Georgiy Shevoroshkin 17.01.2026

Analysis für Informatiker | An1I

Zusammenfassung

INHALTSVERZEICHNIS

1. FUNKTIONEN

1.1. GLOSSAR

Begriff	*Bedeutung*
Definitionsmenge	Mögliche Funktionsinputs Notation definitionsmenge der Funktion f: D_f
Zielmenge	Mögliche Funktionswerte
Definitionsbereich	Alle Funktionsinputs
Wertebereich	Alle Funktionswerte
Nullstelle einer Funktion	Argument, welches den Funktionswert 0 hat
Bild einer Funktion	Alle möglichen Funktionswerte einer Funktion
Graph	Menge aller Punkte (Tupel) einer Funktion in der Form (Argument, Funktionswert) $\text{Graph}_f = (x, y) \mid y = f(x)$
Polynom	$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ Koeffizienten: $a_n, \ldots, a_0$ Grad des Polynoms: n

1.1.1. Stetige Funktion

Funktion, deren Graph keine Sprünge oder Unterbrechungen aufweist

1.1.2. Stetig fortsetzbare Funktion

Funktion, die an einem bestimmten Punkt nicht definiert ist, aber erweitert werden kann, sodass die erweiterte Funktion stetig bleibt

1.1.3. Glatte Funktion

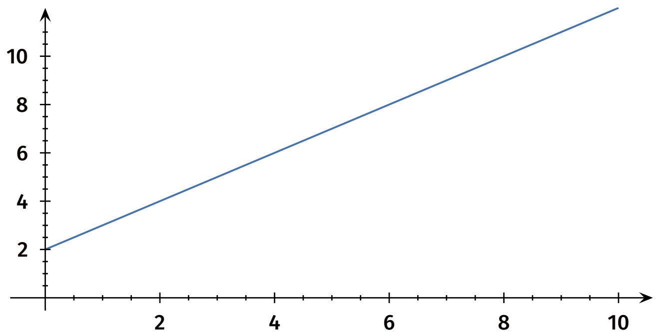
Funktion, die unendlich oft differenzierbar ist

1.1.4. Streng wachsende Funktion

$x < \tilde{x} \rightarrow f(x) < f(\tilde{x})$

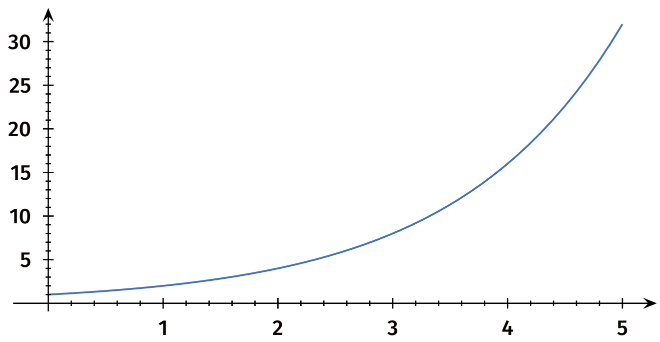
Bsp:

$f(x) = x + 2$



$f(x) = a^x, a > 1$

(Diagramm: $f(x) = 2^x$)

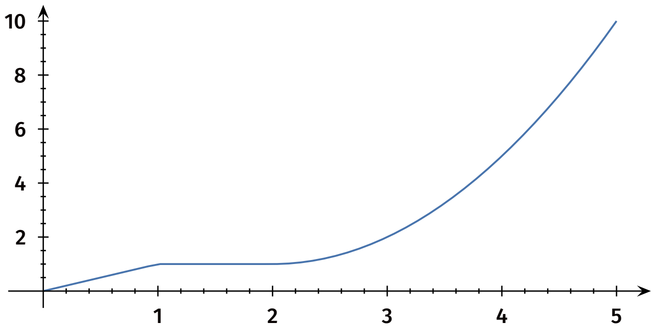


1.1.5. Monoton wachsende Funktion

$x < \tilde{x} \to f(x) \leq f(\tilde{x})$

Bsp:

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1 \\ 1, & 1 < x \leq 2 \\ (x-2)^2 + 1, & x > 2 \end{cases}$$

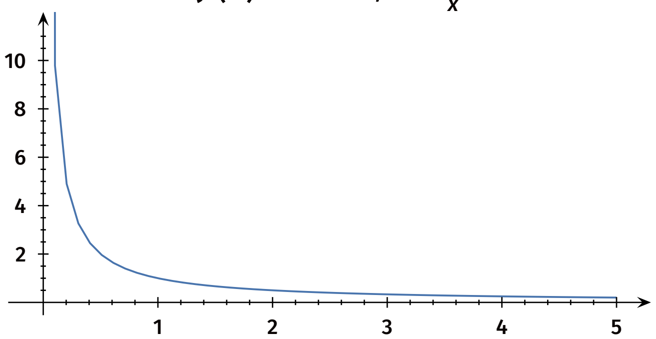


1.1.6. Streng fallende Funktion

$x < \tilde{x} \to f(x) > f(\tilde{x})$

Bsp:

$$f(x) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$$

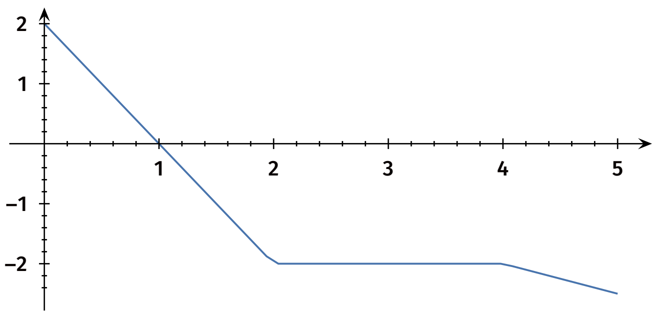


1.1.7. Monoton fallende Funktion

$x < \tilde{x} \to f(x) \geq f(\tilde{x})$

Bsp:

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 2, & x \leq 2 \\ -2 & ,1 < x \leq 4 \\ -\frac{x}{2} & , x > 4 \end{cases}$$



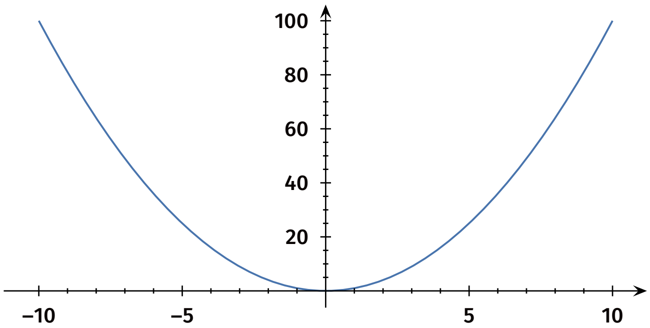
1.1.8. Gerade Funktion

$\forall x \in D_f : f(-x) = f(x)$

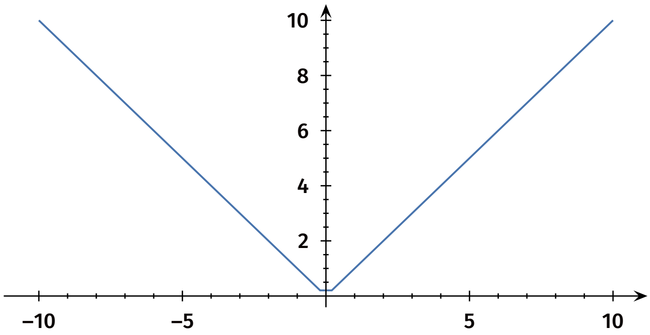
Bsp:

$f(x) = x^n, n$ gerade

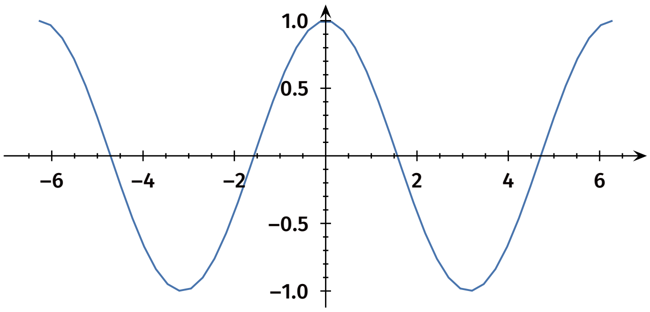
Diagramm: $f(x) = x^2$



$f(x) = |x|$



$f(x) = \cos(x)$



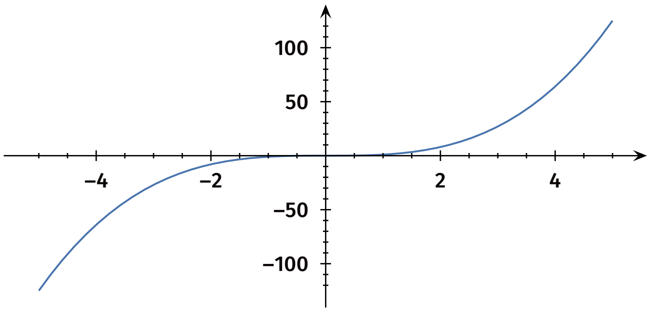
1.1.9. Ungerade Funktion

$\forall x \in D_f : f(-x) = -f(x)$

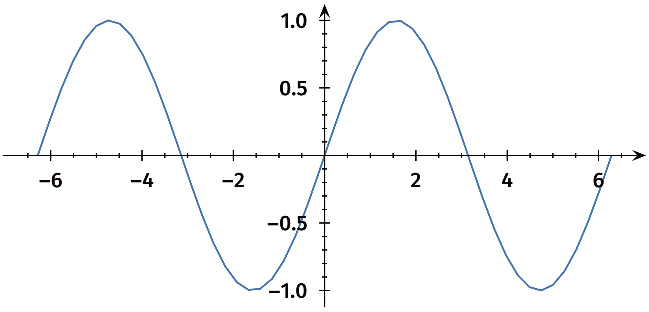
Bsp:

$f(x) = x^n, n$ ungerade

Diagramm: $f(x) = x^3$



$f(x) = \sin(x)$



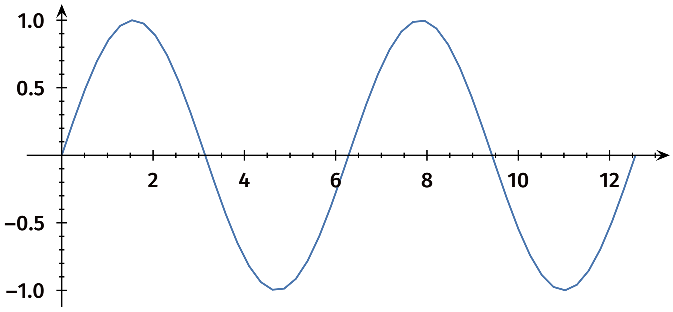
1.1.10. Periodische Funktion

$\forall x \in D_f : f(x + p) = f(x)$

- Mit der Periode ***p***
- Die kleinste positive Periode heisst ***primitive Periode***

Bsp:

$$f(x) = \sin(x)$$
$$p = 2\pi$$

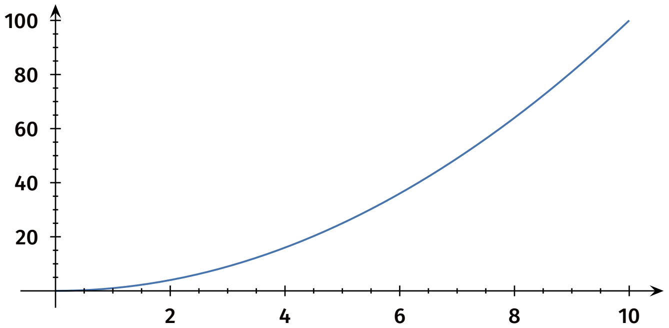


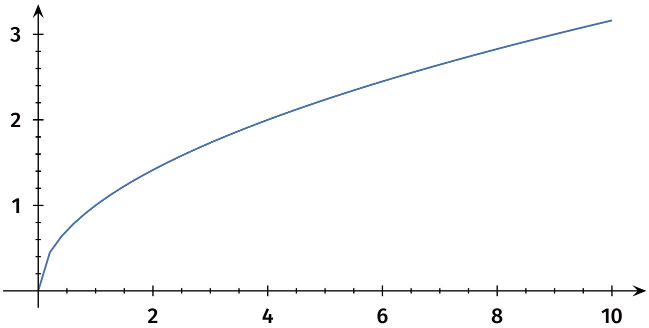
1.1.11. Umkehrfunktion

$f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$

Bsp:

$$f(x) = x^2 \qquad f^{-1}(x) = \sqrt{x}$$





1.2. ANATOMIE EINER FUNKTION

$$\underbrace{f}_{\text{Funktionsname}} : \begin{cases} \underbrace{\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}}_{\text{Definitionsmenge}} \to \underbrace{\mathbb{R}^+}_{\text{Zielmenge}} \\ \underbrace{x}_{\text{Input / Argument}} \mapsto \underbrace{x + 4}_{\text{Element des Wertebereichs (Output)}} \end{cases}$$

1.3. NULLSTELLENFORM

Quadratisch

- $f(x) = a^2x + bx + c$
- $f(x) = a(x - x_0)(x - x_1)$

Qubisch

- $f(x) = a^3x + b^2x + cx + d$
- $f(x) = a(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$

1.4. SCHEITELFORM

$f(x) = a(x - x_0)^2 + y_0$ -> x_0 und y_0 sind der scheitelpunkt

1.5. VERKNÜPFUNG VON FUNKTIONEN

$$g(A) = B, f(B) = C \Leftrightarrow f(g(A)) = C \Leftrightarrow (f \circ g)(A) = C$$

$$f(g(x)) \coloneqq (f \circ g)(x)$$

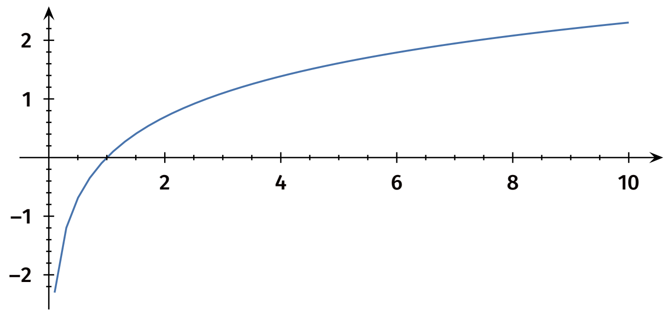
Fast immer ist $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$. Es gibt ein Fall, wo $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ gilt, nämlich bei Umkehrfunktionen. $(f^{-1} \circ f)(x) = (f \circ f^{-1})(x)$

1.5.1. Beispiel

$$g(x) = x^2 + 1$$
$$f(x) = \sqrt{x}$$
$$f(g(4)) = \sqrt{4^2 + 1} = \sqrt{17}$$
$$g(f(4)) = \sqrt{4}^2 + 1 = 5$$

2. LOGARITHMEN

$$f(x) = \ln(x)$$



Term	*Lösung*	*Term*	*Lösung*
$a^{\log_a(x)}$	x	$\log_a(1)$	0 weil a hoch was ist 1
$\log_a(a)$	1	$\log_a\left(\frac{x}{y}\right)$	$\log_a(x) - \log_a(y)$
$\log_a(x * y)$	$\log_a(x) + \log_a(y)$	$\log_a(x^p)$	$\log_a(\lvert x \rvert) * p, p\%2 = 0$
$\log_a\left(\sqrt[n]{x}\right)$	$\log_a\left(x^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n}\log_a(x)$	ln	$\log_e$

3. SPLINES

Spline 1. Grades = lineare Splines n-te Splines = Splines aus Polynomen maximal n-ten Grades

3.1. LINEARE INTERPOLATION

$$P_{i(x)} = y_i + \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}\right)(x - x_i)$$

3.2. QUADRATISCHE INTERPOLATION

$$P_{i(x)} = a_i x^2 + b_i x + c_i$$

4. MISC

4.1. UNGLEICHUNGEN

Wenn man mit negativen Termen multipliziert oder eine fallende Funktion anwendet, muss das Ungleichzeichen geändert werden.

