

Diskrete Mathematik | DMI

Zusammenfassung

INHALTSVERZEICHNIS

1. Aussagenlogik	3
1.1. Glossar	3
1.2. Formeln	3
1.3. Rechenregeln	4
2. Prädikatenlogik	4
2.1. Glossar	4
3. Beweisen	4
3.1. Induktion	4
3.1.1. Techniken	5
4. Direkte, iterative und rekursive Berechnungen	5
4.1. Glossar	5
5. Mengen	5
5.1. Glossar	5
5.2. Rechenregeln	5
6. Formeln, Abbildungen, Relationen	6
6.1. Glossar	6
7. Modulo-Rechnen	6
7.1. Glossar	7
7.2. Rechenregeln	7
7.3. Primfaktorenzerlegung	7
7.4. Euklidischer Algorithmus	7
7.4.1. Beispiel	7
7.5. Erweiterter Euklidischer Algorithmus	8
7.5.1. Beispiel	8
7.6. Kleiner Fermat	8
7.7. Satz von Euler	8
7.7.1. Euler'sche φ -Funktion (Totient)	8
7.7.1.1. Rechenregeln	9
7.8. RSA Verschlüsselung	9
8. Lineare Algebra	9
8.1. Glossar	9
8.2. Pivot-Gleichung	9
8.2.1. Glossar	10
8.3. Gauss-Tableau	10
8.4. Vektoren	11
8.4.1. Glossar	11
8.4.2. Vektorenrechnen	11
8.4.3. Rechenregeln	12
8.4.4. Kreuzprodukt	12
8.4.4.1. Eigenschaften	12

8.4.4.2. Geometrische Eigenschaften	12
8.4.5. Vektorraum	13
8.4.6. Lineare Abbildung	13
8.5. Matrizen	14
8.5.1. Glossar	14
8.5.2. Definition	14
8.5.3. Matrizen als Vektoren interpretieren	14
8.5.4. Matrizen transponieren	15
8.5.5. Matrixmultiplikation	15
8.5.6. Rechenregeln	16
8.6. Analytische Geometrie	16
8.6.1. Geraden	16
8.6.1.1. Parameterform	16
8.6.2. Ebenen	16
8.6.2.1. Parameterform	16
8.6.2.2. Normalenform / Koordinatenform	16
8.6.2.3. Hessesche Normalform	16

1. AUSSAGENLOGIK

1.1. GLOSSAR

<i>Begriff</i>	<i>Bedeutung</i>
Aussage	<ul style="list-style-type: none"> – Feststellender Satz, dem eindeutig «wahr» oder «falsch» zugeordnet werden kann – Symbole wie A, B, C... werden dafür verwendet
Aussagenlogische Form	– Kombination von Aussagen, verknüpft durch Junktoren
Aussageform	– Aussagen verknüpft mit Variablen
Normalform	– Standardisierte Aussagenlogische Formen (Formeln)
Negationsnormalform	– \neg steht ausschliesslich direkt vor Aussagen oder Konstanten
Verallgemeinerte Disjunktion	<ul style="list-style-type: none"> – Einzelne Aussage oder Negation – wahr oder falsch – Disjunktion $A \vee B$, falls A und B selbst verallgemeinerte Disjunktionen sind
Verallgemeinerte Konjunktion	<ul style="list-style-type: none"> – Einzelne Aussage oder Negation – wahr oder falsch – Konjunktion $A \wedge B$, falls A und B selbst verallgemeinerte Konjunktionen sind
Disjunktive Normalform	– Disjunktion von (oder eine einzelne) verallgemeinerten Konjunktionen
Konjunktive Normalform	– Konjunktion von (oder eine einzelne) verallgemeinerten Disjunktionen
Kontradiktion	– Immer falsch
Tautologie	– Immer wahr
Junktoren (/Konnektoren)	<ul style="list-style-type: none"> – \neg Negation – \wedge Konjunktion – \vee Disjunktion (einschliessliches oder!) – \Rightarrow Implikation – \Leftrightarrow Äquivalenz
Abtrennungsregel	– $(A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$
Bindungsstärke	– \neg vor \wedge, \vee vor $\Rightarrow, \Leftrightarrow$

