

Diskrete Mathematik | DMI

Zusammenfassung

INHALTSVERZEICHNIS

1. Aussagenlogik	3
1.1. Glossar	3
1.2. Formeln	3
1.3. Rechenregeln	3
2. Prädikatenlogik	4
2.1. Glossar	4
3. Beweisen	4
3.1. Induktion	4
3.1.1. Techniken	4
4. Direkte, iterative und rekursive Berechnungen	5
4.1. Glossar	5
5. Mengen	5
5.1. Glossar	5
5.2. Rechenregeln	5
6. Formeln, Abbildungen, Relationen	5
6.1. Glossar	5
7. Modulo-Rechnen	6
7.1. Glossar	6
7.2. Rechenregeln	7
7.3. Primfaktorenzerlegung	7
7.4. Euklidischer Algorithmus	7
7.5. Erweiterter Euklidischer Algorithmus	8
7.6. Kleiner Fermat	8
7.7. Satz von Euler	8
7.7.1. Euler'sche φ -Funktion (Totient)	8
7.8. RSA Verschlüsselung	8
8. Lineare Algebra	9
8.1. Glossar	9
8.2. Pivot-Gleichung	9
8.3. Gauss-Tableau	9
8.4. Vektoren	10
8.4.1. Glossar	10
8.4.2. Vektorenrechnen	12
8.4.3. Rechenregeln	12
8.4.4. Kreuzprodukt	12
8.4.5. Vektorraum	13
8.4.6. Lineare Abbildung	14
8.5. Matrizen	14
8.5.1. Glossar	14
8.5.2. Definition	15

8.5.3. Matrizen als Vektoren interpretieren	15
8.5.4. Matrizen transponieren	15
8.5.5. Matrizen invertieren	16
8.5.6. Matrixmultiplikation	16
8.5.7. Determinante	16
8.5.8. Eigenwerte	19
8.5.9. Eigenwert $\lambda = 2$	20
8.5.10. Eigenwert $\lambda = 3$	20
8.5.11. Diagonalisierbar	20
8.5.12. Rechenregeln	21
8.5.13. Alternative Berechnungsstrategie von Eigenwerten	21
8.6. Analytische Geometrie	21
8.6.1. Geraden	22
8.6.2. Ebenen	23

1. AUSSAGENLOGIK

1.1. GLOSSAR

<i>Begriff</i>	<i>Bedeutung</i>
Aussage	Feststellender Satz, dem eindeutig «wahr» oder «falsch» zugeordnet werden kann. Symbole wie A, B, C... werden dafür verwendet
Aussagenlogische Form	Kombination von Aussagen, verknüpft durch Junktoren
Aussageform	Aussagen verknüpft mit Variablen
Normalform	Standardisierte Aussagenlogische Formen (Formeln)
Negationsnormalform	\neg steht ausschliesslich direkt vor Aussagen oder Konstanten
Verallgemeinerte Disjunktion	<ul style="list-style-type: none"> – Einzelne Aussage oder Negation – wahr oder falsch – Disjunktion $A \vee B$, falls A und B selbst verallgemeinerte Disjunktionen sind
Verallgemeinerte Konjunktion	<ul style="list-style-type: none"> – Einzelne Aussage oder Negation – wahr oder falsch – Konjunktion $A \wedge B$, falls A und B selbst verallgemeinerte Konjunktionen sind
Disjunktive Normalform	Disjunktion von (oder eine einzelne) verallgemeinerten Konjunktionen Beispiel: $(A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C)$
Konjunktive Normalform	Konjunktion von (oder eine einzelne) verallgemeinerten Disjunktionen Beispiel: $(A \vee B \vee C) \wedge (A \vee \neg B \vee \neg C)$
Kontradiktion	Immer falsch
Tautologie	Immer wahr
Junktoren (/Konnektoren)	\neg Negation \wedge Konjunktion \vee Disjunktion (einschliessliches oder!) \Rightarrow Implikation \Leftrightarrow Äquivalenz
Bindungsstärke	\neg vor \wedge , \vee vor $\Rightarrow, \Leftrightarrow$

1.2. FORMELN

$$\begin{aligned}
 (A \Rightarrow B) &\Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A) & (A \Leftrightarrow B) &\Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B) & A \vee (\neg A \wedge B) &\Leftrightarrow A \vee B \\
 (A \Rightarrow B) &\Leftrightarrow (\neg A \vee B) & \neg(A \Rightarrow B) &\Leftrightarrow A \wedge \neg B & (A \Rightarrow B \Rightarrow C) &\Leftrightarrow (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)
 \end{aligned}$$

1.3. RECHENREGELN

<i>Begriff</i>	<i>Bedeutung</i>
Abtrennungsregel	$(A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$
Kommutativität	$(A \wedge B) \Leftrightarrow (B \wedge A)$ $(A \vee B) \Leftrightarrow (B \vee A)$
Assoziativität	$A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$ $A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow (A \vee B) \vee C$
Distributivität	$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

<i>Begriff</i>	<i>Bedeutung</i>
Absorption	$A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$ $A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$
Idempotenz	$A \vee A = A$ $A \wedge A = A$
Doppelte Negation	$\neg(\neg A) \Leftrightarrow \neg\neg A \Leftrightarrow A$
Konstanten	$W = \text{wahr}$ $F = \text{falsch}$
de Morgan	$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$ $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

2. PRÄDIKATENLOGIK

2.1. GLOSSAR

<i>Begriff</i>	<i>Bedeutung</i>
Subjekt	«Konkretes Ding» / Stellvertreter einer Variable
Prädikat	«Eigenschaft», zB «ist eine Primzahl» Prädikate werden oft wie Funktionen geschrieben. Ist P ein Prädikat, dann bedeutet $P(x)$, dass x das Prädikat erfüllt. $P(x)$ ist eine Aussageform.
Quantor	\forall Allquantor (Für alle) \exists Existenzquantor (Es existiert)

3. BEWEISEN

3.1. INDUKTION

$$A(1) \wedge (A(n) \Rightarrow A(n+1)) \Rightarrow A(m), m \in \mathbb{N}$$

Beispiel 1 : $2 \mid (6^n)$

- 1) Verankerung: $n = 0$
 - $2 \mid (6^0)$
- 2) Induktionsschritt $n \rightarrow n+1$
 - $2 \mid (6^{n+1})$
 - a) Induktionsannahme: $2 \mid (6^n)$
 - b) Behauptung: $2 \mid (6^{n+1})$
 - c) Beweis: Verwendung der Annahme, um Richtigkeit der Behauptung zu zeigen $2 \mid (6^n + 6)$

3.1.1. Techniken

- 1) Direkter Beweis $f(n) = f_1(n) = f_2(n) = \dots = f_m(n) = g(n)$
- 2) Differenz gleich Null $f(n) - g(n) = 0 \Rightarrow f(n) = g(n)$
- 3) Äquivalenzumformung
- 4) Dritte Grösse (vereinfachen) $g(n) = h(n) = f(n)$

4. DIREKTE, ITERATIVE UND REKURSIVE BERECHNUNGEN

4.1. GLOSSAR

Begriff	Bedeutung
Folge	Nummerierte Liste von Objekten (Folgegliedern)
Reihe	Summe von Folgegliedern einer Zahlenfolge

