Georgiy Shevoroshkin 01.01.1980

Diskrete Mathematik | DMI

Zusammenfassung

INHALTSVERZEICHNIS

1. AUSSAGENLOGIK

1.1. GLOSSAR

Begriff	*Bedeutung*
Aussage	– Feststellender Satz, dem eindeutig «wahr» oder «falsch» zugeordnet werden kann – Symbole wie $A, B, C\dots$ werden dafür verwendet
Aussagenlogische Form	– Kombination von Aussagen, verknüpft durch Junktoren
Aussageform	– Aussagen verknüpft mit Variablen
Normalform	– Standartisierte Aussagenlogische Formen (Formeln)
Negationsnormalform	– $\neg$ steht ausschliesslich direkt vor Aussagen oder Konstanten
Verallgemeinerte Disjunktion	– Einzelne Aussage oder Negation – wahr oder falsch – Disjunktion $A \vee B$, falls A und B selbst verallgemeinerte Disjunktionen sind
Verallgemeinerte Konjunktion	– Einzelne Aussage oder Negation – wahr oder falsch – Konjunktion $A \wedge B$, falls A und B selbst verallgemeinerte Konjunktionen sind
Disjunktive Normalform	– Disjunktion von (oder eine einzelne) verallgemeinerten Konjunktionen
Konjunktive Normalform	– Konjunktion von (oder eine einzelne) verallgemeinerten Disjunktionen
Kontradiktion	– Immer falsch
Tautologie	– Immer wahr
Junktoren (/Konnektoren)	– $\neg$ Negation – $\wedge$ Konjunktion – $\vee$ Disjunktion (einschliessliches oder!) – $\Rightarrow$ Implikation – $\Leftrightarrow$ Äquivalenz
Abtrennungsregel	– $(A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$
Bindungsstärke	– $\neg$ vor $\wedge, \vee$ vor $\Rightarrow, \Leftrightarrow$

1.2. FORMELN

$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$

$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$

$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$

$\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B$

$A \vee (\neg A \wedge B) \Leftrightarrow A \vee B$

Abtrennungsregel: $A \wedge (A \Rightarrow B) \Rightarrow B$

1.3. RECHENREGELN

Begriff	*Bedeutung*
Kommutativität	– $(A \wedge B) \Leftrightarrow (B \wedge A)$ – $(A \vee B) \Leftrightarrow (B \vee A)$
Assoziativität	– $A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$ – $A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow (A \vee B) \vee C$
Distributivität	– $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ – $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
Absorption	– $A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$ – $A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$
Idempotenz	– $A \vee A = A$ – $A \wedge A = A$
Doppelte Negation	– $\neg(\neg A) \Leftrightarrow \neg\neg A \Leftrightarrow A$
Konstanten	– W=wahr – F=falsch
???	– $(A \Rightarrow B \Rightarrow C) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)$
de Morgan	– $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$ – $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

2. PRÄDIKATENLOGIK

2.1. GLOSSAR

Begriff	*Bedeutung*
Subjekt	– «Konkretes Ding» / Stellvertreter einer Variable
Prädikat	– «Eigenschaft», zB «ist eine Primzahl» – Prädikate werden oft wie Funktionen geschrieben. Ist P ein Prädikat, dann bedeutet $P(x)$, dass x das Prädikat erfüllt. $P(x)$ ist eine Aussageform.
Quantor	– $\forall$ Allquantor (Für alle) – $\exists$ Existenzquantor (Es existiert)

3. BEWEISEN

TODO: MEHR BEWEISE

3.1. INDUKTION

$A(1) \wedge (A(n) \Rightarrow A(n+1)) \Rightarrow A(m), m \in \mathbb{N}$

Beispiel: $2|(6^n)$

1) Verankerung: $n = 0$
   - $2|(6^0)$
2) Induktionsschritt $n \rightarrow n+1$
   - $2|(6^{n+1})$

   a) Induktionsannahme: $2|(6^n)$
   b) Behauptung: $2|(6^{n+1})$

c) Beweis: Verwendung der Annahme, um Richtigkeit der Behauptung zu zeigen

3.1.1. Techniken

1) Direkter Beweis $f(n) = f_1(n) = f_2(n) = \dots = f_m(n) = g(n)$
2) Dfferenz gleich Null $f(n) - g(n) = 0 \Rightarrow f(n) = g(n)$
3) Äquivalenzumformung
4) Dritte Grösse (vereinfachen) $g(n) = h(n) = f(n)$