1.2. FORMELN

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$$

$$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$$

$$\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B$$

$$A \vee (\neg A \wedge B) \Leftrightarrow A \vee B$$

$$\text{Abtrennungsregel: } A \wedge (A \Rightarrow B) \Rightarrow B$$

1.3. RECHENREGELN

Begriff	Bedeutung
Kommutativität	<ul style="list-style-type: none"> – $(A \wedge B) \Leftrightarrow (B \wedge A)$ – $(A \vee B) \Leftrightarrow (B \vee A)$
Assoziativität	<ul style="list-style-type: none"> – $A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$ – $A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow (A \vee B) \vee C$
Distributivität	<ul style="list-style-type: none"> – $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ – $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
Absorption	<ul style="list-style-type: none"> – $A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$ – $A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$
Idempotenz	<ul style="list-style-type: none"> – $A \vee A = A$ – $A \wedge A = A$
Doppelte Negation	– $\neg(\neg A) \Leftrightarrow \neg\neg A \Leftrightarrow A$
Konstanten	<ul style="list-style-type: none"> – W=wahr – F=falsch
???	– $(A \Rightarrow B \Rightarrow C) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)$
de Morgan	<ul style="list-style-type: none"> – $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$ – $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

2. PRÄDIKATENLOGIK

2.1. GLOSSAR

Begriff	Bedeutung
Subjekt	– «Konkretes Ding» / Stellvertreter einer Variable
Prädikat	<ul style="list-style-type: none"> – «Eigenschaft», zB «ist eine Primzahl» – Prädikate werden oft wie Funktionen geschrieben. Ist P ein Prädikat, dann bedeutet $P(x)$, dass x das Prädikat erfüllt. $P(x)$ ist eine Aussageform.
Quantor	<ul style="list-style-type: none"> – \forall Allquantor (Für alle) – \exists Existenzquantor (Es existiert)

3. BEWEISEN

TODO: MEHR BEWEISE

3.1. INDUKTION

$$A(1) \wedge (A(n) \Rightarrow A(n+1)) \Rightarrow A(m), m \in \mathbb{N}$$

Beispiel: $2 \mid (6^n)$

- 1) Verankerung: $n = 0$
 - $2 \mid (6^0)$
- 2) Induktionsschritt $n \rightarrow n+1$
 - $2 \mid (6^{n+1})$
 - a) Induktionsannahme: $2 \mid (6^n)$
 - b) Behauptung: $2 \mid (6^{n+1})$

c) Beweis: Verwendung der Annahme, um Richtigkeit der Behauptung zu zeigen

3.1.1. Techniken

- 1) Direkter Beweis $f(n) = f_1(n) = f_2(n) = \dots = f_m(n) = g(n)$
- 2) Differenz gleich Null $f(n) - g(n) = 0 \Rightarrow f(n) = g(n)$
- 3) Äquivalenzumformung
- 4) Dritte Grösse (vereinfachen) $g(n) = h(n) = f(n)$

4. DIREKTE, ITERATIVE UND REKURSIVE BERECHNUNGEN

4.1. GLOSSAR

Begriff	Bedeutung
Folge	– Nummerierte Liste von Objekten (Folgegliedern)
Reihe	– Summe von Folgegliedern einer Zahlenfolge

5. MENGEN

5.1. GLOSSAR

Begriff	Bedeutung
Aufzählend	– $\{1, 2, 3\}$
Beschreibend	– $\{x \in \mathbb{N}^+ \mid x < 4\}$
Mächtigkeit	– Anzahl Elemente einer Menge – $ M $
Potenzmenge	– Menge aller Teilmengen einer Menge – $P(M)$ – $ P(M) = 2^{ M }$
Kartesisches Produkt	– $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$

5.2. RECHENREGELN

Für die Mengen A und B in der Obermenge M gelten die folgenden Aussagen:

$$\overline{\overline{A}} = A$$

$$A \cap \overline{A} = \emptyset$$

$$A \cup \overline{A} = M$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

6. FORMELN, ABBILDUNGEN, RELATIONEN

6.1. GLOSSAR

Begriff	Bedeutung
Funktion/Abbildung	<ul style="list-style-type: none"> – Zuordnung, die jedem Element der Definitionsmenge D genau ein Element einer Zielmenge Z zuordnet. – Injektive Relation – $f : D \rightarrow Z$ – Abbildungen mit mehreren Argumenten: $f : A \times B \rightarrow Z, f(a, b) = y$
Graph	<ul style="list-style-type: none"> – Menge von Paaren $(x, f(x))$ – $G \in D \times Z$
Relation	<ul style="list-style-type: none"> – Teilmenge des Kartesischen Produktes mehrerer Mengen – $A = \prod_{i=1}^n A_i, A_i = n_i \Rightarrow A = \prod_{i=1}^n n_i$ – Kleiner-Relation: $R_{<} = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B, a < b\}$ – Gleich-Relation: $R_{=} = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B, a = b\}$ – Kleiner-Gleich-Relation: $R_{\leq} = R_{=} \cup R_{<} = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B, a \leq b\}$
Surjektiv	– Alle Elemente der Definitions- und Zielmenge sind «verknüpft» / jedes Element der Bildmenge kommt als Bild vor
Injektiv	<ul style="list-style-type: none"> – Alle Inputs haben eindeutige Outputs – $a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$
Bijektiv	– Surjektiv und Injektiv
Reflexiv	<ul style="list-style-type: none"> – Alle Elemente von A stehen zu sich selbst in Beziehung – $a \in A \Rightarrow (a, a) \in R$ – $A \Leftrightarrow A$
Symmetrisch	<ul style="list-style-type: none"> – $(a, b) \in R \wedge (b, a) \in R$ – $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow A)$
Transitiv	<ul style="list-style-type: none"> – $(a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$ – $(A \Leftrightarrow B) \wedge (B \Leftrightarrow C) \Rightarrow (A \Leftrightarrow C)$
Äquivalenzrelation	<ul style="list-style-type: none"> – reflexiv, symmetrisch und transitiv – $\Leftrightarrow, =$
Irreflexiv	– $a \in A \Rightarrow \neg(a, a) \in R$
Asymmetrisch	– $(a, b) \in R \Rightarrow \neg(b, a) \in R$
Antisymmetrisch	– $((a, b) \in R) \wedge ((b, a) \in R) \Rightarrow a = b$
Ordnungsrelation	<ul style="list-style-type: none"> – reflexiv, antisymmetrisch und transitiv – \leq
Symmetrische Differenz	<ul style="list-style-type: none"> – $A \Delta B = \{x \in G \mid (x \in A \cup B) \wedge \neg(x \in A \cap B)\}$ – $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ – $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$

7. MODULO-RECHNEN

Die Modulo-Relation ist eine **Äquivalenzrelation** auf \mathbb{Z} .

7.1. GLOSSAR

Begriff	Bedeutung
Teiler-Relation	<ul style="list-style-type: none"> Für $a, b \in \mathbb{Z}$ ist die Teiler-Relation $b \mid a \Leftrightarrow T(b, a) \Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{Z} : bq = a$ $b \mid a \Leftrightarrow -b \mid a$ $b \mid a \Leftrightarrow b \mid -a$ Ordnungsrelation auf \mathbb{N}
Modulo-Relation	Für $a, q, r \in \mathbb{Z}$ ist die Modulo-Relation $R_q(a, r) \Leftrightarrow q \mid a - r \Leftrightarrow a \equiv r \pmod{q}$
\sim	<ul style="list-style-type: none"> «relates to» $a \sim b \Leftrightarrow (a, b) \in R$
Quotient, Rest	Zu jeder Zahl $a \in \mathbb{Z}$ und jeder Zahl $b \in \mathbb{Z}$ gibt es eindeutig bestimmte Zahlen $q, r \in \mathbb{Z}$ mit $a = q \cdot b + r, 0 \leq r < b$ Bsp: $7 = 2 \cdot 3 + 1$ q heisst Quotient r heisst Rest
Restklassen	<ul style="list-style-type: none"> $[b]_q = \{a \in \mathbb{Z} \mid a \equiv b \pmod{q}, q > 0\}$ $\mathbb{Z}_q = \{[0]_q, [1]_q, [2]_q, \dots, [q-1]_q\} = \underbrace{\{0, 1, 2, 3, \dots, q-1\}}_{\text{Vereinfachung}}$
Multiplikatives Inverses	Für $a \in \mathbb{Z}_q$ ist $b \in \mathbb{Z}_q$ das multiplikative inverse von a , wenn $a \cdot b \equiv 1 \pmod{q}$
Nullteiler	Wenn für $a, b \in \mathbb{Z}_q : ab \equiv 0 \pmod{q}$ und $a \not\equiv 0 \pmod{q} \wedge b \not\equiv 0 \pmod{q}$, heissen a, b Nullteiler

