Université de Paris **(Date : 08/11/2020)**

UFR Mathématiques

Théorie des modèles TD3

Professor: T. Servi — Juan Ignacio Padilla, M2 LMFI

Exercice 0.1. Soit I un ensemble infini, $I_0 \subseteq I$ et $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur I tel que $I_0 \in \mathcal{U}$.

(1) Montrer que $\mathcal{U} \restriction_{I_0} = \{X \cap I_0, X \in \mathcal{U}\}$ est un ultrafiltre sur I_0.

(2) Montrer que $\prod_{i \in I} \mathcal{M}_i/\mathcal{U} \simeq \prod_{i \in I_0} \mathcal{M}_i/\mathcal{U} \restriction I_0$

Solution.

(1) Soit $A \subseteq I_0$, alors soit $A \in \mathcal{U}$ soit non. Si oui, alors puisque $A = A \cap I_0$ alors $A \in \mathcal{U} \restriction_{I_0}$, sinon, alors $I \setminus A \in \mathcal{U}$ et $I_0 \setminus A = I_0 \cap (I \cap A) \in \mathcal{U}$.

(2) Considérons l'application qui envoie $[a_i]_{i \in I}$ sur sa restriction $[a_i]_{i \in I_0}$ (classes d'équivalence dans $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U} \restriction I_0$ respectivement). Elle est bien définie puisque si $[a_i]_{i \in I} = [b_i]_{i \in I}$, alors $\{i, a_i = b_i\} \in \mathcal{U}$, donc $\{i, a_i = b_i\} \cap I_0 \in \mathcal{U} \restriction I_0$, et donc $[a_i]_{i \in I_0} = [b_i]_{i \in I_0}$. Elle est aussi surjective : étant donné $[a_i]_{i \in I_0}$ on peut définir $[b_i]_{i \in I_0}$ en posant $b_i = a_i$ pour $i \in I_0$ et $b_i =$ n'importe quoi pour $i \notin I_0$, clairement $[a_i]_{i \in I_0}$ est une restriction de $[b_i]_{i \in I}$. Soit $\varphi(\bar{x}) \in \mathcal{F}(\mathcal{L})$, alors si $\bar{a} \in \prod_{i \in I} \mathcal{M}_i/\mathcal{U}$, on a que

$$\begin{aligned} \bar{a} \in \prod_{i \in I} \mathcal{M}_i/\mathcal{U} &\iff \{i, \mathcal{M}_i \models \varphi(\bar{a}_i)\} \in \mathcal{U} \\ &\iff \{i, \mathcal{M}_i \models \varphi(\bar{a}_i)\} \cap I_0 \in \mathcal{U} \restriction I_0 \\ &\iff \prod_{i \in I_0} \mathcal{M}_i/\mathcal{U} \restriction I_0 \models \varphi(\bar{a}) \end{aligned}$$

Exercice 0.2. Soit φ une phrase dans le langage des anneaux. Supposons que $\mathsf{ACF}_0 \models \varphi$. Montrer qu'il existe N tel que $\mathsf{ACF}_n \models \varphi$ pour tout $n > N$.

Solution. On utilise l'axiomatisation pour les corps algébriquement clos de caractéristique 0 donnée par

$$T = T_{\text{corps}} \cup \{\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n-\text{fois}} \neq 0\}_{n \in \mathbb{N}}$$

Puisque $T \models \varphi$, il existe un $\Delta \subseteq T$ fini tel que $\Delta \models \varphi$. En particulier, il existe N tel que

$$\Delta \subseteq T_{\text{corps}} \cup \{\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n-\text{fois}} \neq 0\}_{n<N},$$

donc si F est un corps de caractéristique $n > N$ alors $F \models \Delta$, d'où $F \models \varphi$.

Exercice 1. Soit I un ensemble infini et $\{\mathcal{M}_i\}$ une collection de $\mathcal{L}$-structures. Soient $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ des ultrafiltres sur I et considérons les ultraproduits $\mathcal{M} = \prod_{i\in I} \mathcal{M}_i/\mathcal{U}$ et $\mathcal{N} = \prod_{i\in I} \mathcal{M}_i/\mathcal{V}$. Discuter si $\mathcal{M} \simeq \mathcal{N}$ selon le choix de $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$.

