IMAGINAIRES DANS LES PAIRES DE CORPS ALGÉBRIQUEMENT CLOS

Juan Ignacio Padilla Barrientos

Directrice de mémoire : Zoé CHATZIDAKIS

Master Logique et Fondements de l'Informatique

Septembre 2021

Résumé

Considérons la théorie T des corps algébriquement clos d'une caractéristique donnée p, dans le langage $L = \{0, 1, +, -, \cdot\}$. Étendons L à un langage L_P en ajoutant un prédicat P, qui est interprété dans un modèle $M \models T$ comme une sous-structure élémentaire propre. Puisque T a l'élimination des quantificateurs, ces paires peuvent être axiomatisées en exprimant $P \models T$, et $\exists x \, \neg P(x)$, obtenant une théorie T_P de paires élémentaires $P \prec M$. L'objectif principal est d'ajouter des sortes au langage L_P, afin d'obtenir l'*élimination faible des imaginaires*. Keisler dans [5] a prouvé que T_P est complète, et dans [2], Buechler a montré que T_P est une théorie ω-stable, de rang de Morley ω. Ce travail est largement basé sur [9], par Anand Pillay.

Table des matières

1 Préliminaires sur la Théorie de la Stabilité

Soit T une théorie complète sur un langage L. Si $M \models T$, et $A \subseteq M$, nous notons l'espace des n-types avec paramètres dans A par $S_n(A)$, et posons $S(A) = \cup_{i<\omega} S_n(A)$. Rappelons qu'une théorie est κ-stable si pour tout $M \models T$ et tout $A \subseteq M$, si $|A| \leq \kappa$, alors $|S_1(A)| \leq \kappa$, et nous disons que T est stable si elle est κ-stable pour un certain cardinal κ. Nous utiliserons une caractérisation équivalente de la stabilité, donnée par la définissabilité des types.

Définition 1.1. Soit $M \models T$, et A, B des sous-ensembles de M. Un type $p(x) \in S_n(A)$ est *définissable* sur B si pour toute L-formule $\varphi(x, y)$ il existe une $L(B)$-formule $\psi(y)$ telle que pour tout $a \in A^{|y|}$, $\varphi(x, a) \in p$ si et seulement si $M \models \psi(a)$. La formule $\psi(y)$ sera écrite comme $d_p(\varphi)(y)$, et l'ensemble des $d_p(\varphi)(y)$, avec $\varphi(x, y)$ parcourant les L-formules, est appelé un *schéma de définition* pour p.
La proposition suivante est le Corollaire 8.3.2 de [13].

Proposition 1.2. *La théorie T est stable si et seulement si tous les types sont définissables.*

Dans toute la suite de cette section, nous supposons que T est une théorie complète, ω-stable arbitraire. Nous travaillerons à l'intérieur d'un modèle saturé M de T, et les types sur M seront appelés *types globaux*. Nous procédons en énonçant quelques définitions et résultats sur les bases canoniques et la bifurcation (forking) dans ce contexte stable.

Définition 1.3. Soit $E(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ une L-formule qui définit une relation d'équivalence sur M^n. Par *éléments réels*, nous entendons les tuples dans M^n, tandis que les classes d'équivalence d'éléments réels modulo E seront appelées *éléments imaginaires.*

Définition 1.4. Soit $X \subseteq M$ un ensemble définissable. Un tuple $c \subset M$ est appelé un *paramètre canonique* (ou code) de X si c est fixé par exactement les mêmes automorphismes de M qui fixent X ensemblistement.
Il est possible d'étendre T à une nouvelle théorie T^{eq} (dans un nouveau langage L^{eq}), dans laquelle tout ensemble définissable possède un code. Soit $(E_i)_{i \in I}$, une énumération de toute relation d'équivalence $\varnothing$-définissable sur les n_i-tuples. Pour définir L^{eq}, ajoutons à L une nouvelle sorte S_i pour chaque i, qui doit être interprétée comme M^{n_i}/E_i. Considérons la structure multi-sortée $M^{\mathrm{eq}} = (M, M^{n_i}/E_i)_{i \in I}$, et définissons pour tout i la projection

naturelle $\pi_i : M^{n_i} \mapsto M^{n_i}/E_i$ qui envoie a sur a/E_i. La théorie de M^{eq} sera notée T^{eq}. Par le Corollaire 8.4.6 de [13], T^{eq} a l'*élimination des imaginaires :* tout imaginaire est interdéfinissable avec un tuple réel. Il existe aussi trois notions liées qui seront utilisées tout au long de ce travail.

