

Diskrete Mathematik | DMI

Zusammenfassung

INHALTSVERZEICHNIS

| | |
|---|----------|
| 1. Aussagenlogik | 3 |
| 1.1. Glossar | 3 |
| 1.2. Formeln | 3 |
| 1.3. Rechenregeln | 4 |
| 2. Prädikatenlogik | 4 |
| 2.1. Glossar | 4 |
| 3. Beweisen | 4 |
| 3.1. Induktion | 4 |
| 3.1.1. Techniken | 5 |
| 4. Direkte, iterative und rekursive Berechnungen | 5 |
| 4.1. Glossar | 5 |
| 5. Mengen | 5 |
| 5.1. Glossar | 5 |
| 5.2. Rechenregeln | 5 |
| 6. Formeln, Abbildungen, Relationen | 6 |
| 6.1. Glossar | 6 |
| 7. Modulo-Rechnen | 6 |
| 7.1. Glossar | 7 |
| 7.2. Rechenregeln | 7 |
| 7.3. Primfaktorenzerlegung | 7 |
| 7.4. Euklidischer Algorithmus | 7 |
| 7.4.1. Beispiel | 7 |
| 7.5. Erweiterter Euklidischer Algorithmus | 8 |
| 7.5.1. Beispiel | 8 |
| 7.6. Kleiner Fermat | 8 |
| 7.7. Satz von Euler | 8 |
| 7.7.1. Euler'sche φ -Funktion (Totient) | 8 |
| 7.8. RSA Verschlüsselung | 9 |
| 8. Lineare Algebra | 9 |
| 8.1. Glossar | 9 |
| 8.2. Pivot-Gleichung | 10 |
| 8.2.1. Glossar | 10 |
| 8.3. Gauss-Tableau | 10 |
| 8.4. Vektoren | 11 |
| 8.4.1. Glossar | 11 |
| 8.4.2. Vektorenrechnen | 12 |
| 8.4.3. Rechenregeln | 12 |
| 8.4.4. Kreuzprodukt | 12 |
| 8.4.5. Vektorraum | 13 |
| 8.4.6. Lineare Abbildung | 13 |

| | |
|---|----|
| 8.5. Matrizen | 14 |
| 8.5.1. Glossar | 14 |
| 8.5.2. Definition | 14 |
| 8.5.3. Matrizen als Vektoren interpretieren | 15 |
| 8.5.4. Matrizen transponieren | 15 |
| 8.5.5. Matrizen invertieren | 15 |
| 8.5.6. Matrixmultiplikation | 16 |
| 8.5.7. Determinante | 16 |
| 8.5.8. Eigenwerte | 18 |
| 8.5.9. Eigenwert $\lambda = 2$ | 19 |
| 8.5.10. Eigenwert $\lambda = 3$ | 19 |
| 8.5.11. Diagonalisierbar | 19 |
| 8.5.12. Rechenregeln | 20 |
| 8.6. Analytische Geometrie | 20 |
| 8.6.1. Geraden | 20 |
| 8.6.2. Ebenen | 20 |

1. AUSSAGENLOGIK

1.1. GLOSSAR

| <i>Begriff</i> | <i>Bedeutung</i> |
|------------------------------|---|
| Aussage | Feststellender Satz, dem eindeutig «wahr» oder «falsch» zugeordnet werden kann. Symbole wie A, B, C... werden dafür verwendet |
| Aussagenlogische Form | Kombination von Aussagen, verknüpft durch Junktoren |
| Aussageform | Aussagen verknüpft mit Variablen |
| Normalform | Standardisierte Aussagenlogische Formen (Formeln) |
| Negationsnormalform | \neg steht ausschliesslich direkt vor Aussagen oder Konstanten |
| Verallgemeinerte Disjunktion | <ul style="list-style-type: none"> – Einzelne Aussage oder Negation – wahr oder falsch – Disjunktion $A \vee B$, falls A und B selbst verallgemeinerte Disjunktionen sind |
| Verallgemeinerte Konjunktion | <ul style="list-style-type: none"> – Einzelne Aussage oder Negation – wahr oder falsch – Konjunktion $A \wedge B$, falls A und B selbst verallgemeinerte Konjunktionen sind |
| Disjunktive Normalform | Disjunktion von (oder eine einzelne) verallgemeinerten Konjunktionen |
| Konjunktive Normalform | Konjunktion von (oder eine einzelne) verallgemeinerten Disjunktionen |
| Kontradiktion | Immer falsch |
| Tautologie | Immer wahr |
| Junktoren (/Konnektoren) | \neg Negation \wedge Konjunktion \vee Disjunktion (einschliessliches oder!) \Rightarrow Implikation \Leftrightarrow Äquivalenz |
| Abtrennungsregel | $(A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$ |
| Bindungsstärke | \neg vor \wedge , \vee vor \Rightarrow , \Leftrightarrow |

1.2. FORMELN

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$$

$$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$$

$$\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B$$

$$A \vee (\neg A \wedge B) \Leftrightarrow A \vee B$$

$$\text{Abtrennungsregel: } A \wedge (A \Rightarrow B) \Rightarrow B$$

1.3. RECHENREGELN

| <i>Begriff</i> | <i>Bedeutung</i> |
|-------------------|--|
| Kommutativität | $(A \wedge B) \Leftrightarrow (B \wedge A)$ $(A \vee B) \Leftrightarrow (B \vee A)$ |
| Assoziativität | $A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$ $A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow (A \vee B) \vee C$ |
| Distributivität | $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ |
| Absorption | $A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$ $A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$ |
| Idempotenz | $A \vee A = A$ $A \wedge A = A$ |
| Doppelte Negation | $\neg(\neg A) \Leftrightarrow \neg\neg A \Leftrightarrow A$ |
| Konstanten | $W = \text{wahr}$ $F = \text{falsch}$ |
| ??? | $(A \Rightarrow B \Rightarrow C) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)$ |
| de Morgan | $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$ $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$ |

