Université de Paris **(Fecha : 19/07/2020)**

UFR Mathématiques

SP1301 Teoría de Modelos : Lista #2

Professor: Samaria Montenegro Juan Ignacio Padilla, B55272

Segunda lista de ejercicios para el curso de teoría de modelos. Corresponden al capítulo 5 de las notas del curso : modelos de la aritmética y teoremas de incompletitud.

Problema 1. Aritmética de Presburger

Considere $\mathcal{L}_{\text{Pres}} = \{0, 1, +, <, 1\} \cup \{\equiv_n, n \geq 1\}$, donde $\equiv_n$ son relaciones binarias. La *aritmética de Pressburger* viene dada por la $\mathcal{L}_{\text{Pres}}$-teoría T_{Pres} que consiste de :

— Axiomas de grupo conmutativo ordenado.

— 1 es el menor elemento positivo.

— Para todo $n \geq 1$ el siguiente axioma

$$\varphi_n := \forall x, y \left(x \equiv_n y \leftrightarrow \exists z \; x + \underbrace{z + z + \cdots + z}_{n\text{-veces}} = y \right).$$

— Para todo $n \geq 1$ el siguiente axioma

$$\psi_n := \forall x \left(\bigwedge_{i=0}^{n-1} x \equiv_n \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{i-\text{veces}} \right).$$

(1) Pruebe que $\langle \mathbb{Z}, 0, 1, +, <, \equiv_n \rangle \models T_{\text{Pres}}$.

(2) Pruebe que T_{Pres} tiene eliminación de cuantificadores, y que es completa.

(3) Deduzca que T_{Pres} es decidible.

Solución : La parte 1) es evidente, es claro que $\mathbb{Z}$ es un grupo ordenado cuyo primer elemento positivo es 1, y donde las relaciones de congruencia módulo n (para $n \geq 1$) cumplen los axiomas φ_n y ψ_n. Para demostrar la parte 2), demostraremos que todo modelo de T_{Pres} contiene a $\mathbb{Z}$ como una subestructura. Agreguemos $-$ al lenguaje, puesto que es definible a partir de los axiomas de grupo. Sea entonces $\mathcal{M} \models T_{\text{Pres}}$. Defina

$$Z^+ := \{\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n-\text{veces}}, n \geq 1\}$$

$$Z^- := \{-z, z \in Z^+\}$$

$$Z := Z^- \cup \{0\} \cup Z^+.$$

y restrinja $+, <$ y $\equiv_n$ a Z. Veamos que $Z \subseteq \mathcal{M}$.

Por construcción, Z es cerrado bajo $+,-$ y contiene al 0. Eso hace de Z un grupo conmutativo. Tenemos también que $<$ es restricción de un orden total en $\mathcal{M}$, lo cual hace de $<$ un orden total en Z. Además, si $a, b \in Z$ y $c \in Z^+$, como Z^+ solo contiene elementos positivos de $\mathcal{M}$, se tiene que

$$Z \models a < b \to a + c < b + c.$$

Nos queda ver que si $\mathcal{M} \models x \equiv_n y$ entonces $Z \models x \equiv_n y$ para $n \geq 1$. Suponga que existe $\alpha \in \mathcal{M}$ tal que $x + \alpha n = y$, con $x, y \in Z$, de hecho podemos asumir sin pérdida de generalidad que $\alpha > 0$ (caso contrario intercambie b con a). Entonces tenemos que $\alpha n = y - x \in Z$. Esto implica que el conjunto $K = \{z \in Z^+, \alpha \leq z\}$ no es vacío. Sea k_0 el primer elemento de K (en vista de que $\langle Z^+, \leq \rangle \cong \langle \mathbb{N}, \leq \rangle$). Asuma por contradicción que $\alpha \notin Z$. Entonces

$$Z \models k_0 - 1 < \alpha < k_0$$

$$\Rightarrow Z \models 0 < \alpha + 1 - k_0 < 1$$

lo cual contradice los axiomas de T_{Pres}. Por lo tanto podemos deducir que $\alpha \in Z$ y que $Z \models x \equiv_n y$. Finalmente, es claro que el mapa $\underbrace{1+1+\cdots+1}_{m-\text{veces}} \mapsto m$ puede definirse de forma que $Z \cong \mathbb{Z}$ (respetando todas las relaciones y funciones). Hemos demostrado que $\mathbb{Z} \subseteq \mathcal{M}$. Vamos a demostrar ahora 2), que T_{Pres} admite eliminación de cuantificadores.

Sean $\mathcal{M}, \mathcal{N} \models T_{\text{Pres}}$. Sabemos que $\mathbb{Z}$ es subestructura de ambos modelos. Sea $\varphi(x, \bar{y})$ una fórmula sin cuantificadores. Vamos a demostrar que la existencia de $\bar{z} \in \mathbb{Z}^p$ y $m \in \mathcal{M}$ que cumplan $\mathcal{M} \models \varphi[m, \bar{z}]$, implica la existencia de $n \in \mathcal{N}$ tal que $\mathcal{N} \models \varphi[n, \bar{z}]$. Como φ no tiene cuantificadores, se cumple la equivalencia lógica

$$\varphi(x, \bar{y}) \sim \bigvee_i \bigwedge_j \chi_{ij}(x, \bar{y})$$

con χ_{ij} fórmulas atómicas (o negaciones de éstas). De hecho, si $\mathcal{M} \models \varphi[m, \bar{z}]$ entonces para alguna i, $\mathcal{M} \models \bigwedge_j \chi_{ij}[m, \bar{z}]$. Gracias a esto, podemos asumir que φ es una conjunción de fórmulas atómicas o sus negaciones.

En $\mathcal{L}_{\text{Pres}}$, las fórmulas atómicas son equivalentes[1] a alguna de la siguientes formas : $p(\bar{x}) = 0$, $p(\bar{x}) < 0, p(\bar{x}) \equiv_n 0$, donde $p(\bar{x})$ es un polinomio **de grado 1** con coeficientes en $\mathbb{Z}$. Por lo tanto, asumimos sin pérdida de generalidad que

$$\varphi(x, \bar{y}) = \bigwedge_i (p_i(x, \bar{y}) = 0) \wedge \bigwedge_i (q_i(x, \bar{y}) < 0) \wedge \bigwedge_i (r_i(x, \bar{y}) \equiv_n 0)$$

Donde p_i, q_i, r_i son polinomios de grado 1 con coeficientes en $\mathbb{Z}$.

Si se tiene que $\mathcal{M} \models p_i(m, \bar{z}) = 0$, entonces, existen $k, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ tales que

$$km + a_1 z_1 + a_2 z_2 + \cdots + a_p z_p = 0$$

$$\Rightarrow km = -(a_1 z_1 + a_2 z_2 + \cdots + a_p z_p) := A \in \mathbb{Z}$$

Por un argumento análogo a uno usado anteriormente, podemos demostrar que $km \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \mathbb{Z}$, por lo que m sería el testigo en $\mathcal{N}$ que estamos buscando. Supongamos entonces que φ tiene la forma

$$\varphi(x, \bar{y}) = \bigwedge_i (q_i(x, \bar{y}) < 0) \wedge \bigwedge_i (r_i(x, \bar{y}) \equiv_n 0).$$

Entonces m es la solución de un sistema (con incógnita x) del tipo

$$\begin{cases} k_i x < A_i & \text{para finitos } i \\ l_j x + B_j \equiv_{n_j} 0 & \text{para finitos } j \end{cases}$$

donde $k_i, A_i, l_j, B_j \in \mathbb{Z}$ y $n_j \geq 2$ para todo i, j. Queremos resolver este sistema en $\mathcal{N}$. Note que la inecuación $k_i x < A_i$ es equivalente a $x < h_i$, donde h_i es el menor entero tal que $hk_i < A_i < h(k_i+1)$. Además, podemos resumir todas las inecuaciones en una sola, tomando $h = \min_i\{h_i\}$. Tenemos que resolver en $\mathcal{N}$ el sistema equivalente

$$\begin{cases} x < h \\ l_j x + B_j \equiv_{n_j} 0 & \text{para finitos } j \end{cases} \tag{0.1}$$

1. Las expresiones del tipo $p(x) \not\equiv_n 0$ se pueden reemplazar por una de tipo $\bigvee_{i=1}^{n-1} p(x) + \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{i-\text{veces}} \equiv_n 0$

Sea $n = \prod_j n_j$, y escoja $0 \leq j \leq n-1$ que cumpla $\mathcal{M} \models m \equiv_n j$. Por propiedades conocidas de $\equiv_n$ se tiene que j es una solución al sistema de congruencias. Finalmente, escoja un representante $g < A$ de la clase de equivalencia de j módulo n, esto es posible puesto que $(-\infty, A]$ contiene, gracias a los axiomas de T_{Pres}, al menos un elemento congruente con cada uno de $1, 2, \ldots, n-1$. Entonces tenemos que $g < A$ y como $g \equiv_n j$ se sigue que g es también solución de las congruencias, y por tanto solución del sistema (0.1). Como $g \in \mathcal{N}$, $\mathcal{N} \models \varphi(g, \bar{z})$. Se concluye por tanto que

$$\mathcal{M} \models \exists x \varphi[x, \bar{z}] \Rightarrow \mathcal{N} \models \exists x \varphi[x, \bar{z}]$$

lo cual es equivalente a que T_{Pres} tenga eliminación de cuantificadores. Como todo modelo de T_{Pres} tiene a $\mathbb{Z}$ como subestructura, dados $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ modelos cualesquiera de T_{Pres}, por lo que acabamos de demostrar, se tendrá que $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$. Como se trata de modelos arbitrarios, se concluye que T_{Pres} es completa. Finalmente, para ver 3), note que T_{Pres} es claramente recursiva, y al ser completa, un teorema de la sección nos dice que es una teoría decidible.