Définition 1.5.

i) T a l'*élimination des imaginaires finis* si pour tout n, tout ensemble fini de n-tuples possède un paramètre canonique.

ii) T a l'*élimination faible des imaginaires*, si pour tout imaginaire e il existe un tuple réel d tel que $e \in \text{dcl}^{\text{eq}}(c)$ et $d \in \text{acl}^{\text{eq}}(e)$.

iii) T a l'*élimination géométrique des imaginaires*, si pour tout imaginaire e il existe un tuple réel d tel que $e \in \text{acl}^{\text{eq}}(c)$ et $d \in \text{acl}^{\text{eq}}(e)$.

Nous procédons maintenant avec un survol de la bifurcation dans le contexte **ω-stable**. Pour un ensemble définissable $X \subseteq M$, nous notons par $RM(X)$ son rang de Morley, et $DM(X)$ son degré de Morley. Rappelons que les théories ω-stables sont *totalement transcendantes* : tout ensemble définissable a un rang de Morley. Ce rang peut aussi être défini pour les types : si $p \in S_n(A)$, alors $RM(p)$ est le rang de Morley minimal d'une formule dans p, et $DM(p)$ est le degré de Morley minimal d'une formule dans p ayant le rang de Morley $RM(p)$.

Définition 1.6. (Bifurcation) Supposons $A \subseteq B \subseteq M$, $p \in S_n(A)$, $q \in S_n(B)$, et $p \subseteq q$. Si
$RM(p) = RM(q)$, alors q est une extension *non bifurquante* de p à B. Sinon, si $RM(p) < RM(q)$, nous disons que q *bifurque sur* A. Nous disons que $p \in S_n(A)$ est *stationnaire* si pour tout $B \supseteq A$, il existe une unique extension non bifurquante de p à B, ou de façon équivalente si $DM(p) = 1$.

Notation : Si $p \in S(A)$ et $C \subseteq A$, nous notons la restriction de p à $S(C)$ par $p \upharpoonright C$. Si p est stationnaire et $A \subseteq B$, nous notons l'unique extension non bifurquante de p à $S(B)$ par $p|B$.

Définition 1.7. Soit $A \subseteq M$, $p \in S(A)$ un type stationnaire. Une *base canonique* de p, notée $\text{Cb}(p)$, est un tuple $e \subseteq M^{\text{eq}}$ tel que pour tout $\sigma \in \text{Aut}(M)$, $\sigma(p) = p$ si et seulement si $\sigma(e) = e$ (ce tuple est unique à interdéfinissabilité près). Si p n'est pas stationnaire, considérons l'ensemble fini $\mathcal{P}$ des extensions non bifurquantes de p à M, et définissons $\text{cb}(p)$ comme un code pour l'ensemble $\{\text{Cb}(q), q \in \mathcal{P}\}$; alors tout automorphisme de M

fixe $\mathrm{cb}(p)$ si et seulement s'il permute $\mathcal{P}$ (voir Fait 1.8 *(i)*).

Ce qui suit est un résumé des propriétés des bases canoniques que nous utiliserons, elles peuvent être trouvées comme Proposition 2.20 et Remarques 2.26, 3.19 au Chapitre 1 de [8].

Fait 1.8. *Soit $A \subseteq M$, $p \in S(A)$. Alors*

(i) (Conjugaison) L'ensemble des automorphismes de M qui fixent A point par point agit transitivement sur $\mathcal{P}$.

(ii) $\mathrm{cb}(p) \subseteq \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(A)$.

(iii) Pour tout $B \subseteq A$, p ne bifurque pas sur B si et seulement si $\mathrm{cb}(p) \subseteq \mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(B)$.

(iv) Si p est stationnaire, pour tout $B \subseteq A$, p ne bifurque pas sur B et $p \restriction B$ est stationnaire si et seulement si $\mathrm{Cb}(p) \subseteq \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(B)$.

(v) Si p est stationnaire, et $(a_i, i < \omega)$ est une suite telle que pour tout i, a_i réalise $p|A \cup \{a_j, j < i\}$, alors $\mathrm{Cb}(p) \subseteq \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(a_0 \ldots, a_n)$ *pour un certain n.*

Lemme 1.9. *Soit e un imaginaire dans M et soit a un tuple fini de réels tel que $e = f(a)$ pour une certaine fonction f $\varnothing$-définissable. Alors* $e = \mathrm{cb}(\mathrm{tp}(a/e))$. *De plus, si* $e' = \mathrm{Cb}(\mathrm{tp}(a/\operatorname{acl}^{\mathrm{eq}}(e)))$, *alors* $e' \in \mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(e)$ *et* $e \in \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(e')$.