2. PRÄDIKATENLOGIK**2.1. GLOSSAR**

| <i>Begriff</i> | <i>Bedeutung</i> |
|----------------|--|
| Subjekt | – «Konkretes Ding» / Stellvertreter einer Variable |
| Prädikat | – «Eigenschaft», zB «ist eine Primzahl» – Prädikate werden oft wie Funktionen geschrieben. Ist P ein Prädikat, dann bedeutet $P(x)$, dass x das Prädikat erfüllt. $P(x)$ ist eine Aussageform. |
| Quantor | – \forall Allquantor (Für alle) – \exists Existenzquantor (Es existiert) |

3. BEWEISEN**3.1. INDUKTION**

$$A(1) \wedge (A(n) \Rightarrow A(n+1)) \Rightarrow A(m), m \in \mathbb{N}$$

Beispiel: $2 \mid (6^n)$

- 1) Verankerung: $n = 0$
 - $2 \mid (6^0)$
- 2) Induktionsschritt $n \rightarrow n+1$
 - $2 \mid (6^{n+1})$
 - a) Induktionsannahme: $2 \mid (6^n)$
 - b) Behauptung: $2 \mid (6^{n+1})$
 - c) Beweis: Verwendung der Annahme, um Richtigkeit der Behauptung zu zeigen

3.1.1. Techniken

- 1) Direkter Beweis $f(n) = f_1(n) = f_2(n) = \dots = f_m(n) = g(n)$
- 2) Differenz gleich Null $f(n) - g(n) = 0 \Rightarrow f(n) = g(n)$
- 3) Äquivalenzumformung
- 4) Dritte Grösse (vereinfachen) $g(n) = h(n) = f(n)$

4. DIREKTE, ITERATIVE UND REKURSIVE BERECHNUNGEN**4.1. GLOSSAR**

| <i>Begriff</i> | <i>Bedeutung</i> |
|----------------|--|
| Folge | Nummerierte Liste von Objekten (Folgegliedern) |
| Reihe | Summe von Folgegliedern einer Zahlenfolge |

5. MENGEN**5.1. GLOSSAR**

| <i>Begriff</i> | <i>Bedeutung</i> |
|----------------------|--|
| Aufzählend | $\{1, 2, 3\}$ |
| Beschreibend | – $\{x \in \mathbb{N}^+ \mid x < 4\}$ |
| Mächtigkeit | – Anzahl Elemente einer Menge – $ M $ |
| Potenzmenge | – Menge aller Teilmengen einer Menge – $P(M)$ – $ P(M) = 2^{ M }$ |
| Teilermenge | – $T(n) =$ Menge der Teiler der Zahl n |
| Kartesisches Produkt | – $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$ |

5.2. RECHENREGELN

Für die Mengen A und B in der Obermenge M gelten die folgenden Aussagen:

$$\begin{aligned} \overline{\overline{A}} &= A \\ A \cap \overline{A} &= \emptyset \\ A \cup \overline{A} &= M \\ \overline{A \cap B} &= \overline{A} \cup \overline{B} \\ \overline{A \cup B} &= \overline{A} \cap \overline{B} \end{aligned}$$

6. FORMELN, ABBILDUNGEN, RELATIONEN

6.1. GLOSSAR

| Begriff | Bedeutung |
|------------------------|---|
| Funktion/Abbildung | <ul style="list-style-type: none"> – Zuordnung, die jedem Element der Definitionsmenge D genau ein Element einer Zielmenge Z zuordnet. – Injektive Relation – $f : D \rightarrow Z$ – Abbildungen mit mehreren Argumenten: $f : A \times B \rightarrow Z, f(a, b) = y$ |
| Graph | <ul style="list-style-type: none"> – Menge von Paaren $(x, f(x))$ – $G \in D \times Z$ |
| Relation | <ul style="list-style-type: none"> – Teilmenge des Kartesischen Produktes mehrerer Mengen – $A = \prod_{i=1}^n A_i, A_i = n_i \Rightarrow A = \prod_{i=1}^n n_i$ – Kleiner-Relation: $R_{<} = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B, a < b\}$ – Gleich-Relation: $R_{=} = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B, a = b\}$ – Kleiner-Gleich-Relation: $R_{\leq} = R_{=} \cup R_{<} = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B, a \leq b\}$ |
| Surjektiv | – Alle Elemente der Definitions- und Zielmenge sind «verknüpft» / jedes Element der Bildmenge kommt als Bild vor |
| Injektiv | <ul style="list-style-type: none"> – Alle Inputs haben eindeutige Outputs – $a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$ |
| Bijektiv | – Surjektiv und Injektiv |
| Reflexiv | <ul style="list-style-type: none"> – Alle Elemente von A stehen zu sich selbst in Beziehung – $a \in A \Rightarrow (a, a) \in R$ – $A \Leftrightarrow A$ |
| Symmetrisch | <ul style="list-style-type: none"> – $(a, b) \in R \wedge (b, a) \in R$ – $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow A)$ |
| Transitiv | <ul style="list-style-type: none"> – $(a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$ – $(A \Leftrightarrow B) \wedge (B \Leftrightarrow C) \Rightarrow (A \Leftrightarrow C)$ |
| Äquivalenzrelation | <ul style="list-style-type: none"> – reflexiv, symmetrisch und transitiv – $\Leftrightarrow, =$ |
| Irreflexiv | – $a \in A \Rightarrow \neg(a, a) \in R$ |
| Asymmetrisch | – $(a, b) \in R \Rightarrow \neg(b, a) \in R$ |
| Antisymmetrisch | – $((a, b) \in R) \wedge ((b, a) \in R) \Rightarrow a = b$ |
| Ordnungsrelation | <ul style="list-style-type: none"> – reflexiv, antisymmetrisch und transitiv – \leq |
| Symmetrische Differenz | <ul style="list-style-type: none"> – $A \Delta B = \{x \in G \mid (x \in A \cup B) \wedge \neg(x \in A \cap B)\}$ – $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ – $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$ |

7. MODULO-RECHNEN

Die Modulo-Relation ist eine **Äquivalenzrelation** auf \mathbb{Z} .

