# Diskrete Mathematik | DMI

## Zusammenfassung

## INHALTSVERZEICHNIS

# 1. AUSSAGENLOGIK

## 1.1. GLOSSAR

| *Begriff* | *Bedeutung* |
|---|---|
| Aussage | – Feststellender Satz, dem eindeutig «wahr» oder «falsch» zugeordnet werden kann<br>– Symbole wie $A, B, C...$ werden dafür verwendet |
| Aussagenlogische Form | – Kombination von Aussagen, verknüpft durch Junktoren |
| Aussageform | – Aussagen verknüpft mit Variablen |
| Normalform | – Standartisierte Aussagenlogische Formen (Formeln) |
| Negationsnormalform | – ¬ steht ausschliesslich direkt vor Aussagen oder Konstanten |
| Verallgemeinerte Disjunktion | – Einzelne Aussage oder Negation<br>– wahr oder falsch<br>– Disjunktion $A \vee B$, falls $A$ und $B$ selbst verallgemeinerte Disjunktionen sind |
| Verallgemeinerte Konjunktion | – Einzelne Aussage oder Negation<br>– wahr oder falsch<br>– Konjunktion $A \wedge B$, falls $A$ und $B$ selbst verallgemeinerte Konjunktionen sind |
| Disjunktive Normalform | – Disjunktion von (oder eine einzelne) verallgemeinerten Konjunktionen |
| Konjunktive Normalform | – Konjunktion von (oder eine einzelne) verallgemeinerten Disjunktionen |
| Kontradiktion | – Immer falsch |
| Tautologie | – Immer wahr |
| Junktoren (/Konnektoren) | – ¬ Negation<br>– ∧ Konjunktion<br>– ∨ Disjunktion (einschliessliches oder!)<br>– ⇒ Implikation<br>– ⇔ Äquivalenz |
| Abtrennungsregel | – $(A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$ |
| Bindungsstärke | – ¬ vor ∧, ∨ vor ⇒, ⇔ |

## 1.2. FORMELN

$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$
$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$
$\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B$
$A \vee (\neg A \wedge B) \Leftrightarrow A \vee B$
Abtrennungsregel: $A \wedge (A \Rightarrow B) \Rightarrow B$

### 1.3. RECHENREGELN

| *Begriff* | *Bedeutung* |
|---|---|
| Kommutativität | – $(A \wedge B) \Leftrightarrow (B \wedge A)$<br>– $(A \vee B) \Leftrightarrow (B \vee A)$ |
| Assoziativität | – $A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$<br>– $A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow (A \vee B) \vee C$ |
| Distributivität | – $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$<br>– $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ |
| Absorption | – $A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$<br>– $A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$ |
| Idempotenz | – $A \vee A = A$<br>– $A \wedge A = A$ |
| Doppelte Negation | – $\neg(\neg A) \Leftrightarrow \neg\neg A \Leftrightarrow A$ |
| Konstanten | – W=wahr<br>– F=falsch |
| ??? | – $(A \Rightarrow B \Rightarrow C) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)$ |
| de Morgan | – $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$<br>– $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$ |

# 2. PRÄDIKATENLOGIK

### 2.1. GLOSSAR

| *Begriff* | *Bedeutung* |
|---|---|
| Subjekt | – «Konkretes Ding» / Stellvertreter einer Variable |
| Prädikat | – «Eigenschaft», zB «ist eine Primzahl»<br>– Prädikate werden oft wie Funktionen geschrieben. Ist $P$ ein Prädikat, dann bedeutet $P(x)$, dass $x$ das Prädikat erfüllt. $P(x)$ ist eine Aussageform. |
| Quantor | – $\forall$ Allquantor (Für alle)<br>– $\exists$ Existenzquantor (Es existiert) |

# 3. BEWEISEN

**TODO: MEHR BEWEISE**

### 3.1. INDUKTION

$A(1) \wedge (A(n) \Rightarrow A(n+1)) \Rightarrow A(m), m \in \mathbb{N}$

Beispiel: $2 | (6^n)$

1) Verankerung: $n = 0$
   – $2 | (6^0)$
2) Induktionsschritt $n \to n+1$
   – $2 | (6^{n+1})$

   a) Induktionsannahme: $2 | (6^n)$
   b) Behauptung: $2 | (6^{n+1})$

c) Beweis: Verwendung der Annahme, um Richtigkeit der Behauptung zu zeigen

#### 3.1.1. Techniken

1) Direkter Beweis $f(n) = f_1(n) = f_2(n) = \ldots = f_m(n) = g(n)$
2) Dfferenz gleich Null $f(n) - g(n) = 0 \Rightarrow f(n) = g(n)$
3) Äquivalenzumformung
4) Dritte Grösse (vereinfachen) $g(n) = h(n) = f(n)$