Démonstration. Soit $p = \mathrm{tp}(a/e)$ et $p' = \mathrm{tp}(a/\operatorname{acl}^{\mathrm{eq}}(e))$. Pour voir pourquoi $e = \mathrm{cb}(\mathrm{tp}(a/e))$, considérons la relation d'équivalence $E(x, y)$ donnée par $f(x) = f(y)$; alors e est un code pour la classe de a. Soit $\mathcal{P}$ comme dans la Définition 1.7. Puisque $\mathcal{P}$ est fini, et e' est la base canonique d'un élément de $\mathcal{P}$, il s'ensuit que $e' \in \mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(e)$. Maintenant, supposons $\sigma(e') = e'$ pour un certain automorphisme de M^{eq} ; alors $\sigma p' = p'$, donc les deux formules $f(x) = e$ et $f(x) = \sigma(e)$ appartiennent à p', ce qui implique $\sigma(e) = e$, d'où $e \in \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(e')$. □

Lemme 1.10. *Soit e un imaginaire dans M et soit a un tuple fini de réels tel que $e = f(a)$ pour une certaine fonction f $\varnothing$-définissable. Il existe $a' \in M^{\mathrm{eq}}$ tel que* $e \in \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(a')$ *et* $\mathrm{tp}(a'/e)$ *est stationnaire.*

Démonstration. Soit $p = \mathrm{tp}(a/e)$ et soient $p_1, \ldots, p_n$ ses extensions non bifurquantes à $\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(e)$. Soient $a_1, \ldots, a_n \in M$ tels que a_i réalise $p_i|\{a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n\}$. Soit a' un code de cet ensemble de réalisations. Alors comme $a \in \mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(a')$, il existe une formule $\varphi(x, a')$ isolant $\mathrm{tp}(a/a')$; donc $M \models \forall x \varphi(x, a') \to f(x) = e$, car f est $\varnothing$-définissable, donc $e \in \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(a')$. De plus, tout automorphisme de M qui fixe e permute $\{p_1, \ldots, p_n\}$, donc il fixe $\mathrm{tp}(a'/e)$. □

Définition 1.11. (Indépendance) Soient $A, B, C \subseteq M$. Nous disons que A est *indépendant* de B sur C, noté

$$A \mathop{\smile\kern-0.9em\raise0.4ex\hbox{$\mid$}}_C B,$$

si pour tout tuple fini a de A, $\mathrm{tp}(a/BC)$ ne bifurque pas sur C.
Ce qui suit est un résumé des propriétés de la relation d'indépendance dans le contexte ω-stable. Elles se trouvent comme Théorème 8.5.5 de [13], et Lemmes 6.3.16 à 6.3.21 de [7].

Fait 1.12. *Soient $A, B, C, D \subseteq M$. L'indépendance par bifurcation a les propriétés suivantes.*

1. *(Monotonie) Si $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\!\mid\;}_C B$ et $B' \subseteq B$, alors $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\!\mid\;}_C B'$.*
2. *(Transitivité) $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\!\mid\;}_C BD$ si et seulement si $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\!\mid\;}_C B$ et $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\!\mid\;}_{C,B} D$.*
3. *(Existence) Tout $p \in S(A)$ possède une extension non bifurquante à tout ensemble contenant A.*
4. *(Symétrie) Si $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\!\mid\;}_C B$, alors $B \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\!\mid\;}_C A$.*
5. *(Clôture algébrique) $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\!\mid\;}_C \mathrm{acl}(A)$.*

Définition 1.13. Soient $A, B \subseteq M$ et soit $p \in S(A)$ définissable sur B par un schéma d_p. Ce schéma de définition est dit *bon* (sur B) si l'ensemble

$$\{\varphi(x, m) \mid \ M \models d_p(\varphi)(m),\ m \in M,\ \varphi(x, y) \text{ une } L\text{-formule}\}$$

est un type global étendant p.