7.1. GLOSSAR

| Begriff | Bedeutung |
|--------------------------|--|
| Teiler-Relation | <ul style="list-style-type: none"> Für $a, b \in \mathbb{Z}$ ist die Teiler-Relation $b \mid a \Leftrightarrow T(b, a) \Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{Z} : bq = a$ $b \mid a \Leftrightarrow -b \mid a$ $b \mid a \Leftrightarrow b \mid -a$ Ordnungsrelation auf \mathbb{N} |
| Modulo-Relation | Für $a, q, r \in \mathbb{Z}$ ist die Modulo-Relation $R_q(a, r) \Leftrightarrow q \mid a - r \Leftrightarrow a \equiv r \pmod{q}$ |
| \sim | <ul style="list-style-type: none"> «relates to» $a \sim b \Leftrightarrow (a, b) \in R$ |
| Quotient, Rest | <p>Zu jeder Zahl $a \in \mathbb{Z}$ und jeder Zahl $b \in \mathbb{Z}$ gibt es eindeutig bestimmte Zahlen $q, r \in \mathbb{Z}$ mit $a = q \cdot b + r, 0 \leq r < b$</p> <p>Bsp: $7 = 2 \cdot 3 + 1$</p> <p>q heisst Quotient</p> <p>r heisst Rest</p> |
| Restklassen | <ul style="list-style-type: none"> $[b]_q = \{a \in \mathbb{Z} \mid a \equiv b \pmod{q}, q > 0\}$ $\mathbb{Z}_q = \{[0]_q, [1]_q, [2]_q, \dots, [q-1]_q\} = \underbrace{\{0, 1, 2, 3, \dots, q-1\}}_{\text{Vereinfachung}}$ |
| Multiplikatives Inverses | Für $a \in \mathbb{Z}_q$ ist $b \in \mathbb{Z}_q$ das multiplikative inverse von a , wenn $a \cdot b \equiv 1 \pmod{q}$ |
| Nullteiler | Wenn für $a, b \in \mathbb{Z}_q : ab \equiv 0 \pmod{q}$ und $a \not\equiv 0 \pmod{q} \wedge b \not\equiv 0 \pmod{q}$, heissen a, b Nullteiler |

7.2. RECHENREGELN

- $(a + b) \pmod{n} = ((a \pmod{n}) + (b \pmod{n})) \pmod{n}$
- $(a - b) \pmod{n} = ((a \pmod{n}) - (b \pmod{n})) \pmod{n}$
- $(a \cdot b) \pmod{n} = ((a \pmod{n}) \cdot b \pmod{n}) \pmod{n}$
- $a^d \pmod{n} = (a^{d-x} \cdot a^x) \pmod{n} = ((a^{d-x} \pmod{n}) \cdot (a^x \pmod{n})) \pmod{n}$

7.3. PRIMFAKTORENZERLEGUNG

| Begriff | Bedeutung |
|--------------------|---|
| $\text{ggT}(a, b)$ | $\max\{d \in \mathbb{N} \mid d \mid a \wedge d \mid b\}$ |
| $\text{kgV}(a, b)$ | <ul style="list-style-type: none"> $\min\{m \in \mathbb{N} \mid a \mid m \wedge b \mid m\}$ $\frac{ab}{\text{ggT}(a, b)}$ |
| Teilerfremd | <ul style="list-style-type: none"> Zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$ heissen Teilerfremd, wenn $\text{ggT}(a, b) = 1$ Sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl und $q \in \mathbb{N}, q < p, q \neq 0$ dann ist $\text{ggT}(p, q) = 1$ |

7.4. EUKLIDISCHER ALGORITHMUS

Seien $a, b \in \mathbb{N}, a \neq b, a \neq 0, b \neq 0$

Initialisierung: Setze $x := a, y := b$ und $q := x, r := x - q \cdot y$ (d.h. bestimme q und r so, dass $x = q \cdot y + r$ ist)

Wiederhole bis $r = 0$ ist

Ergebnis: $y = \text{ggT}(a, b)$

7.4.1. Beispiel

$\text{ggT}(122, 72), a = 122, b = 72$

– Init: $x_0 = a = 122, y_0 = b = 72$

– Iteration:

| | $x_i = y_{i-1}$ | $y_i = r_{i-1}$ | $q_i = x_i \text{ div } y_i$ | $r_i = x_i \bmod y_i = x_i - q_i \cdot y_i$ |
|---------|-----------------|---------------------------|------------------------------|---|
| $i = 0$ | 122 | 72 | 1 | 50 |
| $i = 1$ | 72 | 50 | 1 | 22 Muster: $r_{i+1} < r_i$ |
| $i = 2$ | 50 | 22 | 2 | 6 |
| $i = 3$ | 22 | 6 | 3 | 4 |
| $i = 4$ | 6 | 4 | 1 | 2 |
| $i = 5$ | 4 | $2 = \text{ggT}(122, 72)$ | 2 | 0 (immer 0 am Schluss) |

7.5. ERWEITERTER EUKLIDISCHER ALGORITHMUS

Seien $a, b \in \mathbb{N}, a \neq b, a \neq 0, b \neq 0$

Initialisierung: Setze $x := a, y := b, q := x \div y, r := x - q \cdot y, (u, s, v, t) = (1, 0, 0, 1)$ (d.h. bestimme q und r so, dass $x = q \cdot y + r$ ist)