7.2. RECHENREGELN

- $(a + b) \pmod{n} = ((a \pmod{n}) + (b \pmod{n})) \pmod{n}$
- $(a - b) \pmod{n} = ((a \pmod{n}) - (b \pmod{n})) \pmod{n}$
- $(a \cdot b) \pmod{n} = ((a \pmod{n}) \cdot b \pmod{n}) \pmod{n}$
- $a^d \pmod{n} = (a^{d-x} \cdot a^x) \pmod{n} = ((a^{d-x} \pmod{n}) \cdot (a^x \pmod{n})) \pmod{n}$

7.3. PRIMFAKTORENZERLEGUNG

Begriff	Bedeutung
$\text{ggT}(a, b)$	$\max\{d \in \mathbb{N} \mid d \mid a \wedge d \mid b\}$
$\text{kgV}(a, b)$	<ul style="list-style-type: none"> $\min\{m \in \mathbb{N} \mid a \mid m \wedge b \mid m\}$ $\frac{ab}{\text{ggT}(a, b)}$
Teilerfremd	<ul style="list-style-type: none"> Zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$ heissen Teilerfremd, wenn $\text{ggT}(a, b) = 1$ Sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl und $q \in \mathbb{N}, q < p, q \neq 0$ dann ist $\text{ggT}(p, q) = 1$

7.4. EUKLIDISCHER ALGORITHMUS

Seien $a, b \in \mathbb{N}, a \neq b, a \neq 0, b \neq 0$

Initialisierung: Setze $x := a, y := b$ und $q := x, r := x - q \cdot y$ (d.h. bestimme q und r so, dass $x = q \cdot y + r$ ist)

Wiederhole bis $r = 0$ ist

Ergebnis: $y = \text{ggT}(a, b)$

7.4.1. Beispiel

$\text{ggT}(122, 72), a = 122, b = 72$

– Init: $x_0 = a = 122, y_0 = b = 72$

– Iteration:

	$x_i = y_{i-1}$	$y_i = r_{i-1}$	$q_i = x_i \text{ div } y_i$	$r_i = x_i \bmod y_i = x_i - q_i \cdot y_i$
$i = 0$	122	72	1	50
$i = 1$	72	50	1	22 Muster: $r_{i+1} < r_i$
$i = 2$	50	22	2	6
$i = 3$	22	6	3	4
$i = 4$	6	4	1	2
$i = 5$	4	$2 = \text{ggT}(122, 72)$	2	0 (immer 0 am Schluss)

7.5. ERWEITERTER EUKLIDISCHER ALGORITHMUS

Seien $a, b \in \mathbb{N}, a \neq b, a \neq 0, b \neq 0$

Initialisierung: Setze $x := a, y := b, q := x \div y, r := x - q \cdot y, (u, s, v, t) = (1, 0, 0, 1)$ (d.h. bestimme q und r so, dass $x = q \cdot y + r$ ist)

Wiederhole bis $r = 0$ ist

Ergebnis: $y = \text{ggT}(a, b) = s \cdot a + t \cdot b$

Wenn $\text{ggT}(a, b) = 1$ ist, dann folgt: $t \cdot v \equiv 1 \bmod a$

7.5.1. Beispiel

$\text{ggT}(99, 79)$

i	$x = y_{-1}$	$y = r_{-1}$	$q = x \div y$	$r = x_i - q_i \cdot y_i$	$u = s_{-1}$	$s = u_{-1} - q_{-1} \cdot s_{-1}$	$v = t_{-1}$	$t = v_{-1} - q_{-1} \cdot t_{-1}$
$i = 0$	99	79	1	20	1	0	0	1
$i = 1$	79	20	3	19	0	1	1	-1
$i = 2$	20	19	1	1	1	-3	-1	4
$i = 3$	19	1	19	0	-3	4	4	-5

Daraus folgend:

- $\text{ggT}(99, 79) + 1 + 4 \cdot 99 + (-5) \cdot 79 \Leftrightarrow 396 - 395 = 1$
- -5 ist mult. Inv. von 79 in \mathbb{Z}_{99}
- 4 ist mult. Inv. von 99 in \mathbb{Z}_{79}

7.6. KLEINER FERMAT

Sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl und $x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ mit $\text{ggT}(x, p) = 1$

Dann ist: $x^{p-1} \equiv 1 \bmod p$

Daraus folgend:

$$\begin{aligned}
 x^{p-1} &\equiv 1 \bmod p & | \quad ()^n \\
 \Leftrightarrow x^{n(p-1)} &\equiv 1 \bmod p & | \cdot x \\
 \Leftrightarrow x^{1+n(p-1)} &\equiv x \bmod p \\
 \Leftrightarrow x^{1 \bmod (p-1)} &\equiv x \bmod p
 \end{aligned}$$

7.7. SATZ VON EULER

Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $z \in \mathbb{Z}$ mit $\text{ggT}(z, n) = 1$. Dann ist $z^{\varphi(n)} \equiv 1 \bmod n$.