Problema 2.

(1) Sea $\Phi = \{\#\varphi, \varphi$ es un $\mathcal{L}_{ar}$-enunciado satisfacible $\}$. Pruebe que Φ no es recursivamente enumerable.

(2) Sea Φ_m el conjunto de códigos de $\mathcal{L}_{ar}$-enunciados satisfacibles por alguna $\mathcal{L}_{ar}$-estructura con dominio $\{0, \ldots, m-1\}$. Pruebe que Φ_m es primitivo recursivo.

(3) Sean Φ_{fin} los códigos $\#\varphi$ de $\mathcal{L}_{ar}$-enunciados satisfacibles por alguna $\mathcal{L}_{ar}$-estructura finita. Usando la pregunta anterior y una codificación apropiada, pruebe que Φ_{fin} es recursivamente enumerable.

Solución : Primero demostramos a). Suponga que Φ es recursivamente enumerable. Por el teorema de representabilidad, existe una Σ_1-fórmula τ que representa a Φ. Es decir, que $\mathsf{PA_0} \models \tau(\#\varphi)$ si y solo si existe una $\mathcal{L}_{ar}$-estructura $\mathcal{M}$ tal que $\mathcal{M} \models \varphi$ (con φ un enunciado). Sea $\mathcal{M} \models \mathsf{PA_0}$.

— Si $\mathcal{M} \models \varphi$, entonces por definición de τ, $\mathsf{PA_0} \models \tau(\#\varphi) \Rightarrow \mathcal{M} \models \tau(\#\varphi)$.

— Si $\mathcal{M} \models \neg\varphi$, se tendría entonces que $\mathsf{PA_0} \models \tau(\#\neg\varphi) \Rightarrow \mathcal{M} \models \tau(\#\neg\varphi)$.

Acabamos de demostrar que existe una fórmula con una variable libre $\tau(x)$ que tiene la propiedad

$$\mathcal{M} \models \varphi \iff \tau(\#\varphi),$$

esto contradice el teorema de Tarksi.

Antes de demostrar b) y c) debemos trabajar algunas cosas. Primero daremos una enumeración efectiva de todas las $\mathcal{L}_{ar}$-estructuras finitas. Sea $m \geq 1$, y sea $\mathcal{M}$ una $\mathcal{L}_{ar}$-estructura cuyo dominio tiene m elementos. Vamos a codificar las interpretaciones de los símbolos de $\mathcal{L}_{ar} : +, \times, <, S$ (para ser rigurosos deberíamos codificar que $0^{\mathcal{M}} = 0$ pero esto no altera la prueba). Para $n \geq 0$, defina $\pi(n)$ como el $n+1$-ésimo número primo y sea $\alpha_n : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ una función primitiva recursiva e invertible. Codificamos de la siguiente manera :

— $+ : M^2 \to M$ de la siguiente forma : si $a, b, c \in M$ son tales que $a + b = c$, entonces

$$\lceil + \rceil = \prod_{a,b \in M} \pi(\alpha_2(a,b))^c.$$

— $\times : M^2 \to M$ de la siguiente forma : si $a, b, c \in M$ son tales que $a \times b = c$, entonces

$$\lceil \times \rceil = \prod_{a,b \in M} \pi(\alpha_2(a,b))^c.$$

— $<\subseteq M^2$ de la siguiente forma : si $a, b \in M$ son tales que $a < b$, entonces

$$\lceil < \rceil = \prod_{a,b \in M} \pi(\alpha_2(a,b))^{\mathbb{1}_{a<b}}.$$

— $S : M \to M$ de la siguiente forma : si $a, b \in M$ son tales que $S(a) = b$, entonces

$$\lceil S \rceil = \prod_{a \in M} \pi(a)^b.$$

Finalmente definimos

$$\lceil \mathcal{M} \rceil = \alpha_5(m, \lceil + \rceil, \lceil \times \rceil, \lceil < \rceil, \lceil S \rceil).$$

Sea $\mathcal{M}$ una $\mathcal{L}_{ar}$-estructura con m elementos, enriquezcamos momentáneamente el lenguaje a $\mathcal{L}_{ar}^*$, agregando símbolos para $1, 2, \ldots, m-1$. Vamos a mostrar por inducción sobre φ que el conjunto $\#\,\mathrm{Thm}(\mathcal{M}) = \{\#\varphi; \text{con } \varphi \text{ enunciado y } \mathcal{M} \models \varphi\}$ es primitivo recursivo.

— Si φ es atómica, al interpretarla en $\mathcal{M}$ es equivalente a una fórmula de alguna de las siguientes formas :

  — $a + b = c$.

  — $a \times b = c$.

  — $S(a) = b$.

  — $a < b$.

  Para algunos $a, b, c \in M = \{0, 1, \ldots, m-1\}$.

  Para revisar si $\mathcal{M} \models \varphi$, debemos en el primer caso, revisar si $\pi(\alpha_2(a,b))^c \mid \lceil + \rceil$. Los demás casos son similares. Además, todas estas operaciones son primitivas recursivas.

— El caso booleano es directo pues las funciones primitivas recursivas son compatibles con los conectores boleanos.

— Si $\varphi = \exists x \psi(x)$, con $\psi(x)$ una fórmula, podemos notar que como

$$\mathcal{M} \models \exists x \varphi(x) \iff \mathcal{M} \models \bigvee_{k=0}^{m-1} \varphi(i),$$

  el resultado se sigue por hipótesis de inducción, pues podemos revisar primitivo recursivamente si $\mathcal{M} \models \varphi(k)$ para cada $k = 0, 1 \ldots, m-1$.

Nota : podemos volver a considerar únicamente enunciados en el lenguaje $\mathcal{L}_{ar}$ agregando a los elementos de $\mathrm{Thm}(\mathcal{M})$ la restricción adicional de no tener ninguna ocurrencia de $1, 2, \ldots, m-1$. Lo último que necesitamos para las pruebas es observar que como solo existen finitas $\mathcal{L}_{ar}$ estructuras con m elementos, el conjunto de códigos de éstas es primitivo recursivo, denotémoslo como $\mathcal{F}_m$.

Demostración de b) : Tenemos que

$$n \in \Phi_m \iff n = \#\varphi \text{ con } \varphi \text{ un enunciado, } \exists z, z = \lceil \mathcal{M} \rceil \text{ con } \lceil \mathcal{M} \rceil \in \mathcal{F}_m / \text{ y además } n \in \#\,\mathrm{Thm}(\mathcal{M})\}.$$

Como se ha demostrado, todos estos conjuntos son primitivos recursivos, por lo que Φ_m lo es.

Demostración de c) : Sea $\mathcal{F}$ el conjunto de códigos de todas las $\mathcal{L}_{ar}$-estructuras finitas. Hemos dado ya una enumeración recursiva de este conjunto. Entonces note que

$$\Phi_{fin} = \{(n, z), n = \#\varphi \text{ con } \varphi \text{ un enunciado}, z = \lceil \mathcal{M} \rceil \text{ para } \lceil \mathcal{M} \rceil \in \mathcal{F}, n \in \#\,\mathrm{Thm}(\mathcal{M})\}.$$

Similar que en b), se concluye que Φ_{fin} es recursivamente enumerable.

Problema 3. Sea $\mathcal{L} = \{P, c\}$ donde P es un predicado unario y c un símbolo de constante.

(1) Determine todas las $\mathcal{L}$-estructuras numerables módulo isomorfismo.

(2) Deduzca que dos $\mathcal{L}$-estructuras $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ son elementalmente equivalentes cuando las dos condiciones siguientes se cumplen

— $\mathcal{M} \models Pc$ si y solo si $\mathcal{N} \models Pc$.

— $\mathcal{M} \models \exists^{\geq k} x Qx$ si y solo si $\mathcal{N} \models \exists^{\geq k} x Qx$ para cualquier $k \in \mathbb{N}$ y $Q \in \{P, \neg P\}$.

(3) Pruebe que un $\mathcal{L}$-enunciado φ es universalmente válido si y solo si $\mathcal{M} \models \varphi$ para cualquier $\mathcal{L}$-estructura finita. Deduzca que la teoría vacía en $\mathcal{L}$ es decidible.

Solución :

En una $\mathcal{L}$-estructura numerable $\mathcal{M}$, lo único que podemos definir es $c^{\mathcal{M}}$ y $P^{\mathcal{M}}$. En otras palabras, la única forma de distinguir elementos de $\mathcal{M}$ viendo si se trata de c o si se cumple P para dicho elemento. El hecho de si $\mathcal{M} \models Pc$ también es clave. Vamos a mostrar entonces que la clase de isomorfismo de $\mathcal{M}$ depende únicamente de la satisfabilidad de Pc y del tamaño de $P^{\mathcal{M}}$.

Lema : Sean $\mathcal{M} = \{m_0, m_1, \dots\}$ y $\mathcal{N} = \{n_0, n_1, \dots\}$, $\mathcal{L}$-estructuras numerables tales que

— $\mathcal{M} \models Pc$ si y solo si $\mathcal{N} \models Pc$.

— $\mathcal{M} \models \exists^{\geq k} x Qx$ si y solo si $\mathcal{N} \models \exists^{\geq k} x Qx$ para cualquier $k \in \mathbb{N}$ y $Q \in \{P, \neg P\}$.

Entonces $\mathcal{M} \cong \mathcal{N}$.