Wiederhole bis $r = 0$ ist

Ergebnis: $y = \text{ggT}(a, b) = s \cdot a + t \cdot b$

Wenn $\text{ggT}(a, b) = 1$ ist, dann folgt: $t \cdot v \equiv 1 \bmod a$

7.5.1. Beispiel

$\text{ggT}(99, 79)$

| i | $x = y_{-1}$ | $y = r_{-1}$ | $q = x \div y$ | $r = x_i - q_i \cdot y_i$ | $u = s_{-1}$ | $s = u_{-1} - q_{-1} \cdot s_{-1}$ | $v = t_{-1}$ | $t = v_{-1} - q_{-1} \cdot t_{-1}$ |
|---------|--------------|--------------|----------------|---------------------------|--------------|------------------------------------|--------------|------------------------------------|
| $i = 0$ | 99 | 79 | 1 | 20 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| $i = 1$ | 79 | 20 | 3 | 19 | 0 | 1 | 1 | -1 |
| $i = 2$ | 20 | 19 | 1 | 1 | 1 | -3 | -1 | 4 |
| $i = 3$ | 19 | 1 | 19 | 0 | -3 | 4 | 4 | -5 |

Daraus folgend:

- $\text{ggT}(99, 79) + 1 + 4 \cdot 99 + (-5) \cdot 79 \Leftrightarrow 396 - 395 = 1$
- -5 ist mult. Inv. von 79 in \mathbb{Z}_{99}
- 4 ist mult. Inv. von 99 in \mathbb{Z}_{79}

7.6. KLEINER FERMAT

Sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl und $x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ mit $\text{ggT}(x, p) = 1$

Dann ist: $x^{p-1} \equiv 1 \bmod p$

Daraus folgend:

$$\begin{aligned}
 x^{p-1} &\equiv 1 \bmod p & | \quad ()^n \\
 \Leftrightarrow x^{n(p-1)} &\equiv 1 \bmod p & | \cdot x \\
 \Leftrightarrow x^{1+n(p-1)} &\equiv x \bmod p \\
 \Leftrightarrow x^{1 \bmod (p-1)} &\equiv x \bmod p
 \end{aligned}$$

7.7. SATZ VON EULER

Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $z \in \mathbb{Z}$ mit $\text{ggT}(z, n) = 1$. Dann ist $z^{\varphi(n)} \equiv 1 \bmod n$.

7.7.1. Euler'sche φ -Funktion (Totient)

Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $\mathbb{Z}_n^* = \{x \in \mathbb{Z}_n \mid x \text{ hat ein multiplikatives Inverses in } \mathbb{Z}_n\}$. Dann heisst $\varphi(n)$:

$$\begin{aligned}
 \varphi(n) &= \text{Anz. Elemente in } \mathbb{Z}_n \text{ mit mult. Inversen} \\
 &= \text{Anz. Zahlen } 1 \leq q \leq n \text{ mit } \text{ggT}(q, n) = 1 \\
 &= |\mathbb{Z}_n^*|
 \end{aligned}$$

Falls p Primzahl ist, dann ist $\varphi(p) = p - 1$

7.7.1.1. Rechenregeln

- 1) Sei $n \in \mathbb{N}$ eine Primzahl, dann $\varphi(n) = n - 1$
- 2) Sei $n \in \mathbb{N}$ eine Primzahl und $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, dann $\varphi(n^p) = n^{p-1} \cdot (n - 1)$
- 3) Seien $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $\text{ggT}(m, n) = 1$, dann $\varphi(n \cdot m) = \varphi(n) \cdot \varphi(m)$

7.8. RSA VERSCHLÜSSELUNG

- 1) Wähle 2 Primzahlen p, q
- 2) Berechne $n = p \cdot q$
- 3) Berechne $\varphi(n) = (p - 1)(q - 1)$
- 4) Wähle a, b so, dass $a \cdot b \equiv 1 \pmod{\varphi(n)}$
- 5) Vergesse $p, q, \varphi(p \cdot q)$. Brauchen wir nicht und riskieren nur, dass uns jemand hackt

Public key ist nun n, b , Private key ist n, a

Verschlüsseln: $c^a \pmod n$

Entschlüsseln: $z^b \pmod n \Leftrightarrow c^{a^b} \pmod n$

Sidenote: Fürs Alphabet muss n grösser sein als 26

8. LINEARE ALGEBRA

[3b1b <3](#)

8.1. GLOSSAR

| Begriff | Bedeutung |
|---------------------------------|--|
| Lineares Gleichungssystem (LGS) | |
| Homogenes LGS | $M \cdot \vec{x} = \vec{0}$ |
| Inhomogenes LGS | $M \cdot \vec{x} = \vec{b}$ |
| Lineare Abbildung | $L : \begin{cases} \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \\ \vec{x} \mapsto M\vec{x} \end{cases}$ $\text{kern}(L) = \{\vec{0}\} \Leftrightarrow L \text{ ist injektiv}$ |
| Kern | Lösungsmenge des Homogenen LGS = $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid L(\vec{x}) = \vec{0}\}$ |
| Koeffizientenmatrix | |
| Ergebnisvektor | |
| Lösungsvektor | |
| Transponieren | |