5. MENGEN

5.1. GLOSSAR

Begriff	Bedeutung
Aufzählend	$\{1, 2, 3\}$
Beschreibend	$\{x \in \mathbb{N}^+ \mid x < 4\}$
Mächtigkeit	Anzahl Elemente einer Menge $ M $
Potenzmenge	Menge aller Teilmengen einer Menge $P(M)$ $ P(M) = 2^{ M }$
Teilermenge	$T(n)$ = Menge der Teiler der Zahl n
Kartesisches Produkt	$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$

5.2. RECHENREGELN

Für die Mengen A und B in der Obermenge M gelten die folgen- Weiteres:
den Aussagen:

$$\begin{array}{llll}
 A \setminus \emptyset = A & A \cup \bar{A} = M & A \setminus B = A \cap \bar{B} & (A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C) \\
 A \setminus A = \emptyset & \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} & \overline{A \setminus B} = \bar{A} \cup B & A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C) \\
 \overline{\bar{A}} = A & \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} & (A \setminus B) \cup (A \cap B) = A & \\
 A \cap \bar{A} = \emptyset & A \setminus (A \setminus B) = A \cap B & (A \setminus B) \cap (A \cap B) = \emptyset &
 \end{array}$$

6. FORMELN, ABBILDUNGEN, RELATIONEN

6.1. GLOSSAR

Begriff	Bedeutung
Funktion/Abbildung	Zuordnung, die jedem Element der Definitionsmenge D genau ein Element einer Zielmenge Z zuordnet. Injektive Relation $f : D \rightarrow Z$ Abbildungen mit mehreren Argumenten: $f : A \times B \rightarrow Z, f(a, b) = y$
Graph	Menge von Paaren $(x, f(x))$ $G \in D \times Z$

Begriff	Bedeutung
Relation	Teilmenge des Kartesischen Produktes mehrerer Mengen $A = \prod_{i=1}^n A_i, A_i = n_i \Rightarrow A = \prod_{i=1}^n n_i$ <ul style="list-style-type: none"> Kleiner-Relation: $R_{<} = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B, a < b\}$ Gleich-Relation: $R_{=} = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B, a = b\}$ Kleiner-Gleich-Relation: $R_{\leq} = R_{=} \cup R_{<} = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B, a \leq b\}$
Surjektiv	Alle Elemente der Definitions- und Zielmenge sind «verknüpft» / jedes Element der Bildmenge kommt als Bild vor
Injektiv	Alle Inputs haben eindeutige Outputs $a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$
Bijektiv	Surjektiv und Injektiv
Reflexiv	Alle Elemente von A stehen zu sich selbst in Beziehung $a \in A \Rightarrow (a, a) \in R$ $A \Leftrightarrow A$
Symmetrisch	$(a, b) \in R \wedge (b, a) \in R$ $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow A)$
Transitiv	$(a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$ $(A \Leftrightarrow B) \wedge (B \Leftrightarrow C) \Rightarrow (A \Leftrightarrow C)$
Äquivalenzrelation	reflexiv, symmetrisch und transitiv $\Leftrightarrow, =$
Irreflexiv	$a \in A \Rightarrow \neg(a, a) \in R$
Asymmetrisch	$(a, b) \in R \Rightarrow \neg(b, a) \in R$
Antisymmetrisch	$((a, b) \in R) \wedge ((b, a) \in R) \Rightarrow a = b$
Ordnungsrelation	reflexiv, antisymmetrisch und transitiv \leq
Symmetrische Differenz	$A \Delta B = \{x \in G \mid (x \in A \cup B) \wedge \neg(x \in A \cap B)\}$ $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$

7. MODULO-RECHNEN

Die Modulo-Relation ist eine **Äquivalenzrelation** auf \mathbb{Z} .

7.1. GLOSSAR

Begriff	Bedeutung
Teiler-Relation	Für $a, b \in \mathbb{Z}$ ist die Teiler-Relation $b \mid a \Leftrightarrow T(b, a) \Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{Z} : bq = a$ $b \mid a \Leftrightarrow -b \mid a$ $b \mid a \Leftrightarrow b \mid -a$ Ordnungsrelation auf \mathbb{N}
Modulo-Relation	Für $a, q, r \in \mathbb{Z}$ ist die Modulo-Relation $R_q(a, r) \Leftrightarrow q \mid a - r \Leftrightarrow a \equiv r \pmod{q}$
\sim	«relates to» $a \sim b \Leftrightarrow (a, b) \in R$

Begriff	Bedeutung
Quotient, Rest	Zu jeder Zahl $a \in \mathbb{Z}$ und jeder Zahl $b \in \mathbb{Z}$ gibt es eindeutig bestimmte Zahlen $q, r \in \mathbb{Z}$ mit $a = q \cdot b + r, 0 \leq r < b$ Bsp: $7 = 2 \cdot 3 + 1$ q heisst Quotient r heisst Rest
Restklassen	$[b]_q = \{a \in \mathbb{Z} \mid a \equiv b \pmod{q}, q > 0\}$ $\mathbb{Z}_q = \{[0]_q, [1]_q, [2]_q, \dots, [q-1]_q\} = \underbrace{\{0, 1, 2, 3, \dots, q-1\}}_{\text{Vereinfachung}}$
Multiplikatives Inverses	Für $a \in \mathbb{Z}_q$ ist $b \in \mathbb{Z}_q$ das multiplikative inverse von a , wenn $a \cdot b \equiv 1 \pmod{q}$
Nullteiler	Wenn für $a, b \in \mathbb{Z}_q : ab \equiv 0 \pmod{q}$ und $a \not\equiv 0 \pmod{q} \wedge b \not\equiv 0 \pmod{q}$, heissen a, b Nullteiler

7.2. RECHENREGELN

- 1) $(a + b) \pmod{n} = ((a \pmod{n}) + (b \pmod{n})) \pmod{n}$
- 2) $(a - b) \pmod{n} = ((a \pmod{n}) - (b \pmod{n})) \pmod{n}$
- 3) $(a \cdot b) \pmod{n} = ((a \pmod{n}) \cdot b \pmod{n}) \pmod{n}$
- 4) $a^d \pmod{n} = (a^{d-x} \cdot a^x) \pmod{n} = ((a^{d-x} \pmod{n}) \cdot (a^x \pmod{n})) \pmod{n}$

7.3. PRIMFAKTORENZERLEGUNG

Begriff	Bedeutung
$\text{ggT}(a, b)$	$\max\{d \in \mathbb{N} \mid d \mid a \wedge d \mid b\}$
$\text{kgV}(a, b)$	$\min\{m \in \mathbb{N} \mid a \mid m \wedge b \mid m\}$ $\frac{ab}{\text{ggT}(a,b)}$
Teilerfremd	Zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$ heissen Teilerfremd , wenn $\text{ggT}(a, b) = 1$ Sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl und $q \in \mathbb{N}, q < p, q \neq 0$ dann ist $\text{ggT}(p, q) = 1$