Prueba : Vamos a exhibir el isomorfismo. Defina $\sigma : M \to N$ de la siguiente forma : primero, $\sigma(c^{\mathcal{M}}) = c^{\mathcal{N}}$. Como $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ son numerables, podemos encontrar $\alpha, \beta \leq \omega$ tales que

$$P^{\mathcal{M}} = \{m_{i_k}\}_{k \in \alpha \leq \omega} \quad , \quad \mathcal{M} \setminus P^{\mathcal{M}} = \{\hat{m}_{i_k}\}_{k \in \beta \leq \omega}.$$

Por la segunda hipótesis, tenemos que $|P^{\mathcal{N}}| = \alpha$ y $|\mathcal{N} \setminus P^{\mathcal{N}}| = \beta$. Entonces podemos enumerar también

$$P^{\mathcal{N}} = \{n_{i_k}\}_{k \in \alpha \leq \omega} \quad , \quad \mathcal{N} \setminus P^{\mathcal{N}} = \{\hat{n}_{i_k}\}_{k \in \beta \leq \omega}.$$

Tome entonces $m_{i_k} \mapsto n_{i_k}$ y $\hat{m}_{i_j} \mapsto \hat{n}_{i_j}$ para todo $k \in \alpha$ y todo $j \in \beta$. Por como lo hemos construido, σ es un morfismo de $\mathcal{L}$-estructuras, pues preserva P y c. Además lo hemos construido biyectivo, lo cual nos permite ver que $\mathcal{M} \cong \mathcal{N}$. Esto termina la demostración de 1).

Para demostrar 2) note que todo $\mathcal{L}$-enunciado φ es consecuencia de una fórmula del tipo

$$Pc \wedge \exists^{\geq k_1} x Px \wedge \exists^{\geq k_2} y \neg Py \tag{*}$$

o del tipo

$$\neg Pc \wedge \exists^{\geq k_1} x Px \wedge \exists^{\geq k_2} y \neg Py \tag{**}$$

para algunos $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$. Para ver esto, podemos asumir justo lo contrario. Si φ no es consecuencia de ninguna fórmula de este tipo, podemos encontrar $\mathcal{L}$-estructuras numerables $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$ que satisfagan las hipótesis del lema anterior, pero que también cumplan $\mathcal{M}_1 \models \varphi$ y $\mathcal{M}_2 \models \neg\varphi$. Por el mismo lema se tendría sin embargo que $M_1 \equiv M_2$, lo cual es absurdo. Podemos asumir entonces sin pérdida de generalidad que si φ es un enunciado, entonces tiene alguna de las formas (*) o (**), gracias a las hipótesis podemos entonces concluir que $\mathcal{M} \models \varphi$ si y solo si $\mathcal{N} \models \varphi$.

La dirección $\Rightarrow$ de 3) es evidente. Demostremos la dirección contraria : suponga que para todo $\mathcal{M}$ finito, $\mathcal{M} \models \varphi$. Sea $\mathcal{M}'$ una $\mathcal{L}$-estructura infinita. Hay que demostrar que $\mathcal{M}' \models \varphi$. Suponga sin pérdida de generalidad que $\mathcal{M}' \models Pc$ (el caso contrario se trabajaría de manera análoga). Consideramos dos casos :

— Si $P^{\mathcal{M}'}$ es finito, podemos encontrar alguna $\mathcal{M}$ finita de forma que $|P^{\mathcal{M}'}| = |P^{\mathcal{M}}|$ y que además $\mathcal{M} \models Pc$. Se tendría entonces por 2) que $\mathcal{M}' \equiv \mathcal{M}$ y por hipótesis se concluye que $\mathcal{M}' \models \varphi$.

— Si $P^{\mathcal{M}'}$ es infinito, considere la siguiente teoría

$$T = \{\varphi, Pc\} \cup \{\bigwedge_{i \neq j} x_i \neq x_j\}_{i,j<\omega} \cup \{Px_i\}_{i<\omega}.$$

Sabemos que T es finitamente consistente, pues para todo n podemos definir una L-estructura finita $\mathcal{M}_n$ en donde $|P^{\mathcal{M}_n}| = n$, $M_n \models Pc$ y $M_n \models \varphi$ (gracias a su finitud). Por el teorema de compacidad, existe $\mathcal{N} \models T$. Esto implica que $P^{\mathcal{N}}$ es infinito, y como $N \models Pc$, se cumple por 2) que $\mathcal{M}' \equiv \mathcal{N}$, y por lo tanto $\mathcal{M} \models \varphi$. Finalmente, para ver que en $\mathcal{L}$ la teoría vacía es decidible, note que $\mathrm{Thm}(\varnothing) = \{\varphi, \vdash_{\mathcal{L}} \varphi\}$. Sabemos por la teoría del capítulo que el conjunto de verdades universales es recursivamente enumerable . Finalmente, $\mathrm{Thm}(\varnothing)^C$ consiste de aquellos enunciados φ cuya negación se encuentra en Φ_{fin}, y podemos adaptar la prueba de 2) del problema 3, para ver que Φ_{fin} es recursivamente enumerable. La conclusión se sigue del teorema del complemento.

Problema 4. El objetivo de este ejercicio es demostrar que existe una función total recursiva que no es demostrable total Σ_1.

(1) Pruebe que existe una función parcial recursiva $h \in \mathcal{F}_2^*$ con las siguientes propiedades :

a) Si $a = \#\varphi$ para una Σ_1-fórmula $\varphi(v_0, v_1)$ y si $n \in \mathbb{N}$ es tal que existe $m \in \mathbb{N}$ con $\mathsf{PA} \vdash \varphi(\underline{\mathsf{n}}, \underline{\mathsf{m}})$, entonces $\mathsf{PA} \vdash \varphi(\underline{\mathsf{n}}, \underline{\mathsf{h(a,n)}})$.

b) Si $a = \#\varphi$ para una Σ_1-fórmula $\varphi(v_0, v_1)$ y si $n \in \mathbb{N}$ es tal que no existe $m \in \mathbb{N}$ con $\mathsf{PA} \vdash \varphi(\underline{\mathsf{n}}, \underline{\mathsf{m}})$, entonces $(a, n) \notin \mathrm{dom}(h)$.

c) En cualquier otro caso, $h(a, n) = 0$.

(2) Escoja h como arriba, y definiendo $g \in \mathcal{F}^3$ como sigue

— Si $a = \#\varphi$ para una Σ_1-fórmula $\varphi(v_0, v_1)$ y si $b = \#\#d$ para una prueba formal d de $\forall v_0 \exists! v_1 \varphi(v_0, v_1)$ en PA, entonces $g(a, b, n) = h(a, n)$.

— En cualquier otro caso, $g(a, b, n) = 0$.

Demuestre que g es total recursiva, y que es *universalmente demostrable total* Σ_1 en el sentido siguiente : una función $f \in \mathcal{F}_1$ es demostrable total Σ_1 si y solo si existen $a, b \in \mathbb{N}$ tales que $f = \lambda n.g(a, b, n)$.

(3) Concluya.

Solución : A lo largo de la demostración, vamos a usar el siguiente hecho : si ϕ es un Σ_1-enunciado, entonces $\mathsf{PA_0} \vdash \phi$ si y solo si $\mathsf{PA} \vdash \phi$. Esto se sigue de un teorema en las notas que afirma que todo Σ_1-enunciado válido en $\mathbb{N}_{st}$ es en efecto un teorema de $\mathsf{PA_0}$. Primero demostramos 1). Dados $a = \#\varphi$ y $n \in \mathbb{N}$ que cumplan las hipótesis de 1a), solo es necesario demostrar que $h(a, n)$ es recursiva en este caso. Podemos describir $h(a, n)$ como el primer número m tal que $\mathsf{PA} \vdash \varphi(\underline{\mathsf{n}}, \underline{\mathsf{m}})$. Podemos de hecho representar la función h de la siguiente forma

$$\mathsf{PA} \vdash \forall \mathsf{y} \Big((\varphi(\underline{\mathsf{n}}, \mathsf{y}) \wedge (\forall (\mathsf{z} < \mathsf{y}) \neg \varphi(\underline{\mathsf{n}}, \mathsf{z})) \leftrightarrow \mathsf{y} = \underline{\mathsf{h(a,n)}} \Big)$$

Como la fórmula al lado izquierdo del $\leftrightarrow$ es Σ_1, se deduce que h es parcial recursiva. Para demostrar 2), es claro que g es una función total. Considere ahora el conjunto $C \subseteq \mathbb{N}^2$ de pares ordenados que cumplan que $a = \#\varphi$, para una Σ_1-fórmula $\varphi(v_0, v_1)$ y $b = \#\#d$ para una prueba formal d de $\forall v_0 \exists! v_1 \varphi(v_0, v_1)$ en PA. Los resultados estudiados en la sección demuestran que C es recursivo.

