Analysis für Informatik 2 | An2I

Zusammenfassung

INHALTSVERZEICHNIS

1. TAYLORPOLYNOM

- Approximation von Funktionen durch Polynome
- Innerhalb vom Konvergenzradius sind Funktionen immer durch unendliche Polynome perfekt approximierbar

1.1. BERECHNUNG

Jede Ableitung ist die nächste Unbekannte:

$$\begin{aligned}
p(x) &= a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 \\
p'(x) &= 0 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 2(x-x_0) + a_3 3(x-x_0)^2 \\
p''(x) &= 0 + 0 + a_2 \cdot 2 + a_3 6(x-x_0) \\
p'''(x) &= 0 + 0 + 0 + a_3 6 \\
p''''(x) &= 0 + 0 + 0 + 0
\end{aligned}$$

x_0 einsetzen:

$$\begin{aligned}
p(x_0) &= a_0 + \cancel{a_1(x_0-x_0)} + \cancel{a_2(x_0-x_0)^2} + \cancel{a_3(x_0-x_0)^3} = a_0 \\
p'(x_0) &= 0 + a_1 \cdot 1 + \cancel{a_2 \cdot 2(x_0-x_0)} + \cancel{a_3 3(x_0-x_0)^2} = a_1 \cdot 1 \\
p''(x_0) &= 0 + 0 + a_2 \cdot 2 + \cancel{a_3 6(x_0-x_0)} = a_2 \cdot 2 \cdot 1 \\
p'''(x_0) &= 0 + 0 + 0 + a_3 6 = a_3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \\
p''''(x_0) &= 0 + 0 + 0 + 0
\end{aligned}$$

Somit:

$$p^{(n)}(x_0) = a_n \cdot n!$$

$$\Leftrightarrow a_n = \frac{p^{(n)}(x_0)}{n!}$$

***Beispiel** 1*

$p(x) = 3x^3 - 2x + 5$
Entwicklungspunkt **EWP** $= x_0 = 1$

NR:

$$p(x) = 3x^3 - 2x^5$$

$$p'(x) = 9x^2 - 2$$

Linearisierung:

$$p(x_0) = 3x_0^3 - 2x_0^5 = 3 - 2 + 5 = 6$$

$$p'(x_0) = 9x_0^2 - 2 = 9 - 2 = 7$$

Ergo: $p(x) \approx 6 + 7(x-1)$ = Taylor-Polynom von Grad 1
Taylor-Polynom von Grad 3: $p(x) \approx \underbrace{6 + 7(x-1)}_{\text{Linearisierung}} +?\,(x-1)^2 +?\,(x-1)^3$

$$\begin{aligned}
p(x_0) &= 3x_0^3 - 2x_0^5 = 3 - 2 + 5 = 6 &&= a_0 &&\Rightarrow a_0 = 6 \\
p'(x_0) &= 9x_0^2 - 2 = 9 - 2 &&= 7 = 1 \cdot a_1 &&\Rightarrow a_1 = 7 \\
p''(x_0) &= 18x_0 &&= 18 = 1 \cdot 2 \cdot a_2 &&\Rightarrow a_2 = 9 \\
p'''(x_0) &= 18 &&= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a_3 &&\Rightarrow a_3 = 3
\end{aligned}$$

Gibt uns:

$$p(x) \approx 6 + 7(x-1) + 9(x-1)^2 + 3(x-1)^3$$

1.2. GENERALISIERUNG

Für ein Polynom $p(x)$ vom Grad n und einem Entwicklungspunkt x_0 gilt:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{p^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Für eine Funktion $f(x)$ und einen EWP x_0 heisst

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Taylor-Polynom von Grad n für $f(x)$ um EWP x_0

