)**

c) Beweis: Verwendung der Annahme, um Richtigkeit der Behauptung zu zeigen **2 | (6ⁿ + 6)**

3.1.1. Techniken

- 1) Direkter Beweis **f(n) = f₁(n) = f₂(n) = ... = f_m(n) = g(n)**
- 2) Dfferenz gleich Null **f(n) – g(n) = 0 ⇒ f(n) = g(n)**
- 3) Äquivalenzumformung
- 4) Dritte Grösse (vereinfachen) **g(n) = h(n) = f(n)**

4. DIREKTE, ITERATIVE UND REKURSIVE BERECHNUNGEN

4.1. GLOSSAR

Begriff	Bedeutung
Folge	Nummerierte Liste von Objekten (Folgegliedern)
Reihe	Summe von Folgegliedern einer Zahlenfolge

5. MENGEN

5.1. GLOSSAR

Begriff	Bedeutung
Aufzählend	{1, 2, 3}
Beschreibend	{x ∈ ℕ* x < 4}
Mächtigkeit	Anzahl Elemente einer Menge M
Potenzmenge	Menge aller Teilmengen einer Menge P(M) P(M) = 2^M
Teilermenge	T(n) = Menge der Teiler der Zahl n
Kartesisches Produkt	A × B = {(a, b) a ∈ A, b ∈ B}

5.2. RECHENREGELN

Für die Mengen A und B in der Obermenge M gelten die Weiteres:
folgenden Aussagen:

A \ ∅ = A**A ∪ \overline{A} = M****A \ B = A ∩ \overline{B}** **(A \ B) \ C = A \ (B ∪ C)****A \ A = ∅** **$\overline{A \cup A} = \overline{A} \cap \overline{A} = \overline{A} \cap \overline{B}$** **$\overline{A \setminus B} = \overline{A} \cup \overline{B}$** **A \ (B \ C) = (A \ B) ∪ (A ∩ C)** **$\overline{\overline{A}} = A$** **$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$** **(A \ B) ∪ (A ∩ B) = A****A ∩ \overline{A} = ∅****A \ (A \ B) = A ∩ B****(A \ B) ∩ (A ∩ B) = ∅**

6. FORMELN, ABBILDUNGEN, RELATIONEN

6.1. GLOSSAR

Begriff	Bedeutung
Funktion/Abbildung	Zuordnung, die jedem Elemend der Definitionsmenge D genau ein Element einer Zielmenge Z zuordnet. Injektive Relation f : D → Z Abbildungen mit mehreren Argumenten: f : A × B → Z, f(a, b) = y
Graph	Menge von Paaren (x, f(x)) G ∈ D × Z
Relation	Teilmenge des Kartesischen Produktes mehrerer Mengen $A = \prod_{i=1}^n A_i, A_i = n_i \Rightarrow A = \prod_{i=1}^n n_i$ <div>– Kleiner-Relation: R_c = {(a, b) a ∈ A, b ∈ B, a < b} – Gleich-Relation: R₌ = {(a, b) a ∈ A, b ∈ B, a = b} – Kleiner-Gleich-Relation: R_c = R₌ ∪ R_c = {(a, b) a ∈ A, b ∈ B, a ≤ b}</div>
Surjektiv	Alle Elemente der Definitions- und Zielmenge sind «verknüpft» / jedes Element der Bildmenge kommt als Bild vor
Injektiv	Alle Inputs haben eindeutige Outputs a₁ ≠ a₂ ⇒ f(a₁) ≠ f(a₂)
Bijektiv	Surjektiv und Injektiv
Reflexiv	Alle Elemente von A stehen zu sich selbst in Beziehung a ∈ A ⇒ (a, a) ∈ R A ⇔ A
Symmetrisch	(a, b) ∈ R ∧ (b, a) ∈ R (A ⇔ B) ⇔ (B ⇔ A)
Transitiv	(a, b) ∈ R ∧ (b, c) ∈ R ⇒ (a, c) ∈ R (A ⇔ B) ∧ (B ⇔ C) ⇒ (A ⇔ C)
Äquivalenzrelation	reflexiv, symmetrisch und transitiv ⇔, =

Begriff	Bedeutung
Irreflexiv	a ∈ A ⇒ ¬(a, a) ∈ R
Asymmetrisch	(a, b) ∈ R ⇒ ¬(b, a) ∈ R
Antisymmetrisch	((a, b) ∈ R) ∧ ((b, a) ∈ R) ⇒ a = b
Ordnungsrelation	reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ≤
Symmetrische Differenz	AΔB = {x ∈ G (x ∈ A ∪ B) ∧ ¬(x ∈ A ∩ B)} AΔB = (A ∪ B) \ (A ∩ B) (AΔB)ΔC = AΔ(BΔC)

7. MODULO-RECHNEN

Die Modulo-Relation ist eine **Äquivalenzrelation** auf **ℤ**.

7.1. GLOSSAR

Begriff	Bedeutung
Teiler-Relation	Für a, b ∈ ℤ ist die Teiler-Relation b a ⇔ T(b, a) ⇔ ∃q ∈ ℤ : bq = a b a ⇔ ¬b a b a ⇔ b ¬a Ordnungsrelation auf ℕ
Modulo-Relation	Für a, q, r ∈ ℤ ist die Modulo-Relation R_q(a, r) ⇔ q a – r ⇔ a ≡ r mod q
~	«relates to» a ~ b ⇔ (a, b) ∈ R
Quotient, Rest	Zu jeder Zahl a ∈ ℤ und jeder Zahl b ∈ ℤ gibt es eindeutig bestimmte Zahlen q, r ∈ ℤ mit a = q · b + r, 0 ≤ r < b Bsp: 7 = 2 · 3 + 1 q heisst <i>Quotient</i> r heisst <i>Rest</i>
Restklassen	[b]_q = {a ∈ ℤ a ≡ b mod q}, q > 0 ℤ_q = {[0]_q, [1]_q, [2]_q, ..., [q – 1]_q} <div>Vereinfachung</div>
Multiplikatives Inverses	Für a ∈ ℤ_q ist b ∈ ℤ_q das <i>multiplikative inverse</i> von a, wenn a · b ≡ 1 mod q
Nullteiler	Wenn für a, b ∈ ℤ_q : ab ≡ 0 mod q und a ≠ 0 mod q ∧ b ≠ 0 mod q , heissen a, b <i>Nullteiler</i>