Esto implica que podemos definir g de manera recursiva

$$g(a,b,n) = \begin{cases} h(a,n) & \text{si } (a,b) \in C \\ 0 & \text{si } (a,b) \notin C \end{cases}$$

Seguidamente, es claro que para cualesquiera a, b, las funciones $\lambda n.g(a,b,n)$ son Σ_1-demostrablemente totales, pues en el caso no trivial donde $(a,b) \in C$, la fórmula que describe a g es justamente aquella cuyo código es a. Ahora , si f es Σ_1-demostrablemente total, escoja $\chi_f(x,y)$ una Σ_1-fórmula que represente a f y que además $\mathsf{PA} \vdash \forall \mathsf{x} \exists ! \mathsf{y} \chi_{\mathsf{f}}(\mathsf{x},\mathsf{y})$. Sea $n \in \mathbb{N}$, sea $m = f(n)$. Tome entonces $a = \#\chi_f(\underline{n}, \underline{m})$ y b como el código de la demostración formal de $\forall x \exists ! y \chi_f(x,y)$ en PA. Note entonces que por definición de $g(a,b,n)$, m es el primer número natural que cumple $\mathsf{PA} \vdash \chi_{\mathsf{f}}(\underline{\mathsf{n}}, \underline{\mathsf{m}})$. Como χ_f es Σ_1, esto equivale a $\mathsf{PA_0} \vdash \chi_{\mathsf{f}}(\underline{\mathsf{n}}, \underline{\mathsf{m}})$, y como χ_f representa a f, esto es a su vez equivalente a $\mathsf{PA_0} \vdash \underline{\mathsf{f}(\mathsf{n})} = \underline{\mathsf{m}}$. Se concluye entonces que para todo n, $\mathsf{PA_0} \vdash \underline{\mathsf{g}(\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{n})} = \underline{\mathsf{f}(\mathsf{n})}$, lo cual implica que $g(a,b,n) = f(n)$ pues $\mathbb{N} \models \mathsf{PA_0}$. Esto demuestra que f es Σ_1-demostrablemente total si y solo si existen a, b tales que $f(n) = \lambda n.g(a,b,n)$.

Finalmente, para concluir la existencia de una función total recursiva pero no Σ_1-demostrablemente total, considere por un argumento de diagonalización la función $d(n) = \lambda n.g(\beta_1^2(n), \beta_2^2(n), n) + 1$, que es claramente total recursiva [2]. Si dicha función fuese Σ_1-demostrablemente total, existirían a, b tales que $d(n) = g(a,b,n)$. Tome en particular $n_0 = \beta^{-1}(a,b)$ y observe que

$$d(n_0) = g(a,b,n_0) + 1 = g(a,b,n_0)$$

lo cual es imposible.

2. Aquí tomamos β_1^2 y β_2^2 como los componentes de alguna biyección primitiva recursiva entre $\mathbb{N}$ y $\mathbb{N}^2$.

Problema 5. Extensiones finales en aritmética de Peano.

El objetivo de este ejercicio es demostrar el siguiente resultado :

Sea $\mathcal{M}$ un modelo numerable de PA. Entonces existe una extensión propia elemental $\mathcal{M} \preccurlyeq \mathcal{N}$ donde $\mathcal{N}$ es una extensión final de $\mathcal{M}$, es decir, para todo $m \in M$ y todo $n \in N \setminus M$, se cumple $\mathcal{N} \models m < n$.

(1) Sea $\mathcal{M} \models \mathsf{PA}$. Demuestre que el *principio del palomar* vale en $\mathcal{M}$: para toda $\mathcal{L}_{ar}(M)$-fórmula $\theta(v,z)$ y todo $a \in M$, se tiene

$$\mathcal{M} \models p(a) := [\forall x(\exists z > x)(\exists v < a)\theta(v,z)] \to (\exists v < a)\forall x(\exists z > x)\theta(v,z)$$

(2) Sea $\mathcal{M} \models \mathsf{PA}$. Sea c un símbolo de constante nuevo, y sea $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{ar}(M) \cup \{c\}$. Consideramos ahora la $\mathcal{L}$-teoría $T \coloneqq D(\mathcal{M}) \cup \{c > m, m \in M\}$, donde $D(\mathcal{M})$ es el diagrama completo de $\mathcal{M}$.

— Verifique que T es consistente.

— Sea $a \in M$ y sea $\theta(v,z)$ una $\mathcal{L}$-fórmula tal que $T \vdash \forall v(\theta(v,c) \to v < a)$ y tal que $T \cup \{\exists v \theta(v,c)\}$ es consistente. Demuestre que existe $m \in M$ con $m < a$ y tal que $\mathcal{M} \models \forall x(\exists z > x)\theta(m,z)$.

— Sea $a \in M$ un elemento no estándar. Considere el conjunto de fórmulas

$$\pi_a(v) \coloneqq \{v < a\} \cup \{v \neq m, m \in M\}.$$

Pruebe que π_a es un 1-tipo parcial no aislado en T.

(3) Concluya.

Solución : 1). Podemos proceder por inducción en $\mathcal{M}$. Si $a = 0$, no hay nada que demostrar. Asumamos como hipótesis que $\mathcal{M} \models p(a)$. Asuma que

$$\mathcal{M} \models [\forall x(\exists z > x)(\exists v < a+1)\theta(v,z)]$$

En vista de la siguiente equivalencia

$$\begin{aligned}\mathcal{M} \models \forall x(\exists z > x)(\exists v < a+1)\theta(v,z) &\leftrightarrow \forall x(\exists z > x)(\exists v < a)\ \theta(v,z) \vee \theta(z+1)\\ &\leftrightarrow \forall(\exists v < a)x(\exists z > x)\ \theta(v,z) \vee \theta(z+1) \text{ por H.I}\\ &\leftrightarrow (\exists v < a+1)\forall x(\exists z > x)\theta(v,z)\end{aligned}$$

Se concluye la prueba.

2) Si T_0 es una parte finita de $D(\mathcal{M}) \cup \{c > m\}_{m \in M}$, entonces existe $m \in M$ tal que $T_0 \subseteq D(\mathcal{M}) \cup \{c > m\}$. Podemos tomar a $\mathcal{M}$ como modelo de T_0, interpretando a $c^{\mathcal{M}} = S(m)$ y todos los demás símbolos como sus respectivos elementos de $\mathcal{M}$. Como T_0 es arbitraria, se concluye por el teorema de compacidad que T es consistente.

Sea $a \in M$ y sea $\theta(v,z)$ una $\mathcal{L}$-fórmula tal que $T \vdash \forall v(\theta(v,c) \to v < a)$ y tal que $T \cup \{\exists v\theta(v,c)\}$ es consistente. Queremos probar que

$$\mathcal{M} \models (\exists m < a)\forall x(\exists z > x)\theta(m,z).$$

Para esto, basta por el principio del palomar demostrar la misma proposición con el $\forall x$ intercambiado por $(\exists m < a)$. Suponga por contradicción que este no es el caso. Es decir

$$\mathcal{M} \models \exists x(\forall m < a)(\forall z > x)\neg\theta(m,z). \tag{*}$$

Sea ahora $\mathcal{N} \models T \cup \{\exists v\theta(v,c)\}$. Como $\mathcal{M} \preccurlyeq \mathcal{N}_{\upharpoonright\mathcal{L}}$,

$$\mathcal{N} \models \exists x(\forall m < a)(\forall z > x)\neg\theta(m,z).$$

Tenemos entonces $x \in \mathcal{N}$ un testigo de esta última fórmula. Note que entonces $\mathcal{N} \models x \geq c$, pues sabemos por nuestras hipótesis que

$$\mathcal{N} \models \exists v < a\ \theta(v,c)$$

es decir, que en $\mathcal{N}$, para cualquier cualquier $x < c$ podemos encontrar $m < a$ tal que $\mathcal{N} \models \theta(m, c)$. Como $\mathcal{N} \models x \geq c$, se tiene que un testigo de la fórmula (*) no puede pertenecer a M. Esto contradice nuestra suposición inicial, lo cual concluye la prueba.

Para ver que $\pi_a(v)$ es un 1-tipo parcial, considere una parte finita $\pi(v) \subset \{v < a\} \cup \{v \neq m_i\}_{i=1}^{k}$. Sea $\mathcal{N} \models T$, entonces $\mathcal{N}$ realiza a $\pi(v)$, pues al ser a no estándar, existen infinitos elementos en $\mathcal{N}$ menores que a, alguno de ellos debe ser distinto de los m_i. Suponga ahora por contradicción que $\pi_a(v)$ es aislado, en ese caso existe una $\mathcal{L}-$fórmula $\varphi(v)$, o más precisamente, una $\mathcal{L}_{ar}(\mathcal{M})-$fórmula $\theta(v, z)$ tal que

$$T \vdash (\theta(v, c) \to v < a)$$

$$T \vdash (\theta(v, c) \to v \neq m) \text{ para cada } m \in M$$

La primera condición, junto con el insciso anterior, nos permite concluir que en $\mathcal{M}$, existe $m < a$ tal que

$$\mathcal{M} \models \forall x \exists z > x\ \theta(m, z).$$

Veamos que $T \cup \{\theta(m, c)\}$ es consistente. Cualquier parte finita de esta teoría tiene la forma $T_0 \subseteq D(\mathcal{M}) \cup \{c > m_0\} \cup \{\theta(m, c)\}$, para algún $m_0 \in M$. Podemos tomar entonces $\mathcal{M} \models T_0$, interpretando c como el testigo de $\exists z > m_0\ \theta(m, z)$, esto prueba consistencia. Sea $\mathcal{N} \models T \cup \{\theta(m, c)\}$, en particular se tiene que $\mathcal{N} \models \theta(m, c) \to m \neq m$, lo cual es absurdo. Concluimos que para todo $a \in M$ no estándar, $\pi_a(v)$ es un 1-tipo parcial no aislado.

3) Como el $\mathcal{M}$ es numerable, $\mathcal{L}$ también lo es, y podemos aplicar el teorema de omisión de tipos para encontrar una $\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{M}'$ que omita $\pi_a(v)$ para todo $a \in M$ no estándar. Es decir, para todo $m' \in M'$ y para todo $a \in M$ no estándar, $\mathcal{M}' \models m' \geq a$ ó $m' \in M$. En particular, esto implica que si $m' \in M' \setminus M$, para cualquier $m \in M$ se cumple $\mathcal{M}' \models m' > m$. $\mathcal{M}'$ es una extensión elemental final de $\mathcal{M}$.

