

1. AUSSAGENLOGIK

1.1. GLOSSAR

Begriff	Bedeutung
Aussage	Feststellender Satz, dem eindeutig «wahr» oder «falsch» zugeordnet werden kann. Symbole wie A, B, C, \dots werden dafür verwendet
Aussagenlogische Form	Kombination von Aussagen, verknüpft durch Junktoren
Aussageform	Aussagen verknüpft mit Variablen
Normalform	Standardisierte Aussagenlogische Formen (Formeln)
Negationsnormalform	- steht ausschließlich direkt vor Aussagen oder Konstanten
Verallgemeinerte Disjunktion	- Einzelne Aussage oder Negation - wahr oder falsch - Disjunktion $A \vee B$, falls A und B selbst verallgemeinerte Disjunktionen sind
Verallgemeinerte Konjunktion	- Einzelne Aussage oder Negation - wahr oder falsch - Konjunktion $A \wedge B$, falls A und B selbst verallgemeinerte Konjunktionen sind
Disjunktive Normalform	Disjunktion von (oder eine einzelne) verallgemeinerten Konjunktionen Beispiel: $(A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C)$
Konjunktive Normalform	Konjunktion von (oder eine einzelne) verallgemeinerten Disjunktionen Beispiel: $(A \vee B \vee C) \wedge (A \vee \neg B \vee \neg C)$
Kontradiction	Immer falsch
Tautologie	Immer wahr
Junktoren (/Konnektoren)	- Negation - Konjunktion - Disjunktion (einschließlich oder!) - Implikation - Äquivalenz
Bindungsstärke	- vor \wedge, \vee vor $\Rightarrow, \Leftrightarrow$

1.2. FORMELN

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A) \quad (A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B) \quad (A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \Rightarrow B)$$

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B) \quad \neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B \quad (A \Rightarrow B \Rightarrow C) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)$$

1.3. RECHENREGELN

Begriff	Bedeutung
Abtrennungsregel	$(A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$
Kommutativität	$(A \wedge B) \Leftrightarrow (B \wedge A)$ $(A \vee B) \Leftrightarrow (B \vee A)$
Assoziativität	$A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$ $A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow (A \vee B) \vee C$
Distributivität	$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
Absorption	$A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$ $A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$
Idempotenz	$A \vee A = A$ $A \wedge A = A$
Doppelte Negation	$\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$
Konstanten	$W = \text{wahr}$ $F = \text{falsch}$
de Morgan	$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$ $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

2. PRÄDIKATENLOGIK

2.1. GLOSSAR

Begriff	Bedeutung
Subjekt	«Konkretes Ding» / Stellvertreter einer Variable
Prädikat	«Eigenschaft», z.B. «ist eine Primzahl» Prädikate werden oft wie Funktionen geschrieben. Ist P ein Prädikat, dann bedeutet $P(x)$, dass x das Prädikat erfüllt. $P(x)$ ist eine Aussageform.
Quantor	\forall Allquantor (Für alle) \exists Existenzquantor (Es existiert)

3. BEWEISEN

3.1. INDUKTION

$$A(1) \wedge (A(n) \Rightarrow A(n+1)) \Rightarrow A(m), m \in \mathbb{N}$$

TODO: besseres Beispiel

Beispiel: $2 \mid (6^n)$

1) Verankerung: $n = 0$

- $2 \mid (6^0)$
- 2) Induktionsschritt $n \rightarrow n + 1$
 - $2 \mid (6^{n+1})$
 - a) Induktionsannahme: $2 \mid (6^n)$
 - b) Behauptung: $2 \mid (6^{n+1})$
 - c) Beweis: Verwendung der Annahme, um Richtigkeit der Behauptung zu zeigen $2 \mid (6^n + 6)$

3.1.1. Techniken

- 1) Direkter Beweis $f(n) = f_1(n) = f_2(n) = \dots = f_m(n) = g(n)$
- 2) Differenz gleich Null $f(n) - g(n) = 0 \Rightarrow f(n) = g(n)$
- 3) Äquivalenzumformung
- 4) Dritte Grösse (vereinfachen) $g(n) = h(n) = f(n)$

4. DIREKTE, ITERATIVE UND REKURSIVE BERECHNUNGEN

4.1. GLOSSAR

Begriff	Bedeutung
Folge	Nummerierte Liste von Objekten (Folgegliedern)

Reihe Summe von Folgegliedern einer Zahlenfolge

5. MENGEN

5.1. GLOSSAR

Begriff	Bedeutung
Aufzählend	$\{1, 2, 3\}$

Beschreibend $\{x \in \mathbb{N}^* \mid x < 4\}$

Mächtigkeit Anzahl Elemente einer Menge $|M|$

Potenzmenge Menge aller Teilmengen einer Menge $P(M)$
 $|P(M)| = 2^{|M|}$

Teilermenge $T(n) = \text{Menge der Teiler der Zahl } n$

Kartesisches Produkt $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$

5.2. RECHENREGELN

Für die Mengen A und B in der Obermenge M gelten die folgenden Aussagen:

$$\begin{array}{llll} A \setminus \emptyset = A & A \cup \bar{A} = M & A \setminus B = A \cap \bar{B} & (A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C) \\ A \setminus A = \emptyset & \bar{A} \cup \bar{A} = \bar{A} \cap \bar{B} & \bar{A} \setminus B = \bar{A} \cup B & A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C) \\ \bar{\bar{A}} = A & \bar{A} \cap \bar{B} = \bar{A} \cup \bar{B} & (A \setminus B) \cup (A \cap B) = A & \\ A \cap \bar{A} = \emptyset & A \setminus (A \setminus B) = A \cap B & (A \setminus B) \cap (A \cap B) = \emptyset & \end{array}$$

6. FORMELN, ABBILDUNGEN, RELATIONEN

6.1. GLOSSAR

Begriff	Bedeutung
Funktion/Abbildung	Zuordnung, die jedem Element der Definitionsmenge D genau ein Element einer Zielmenge Z zuordnet. Injective Relation: $f: D \rightarrow Z$ Abbildungen mit mehreren Argumenten: $f: A \times B \rightarrow Z, f(a, b) = y$