Lemme 1.14. *Soit $p \in S(A)$. Alors p est stationnaire si et seulement s'il possède une bonne définition sur A.*

Démonstration. Si p est stationnaire, soit q son extension globale non bifurquante. Alors q est définissable et invariant sous tous les automorphismes qui fixent A ensemblistement, donc il est définissable sur A. Cela donne une bonne définition pour p. Réciproquement, supposons que p a une bonne définition sur A. Il existe alors une extension globale non bifurquante $p' \in \mathcal{P}$, définissable sur A. Puisque tous les éléments de $\mathcal{P}$ sont conjugués sur A, et p' est fixé par tout automorphisme qui fixe A ensemblistement, il doit se faire que $\{p'\} = \mathcal{P}$. Par conséquent, p est stationnaire. $\square$

Lemme 1.15. *Soit $a \in M$ un tuple et $A \subseteq M$. Supposons que $p = \mathrm{tp}(a/A)$ est stationnaire et soit $a' \in M$ un tuple tel que $a' \in \mathrm{dcl}(Aa)$. Alors $\mathrm{tp}(a'/A)$ est stationnaire.*

Démonstration. Nous donnerons un bon schéma de définition sur A pour $\mathrm{tp}(a'/A)$. Soit $\varphi(x, y)$ une L-formule et $m \in M$ tel que $M \models \varphi(a', m)$. Par stationnarité de p, il existe une $L(A)$-formule $d_p(\varphi)(y)$ telle que $\varphi(x,m) \in \mathrm{tp}(a/A)$ si et seulement si $M \models d_p(\varphi)(m)$. Par hypothèse, il existe une fonction f A-définissable telle que $f(a) = a'$. Soit $\tilde{\varphi}(x,y) = \varphi(f(x), y)$,

$$\begin{aligned} M \models \varphi(a', m) &\iff M \models \varphi(f(a), m) \\ &\iff M \models \tilde{\varphi}(a, m) \\ &\iff M \models d_p(\tilde{\varphi})(m). \end{aligned}$$

□

Définition 1.16. Un type $p(x) \in S(A)$ est dit *interne* à un type partiel $\Sigma(y)$ s'il existe : une réalisation a de p, et $B \supseteq A$ indépendant de a sur A, tel que $a \in \mathrm{dcl}(Bd)$ pour un certain tuple fini d de réalisations de Σ. S'il arrive au contraire que $a \in \mathrm{acl}(Bd)$, alors le type est dit *presque interne* à Σ.

Lemme 1.17. *Supposons que* $\mathrm{tp}(a/A)$ *est stationnaire et presque interne à un type partiel* Σ. *Alors il existe un imaginaire* a' *tel que :* $\mathrm{tp}(a'/A)$ *est stationnaire et interne à* Σ, $a' \in \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(Aa)$, *et* $a \in \mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(a')$. *Un tel* a' *peut être pris comme un code pour un ensemble fini de réalisations de* $\mathrm{tp}(a/A)$.

Démonstration. Par hypothèse, il existe $B \supseteq A$ indépendant de a sur A et un tuple d de réalisations de Σ tel que $a \in \mathrm{acl}(Bd)$. Nous pouvons remplacer B par un tuple fini b tel que $a \in \mathrm{acl}(Abd)$. Soit $q = \mathrm{tp}(b, d/Aa)$ et $c = \mathrm{cb}(q)$. Par le Fait 1.8 *(ii)*, $c \in \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(Aa)$. Notons que $b \mathrel{\raise0.2ex\hbox{$\smile$}\kern-1.1em\lower0.2ex\hbox{$|$}}_A a$, donc $b \downarrow_A c$ et $\mathrm{tp}(c/A)$ est Σ-interne. Par définition de c, $bd \downarrow_{Ac} Aa$, mais $a \in \mathrm{acl}(Abd)$, donc $a \in \mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(Ac)$. Si a' désigne le code pour l'ensemble fini des conjugués de a sur Ac, alors

$$a' \in \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(Ac) \subseteq \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(Aa).$$

Parce que $\mathrm{tp}(c/A)$ est interne à Σ, il en va de même pour $\mathrm{tp}(a'/A)$. De plus, $\mathrm{tp}(a'/A)$ est stationnaire par le Lemme 1.15. Nous pouvons noter que $c \in \mathrm{acl}(Aa')$ aussi : si a'' est un conjugué quelconque de a sur Ac, alors il réalise le même type sur Ac que a. □

Lemme 1.18. *Soit* Σ *un type partiel, et soit* $p \in S(A)$ *un type stationnaire,* Σ*-interne. Il existe une fonction partielle* A*-définissable* $h(y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_n)$ *et une suite* $b_1, \ldots, b_m$ *de réalisations de* p*, telles que pour toute réalisation* a *de* p*, il existe une suite* $c_1, \ldots, c_n$ *de réalisations de* Σ*, telle que* $a = h(b_1, \ldots, b_m, c_1, \ldots, c_n)$.