(1) Soit $I = \mathbb{N}$ et $M_i = \overline{\mathbb{Q}[x_1,\ldots,x_i]}^{\text{alg}}$.

(2) Soit $I = \{p, p \text{ premier }\}$, et soit $\mathcal{M}_p = \mathbb{F}_p$.

Solution.

(1) D'abord, si $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ sont tous deux principaux, alors $\mathcal{M} \simeq \overline{\mathbb{Q}[x_1,\ldots,x_i]}^{\text{alg}}$ et $\mathcal{N} \simeq \overline{\mathbb{Q}[x_1,\ldots,x_j]}^{\text{alg}}$, donc $\mathcal{M} \not\simeq \mathcal{N}$ sauf si $i = j$, car ils auraient des degrés de transcendance différents sur $\mathbb{Q}$. Maintenant, si $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ sont tous deux non principaux, alors par un théorème du cours, comme M_i est dénombrablement infini pour tout i, on a que $|M| = |N| = 2^{\aleph_0}$, de sorte que $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ sont des corps algébriquement clos de caractéristique 0, et par un fait d'algèbre ceux-ci sont tous deux $\simeq \mathbb{C}$. Si l'un est principal et l'autre non, ils ne peuvent pas être isomorphes pour des raisons de cardinalité.

(2) D'abord, si $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ sont tous deux principaux, alors $\mathcal{M} \simeq \mathbb{F}_i$ et $\mathcal{N} \simeq \mathbb{F}_j$, donc $\mathcal{M} \not\simeq \mathcal{N}$ sauf si $i = j$. D'autre part, considérons I_0 comme l'ensemble des nombres premiers congrus à 1 modulo 4. Par un fait de théorie des nombres, I_0 est infini et cofini, donc on peut trouver des ultrafiltres non principaux $\mathcal{U}$,$\mathcal{V}$ contenant I_0 et $I \setminus I_0$ respectivement. Considérons la phrase $\exists x\ x^2 + 1 = 0$. Par un autre fait de théorie des nombres, on sait que $\mathbb{F}_p \models \phi$ si et seulement si $p \in I_0$, ce qui nous permet de conclure $\mathcal{M} \models \phi$ et $\mathcal{N} \not\models \phi$. Finalement, si l'un est principal et l'autre non, ils ne peuvent pas être isomorphes à nouveau pour des raisons de cardinalité.

Exercice 2. Soit $\bar{\mathbb{Q}}$ le corps ordonné des rationnels et soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre non principal sur $\mathbb{N}$. Considérons l'ultrapuissance $\mathcal{K} = \bar{\mathbb{Q}}^{\mathcal{U}}$, et soit i le plongement diagonal de $\mathbb{Q}$ dans $\mathcal{K}$.

(1) Montrer que $\mathcal{K}$ est un corps ordonné, et donner au moins deux raisons pour lesquelles $\mathcal{K} \not\simeq \mathbb{R}$.

(2) Soit

$$\mathcal{O} = \{a \in K, \exists q \in \mathbb{Q}^{>0}\ i(-q) < a < i(q)\}$$

et

$$\mathcal{M} = \{a \in K, \forall q \in \mathbb{Q}^{>0}\ i(-q) < a < i(q)\}$$

Montrer que $\mathcal{O}$ est un anneau et que $\mathcal{M}$ est un idéal maximal dans $\mathcal{O}$.

(3) Soit $R = \mathcal{O}/\mathcal{M}$. Montrer que R peut être muni d'une structure $\mathcal{R}$ de corps ordonné.

(4) Montrer que $\mathbb{Q}$ peut être identifié à un sous-ensemble dense de $\mathcal{R}$.

(5) Montrer que $\mathcal{R} \simeq \mathbb{R}$ en tant que corps ordonnés

Solution.