Problema 6. Teorema de Tenenbaum

Sea $\mathcal{M}$ un modelo no estándar de PA y sea $\eta(x,y)$ $\mathcal{L}_{ar}$-fórmula. Denote $S_\eta(\mathcal{M})$ como la familia de $A \subseteq \mathbb{N}$ para los cuales existe $a \in M$ tal que

$$A = \{n \in \mathbb{N}, \mathcal{M} \models \eta(\underline{n}, a)\}.$$

Sea $S(\mathcal{M})$ la unión de $S_\eta(\mathcal{M})$, donde η recorre todas las fórmulas con dos variables libres.

(1) Sea $\eta_0(x,y)$ una $\mathcal{L}_{ar}$-fórmula tal que para cualquier par de conjuntos finitos disjuntos $A, B \subseteq \mathbb{N}$, el enunciado

$$\exists x \left(\bigwedge_{i \in A} \eta_0(\underline{i}, x) \wedge \bigwedge_{j \in B} \neg \eta_0(\underline{j}, x) \right)$$

es demostrable en PA. Pruebe que $S_{\eta_0}(\mathcal{M}) = S(\mathcal{M})$.

(2) Demuestre que existe una Σ_1-fórmula η_0 con dos variables libres tales que para todo $n \in \mathbb{N}$ el enunciado

$$\eta_0(\underline{n}, x) \leftrightarrow \exists y (\underline{\pi(n)} \cdot y = x)$$

es demostrable en PA. Pruebe que $S_{\eta_0}(\mathcal{M}) = S(\mathcal{M})$. [3]

(3) Sean $A, B \subseteq \mathbb{N}$ dos conjuntos disjuntos recursivamente enumerables.

a) El conjunto de Δ_0-fórmulas se defina como el mejor conjunto de $\mathcal{L}_{ar}$-fórmulas que contienen las fórmulas atómicas y es estable bajo $\wedge, \neg$ y bajo cuantificación acotada $(\exists x < t)$, $(\forall x < t)$, con t un término que no dependa de la variable x. Observe que hay Δ_0-fórmulas $\alpha(x,y)$ y $\beta(x,y)$ tales que en $\mathbb{N}_{st}$, A es definido por $\exists y \alpha(x,y)$ y B por $\exists \beta(x,y)$.

b) Pruebe que para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{M} \models (\forall x, y, z < \underline{k}) \neg(\alpha(x,y) \wedge \beta(x,z)),$$

y que existe $\zeta \in M$ no estándar tal que

$$\mathcal{M} \models (\forall x, y, z < \zeta) \neg(\alpha(x,y) \wedge \beta(x,z)).$$

3. $\pi(n)$ denota el $(n+1)-$ésimo número primo.

c) Considere A, B infinitos y recursivamente inseparables ($A \cap B = \varnothing$ y no existe $C \subseteq \mathbb{N}$ recursivo tal que $A \subseteq C$ y $C \cap B = \varnothing$). Deduzca que $S(\mathcal{M})$ contiene un conjunto no recursivo.

(4) Si M es numerabe y $h : \mathbb{N} \to M$ es una biyección, podemos transportar la $\mathcal{L}_{ar}$-estructura $\mathcal{M}$ via h^{-1} en $\mathbb{N}$, definiendo $x +' y = h^{-1}(h(x) + h(y))$ las otras operaciones de manera análoga.

Suponga $\mathcal{M}$ es *recursiva,* es decir, existe una biyección h como la descrita, de forma que $+'$ y $\cdot'$ son funciones recursivas.

(a) Para cualquier $c \in \mathbb{N}$ fijo, pruebe que la función $f \in \mathcal{F}^2$ dada por

$$f(n, m) = \begin{cases} 1, & \text{si } \underbrace{m +' \cdots +' m}_{\pi(n)-veces} = c \\ 0, & \text{en cuaquier otro caso} \end{cases}$$

es recursiva.

(b) Deduzca de aquí que $S(\mathcal{M})$ solo contiene conjuntos recursivos.

(5) Deduzca el teorema de Tenenbaum : *No existen modelos no estándar de* PA *que sean recursivos.*

Solución : 1) Solamente es necesario demostrar $S(\mathcal{M}) \subseteq S_{\eta_0}(\mathcal{M})$. Sean $a \in M$, $\eta(x, y)$ arbitarios y sea $A = \{n \in \mathbb{N}, \mathcal{M} \models \eta(\underline{n}, a)\}$. Tenemos que probar que existe $b \in M$ tal que

$$A = \{n \in \mathbb{N}, \mathcal{M} \models \eta_0(\underline{n}, b)\}.$$

Sea $n \in \mathbb{N}$. Tome

$$A_n = \{k \leq n, \mathcal{M} \models \eta(\underline{k}, a)\}$$

$$B_n = \{k \leq n, \mathcal{M} \models \neg\eta(\underline{k}, a)\}$$

Sabemos por hipótesis que

$$\mathsf{PA} \vdash \exists \mathsf{x} \left(\bigwedge_{\mathsf{i} \in \mathsf{A_n}} \eta_0(\underline{\mathsf{i}}, \mathsf{x}) \wedge \bigwedge_{\mathsf{j} \in \mathsf{B_n}} \neg\eta_0(\underline{\mathsf{j}}, \mathsf{x}) \right).$$

Si definimos la fórmula $\phi(x) = (\forall y \leq x)\eta_0(y,x) \leftrightarrow \eta(y,x)$, esto demuestra en particular que $\mathcal{M} \models \phi(\underline{n})$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Por el lema de *overspill*, existe $b \in M$ (no estándar) tal que $\mathcal{M} \models \phi(b)$. Esto implica que para todo natural n,

$$\mathsf{PA} \vdash \eta(\underline{\mathsf{n}}, \mathsf{a}) \iff \eta_0(\underline{\mathsf{n}}, \mathsf{b})$$

lo cual concluye la demostración.

2) Note que la fórmula $\exists y(\underline{\pi(n)}y = x)$ expresa que " x es divisible por el n-ésimo número primo". Necesitamos describir primero al $n-$ésimo primo. Considere la función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que envía n al número de primos menores estrictos a n (la función π de teoría de números). Note que como $f(0) = 0$ y $f(n+1) = f(n) + \mathbb{1}_{primo}$, f es una función recursiva. Por esto, podemos afirmar que $f(n) = k$ si y solo si existen $a, b \in \mathbb{N}$ tales que $\beta(a,b,0) = 0$, $\beta(a,b,n) = k$, y para cada $0 < i < n$, $\beta(a,b,i+1) = \beta(a,b,i) + \mathbb{1}_{primo}$, donde β es la función beta de Gödel. En resumen, podemos representar a f con una Σ_1-fórmula, y por lo tanto podemos también representar la propiedad siguiente

$$\phi(n,x) := f(x+1) = n \wedge f(x) + 1 = n$$

Note que $\mathcal{M} \models \phi(\underline{n}, x)$ si y solo si x es el n-ésimo número primo [4]. Podemos entonces definir la fórmula que necesitamos como

$$\eta_0(n,x) = \exists y \exists z(yz = x \wedge \phi(\underline{n}, z)).$$

Para ver en este caso que $S(\mathcal{M}) = S_{\eta_0}(\mathcal{M})$, tome A, B finitos y disjuntos, y note que la fórmula

$$\exists x \left(\bigwedge_{i \in A} \eta_0(\underline{i}, x) \wedge \bigwedge_{j \in B} \neg\eta_0(\underline{j}, x) \right)$$

tiene como testigo a $x = \prod_{i \in A} \pi(i)$, el cual pertenece a todo modelo de PA. Vemos entonces que η_0 cumple todas las hipótesis de 1).

3a) Como A es recursivamente enumerable, existe una Σ_1-fórmula $\varphi(x)$ que lo describe. Podemos asumir sin pérdida de generalidad que φ tiene la forma $\exists x_1, x_2, \dots x_k \tilde{\varphi}(x, x_1, \dots, x_k)$, con $\tilde{\varphi}$ una Δ_0-fórmula. Esto es posible ya que φ es una Σ_1-fórmula, y al eliminar los $\exists$ quedará una fórmula cuyos únicos cuantificadores son del tipo $\forall v < t$. Seguidamente, podemos reemplazar el bloque de

4. Estrictamente, $\pi(n)$ representa al $(n+1)-$ésimo primo, pero por comodidad hemos renumerado.

existenciales de la siguiente forma,

$$\varphi \sim \exists y \tilde{\varphi}(x, \beta_1^k(x), \dots, \beta_k^k(x)) =: \exists y \alpha(x, y),$$

donde β_i^k son las componentes de una biyección primitiva recursiva entre $\mathbb{N}^k$ y $\mathbb{N}$. Este procedimiento aplica igualmente para B.

3b) Suponga por contradicción que para algún k, existen $x, y, z < k$ tales que

$$\mathcal{M} \models \alpha(x, y) \wedge \beta(x, y),$$

esto implica directamente que $x \in A$ y $x \in B$, por el inciso 3a). Esto es imposible ya que A y B son disjuntos. La existencia del ζ requerido se sigue directamente del lema de *overspill*.