7.7.1. Euler'sche φ -Funktion (Totient)

Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $\mathbb{Z}_n^* = \{x \in \mathbb{Z}_n \mid x \text{ hat ein multiplikatives Inverses in } \mathbb{Z}_n\}$. Dann heisst $\varphi(n)$:

$$\begin{aligned}
 \varphi(n) &= \text{Anz. Elemente in } \mathbb{Z}_n \text{ mit mult. Inversen} \\
 &= \text{Anz. Zahlen } 1 \leq q \leq n \text{ mit } \text{ggT}(q, n) = 1 \\
 &= |\mathbb{Z}_n^*|
 \end{aligned}$$

Falls p Primzahl ist, dann ist $\varphi(p) = p - 1$

7.7.1.1. Rechenregeln

- 1) Sei $n \in \mathbb{N}$ eine Primzahl, dann $\varphi(n) = n - 1$
- 2) Sei $n \in \mathbb{N}$ eine Primzahl und $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, dann $\varphi(n^p) = n^{p-1} \cdot n - 1$
- 3) Seien $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $\text{ggT}(m, n) = 1$, dann $\varphi(n \cdot m) = \varphi(n) \cdot \varphi(m)$

7.8. RSA VERSCHLÜSSELUNG

- 1) Wähle 2 Primzahlen p, q
- 2) Berechne $n = p \cdot q$
- 3) Berechne $\varphi(n) = (p - 1)(q - 1)$
- 4) Wähle a, b so, dass $a \cdot b \equiv 1 \pmod{\varphi(n)}$
- 5) Vergesse $p, q, \varphi(p \cdot q)$. Brauchen wir nicht und riskieren nur, dass uns jemand hackt

Public key ist nun n, b , Private key ist n, a

Sidenote: Fürs Alphabet muss n grösser sein als 26

8. LINEARE ALGEBRA

8.1. GLOSSAR

Begriff	Bedeutung
Lineares Gleichungssystem (LGS)	
Koeffizientenmatrix	
Ergebnisvektor	
Lösungsvektor	
Transponieren	

8.2. PIVOT-GLEICHUNG

$$\begin{aligned}
 \text{(I)} \quad & 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 = -6 \\
 \text{(II)} \quad & x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -10 \\
 \text{(III)} \quad & 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 = -18 \\
 \Rightarrow & \\
 \text{(I')} \quad & 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 = -6 \\
 \text{(II')} = \text{(II)} - \text{(I)} \quad & 1x_2 + 2x_3 = -4 \\
 \text{(III')} = \text{(III)} - 2\text{(I)} \quad & 1x_2 + 4x_3 = -6 \\
 \Rightarrow & \\
 \text{(I'')} \quad & 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 = -6 \Rightarrow x_1 = -6 - x_2 - x_3 = -6 + 2 + 1 = -3 \\
 \text{(II'')} = \text{(II)} \quad & 1x_2 + 2x_3 = -4 \Rightarrow x_2 = -4 - 2x_3 = -4 + 2 = -2 \\
 & \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Rückwärtssubstitution}} \\
 \text{(III'')} = \text{(III')} - \text{(II'')} \quad & 2x_3 = -2 \Rightarrow x_3 = -1
 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

8.2.1. Glossar

Begriff	Bedeutung
Pivot-Variable	

8.3. GAUSS-TABLEAU

	x_1	x_2	x_3	1	
I	1	1	1	-6	
II	1	2	3	-10	-(I)
III	2	3	6	-18	-2(II)

⇒

I'	1	1	1	-6	
II'	0	1	2	-4	
III'	0	1	4	-6	-(II')

⇒

I''	1	1	1	-6	
II''	0	1	2	-4	
III''	0	0	2	-2	* $\frac{1}{2}$

⇒

I'''	1	1	1	-6	-(III''')
II'''	0	1	2	-4	-2(III''')
III'''	0	0	1	-1	

⇒

Koeffizientenmatrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

	x_1	x_2	x_3	1	
I''''	1	1	0	-5	-(II''')
II''''	0	1	0	-2	
III''''	0	0	1	-1	

⇒

	1	0	0	-3	
	0	1	0	-2	
	0	0	1	-1	

Ergebnisvektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$ Lösungsvektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ Lineares Gleichungssystem $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$

p = Anzahl Pivot-Variablen.