7.2. RECHENREGELN

- 1) **(a + b) mod n = ((a mod n) + (b mod n)) mod n**
- 2) **(a – b) mod n = ((a mod n) – (b mod n)) mod n**
- 3) **(a · b) mod n = ((a mod n) · b mod n)) mod n**
- 4) **a^d mod n = (a^{d-x} · a^x) mod n = ((a^{d-x} mod n) · (a^x mod n)) mod n**

7.3. PRIMFAKTORENZERLEGUNG

Begriff	Bedeutung
ggT(a, b)	max{d ∈ ℕ d a ∧ d b}
kgV(a, b)	min{m ∈ ℕ a m ∧ b m} $\frac{ab}{\text{ggT}(a,b)}$
Teilerfremd	Zwei Zahlen a, b ∈ ℕ heissen <i>Teilerfremd</i> , wenn ggT(a, b) = 1 Sei p ∈ ℕ eine Primzahl und q ∈ ℕ, q < p, q ≠ 0 dann ist ggT(p, q) = 1

7.4. EUKLIDISCHER ALGORITHMUS

Seien **a, b ∈ ℕ, a ≠ b, a ≠ 0, b ≠ 0**

Initialisierung: Setze **x = a, y = b** und **q = x, r = x – q · y** (d.h. bestimme q und r so, dass **x = q · y + r** ist)

Wiederhole bis **r = 0** ist

Ergebnis: **y = ggT(a, b)**

7.4.1. Beispiel

ggT(122, 72), a = 122, b = 72

– Init: **x₀ = a = 122, y₀ = b = 72**

– Iteration:

	x_i = y_{i-1}	y_i = r_{i-1}	q_i = x_i div y_i	r_i = x_i mod y_i = x_i – q_i · y_i
i = 0	122	72	1	50
i = 1	72	50	1	22 Muster: r_{i+1} < r_i
i = 2	50	22	2	6
i = 3	22	6	3	4
i = 4	6	4	1	2
i = 5	4	2 = ggT(122, 72)	2	0 (immer 0 am Schluss)

7.5. ERWEITERTER EUKLIDISCHER ALGORITHMUS

Seien **a, b ∈ ℕ, a ≠ b, a ≠ 0, b ≠ 0**

Initialisierung: Setze **x = a, y = b, q = x ÷ y, r = x – q · y, (u, s, v, t) = (1, 0, 0, 1)** (d.h. bestimme q und r so, dass **x = q · y + r** ist)

Wiederhole bis **r = 0** ist

Ergebnis: **y = ggT(a, b) = s · a + t · b**

Wenn **ggT(a, b) = 1** ist, dann folgt: **t · v ≡ 1 mod a**

7.5.1. Beispiel
ggT(99,79)

i	$x=y_{-1}$	$y=r_{-1}$	$q=x \div y$	$r=x_i-q_i \cdot y_i$	$u=s_{-1}$	$s=u_{-1}-q_{-1} \cdot s_{-1}$	$v=t_{-1}$	$t=v_{-1}-q_{-1} \cdot t_{-1}$
$i=0$	99	79	1	20	1	0	0	1
$i=1$	79	20	3	19	0	1	1	-1
$i=2$	20	19	1	1	1	-3	-1	4
$i=3$	19	1		0	-3	4	4	-5

Daraus folgend:
– $\text{ggT}(99,79) = 4 \cdot 99 + (-5) \cdot 79 \Leftrightarrow 396 - 395 = 1$
– $99 + (-5) = 94$ ist mult. Inv. von 79 in \mathbb{Z}_{99}
– $79 + 4 = 83$ ist mult. Inv. von 99 in \mathbb{Z}_{79}

7.6. KLEINER FERMAT
Sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl und $x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ mit $\text{ggT}(x,p) = 1$
Dann ist: $x^{p-1} \equiv 1 \bmod p$
Daraus folgend:

$$x^{p-1} \equiv 1 \bmod p \quad | \cdot x^p$$
$$\Leftrightarrow x^{n(p-1)} \equiv 1 \bmod p \quad | \cdot x$$
$$\Leftrightarrow x^{1+n(p-1)} \equiv x \bmod p$$
$$\Leftrightarrow x^{1 \bmod (p-1)} \equiv x \bmod p$$

7.7. SATZ VON EULER
Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $z \in \mathbb{Z}$ mit $\text{ggT}(z,n) = 1$. Dann ist $z^{\varphi(n)} \equiv 1 \bmod n$.

7.7.1. EULER'sche φ -Funktion (Totient)
Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $\mathbb{Z}_n^* = \{x \in \mathbb{Z}_n \mid x \text{ hat ein multiplikatives Inverses in } \mathbb{Z}_n\}$.
Dann heisst $\varphi(n)$:

$$\varphi(n) = \text{Anz. Elemente in } \mathbb{Z}_n \text{ mit mult. Inversen}$$
$$= \text{Anz. Zahlen } 1 \leq q \leq n \text{ mit } \text{ggT}(q,n) = 1$$
$$= |\mathbb{Z}_n^*|$$

- 7.7.1.1. Rechenregeln
- 1) Sei $n \in \mathbb{N}$ eine Primzahl, dann $\varphi(n) = n - 1$
 - 2) Sei $n \in \mathbb{N}$ eine Primzahl und $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, dann $\varphi(n^p) = n^{p-1} \cdot (n - 1)$
 - 3) Seien $m,n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $\text{ggT}(m,n) = 1$, dann $\varphi(n \cdot m) = \varphi(n) \cdot \varphi(m)$