# 4. DIREKTE, ITERATIVE UND REKURSIVE BERECHNUNGEN

## 4.1. GLOSSAR

| *Begriff* | *Bedeutung* |
|---|---|
| Folge | – Nummerierte Liste von Objekten (Folgegliedern) |
| Reihe | – Summe von Folgegliedern einer Zahlenfolge |

# 5. MENGEN

## 5.1. GLOSSAR

| *Begriff* | *Bedeutung* |
|---|---|
| Aufzählend | – $\{1, 2, 3\}$ |
| Beschreibend | – $\{x \in \mathbb{N}^+ \mid x < 4\}$ |
| Mächtigkeit | – Anzahl Elemente einer Menge<br>– $\lvert M \rvert$ |
| Potenzmenge | – Menge aller Teilmengen einer Menge<br>– $P(M)$<br>– $\lvert P(M) \rvert = 2^{\lvert M \rvert}$ |
| Kartesisches Produkt | – $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$ |
| | |
| | |
| | |

## 5.2. RECHENREGELN

Für die Mengen A und B in der Obermenge M gelten die folgenden Aussagen:

$\overline{\overline{A}} = A$
$A \cap \overline{A} = \varnothing$
$A \cup \overline{A} = M$
$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
$\overline{A \cup A} = \overline{A} \cap \overline{B}$

# 6. FORMELN, ABBILDUNGEN, RELATIONEN

## 6.1. GLOSSAR

| *Begriff* | *Bedeutung* |
|---|---|
| Funktion/Abbildung | – Zuordnung, die jedem Elemend der Definitionsmenge $D$ genau ein Element einer Zielmenge $Z$ zuordnet.<br>– Injektive Relation<br>– $f : D \to Z$<br>– Abbildungen mit mehreren Argumenten: $f : A \times B \to Z$, $f(a,b) = y$ |
| Graph | – Menge von Paaren $(x, f(x))$<br>– $G \in D \times Z$ |
| Relation | – Teilmenge des Kartesischen Produktes mehrerer Mengen<br>– $A = \prod_{i=1}^{n} A_i, \lvert A_i \rvert = n_i \Rightarrow \lvert A \rvert = \prod_{i=1}^{n} n_i$<br>– Kleiner-Relation: $R_< = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B, a < b\}$<br>– Gleich-Relation: $R_= = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B, a = b\}$<br>– Kleiner-Gleich-Relation: $R_\leq = R_= \cup R_< = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B, a \leq b\}$ |
| Surjektiv | – Alle Elemente der Definitions- und Zielmenge sind «verknüpft» / jedes Element der Bildmenge kommt als Bild vor |
| Injektiv | – Alle Inputs haben eindeutige Outputs<br>– $a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$ |
| Bijektiv | – Surjektiv und Injektiv |
| Reflexiv | – Alle Elemente von A stehen zu sich selbst in Beziehung<br>– $a \in A \Rightarrow (a,a) \in R$<br>– $A \Leftrightarrow A$ |
| Symmetrisch | – $(a,b) \in R \land (b,a) \in R$<br>– $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow A)$ |
| Transitiv | – $(a,b) \in R \land (b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R$<br>– $(A \Leftrightarrow B) \land (B \Leftrightarrow C) \Rightarrow (A \Leftrightarrow C)$ |
| Äquivalenzrelation | – reflexiv, symmetrisch und transitiv<br>– $\Leftrightarrow, =$ |
| Irreflexiv | – $a \in A \Rightarrow \neg(a,a) \in R$ |
| Asymmetrisch | – $(a,b) \in R \Rightarrow \neg(b,a) \in R$ |
| Antisymmetrisch | – $((a,b) \in R) \land ((b,a) \in R) \Rightarrow a = b$ |
| Ordnungsrelation | – reflexiv, antisymmetrisch und transitiv<br>– $\leq$ |
| Symmetrische Differenz | – $A \Delta B = \{x \in G \mid (x \in A \cup B) \land \neg(x \in A \cap B)\}$<br>– $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$<br>– $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$ |

# 7. MODULO-RECHNEN

Die Modulo-Relation ist eine *Äquivalenzrelation* auf $\mathbb{Z}$.