Wenn $b_{p+1} = \dots = b_m = 0$ dann ist das LGS lösbar (homogenes Gleichungssystem), sonst unlösbar.

Wenn $p = n$ dann hat LGS genau eine Lösung.

Wenn $p < n$ dann hat LGS unendlich viele Lösungen.

8.4. VEKTOREN

8.4.1. Glossar

Begriff	Bedeutung
Vektor	Liste von Zahlen
Nullvektor	$\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
Ortsvektor	Ortsvektor \vec{p} vom Nullpunkt des Koordinatensystems $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ zum Punkt P
Richtungsvektor	Richtungsvektor \vec{AB} vom Punkt A zum Punkt B ist $\vec{b} - \vec{a}$
Linearkombination	Linearkombination der Variablen x_1, x_2, x_3 (Bsp. $3 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 = -6$). Vektoren werden jeweils mit einer Zahl multipliziert und miteinander summiert
Lineare Unabhängigkeit	$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ heißen linear Unabhängig, wenn die Gleichung $\lambda_1 \cdot \vec{v}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{v}_2 + \dots + \lambda_n \cdot \vec{v}_n = \vec{0}$ genau eine Lösung hat, nämlich $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ $\begin{pmatrix} \uparrow & \dots & \uparrow \\ \vec{v}_1 & \dots & \vec{v}_n \\ \downarrow & \dots & \downarrow \end{pmatrix} \cdot \vec{\lambda} = \vec{0}$ eindeutig lösbar $= \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ sind linear unabhängig
Vektorprodukt/Kreuzprodukt	$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$ $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$
Skalarprodukt	$\vec{a} \cdot \vec{b} = c$ $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$
Orthogonale Projektion	
Betrag/Länge eines Vektors	$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ $ \vec{a} = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 5^2} = \sqrt{38}$
Normalenvektor	= Vektorprodukt?

8.4.2. Vektorenrechnen

Addition:

$$\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+5 \\ 2+(-9) \\ 3+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Multiplikation mit reellen Zahlen (=Skalare):

$$3 \cdot \vec{v} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

8.4.3. Rechenregeln

Falls die Vektoren senkrecht zueinanderstehen, ist das Skalarprodukt gleich 0

$$\lambda \vec{0} = \vec{0}$$

$$\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$$

$$-\vec{v} = -1 \cdot \vec{v}$$

$$-\vec{v} + \vec{v} = \vec{0}$$

$$(\lambda\mu)\vec{v} = \lambda(\mu\vec{v}) = \lambda\mu\vec{v}$$

$$\lambda(\vec{v} + \vec{w}) = \lambda\vec{v} + \lambda\vec{w}$$

$$\vec{v} + (\vec{u} + \vec{w}) = (\vec{v} + \vec{u}) + \vec{w} = \vec{v} + \vec{u} + \vec{w}$$

8.4.4. Kreuzprodukt

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{matrix} \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

8.4.4.1. Eigenschaften

Anti-kommutativ: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$. Konsequenz: $\vec{a} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$

Distributiv: $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

Gemischt-assoziativ: $\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b})$

Das Kreuzprodukt ist **nicht** assoziativ. $\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c}$ darf man nicht! $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$

8.4.4.2. Geometrische Eigenschaften

$\vec{a} \times \vec{b}$ steht immer senkrecht auf \vec{a} und auf \vec{b} .