8.2. PIVOT-GLEICHUNG

$$(I) \quad 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 = -6$$

$$(II) \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -10$$

$$(III) \quad 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 = -18$$

$$\Rightarrow$$

$$(I') \quad 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 = -6$$

$$(II') = (II) - (I) \quad 1x_2 + 2x_3 = -4$$

$$(III') = (III) - 2(I) \quad 1x_2 + 4x_3 = -6$$

$$\Rightarrow$$

$$(I'') \quad 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 = -6 \Rightarrow x_1 = -6 - x_2 - x_3 = -6 + 2 + 1 = -3$$

$$(II'') = (II) \quad 1x_2 + 2x_3 = -4 \Rightarrow x_2 = -4 - 2x_3 = -4 + 2 = -2$$

Rückwärtssubstitution

$$(III'') = (III') - (II'') \quad 2x_3 = -2 \Rightarrow x_3 = -1$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

8.2.1. Glossar

| Begriff | Bedeutung |
|----------------|-----------|
| Pivot-Variable | |

8.3. GAUSS-TABLEAU

| | x_1 | x_2 | x_3 | 1 | |
|-----|-------|-------|-------|-----|--------|
| I | 1 | 1 | 1 | -6 | |
| II | 1 | 2 | 3 | -10 | -(I) |
| III | 2 | 3 | 6 | -18 | -2(II) |

$$\Rightarrow$$

| | | | | | |
|------|---|---|---|----|--------|
| I' | 1 | 1 | 1 | -6 | |
| II' | 0 | 1 | 2 | -4 | |
| III' | 0 | 1 | 4 | -6 | -(II') |

$$\Rightarrow$$

| | | | | | |
|-------|---|---|---|----|---------------------|
| I'' | 1 | 1 | 1 | -6 | |
| II'' | 0 | 1 | 2 | -4 | |
| III'' | 0 | 0 | 2 | -2 | $\cdot \frac{1}{2}$ |

$$\Rightarrow$$

| | | | | | |
|--------|---|---|---|----|------------|
| I''' | 1 | 1 | 1 | -6 | -(III''') |
| II''' | 0 | 1 | 2 | -4 | -2(III''') |
| III''' | 0 | 0 | 1 | -1 | |

$$\Rightarrow$$

Koeffizientenmatrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

| | x_1 | x_2 | x_3 | 1 | |
|---------------|-------|-------|-------|----|----------|
| I''' | 1 | 1 | 0 | -5 | -(II''') |
| II''' | 0 | 1 | 0 | -2 | |
| III''' | 0 | 0 | 1 | -1 | |
| \Rightarrow | | | | | |
| | 1 | 0 | 0 | -3 | |
| | 0 | 1 | 0 | -2 | |
| | 0 | 0 | 1 | -1 | |

Ergebnisvektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$ Lösungsvektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ Lineares Gleichungssystem $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$

p = Anzahl Pivot-Variablen.

Wenn $b_{p+1} = \dots = b_m = 0$ dann ist das LGS lösbar (homogenes Gleichungssystem), sonst unlösbar.

Wenn $p = n$ dann hat LGS genau eine Lösung.

Wenn $p < n$ dann hat LGS unendlich viele Lösungen.

8.4. VEKTOREN

8.4.1. Glossar

| Begriff | Bedeutung |
|----------------------------|---|
| Vektor | Liste von Zahlen |
| Nullvektor | $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ |
| Ortsvektor | Ortsvektor \vec{p} vom Nullpunkt des Koordinatensystems $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ zum Punkt P |
| Richtungsvektor | Richtungsvektor \vec{AB} vom Punkt A zum Punkt B ist $\vec{b} - \vec{a}$ |
| Linearkombination | Linearkombination der Variablen x_1, x_2, x_3 (Bsp. $3 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 = -6$). Vektoren werden jeweils mit einer Zahl multipliziert und miteinander summiert |
| Lineare Unabhängigkeit | $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ heißen linear Unabhängig, wenn die Gleichung $\lambda_1 \cdot \vec{v}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{v}_2 + \dots + \lambda_n \cdot \vec{v}_n = \vec{0}$ genau eine Lösung hat, nämlich $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ $\begin{pmatrix} \uparrow & \dots & \uparrow \\ \vec{v}_1 & \dots & \vec{v}_n \\ \downarrow & \dots & \downarrow \end{pmatrix} \cdot \vec{\lambda} = \vec{0}$ eindeutig lösbar $= \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ sind linear unabhängig |
| Vektorprodukt/Kreuzprodukt | $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$ $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$ |

| Begriff | Bedeutung |
|----------------------------|---|
| Skalarprodukt | $\vec{a} \cdot \vec{b} = c$ $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$ |
| Orthogonale Projektion | |
| Betrag/Länge eines Vektors | $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ $ \vec{a} = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 5^2} = \sqrt{38}$ |
| Normalenvektor | = Vektorprodukt? |

8.4.2. Vektorenrechnen

Addition:

$$\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+5 \\ 2+(-9) \\ 3+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Multiplikation mit reellen Zahlen (=Skalare):

$$3 \cdot \vec{v} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

8.4.3. Rechenregeln

Falls die Vektoren senkrecht zueinanderstehen, ist das Skalarprodukt gleich 0

$$\lambda \vec{0} = \vec{0}$$

$$\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$$

$$-\vec{v} = -1 \cdot \vec{v}$$

$$-\vec{v} + \vec{v} = \vec{0}$$

$$(\lambda\mu)\vec{v} = \lambda(\mu\vec{v}) = \lambda\mu\vec{v}$$

$$\lambda(\vec{v} + \vec{w}) = \lambda\vec{v} + \lambda\vec{w}$$

$$\vec{v} + (\vec{u} + \vec{w}) = (\vec{v} + \vec{u}) + \vec{w} = \vec{v} + \vec{u} + \vec{w}$$

8.4.4. Kreuzprodukt

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} a_y b_z - a_z b_y \\ + a_z b_x - a_x b_z \\ + a_x b_y - a_y b_x \end{matrix} \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

8.4.4.1. Eigenschaften

Anti-kommutativ: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$. Konsequenz: $\vec{a} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$

Distributiv: $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

Gemischt-assoziativ: $\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b})$

Das Kreuzprodukt ist **nicht** assoziativ. $\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c}$ darf man nicht! $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$

8.4.4.2. Geometrische Eigenschaften

$\vec{a} \times \vec{b}$ steht immer senkrecht auf \vec{a} und auf \vec{b} .