- 7.8. RSA VERSCHLÜSSELUNG
- 1) Wähle 2 Primzahlen p, q
 - 2) Berechne $n = p \cdot q$
 - 3) Berechne $\varphi(n) = (p - 1)(q - 1)$
 - 4) Wähle a, b so, dass $a \cdot b \equiv 1 \bmod \varphi(n)$
 - 5) Vergesse $p, q, \varphi(p \cdot q)$. Brauchen wir nicht und riskieren nur, dass uns jemand hackt

Public key ist nun n, b , Private key ist n, a
Verschlüsseln: $c^a \bmod n$
Entschlüsseln: $z^b \bmod n \Leftrightarrow c^{a \cdot b} \bmod n$
Sidenote: Fürs Alphabet muss n grösser sein als 26

8. LINEARE ALGEBRA

3b1b <3

Begriff	Bedeutung
Lineares Gleichungssystem (LGS)	TODD:
Homogenes LGS	$M \cdot \vec{x} = \vec{0}$
Inhomogenes LGS	$M \cdot \vec{x} = \vec{b}$
Lineare Abbildung	$L: \begin{cases} \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \\ \vec{x} \mapsto M\vec{x} \end{cases}$ $\text{ker}(L) = \{\vec{0}\} \Leftrightarrow L$ ist injektiv
Kern	Lösungsmenge des Homogenen LGS = $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid L(\vec{x}) = \vec{0}\}$
Koeffizientenmatrix	TODD:

8.2. PIVOT-GLEICHUNG

(I) $1x_1 + 1x_2 + 1x_3 = -6$
(II) $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -10$
(III) $2x_1 + 3x_2 + 6x_3 = -18$
 \Rightarrow
(I') $1x_1 + 1x_2 + 1x_3 = -6$
(II') = (II) - (I) $1x_2 + 2x_3 = -4$
(III') = (III) - 2(I) $1x_2 + 4x_3 = -6$
 \Rightarrow
(I'') $1x_1 + 1x_2 + 1x_3 = -6 \Rightarrow x_1 = -6 - x_2 - x_3 = -6 + 2 + 1 = -3$
(II'') = (II) $1x_2 + 2x_3 = -4 \Rightarrow x_2 = -4 - 2x_3 = -4 + 2 = -2$

Rückwärtssubstitution

(III'') = (III') - (II'') $2x_3 = -2 \Rightarrow x_3 = -1$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

	x_1	x_2	x_3	1	
I	1	1	1	-6	
II	1	2	3	-10	-(I)
III	2	3	6	-18	-2(II)
\Rightarrow					
I'	1	1	1	-6	
II'	0	1	2	-4	
III'	0	1	4	-6	-(II')
\Rightarrow					
II''	1	1	1	-6	
II''	0	1	2	-4	
III''	0	0	2	-2	$\cdot \frac{1}{2}$
\Rightarrow					
III'''	1	1	1	-6	-(III''')
II'''	0	1	2	-4	-2(III''')
III'''	0	0	1	-1	
\Rightarrow					

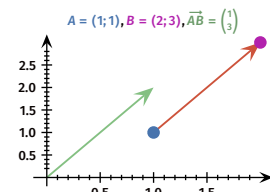
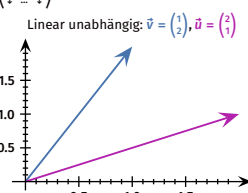
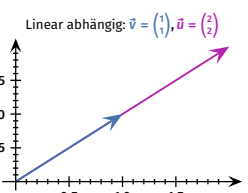
	x_1	x_2	x_3	1	
II''''	1	1	0	-5	-(II''')
II''''	0	1	0	-2	
III''''	0	0	1	-1	
\Rightarrow					
	1	0	0	-3	
	0	1	0	-2	
	0	0	1	-1	

Ergebnisvektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$ Lösungsvektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ Lineares Gleichungssystem $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$

p = Anzahl Pivot-Variablen.
Wenn $b_{p+1} = \dots = b_m = 0$ dann ist das LGS lösbar (homogenes Gleichungssystem), sonst unlösbar.
Wenn $p = n$ dann hat LGS genau eine Lösung.
Wenn $p < n$ dann hat LGS unendlich viele Lösungen.

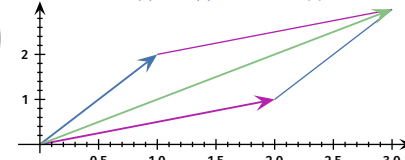
8.4. VEKTOREN

Begriff	Bedeutung
Vektor	Liste von Zahlen
Nullvektor	$\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
Ortsvektor	Ortsvektor \vec{p} vom Nullpunkt des Koordinatensystems $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ zum Punkt P

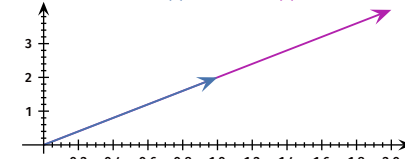
Begriff	Bedeutung
Richtungsvektor	Richtungssektor \vec{AB} vom Punkt A zum Punkt B ist $\vec{b} - \vec{a}$ <div>$A = (1;1), B = (2;3), \vec{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$</div>
Linearkombination	Linearkombination der Variablen x_1, x_2, x_3 (Bsp. $3 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 = -6$). Vektoren werden jeweils mit einer Zahl multipliziert und miteinander summiert
Lineare Unabhängigkeit	$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ heissen linear unabhängig, wenn die Gleichung $\lambda_1 \cdot \vec{v}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{v}_2 + \dots + \lambda_n \cdot \vec{v}_n = \vec{0}$ genau eine Lösung hat, nämlich $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \vec{v}_1 & -\vec{v}_2 \end{pmatrix} \cdot \vec{\lambda} = \vec{0}$ eindeutig lösbar = $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ sind linear unabhängig <div>Linear unabhängig: $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$</div> <div>Linear abhängig: $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$</div>
Skalarprodukt	$\vec{a} \cdot \vec{b} = c$ $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$
Orthogonale Projektion	TODD:
Betrag/Länge eines Vektors	$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ $ \vec{a} = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 5^2} = \sqrt{38}$
Normalenvektor	TODD:

8.4.2. Vektorenrechnen

Addition:

$$\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+5 \\ 2+(-9) \\ 3+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix}$$


Multiplikation mit reellen Zahlen (=Skalare):

$$3 \cdot \vec{v} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$


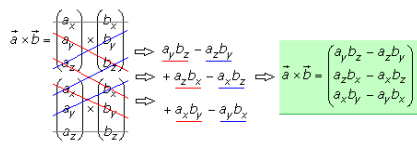
8.4.3. Rechenregeln

Falls die Vektoren senkrecht zueinanderstehen, ist das Skalarprodukt gleich 0

$$\lambda \vec{0} = \vec{0}$$
$$\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$$
$$-\vec{v} = -1 \cdot \vec{v}$$
$$-\vec{v} + \vec{v} = \vec{0}$$
$$(\lambda \mu) \vec{v} = \lambda (\mu \vec{v}) = \lambda \mu \vec{v}$$
$$\lambda (\vec{v} + \vec{w}) = \lambda \vec{v} + \lambda \vec{w}$$
$$\vec{v} + (\vec{u} + \vec{w}) = (\vec{v} + \vec{u}) + \vec{w} = \vec{v} + \vec{u} + \vec{w}$$

8.4.4. Kreuzprodukt

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$$
$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$



8.4.4.1. Eigenschaften

Anti-kommutativ: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$. Konsequenz: $\vec{a} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$

Distributiv: $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

Gemischt-assoziativ: $\lambda (\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b})$

Das Kreuzprodukt ist **nicht** assoziativ. $\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c}$ darf man nicht! $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$

8.4.4.2. Geometrische Eigenschaften




Abbildung 1: Rechtssystem

$\vec{a} \times \vec{b}$ steht immer senkrecht auf \vec{a} und auf \vec{b} .

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$ bilden ein Rechtssystem

$|\vec{a} \times \vec{b}|$ = Flächeninhalt des durch \vec{a} und \vec{b} aufgespannten Parallelogramms = $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi)$

TODO: diagram

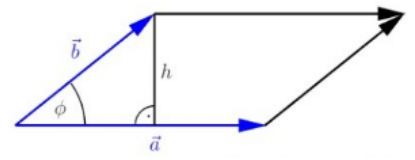


Abbildung 2: Flächeninhalt $h \cdot a$

8.4.5. Vektorraum

Ein Vektorraum ist eine Menge V mit den Rechenoperationen:

$$\oplus : V \times V \rightarrow V, (\vec{v}, \vec{w}) \mapsto \vec{v} \oplus \vec{w}$$

$$\odot : \mathbb{R} \times V \rightarrow V, (\lambda, \vec{v}) \mapsto \lambda \odot \vec{v}$$

Mit den Eigenschaften:

- Vektoraddition:
 - **Assoziativgesetz**: $u \oplus (v \oplus w) = (u \oplus v) \oplus w$
 - Existenz eines **neutralen Elements** $0_V \in V$ mit $v \oplus 0_V = 0_V \oplus v = v$
 - Existenz eines zu $v \in V$ **inversen Elements** $-v \in V$ mit $v \oplus (-v) = (-v) \oplus v = 0_V$
 - **Kommutativgesetz**: $v \oplus u = u \oplus v$
- Skalarmultiplikation:
 - $\alpha \odot (u \oplus v) = (\alpha \odot u) \oplus (\alpha \odot v)$
 - $(\alpha + \beta) \odot v = (\alpha \odot v) \oplus (\beta \odot v)$
 - $(\alpha \cdot \beta) \odot v = \alpha \odot (\beta \odot v)$
 - $1 \odot v = v$ für das **Einselement** $1 \in K$ des **Skalkörpers**

Gelten diese Eigenschaften für die Teilmenge eines größeren Vektorraums W , so nennt man V **Untervektorraum** von W . Heisst: Man hat nur dann einen Untervektorraum V , wenn die Produkte der Multiplikation oder Addition der Elemente dieses Raumes auch in V liegen. Untervektorräume sind also unendliche Räume mit n Dimensionen weniger, zB $W = 3$ -Dimensionaler Vektorraum, $V = 2$ -Dimensionaler Untervektorraum.

Kern von $A = U = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\vec{x} = \vec{0} \}, A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ist ein Untervektorraum von \mathbb{R}^n .

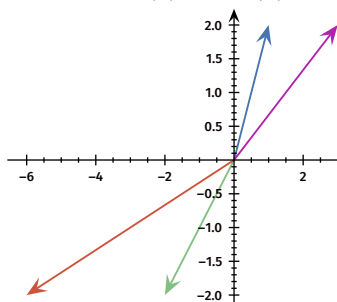
8.4.6. Lineare Abbildung

Eine Lineare Abbildung ist eine Funktion

Beispiel

$$L : \left\{ \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \right. \\ \left. \vec{x} \mapsto L(\vec{x}) \right.$$

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$\vec{c} = M\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{d} = M\vec{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix}$$



mit den Eigenschaften

$$L(\vec{x} + \vec{y}) = L(\vec{x}) + L(\vec{y})$$

$$L(\lambda \vec{x}) = \lambda L(\vec{x})$$

Für jede lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ gibt es eine (Abbildungs) Matrix $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit der Eigenschaft, dass $L(\vec{x}) = M\vec{x}$

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & \dots & m_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{m1} & \dots & m_{mn} \end{pmatrix}$$
$$m_{ij} = \vec{e}_i \cdot L(\vec{e}_j)$$