Graph Menge von Paaren $(x, f(x))$

$G \in D \times Z$

Relation Teilmenge des Kartesischen Produktes mehrerer Mengen

$$A = \bigcup_{i=1}^n A_i, |A_i| = n_i \Rightarrow |A| = \prod_{i=1}^n n_i$$

- Kleiner-Relation: $R_c = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B, a < b\}$
- Gleich-Relation: $R_e = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B, a = b\}$
- Kleiner-Gleich-Relation: $R_s = R_c \cup R_e = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B, a \leq b\}$

Surjektiv Alle Elemente der Definitionsmenge und Zielmenge sind «verknüpft» / jedes Element der Bildmenge kommt als Bild vor

Injektiv Alle Inputs haben eindeutige Outputs $a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$

Bijektiv Surjektiv und Injektiv

Reflexiv Alle Elemente von A stehen zu sich selbst in Beziehung $a \in A \Rightarrow (a, a) \in R$

Symmetrisch $(a, b) \in R \wedge (b, a) \in R$

$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow A)$

Transitiv $(a, b) \in R, (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$

$(A \Leftrightarrow B) \wedge (B \Leftrightarrow C) \Rightarrow (A \Leftrightarrow C)$

Äquivalenzrelation reflexiv, symmetrisch und transitiv $\Leftrightarrow, =$

Begriff	Bedeutung
Irreflexiv	$a \in A \Rightarrow \neg(a, a) \in R$
Asymmetrisch	$(a, b) \in R \Rightarrow \neg(b, a) \in R$
Antisymmetrisch	$((a, b) \in R \wedge (b, a) \in R) \Rightarrow a = b$
Ordnungsrelation	reflexiv, antisymmetrisch und transitiv \leq
Symmetrische Differenz	$AAB = \{x \in G \mid (x \in A \wedge x \in B) \wedge \neg(x \in A \cap B)\}$ $AAB = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$

7. MODULO-RECHNEN

Die Modulo-Relation ist eine Äquivalenzrelation auf \mathbb{Z} .

7.1. GLOSSAR

Begriff	Bedeutung
Teiler-Relation	Für $a, b \in \mathbb{Z}$ ist die Teiler-Relation $b \mid a \Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{Z}: bq = a$ $b \mid a \Leftrightarrow \neg b \mid a$ $b \mid a \Leftrightarrow b \mid a - a$ Ordnungsrelation auf \mathbb{N}
Modulo-Relation	Für $a, q, r \in \mathbb{Z}$ ist die Modulo-Relation $R_q(a, r) \Leftrightarrow q \mid a - r \Leftrightarrow a \equiv r \pmod{q}$
\sim	«relates to» $a \sim b \Leftrightarrow (a, b) \in R$
Quotient, Rest	Zu jeder Zahl $a \in \mathbb{Z}$ und jeder Zahl $b \in \mathbb{Z}$ gibt es eindeutig bestimmte Zahlen $q, r \in \mathbb{Z}$ mit $a = q \cdot b + r, 0 \leq r < b$ Bsp: $7 = 2 \cdot 3 + 1$ q heißt Quotient r heißt Rest
Restklassen	$[b]_q = \{a \in \mathbb{Z} \mid a \equiv b \pmod{q}\}, q > 0$ $\mathbb{Z}_q = \{[0]_q, [1]_q, [2]_q, \dots, [q-1]_q\} = \{0, 1, 2, \dots, q-1\}$ Vereinfachung
Multiplikatives Inverses	Für $a \in \mathbb{Z}_q$ ist $b \in \mathbb{Z}_q$ das multiplikative Inverse von a , wenn $a \cdot b \equiv 1 \pmod{q}$
Nullteiler	Wenn für $a, b \in \mathbb{Z}_q: ab \equiv 0 \pmod{q}$ und $a \not\equiv 0 \pmod{q} \wedge b \not\equiv 0 \pmod{q}$, heissen a, b Nullteiler

7.2. RECHENREGELN

- 1) $(a + b) \pmod{n} = ((a \pmod{n}) + (b \pmod{n})) \pmod{n}$
- 2) $(a - b) \pmod{n} = ((a \pmod{n}) - (b \pmod{n})) \pmod{n}$
- 3) $(a \cdot b) \pmod{n} = ((a \pmod{n}) \cdot (b \pmod{n})) \pmod{n}$
- 4) $a^d \pmod{n} = (a^{d-x} \cdot a^x) \pmod{n} = ((a^{d-x} \pmod{n}) \cdot (a^x \pmod{n})) \pmod{n}$

7.3. PRIMFAKTORENZERLEGUNG

Begriff	Bedeutung
ggT(a, b)	$\max\{d \in \mathbb{N} \mid d \mid a \wedge d \mid b\}$
kgV(a, b)	$\min\{m \in \mathbb{N} \mid a \mid m \wedge b \mid m\}$

Teilerfremd Zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$ heissen Teilerfremd, wenn $\text{ggT}(a, b) = 1$
Sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl und $q \in \mathbb{N}, q < p, q \neq 0$ dann ist $\text{ggT}(p, q) = 1$

7.4. EUKLIDSCHER ALGORITHMUS

Seien $a, b \in \mathbb{N}, a \neq b, a \neq 0, b \neq 0$
Initialisierung: Setze $x := a, y := b, q := x \div y, r := x - q \cdot y$ (d.h. bestimme q und r so, dass $x = q \cdot y + r$ ist)

Wiederhole bis $r = 0$ ist

Ergebnis: $y = \text{ggT}(a, b) = s \cdot a + t \cdot b$

Wenn $\text{ggT}(a, b) = 1$ ist, dann folgt: $t \cdot v \equiv 1 \pmod{a}$

7.5. ERWEITERTER EUKLIDSCHER ALGORITHMUS

Seien $a, b \in \mathbb{N}, a \neq b, a \neq 0, b \neq 0$
Initialisierung: Setze $x := a, y := b, q := x \div y, r := x - q \cdot y, (u, s, v, t) = (1, 0, 0, 1)$ (d.h. bestimme q und r so, dass $x = q \cdot y + r$ ist)