7.4. EUKLIDISCHER ALGORITHMUS

Seien $a, b \in \mathbb{N}, a \neq b, a \neq 0, b \neq 0$

Initialisierung: Setze $x := a, y := b$ und $q := x, r := x - q \cdot y$ (d.h. bestimme q und r so, dass $x = q \cdot y + r$ ist)

Wiederhole bis $r = 0$ ist

Ergebnis: $y = \text{ggT}(a, b)$

Beispiel 2: $\text{ggT}(122, 72), a = 122, b = 72$

– Init: $x_0 = a = 122, y_0 = b = 72$

– Iteration:

	$x = y_{-1}$	$y = r_{-1}$	$q = x \text{ div } y$	$r = x \bmod y = x - q \cdot y$
$i = 0$	122	72	1	50
$i = 1$	72	50	1	22 Muster: $r_{i+1} < r_i$
$i = 2$	50	22	2	6
$i = 3$	22	6	3	4
$i = 4$	6	4	1	2
$i = 5$	4	2 = $\text{ggT}(122, 72)$	2	0 (immer 0 am Schluss)

7.5. ERWEITERTER EUKLIDISCHER ALGORITHMUS

Seien $a, b \in \mathbb{N}, a \neq 0, b \neq 0$

Initialisierung: Setze $x := a, y := b, q := x \div y, r := x - q \cdot y, (u, s, v, t) = (1, 0, 0, 1)$ (d.h. bestimme q und r so, dass $x = q \cdot y + r$ ist)

Wiederhole bis $r = 0$ ist

Ergebnis: $y = \text{ggT}(a, b) = s \cdot a + t \cdot b$

Wenn $\text{ggT}(a, b) = 1$ ist, dann folgt: $t \cdot v \equiv 1 \pmod{a}$

Beispiel 3: $\text{ggT}(99, 79)$

i	$x = y_{-1}$	$y = r_{-1}$	$q = x \div y$	$r = x - q \cdot y$	$u = s_{-1}$	$s = u_{-1} - q_{-1} \cdot s_{-1}$	$v = t_{-1}$	$t = v_{-1} - q_{-1} \cdot t_{-1}$
$i = 0$	99	79	1	20	1	0	0	1
$i = 1$	79	20	3	19	0	1	1	-1
$i = 2$	20	19	1	1	1	-3	-1	4
$i = 3$	19	1	19	0	-3	4	4	-5

Daraus folgend:

– $\text{ggT}(99, 79) = 4 \cdot 99 + (-5) \cdot 79 \Leftrightarrow 396 - 395 = 1$

– $99 + (-5) = 94$ ist mult. Inv. von 79 in \mathbb{Z}_{99}

– $79 + 4 = 83 \equiv 4$ ist mult. Inv. von 99 in \mathbb{Z}_{79}

7.6. KLEINER FERMAT

Sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl und $x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ mit

$\text{ggT}(x, p) = 1$

Dann ist: $x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

Daraus folgend:

$$x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p} \quad | ()^n$$

$$\Leftrightarrow x^{n(p-1)} \equiv 1 \pmod{p} \quad | \cdot x$$

$$\Leftrightarrow x^{1+n(p-1)} \equiv x \pmod{p}$$

$$\Leftrightarrow x^{1 \bmod (p-1)} \equiv x \pmod{p}$$

7.7. SATZ VON EULER

Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $z \in \mathbb{Z}$ mit $\text{ggT}(z, n) = 1$. Dann ist $z^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$.

7.7.1. Euler'sche φ -Funktion (Totient)

Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $\mathbb{Z}_n^* = \{x \in \mathbb{Z}_n \mid x \text{ hat ein multiplikatives Inverses in } \mathbb{Z}_n\}$.

Dann heisst $\varphi(n)$:

$$\begin{aligned} \varphi(n) &= \text{Anz. Elemente in } \mathbb{Z}_n \text{ mit mult. Inversen} \\ &= \text{Anz. Zahlen } 1 \leq q \leq n \text{ mit } \text{ggT}(q, n) = 1 \\ &= |\mathbb{Z}_n^*| \end{aligned}$$

7.7.1.1. Rechenregeln

1) Sei $n \in \mathbb{N}$ eine Primzahl, dann $\varphi(n) = n - 1$

2) Sei $n \in \mathbb{N}$ eine Primzahl und $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, dann $\varphi(n^p) = n^{p-1} \cdot (n - 1)$

3) Seien $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $\text{ggT}(m, n) = 1$, dann $\varphi(n \cdot m) = \varphi(n) \cdot \varphi(m)$

7.8. RSA VERSCHLÜSSELUNG

1) Wähle 2 Primzahlen p, q

2) Berechne $n = p \cdot q$

3) Berechne $\varphi(n) = (p - 1)(q - 1)$

4) Wähle a, b so, dass $a \cdot b \equiv 1 \pmod{\varphi(n)}$

5) Vergesse $p, q, \varphi(p \cdot q)$. Brauchen wir nicht und riskieren nur, dass uns jemand hackt

Public key ist nun n, b , Private key ist n, a

Verschlüsseln: $c^a \bmod n$

Entschlüsseln: $z^b \bmod n \Leftrightarrow c^{a^b} \bmod n$

Sidenote: Fürs Alphabet muss n grösser sein als 26

8. LINEARE ALGEBRA

[3b1b <3](#)

8.1. GLOSSAR

Begriff	Bedeutung
Homogenes LGS	$M \cdot \vec{x} = \vec{0}$
Inhomogenes LGS	$M \cdot \vec{x} = \vec{b}$
Lineare Abbildung	$L : \begin{cases} \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \\ \vec{x} \mapsto M\vec{x} \end{cases}$ $\text{kern}(L) = \{\vec{0}\} \Leftrightarrow L$ ist injektiv
Kern	Lösungsmenge des Homogenen LGS = $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid L(\vec{x}) = \vec{0}\}$

8.2. PIVOT-GLEICHUNG

$$(I) \quad 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 = -6$$

$$(II) \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -10$$

$$(III) \quad 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 = -18$$

\Rightarrow

$$(I') \quad 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 = -6$$

$$(II') = (II) - (I) \quad 1x_2 + 2x_3 = -4$$

$$(III') = (III) - 2(I) \quad 1x_2 + 4x_3 = -6$$

\Rightarrow

$$(I'') \quad 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 = -6 \Rightarrow x_1 = -6 - x_2 - x_3 = -6 + 2 + 1 = -3$$

$$(II'') = (II) \quad 1x_2 + 2x_3 = -4 \Rightarrow x_2 = -4 - 2x_3 = -4 + 2 = -2$$

Rückwärtssubstitution

$$(III'') = (III') - (II'') \quad 2x_3 = -2 \Rightarrow x_3 = -1$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

8.3. GAUSS-TABLEAU

	x_1	x_2	x_3	1	
I	1	1	1	-6	
II	1	2	3	-10	-(I)
III	2	3	6	-18	-2(II)
\Rightarrow					
I'	1	1	1	-6	

II'	0	1	2	-4	
III'	0	1	4	-6	$-(II')$

⇒

I''	1	1	1	-6	
II''	0	1	2	-4	
III''	0	0	2	-2	$\cdot \frac{1}{2}$

⇒

I'''	1	1	1	-6	$-(III''')$
II'''	0	1	2	-4	$-2(III''')$
III'''	0	0	1	-1	

⇒

Koeffizientenmatrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

	x_1	x_2	x_3	1	
I''''	1	1	0	-5	$-(II''')$
II''''	0	1	0	-2	
III''''	0	0	1	-1	

⇒

	1	0	0	-3	
	0	1	0	-2	
	0	0	1	-1	

Ergebnisvektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$ Lösungsvektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ Lineares Gleichungssystem $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$

p = Anzahl Pivot-Variablen.