8.5. MATRIZEN

8.5.1. Glossar

Begriff	Bedeutung
Spaltenvektoren	Spalten der Matrix als Vektoren
Zeilenvektoren	Zeilen der Matrix als Vektoren
Rang	Wieviele Spaltenvektoren einer Matrix linear unabhängig sind
Nullmatrix	$0 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$
Quadratische Matrix	$M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ Gleichviele Zeilen und Spalten
Diagonalmatrix	(immer quadratisch und symmetrisch): $D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{nn} \end{pmatrix}, d_{ij} = 0 \text{ für } i \neq j$
Einheitsmatrix	(immer diagonal): $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Symmetrische Matrix	(immer quadratisch): $A = A^T, a_{ij} = a_{ji}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$
Obere Dreiecksmatrix	$O = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & x_4 & x_5 \\ 0 & 0 & x_6 \end{pmatrix}, o_{ij} = 0 \text{ für } i > j$
Kovarianzmatrix	immer symmetrisch
Reguläre Matrix	Quadratische Matrix mit höchstem Rang (Rang = Anzahl Spalten/Reihen)
Singuläre Matrix	Quadratische Matrix mit kleinerem Rang (Rang < Anzahl Spalten/Reihen)
Invertierbare Matrix	Für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heisst A invertierbar, wenn es eine Matrix A^{-1} gibt, so dass $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A =$ Einheitsmatrix (E). Dies ist der Fall, wenn A Regulär ist.

8.5.2. Definition

Matrix mit 2 Zeilen und 3 Spalten

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$$

Komponenten von A : a_{ij}

i : Zeilenindex, j : Spaltenindex. Bsp: $a_{23} = 7$

8.5.3. Matrizen als Vektoren interpretieren

$\rightarrow A$ ist ein 6-Dimensionaler VR (Vektorraum)

Variante 1: $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \\ a_{14} \\ a_{15} \\ a_{16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \\ 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$, Variante 2: $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \\ a_{14} \\ a_{15} \\ a_{16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$

$$\mathbb{R}^n \text{ interpretiere als } \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^{n \times 1} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \text{ Spaltenvektor} \\ \mathbb{R}^{1 \times n} \rightarrow (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n) \text{ Zeilenvektor} \end{array} \right.$$

Zu A gehörige Zeilenvektore

$$\vec{a}_1 = (1 \ 4 \ 5), \vec{a}_2 = (2 \ 3 \ 7)$$

$$A = \begin{pmatrix} \leftarrow \vec{a}_1 \rightarrow \\ \leftarrow \vec{a}_2 \rightarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Zu A gehörige Spaltenvektore

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \vec{a}_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

8.5.4. Matrizen transponieren

Transponierte Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ wäre: $A^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$

$$A = (a_{ij}), A^T = (a_{ji})$$

Rolle von Zeile und Spalte vertauscht: $a_{ij} \rightarrow a_{ji}$

Bsp:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 2}, A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3},$$
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}^T = (1 \ 4 \ 5)$$

8.5.5. Matrizen invertieren

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

8.5.6. Matrixmultiplikation

Meistens nicht kommutativ ($A \cdot B \neq B \cdot A$)

B muss genau gleich viele Zeilen haben wie A Spalten

$$A \in \mathbb{R}^{m \times l}, B \in \mathbb{R}^{l \times n}, C = A \cdot B \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^l a_{ik} b_{kj}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 1 & 0 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2 \cdot 6 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 8) & (2 \cdot 4 + 3 \cdot 0 + 1 \cdot 9) \\ (4 \cdot 6 + -1 \cdot 1 + 7 \cdot 8) & (4 \cdot 4 + -1 \cdot 0 + 7 \cdot 9) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 17 \\ 79 & 79 \end{pmatrix}$$

8.5.7. Determinante

Determinante einer quadratischen Matrix ist eine reelle Zahl

$$1 \times 1 \text{ Matrix : } \det(a) = a$$

$$2 \times 2 \text{ Matrix : } \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - cb$$

$$3 \times 3 \text{ Matrix : } \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$


Bsp:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$
$$x = \frac{\det \begin{pmatrix} e & b \\ f & d \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} = \frac{ed - fb}{ad - cb}$$
$$y = \frac{\det \begin{pmatrix} a & e \\ c & f \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} = \frac{af - ce}{ad - cb}$$

Definition der Determinante:

$$\det : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R} \\ M \mapsto \det(M) \end{array} \right.$$

Definition über Eigenschaften:



$$\det(\mathbb{1}) = 1$$
$$\det \begin{pmatrix} \dots & \vec{a}_1 & \dots \\ \dots & \lambda \vec{a}_k & \dots \\ \dots & \vec{a}_n & \dots \end{pmatrix} = \lambda \det \begin{pmatrix} \dots & \vec{a}_1 & \dots \\ \dots & \vec{a}_k & \dots \\ \dots & \vec{a}_n & \dots \end{pmatrix}$$
$$\det \begin{pmatrix} \dots & \vec{a}_1 & \dots \\ \dots & \vec{a}_k + \vec{b}_k & \dots \\ \dots & \vec{a}_n & \dots \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \dots & \vec{a}_1 & \dots \\ \dots & \vec{a}_k & \dots \\ \dots & \vec{a}_n & \dots \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \dots & \vec{a}_1 & \dots \\ \dots & \vec{b}_k & \dots \\ \dots & \vec{a}_n & \dots \end{pmatrix}$$

det M = 0 wenn M 2 nicht linear unabhängige Zeilen hat. Heisst: Transformierte Vektoren auch linear abhängig.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \det(M) = 0$$
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$\vec{c} = M\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{d} = M\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \vec{c}$ linear abhängig zu \vec{d}

Bsp:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 10 & 12 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} = 2 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$
$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 10 & 12 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 8 & 10 & 12 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 8 & 10 & 12 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$
$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 10 & 12 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 8 & 10 & 12 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} + 2 \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 8 & 10 & 12 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} + 3 \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 8 & 10 & 12 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Bsp:

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} = -2 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + 0 \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - 4 \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= -2(2 - 3) + 0 - 4(-1)$$
$$= 2 + 4 = 6$$

Vorzeichen:

$$\begin{pmatrix} + & - & + & \dots \\ - & + & - & \dots \\ + & - & + & \dots \\ - & + & - & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Vorgehen:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow -2 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow 0 \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow -4 \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Weitere Eigenschaften:

- Die Determinante wechselt beim Vertauschen von Zeilen ihr Vorzeichen
- Wenn wir zu einer Zeile einer Matrix ein Vielfaches einer anderen Zeile dazuzählen, ändert die Determinante ihren Wert nicht

$$\Rightarrow \det(M) \stackrel{\text{Gauss}}{=} (-) \det \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n$$

Weiteres:

$$\det(\lambda M) = \lambda^n \det(M), M \in \mathbb{R}^{n \times n}$$
$$\det \begin{pmatrix} A & * \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det(A) \cdot \det(B)$$
$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$
$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$
$$\det(A^T) = \det(A)$$

Volumen eines Spats = $\det \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix}$

$$= \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

Volumen = Grundfläche · Höhe

$$= |\vec{b} \times \vec{c}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos(\varphi)$$
$$= |\vec{a}| \cdot |\vec{b} \times \vec{c}|$$

Determinante im 2D-Raum sagt aus, wie stark eine Fläche auf dem Koordinatensystem skaliert wird sobald durch die Matrix transformiert. Beispiel: $\det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 4$ bedeutet, dass die Fläche vervierfacht wird.

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$\vec{c} = M\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$\vec{d} = M\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

8.5.8. Eigenwerte

TODO: visualize

Gegeben: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

\vec{x} heisst **Eigenvektor** zum **Eigenwert** λ

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Gegeben: Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Ein Vektor $\vec{v} \neq \vec{0}$ heisst Eigenvektor zum Eigenvenwert λ , wenn $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ ist.

$$A\vec{v} - \lambda\vec{v} = 0$$
$$\Leftrightarrow (A - \lambda \mathbb{1})\vec{v} = 0$$

Wenn λ gegeben ist, ist das ein homogenes lineares Gleichungssystem in \vec{v} . Davon suchen wir nicht-triviale Lösungen ($\vec{v} \neq \vec{0}$).

λ heisst Eigenwert von $A \Leftrightarrow A - \lambda \mathbb{1}$ ist singulär $\Leftrightarrow \text{rang}(A - \lambda \mathbb{1}) < n \Leftrightarrow \det(A - \lambda \mathbb{1}) = 0$

Wenn $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, dann ist $\det(A - \lambda \mathbb{1})$ ein Polynom von Grad n . (Charakteristisches Polynom). Eigenwerte sind Nullstellen des charakteristischen Polynoms.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$
$$\det(A - \lambda \mathbb{1}) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda) - (-2) \cdot 1 = \lambda^2 - 5\lambda + 4 + 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = \text{Charakteristisches Polynom}$$

Nullstelle des char. Polynoms

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$
$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2}$$
$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{5 \pm 1}{2}$$
$$\Leftrightarrow \lambda \in \{3, 2\}$$

Eigenwerte von A sind $\lambda = 2$ und $\lambda = 3$

Für diese Zahlen ist die Matrix $A - \lambda \mathbb{1}$ singulär, d.h. die Gleichung $(A - \lambda \mathbb{1})\vec{v} = \vec{0}$ hat nicht-triviale Lösungen. Diese heissen Eigenvektoren.

8.5.9. Eigenwert $\lambda = 2$

$$(A - 2 \cdot \mathbb{1}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$
$$(A - 2\mathbb{1})\vec{v} = \vec{0}$$

v_1	v_2	$\vec{1}$
-1	1	0
-2	2	0

$$\Rightarrow -v_1 + v_2 = 0$$
$$\Rightarrow v_1 = v_2$$
$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu \\ \mu \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

8.5.10. Eigenwert $\lambda = 3$

$$(A - 3 \cdot \mathbb{1}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$(A - 3\mathbb{1})\vec{v} = \vec{0}$$

v_1	v_2	$\vec{1}$
-2	1	0
-2	1	0

$$\Rightarrow -2v_1 + v_2 = 0$$
$$\Rightarrow v_2 = 2v_1$$
$$\vec{v} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mu \neq 0$$

Matrizen haben Rang von 1

Für alle $\mu \neq 0$ ist \vec{v} ein Eigenvektor zum Eigenwert $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda = 3$. $\lambda = 2$

8.5.11. Diagonalisierbar

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heisst **diagonalisierbar**, wenn es eine invertierbare Matrix X gibt, so dass $X^{-1}AX = D$ (D ist eine Diagonalmatrix $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$)

Wenn A diagonalisierbar ist, dann sind die Spalten von X linear unabhängige Eigenvektoren, also eine Basis von \mathbb{R}^n , die nur aus Eigenvektoren von A besteht.

Das umgekehrte gilt auch. Das erlaubt uns, X zu konstruieren.

$$X^{-1}AX = D$$
$$\Leftrightarrow AX = XD$$
$$\Leftrightarrow AX = X \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow A \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \vec{v}_1 & \dots & \vec{v}_n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \vec{v}_1 & \dots & \vec{v}_n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ A\vec{v}_1 & \dots & A\vec{v}_n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \lambda_1\vec{v}_1 & \dots & \lambda_n\vec{v}_n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow A\vec{v}_1 = \lambda_1\vec{v}_1 \wedge A\vec{v}_2 = \lambda_2\vec{v}_2 \wedge \dots \wedge A\vec{v}_n = \lambda_n\vec{v}_n$$

8.5.12. Rechenregeln

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) = A \cdot B \cdot C$$
$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$$
$$C \cdot (A + B) = C \cdot A + C \cdot B$$
$$E \cdot A = A \cdot E = A \text{ für } A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$
$$(A^T)^T = A$$
$$(A + B)^T = A^T + B^T$$
$$(\lambda A)^T = \lambda A^T$$
$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