Wiederhole bis $r = 0$ ist

Ergebnis: $y = \text{ggT}(a, b) = s \cdot a + t \cdot b$

Wenn $\text{ggT}(a, b) = 1$ ist, dann folgt: $t \cdot v \equiv 1 \pmod{a}$

7.5.1. Beispiel

ggT(99, 79)

i	$x = y_{-1}$	$y = r_{-1}$	$q = x \div y$	$r = x_i - q_i \cdot y_i$	$u = s_{-1}$	$s = u_{-1} - q_{-1} \cdot s_{-1}$	$v = t_{-1}$	$t = v_{-1} - q_{-1} \cdot t_{-1}$
$i=0$	99	79	1	20	1	0	0	1
$i=1$	79	20	3	19	0	1	1	-1
$i=2$	20	19	1	1	-3	-1	4	
$i=3$	19	1	19	0	-3	4	4	-5

Daraus folgend:

$$-\text{ggT}(99, 79) = 4 \cdot 99 + (-5) \cdot 79 \Leftrightarrow 396 - 395 = 1$$

$$-99 + (-5) = 94 \text{ ist mult. Inv. von 79 in } \mathbb{Z}_{99}$$

$$-79 + 4 = 83 \text{ ist mult. Inv. von 99 in } \mathbb{Z}_{79}$$

7.6. KLEINER FERMAT

Sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl und $x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ mit

$$x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p} \quad | \cdot ()^n$$

$$\Leftrightarrow x^{n(p-1)} \equiv 1 \pmod{p} \quad | \cdot x$$

$$\Leftrightarrow x^{1+n(p-1)} \equiv x \pmod{p}$$

$$\Leftrightarrow x^{1 \bmod (p-1)} \equiv x \pmod{p}$$

7.7. SATZ VON EULER

Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $z \in \mathbb{Z}$ mit $\text{ggT}(z, n) = 1$. Dann ist $z^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$.7.7.1. Euler'sche φ -Funktion (Totient)Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $\mathbb{Z}_n^* = \{x \in \mathbb{Z}_n \mid x \text{ hat ein multiplikatives Inverses in } \mathbb{Z}_n\}$.Dann heisst $\varphi(n)$:

$$\begin{aligned}\varphi(n) &= \text{Anz. Elemente in } \mathbb{Z}_n \text{ mit mult. Inversen} \\ &= \text{Anz. Zahlen } 1 \leq q \leq n \text{ mit } \text{ggT}(q, n) = 1 \\ &= |\mathbb{Z}_n^*|\end{aligned}$$

7.7.1.1. Rechenregeln

$$1) \text{ Sei } n \in \mathbb{N} \text{ eine Primzahl, dann } \varphi(n) = n - 1$$

$$2) \text{ Sei } n \in \mathbb{N} \text{ eine Primzahl und } p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \text{ dann } \varphi(n^p) = n^{p-1} \cdot (n - 1)$$

$$3) \text{ Seien } m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \text{ und } \text{ggT}(m, n) = 1, \text{ dann } \varphi(n \cdot m) = \varphi(n) \cdot \varphi(m)$$

7.8. RSA VERSCHLÜSSELUNG

$$1) \text{ Wähle 2 Primzahlen } p, q$$

$$2) \text{ Berechne } n = p \cdot q$$

$$3) \text{ Berechne } \varphi(n) = (p - 1)(q - 1)$$

$$4) \text{ Wähle } a, b \text{ so, dass } a \cdot b \equiv 1 \pmod{\varphi(n)}$$

5) Vergesse $p, q, \varphi(p \cdot q)$. Brauchen wir nicht und riskieren nur, dass uns jemand hacktPublic key ist nun p, b , Private key ist n, a Verschlüsseln: $c^a \pmod{n}$ Entschlüsseln: $z^b \pmod{n} \Leftrightarrow c^{ab} \pmod{n}$ Sidenote: Fürs Alphabet muss n grösser sein als 26

8. LINEARE ALGEBRA

3b1b <3

8.1. GLOSSAR

Begriff | Bedeutung

Lineares Gleichungssystem (LGS) | TODO:

Homogenes LGS | $M \cdot \vec{x} = \vec{0}$ Inhomogenes LGS | $M \cdot \vec{x} = \vec{b}$ Lineare Abbildung | $L : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ Kern | $\text{kern}(L) = \{\vec{0}\} \Leftrightarrow L \text{ ist injektiv}$

Koeffizientenmatrix | TODO:

8.2. PIVOT-GLEICHUNG

$$(I) \quad 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 = -6$$

$$(II) \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -10$$

$$(III) \quad 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 = -18$$

$$\Rightarrow$$

$$(I') \quad 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 = -6$$

$$(II') = (II) - (I) \quad 1x_2 + 2x_3 = -4$$

$$(III') = (III) - 2(I) \quad 1x_2 + 4x_3 = -6$$

$$\Rightarrow$$

$$(I'') \quad 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 = -6 \Rightarrow x_1 = -6 - x_2 - x_3 = -6 + 2 + 1 = -3$$

$$(II'') = (II') - (I'') \quad 1x_2 + 2x_3 = -4 \Rightarrow x_2 = -4 - 2x_3 = -4 + 2 = -2$$

Rückwärtssubstitution

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

8.3. GAUSS-TABLEAU

	x_1	x_2	x_3	1	
I	1	1	1	-6	
II	1	2	3	-10	-(I)
III	2	3	6	-18	-2(II)

⇒

	x_1	x_2	x_3	1	
I'	1	1	1	-6	
II'	0	1	2	-4	
III'	0	1	4	-6	-(II')

⇒

	x_1	x_2	x_3	1	
I''	1	1	1	-6	
II''	0	1	2	-4	
III''	0	0	2	-2	$\cdot \frac{1}{2}$

⇒

	x_1	x_2	x_3	1	
I'''	1	1	1	-6	-(III'')
II'''	0	1	2	-4	-2(III'')
III'''	0	0	1	-1	

⇒

	x_1	x_2	x_3	1	
I''''	1	0	0	-3	
II''''	0	1	0	-2	
III''''	0	0	1	-1	

⇒

	x_1	x_2	x_3	1	
I'''''	1	0	0	-5	-(II''''')
II'''''	0	1	0	-2	
III'''''	0	0	1	-1	

Ergebnisvektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$ Lösungsvektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ Lineares Gleichungssystem $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ $p = \text{Anzahl Pivot-Variablen.}$ Wenn $b_{p+1} = \dots = b_m = 0$ dann ist das LGS lösbar (homogenes Gleichungssystem), sonst unlösbar.Wenn $p = n$ dann hat LGS genau eine Lösung.Wenn $p < n$ dann hat LGS unendlich viele Lösungen.