## 7.1. GLOSSAR

| *Begriff* | *Bedeutung* |
|---|---|
| Teiler-Relation | – Für $a, b \in \mathbb{Z}$ ist die Teiler-Relation $b \mid a \Leftrightarrow T(b,a) \Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{Z} : bq = a$<br>– $b \mid a \Leftrightarrow -b \mid a$<br>– $b \mid a \Leftrightarrow b \mid -a$<br>– Ordnungsrelation auf $\mathbb{N}$ |
| Modulo-Relation | – Für $a, q, r \in \mathbb{Z}$ ist die Modulo-Relation $R_q(a,r) \Leftrightarrow q \mid a - r \Leftrightarrow a \equiv r \bmod q$ |
| ~ | – «relates to»<br>– $a \sim b \Leftrightarrow (a,b) \in R$ |
| Quotient, Rest | Zu jeder Zahl $a \in \mathbb{Z}$ und jeder Zahl $b \in \mathbb{Z}$ gibt es eindeutig bestimmte Zahlen $q, r \in \mathbb{Z}$ mit $a = q \cdot b + r, 0 \leq r < b$<br>Bsp: $7 = 2 \cdot 3 + 1$<br>$q$ heisst *Quotient*<br>$r$ heisst *Rest* |
| Restklassen | – $[b]_q = \{a \in \mathbb{Z} \mid a \equiv b \bmod q\}, q > 0$<br>– $\mathbb{Z}_q = \{[0]_q, [1]_q, [2]_q, \ldots, [q-1]_q\} = \underbrace{\{0,1,2,3,\ldots,q-1\}}_{\text{Vereinfachung}}$ |
| Multiplikatives Inverses | – Für $a \in \mathbb{Z}_q$ ist $b \in \mathbb{Z}_q$ das *multiplikative inverse* von a, wenn $a \cdot b \equiv 1 \bmod q$ |
| Nullteiler | – Wenn für $a, b \in \mathbb{Z}_q : ab \equiv 0 \bmod q$ und $a \not\equiv 0 \bmod q \wedge b \not\equiv 0 \bmod q$, heissen $a, b$ *Nullteiler* |

## 7.2. RECHENREGELN

1) $(a + b) \bmod n = ((a \bmod n) + (b \bmod n)) \bmod n$
2) $(a - b) \bmod n = ((a \bmod n) - (b \bmod n)) \bmod n$
3) $(a \cdot b) \bmod n = ((a \bmod n) \cdot b \bmod n)) \bmod n$
4) $a^d \bmod n = \left(a^{d-x} \cdot a^x\right) \bmod n = \left(\left(a^{d-x} \bmod n\right) \cdot (a^x \bmod n)\right) \bmod n$

## 7.3. PRIMFAKTORENZERLEGUNG

| *Begriff* | *Bedeutung* |
|---|---|
| $\mathrm{ggT}(a,b)$ | $\max\{d \in \mathbb{N} \mid d \mid a \wedge d \mid b\}$ |
| $\mathrm{kgV}(a,b)$ | – $\min\{m \in \mathbb{N} \mid a \mid m \wedge b \mid m\}$<br>– $\frac{ab}{\mathrm{ggT}(a,b)}$ |
| Teilerfremd | – Zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$ heissen *Teilerfremd*, wenn $\mathrm{ggT}(a,b) = 1$<br>– Sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl und $q \in \mathbb{N}, q < p, q \neq 0$ dann ist $\mathrm{ggT}(p,q) = 1$ |
| | |

## 7.4. EUKLIDSCHER ALGORITHMUS

Seien $a, b \in \mathbb{N}, a \neq b, a \neq 0, b \neq 0$
Initialisierung: Setze $x \coloneqq a, y \coloneqq b$ und $q \coloneqq x, r \coloneqq x - q \cdot y$ (d.h. bestimme q und r so, dass $x = q \cdot y + r$ ist)
Wiederhole bis $r = 0$ ist
Ergebnis: $y = \mathrm{ggT}(a,b)$

### 7.4.1. Beispiel

$\mathrm{ggT}(122,72), a = 122, b = 72$
– Init: $x_0 = a = 122, y_0 = b = 72$
– Iteration:

| | $x_i = y_{i-1}$ | $y_i = r_{i-1}$ | $q_i = x_i \text{ div } y_i$ | $r_i = x_i \bmod y_i = x_i - q_i \cdot y_i$ |
|---|---|---|---|---|
| $i = 0$ | 122 | 72 | 1 | 50 |
| $i = 1$ | 72 | 50 | 1 | 22 Muster: $r_{i+1} < r_i$ |
| $i = 2$ | 50 | 22 | 2 | 6 |
| $i = 3$ | 22 | 6 | 3 | 4 |
| $i = 4$ | 6 | 4 | 1 | 2 |
| $i = 5$ | 4 | 2 =ggT(122,72) | 2 | 0 (immer 0 am Schluss) |