8.5.13. Alternative Berechnungsstrategie von Eigenwerten

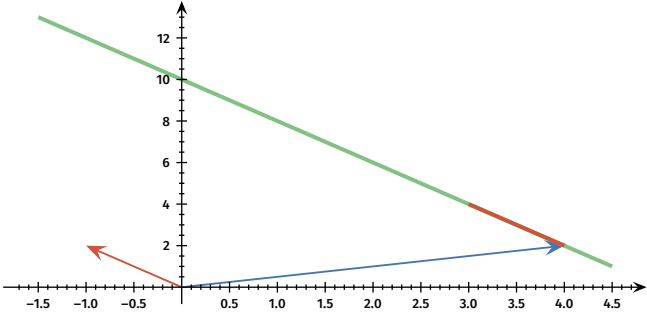
Mean $m = \frac{1}{2} \operatorname{tr} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{a+d}{2} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$

Product $p = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc = \lambda_1 \lambda_2$

$\lambda_{1,2} = m \pm \sqrt{m^2 - p}$

8.6. ANALYTISCHE GEOMETRIE
[beste playlist](#)

8.6.1. Geraden



8.6.1.1. Parameterform

$g : \vec{x} = \underbrace{\vec{p}}_{\text{Stützvektor}} + t \cdot \underbrace{\vec{p\vec{x}}}_{\text{Richtungsvektor}}, t \in \mathbb{R}$

$g_{bsp} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

8.6.1.2. Koordinatenform

$g : ax + by + c = 0$
 $g_{bsp} : 2x + y - 10 = 0$

Aus Parameterform umwandeln:

$x = 4 - 1t$
 $y = 2 + 2t$
 $t = 4 - x$
 $y = 2 + 2(4 - x) = 10 - 2x$
 $\Leftrightarrow 2x + y - 10 = 0$

8.6.1.3. Normalenform

$g : \left(\vec{x} - \underbrace{\vec{p}}_{\text{Stützvektor}} \right) \cdot \underbrace{\vec{n}}_{\text{Normalenvektor}} = 0$

$g_{bsp} : \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

Aus Koordinatenform umwandeln (\vec{p} bleibt gleich):

$2x + 1y - 10 = 0 \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

8.6.2. Ebenen

8.6.2.1. Parameterform

$E : \underbrace{\vec{x}}_{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}} = \underbrace{\vec{p}}_{\text{Stützvektor}} + s \cdot \underbrace{\vec{AB}}_{\text{Spannvektor}} + t \cdot \underbrace{\vec{AC}}_{\text{Spannvektor}}, s, t \in \mathbb{R}$

$E_{bsp} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

8.6.2.2. Normalenform

$E : \left(\vec{x} - \underbrace{\vec{p}}_{\text{Stützvektor}} \right) \cdot \underbrace{\vec{n}}_{\text{Normalenvektor}} = 0$
 $E_{bsp} : \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$

Aus Parameterform umwandeln (\vec{p} bleibt gleich):

$\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}$

8.6.2.3. Koordinatenform

$E : ax + by + cz + d = 0$
 $E_{bsp} : x - 7y + 2z + 3 = 0$

Aus Normalenform umwandeln (ausmultiplizieren):

$\begin{pmatrix} x-0 \\ y-1 \\ z-2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 = x - 7y + 2z + 3$

8.6.2.4. Hessesche Normalform

$E : \vec{x} \cdot \vec{n}_0 - b_0 = 0$

$E_{bsp} : \vec{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{69}} \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{3}{\sqrt{69}} = 0$

Aus Normalenform umwandeln:

$\vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}, b_0 = \frac{b}{|\vec{n}|}, b = \vec{p} \cdot \vec{n}$

$b = 3, |\vec{n}| = \sqrt{69}, \vec{n}_0 = \frac{1}{\sqrt{69}} \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}, b_0 = \frac{3}{\sqrt{69}}$

Abstand a von Punkt Q zur Ebene $\vec{x} \cdot \vec{n}_0 - b_0 = 0$

$a = \vec{q} \cdot \vec{n}_0 - b_0$

Abstand von Punkt $P(2, 8, 2)$ zur Ebene $E : 2x - y + 4z = 1$

$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$
 $|\vec{n}| = \sqrt{21}$
 $\frac{2x - y + 4z - 1}{\sqrt{21}}$
 $\Rightarrow \frac{2 \cdot 2 - 1 \cdot 8 + 4 \cdot 2 - 1}{\sqrt{21}}$
 $= \frac{3}{\sqrt{21}}$

9. VORGEHENSWEISE, UM

9.1. DIAGONALE UND FLÄCHE BERECHNEN

Gegeben: $A = (0; 1; 0), B = (2; 1; 0), C = (0; 0; 1), D = (1; 0; 0)$

Diagonale $\vec{BD} = \vec{r}_D - \vec{r}_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Fläche $F = |(\vec{r}_B - \vec{r}_A) \times (\vec{r}_D - \vec{r}_A)| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right| = 2$

9.2. ABBILDUNGSMATRIX BERECHNEN

Gegeben: $A = (1; -1), B = (1; 1), A' = (2; 1), B' = (0; 1)$

$M_U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, M_B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, M_U^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$M = M_B \cdot M_U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Note: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

9.3. NULLTEILER VON \mathbb{Z}_n FINDEN

Multiplikationstabelle?

Können nicht Teilerfremd zu n sein.

9.4. ELEMENTE VON \mathbb{Z}_n^* FINDEN (MULT. INV. IN \mathbb{Z}_n)

Multiplikationstabelle?