8.4. VEKTOREN

8.4.1. Glossar

Begriff | Bedeutung

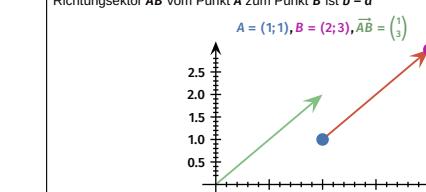
Vektor | Liste von Zahlen

Nullvektor | $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ Ortsvektor | Ortsvektor \vec{p} vom Nullpunkt des Koordinatensystems $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ zum Punkt P

Begriff

Richtungsvektor

Bedeutung

Richtungsvektor \vec{AB} vom Punkt A zum Punkt B ist $\vec{b} - \vec{a}$ 

Linearkombination

Linearkombination der Variablen x_1, x_2, x_3 (Bsp. $3 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 = -6$). Vektoren werden jeweils mit einer Zahl multipliziert und miteinander summiert

Lineare Unabhängigkeit

 $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ heißen linear unabhängig, wenn die Gleichung $\lambda_1 \cdot \vec{v}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{v}_2 + \dots + \lambda_n \cdot \vec{v}_n = \vec{0}$ genau eine Lösung hat, nämlich $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ $\begin{pmatrix} \vec{v}_1 & \dots & \vec{v}_n \end{pmatrix} \cdot \vec{\lambda} = \vec{0}$ eindeutig lösbar $= \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ sind linear unabhängigLinear unabhängig: $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Linear abhängig: $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Skalarprodukt

TODO:

Betrag/Länge eines Vektors

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 5^2} = \sqrt{38}$$

Orthogonale Projektion

TODO:

Normalenvektor

TODO:

8.4.2. Vektorenrechnen

Addition:

$$\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+5 \\ 3+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$$



Multiplikation mit reellen Zahlen (=Skalare):

$$3 \cdot \vec{v} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$



8.4.3. Rechenregeln

Falls die Vektoren senkrecht zueinanderstehen, ist das Skalarprodukt gleich 0

$$\begin{aligned}\lambda \vec{0} &= \vec{0} \\ \vec{v} + \vec{0} &= \vec{v} \\ -\vec{v} &= -1 \cdot \vec{v} \\ -\vec{v} + \vec{v} &= \vec{0} \\ (\lambda\mu)\vec{v} &= \lambda(\mu\vec{v}) = \lambda\mu\vec{v} \\ \lambda(\vec{v} + \vec{w}) &= \lambda\vec{v} + \lambda\vec{w} \\ \vec{v} + (\vec{u} + \vec{w}) &= (\vec{v} + \vec{u}) + \vec{w} = \vec{v} + \vec{u} + \vec{w}\end{aligned}$$

8.4.4. Kreuzprodukt

$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

8.4.4.1. Eigenschaften

Anti-kommutativ: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$. Konsequenz: $\vec{a} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$ Distributiv: $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ Gemischt-assoziativ: $\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b})$ Das Kreuzprodukt ist nicht assoziativ. $\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c}$ darf man nicht! $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$

8.4.4.2. Geometrische Eigenschaften

 $\vec{a} \times \vec{b}$ steht immer senkrecht auf \vec{a} und auf \vec{b} . $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$ bilden ein Rechtssystem $|\vec{a} \times \vec{b}| = \text{Flächeninhalt des durch } \vec{a} \text{ und } \vec{b} \text{ aufgespannten Parallelogramms} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi)$

TODO: diagram

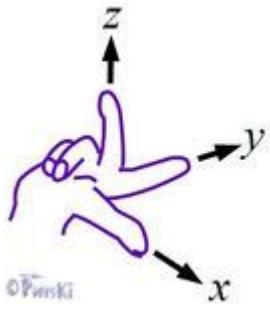
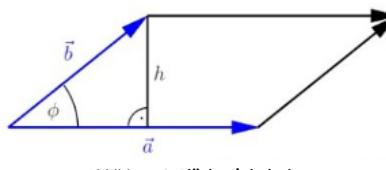


Abbildung 1: Rechtssystem

Abbildung 2: Flächeninhalt $h \cdot a$

8.4.5. Vektorraum

Ein Vektorraum ist eine Menge V mit den Rechenoperationen:

$$\begin{aligned}\oplus : V \times V \rightarrow V, (\vec{v}, \vec{w}) \mapsto \vec{v} \oplus \vec{w} \\ \circ : \mathbb{R} \times V \rightarrow V, (\lambda, \vec{v}) \mapsto \lambda \circ \vec{v}\end{aligned}$$

Mit den Eigenschaften:

- Vektoraddition:
- **Assoziativgesetz:** $u \oplus (v \oplus w) = (u \oplus v) \oplus w$
- Existenz eines **neutralen Elements** $0_V \in V$ mit $v \oplus 0_V = 0_V \oplus v = v$
- Existenz eines zu $v \in V$ **inversen Elements** $-v \in V$ mit $v \oplus (-v) = (-v) \oplus v = 0_V$

- **Kommutativgesetz:** $v \oplus u = u \oplus v$

- Skalarmultiplikation:
- $\alpha \circ (u \oplus v) = (\alpha \circ u) \oplus (\alpha \circ v)$
- $(\alpha + \beta) \circ v = (\alpha \circ v) \oplus (\beta \circ v)$
- $(\alpha \cdot \beta) \circ v = \alpha \circ (\beta \circ v)$
- $1 \circ v = v$ für das **Einselement** $1 \in K$ des **Skalarkörpers**

Gelten diese Eigenschaften für die Teilmenge eines grösseren Vektorraums W , so nennt man V **Untervektorraum** von W . Heisst: Man hat nur dann einen Untervektorraum V , wenn die Produkte der Multiplikation oder Addition der Elemente dieses Raumes auch in V liegen. Untervektorräume sind also unendliche Räume mit n Dimensionen weniger, zB $W = 3$ -Dimensionaler Vektorraum, $V = 2$ -Dimensionaler Untervektorraum.

Kern von $A = U = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\vec{x} = \vec{0}\}, A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ist ein Untervektorraum von \mathbb{R}^n .