Wenn $b_{p+1} = \dots = b_m = 0$ dann ist das LGS lösbar (homogenes Gleichungssystem), sonst unlösbar.

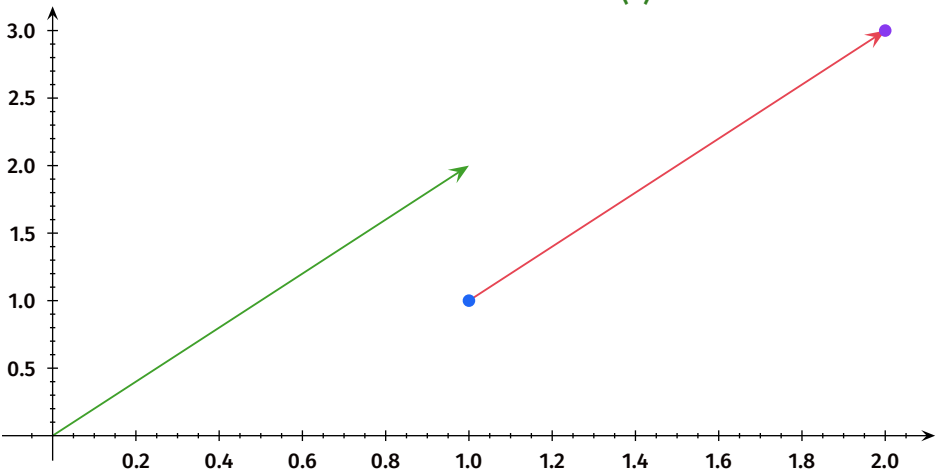
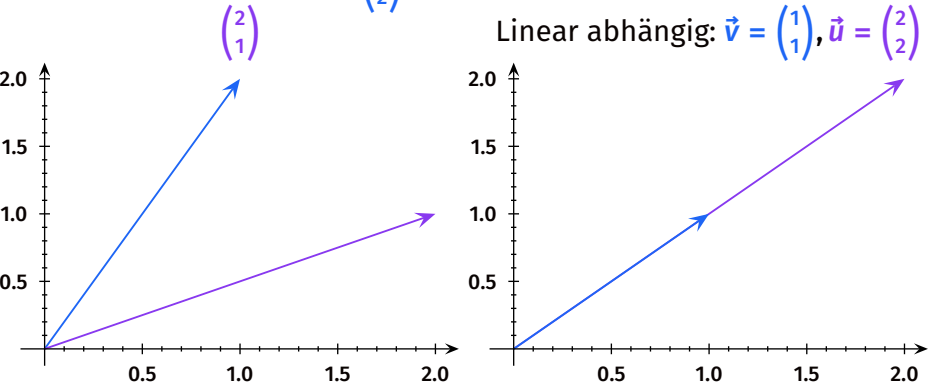
Wenn $p = n$ dann hat LGS genau eine Lösung.

Wenn $p < n$ dann hat LGS unendlich viele Lösungen.

8.4. VEKTOREN

8.4.1. Glossar

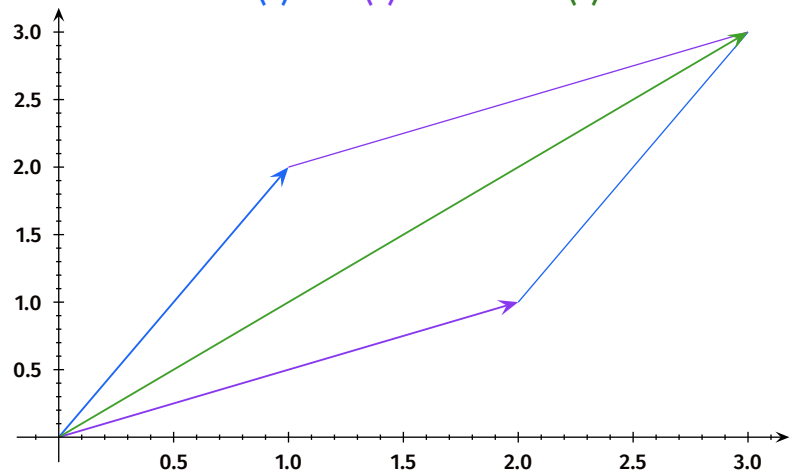
Begriff	Bedeutung
Vektor	Liste von Zahlen
Nullvektor	$\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
Ortsvektor	Ortsvektor \vec{p} vom Nullpunkt des Koordinatensystems $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ zum Punkt P

Begriff	Bedeutung
Richtungsvektor	<p>Richtungsvektor \vec{AB} vom Punkt A zum Punkt B ist $\vec{b} - \vec{a}$</p> <p>$A = (1; 1), B = (2; 3), \vec{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$</p> 
Linearkombination	<p>Linearkombination der Variablen x_1, x_2, x_3 (Bsp. $3 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 = -6$). Vektoren werden jeweils mit einer Zahl multipliziert und miteinander summiert</p>
Lineare Unabhängigkeit	<p>$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ heißen linear unabhängig, wenn die Gleichung $\lambda_1 \cdot \vec{v}_1, \lambda_2 \cdot \vec{v}_2, \dots, \lambda_n \cdot \vec{v}_n = \vec{0}$ genau eine Lösung hat, nämlich $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$</p> <p>$\begin{pmatrix} \uparrow & \dots & \uparrow \\ \vec{v}_1 & \dots & \vec{v}_n \\ \downarrow & \dots & \downarrow \end{pmatrix} \cdot \vec{\lambda} = \vec{0}$ eindeutig lösbar $\Rightarrow \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ sind linear unabhängig</p> <p>Linear unabhängig: $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$</p>  <p>Linear abhängig: $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$</p>
Skalarprodukt	<p>$\vec{a} \cdot \vec{b} = c$</p> $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$
Betrag/Länge eines Vektors	<p>$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$</p> <p>$\vec{a} = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 5^2} = \sqrt{38}$</p>

8.4.2. Vektorenrechnen

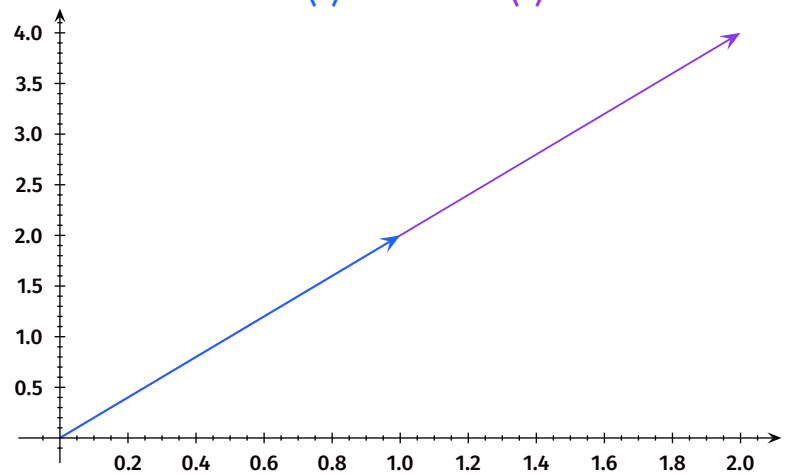
Addition:

$$\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+5 \\ 2+(-9) \\ 3+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix}$$