9.5. $|\mathbb{Z}_n^*|$ BERECHNEN

$|\mathbb{Z}_n^*| = \varphi(n)$

9.6. LÖSUNGSMENGE GAUSS-TABLEAU MIT NULLZEILE

\Rightarrow Unlösbar

...				
1	0	2	3	
0	1	1	0	
0	0	0	4	

$x_1 = 3 - 2t, x_2 = -t, x_3 = t$

...				
1	0	2	3	
0	1	1	0	
0	0	0	0	

$\mathbb{L}(A, \vec{b}) = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$

9.7. DISJUNKTIVE/KONJUNKTIVE NORMALFORM ANGEBEN

Wahrheitstafel. Für konjunktive Normalform zuerst disjunktive erstellen, danach negieren und umformen. Beispiel:

$\neg R = (A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C)$
 $\Leftrightarrow R = \neg(A \wedge B \wedge C) \wedge \neg(A \wedge \neg B \wedge C)$
 $\Leftrightarrow R = (\neg A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee B \vee \neg C)$

9.8. $x^y \bmod p$ BERECHNEN

Kleiner Fermat: $x^{p-1} \equiv 1 \bmod p$, $\text{ggT}(x, p) = 1$, p ist Primzahl

Satz von Euler: $x^{\varphi(p)} \equiv 1 \bmod p$, $\text{ggT}(x, p) = 1$

9.9. ZAHL $x \in \mathbb{Z}_n$ FINDEN, FÜR DIE $y \cdot x \equiv 1 \bmod n$ GILT (MULT. INV.)

Falls $\text{ggT}(y, n) \neq 1 \Rightarrow$ gibt kein mult. Inv. Ansonsten: Euklidischer Algorithmus.

Beispiel: $x \in \mathbb{Z}_{32}, 21 \cdot x \equiv 1 \bmod 32$

x	y	q	r	u	s	v	t
32	21	1	11	1	0	0	1
21	11	1	10			1	-1
11	10	1	1			-1	2
10	1	10	0			2	-3

$\Rightarrow x = -3 + 32 = 29$

Beispiel: $x \in \mathbb{Z}_{32}, 22 \cdot x \equiv 1 \bmod 32$

$\text{ggT}(22, 32) = 2 \Rightarrow$ gibt kein mult. Inv.

9.10. AUS GERADEN G_1 UND G_2 FOLGENDES HERAUSFINDEN:

Gegeben: $G_1 = (2; 3) \cdot \vec{x} - 1 = 0, G_2 = (3; 4) \cdot \vec{x} + 5 = 0, P = (1; 1)$

Welche Gerade liegt näher an Punkt P :

Hessesche Normalform
 $\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{13}$
 $G_1 = \frac{1}{\sqrt{13}} \cdot (2; 3) \cdot \vec{x} - \frac{1}{\sqrt{13}} = 0$
Abstand
 $a_1 = \frac{1}{\sqrt{13}} \cdot (2; 3) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{13}} = \frac{4}{\sqrt{13}}$

Hessesche Normalform
 $\left| \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = 5$
 $G_2 = \left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5} \right) \cdot \vec{x} + 1 = 0$
Abstand
 $a_2 = \left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 = \frac{12}{5}$

$\frac{4}{\sqrt{13}} < \frac{12}{5} \Rightarrow G_1$

Wo schneiden sich die Geraden: Koordinatengleichung

$25x + 35y = 1$
 $35x + 45y = -5$
 $S = (-19; 13)$

Für welche Gerade liegt P auf derselben Seite wie der Ursprung: Ursprung in HNF einsetzen

Abstand

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{13}} \cdot (2; 3) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{13}} = -\frac{1}{\sqrt{13}}$$

$b_1 < 0 \wedge a_1 > 0 \Rightarrow$ verschiedene Seiten

Abstand

$$b_2 = \left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 = 1$$

$b_1 > 0 \wedge a_1 > 0 \Rightarrow$ dieselben Seiten

9.11. EBENEN
Gegeben: Punkte $A = (-1; 1; 4)$, $B = (-7; 3; 1)$, $C = (2; 1; 5)$

Ebene $E \in \mathbb{R}^3$ verläuft durch oben genannte Punkte. Gib sie in Parameterform unter Verwendung des Ortsvektors zum Punkt A als Stützvektor an:

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$E: \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Hessesche Normalenform der Ebene E :

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$$
$$|\vec{n}| = 7, \vec{n}_0 = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} \\ -\frac{3}{7} \\ -\frac{6}{7} \end{pmatrix}, b_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \vec{n}_0 = -\frac{29}{7}$$
$$E: (\vec{x} - \vec{a}) \cdot \vec{n}_0 = 0 \Leftrightarrow \vec{x} \cdot \vec{n}_0 - b_0 = 0$$

Abstand des Punktes $Q = (10; 2; -1)$ von der Ebene $E: \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \vec{n}_0 - b_0$

Für welchen Wert von z liegt $R = (-4; 1; z)$ auf der Ebene $E: \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ z \end{pmatrix} \cdot \vec{n}_0 - b_0 = 0$

9.12. RSA VERSCHLÜSSELUNG
Gegeben: $n = 119$

Zahlen angeben, die als Schlüssel infrage kommen: Teilerfremd zu $\varphi(n)$

Zum Schlüssel a den Schlüssel b berechnen: Euklidischer Algorithmus mit $\varphi(n), a$

Mit dem Schlüssel a die Zahl x ent- / verschlüsseln: $x^a \bmod n$

9.13. ALLE ELEMENTE VON $R = \{(a, b) \in M \times M \mid a \cdot b \equiv 1 \bmod x\}$

9.14. ALLE ELEMENTE VON $R = \{(a, b) \in \mathbb{Z}_x^* \times \mathbb{Z}_x^* \mid a \cdot b \equiv y \bmod x\}$

Falls y teilerfremd zu x : Multiplikationstabelle mit Fremtteilern zu x erstellen.

Beispiel: $R = \{(a, b) \in \mathbb{Z}_{12}^* \times \mathbb{Z}_{12}^* \mid a \cdot b \equiv 7 \bmod 12\}$

= $\{(1, 7), (5, 11), (7, 1), (11, 5)\}$

.	1	5	7	11
1	1	5	7	11
5	5	1	11	7
7	7	11	1	5
11	11	7	5	1

9.15. LÖSUNG VON $M \cdot \vec{x} = \vec{y}$ ZU \vec{x}
 $\vec{x} = M^{-1} \cdot \vec{y}$

9.16. EIGENWERTE DER MATRIX M BERECHNEN

9.17. EIGENVEKTOREN DER MATRIX M BERECHNEN