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$ bilden ein Rechtssystem

$|\vec{a} \times \vec{b}|$ = Flächeninhalt des durch \vec{a} und \vec{b} aufgespannten Parallelogramms
 $= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi)$



Abbildung 1: Rechtssystem

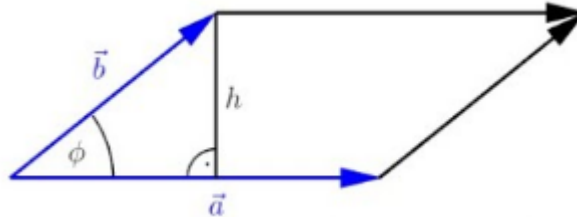


Abbildung 2: Flächeninhalt $h \cdot a$

8.4.5. Vektorraum

Ein Vektorraum ist eine Menge V mit den Rechenoperationen:

$$\oplus : V \times V \rightarrow V, (\vec{v}, \vec{w}) \mapsto \vec{v} \oplus \vec{w}$$

$$\odot : \mathbb{R} \times V \rightarrow V, (\lambda, \vec{v}) \mapsto \lambda \odot \vec{v}$$

Mit den Eigenschaften:

– Vektoraddition:

– **Assoziativgesetz**: $u \oplus (v \oplus w) = (u \oplus v) \oplus w$

– Existenz eines **neutralen Elements** $0_V \in V$ mit $v \oplus 0_V = 0_V \oplus v = v$

– Existenz eines zu $v \in V$ **inversen Elements** $-v \in V$ mit $v \oplus (-v) = (-v) \oplus v = 0_V$

– **Kommutativgesetz**: $v \oplus u = u \oplus v$

– Skalarmultiplikation:

– $\alpha \odot (u \oplus v) = (\alpha \odot u) \oplus (\alpha \odot v)$

– $(\alpha + \beta) \odot v = (\alpha \odot v) \oplus (\beta \odot v)$

– $(\alpha \cdot \beta) \odot v = \alpha \odot (\beta \odot v)$

– $1 \odot v = v$ für das **Einselement** $1 \in K$ des **Skalkörpers**

Gelten diese Eigenschaften für die Teilmenge eines grösseren Vektorraums W , so nennt man V **Untervektorraum** von W . Heisst: Man hat nur dann einen Untervektorraum V , wenn die Produkte der Multiplikation oder Addition der Elemente dieses Raumes auch in V liegen. Untervektorräume sind also unendliche Räume mit n Dimensionen weniger, zB $W = 3$ -Dimensionaler Vektorraum, $V = 2$ -Dimensionaler Untervektorraum.

Kern von $A = U = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\vec{x} = \vec{0}\}$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ist ein Untervektorraum von \mathbb{R}^n .

8.4.6. Lineare Abbildung

Eine Lineare Abbildung ist eine Funktion

$$L: \begin{cases} \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \\ \vec{x} \mapsto L(\vec{x}) \end{cases}$$

mit den Eigenschaften

$$L(\vec{x} + \vec{y}) = L(\vec{x}) + L(\vec{y})$$

$$L(\lambda \vec{x}) = \lambda L(\vec{x})$$

Für jede lineare Abbildung $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ gibt es eine (Abbildungs) Matrix $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit der Eigenschaft, dass $L(\vec{x}) = M\vec{x}$

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & \dots & m_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{m1} & \dots & m_{mn} \end{pmatrix}$$

$$m_{ij} = \vec{e}_i \cdot L(\vec{e}_j)$$

8.5. MATRIZEN

8.5.1. Glossar

| Begriff | Bedeutung |
|----------------------|--|
| Spaltenvektoren | Spalten der Matrix als Vektoren |
| Zeilenvektoren | Zeilen der Matrix als Vektoren |
| Rang | Wieviele Spaltenvektoren einer Matrix linear unabhängig sind |
| Nullmatrix | $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ |
| Quadratische Matrix | $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ Gleichviele Zeilen und Spalten |
| Diagonalmatrix | (immer quadratisch und symmetrisch): $D = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 \end{pmatrix}$, $d_{ij} = 0$ für $i \neq j$ |
| Einheitsmatrix | (immer diagonal): $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ |
| Symmetrische Matrix | (immer quadratisch): $A = A^T$, $a_{ij} = a_{ji}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ |
| Obere Dreiecksmatrix | $O = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & x_4 & x_5 \\ 0 & 0 & x_6 \end{pmatrix}$, $o_{ij} = 0$ für $i > j$ |
| Kovarianzmatrix | immer symmetrisch |
| Reguläre Matrix | Quadratische Matrix mit höchstem Rang (Rang = Anzahl Spalten/Reihen) |
| Singuläre Matrix | Quadratische Matrix mit kleinerem Rang (Rang < Anzahl Spalten/Reihen) |
| Invertierbare Matrix | Für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heisst A invertierbar, wenn es eine Matrix A^{-1} gibt, so dass $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = \text{Einheitsmatrix (E)}$. Dies ist der Fall, wenn A Regulär ist. |