8.4.6. Lineare Abbildung

Eine Lineare Abbildung ist eine Funktion

$$\begin{aligned}L : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ \vec{x} &\mapsto L(\vec{x})\end{aligned}$$

mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned}L(\vec{x} + \vec{y}) &= L(\vec{x}) + L(\vec{y}) \\ L(\lambda\vec{x}) &= \lambda L(\vec{x})\end{aligned}$$

Für jede lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ gibt es eine (Abbildungs) Matrix $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit der Eigenschaft, dass $L(\vec{x}) = M\vec{x}$

$$\begin{aligned}M &= \begin{pmatrix} m_{11} & \dots & m_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{m1} & \dots & m_{mn} \end{pmatrix} \\ m_{ij} &= \vec{e}_i \cdot L(\vec{e}_j)\end{aligned}$$

8.5. MATRIZEN

8.5.1. Glossar

Begriff	Bedeutung
Spaltenvektoren	Spalten der Matrix als Vektoren
Zeilenvektoren	Zeilen der Matrix als Vektoren
Rang	Wieviele Spaltenvektoren einer Matrix linear unabhängig sind
Nullmatrix	$0 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$
Quadratische Matrix	$M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ Gleichviele Zeichen und Spalten
Diagonalmatrix	(immer quadratisch und symmetrisch): $D = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 \end{pmatrix}, d_{ij} = 0 \text{ für } i \neq j$
Einheitsmatrix	(immer diagonal): $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Symmetrische Matrix	(immer quadratisch): $A = A^T, a_{ij} = a_{ji}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$
Obere Dreiecksmatrix	$O = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & x_4 & x_5 \\ 0 & 0 & x_6 \end{pmatrix}, o_{ij} = 0 \text{ für } i > j$
Kovarianzmatrix	immer symmetrisch
Reguläre Matrix	Quadratische Matrix mit höchstem Rang (Rang = Anzahl Spalten/Reihen)
Singuläre Matrix	Quadratische Matrix mit kleinerem Rang (Rang < Anzahl Spalten/Reihen)
Invertierbare Matrix	Für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heisst A invertierbar, wenn es eine Matrix A^{-1} gibt, so dass $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = \text{Einheitsmatrix (E)}$. Dies ist der Fall, wenn A Regulär ist.

8.5.2. Definition

Matrix mit 2 Zeilen und 3 Spalten

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$$

Komponenten von A : a_{ij} i : Zeilenindex, j : Spaltenindex. Bsp: $a_{23} = 7$

8.5.3. Matrizen als Vektoren interpretieren

→ A ist ein 6-Dimensionaler VR (Vektorraum)

$$\text{Variante 1: } \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \\ a_{14} \\ a_{15} \\ a_{16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \\ 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \text{ Variante 2: } \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \\ a_{14} \\ a_{15} \\ a_{16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{R}^n \text{ interpretiere als } \begin{cases} \mathbb{R}^{n \times 1} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \text{ Spaltenvektor} \\ \mathbb{R}^{1 \times n} \rightarrow (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n) \text{ Zeilenvektor} \end{cases}$$

Zu A gehörige Zeilenvektoren

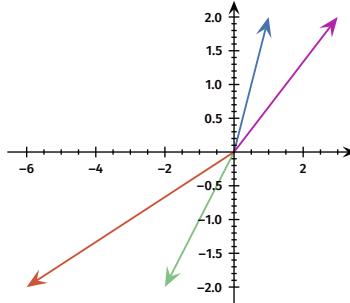
$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \leftarrow \vec{a}_1 \rightarrow \\ \leftarrow \vec{a}_2 \rightarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Zu A gehörige Spaltenvektoren

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \vec{a}_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$



8.5.4. Matrizen transponieren

Transponierte Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ wäre: $A^T \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$$A = (a_{ij}), A^T = (a_{ji})$$

Rolle von Zeile und Spalte vertauscht: $a_{ij} \rightarrow a_{ji}$

Bsp:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 2}, A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3},$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}^T = (1 \ 4 \ 5)$$

8.5.5. Matrizen invertieren

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -3 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

8.5.6. Matrixmultiplikation

Meistens nicht kommutativ ($A \cdot B \neq B \cdot A$) B muss genau gleich viele Zeilen haben wie A Spalten

$$A \in \mathbb{R}^{m \times l}, B \in \mathbb{R}^{l \times n}, C = A \cdot B \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^l a_{ik} b_{kj}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 1 & 0 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2 \cdot 6 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 8) & (2 \cdot 4 + 3 \cdot 0 + 1 \cdot 9) \\ (4 \cdot 6 + 1 \cdot 1 + 7 \cdot 8) & (4 \cdot 4 + -1 \cdot 0 + 7 \cdot 9) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 17 \\ 79 & 79 \end{pmatrix}$$

8.5.7. Determinante

Determinante einer quadratischen Matrix ist eine reelle Zahl

$$1 \times 1 \text{ Matrix: } \det(a) = a$$

$$2 \times 2 \text{ Matrix: } \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - cb$$

$$3 \times 3 \text{ Matrix: } \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

Bsp:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

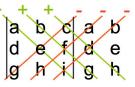
$$x = \frac{ed - fb}{ad - cb}, \quad y = \frac{af - ce}{ad - cb}$$

$$y = \frac{af - ce}{ad - cb}$$

Definition der Determinante:

$$\det : \begin{cases} \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R} \\ M \mapsto \det(M) \end{cases}$$

Definition über Eigenschaften:



$$\det(\mathbb{1}) = 1$$

$$\det \begin{pmatrix} \dots & \vec{a}_1 & \dots \\ \dots & \lambda \vec{a}_1 & \dots \\ \dots & \vec{a}_n & \dots \end{pmatrix} = \lambda \det \begin{pmatrix} \dots & \vec{a}_1 & \dots \\ \dots & \vec{a}_k & \dots \\ \dots & \vec{a}_n & \dots \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} \dots & \vec{a}_1 & \dots \\ \dots & \vec{a}_k + \vec{b}_k & \dots \\ \dots & \vec{a}_n & \dots \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \dots & \vec{a}_1 & \dots \\ \dots & \vec{a}_k & \dots \\ \dots & \vec{a}_n & \dots \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \dots & \vec{a}_1 & \dots \\ \dots & \vec{b}_k & \dots \\ \dots & \vec{a}_n & \dots \end{pmatrix}$$