Démonstration. Soit b réalisant p, $B \supseteq A$ indépendant de b sur A, et d un tuple de réalisations de Σ tel que $b \in \mathrm{dcl}(Bd)$.

Affirmation : Pour tout b' réalisant $p|Ab$, il existe une suite d' de réalisations de Σ telle que $b' = g(b, d')$, pour une certaine fonction définissable g.
Soit $(b_i, d_i)_{i<\omega}$ une suite de Morley de $\mathrm{tp}(b, d/\operatorname{acl}^{\mathrm{eq}}(B))$. Par le Fait 1.8 *(v)*, $\mathrm{tp}(b, d/M)$ est définissable sur $A \cup \{b_i, d_i, i < \omega\}$. En particulier, pour m assez grand,

$$b \in \operatorname{dcl}(b_1, \ldots, b_m, d_1, \ldots, d_m, d, A),$$

de sorte que $\overline{d} = (d_1, \ldots, d_m, d)$, $\overline{b} = (b_1, \ldots, b_m)$ sont indépendants de b sur A. Alors $b = g(\overline{b}, \overline{d})$ pour une certaine fonction g A-définissable. ■
Maintenant soit a une réalisation arbitraire de p, et soit $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_m)$ réalisant $\mathrm{tp}(\overline{b}/\operatorname{acl}(A))$ tel que $(a_1, \ldots, a_m) \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}_A a\overline{b}$. Par l'affirmation, pour chaque $i \leq m$ il existe $\overline{c_i}$, un tuple de réalisations de Σ, tel que $a_i = g(\overline{b}, \overline{c}_i)$. Puisque $\mathrm{tp}(a, \overline{a}/A) = \mathrm{tp}(b, \overline{b}/A)$, nous obtenons aussi que $a = g(\overline{a}, \overline{c})$ pour un certain tuple $\overline{c}$ de réalisations de Σ. Il s'ensuit que $a = h(\overline{b}, \overline{c}, \overline{c}_1, \ldots, \overline{c}_m)$ pour une fonction h A-définissable. □

Ce qui suit est le Lemme 7.2.12 de [13], qui est valable pour toutes les théories simples.

Fait 1.19. *Pour tout $A \subseteq M$ il existe un certain λ tel que pour toute suite $(a_i, i < \lambda)$ il existe une suite $(b_j, j < \omega)$ A-indiscernable telle que pour tout $j_1 < \cdots < j_n < \omega$ il existe une suite $i_1 < \cdots < i_n < \lambda$ avec $\mathrm{tp}(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}/A) = \mathrm{tp}(b_{j_i}, \ldots, b_{j_n}/A)$.*

Lemme 1.20. *Si $b \in \operatorname{acl}(aA)$, alors $RM(ab/A) = RM(a/A)$.*

Démonstration. Il est clair que $RM(ab/A) \geq RM(a/A)$, puisque ce dernier type contient moins de formules. L'inégalité inverse se prouve par récurrence sur $\alpha = RM(a/A)$. Soit $d = DM(ab/Aa)$ son degré de Morley. Choisissons une $L(A)$-formule $\varphi(x, y) \in \mathrm{tp}(ab/A)$ telle que $RM(\exists y \varphi(x, y)) = \alpha$ et $\varphi(a', y)$ a au plus d réalisations pour tout a'. Si Y est l'ensemble défini par $\exists x \varphi(x, y)$, nous affirmons que $RM(Y) \leq \alpha$. Considérons une famille infinie de sous-ensembles définissables $Y_i \subseteq Y$ deux à deux disjoints. Soit $\psi_i(x) = \exists y(\varphi(x, y) \wedge y \in Y_i)$. Notons que $d+1$ quelconques des $\psi_i(M)$ ont une intersection vide : si $M \models \bigwedge_{i=0}^{d} \psi_i(a')$, alors il existe $b_i \in Y_i$ pour $0 \leq i \leq d$ tels que $\models \varphi(a', b_i)$, ce qui contredit notre choix de φ. Par conséquent, un certain $\psi_i(x)$ a un rang de Morley $\beta < \alpha$. Soit $b' \in Y_i$, et choisissons a' tel que $M \models \varphi(a', b')$. Alors b' est algébrique sur $a'A$ et puisque a' réalise $\psi_i(x)$, nous avons $RM(a'/A) \leq \beta$. Donc par hypothèse de récurrence, nous concluons $RM(a'b'/A) \leq \beta$, ce qui montre $RM(Y_i) \leq \beta$. Cela implique que Y ne contient pas de famille infinie de sous-ensembles disjoints de rang de Morley $\geq \alpha$. □

La définition suivante provient de 10.2.8 de [13].