8.5.2. Definition

Matrix mit 2 Zeilen und 3 Spalten

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$$

Komponenten von A : a_{ij}

i : Zeilenindex, j : Spaltenindex. Bsp: $a_{23} = 7$

8.5.3. Matrizen als Vektoren interpretieren

→ A ist ein 6-Dimensionaler VR (Vektorraum)

$$\text{Variante 1: } \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \\ a_{14} \\ a_{15} \\ a_{16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \\ 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \text{ Variante 2: } \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \\ a_{14} \\ a_{15} \\ a_{16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{R}^n \text{ interpretiere als } \begin{cases} \mathbb{R}^{n \times 1} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \text{ Spaltenvektor} \\ \mathbb{R}^{1 \times n} \rightarrow (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n) \text{ Zeilenvektor} \end{cases}$$

Zu A gehörige Zeilenvektore $\vec{a}_1 = (1 \ 4 \ 5), \vec{a}_2 = (2 \ 3 \ 7)$

$$A = \begin{pmatrix} \leftarrow \vec{a}_1 \rightarrow \\ \leftarrow \vec{a}_2 \rightarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Zu A gehörige Spaltenvektore $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \vec{a}_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

8.5.4. Matrizen transponieren

Transponierte Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ wäre: $A^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$

$$A = (a_{ij}), A^T = (a_{ji})$$

Rolle von Zeile und Spalte vertauscht: $a_{ij} \rightarrow a_{ji}$

Bsp:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 2}, A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}^T = (1 \ 4 \ 5)$$

8.5.5. Matrizen invertieren

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

8.5.6. Matrixmultiplikation

Meistens nicht kommutativ ($A \cdot B \neq B \cdot A$)

B muss genau gleich viele Zeilen haben wie A Spalten

$$A \in \mathbb{R}^{m \times l}, B \in \mathbb{R}^{l \times n}, C = A \cdot B \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^l a_{ik} b_{kj}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 1 & 0 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2 \cdot 6 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 8) & (2 \cdot 4 + 3 \cdot 0 + 1 \cdot 9) \\ (4 \cdot 6 + -1 \cdot 1 + 7 \cdot 8) & (4 \cdot 4 + -1 \cdot 0 + 7 \cdot 9) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 17 \\ 79 & 79 \end{pmatrix}$$

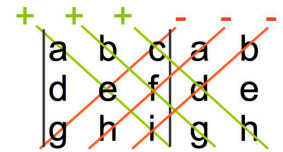
8.5.7. Determinante

Determinante einer quadratischen Matrix ist eine reelle Zahl

$$1 \times 1 \text{ Matrix : } \det(a) = a$$

$$2 \times 2 \text{ Matrix : } \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - cb$$

$$3 \times 3 \text{ Matrix : } \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$



Bsp:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

$$x = \frac{\det \begin{pmatrix} e & b \\ f & d \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} = \frac{ed - fb}{ad - cb}$$

$$y = \frac{\det \begin{pmatrix} a & e \\ c & f \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} = \frac{af - ce}{ad - cb}$$

Definition der Determinante:

$$\det : \begin{cases} \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R} \\ M \mapsto \det(M) \end{cases}$$

Definition über Eigenschaften:

$$\det(\mathbb{1}) = 1$$

$$\det \begin{pmatrix} \dots & \vec{a}_1 & \dots \\ \dots & \lambda \vec{a}_k & \dots \\ \dots & \vec{a}_n & \dots \end{pmatrix} = \lambda \det \begin{pmatrix} \dots & \vec{a}_1 & \dots \\ \dots & \vec{a}_k & \dots \\ \dots & \vec{a}_n & \dots \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} \dots & \vec{a}_1 & \dots \\ \dots & \vec{a}_k + \vec{b}_k & \dots \\ \dots & \vec{a}_n & \dots \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \dots & \vec{a}_1 & \dots \\ \dots & \vec{a}_k & \dots \\ \dots & \vec{a}_n & \dots \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \dots & \vec{a}_1 & \dots \\ \dots & \vec{b}_k & \dots \\ \dots & \vec{a}_n & \dots \end{pmatrix}$$

$\det M = 0$ wenn M 2 gleiche Zeilen hat

Bsp:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 10 & 12 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} = 2 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 10 & 12 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 8 & 10 & 12 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 8 & 10 & 12 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 10 & 12 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 8 & 10 & 12 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} + 2 \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 8 & 10 & 12 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} + 3 \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 8 & 10 & 12 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Bsp:

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} = -2 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + 0 \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - 4 \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= -2(2 - 3) + 0 - 4(-1)$$

$$= 2 + 4 = 6$$

$$\text{Vorzeichen: } \begin{pmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$\text{Vorgehen: } \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow -2 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow 0 \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow -4 \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Weitere Eigenschaften:

- Die Determinante wechselt beim Vertauschen von Zeilen ihr Vorzeichen
- Wenn wir zu einer Zeile einer Matrix ein Vielfaches einer anderen Zeile dazuzählen, ändert die Determinante ihren Wert nicht

$$\Rightarrow \det(M) \underset{\text{Gauss}}{=} (-) \det \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n$$

Weiteres:

$$\det(\lambda M) = \lambda^n \det(M), M \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$\det \begin{pmatrix} A & * \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det(A) \cdot \det(B)$$

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

$$\det(A^T) = \det(A)$$

$$\text{Volumen eines Spats} = \det \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix}$$

$$= \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

Volumen = Grundfläche · Höhe

$$= |\vec{b} \times \vec{c}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos(\varphi)$$

$$= |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|$$

8.5.8. Eigenwerte

$$\text{Gegeben: } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

\vec{x} heisst **Eigenvektor** zum **Eigenwert** λ

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Gegeben: Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Ein Vektor $\vec{v} \neq \vec{0}$ heisst Eigenvektor zum Eigenwert λ , wenn $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ ist.

$$\begin{aligned} A\vec{v} - \lambda\vec{v} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow (A - \lambda \mathbb{1})\vec{v} &= \vec{0} \end{aligned}$$

Wenn λ gegeben ist, ist das ein homogenes lineares Gleichungssystem in \vec{v} . Davon suchen wir nicht-triviale Lösungen ($\vec{v} \neq \vec{0}$).