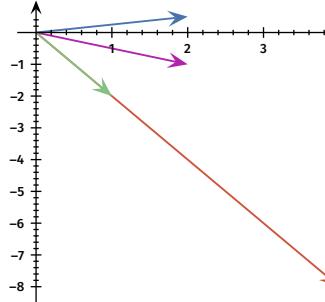
$\det M = 0$ wenn $M \geq 2$ nicht linear unabhängige Zeilen hat. Heisst: Transformierte Vektoren auch linear abhängig.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \det(M) = 0$$

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{c} = M\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{d} = M\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \vec{c}$ linear abhängig zu \vec{d}



Bsp:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 10 & 12 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} = 2 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 10 & 12 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 8 & 10 & 12 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 8 & 10 & 12 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 10 & 12 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 8 & 10 & 12 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} + 2 \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 8 & 10 & 12 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} + 3 \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 8 & 10 & 12 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Bsp:

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} = -2 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + 0 \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - 4 \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= -2(2-3) + 0 - 4(-1)$$

$$= 2 + 4 = 6$$

$$\text{Vorzeichen: } \begin{pmatrix} + & - & + & \dots \\ - & + & - & + \dots \\ + & - & + & \dots \\ - & + & - & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$\text{Vorgehen: } \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow -2 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow 0 \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow -4 \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Weitere Eigenschaften:

- Die Determinante wechselt beim Vertauschen von Zeilen ihr Vorzeichen
- Wenn wir zu einer Zeile einer Matrix ein Vielfaches einer anderen Zeile dazuzählen, ändert die Determinante ihren Wert nicht

$$\Rightarrow \det(M) \underset{\text{Gauss}}{=} (-) \det \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n$$

Weiteres:

$$\det(\lambda M) = \lambda^n \det(M), M \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$\det \begin{pmatrix} A & * \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det(A) \cdot \det(B)$$

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

$$\det(A^T) = \det(A)$$

$$\text{Volumen eines Spats} = \det \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix}$$

$$= \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

$$\text{Volumen} = \text{Grundfläche} \cdot \text{Höhe}$$

$$= |\vec{b} \times \vec{c}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos(\varphi)$$

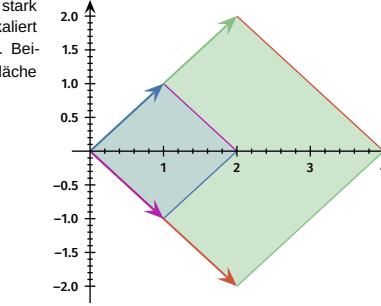
$$= |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|$$

Determinante im 2D-Raum sagt aus, wie stark eine Fläche auf dem Koordinatensystem skaliert wird sobald durch die Matrix transformiert. Beispiel: $\det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 4$ bedeutet, dass die Fläche vierfach wird.

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{c} = M\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{d} = M\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$



8.5.8. Eigenwerte

TODO: visualize

$$\text{Gegeben: } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

\vec{x} heisst Eigenvektor zum Eigenwert λ

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Gegeben: Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Ein Vektor $\vec{v} \neq \vec{0}$ heisst Eigenvektor zum Eigenwert λ , wenn $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ ist.

$$A\vec{v} - \lambda\vec{v} = 0$$

$$\Leftrightarrow (A - \lambda\mathbb{1})\vec{v} = 0$$

Wenn λ gegeben ist, ist das ein homogenes lineares Gleichungssystem in \vec{v} . Davon suchen wir nicht-triviale Lösungen ($\vec{v} \neq \vec{0}$).

λ heisst Eigenwert von $A \Leftrightarrow A - \lambda\mathbb{1}$ ist singulär $\Leftrightarrow \text{rang}(A - \lambda\mathbb{1}) < n \Leftrightarrow \det(A - \lambda\mathbb{1}) = 0$

Wenn $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, dann ist $\det(A - \lambda\mathbb{1})$ ein Polynom von Grad n . (Charakteristisches Polynom). Eigenwerte sind Nullstellen des charakteristischen Polynoms.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda\mathbb{1})$$

$$= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (1-\lambda)(4-\lambda) - (-2) \cdot 1$$

$$= \lambda^2 - 5\lambda + 4 + 2$$

$$= \lambda^2 - 5\lambda + 6$$

= Charakteristisches Polynom

Nullstelle des char. Polynoms

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{5 \pm 1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \lambda \in \{3, 2\}$$

Eigenwerte von A sind $\lambda = 2$ und $\lambda = 3$

Für diese Zahlen ist die Matrix $A - \lambda\mathbb{1}$ singulär, d.h. die Gleichung $(A - \lambda\mathbb{1})\vec{v} = \vec{0}$ hat nicht-triviale Lösungen. Diese heissen Eigenvektoren.

8.5.9. Eigenwert $\lambda = 2$

$$(A - 2 \cdot \mathbb{1})$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Matrizen haben Rang von 1

$$(A - 2\mathbb{1})\vec{v} = \vec{0}$$

$$\begin{array}{c|c|c} v_1 & v_2 & 1 \\ \hline -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow -v_1 + v_2 = 0$$

$$\Rightarrow v_1 = v_2$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu \\ \mu \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Für alle $\mu \neq 0$ ist \vec{v} ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda = 3$.

8.5.11. Diagonalisierbar

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heisst diagonalisierbar, wenn es eine invertierbare Matrix X gibt, so dass $X^{-1}AX = D$ (D ist eine Diagonalmatrix $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$)

Wenn A diagonalisierbar ist, dann sind die Spalten von X linear unabhängige Eigenvektoren, also eine Basis von \mathbb{R}^n , die nur aus Eigenvektoren von A besteht.