3c) Considere primero $k \in \mathbb{N}$. Sea $i < k$ arbitrario y observe que $i \in A$ si y solo si existe $a_i \in M$ tal que $\mathcal{M} \models \alpha(\underline{i}, a_i)$, lo cual implica por el inciso 1) que existe $y_i \in M$ tal que $\mathcal{M} \models \eta_0(\underline{i}, y_i)$, o en otras palabras, $\mathcal{M} \models \pi(i)|y(i)$. Podemos repetir esto para encontrar $z_0, z_1, \dots, z_k$ que cumplan $i \in B \Rightarrow \pi(i)|z(i)$. Note primero que para todo i, $y_i \neq z_i$, pues en caso de coincidir, se tendría de nuevo que $A \cap B \neq \varnothing$. Tome $y = y_0 \dots y_k$, entonces hemos demostrado que para todo $k \in \mathbb{N}$, existe $y \in M$ tal que

$$\mathcal{M} \models \exists y (\forall i < k)((i \in A \to \pi(i)|y) \wedge (i \in B \to \pi(i) \nmid y)).$$

Por el lema de *overspill*, existe $\zeta \in M$ no estándar tal que

$$\mathcal{M} \models \exists \zeta (\forall i < \zeta)((i \in A \to \pi(i)|\zeta) \wedge (i \in B \to \pi(i) \nmid \zeta)).$$

Es decir, que existe $\zeta \in M$ cuyos divisores primos son indexados por algún conjunto que contiene a A y es disjunto con B. Sea entonces

$$\begin{aligned} C &:= \{n \in \mathbb{N}, \mathcal{M} \models \underline{\pi(n)}|\zeta\} \\ &= \{n \in \mathbb{N}, \mathcal{M} \models \eta_0(\underline{n}, \zeta)\} \in S_{\eta_0}(\mathcal{M}) = S(\mathcal{M}). \end{aligned}$$

Como $A \subseteq C$ y $C \cap B = \varnothing$, por la hipótesis de inseparabilidad, concluimos que $C \in S(\mathcal{M})$ no es recursivo.

4a) Suponiendo que $+'$ es recursiva, podemos definir la operación sumatoria $g(n,m) = \underbrace{m +' \cdots +' m}_{n-\text{veces}}$ recursivamente como

$$g(n,0) = 0$$

$$g(n,m+1) = g(n,m) +' m$$

Es fácil entonces describir la función f con condiciones recursivas. Observe que

$$f(n,m) = \begin{cases} 1 & \text{si } g(\pi(n),m) = c \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

Como $\pi(n)$ es primitiva recursiva, se tiene lo que se quería probar.

4b) Sea $A \in S(\mathcal{M})$. Sabemos por lo que hemos venido probando, que existe $a \in M$ de forma que los elementos de A son los índices de los divisores primos de a (indexando con el orden usual de $\mathbb{N}$). En otras palabras, $n \in A$ si y solo si existe $y \in M$ tal que $\mathcal{M} \models \underbrace{y + \cdots + y}_{\pi(n)-\text{veces}} = a$. Sea $x = h^{-1}(y)$, podemos traducir esta condición a $\mathbb{N}$ por medio de h. Estamos buscando entonces $x \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{M} \models \underbrace{h(x) + \cdots + h(x)}_{\pi(n)-\text{veces}} = a$. Aplicando h^{-1}, podemos ver entonces que $n \in A$ si y solo si existe $x \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mathbb{N} \models \underbrace{x +' \cdots +' x}_{\pi(n)-\text{veces}} = h^{-1}(a)$$

y finalmente, tomando h^{-1} como el c del inciso anterior, vemos que $a \in A \iff \mathbb{N} \models \exists x f(n,x) = 1$. Encontrar una forma recursiva de determinar si dicho x existe o no equivaldrá por lo tanto a demostrar que A es recursivo.

Sabemos que el algoritmo de división es válido en PA, por lo tanto es igualmente válido en $\mathcal{M}$. Como $\pi(n)$ es estándar, existen finitos elementos en $\mathcal{M}$ menores que $\pi(n)$, y todos son estándar (de la forma $1 + \cdots + 1$). Dividiendo a entre $\pi(n)$, sabemos con certeza existe $q \in M$ (único) tal que la disjunción de las siguientes fórmulas es cierta en $\mathcal{M}$.

$$a = \underbrace{q + \cdots + q}_{\pi(n)-\text{veces}}$$

$$a = \underbrace{q + \cdots + q}_{\pi(n)-\text{veces}} + 1$$

$$\vdots$$

$$a = \underbrace{q + \cdots + q}_{\pi(n)-\text{veces}} + \underbrace{1 + \cdots + 1}_{(\pi(n)-1)-\text{veces}}$$

Note que se trata de una disjunción exclusiva. Traduciendo via h^{-1}, denotando $\tilde{q} = h^{-1}(q)$ y $\tilde{1} = h^{-1}(1)$, sabemos que en $\mathbb{N}$ existe $\tilde{q}$ de forma que solo una de las siguientes igualdades se cumple.

$$h^{-1}(a) = \underbrace{\tilde{q} +' \cdots +' \tilde{q}}_{\pi(n)-\text{veces}}$$

$$h^{-1}(a) = \underbrace{\tilde{q} +' \cdots +' \tilde{q}}_{\pi(n)-\text{veces}} +' \tilde{1}$$

$$\vdots$$

$$h^{-1}(a) = \underbrace{\tilde{q} +' \cdots +' \tilde{q}}_{\pi(n)-\text{veces}} +' \underbrace{\tilde{1} +' \cdots +' \tilde{1}}_{(\pi(n)-1)-\text{veces}}$$

Como estamos suponiendo que $+'$ es recursiva, el procedimiento de revisar la veracidad de cada una de estas (finitas) igualdades, es recursivo. Finalmente, notando que la primera de éstas es equivalente a $f(n, q) = 1$, concluimos que para determinar recursivamente si $\exists x f(n, x)$, basta con revisar cuál de las igualdades es cierta. Si la primera lo es, entonces $n \in A$, caso contrario, $n \notin A$. Como A fue tomado arbitrario, se concluye que todo elemento de $S(\mathcal{M})$ es recursivo.

5) Para concluir, simplemente observe que la conclusión de 4b) contradice la de 3c). Esto implica que la hipótesis de 4b) no puede ser posible. En otras palabras, no es posible la existencia de un modelo recursivo y no estándar de PA. Describa una máquina de Turing que compute la suma

$\lambda xy.x+y$.

Solución : Definimos la máquina $\mathcal{M}$ que tiene 4 bandas, B_1, B_2, B_3 y B_4. Recibe el *input* en las primeras dos bandas, y arroja el *output* en B_3. La máquina funciona así :

(1) Copie el número indicado en B_1 a B_3, y vuelva el cabezal al principio.

(2) — Si el número en B_2 es el mismo que en B_4, entonces proceda a limpiar la banda B_4 y finalice aquí.

— Si no, entonces agregue un $|$ al primer espacio vacío que haya en las bandas B_4, y luego repita esta acción para la banda B_3. Seguidamente, repita el paso 2.

Más formalmente, la máquina $\mathcal{M}$ tiene 5 estados, además de q_i, q_f (inicial y final). La función de transmisión viene dada de manera un tanto informal de la siguiente forma (los símbolos marcados por $\times$ significan que puede ser cualquiera de $|$ ó b) :

$$(q_i, \$, \$, \$, \$) \mapsto (q_i, \$, \$, \$, \$, +1)$$

$$(q_i, |, \times, b, \times) \mapsto (q_i, |, \times, |, \times, +1)$$

$$(q_i, b, \times, b, \times) \mapsto (q_|, b, \times, b, \times, \text{volver al inicio})$$

$$(q_|, \$, \$, \$, \$) \mapsto (q_2, \$, \$, \$, \$, +1)$$

$$(q_2, \times, b, \times, b) \mapsto \text{FIN}$$

$$(q_2, \times, |, \times, |) \mapsto (q_2, \times, |, \times, |, +1)$$

$$(q_2, \times, |, \times, b) \mapsto (q_3, \times, |, \times, |, \text{volver al inicio})$$

$$(q_3, \$, \$, \$, \$) \mapsto (q_4, \$, \$, \$, \$, +1)$$

$$(q_4, \times, \times, |, \times) \mapsto (q_4, \times, \times, |, \times, +1)$$

$$(q_4, \times, \times, b, \times) \mapsto (q_5, \times, \times, |, \times, \text{volver al inicio})$$

$$(q_5, \$, \$, \$, \$) \mapsto (q_2, \$, \$, \$, \$, +1)$$

Problema 2. Sean p, q primos. Decimos que q es de p-*Mersenne* si para algún $n \in \mathbb{N}$,

$$q = \frac{p^n - 1}{p - 1}.$$

Muestre que el conjunto

$$\{n \in \mathbb{N}, \exists p \text{ tal que } n \text{ es } p\text{-Mersenne}\}$$

es primitivo recursivo.

Solución : Note que si existe m tal que $n = \frac{p^m - 1}{p-1}$, entonces $n = 1 + p + p^2 + \cdots + p^{m-1} \geq p$. Además,

$$p^m - 1 = n(p-1)$$
$$\Rightarrow \quad m \leq p^m \leq np + 1$$

Podemos decir entonces que n es p-Mersenne si y solo si n es primo y

$$(\exists p \leq n)(\exists m \leq Np + 1)\left(p \text{ es primo } \wedge n = \sum_{k=0}^{m-1} p^k\right)$$

Problema 3. Definimos la función $\text{fib} \in \mathcal{F}_1$ por

$$\text{fib}(0) = 0$$
$$\text{fib}(1) = 1$$
$$\text{fib}(n+2) = \text{fib}(n+1) + \text{fib}(n)$$

Demuestre que $\text{fib}(n)$ es una función recursiva.

Solución : Considere la función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$, dada por

$$f(0) = (0, 1)$$
$$f(n+1) = \left(P_2^2 f(n), P_1^2 f(n) + P_2^2 f(n)\right)$$

Es claro que f es primitiva recursiva, y también es fácil ver que $\text{fib}(n) = P_1^2 f(n)$.