(1) $\mathcal{K}$ est un ultraproduit de structures appartenant à une classe élémentaire (corps ordonnés), donc $\mathcal{K}$ appartient à la même classe. $\mathcal{K}$ a des éléments infinitésimaux : par exemple soit $n \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon = (1, 1/2, 1/3, \dots)_{\mathcal{U}}$ positif mais plus petit que $i(1/n)$ p.p. par rapport à $\mathcal{U}$, donc $\mathcal{K} \models \varepsilon < i(1/n)$. Aussi $\mathcal{K}$ a des éléments infiniment grands, par exemple $1/\varepsilon$.

(2) On a que $0 = i(0), 1 = i(1) \in \mathcal{O}$. Il suffit de montrer que $\mathcal{O}$ est clos sous l'addition, la multiplication, et l'inverse additif. Soient a,$b \in \mathcal{O}$ et choisissons $q, r \in \mathbb{Q}^{>0}$ tels que $i(-q) < a < i(q)$ et $i(-r) < b < i(r)$. Rappelons que i est un plongement élémentaire, donc on somme $i(-q) + i(-r) < a + b < i(q) + i(r)$ et on obtient $i(-q - r) < a + b < i(q + r)$. De même on prouve que $i(-qr) < ab < i(qr)$ (il y a 3 cas à considérer), il est clair aussi que $i(-q) < -a < i(q)$, donc $\mathcal{O}$ est un anneau. Maintenant considérons $a, b \in \mathcal{M}$, et soit $q \in \mathbb{Q}$, alors $i(-q/2) < a, b < i(q/2)$, donc en sommant les deux inégalités on obtient $i(-q) < a + b < i(-q)$, et aussi il est facile de voir que $\mathcal{M}$ est clos sous $-$. Pour vérifier que $\mathcal{M}$ est un idéal, soient $a \in \mathcal{M}$, $b \in \mathcal{O}$, et $q \in \mathbb{Q}^{>0}$. Puisque $b \in \mathcal{O}$ il existe q' tel que $i(-q') < b < i(q')$, et puisque $a \in \mathcal{M}$ on a en particulier $i(-q/q') < a < i(q/q')$, donc en multipliant ces inégalités on obtient $i(-q) < ab < i(q)$ pour tout q, d'où $ab \in \mathcal{M}$. Finalement, supposons qu'il existe un idéal I tel que $\mathcal{M} \subsetneq I \subseteq \mathcal{O}$, et soit $j \in I \setminus \mathcal{M}$, de sorte qu'il existe q tel que $j \notin (i(-q), i(q))$. Cela implique $1/j \in (i(-q), i(q)) \to 1/j \in \mathcal{O}$ de sorte que $j/j = 1 \in I$, d'où $I = \mathcal{O}$. Cela prouve que $\mathcal{M}$ est maximal.

(3) On note $r + \mathcal{M}$ pour la classe d'équivalence de r modulo $\mathcal{M}$. On sait déjà que $\mathcal{O}/\mathcal{M}$ est un corps, puisque $\mathcal{M}$ est un idéal maximal, donc il suffit de définir un ordre qui préserve sa structure de corps. On définit $r + \mathcal{M} < s + \mathcal{M}$ ssi $\mathcal{K} \models r < s$. C'est bien défini, puisque étant donné $r + \mathcal{M} < s + \mathcal{M}$, en particulier $s - r \notin \mathcal{M}$ et aussi $\mathcal{K} \models 0 < s - r$. Soit q tel que $\mathcal{K} \models i(q) < s - r$ et remarquons

que pour tous $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathcal{M}$, dans $\mathcal{K}$ il est vrai que :

$$\begin{aligned} r+\varepsilon_1 &< r+i(q/2) \\ &< s-i(q/2) \\ &< s+\varepsilon_2 \end{aligned}$$

donc $r+\varepsilon_1+\mathcal{M} < s+\varepsilon_2+\mathcal{M}$. Vérifions que cela respecte la structure de corps : supposons $r+\mathcal{M} < s+\mathcal{M}$

— Soit $a+\mathcal{M} \in \mathcal{O}/\mathcal{M}$, alors on a $\mathcal{K} \models r+a < s+a$ puisque $\mathcal{K}$ est un corps ordonné, donc $r+a\mathcal{M} < s+a\mathcal{M}$.