4.2. MITTERNACHTSFORMEL

$$an^2 + bn + c = 0 \Rightarrow u_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

5. TRIGONOMETRIE

x	0	$30 = \frac{\pi}{6}$	$45 = \frac{\pi}{4}$	$60 = \frac{\pi}{3}$	$90 = \frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	0.5	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0.5	0

$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

Trigonometrischer Satz des Pythagoras: $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

5.1. UMKEHRFUNKTIONEN

$$\arccos : \begin{cases} [-1;1] \to [0;\pi] \\ x \quad \mapsto \text{Lösung } y \in [0;\pi] \text{ der Gleichung } \cos(y) = x \end{cases}$$

$$\arcsin : \begin{cases} [-1;1] \to \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \\ x \quad \mapsto \text{Lösung } y \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \text{ der Gleichung } \sin(y) = x \end{cases}$$

$$\arctan : \begin{cases} \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right) \\ x \mapsto \text{Lösung } y \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right) \text{ der Gleichung } \tan(y) = x \end{cases}$$

6. ABLEITUNGEN

Ableitung	*Bedeutung*
f'	Steigung
$f'(x) > 0$	Funktion steigt
$f'(x) < 0$	Funktion fällt
f''	Form der Parabel
$f''(x) > 0$	Nach oben geöffnet
$f'(x) = 0 \land f''(x) > 0$	Lokales Minimum
$f''(x) < 0$	nach unten geöffnet
$f'(x) = 0 \land f''(x) < 0$	Lokales Maximum
$f'(x) = 0 \land f''(x) = 0 \land f'''(x) \neq 0$	Lokaler Sattelpunkt
f'''	Änderung der Form / Wendepunkt-Richtung bei $f''(x) = 0$
$f''(x) = 0 \land f'''(x) \neq 0$	Wendepunkt
$f''(x) = 0 \land f'''(x) > 0$	Krümmung ändert sich von oben nach unten
$f''(x) = 0 \land f'''(x) < 0$	Krümmung ändert sich von unten nach oben

Begriff	*Bedeutung*
Differenzenquotient	$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$
Differentialquotient	$\lim(x \to x_0)\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

6.1. ABLEITUNGSREGELN

Term	Ableitung	Term	Ableitung
1	0	x	1
x^2	$2x$	x^n	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
e^x	e^x	e^{-x}	$-e^{-x}$
a^x	$\ln(a) \cdot a^x$ für $a > 0, a \neq 1$	$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$ für $x > 0$
$\ln(y \cdot x)$	$\frac{1}{x}$ für $x > 0$	$\log_b(x)$	$\frac{1}{\ln(b) \cdot x}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\sin(2x)$	$2\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\cos(ax)$	$-a\sin(x)$
$\tan(x)$	$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$

6.2. FUNKTIONEN

Begriff	Bedeutung
Addition	$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$ $(\alpha + f(x))' = \alpha \cdot f'(x)$
Produkteregel	$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
Mit 3	$(f \cdot g \cdot h)' = f' \cdot g \cdot h + f \cdot g' \cdot h + f \cdot g \cdot h'$
Kettenregel	$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
Quotientenregel	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

6.3. TANGENTE BERECHNEN

$$m(x - x_0) + y_0 = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

6.4. APPROXIMATION DURCH LINEARISIERUNG (NEWTONVERFAHREN)

```
for i in range(1,max_iter):
  x_neu = x_alt - f(x_alt) / f_prime(x_alt)
  x_alt = x_neu
```