Définition 1.21. Soient $A, B \subseteq M$ des ensembles définissables et soit $f : B \to A$ une fonction définissable. Les fibres de f ont un rang de Morley définissable si pour tout B' définissable $B' \subseteq B$ et tout $k < \omega$, l'ensemble $\{a \in A,\ RM(f^{-1}(a) \cap B') = k\}$ est définissable.

Lemme 1.22. *Soient $A, B \subseteq M$ des ensembles définissables et soit $f : B \to A$ une surjection définissable dont les fibres ont un rang de Morley définissable, et telle que pour tout $a \in A$, $RM(f^{-1}(a)) = k$. Alors $RM(B) = RM(A) + k$.*

Démonstration. Supposons que A, B, f sont définissables sur un certain $S \subseteq M$. La preuve se fait par récurrence sur $RM(A) = m$, pour tout k. Nous pouvons aussi supposer que $DM(A) = 1$: sinon, partitionnons $A = A_1 \cup \cdots \cup A_d$ en un nombre fini de sous-ensembles définissables de rang m disjoints, puis remplaçons B, A par $f^{-1}(A_1), A_1$, respectivement. Si $m = 0$, alors A est fini et

$$RM(B) = \max\{RM(f^{-1}(a))\}_{a \in A} = k.$$

Si $m > 0$, alors écrivons $A = \cup_i A_i$ pour une famille infinie $(A_i)_i$ de sous-ensembles définissables $A_i \subseteq A$ deux à deux disjoints tels que $RM(A_i) = m - 1$. Si $B_i = f^{-1}(A_i)$, alors $f \restriction B_i$ est une surjection définissable avec des fibres de rang k, donc par hypothèse de récurrence $RM(B_i) = RM(A_i) + k = m + k - 1$, et puisque les B_i sont aussi deux à deux disjoints, nous déduisons $RM(B) \geq m + k$. Pour l'inégalité inverse, soit maintenant $(B'_i)_{i<\omega}$ une famille infinie quelconque de sous-ensembles définissables $B'_i \subseteq B$ deux à deux disjoints ; nous montrerons que $RM(B'_i) < m + k$ pour un certain i, par récurrence sur k. Si $k = 0$, f est à fibres finies, donc pour tout $b \in B$, $b \in \mathrm{acl}(f(b))$ et $f(b) \in \mathrm{dcl}(b)$. Par le Lemme 1.20,

$$RM(b/S) = RM(f(b), b/S) = RM(f(b)/S) \leq RM(A) = m.$$

Cela implique $RM(B) = \sup_{b \in B}(RM(b/S)) \leq m$. Supposons maintenant que la conclusion est vraie pour m et pour tout $k' < k$. Soit $a \in A$, alors puisque $RM(f^{-1}(a)) = k$ et $f^{-1}(a) \supseteq \bigcup_i (f^{-1}(a) \cap B'_i)$, il doit exister un j tel que $RM((f^{-1}(a) \cap B'_j) < k$. Considérons maintenant les ensembles définissables

$$A'_i = \{a \in A,\ RM(f^{-1}(a) \cap B'_i) = k\}.$$

Nous avons prouvé que $\cap_i A'_i = \varnothing$. Nous affirmons que pour un certain i, $RM(A'_i) < m$:

sinon, comme $DM(A) = 1$, pour tout N, $\cap_{i\leq N} A'_i \neq \varnothing$, donc par compacité $\cap_i A'_i \neq \varnothing$, une contradiction, puisque le degré de Morley des fibres est borné. Maintenant, comme

$$B'_i = (f^{-1}(A'_i) \cap B'_i) \cup (f^{-1}(A \setminus A'_i) \cap B'_i),$$

nous pouvons appliquer l'hypothèse de récurrence sur m au premier terme pour voir que $RM(f^{-1}(A'_i) \cap B'_i) < m + k$. D'autre part, sur $A \setminus A'_i$, toutes les fibres ont un rang strictement inférieur à k. L'hypothèse de récurrence sur k donne $RM(f^{-1}(A \setminus A'_i) \cap B'_i) < m + k$, ce qui conclut la preuve. □