## 7.5. ERWEITETER EUKLIDSCHER ALGORITHMUS

Seien $a, b \in \mathbb{N}, a \neq b, a \neq 0, b \neq 0$
Initialisierung: Setze $x \coloneqq a, y \coloneqq b, q \coloneqq x \div y, r \coloneqq x - q \cdot y, (u, s, v, t) = (1, 0, 0, 1)$ (d.h. bestimme q und r so, dass $x = q \cdot y + r$ ist)
Wiederhole bis $r = 0$ ist
Ergebnis: $y = \text{ggT}(a, b) = s \cdot a + t \cdot b$
Wenn $\text{ggT}(a, b) = 1$ ist, dann folgt: $t \cdot v \equiv 1 \bmod a$

### 7.5.1. Beispiel

**ggT(99,79)**

| $i$ | $x = y_{-1}$ | $y = r_{-1}$ | $q = x \div y$ | $r = x_i - q_i \cdot y_i$ | $u = s_{-1}$ | $s = u_{-1} - q_{-1} \cdot s_{-1}$ | $v = t_{-1}$ | $t = v_{-1} - q_{-1} \cdot t_{-1}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $i = 0$ | 99 | 79 | 1 | 20 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| $i = 1$ | 79 | 20 | 3 | 19 | 0 | 1 | 1 | −1 |
| $i = 2$ | 20 | 19 | 1 | 1 | 1 | −3 | −1 | 4 |
| $i = 3$ | 19 | 1 | 19 | 0 | −3 | 4 | 4 | −5 |

Daraus folgend:
– $\text{ggT}(99, 79) + 1 + 4 \cdot 99 + (-5) \cdot 79 \Leftrightarrow 396 - 395 = 1$
– $-5$ ist mult. Inv. von 79 in $\mathbb{Z}_{99}$
– 4 ist mult. Inv. von 99 in $\mathbb{Z}_{79}$

## 7.6. KLEINER FERMAT

Sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl und $x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ mit $\text{ggT}(x, p) = 1$
Dann ist: $x^{p-1} \equiv 1 \bmod p$
Daraus folgend:

$$
\begin{aligned}
& x^{p-1} \equiv 1 \bmod p && \mid ()^n \\
\Leftrightarrow\ & x^{n(p-1)} \equiv 1 \bmod p && \mid \cdot x \\
\Leftrightarrow\ & x^{1+n(p-1)} \equiv x \bmod p \\
\Leftrightarrow\ & x^{1 \bmod (p-1)} \equiv x \bmod p
\end{aligned}
$$

## 7.7. SATZ VON EULER

Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $z \in \mathbb{Z}$ mit $\text{ggT}(z, n) = 1$. Dann ist $z^{\varphi(n)} \equiv 1 \bmod n$.

### 7.7.1. Euler'sche $\varphi$-Funktion (Totient)

Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $\mathbb{Z}_n^* = \{x \in \mathbb{Z}_n \mid x \text{ hat ein multiplikatives Inverses in } \mathbb{Z}_n\}$. Dann heisst $\varphi(n)$:

$$\begin{aligned}\varphi(n) &= \text{Anz. Elemente in } \mathbb{Z}_n \text{ mit mult. Inversen}\\ &= \text{Anz. Zahlen } 1 \le q \le n \text{ mit } \operatorname{ggt}(q,n) = 1\\ &= \left|\mathbb{Z}_n^*\right|\end{aligned}$$

Falls $p$ Primzahl ist, dann ist $\varphi(p) = p - 1$

#### 7.7.1.1. Rechenregeln

1) Sei $n \in \mathbb{N}$ eine Primzahl, dann $\varphi(n) = n - 1$
2) Sei $n \in \mathbb{N}$ eine Primzahl und $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, dann $\varphi(n^p) = n^{p-1} \cdot n - 1)$
3) Seien $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $\operatorname{ggT}(m,n) = 1$, dann $\varphi(n \cdot m) = \varphi(n) \cdot \varphi(m)$