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$ bilden ein Rechtssystem

$|\vec{a} \times \vec{b}| = \text{Flächeninhalt des durch } \vec{a} \text{ und } \vec{b} \text{ aufgespannten Parallelogramms} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi)$



Abbildung 1: Rechtssystem

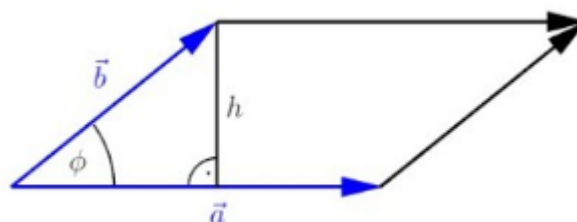


Abbildung 2: Flächeninhalt $h \cdot a$

8.4.5. Vektorraum

Ein Vektorraum ist eine Menge V mit den Rechenoperationen:

$$\oplus : V \times V \rightarrow V, (\vec{v}, \vec{w}) \mapsto \vec{v} \oplus \vec{w}$$

$$\odot : \mathbb{R} \times V \rightarrow V, (\lambda, \vec{v}) \mapsto \lambda \odot \vec{v}$$

Mit den Eigenschaften:

– Vektoraddition:

- **Assoziativgesetz**: $u \oplus (v \oplus w) = (u \oplus v) \oplus w$
- Existenz eines **neutralen Elements** $0_V \in V$ mit $v \oplus 0_V = 0_V \oplus v = v$
- Existenz eines zu $v \in V$ **inversen Elements** $-v \in V$ mit $v \oplus (-v) = (-v) \oplus v = 0_V$
- **Kommutativgesetz**: $v \oplus u = u \oplus v$

– Skalarmultiplikation:

- $\alpha \odot (u \oplus v) = (\alpha \odot u) \oplus (\alpha \odot v)$
- $(\alpha + \beta) \odot v = (\alpha \odot v) \oplus (\beta \odot v)$
- $(\alpha \cdot \beta) \odot v = \alpha \odot (\beta \odot v)$
- $1 \odot v = v$ für das **Einselement** $1 \in K$ des **Skalkörpers**

Side-Note: Wir verwenden $+$, \cdot für zwei reelle Zahlen, \oplus, \odot für zwei Vektoren. Normalerweise wird für Vektoren aber auch $+$, \cdot verwendet und man muss aus dem Kontext wissen, was addiert/multipliziert wird.

Gelten diese Eigenschaften für die Teilmenge eines grösseren Vektorraums W , so nennt man V **Untervektorraum** von W . Heisst: Man hat nur dann einen Untervektorraum V , wenn die Produkte der Multiplikation oder Addition der Elemente dieses Raumes auch in V liegen. Untervektorräume sind also unendliche Räume mit n Dimensionen weniger, zB $W = 3$ -Dimensionaler Vektorraum, $V = 2$ -Dimensionaler Untervektorraum.

Kern von $A = U = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\vec{x} = \vec{0}\}$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ist ein Untervektorraum von \mathbb{R}^n .

8.4.6. Lineare Abbildung

Eine Lineare Abbildung ist eine Funktion

$$L : \begin{cases} \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \\ \vec{x} \mapsto L(\vec{x}) \end{cases}$$

mit den Eigenschaften

$$L(\vec{x} + \vec{y}) = L(\vec{x}) + L(\vec{y})$$

$$L(\lambda \vec{x}) = \lambda L(\vec{x})$$

Für jede lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ gibt es eine (Abbildungs) Matrix $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit der Eigenschaft, dass $L(\vec{x}) = M\vec{x}$

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & \dots & m_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{m1} & \dots & m_{mn} \end{pmatrix}$$

$$m_{ij} = \vec{e}_i \cdot L(\vec{e}_j)$$

8.5. MATRIZEN

8.5.1. Glossar

Begriff	Bedeutung
Spaltenvektoren	Spalten der Matrix als Vektoren
Zeilenvektoren	Zeilen der Matrix als Vektoren
Rang	Wieviele Spaltenvektoren einer Matrix linear unabhängig sind
Nullmatrix	$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$
Quadratische Matrix	$\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ Gleichviele Zeichen und Spalten
Diagonalmatrix	(immer quadratisch und symmetrisch): $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 \end{pmatrix}, d_{ij} = 0 \text{ für } i \neq j$
Einheitsmatrix	(immer diagonal): $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Symmetrische Matrix	(immer quadratisch): $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T, a_{ij} = a_{ji}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$
Obere Dreiecksmatrix	$\mathbf{O} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & x_4 & x_5 \\ 0 & 0 & x_6 \end{pmatrix}, o_{ij} = 0 \text{ für } i > j$
Kovarianzmatrix	immer symmetrisch
Reguläre Matrix	Quadratische Matrix mit höchstem Rang (Rang = Anzahl Spalten/Reihen)
Singuläre Matrix	Quadratische Matrix mit kleinerem Rang (Rang < Anzahl Spalten/Reihen)
Invertierbare Matrix	Für $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heisst \mathbf{A} invertierbar, wenn es eine Matrix \mathbf{A}^{-1} gibt, so dass $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \text{Einheitsmatrix (E)}$. Dies ist der Fall, wenn \mathbf{A} Regulär ist.