Multiplikation mit reellen Zahlen (=Skalare):

$$3 \cdot \vec{v} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$



8.4.3. Rechenregeln

Falls die Vektoren senkrecht zueinanderstehen, ist das Skalarprodukt gleich 0

$$\lambda \vec{0} = \vec{0}$$

$$\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$$

$$-\vec{v} = -1 \cdot \vec{v}$$

$$-\vec{v} + \vec{v} = \vec{0}$$

$$(\lambda \mu) \vec{v} = \lambda (\mu \vec{v}) = \lambda \mu \vec{v}$$

$$\lambda (\vec{v} + \vec{w}) = \lambda \vec{v} + \lambda \vec{w}$$

$$\vec{v} + (\vec{u} + \vec{w}) = (\vec{v} + \vec{u}) + \vec{w} = \vec{v} + \vec{u} + \vec{w}$$

8.4.4. Kreuzprodukt

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} a_y b_z - a_z b_y \\ + a_z b_x - a_x b_z \\ + a_x b_y - a_y b_x \end{matrix} \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

8.4.4.1. Eigenschaften

Anti-kommutativ: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$. Konsequenz: $\vec{a} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$

Distributiv: $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

Gemischt-assoziativ: $\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b})$

Das Kreuzprodukt ist **nicht** assoziativ. $\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c}$ darf man nicht! $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$

8.4.4.2. Geometrische Eigenschaften

$\vec{a} \times \vec{b}$ steht immer senkrecht auf \vec{a} und auf \vec{b} .

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$ bilden ein Rechtssystem

$|\vec{a} \times \vec{b}|$ = Flächeninhalt des durch \vec{a} und \vec{b} aufgespannten Parallelogramms
 $= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi)$

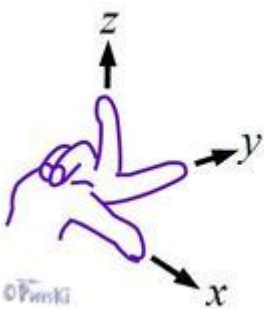


Abbildung 1: Rechtssystem

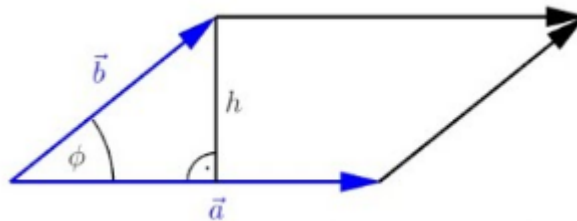


Abbildung 2: Flächeninhalt $h \cdot a$

8.4.5. Vektorraum

Ein Vektorraum ist eine Menge V mit den Rechenoperationen:

$$\oplus : V \times V \rightarrow V, (\vec{v}, \vec{w}) \mapsto \vec{v} \oplus \vec{w}$$

$$\odot : \mathbb{R} \times V \rightarrow V, (\lambda, \vec{v}) \mapsto \lambda \odot \vec{v}$$

Mit den Eigenschaften:

– Vektoraddition:

– **Assoziativgesetz**: $u \oplus (v \oplus w) = (u \oplus v) \oplus w$

– Existenz eines **neutralen Elements** $0_V \in V$ mit $v \oplus 0_V = 0_V \oplus v = v$

– Existenz eines zu $v \in V$ **inversen Elements** $-v \in V$ mit $v \oplus (-v) = (-v) \oplus v = 0_V$

– **Kommutativgesetz**: $v \oplus u = u \oplus v$

– Skalarmultiplikation:

– $\alpha \odot (u \oplus v) = (\alpha \odot u) \oplus (\alpha \odot v)$

– $(\alpha + \beta) \odot v = (\alpha \odot v) \oplus (\beta \odot v)$

– $(\alpha \cdot \beta) \odot v = \alpha \odot (\beta \odot v)$

– $1 \odot v = v$ für das **Einselement** $1 \in K$ des **Skalkörpers**

Gelten diese Eigenschaften für die Teilmenge eines grösseren Vektorraums W , so nennt man V **Untervektorraum** von W . Heisst: Man hat nur dann einen Untervektorraum V , wenn die Produkte der Multiplikation oder Addition der Elemente dieses Raumes auch in V liegen. Untervektorräume sind also unendliche

Räume mit n Dimensionen weniger, zB $W = 3$ -Dimensionaler Vektorraum, $V = 2$ -Dimensionaler Untervektorraum.

Kern von $A = U = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\vec{x} = \vec{0}\}$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ist ein Untervektorraum von \mathbb{R}^n .

8.4.6. Lineare Abbildung

Eine Lineare Abbildung ist eine Funktion

$$L: \begin{cases} \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \\ \vec{x} \mapsto L(\vec{x}) \end{cases}$$

mit den Eigenschaften

$$L(\vec{x} + \vec{y}) = L(\vec{x}) + L(\vec{y})$$

$$L(\lambda \vec{x}) = \lambda L(\vec{x})$$

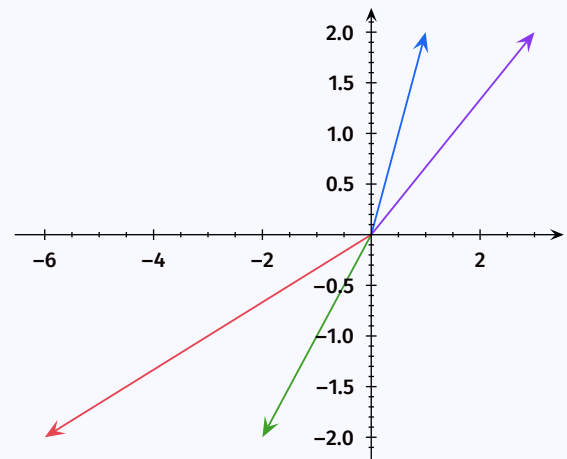
Für jede lineare Abbildung $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ gibt es eine (Abbildungs) Matrix $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit der Eigenschaft, dass $L(\vec{x}) = M\vec{x}$

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & \dots & m_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{m1} & \dots & m_{mn} \end{pmatrix}$$

$$m_{ij} = \vec{e}_i \cdot L(\vec{e}_j)$$

Beispiel 4: $M = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\vec{c} = M\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{d} = M\vec{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix}$$