### 7.8. RSA VERSCHLÜSSELUNG

1) Wähle 2 Primzahlen $p, q$
2) Berechne $n = p \cdot q$
3) Berechne $\varphi(n) = (p-1)(q-1)$
4) Wähle $a, b$ so, dass $a \cdot b \equiv 1 \bmod \varphi(n)$
5) Vergesse $p, q, \varphi(p \cdot q)$. Brauchen wir nicht und riskieren nur, dass uns jemand hackt

Public key ist nun $n, b$, Private key ist $n, a$
Sidenote: Fürs Alphabet muss $n$ grösser sein als $26$

## 8. LINEARE ALGEBRA

### 8.1. GLOSSAR

| *Begriff* | *Bedeutung* |
|---|---|
| Lineares Gleichungssystem (LGS) | |
| Koeffizientenmatrix | |
| Ergebnisvektor | |
| Lösungsvektor | |
| Transponieren | |

### 8.2. PIVOT-GLEICHUNG

$$\begin{aligned}
&\text{(I)} && 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 = -6\\
&\text{(II)} && x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -10\\
&\text{(III)} && 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 = -18\\
&\Rightarrow\\
&\text{(I')} && 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 = -6\\
&\text{(II')} = \text{(II)} - \text{(I)} && 1x_2 + 2x_3 = -4\\
&\text{(III')} = \text{(III)} - 2\text{(I)} && 1x_2 + 4x_3 = -6\\
&\Rightarrow\\
&\text{(I'')} && 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 = -6 \Rightarrow x_1 = -6 - x_2 - x_3 = -6 + 2 + 1 = -3\\
&\text{(II'')} = \text{(II)} && 1x_2 + 2x_3 = -4 \underbrace{\Rightarrow x_2 = -4 - 2x_3 = -4 + 2 = -2}_{\text{Rückwärtssubstitution}}\\
&\text{(III'')} = \text{(III')} - \text{(II')} && 2x_3 = -2 \Rightarrow x_3 = -1
\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

### 8.2.1. Glossar

| *Begriff* | *Bedeutung* |
|---|---|
| Pivot-Variable | |

## 8.3. GAUSS-TABLEAU

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | 1 | |
|---|---|---|---|---|---|
| **I** | 1 | 1 | 1 | −6 | |
| **II** | 1 | 2 | 3 | −10 | **−(I)** |
| **III** | 2 | 3 | 6 | −18 | **−2(II)** |
| | | | ⇒ | | |
| **I'** | 1 | 1 | 1 | −6 | |
| **II'** | 0 | 1 | 2 | −4 | |
| **III'** | 0 | 1 | 4 | −6 | **−(II')** |
| | | | ⇒ | | |
| **I''** | 1 | 1 | 1 | −6 | |
| **II''** | 0 | 1 | 2 | −4 | |
| **III''** | 0 | 0 | 2 | −2 | $* \frac{1}{2}$ |
| | | | ⇒ | | |
| **I'''** | 1 | 1 | 1 | −6 | **−(III''')** |
| **II'''** | 0 | 1 | 2 | −4 | **−2(III''')** |
| **III'''** | 0 | 0 | 1 | −1 | |
| | | | ⇒ | | |

Koeffizientenmatrix $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | 1 | |
|---|---|---|---|---|---|
| **I''''** | 1 | 1 | 0 | −5 | **−(II'''')** |
| **II''''** | 0 | 1 | 0 | −2 | |
| **III''''** | 0 | 0 | 1 | −1 | |
| | | | ⇒ | | |
| | 1 | 0 | 0 | −3 | |
| | 0 | 1 | 0 | −2 | |
| | 0 | 0 | 1 | −1 | |

Ergebnisvektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$ Lösungsvektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ Lineares Gleichungssystem $\boldsymbol{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}$

$p$ = Anzahl Pivot-Variablen.
Wenn $b_{p+1} = ... = b_m = 0$ dann ist das LGS lösbar (homogenes Gleichungssystem), sonst unlösbar.
Wenn $p = n$ dann hat LGS genau eine Lösung.
Wenn $p < n$ dann hat LGS unendlich viele Lösungen.