8.5.2. Definition

Matrix mit 2 Zeilen und 3 Spalten

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$$

Komponenten von \mathbf{A} : a_{ij}

i : Zeilenindex, j : Spaltenindex. Bsp: $a_{23} = 7$

8.5.3. Matrizen als Vektoren interpretieren

→ \mathbf{A} ist ein 6-Dimensionaler VR (Vektorraum)

$$\text{Variante 1: } \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \\ a_{14} \\ a_{15} \\ a_{16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \\ 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\text{Variante 2: } \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \\ a_{14} \\ a_{15} \\ a_{16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{R}^n \text{ interpretiere als } \begin{cases} \mathbb{R}^{n \times 1} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \text{ Spaltenvektor} \\ \mathbb{R}^{1 \times n} \rightarrow (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n) \text{ Zeilenvektor} \end{cases}$$

Zu A gehörige Zeilenvektore $\vec{a}_1 = (1 \ 4 \ 5), \vec{a}_2 = (2 \ 3 \ 7)$

$$A = \begin{pmatrix} \leftarrow \vec{a}_1 \rightarrow \\ \leftarrow \vec{a}_2 \rightarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Zu A gehörige Spaltenvektore $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \vec{a}_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

8.5.4. Matrizen transponieren

Transponierte Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ wäre: $A^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$

$$A = (a_{ij}), A^T = (a_{ji})$$

Rolle von Zeile und Spalte vertauscht: $a_{ij} \rightarrow a_{ji}$

Bsp:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}^T = (1 \ 4 \ 5)$$

8.5.5. Matrixmultiplikation

Meistens nicht kommutativ ($A \cdot B \neq B \cdot A$)

B muss genau gleich viele Zeilen haben wie A Spalten

$$A \in \mathbb{R}^{m \times l}, B \in \mathbb{R}^{l \times n}, C = A \cdot B \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^l a_{ik} b_{kj}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 1 & 0 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2 \cdot 6 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 8) & (2 \cdot 4 + 3 \cdot 0 + 1 \cdot 9) \\ (4 \cdot 6 + (-1) \cdot 1 + 7 \cdot 8) & (4 \cdot 4 + (-1) \cdot 0 + 7 \cdot 9) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 17 \\ 79 & 79 \end{pmatrix}$$

8.5.6. Rechenregeln

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) = A \cdot B \cdot C$$

$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$$

$$C \cdot (A + B) = C \cdot A + C \cdot B$$

$$E \cdot A = A \cdot E = A \text{ für } A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$(A^T)^T = A$$

$$(A + B)^T = A^T + B^T$$

$$(\lambda A)^T = \lambda A^T$$

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

8.6. ANALYTISCHE GEOMETRIE

[beste playlist](#)

8.6.1. Geraden

8.6.1.1. Parameterform

$$g: \vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{Ortsvektor } \vec{p}} + t \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}}_{\text{Richtungsvektor } \vec{p}\vec{x}}, t \in \mathbb{R}$$

8.6.2. Ebenen

8.6.2.1. Parameterform

$$E: \vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{Ortsvektor } \vec{o}} + s \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}}_{\text{Spannvektor } \vec{AB}} + t \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}}_{\text{Spannvektor } \vec{AC}}, s, t \in \mathbb{R}$$

8.6.2.2. Normalenform / Koordinatenform

$$E = \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\text{Punkt auf Ebene}} \right] \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\vec{n} \text{ Orthogonal zur Ebene}} = 0$$

$$\Rightarrow x - 1 - z + 3 = 0$$

8.6.2.3. Hessesche Normalform

Abstand von Punkt $P(2, 8, 2)$ zur Ebene $E: 2x - y + 4z = 1$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{21}$$

$$\frac{2x - y + 4z - 1}{\sqrt{21}}$$

$$\Rightarrow \frac{2 * 2 - 1 * 8 + 4 * 2 - 1}{\sqrt{21}}$$
$$= \frac{3}{\sqrt{21}}$$