Lemme 1.23. *Soit $P \subseteq M$ un ensemble définissable fortement minimal, et $\varphi(x_1, \ldots, x_n, \bar{y})$ une formule telle que $M \models \forall x_1, \ldots, x_n(\exists \bar{y}\ \varphi(x_1, \ldots, x_n, \bar{y}) \to x_i \in P)$. L'ensemble suivant est définissable pour tout k,*

$$Y_{n,k} = \{\bar{b} \in M, RM\varphi(x_1, \ldots, x_n, \bar{b}) = k\}.$$

Démonstration. Soit $Y'_{n,k} = \{\bar{b} \in M, RM\varphi(x_1, \ldots, x_n, \bar{b}) \geq k\}$. Nous prouverons la définissabilité de $Y'_{n,k}$, cela donne le résultat désiré puisque $Y_{n,k} = Y'_{n,k} \setminus Y'_{n,k+1}$. Nous procédons par récurrence sur n. Remarquons que $Y'_{1,1}$ est définissable puisque $RM(\varphi(x_1, \bar{b})) \geq 1$ si et seulement si $\exists^\infty x_1 \varphi(x_1, \bar{b})$, ce qui est à son tour équivalent (par forte minimalité de P) à $\exists^{\geq N} x_1 \varphi(x_1, \bar{b})$, pour un certain N. De plus, remarquons que

$$Y_{n,0} = \{\bar{b} \in M, \exists x_1, \ldots, x_n \varphi(x_1, \ldots, x_n, \bar{b})\}$$

est définissable pour tout n. Soit maintenant $n > 0$, nous travaillerons par récurrence sur $k > 0$. Pour $\bar{b} \in P$, considérons la $\bar{b}$-formule $\phi_{\bar{b}}(x_0, \ldots, x_{n-1})$ donnée par $\exists x_n \varphi(x_0, \ldots, x_{n-1}, x_n, \bar{b})$. Si

$RM(\phi_{\bar{b}}) \geq k$, alors $\bar{b} \in Y'_{n,k}$, et si $RM(\phi_{\bar{b}}) < k$, considérons plutôt la $L(\bar{b})$-formule $\psi_{\bar{b}}(x_0, \ldots, x_{n-1})$ donnée par $\exists^\infty x_n \varphi(x_0, \ldots, x_{n-1}, x_n, \bar{b})$, alors puisque la dimension algébrique d'un tuple dans P coïncide avec son rang de Morley, nous avons dans ce cas que $RM(\psi_{\bar{b}}) \geq k - 1$ si et seulement si $\bar{b} \in Y'_{n,k}$. Nous avons montré que $\bar{b} \in Y'_{n,k}$ si et seulement si $RM(\phi_{\bar{b}}) \geq k$ ou $RM(\psi_{\bar{b}}) \geq k - 1$. La première de ces deux conditions est définissable par notre hypothèse de récurrence sur n, tandis que la dernière est définissable par récurrence sur k, donc $Y'_{n,k}$ est aussi définissable. □

2 Groupes Stables

Un groupe ω-stable est une structure ω-stable $(G, \cdot, 1, \dots)$, où $(G, \cdot, 1)$ est un groupe. Dans cette section nous présentons quelques concepts et outils de base utilisés dans l'étude des groupes ω-stables. Pour plus de détails, voir [11] et le Chapitre 7 de [7]. Tout au long de cette section G désignera un groupe infini, ω-stable, définissable à l'intérieur d'un modèle saturé M d'une théorie complète, ω-stable T.

Lemme 2.1. *Il n'existe pas de chaîne strictement descendante infinie de sous-groupes définissables $G > G_1 > G_2 > \dots$*

Démonstration. Pour tout sous-groupe définissable $H \leq G$, et tout $a \in G \setminus H$, la classe $aH \subseteq G$ est disjointe de H, et puisque $x \mapsto ax$ est une bijection définissable, alors $RM(H) = RM(aH)$. Si $G > G_1 > G_2 > \dots$ est une suite strictement décroissante, et si $[G_i : G_{i+1}]$ est infini, alors $RM(G_i) > RM(G_{i+1})$. Si $[G_i : G_{i+1}]$ est fini, alors $DM(G_i) > DM(G_{i+1})$, et cela implique l'existence d'une suite strictement décroissante par rapport à l'ordre lexicographique $RM(G) \times \omega$, donc, cette suite ne peut pas être infinie. □