4. DIREKTE, ITERATIVE UND REKURSIVE BERECHNUNGEN

4.1. GLOSSAR

Begriff	*Bedeutung*
Folge	– Nummerierte Liste von Objekten (Folgegliedern)
Reihe	– Summe von Folgegliedern einer Zahlenfolge

5. MENGEN

5.1. GLOSSAR

Begriff	*Bedeutung*
Aufzählend	– $\{1, 2, 3\}$
Beschreibend	– $\{x \in \mathbb{N}^+ \mid x < 4\}$
Mächtigkeit	– Anzahl Elemente einer Menge – $\lvert M \rvert$
Potenzmenge	– Menge aller Teilmengen einer Menge – $P(M)$ – $\lvert P(M) \rvert = 2^{\lvert M \rvert}$
Kartesisches Produkt	– $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$

5.2. RECHENREGELN

Für die Mengen A und B in der Obermenge M gelten die folgenden Aussagen:

$\overline{\overline{A}} = A$

$A \cap \overline{A} = \varnothing$

$A \cup \overline{A} = M$

$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

$\overline{A \cup A} = \overline{A} \cap \overline{B}$

6. FORMELN, ABBILDUNGEN, RELATIONEN

6.1. GLOSSAR

Begriff	*Bedeutung*
Funktion/Abbildung	- Zuordnung, die jedem Elemend der Definitionsmenge D genau ein Element einer Zielmenge Z zuordnet. - Injektive Relation - $f : D \to Z$ - Abbildungen mit mehreren Argumenten: $f : A \times B \to Z$, $f(a,b) = y$
Graph	- Menge von Paaren $(x, f(x))$ - $G \in D \times Z$
Relation	- Teilmenge des Kartesischen Produktes mehrerer Mengen - $A = \prod_{i=1}^{n} A_i, \lvert A_i \rvert = n_i \Rightarrow \lvert A \rvert = \prod_{i=1}^{n} n_i$ - Kleiner-Relation: $R_< = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B, a < b\}$ - Gleich-Relation: $R_= = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B, a = b\}$ - Kleiner-Gleich-Relation: $R_\leq = R_= \cup R_< = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B, a \leq b\}$
Surjektiv	- Alle Elemente der Definitions- und Zielmenge sind «verknüpft» / jedes Element der Bildmenge kommt als Bild vor
Injektiv	- Alle Inputs haben eindeutige Outputs - $a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$
Bijektiv	- Surjektiv und Injektiv
Reflexiv	- Alle Elemente von A stehen zu sich selbst in Beziehung - $a \in A \Rightarrow (a,a) \in R$ - $A \Leftrightarrow A$
Symmetrisch	- $(a,b) \in R \land (b,a) \in R$ - $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow A)$
Transitiv	- $(a,b) \in R \land (b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R$ - $(A \Leftrightarrow B) \land (B \Leftrightarrow C) \Rightarrow (A \Leftrightarrow C)$
Äquivalenzrelation	- reflexiv, symmetrisch und transitiv - $\Leftrightarrow, =$
Irreflexiv	- $a \in A \Rightarrow \neg(a,a) \in R$
Asymmetrisch	- $(a,b) \in R \Rightarrow \neg(b,a) \in R$
Antisymmetrisch	- $((a,b) \in R) \land ((b,a) \in R) \Rightarrow a = b$
Ordnungsrelation	- reflexiv, antisymmetrisch und transitiv - $\leq$

Begriff	*Bedeutung*
Symmetrische Differenz	– $A \Delta B = \{x \in G \mid (x \in A \cup B) \land \neg (x \in A \cap B)\}$ – $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ – $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$

7. MODULO-RECHNEN

7.1. GLOSSAR

Begriff	*Bedeutung*
Teiler-Relation	– Für $a, b \in \mathbb{Z}$ ist die Teiler-Relation $b \mid a \Leftrightarrow T(b, a) \Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{Z} : bq = a$ – $b \mid a \Leftrightarrow -b \mid a$ – $b \mid a \Leftrightarrow b \mid -a$ – Ordnungsrelation auf $\mathbb{N}$
Modulo-Relation	– Für $a, q, r \in \mathbb{Z}$ ist die Modulo-Relation $R_q(a, r) \Leftrightarrow q \mid a - r \Leftrightarrow a \equiv r \bmod q$
~	– «relates to» – $a \sim b \Leftrightarrow (a, b) \in R$