***Beobachtungen** 2*

2.1 In der Nähe des EWP x_0 gilt $f(x) \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$

2.2 Je grösser n ist, umso kleiner ist der Unterschied der beiden Seiten

2.3 Der Unterschied ist umso kleiner, je näher x bei x_0 liegt

***Beispiel** 2* **:** $f(x) = e^x$, **EWP** $x_0 = 0$

Gesucht: Taylor-Polynom vom Grad n

$$\begin{aligned}
f(x) &= e^x \Rightarrow f(0) &&= e^0 = 1 \\
f'(x) &= e^x \Rightarrow f'(0) &&= e^0 = 1 \\
f''(x) &= e^x \Rightarrow f''(0) &&= e^0 = 1 \\
f^{(n)}(x) &= e^x \Rightarrow f^{(n)}(0) &&= e^0 = 1
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow e^x \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left((x-0)^k\right) \Leftrightarrow e^x \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(x^k\right)$$

1.3. TAYLORREIHE

Die Taylor-Reihe von $f(x)$ um den Entwicklungspunkt x_0 ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Es gibt eine Zahl $R > 0$, so dass $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$, für $|x - x_0| < R$
(R = Konvergenzradius)

1.4. FEHLERABSCHÄTZUNGEN

Wie weit liegt der vom Taylor-Polynom mit Grad n vorhergesagte Funktionswert vom richtigen Wert entfernt?

$$\begin{aligned}
\text{Rechenfehler} &= \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{p^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \right| \\
&\approx \left| \sum_{k=0}^{n+1} \frac{p^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k - \sum_{k=0}^{n} \frac{p^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \right| \\
&= \left| \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \right|
\end{aligned}$$

Es gibt eine Zahl $\xi \in [x_0; x]$, so dass

$$\begin{aligned}
\text{Rechenfehler} &= \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{p^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \right| \\
&= \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \right| \\
&= \frac{\left| f^{(n+1)}(\xi) \right|}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1} \\
&\leq \frac{\max_{\xi \in [x_0; x]} \left| f^{(n+1)}(\xi) \right|}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1}
\end{aligned}$$

(Falls $f(x)$ nicht berechenbar)

1.4.1. Anwendung

Gegeben: $f(x)$, Intervall $I = [a; b]$, max. Rechenfehler Δ
Gesucht: Grad des Taylor-Polynoms n, Entwicklungspunkt x_0

Antwort: $x_0 = \frac{a+b}{2} \Rightarrow |x - x_0| \leq \frac{b-a}{2}$
Bestimme n:

$$\begin{aligned}
&\frac{\max_{\xi \in [x_0; x]} \left| f^{(n+1)}(\xi) \right|}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1} \overset{!}{\leq} \Delta \\
&< \frac{m}{(n+1)!} \left(\frac{b-a}{2} \right)^{n+1} \qquad \mid m \text{ muss grösser als } \max_{\xi \in [x_0; x]} \left| f^{(n+1)}(\xi) \right| \text{ sein}
\end{aligned}$$

> ***Beispiel 3*:** **Gegeben: $f(x) = \sin(x)$ auf $I = [0; \pi]$ durch Taylor-Polynom mit Rechenfehler $\Delta = 0.01$**
> **berechnet werde: $x_0 = \frac{\pi}{2}$**

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sin(x) \\
f'(x) &= \cos(x) \\
f''(x) &= -\sin(x) \\
f'''(x) &= -\cos(x) \\
f''''(x) &= \sin(x) \\
&\vdots \\
f^{(n)}(x) &= \sin(x) \\
\Rightarrow \left|f^{(n+1)}(x)\right| &= \begin{cases} |\sin(x)| \\ |\cos(x)| \end{cases} \leq 1 \\
\Rightarrow m &= 1
\end{aligned}
$$

n muss so gewählt werden, dass

$$\frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+1} \leq 0.01$$

$$\frac{n!}{(n-1)!} = n \cdot (n-1)$$

$$\frac{n!}{(n-2)!} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2)$$

$$n! \cdot (n+1)! = (n+1)!$$