## 8.4. VEKTOREN

### 8.4.1. Glossar

| *Begriff* | *Bedeutung* |
|---|---|
| Vektor | Liste von Zahlen |
| Nullvektor | $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ |
| Ortsvektor | Ortsvektor $\vec{p}$ vom Nullpunkt des Koordinatensystems $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ zum Punkt $P$ |
| Richtungsvektor | Richtungsektor $\overrightarrow{AB}$ vom Punkt $A$ zum Punkt $B$ ist $\vec{b} - \vec{a}$ |
| Linearkombination | Linearkombination der Variabeln $x_1, x_2, x_3$ (Bsp. $3 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 = -6$). Vektoren werden jeweils mit einer Zahl mutlipliziert und miteinander summiert |
| Lineare Unabhängigkeit | $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n$ heissen linear Unabhängig, wenn die Gleichung $\lambda_1 \cdot \vec{v}_1, \lambda_2 \cdot \vec{v}_2, ..., \lambda_n \cdot \vec{v}_n = \vec{0}$ genau eine Lösung hat, nämlich $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$<br>$\begin{pmatrix} \uparrow & ... & \uparrow \\ \vec{v}_1 & ... & \vec{v}_n \\ \downarrow & ... & \downarrow \end{pmatrix} \cdot \vec{\lambda} = \vec{0}$ eindeutig lösbar = $\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n$ sind linear unabhängig |
| Vektorprodukt/Kreuzprodukt | $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$<br>$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$ |
| Skalarprodukt | $\vec{a} \bullet \vec{b} = c$<br>$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$ |
| Orthogonale Projektion | |
| Betrag/Länge eines Vektors | $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$<br>$\lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 5^2} = \sqrt{38}$ |
| Normalenvektor | = Vektorprodukt? |

### 8.4.2. Vektorenrechnen

Addition:

$$\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+5 \\ 2+(-9) \\ 3+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Multiplikation mit reellen Zahlen (=Skalare):

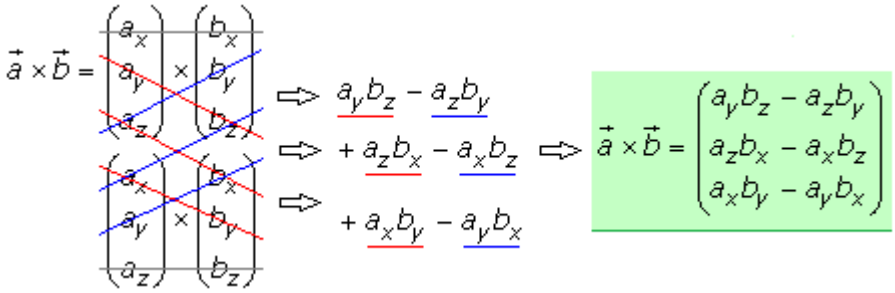
$$3 \cdot \vec{v} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

### 8.4.3. Rechenregeln

Falls die Vektoren senkrecht zueinanderstehen, ist das Skalarprodukt gleich 0

$$\lambda\vec{0} = \vec{0}$$
$$\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$$
$$-\vec{v} = -1 \cdot \vec{v}$$
$$-\vec{v} + \vec{v} = \vec{0}$$
$$(\lambda\mu)\vec{v} = \lambda(\mu\vec{v}) = \lambda\mu\vec{v}$$
$$\lambda(\vec{v} + \vec{w}) = \lambda\vec{v} + \lambda\vec{w}$$
$$\vec{v} + (\vec{u} + \vec{w}) = (\vec{v} + \vec{u}) + \vec{w} = \vec{v} + \vec{u} + \vec{w}$$

### 8.4.4. Kreuzprodukt




#### 8.4.4.1. Eigenschaften

Anti-kommutativ: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$. Konsequenz: $\vec{a} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$

Distributiv: $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

Gemischt-assoziativ: $\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b})$

Das Kreuzprodukt ist **nicht** assoziativ. $\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c}$ darf man nicht! $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$

#### 8.4.4.2. Geometrische Eigenschaften


Abbildung 1: Rechtssystem

$\vec{a} \times \vec{b}$ steht immer senkrecht auf $\vec{a}$ und auf $\vec{b}$.