λ heisst Eigenwert von $A \Leftrightarrow A - \lambda \mathbb{1}$ ist singulär $\Leftrightarrow \text{rang}(A - \lambda \mathbb{1}) < n \Leftrightarrow \det(A - \lambda \mathbb{1}) = 0$

Wenn $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, dann ist $\det(A - \lambda \mathbb{1})$ ein Polynom von Grad n . (Charakteristisches Polynom). Eigenwerte sind Nullstellen des charakteristischen Polynoms.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& \det(A - \lambda \mathbb{1}) \\
&= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 4-\lambda \end{pmatrix} \\
&= (1-\lambda)(4-\lambda) - (-2) \cdot 1 \\
&= \lambda^2 - 5\lambda + 4 + 2 \\
&= \lambda^2 - 5\lambda + 6 \quad = \text{Charakteristisches Polynom}
\end{aligned}$$

Nullstelle des char. Polynoms

$$\begin{aligned}
& \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \\
& \Leftrightarrow \lambda = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} \\
& \Leftrightarrow \lambda = \frac{5 \pm 1}{2} \\
& \Leftrightarrow \lambda \in \{3, 2\}
\end{aligned}$$

Eigenwerte von A sind $\lambda = 2$ und $\lambda = 3$

Für diese Zahlen ist die Matrix $A - \lambda \mathbb{1}$ singulär, d.h. die Gleichung $(A - \lambda \mathbb{1})\vec{v} = \vec{0}$ hat nicht-triviale Lösungen. Diese heissen Eigenvektoren.

8.5.9. Eigenwert $\lambda = 2$

$$\begin{aligned}
& (A - 2 \cdot \mathbb{1}) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

8.5.10. Eigenwert $\lambda = 3$

$$\begin{aligned}
& (A - 3 \cdot \mathbb{1}) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Matrizen haben Rang von 1

$$(A - 2\mathbb{1})\vec{v} = \vec{0}$$

$$(A - 3\mathbb{1})\vec{v} = \vec{0}$$

| v_1 | v_2 | 1 |
|-------|-------|-----|
| -1 | 1 | 0 |
| -2 | 2 | 0 |

| v_1 | v_2 | 1 |
|-------|-------|-----|
| -2 | 1 | 0 |
| -2 | 1 | 0 |

$$\Rightarrow -v_1 + v_2 = 0$$

$$\Rightarrow v_1 = v_2$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu \\ \mu \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow -2v_1 + v_2 = 0$$

$$\Rightarrow v_2 = 2v_1$$

$$\vec{v} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mu \neq 0$$

Für alle $\mu \neq 0$ ist \vec{v} ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda = 2$. $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda = 3$.

8.5.11. Diagonalisierbar

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heisst **diagonalisierbar**, wenn es eine invertierbare Matrix X gibt, so dass $X^{-1}AX = D$ (D ist eine

$$\text{Diagonalmatrix } \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Wenn A diagonalisierbar ist, dann sind die Spalten von X linear unabhängige Eigenvektoren, also eine Basis von \mathbb{R}^n , die nur aus Eigenvektoren von A besteht.

Das umgekehrte gilt auch. Das erlaubt uns, X zu konstruieren.

$$\begin{aligned}
 X^{-1}AX &= D \\
 \Leftrightarrow AX &= XD \\
 \Leftrightarrow AX &= X \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \\
 \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \vec{v}_1 & \dots & \vec{v}_n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \vec{v}_1 & \dots & \vec{v}_n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \\
 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ A\vec{v}_1 & \dots & A\vec{v}_n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \lambda_1\vec{v}_1 & \dots & \lambda_n\vec{v}_n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} \\
 \Leftrightarrow A\vec{v}_1 = \lambda_1\vec{v}_1 \wedge A\vec{v}_2 = \lambda_2\vec{v}_2 \wedge \dots \wedge A\vec{v}_n = \lambda_n\vec{v}_n
 \end{aligned}$$

8.5.12. Rechenregeln

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) = A \cdot B \cdot C$$

$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$$

$$C \cdot (A + B) = C \cdot A + C \cdot B$$

$$E \cdot A = A \cdot E = A \text{ für } A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$(A^T)^T = A$$

$$(A + B)^T = A^T + B^T$$

$$(\lambda A)^T = \lambda A^T$$

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

8.6. ANALYTISCHE GEOMETRIE

[beste playlist](#)

8.6.1. Geraden

8.6.1.1. Parameterform

$$g : \underbrace{\vec{x}}_{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{Ortsvektor } \vec{p}} + t \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}}_{\text{Richtungsvektor } \vec{p}\vec{x}}, t \in \mathbb{R}$$

8.6.2. Ebenen

8.6.2.1. Parameterform

$$E : \vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{Ortsvektor } \vec{o}} + s \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}}_{\text{Spannvektor } \vec{A}\vec{B}} + t \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}}_{\text{Spannvektor } \vec{A}\vec{C}}, s, t \in \mathbb{R}$$

8.6.2.2. Normalenform / Koordinatenform

$$E = \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\text{Punkt auf Ebene}} \right] \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\vec{n} \text{ Orthogonal zur Ebene}} = 0$$

$$\Rightarrow x - 1 - z + 3 = 0$$

8.6.2.3. Hessesche Normalform

Abstand von Punkt $P(2, 8, 2)$ zur Ebene $E : 2x - y + 4z = 1$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{21}$$

$$\frac{2x - y + 4z - 1}{\sqrt{21}}$$

$$\Rightarrow \frac{2 \cdot 2 - 1 \cdot 8 + 4 \cdot 2 - 1}{\sqrt{21}}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{21}}$$