— Soit $0 < a+\mathcal{M} \in \mathcal{O}/\mathcal{M}$ alors on a $\mathcal{K} \models ra < sa$ puisque $\mathcal{K}$ est un corps ordonné, donc $ra+\mathcal{M} < sa+\mathcal{M}$.

Aussi $<_{\mathcal{R}}$ est une relation d'ordre total puisque $<_{\mathcal{K}}$ l'est.

(4) Remarquons que $\mathcal{R}$ est archimédien : supposons que $\mathcal{R} \models 0 \leq \varepsilon < i(1/n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\varepsilon \leq i(q)$ pour tout $q \in \mathbb{Q}^{>0}$, donc $\varepsilon \in \mathcal{M}$ ce qui implique $\mathcal{R} \models \varepsilon = 0$. Soient $r, s \in \mathbb{R}$ tels que $r < s$, choisissons n tel que $i(1/n) < s-r$, alors pour un certain $m \in \mathbb{N}$ il doit se produire que $r < i(m/n) < s$, car sinon il y aurait k tel que $i(k/n) \leq r$ et $i((k+1)/n) \geq s$, ce qui est une contradiction. Donc on peut identifier $\mathbb{Q}$ comme un sous-corps dense de $\mathcal{R}$.

(5) On considère $\mathbb{R}$ comme l'ensemble des classes d'équivalence de suites de Cauchy (notées (a_i)) sur $\mathbb{Q}$ sous la relation $(a_i) \sim (b_i)$ ssi $\lim_{n\to\infty} |a_i - b_i| = 0$. Aussi les opérations de corps sont définies point par point et l'ordre est défini comme $(a_i) < (b_i)$ ssi il existe N tel que $a_n < b_n$ pour $n \geq N$.

On définit l'application de $\mathbb{R}$ vers $\mathcal{R}$ qui envoie $(a_i)_\sim$ sur $(a_i)_\mathcal{U} + \mathcal{M}$ (on omettra le $+\mathcal{M}$ par commodité). Cette application est bien définie : si $(a_i) \sim (b_i)$, alors pour tout n il existe N tel que pour $n \geq N$, $|a_i - b_i| < 1/n$, en particulier l'ensemble $\{i, -1/n < a_i - b_i < 1/n\} \in \mathcal{U}$ pour tout n, donc $(a_i)_\mathcal{U} - (b_i)_\mathcal{U} \in \mathcal{M}$. Il est facile de voir que cette application est un plongement de corps, puisque $(a+b)_i = (a_i)+(b_i)$, de sorte que $(a_i)_\sim + (b_i)_\sim$ est envoyé sur $(a_i)_\mathcal{U} + (b_i)_\mathcal{U} = (a_i+b_i)_\mathcal{U}$, et de même pour le produit. Cette application préserve aussi l'ordre : si $(a_i)_\sim < (b_i)_\sim$, alors il existe N tel que pour $n \geq N$, $a_i < b_i$, donc à nouveau $\{i, a_i < b_i\} \in \mathcal{U}$, et $(a_i)_\mathcal{U} < (b_i)_\mathcal{U}$. Finalement on doit seulement vérifier la surjectivité : soit $r \in \mathcal{R}$, et choisissons une suite de rationnels (q_i) telle que pour tout $k > 0$, il existe N tel que $q_n \in (r - 1/k, r + 1/k)$ pour $n \geq N$ (autrement dit choisissons une suite convergente), c'est possible par le point précédent. Remarquons que $\mathcal{R} \models (q_i) = r$, puisque sinon, si par exemple $(q_i) < r$ alors il existe k tel que l'ensemble $\{i, q_i < r_i - 1/k\} \in \mathcal{U}$ donc c'est un ensemble infini, contredisant le fait que (q_i) converge vers r. On affirme que (q_i) est de Cauchy : soit $k > 0$ et choisissons N tel que pour tout $n \geq N$, $q_n \in (r - 1/2k, r + 1/2k)$, alors si $m, n > N$, on a $q_n, q_m \in (r - 1/2k, r + 1/2k)$ donc nécessairement $-1/k < q_n - q_m < 1/k$, donc on peut conclure que r est l'image de (q_i), et par conséquent $\mathbb{R} \simeq \mathcal{R}$.