Problema 4. Funciones elementales de Kalmár :

Se define E (el conjunto de funciones elementales de Kalmár) como el menor conjunto de $\mathcal{F}$ que cumple

— E contiene las funciones $C_0^0, P_i^n, \mathbb{1}_=$ para todo $i, n \in \mathbb{N}$.

— si $g \in \mathcal{F}_k \cap E$, y $f_1, f_2, \ldots, f_k \in \mathcal{F}_n \cap E$, entonces $g(f_1, f_2, \ldots, f_k) \in E$.

— Si $f \in F_{n+1} \cap E$, entonces la suma y productos acotados estan en E, esto es

$$\sum_{i=0}^{x} f(x_1, \ldots, x_n, i) \in E \quad , \quad \prod_{i=0}^{x} f(x_1, \ldots, x_n, i) \in E.$$

(1) Pruebe que C_k^n es elemental para todo $k, n \in \mathbb{N}$.

Solución : Note que $C_1^0 = \mathbb{1}_=(C_0^0, C_0^0)$, entonces podemos ver que

$$C_k^0 = \sum_{i=0}^{k} C_1^0$$

y finalmente vemos que $C_k^n(\bar{x}) = P_1^{n+1}(C_k^0, \bar{x})$.

(2) Decimos que $A \subseteq N^n$ es *elemental* si $\mathbb{1}_A \in E$. Demuestre que $\{0\}$ es elemental, y que el conjunto de partes elementales de $\mathbb{N}$ es cerrado bajo las operaciones Booleanas.

Solución : Podemos definir la resta recursiva $\lambda x.1 - x$ dentro de E por medio de

$$1 - x = \mathbb{1}_=(0, x).$$

Es claro que $\mathbb{1}_{\{0\}}(x) = \mathbb{1}_=(x, C_0^0)$ es elemental. Suponga ahora que $A, B \subseteq \mathbb{N}$ son elementales, entonces

$$\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$$

$$\mathbb{1}_{A^c} = 1 - \mathbb{1}_A$$

(3) Pruebe que $\exp(x, y) = \lambda xy.x^y$ es elemental.

Solución :

$$x^y = \prod_{i=0}^{y-1} x$$

la cual es recursiva por axioma.

(4) Defina $T \in \mathcal{F}_2$ como

$$T(m, 0) = m$$

$$T(m, n+1) = \exp(2, T(m, n))$$

Defina además $T_n = \lambda x.T(x, n)$

(a) Pruebe que T es primitiva recursiva.

Solución : T es la recursión primitiva entre las funciones $g(x) = P_1^1(x) = x$ y $h(x, y, z) = \exp(2, z)$.

(b) Demuestre que para todo n, T_n es estrictamente creciente y que para m fijo, $T(m, n)$ es estrictamente creciente en n.

Solución : Por inducción, note que $T_0 = id$ es estrictamente creciente. Suponga ahora que T_n es estrictamente creciente. Sea $m_1 < m_2$, entonces

$$\begin{aligned} T_{n+1}(m_1) &= 2^{T_n(m_1)} \\ &< 2^{T_n(m_2)} \text{ (HI)} \\ &= T_{n+1}(m_2) \end{aligned}$$

lo cual prueba lo que deseamos.

Suponga ahora que m es fijo, y note que para todo n

$$T_{n+1}(m) = 2^{T_n(m)} > T_n(m)$$

por lo que, para todo $k > 0$,

$$T_n(m) < T_{n+1}(m) < \ldots < T_{n+k}(m).$$

Esto demuestra que T es estrictamente creciente en n también.

(c) Pruebe que toda función elemental es dominada por alguna T_n.

Solución : Note que $T_1(m) = 2^m$, y que

— $C_k^n \leq T_1(m)$, salvo finitos m's. Esto es claro pues ya sabemos que T_1 es estrictamente creciente y el lado izquierdo es contante.

— $P_i^n(\bar{x}) \leq 2^{\max \bar{x}}$. Esto es claro.

— $\sum_{k=0}^n x_k \leq n \max_k x_k < 2^{\max_k x_k}$ salvo finitas tuplas. Esto pues en general, $nt < 2^t$ para t suficientemente grande.

— $\prod_{k=0}^n x_k \leq (\max_k x_k)^n < 2^{\max_k x_k}$ salvo para finitas tuplas. Esto pues, en general, $t^n < 2^t$ para t suficientemente grande.

Suponga ahora que $g \in E \cap \mathcal{F}_n$, y que $f_1, \ldots, f_n \in E \cap \mathcal{F}_m$. Si existen $n, n_1, \ldots, n_m$ tales que (salvo finitas tuplas $\bar{y} \in \mathbb{N}^n$ y $\bar{x} \in \mathbb{N}^m$)

$$
\begin{aligned}
&g(\bar{y}) \leq T_n(\max \bar{y}) \\
&f_i(\bar{x}) \leq T_{n_i}(\max \bar{x}) \;\; \text{para } i = 1, \ldots, n
\end{aligned}
$$

Entonces, exceptuando finitas tuplas, se tiene que

$$
\begin{aligned}
g(f_1(\bar{x}), \ldots, f_n(\bar{x})) &\leq T_n(\max\{f_1(\bar{x}), \ldots, f_n(\bar{x})\}) \\
&\leq T_n\left(\max\{T_{n_1}(\max \bar{x}), \ldots, T_{n_m}(\max \bar{x})\}\right) \\
&\leq T_n(T_N(\max \bar{x})), \qquad \text{donde } N = \max\{n_1, \ldots, n_m\} \\
* &\leq T_{N+n+1}(\max \bar{x})
\end{aligned}
$$

lo cual prueba lo deseado. Para demostrar la última desigualdad, procedemos por inducción, note que

$$T_0(T_N(m)) = T_N(m)$$

lo cual confirma el caso base. Asumiendo la desigualdad $(*)$ para n, vemos que

$$
\begin{aligned}
T_{n+1}(T_N(m)) &= \exp(2, T_n(T_N(m))) \\
&\leq \exp(2, T_{n+N+1}(m)) \text{ (HI)} \\
&= T_{n+N+2}(m)
\end{aligned}
$$

Hemos demostrado entonces que todas las funciones básicas son dominadas por alguna T_n, además de las sumas, productos y composiciones de éstas. Por lo tanto, toda función elemental de Kalmár es dominada por alguna T_n.

(d) Pruebe que T no es elemental.

Solución : Suponga que T es elemental, entonces $\lambda n.T_n(n)$ es elemental, lo cual implica que existen M y N tal que si $n \geq N$

$$T_n(n) \leq T_M(m)$$

Esto es imposible para $n > \max\{N, M\}$. Entonces deducimos que T no puede ser una función elemental.

Problema 5.

(1) Sea $f \in \mathcal{F}_1$ una función recursiva creciente. Pruebe que $\mathrm{Im}(f)$ es recursivo.

Solución : Note que

$$y \in \mathrm{Im}(f) \iff (\exists x \leq y)(f(x) = y).$$

Podemos afirmar que $x \leq y$ pues f es creciente.

(2) Pruebe que todo $X \subseteq \mathbb{N}$ infinito recursivo es imagen de una función unaria recursiva.

Solución : Sea $X \subseteq \mathbb{N}$ infinito y recursivo. Defina $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por

$$f(0) = \mu m(m \in X)$$
$$f(n+1) = \mu m(m \in X \wedge m > f(n))$$

f es recursiva y estrictamente creciente por definición. Claramente $\mathrm{Im}\, f = X$.

(3) Pruebe que todo X infinito y recursivamente enumebrable contiene un conjunto infinito recursivo.

Solución : Sea $X \subseteq \mathbb{N}$ infinito y recursivamente enumerable. Entonces existe $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ total recursiva tal que $X = \mathrm{Im}\, f$. Defina entonces $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por

$$g(0) = f(0)$$
$$g(n+1) = \mu x(x \in X \wedge x > f(n))$$

Observe que g es recursiva y estrictamente creciente, por lo que $\mathrm{Im}\, g$ es recursivo (por el punto anterior). Note además que $\mathrm{Im}\, g \subseteq \mathrm{Im}\, f$.

Problema 6. Construcción de una biyección primitiva cuya inversa no es primitiva recursiva.

(1) Pruebe que el conjunto de recursiones biyectivas en $\mathbb{N}$ forma un grupo.

Solución : Sea $S = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, f \text{ es biyectiva}\}$. Es claro que si $f, g \in$,entonces $f \circ g \in S$, por axiomas de recusrión. Además, también es claro que la identidad está en S, y es el neutro. Finalmente, note que si $f \in S$, entonces

$$f^{-1}(y) = \mu x(f(x) = y)$$

lo cual demuestra que $f^{-1} \in S$.

(2) Pruebe que para toda máuqina de Turing $\mathcal{M}$ que calcula una función total, el gráfico de la función tiempo $T_{\mathcal{M}}$ es primitivo recursivo.

Solución : Note que si $\bar{x} \in \mathbb{N}^n$, entonces

$$(\bar{x}, t) \in G(T_{\mathcal{M}}) \iff ((i, t, \bar{x}) \in B^n) \wedge (\forall z \leq t)((i, z, \bar{x}) \notin B^n)$$

donde $G(T_{\mathcal{M}})$ es el gráfico de $T_{\mathcal{M}}$ y B^n es el conjunto de 3-tuplas $(i, t, \bar{x})$ donde la máquina con índice i e *input* $\bar{x}$ está en estado final al tiempo t, con una configuración de *output* válida (o sea, que represente un número en la banda de salida).

(3) Pruebe que $f \in \mathcal{F}_n$ es primitiva recursiva si y solo si su gráfico es primitivo recursivo y f está acotada superiormente por alguna función primitiva recursiva.