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$ bilden ein Rechtssystem

$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$ = Flächeninhalt des durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms = $\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin(\varphi)$

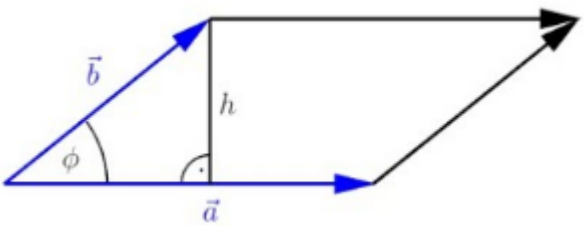



Abbildung 2: **Flächeninhalt** $h \cdot a$

### 8.4.5. Vektorraum

Ein Vektorraum ist eine Menge $V$ mit den Rechenoperationen:

$$\oplus : V \times V \to V, (\vec{v}, \vec{w}) \mapsto \vec{v} \oplus \vec{w}$$

$$\odot : \mathbb{R} \times V \to V, (\lambda, \vec{v}) \mapsto \lambda \odot \vec{v}$$

Mit den Eigenschaften:

- Vektoraddition:
  - ***Assoziativgesetz***: $u \oplus (v \oplus w) = (u \oplus v) \oplus w$
  - Existenz eines ***neutralen Elements*** $0_V \in V$ mit $v \oplus 0_V = 0_V \oplus v = v$
  - Existenz eines zu $v \in V$ ***inversen Elements*** $-v \in V$ mit $v \oplus (-v) = (-v) \oplus v = 0_V$
  - ***Kommutativgesetz***: $v \oplus u = u \oplus v$
- Skalarmultiplikation:
  - $\alpha \odot (u \oplus v) = (\alpha \odot u) \oplus (\alpha \odot v)$
  - $(\alpha + \beta) \odot v = (\alpha \odot v) \oplus (\beta \odot v)$
  - $(\alpha \cdot \beta) \odot v = \alpha \odot (\beta \odot v)$
  - $1 \odot v = v$ für das ***Einselement*** $1 \in K$ des ***Skalarkörpers***

Side-Note: Wir verwenden $+, \cdot$ für zwei reelle Zahlen, $\oplus, \odot$ für zwei Vektoren. Normalerweise wird für Vektoren aber auch $+, \cdot$ verwendet und man muss aus dem Kontext wissen, was addiert/multipliziert wird.

Gelten diese Eigenschaften für die Teilmenge eines grösseren Vektorraums $W$, so nennt man $V$ ***Untervektorraum*** von $W$. Heisst: Man hat nur dann einen Untervektorraum $V$, wenn die Produkte der Multiplikation oder Addition der Elemente dieses Raumes auch in $V$ liegen. Untervektorräume sind also unendliche Räume mit n Dimensionen weniger, zB $W$ = 3-Dimensionaler Vektorraum, $V$ = 2-Dimensionaler Untervektorraum.

Kern von $A = U = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; A\vec{x} = \vec{0}\right\}, A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$.

### 8.4.6. Lineare Abbildung

Eine Lineare Abbildung ist eine Funktion

$$L : \begin{cases} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \\ \vec{x} \mapsto L(\vec{x}) \end{cases}$$

mit den Eigenschaften

$$L(\vec{x} + \vec{y}) = L(\vec{x}) + L(\vec{y})$$

$$L(\lambda \vec{x}) = \lambda L(\vec{x})$$

Für jede lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gibt es eine (Abbildungs) Matrix $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit der Eigenschaft, dass $L(\vec{x}) = M\vec{x}$

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & \dots & m_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{m1} & \dots & m_{mn} \end{pmatrix}$$

$$m_{ij} = \vec{e}_i \bullet L(\vec{e}_j)$$

## 8.5. MATRIZEN

### 8.5.1. Glossar

| *Begriff* | *Bedeutung* |
|---|---|
| Spaltenvektoren | Spalten der Matrix als Vektoren |
| Zeilenvektoren | Zeilen der Matrix als Vektoren |
| Rang | Wieviele Spaltenvektoren einer Matrix linear unabhängig sind |
| Nullmatrix | $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ |
| Quadratische Matrix | $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ Gleichviele Zeichen und Spalten |
| Diagonalmatrix | (immer quadratisch und symmetrisch): $D = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 \end{pmatrix}, d_{ij} = 0 \text{ für } i \neq j$ |
| Einheitsmatrix | (immer diagonal): $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ |
| Symmetrische Matrix | (immer quadratisch): $A = A^T, a_{ij} = a_{ij}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ |
| Obere Dreiecksmatrix | $O = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & x_4 & x_5 \\ 0 & 0 & x_6 \end{pmatrix}, o_{ij} = 0 \text{ für } i > j$ |
| Kovarianzmatrix | immer symmetrisch |
| Reguläre Matrix | Quadratische Matrix mit höchstem Rang (Rang = Anzahl Spalten/Reihen) |
| Singuläre Matrix | Quadratische Matrix mit kleinerem Rang (Rang < Anzahl Spalten/Reihen) |
| Invertierbare Matrix | Für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heisst $A$ invertierbar, wenn es eine Matrix $A^{-1}$ gibt, so dass $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = \text{Einheitsmatrix (E)}$. Dies ist der Fall, wenn $A$ Regulär ist. |