8.5. MATRIZEN

8.5.1. Glossar

Begriff	Bedeutung
Spaltenvektoren	Spalten der Matrix als Vektoren
Zeilenvektoren	Zeilen der Matrix als Vektoren
Rang	Wieviele Spaltenvektoren einer Matrix linear unabhängig sind
Nullmatrix	$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$
Quadratische Matrix	$M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ Gleichviele Zeilen und Spalten
Diagonalmatrix	(immer quadratisch und symmetrisch): $D = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 \end{pmatrix}$, $d_{ij} = 0$ für $i \neq j$
Einheitsmatrix	(immer diagonal): $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Symmetrische Matrix	(immer quadratisch): $A = A^T$, $a_{ij} = a_{ji}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$
Obere Dreiecksmatrix	$O = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & x_4 & x_5 \\ 0 & 0 & x_6 \end{pmatrix}$, $o_{ij} = 0$ für $i > j$
Kovarianzmatrix	immer symmetrisch
Reguläre Matrix	Quadratische Matrix mit höchstem Rang (Rang = Anzahl Spalten/Reihen)

Begriff	Bedeutung
Singuläre Matrix	Quadratische Matrix mit kleinerem Rang (Rang < Anzahl Spalten/Reihen)
Invertierbare Matrix	Für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heisst A invertierbar, wenn es eine Matrix A^{-1} gibt, so dass $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = \text{Einheitsmatrix (E)}$. Dies ist der Fall, wenn A Regulär ist.

8.5.2. Definition

Matrix mit 2 Zeilen und 3 Spalten

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$$

Komponenten von A : a_{ij}

i : Zeilenindex, j : Spaltenindex. Bsp: $a_{23} = 7$

8.5.3. Matrizen als Vektoren interpretieren

→ A ist ein 6-Dimensionaler VR (Vektorraum)

$$\text{Variante 1: } \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \\ a_{14} \\ a_{15} \\ a_{16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \\ 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \text{ Variante 2: } \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \\ a_{14} \\ a_{15} \\ a_{16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{R}^n \text{ interpretiere als } \begin{cases} \mathbb{R}^{n \times 1} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \text{ Spaltenvektor} \\ \mathbb{R}^{1 \times n} \rightarrow (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n) \text{ Zeilenvektor} \end{cases}$$

Zu A gehörige Zeilenvektore

$$\vec{a}_1 = (1 \ 4 \ 5), \vec{a}_2 = (2 \ 3 \ 7)$$

$$A = \begin{pmatrix} \leftarrow \vec{a}_1 \rightarrow \\ \leftarrow \vec{a}_2 \rightarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Zu A gehörige Spaltenvektore

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \vec{a}_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

8.5.4. Matrizen transponieren

Transponierte Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ wäre: $A^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$

$$A = (a_{ij}), A^T = (a_{ji})$$

Rolle von Zeile und Spalte vertauscht: $a_{ij} \rightarrow a_{ji}$

Beispiel 5

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 2}, A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3},$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}^T = (1 \ 4 \ 5)$$

8.5.5. Matrizen invertieren

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

8.5.6. Matrixmultiplikation

Meistens nicht kommutativ ($A \cdot B \neq B \cdot A$)

B muss genau gleich viele Zeilen haben wie A Spalten

$$A \in \mathbb{R}^{m \times l}, B \in \mathbb{R}^{l \times n}, C = A \cdot B \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^l a_{ik} b_{kj}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 1 & 0 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2 \cdot 6 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 8) & (2 \cdot 4 + 3 \cdot 0 + 1 \cdot 9) \\ (4 \cdot 6 + -1 \cdot 1 + 7 \cdot 8) & (4 \cdot 4 + -1 \cdot 0 + 7 \cdot 9) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 17 \\ 79 & 79 \end{pmatrix}$$

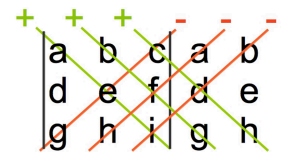
8.5.7. Determinante

Determinante einer quadratischen Matrix ist eine reelle Zahl

$$1 \times 1 \text{ Matrix : } \det(a) = a$$

$$2 \times 2 \text{ Matrix : } \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - cb$$

$$3 \times 3 \text{ Matrix : } \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$



Beispiel 6

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

$$x = \frac{\det \begin{pmatrix} e & b \\ f & d \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} = \frac{ed - fb}{ad - cb}$$

$$y = \frac{\det \begin{pmatrix} a & e \\ c & f \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} = \frac{af - ce}{ad - cb}$$

Definition der Determinante:

$$\det : \begin{cases} \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R} \\ M \mapsto \det(M) \end{cases}$$

Definition über Eigenschaften:

$$\det(\mathbb{1}) = 1$$

$$\det \begin{pmatrix} \dots & \vec{a}_1 & \dots \\ \dots & \lambda \vec{a}_k & \dots \\ \dots & \vec{a}_n & \dots \end{pmatrix} = \lambda \det \begin{pmatrix} \dots & \vec{a}_1 & \dots \\ \dots & \vec{a}_k & \dots \\ \dots & \vec{a}_n & \dots \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} \dots & \vec{a}_1 & \dots \\ \dots & \vec{a}_k + \vec{b}_k & \dots \\ \dots & \vec{a}_n & \dots \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \dots & \vec{a}_1 & \dots \\ \dots & \vec{a}_k & \dots \\ \dots & \vec{a}_n & \dots \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \dots & \vec{a}_1 & \dots \\ \dots & \vec{b}_k & \dots \\ \dots & \vec{a}_n & \dots \end{pmatrix}$$

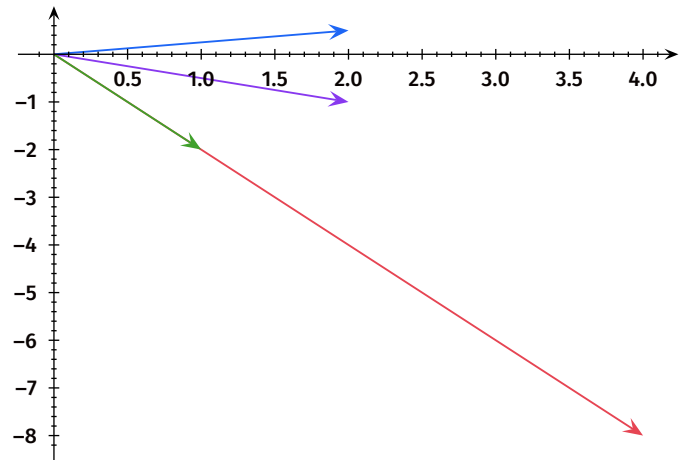
$\det M = 0$ wenn M 2 nicht linear unabhängige Zeilen hat. Heisst: Transformierte Vektoren auch linear abhängig.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \det(M) = 0$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{c} = M\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{d} = M\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \vec{c}$ linear abhängig zu \vec{d}



Beispiel 7

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 10 & 12 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} = 2 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 10 & 12 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 8 & 10 & 12 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 8 & 10 & 12 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 10 & 12 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 8 & 10 & 12 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} + 2 \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 8 & 10 & 12 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} + 3 \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 8 & 10 & 12 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Beispiel 8

$$\begin{aligned}
 \det \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} &= -2 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + 0 \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - 4 \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= -2(2 - 3) + 0 - 4(-1) \\
 &= 2 + 4 = 6 \\
 \text{Vorzeichen: } &\begin{pmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \\
 \text{Vorgehen: } &\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow -2 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \\
 &\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow 0 \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \\
 &\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow -4 \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Weitere Eigenschaften:

- Die Determinante wechselt beim Vertauschen von Zeilen ihr Vorzeichen
- Wenn wir zu einer Zeile einer Matrix ein Vielfaches einer anderen Zeile dazuzählen, ändert die Determinante ihren Wert nicht

$$\Rightarrow \det(M) \underset{\text{Gauss}}{=} (-) \det \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n$$

Weiteres:

$$\det(\lambda M) = \lambda^n \det(M), M \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$\det \begin{pmatrix} A & * \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det(A) \cdot \det(B)$$

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

$$\det(A^T) = \det(A)$$

$$\text{Volumen eines Spats} = \det \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix}$$

$$= \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

Volumen = Grundfläche · Höhe

$$= |\vec{b} \times \vec{c}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos(\varphi)$$

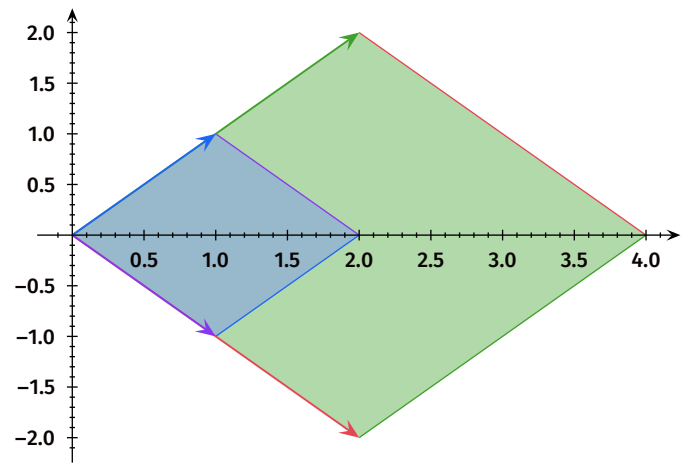
$$= |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|$$

Determinante im 2D-Raum sagt aus, wie stark eine Fläche auf dem Koordinatensystem skaliert wird sobald durch die Matrix transformiert. Beispiel: $\det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 4$ bedeutet, dass die Fläche vervierfacht wird.

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{c} = M\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{d} = M\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$



8.5.8. Eigenwerte

Gegeben: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

\vec{x} heisst **Eigenvektor** zum **Eigenwert** λ

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Gegeben: Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Ein Vektor $\vec{v} \neq \vec{0}$ heisst Eigenvektor zum Eigenwert λ , wenn $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ ist.

$$A\vec{v} - \lambda\vec{v} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow (A - \lambda\mathbb{1})\vec{v} = \vec{0}$$

Wenn λ gegeben ist, ist das ein homogenes lineares Gleichungssystem in \vec{v} . Davon suchen wir nicht-triviale Lösungen ($\vec{v} \neq \vec{0}$).

λ heisst Eigenwert von $A \Leftrightarrow A - \lambda\mathbb{1}$ ist singulär $\Leftrightarrow \text{rang}(A - \lambda\mathbb{1}) < n \Leftrightarrow \det(A - \lambda\mathbb{1}) = 0$

Wenn $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, dann ist $\det(A - \lambda\mathbb{1})$ ein Polynom von Grad n . (Charakteristisches Polynom). Eigenwerte sind Nullstellen des charakteristischen Polynoms.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} & \det(A - \lambda\mathbb{1}) \\ &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 4-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda)(4-\lambda) - (-2) \cdot 1 \\ &= \lambda^2 - 5\lambda + 4 + 2 \\ &= \lambda^2 - 5\lambda + 6 \end{aligned} \quad = \text{Charakteristisches Polynom}$$

Nullstelle des char. Polynoms

$$\begin{aligned}\lambda^2 - 5\lambda + 6 &= 0 \\ \Leftrightarrow \lambda &= \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} \\ \Leftrightarrow \lambda &= \frac{5 \pm 1}{2} \\ \Leftrightarrow \lambda &\in \{3, 2\}\end{aligned}$$

Eigenwerte von A sind $\lambda = 2$ und $\lambda = 3$

Für diese Zahlen ist die Matrix $A - \lambda \mathbb{1}$ singulär, d.h. die Gleichung $(A - \lambda \mathbb{1})\vec{v} = \vec{0}$ hat nicht-triviale Lösungen. Diese heissen Eigenvektoren.

8.5.9. Eigenwert $\lambda = 2$

$$\begin{aligned}(A - 2 \cdot \mathbb{1}) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

8.5.10. Eigenwert $\lambda = 3$

$$\begin{aligned}(A - 3 \cdot \mathbb{1}) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Matrizen haben Rang von 1

$$(A - 2\mathbb{1})\vec{v} = \vec{0}$$

v_1	v_2	1
-1	1	0
-2	2	0

$$\Rightarrow -v_1 + v_2 = 0$$

$$\Rightarrow v_1 = v_2$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu \\ \mu \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(A - 3\mathbb{1})\vec{v} = \vec{0}$$

v_1	v_2	1
-2	1	0
-2	1	0

$$\Rightarrow -2v_1 + v_2 = 0$$

$$\Rightarrow v_2 = 2v_1$$

$$\vec{v} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mu \neq 0$$

Für alle $\mu \neq 0$ ist \vec{v} ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda = 2$. $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda = 3$.

8.5.11. Diagonalisierbar

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heisst **diagonalisierbar**, wenn es eine invertierbare Matrix X gibt, so dass $X^{-1}AX = D$ (D ist eine Diagonalmatrix $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$)

Wenn A diagonalisierbar ist, dann sind die Spalten von X linear unabhängige Eigenvektoren, also eine Basis von \mathbb{R}^n , die nur aus Eigenvektoren von A besteht.

Das umgekehrte gilt auch. Das erlaubt uns, X zu konstruieren.

$$\begin{aligned}
X^{-1}AX &= D \\
\Leftrightarrow AX &= XD \\
\Leftrightarrow AX &= X \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow A \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \vec{v}_1 & \dots & \vec{v}_n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \vec{v}_1 & \dots & \vec{v}_n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ A\vec{v}_1 & \dots & A\vec{v}_n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \lambda_1\vec{v}_1 & \dots & \lambda_n\vec{v}_n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow A\vec{v}_1 = \lambda_1\vec{v}_1 \wedge A\vec{v}_2 = \lambda_2\vec{v}_2 \wedge \dots \wedge A\vec{v}_n = \lambda_n\vec{v}_n
\end{aligned}$$

8.5.12. Rechenregeln

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) = A \cdot B \cdot C$$

$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$$

$$C \cdot (A + B) = C \cdot A + C \cdot B$$

$$E \cdot A = A \cdot E = A \text{ für } A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$(A^T)^T = A$$

$$(A + B)^T = A^T + B^T$$

$$(\lambda A)^T = \lambda A^T$$

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

8.5.13. Alternative Berechnungsstrategie von Eigenwerten

$$\text{Mean } m = \frac{1}{2} \operatorname{tr} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{a+d}{2} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$$

$$\text{Product } p = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc = \lambda_1 \lambda_2$$

$$\lambda_{1,2} = m \pm \sqrt{m^2 - p}$$

8.6. ANALYTISCHE GEOMETRIE

[beste playlist](#)