Solución : Suponga que f es primitiva recursiva, entonces su gráfico cumple

$$\mathbb{1}_{G(f)}(\bar{x}, y) = \mathbb{1}_{=}(f(\bar{x}, y)$$

lo cual hace que $G(f)$ sea primitivo recursivo. Además, sabemos que existen $n, k \in \mathbb{N}$ tales que, exceptuando finitas tuplas $\bar{x}$,

$$f(\bar{x}) \leq \xi_n^k(\max \bar{x}),$$

donde ξ_n^k es la función de Ackerman evaluada en n y compuesta con sí misma k-veces. Entonces podemos definir a N como el valor máximo que toma $f(\bar{x})$ en las tuplas que no satisfacen la desigualdad anterior, y concluir que

$$f(\bar{x}) \leq \max\{N, \xi_n^k(\max \bar{x})\}.$$

Suponga ahora que $G(f)$ es primitivo y que existe una función g primitiva recursiva tal que para todo $\bar{x}$

$$f(\bar{x}) \leq g(\bar{x}).$$

Podemos entonces caracterizar a f de manera primitiva recursiva de la manera siguiente :

$$f(\bar{x}) = (\mu y \leq f(\bar{x})((\bar{x}, y) \in G(f)).$$

(4) Sea $g \in \mathcal{F}_1$ estrictamente creciente. Pruebe que el gráfico de g es primitivo recursivo si y solo si $\operatorname{Im} g$ es primitivo recursivo.

Solución : Si suponemos primero que $G(g)$ es primitivo recursivo, entonces podemos caracterizar $\operatorname{Im} g$ como

$$y \in \operatorname{Im} g \iff (\exists x \leq y)((x, y) \in G(f)).$$

Si suponemos ahora que la imagen de g es un conjunto primitivo recursivo, entonces

$$(x, y) \in G(g) \iff (x, y) \in (P_1^2)^{-1}[\operatorname{Im} y],$$

pues la propiedad de ser primitivo recursivo de preserva bajo preimagen de una función primitiva recursiva.

(5) Sea $f \in \mathcal{F}_1$ recursiva pero no primitiva recursiva, y sea $\mathcal{M}$ una máquina de Turing que calcula f.

(a) Sea $g_0 \in \mathcal{F}_1$ definida por

$$g_0(x) = \max\{T_{\mathcal{M}}(y), y \leq x\} + 2x.$$

Demuestre que g_0 es recursiva, pero no primitiva recursiva. Demuestre además que su gráfico e imagen son ambos primitivos recursivos.

Solución : Note que g_0 es estrictamente creciente y recursiva (pues $T_{\mathcal{M}}$ lo es). Note que (forma normal de Kleene)

$$f(x) = (\mu y \leq T_{\mathcal{M}})((i, y, T_{\mathcal{M}}(\bar{x})x) \in C^p).$$

Si $g_0(x)$ fuese primitiva recursiva, como, por definición, $g_0(x) > T_{\mathcal{M}}$, se tendría la misma expresión para $f(x)$ pero con tiempo primitivo recursivo,

$$f(x) = (\mu y \leq g_0(x))((i, y, T_{\mathcal{M}}(\bar{x}), \bar{x}) \in C^p).$$

Esto implica que f es primitiva recursiva, una contradicción.

(b) Sea $g_1 \in \mathcal{F}_1$ alguna función estrictamente creciente tal que $\operatorname{Im} g_1 = \mathbb{N} \setminus \operatorname{Im} g_0$. Considere la función $h \in \mathcal{F}_1$ dada por

$$h(2x) = g_0(x)$$
$$h(2x+1) = g_1(x)$$

Demuestre que h es una biyección recursiva, que no es primitiva recursiva. Demuestre que h^-1 es primitiva recursiva.

Solución :

Inyectividad : Sean $x, y \in \mathbb{N}$. Si $x \not\equiv y \pmod 2$, por definición, no es posible que $h(x) = h(y)$ pues h $\operatorname{Im} g_0 \cap \operatorname{Im} g_1 =$. Si x y y tienen la misma paridad, y si s.p.g $x < y$, se tiene que $h(x) < h(y)$, pues ambas g_0 y g_1 son estrictamente crecientes.

Sobreyectividad : Note que

$$\operatorname{Im} h = \operatorname{Im} g_0 \cup \operatorname{Im} g_1 = \mathbb{N}.$$

Recursividad : Sabemos que g_0 es recursiva y que $\operatorname{Im} g_0$ es primitiva recursiva, por lo que $\operatorname{Im} g_1 = \mathbb{N} \setminus \operatorname{Im} g_0$ es también primitiva recursiva, lo cual implica, por el punto 4), que $G(g_1)$ es primitivo recursivo. Observe ahora que

$$g_1(x) = \mu y((x, y) \in G(g_1)),$$

lo cual implica que g_1 es recursiva. Se concluye que h es recursiva por definición por partes.

h **no es primitiva recursiva :** Suponga por contradicción que sí lo es, entonces por 3), existe una función p primitiva recursiva tal que para todo x

$$h(x) \leq p(x)$$
$$\Rightarrow h(2x) \leq p(2x), \text{ en particular}$$
$$\Rightarrow g_0(x) \leq p(2x)$$

Es decir, g_0 es acotada por una función primitiva recursiva y como $G(g_0)$ es primitivo recursivo, se concluye por 3) que g_0 es primitiva recursiva, una contradicción del inciso anterior.

h^{-1} **es primitiva recursiva :** Podemos demostrar esto describiendo h explícitamente,

$$h^{-1}(y) = \begin{cases} 2((\mu x \leq y)((x,y) \in G(g_0))) \text{ si } x \in \operatorname{Im} g_0 \\ 2((\mu x \leq y)((x,y) \in G(g_1))) + 1 \text{ si } x \in \operatorname{Im} g_1 \end{cases}$$

Problema 7 : Existencia de conjuntos recursivamente numerables que son recursivamente inseparables. *Nota :* Recuerde que φ_i^p denota la i-ésima función recursiva de p variables.

(1) Dado $k \in \mathbb{N}$, denote por Z_k el conjunto de todos los $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \in \operatorname{dom}(\varphi_n^1)$ y $\varphi_n^1(n) = k$. Pruebe que Z_k es recursivamente enumerable para todo k.

Solución : Note que la función $g(n) = \lambda n.\varphi_n^1(n)$ es parcial recursiva, por lo que $Z_k = g^{-1}[\{k\}]$ es recursivo. Además, como

$$Z_k^c = \{n \in \mathbb{N}, \varphi_n^1(n) \neq k\} = g^{-1}[\{k\}^c],$$

se ve que su complemento es recursivo. Concluimos entonces que Z_k es recursivamente enumerable.

(2) Deduzca que existen conjuntos recursivamente enumerables $A, B \subseteq \mathbb{N}$ disjuntos tales que no hay algún C recursivo que cumpla $A \subseteq C$ y $C \cap B = \varnothing$.

Solución : Tome $A = Z_2$ y $B = Z_1 \cup Z_0$. Suponga que existe dicho C, y entonces por propiedades universales, se tiene que para algún índice i,

$$\mathbb{1}_C = \varphi_i^1,$$

note que esto hace que necesariamente φ_i^1 sea total. Observe ahora que

— Si $i \in C$, tonces $\mathbb{1}_C(i) = 1 = \varphi_i^1(i)$.

— Si $i \notin C$, tonces $\mathbb{1}_C(i) = 0 = \varphi_i^1(i)$.

En ambos casos, se tendría que $i \in B$, lo cual es una contradicción a la definición de C.

(3) Pruebe que existe una función unaria parcial recursiva que no se puede extender a una total recursiva.

Solución : Sea $D = \cup_k Z_k = \operatorname{dom}(\lambda x.\varphi_x(x))$. Defina la función $g : D \to \mathbb{N}$ dada por

$g(d) = \varphi_d(d) + 1$. Suponga por contradicción que existe $\tilde{g} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, recursiva total, que extiende a g. Sea entonces j tal que para todo x,

$$\tilde{g}(x) = \varphi_j^1(x).$$

Tenemos que, en particular :

— Si $j \notin D$, entonces $\varphi_j^1(j)$, no está definida ! Esto contradice el hecho de que $\tilde{g}$ es total.

— Si $j \in D$, entonces $\tilde{g}(j) = \varphi_j^1(j)$, pero como $\tilde{g}$ extiende a g, también se tiene que $\tilde{g}(j) = g(j) = \varphi_j^1(j) + 1$. Esto es imposible.

Concluimos entonces que g no se puede extender.

Problema 8. Pruebe que existen funciones primitivas recursivas $s_1, s_2 \in \mathcal{F}_1$ tales que si φ_i^2 es biyectiva, las dos componentes de su inversa pueden expresarse como $\varphi_{s_1(i)}^1$, $\varphi_{s_2(i)}^1$.

Solución : Suponga que $\varphi_i^2(x, y) = n$. Vamos a demostrar el hecho para la primera coordenada, mientras que la segunda coordenada se trabaja análogamente. Sea $g_1(i, n)$ la primera coordenada de la inversa de φ_i^1. Sabemos por un ejercicio anterior que g_1 es recursiva, por lo que podemos escoger $j \in \mathbb{N}$ tal que

$$g(i, n) = \varphi_j^2(i, n).$$

Es importante destacar que j no depende ni de i ni de n. Aplicando el teorema *smn*, vemos que existe $s_1^1 \in \mathcal{F}_2$ primitiva recursiva tal que

$$g(i, n) = \varphi_{s_1^1(j,i)}^1(n).$$

Como j no depende de ninguna otra variable, podemos tomar simplemente $s_1(i) := s_1^1(j, i)$.