### 8.5.2. Definition

Matrix mit 2 Zeilen und 3 Spalten

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$$

Komponenten von $A$: $a_{ij}$
$i$: Zeilenindex, $j$: Spaltenindex. Bsp: $a_{23} = 7$

### 8.5.3. Matrizen als Vektoren interpretieren

→ $A$ ist ein 6-Dimensionaler VR (Vektorraum)

$$\textbf{Variante 1: } \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \\ a_{14} \\ a_{15} \\ a_{16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \\ 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\textbf{Variante 2: } \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \\ a_{14} \\ a_{15} \\ a_{16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{R}^n \textbf{ interpretiere als } \begin{cases} \mathbb{R}^{n\times 1} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \textbf{ Spaltenvektor} \\ \mathbb{R}^{1\times n} \rightarrow (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n) \textbf{ Zeilenvektor} \end{cases}$$

Zu $A$ gehörige Zeilenvektore $\vec{a_1} = (1 \ 4 \ 5), \vec{a_2} = (2 \ 3 \ 7)$

$$A = \begin{pmatrix} \leftarrow \vec{a_1} \rightarrow \\ \leftarrow \vec{a_2} \rightarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Zu $A$ gehörige Spaltenvektore $\vec{a_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{a_2} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{a_3} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \vec{a_1} & \vec{a_2} & \vec{a_3} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

### 8.5.4. Matrizen transponieren

Transponierte Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ wäre: $A^T \in \mathbb{R}^{n\times m}$
$A = \left(a_{ij}\right), A^T = \left(a_{ji}\right)$
Rolle von Zeile und Spalte vertauscht: $a_{ij} \rightarrow a_{ji}$
Bsp:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}^T = (1 \ 4 \ 5)$$

### 8.5.5. Matrixmultiplikation

Meistens nicht kommutativ ($A \cdot B \neq B \cdot A$)
$B$ muss genau gleich viele Zeilen haben wie $A$ Spalten

$$A \in \mathbb{R}^{m \times l}, B \in \mathbb{R}^{l \times n}, C = A \cdot B \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{l} a_{ik} b_{kj}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 1 & 0 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2 \cdot 6 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 8) & (2 \cdot 4 + 3 \cdot 0 + 1 \cdot 9) \\ (4 \cdot 6 + -1 \cdot 1 + 7 \cdot 8) & (4 \cdot 4 + -1 \cdot 0 + 7 \cdot 9) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 17 \\ 79 & 79 \end{pmatrix}$$

### 8.5.6. Rechenregeln

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) = A \cdot B \cdot C$$
$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$$
$$C \cdot (A + B) = C \cdot A + C \cdot B$$
$$E \cdot A = A \cdot E = A \text{ für } A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$
$$(A^T)^T = A$$
$$(A + B)^T = A^T + B^T$$
$$(\lambda A)^T = \lambda A^T$$
$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

## 8.6. ANALYTISCHE GEOMETRIE

beste playlist

### 8.6.1. Geraden

#### 8.6.1.1. Parameterform

$$g : \vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{Ortsvektor } \vec{p}} + t \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}}_{\text{Richtungsvektor } \overrightarrow{PX}}, t \in \mathbb{R}$$

### 8.6.2. Ebenen

#### 8.6.2.1. Parameterform

$$E : \underbrace{\vec{x}}_{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{Ortsvektor } \vec{o}} + s \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}}_{\text{Spannvektor } \overrightarrow{AB}} + t \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}}_{\text{Spannvektor } \overrightarrow{AC}}, s, t \in \mathbb{R}$$

#### 8.6.2.2. Normalenform / Koordinatenform

$$E = \left[ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\text{Punkt auf Ebene}} \right] \bullet \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\vec{n} \text{ Orthogonal zur Ebene}} = 0$$

$$\Rightarrow x - 1 - z + 3 = 0$$

#### 8.6.2.3. Hessesche Normalform

Abstand von Punkt $P(2, 8, 2)$ zur Ebene $E : 2x - y + 4z = 1$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\left|\vec{n}\right| = \sqrt{21}$$

$$\frac{2x - y + 4z - 1}{\sqrt{21}}$$

$$\Rightarrow \frac{2 * 2 - 1 * 8 + 4 * 2 - 1}{\sqrt{21}}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{21}}$$