Das umgekehrte gilt auch. Das erlaubt uns, X zu konstruieren.

$$X^{-1}AX = D$$

$$\Leftrightarrow AX = XD$$

$$\Leftrightarrow AX = X \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow A \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \vec{v}_1 & \dots & \vec{v}_n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \vec{v}_1 & \dots & \vec{v}_n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ A\vec{v}_1 & \dots & A\vec{v}_n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \lambda_1\vec{v}_1 & \dots & \lambda_n\vec{v}_n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow A\vec{v}_1 = \lambda_1\vec{v}_1 \wedge A\vec{v}_2 = \lambda_2\vec{v}_2 \wedge \dots \wedge A\vec{v}_n = \lambda_n\vec{v}_n$$

8.5.12. Rechenregeln

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) = A \cdot B \cdot C$$

$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$$

$$C \cdot (A + B) = C \cdot A + C \cdot B$$

$$E \cdot A = A \cdot E = A \text{ für } A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$(A^T)^T = A$$

$$(A + B)^T = A^T + B^T$$

$$(\lambda A)^T = \lambda A^T$$

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

8.5.13. Alternative Berechnungsstrategie von Eigenwerten

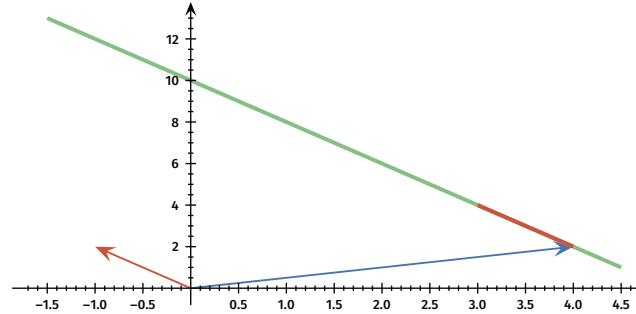
$$\text{Mean } m = \frac{1}{2} \operatorname{tr} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{a+d}{2} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$$

$$\text{Product } p = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc = \lambda_1 \lambda_2$$

$$\lambda_{1,2} = m \pm \sqrt{m^2 - p}$$

8.6. ANALYTISCHE GEOMETRIE
beste playlist

8.6.1. Geraden



8.6.1.1. Parameterform

$$g: \vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{p}\vec{x}, t \in \mathbb{R}$$

$$g_{bsp}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

8.6.1.2. Koordinatenform

$$g: ax + by + c = 0$$

$$g_{bsp}: 2x + y - 10 = 0$$

Aus Parameterform umwandeln:

$$\begin{aligned} x &= 4 - 1t \\ y &= 2 + 2t \\ t &= 4 - x \\ y &= 2 + 2(4 - x) = 10 - 2x \\ \Leftrightarrow 2x + y - 10 &= 0 \end{aligned}$$

8.6.1.3. Normalenform

$$g: \left(\vec{x} - \vec{p} \right) \cdot \vec{n} = 0$$

$$g_{bsp}: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Aus Koordinatenform umwandeln (\vec{p} bleibt gleich):

$$2x + y - 10 = 0 \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

8.6.2. Ebenen

8.6.2.1. Parameterform

$$E: \vec{x} = \vec{p} + s \cdot \vec{AB} + t \cdot \vec{AC}, s, t \in \mathbb{R}$$

$$E_{bsp}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

8.6.2.2. Normalenform

$$E: \left(\vec{x} - \vec{p} \right) \cdot \vec{n} = 0$$

$$E_{bsp}: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

Aus Parameterform umwandeln (\vec{p} bleibt gleich):

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

8.6.2.3. Koordinatenform

$$E: ax + by + cz + d = 0$$

$$E_{bsp}: x - 7y + 2z + 3 = 0$$

Aus Normalenform umwandeln (ausmultiplizieren):

$$\left(\begin{array}{c} x - 0 \\ y - 1 \\ z - 2 \end{array} \right) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 = x - 7y + 2z + 3$$

8.6.2.4. Hessesche Normalform

$$E: \vec{x} \cdot \vec{n}_0 - b_0 = 0$$

$$E_{bsp}: \vec{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{69}} \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{3}{\sqrt{69}} = 0$$

Aus Normalenform umwandeln:

$$\vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}, b_0 = \frac{b}{|\vec{n}|}, b = \vec{p} \cdot \vec{n}$$

$$b = 3, |\vec{n}| = \sqrt{69}, \vec{n}_0 = \frac{1}{\sqrt{69}} \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}, b_0 = \frac{3}{\sqrt{69}}$$

Abstand a von Punkt Q zur Ebene $E: \vec{x} \cdot \vec{n}_0 - b_0 = 0$

$$a = \vec{q} \cdot \vec{n}_0 - b_0$$

Abstand von Punkt $P(2, 8, 2)$ zur Ebene $E: 2x - y + 4z = 1$

$$\begin{aligned} \vec{n} &= \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \\ |\vec{n}| &= \sqrt{21} \\ \frac{2x - y + 4z - 1}{\sqrt{21}} &= \frac{2 \cdot 2 - 1 \cdot 8 + 4 \cdot 2 - 1}{\sqrt{21}} \\ &= \frac{3}{\sqrt{21}} \end{aligned}$$

9. VORGEHENSWEISE, UM

9.1. DIAGONALE UND FLÄCHE BERECHNEN

Gegeben: $A = (0; 1; 0), B = (2; 1; 0), C = (0; 0; 1), D = (1; 0; 0)$

$$\text{Diagonale } \vec{BD} = \vec{r}_D - \vec{r}_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Fläche } F = |(\vec{r}_B - \vec{r}_A) \times (\vec{r}_D - \vec{r}_A)| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right| = 2$$

9.2. ABBILDUNGSMATRIX BERECHNEN

Gegeben: $A = (1; -1), B = (1; 1), A' = (2; 1), B' = (0; 1)$

$$M_A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, M_B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, M_A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M = M_B \cdot M_A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Note: } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad - cb} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

9.3. NULLTEILER VON \mathbb{Z}_n FINDEN
Multiplikationsstabelle?Können nicht Teilerfremd zu n sein.9.4. ELEMENTE VON \mathbb{Z}_n^* FINDEN (MULT. INV. IN \mathbb{Z}_n)
Multiplikationsstabelle?9.5. $|\mathbb{Z}_n^*|$ BERECHNEN
 $|\mathbb{Z}_n^*| = \varphi(n)$ 9.6. LÖSUNGSMENGE GAUSS-TABLEAU MIT NULLZEILE
⇒ Unlösbar

1	0	2	3
0	1	1	0
0	0	0	4

$$x_1 = 3 - 2t, x_2 = -t, x_3 = t$$

$$\mathbb{L}(A, \vec{b}) = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$$