8.6.1. Geraden**8.6.1.1. Parameterform (Punktrichtungsform)**

$$g : \underbrace{\vec{x}}_{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} = \underbrace{\vec{p}}_{\text{Stützvektor}} + t \cdot \underbrace{\vec{p}\vec{x}}_{\text{Richtungsvektor}}, t \in \mathbb{R}$$

$$g_{bsp} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Aus Koordinatenform umwandeln: Richtungsvektor steht senkrecht zum Normalenvektor

8.6.1.2. Koordinatenform

$$g : ax + by + c = 0$$

$$g_{bsp} : 2x + y - 10 = 0$$

Aus Parameterform umwandeln:

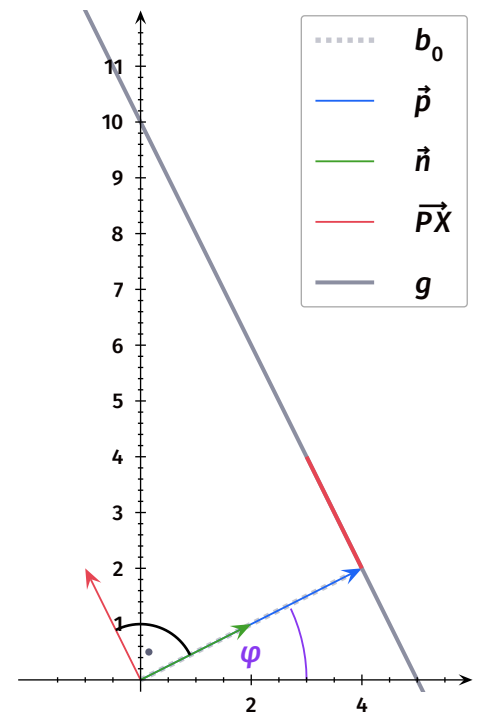
$$x = 4 - 1t$$

$$y = 2 + 2t$$

$$t = 4 - x$$

$$y = 2 + 2(4 - x) = 10 - 2x$$

$$\Leftrightarrow 2x + y - 10 = 0$$

**8.6.1.3. Normalenform**

$$g : \left(\vec{x} - \underbrace{\vec{p}}_{\text{Stützvektor}} \right) \cdot \underbrace{\vec{n}}_{\text{Normalenvektor}} = 0$$

$$g_{bsp} : \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Aus Koordinatenform umwandeln (\vec{p} bleibt gleich):

$$2x + 1y - 10 = 0 \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

8.6.1.4. Hessesche Normalenform

$$g : \vec{x} \cdot \vec{n}_0 - b_0 = 0$$

$$g_{bsp} : \vec{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{10}{\sqrt{5}} = 0$$

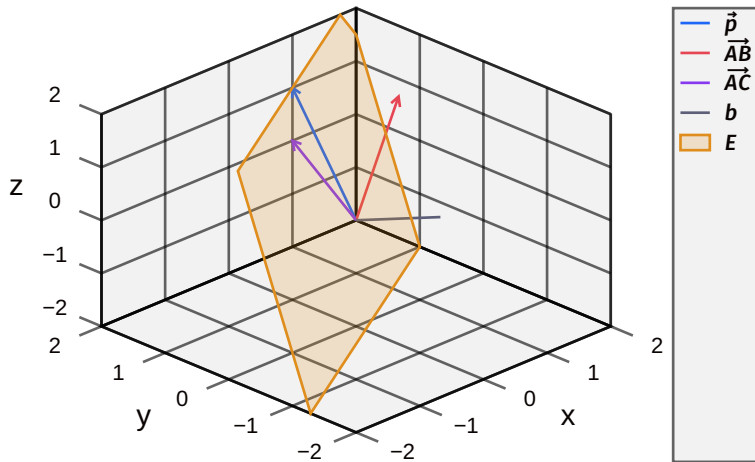
b_0 = Abstand der Geraden g vom Ursprung.

8.6.1.5. Abstand berechnen

Abstand a von Punkt P zur Geraden $\vec{x} \cdot \vec{n}_0 - b_0 = 0$

$$a = \vec{p} \cdot \vec{n}_0 - b_0$$

8.6.2. Ebenen



8.6.2.1. Parameterform

$$E: \underbrace{\vec{x}}_{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}} = \underbrace{\vec{p}}_{\text{Stützvektor}} + s \cdot \underbrace{\vec{AB}}_{\text{Spannvektor}} + t \cdot \underbrace{\vec{AC}}_{\text{Spannvektor}}, s, t \in \mathbb{R}$$

$$E_{bsp}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

8.6.2.2. Normalenform

$$E: \left(\vec{x} - \underbrace{\vec{p}}_{\text{Stützvektor}} \right) \cdot \underbrace{\vec{n}}_{\text{Normalenvektor}} = 0$$

$$E_{bsp}: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

Aus Parameterform umwandeln (\vec{p} bleibt gleich):

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

8.6.2.3. Koordinatenform

$$E: ax + by + cz + d = 0$$

$$E_{bsp}: 4x - 7y + 2z + 3 = 0$$

Aus Normalenform umwandeln (ausmultiplizieren):

$$\begin{pmatrix} x-0 \\ y-1 \\ z-2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 = 4x - 7y + 2z + 3$$

8.6.2.4. Vereinfachte Normalenform

$$E : \vec{x} \cdot \underbrace{\vec{n}}_{\text{Normalenvektor}} - \underbrace{b}_{\vec{p} \cdot \vec{n}} = 0$$

$$E_{bsp} : \vec{x} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} + 3 = 0$$

Aus Koordinatenform umwandeln: $1x - 7y + 2z + 3 = 0$

$$\vec{x} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} + 3 = 0$$

8.6.2.5. Hessesche Normalform

$$E : \vec{x} \cdot \underbrace{\frac{\vec{n}_0}{|\vec{n}|}}_{\vec{n}} - \underbrace{\frac{b_0}{|\vec{n}|}}_{\vec{p} \cdot \vec{n}} = 0$$

$$E_{bsp} : \vec{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{69}} \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{3}{\sqrt{69}} = 0$$

Aus Normalenform umwandeln:

$$b = 3, |\vec{n}| = \sqrt{69}, \vec{n}_0 = \frac{1}{\sqrt{69}} \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}, b_0 = \frac{3}{\sqrt{69}}$$

8.6.2.6. Abstand berechnen

Abstand a von Punkt Q zur Ebene $\vec{x} \cdot \vec{n}_0 - b_0 = 0$

$$a = \vec{q} \cdot \vec{n}_0 - b_0$$

Abstand von Punkt $P(2, 8, 2)$ zur Ebene $E : 2x - y + 4z = 1$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{21}$$

$$\frac{2x - y + 4z - 1}{\sqrt{21}}$$

$$\Rightarrow \frac{2 \cdot 2 - 1 \cdot 8 + 4 \cdot 2 - 1}{\sqrt{21}}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{21}}$$