9.7. DISJUNKTIVE/KONJUNKTIVE NORMALFORM ANGEBEN

Wahrheitstafel. Für konjunktive Normalform zuerst disjunktive erstellen, danach negieren und umformen. Beispiel:

$$\begin{aligned} \neg R &= (A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \\ \Leftrightarrow R &= \neg(A \wedge B \wedge C) \wedge \neg(A \wedge \neg B \wedge C) \\ \Leftrightarrow R &= (\neg A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee B \vee \neg C) \end{aligned}$$

9.8. $x^y \bmod p$ BERECHNENKleiner Fermat: $x^{p-1} \equiv 1 \pmod p$, ggT(x, p) = 1, p ist PrimzahlSatz von Euler: $x^{\varphi(p)} \equiv 1 \pmod p$, ggT(x, p) = 19.9. ZAHL x IN \mathbb{Z}_n FINDEN, FÜR DIE y - x ≡ 1 MOD n GILT (MULT. INV.)

Falls ggT(y, n) ≠ 1 ⇒ gibt kein mult. Inv. Ansonsten: Euklidischer Algorithmus.

Beispiel: $x \in \mathbb{Z}_{32}, 21 \cdot x \equiv 1 \pmod{32}$

x	y	q	r	u	s	v	t
32	21	1	11	1	0	0	1
21	11	1	10		1	-1	
11	10	1	1		-1	2	
10	1	10	0		2	-3	

$$\Rightarrow x = -3 + 32 = 29$$

Beispiel: $x \in \mathbb{Z}_{32}, 22 \cdot x \equiv 1 \pmod{32}$

ggT(22, 32) = 2 ⇒ gibt kein mult. Inv.

9.10. AUS GERADEN G_1 UND G_2 FOLGENDES HERAUSFINDEN:Gegeben: $G_1 = (2; 3) \cdot \vec{x} - 1 = 0, G_2 = (3; 4) \cdot \vec{x} + 5 = 0, P = (1; 1)$ Welche Gerade liegt näher an Punkt P :

$$\text{Hessesche Normalenform} \quad \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{13}$$

$$G_1 = \frac{1}{\sqrt{13}} \cdot (2; 3) \cdot \vec{x} - \frac{1}{\sqrt{13}} = 0$$

$$\text{Abstand} \quad a_1 = \frac{1}{\sqrt{13}} \cdot (2; 3) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{13}} = \frac{4}{\sqrt{13}}$$

$$\text{Hessesche Normalenform} \quad \left| \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = 5$$

$$G_2 = \left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5} \right) \cdot \vec{x} + 1 = 0$$

$$\text{Abstand} \quad a_2 = \left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 = \frac{12}{5}$$

$$\frac{4}{\sqrt{13}} < \frac{12}{5} \Rightarrow G_1$$

Wo schneiden sich die Geraden: Koordinatengleichung

$$2s_x + 3s_y = 1$$

$$3s_x + 4s_y = -5$$

$$S = (-19; 13)$$

Für welche Gerade liegt P auf derselben Seite wie der Ursprung: Ursprung in HNF einsetzen

Abstand $b_1 = \frac{1}{\sqrt{13}} \cdot (2; 3) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{13}} = -\frac{1}{\sqrt{13}}$

$b_1 < 0 \wedge a_1 > 0 \Rightarrow$ verschiedene Seiten

Abstand $b_2 = \left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5} \right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 = 1$

$b_1 > 0 \wedge a_1 > 0 \Rightarrow$ dieselben Seiten

9.11. EBENEN

Gegeben: Punkte $A = (-1; 1; 4)$, $B = (-7; 3; 1)$, $C = (2; 1; 5)$

Ebene $E \in \mathbb{R}^3$ verläuft durch oben genannte Punkte. Gib sie in Parameterform unter Verwendung des Ortsvektors zum Punkt A als Stützvektor an:

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E : \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Hessesche Normalenform der Ebene E:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{n}| = 7, \vec{n}_0 = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} \\ -\frac{3}{7} \\ -\frac{6}{7} \end{pmatrix}, b_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \vec{n}_0 = -\frac{29}{7}$$

$$E : (\vec{x} - \vec{a}) \cdot \vec{n}_0 = 0 \Leftrightarrow \vec{x} \cdot \vec{n}_0 - b_0 = 0$$

Abstand des Punktes $Q = (10; 2; -1)$ von der Ebene E : $\begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \vec{n}_0 - b_0$

Für welchen Wert von z liegt $R = (-4; 1; z)$ auf der Ebene E : $\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ z \end{pmatrix} \cdot \vec{n}_0 - b_0 = 0$

9.12. RSA VERSCHLÜSSELUNG

Gegeben: $n = 119$

Zahlen angeben, die als Schlüssel infrage kommen: Teilerfremd zu $\varphi(n)$

Zum Schlüssel a den Schlüssel b berechnen: Euklidscher Algorithmus mit $\varphi(n), a$

Mit dem Schlüssel a die Zahl x ent- / verschlüsseln: $x^a \bmod n$

9.13. ALLE ELEMENTE VON $R = \{(a, b) \in M \times M \mid a \cdot b \equiv 1 \pmod{x}\}$

9.14. ALLE ELEMENTE VON $R = \{(a, b) \in \mathbb{Z}_x^* \times \mathbb{Z}_x^* \mid a \cdot b \equiv y \pmod{x}\}$

Falls y teilerfremd zu x : Multiplikationstabelle mit Fremdelementen zu x erstellen.

.	1	5	7	11
1	1	5	7	11
5	5	1	11	7
7	7	11	1	5
11	11	7	5	1

Beispiel: $R = \{(a, b) \in \mathbb{Z}_{12}^* \times \mathbb{Z}_{12}^* \mid a \cdot b \equiv 7 \pmod{12}\}$

$$= \{(1, 7), (5, 11), (7, 1), (11, 5)\}$$

9.15. LÖSUNG VON $M \cdot \vec{x} = \vec{y}$ ZU \vec{x}

$$\vec{x} = M^{-1} \cdot \vec{y}$$

9.16. EIGENWERTE DER MATRIX M BERECHNEN

9.17. EIGENVEKTOREN DER MATRIX M BERECHNEN