Lemme 2.2. *Il existe un sous-groupe normal définissable $G^0 \leq G$ qui est contenu dans tout sous-groupe de G d'indice fini.*

Démonstration. Soit $\mathcal{H}$ la famille des sous-groupes définissables de G d'indice fini. Nous affirmons qu'il existe $H_1, \dots, H_n$ dans $\mathcal{H}$ tels que

$$\bigcap_{H \in \mathcal{H}} H = H_1 \cap \dots \cap H_n.$$

Sinon, pour tout m il existe $j_0, \dots, j_m$ tels que si $G_m = H_{j_0} \cap \dots \cap H_{j_m}$, alors $G_0 > G_1 > G_2 >$ ..., contredisant le Lemme 2.1. Nous pouvons alors définir $G^0 = H_1 \cap \dots \cap H_n$. Si $h \in G$, puisque $x \mapsto hxh^{-1}$ est un automorphisme de groupe, nous avons que hG^0h^{-1} est un sous-groupe définissable avec $[G : hG^0h^{-1}] = [G : G^0]$, donc $hG^0h^{-1} = G^0$ par minimalité. □

Lemme 2.3. *Soit $A \subseteq M$. Si G est A-définissable, alors G^0 est A-définissable.*

Démonstration. Par le Lemme 2.2, il existe une $L(A)$-formule $\varphi(x, y)$ et $g \in G$ tels que la formule $\varphi(x, g)$ définit G^0. Soit $n = [G : G^0]$, et considérons

$$W = \{b \in G,\ \varphi(x, b) \text{ définit un sous-groupe d'indice } n\ \},$$

un ensemble A-définissable. Si $b \in W$ et $H = \varphi(G, b)$, alors $H \cap G^0$ est un sous-groupe d'indice fini de G^0, donc $H \supseteq G^0$. Cependant, puisque $[G : H] = n$, nous avons $[H : G^0] = 1$, d'où $H = G^0$. Nous pouvons alors définir G^0 comme $\{g \in G, \exists b\ (b \in W \wedge \varphi(g, b))\}$. $\square$

Définition 2.4. G est *connexe* si $G = G^0$.

Définition 2.5. Il existe une action de G sur $S_1(G)$ donnée par $g \cdot p = \{\varphi(x),\ \varphi(gx) \in p\}$. Le *stabilisateur* de p est le groupe

$$\mathrm{Stab}(p) = \{g \in G, g \cdot p = p\}.$$

Lemme 2.6. $\mathrm{Stab}(p)$ *est un sous-groupe définissable de* G*, pour tout* $p \in S_1(G)$*.*

Démonstration. Pour $\varphi(x, y)$ une L-formule, soit

$$\mathrm{Stab}_\varphi(p) = \{g \in G \mid p_\varphi = g \cdot p_\varphi\},$$

où

$$p_\varphi = \{\varphi(x, g) \mid g \in G, \varphi(x, g) \in p\} \cup \{\neg\varphi(x, g) \mid g \in G, \varphi(x, g) \notin p\}.$$

Un calcul simple montre que pour tout φ, $\mathrm{Stab}_\varphi(p) \leq G$. Par stabilité, il existe un schéma de définition pour p, disons d_p. Ainsi,

$$\mathrm{Stab}_\varphi(p) = \{g \in G | \ \forall h(d_p(\varphi)(h) \leftrightarrow d_p(\varphi)(hg))\}.$$

Notons que $\mathrm{Stab}(p) = \bigcap_{\varphi(x,y) \in L} \mathrm{Stab}_\varphi(p)$. Par le Lemme 2.1, il existe $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in L$ tels que $\mathrm{Stab}(p) = \mathrm{Stab}_{\varphi_1}(p) \cap \cdots \cap \mathrm{Stab}\,\varphi_n(p)$, ce qui conclut la preuve. $\square$

Lemme 2.7. *Soit* $p \in S_1(G)$*.*

(i) $RM(\mathrm{Stab}(p)) \leq RM(p)$*.*

(ii) $\mathrm{Stab}(p) \leq G^0$*.*

Démonstration. Soient $a, b \in M$ tels que a réalise p, $b \in \mathrm{Stab}(p)$ satisfait $RM(\mathrm{tp}(b/G)) = RM(\mathrm{Stab}(p))$, et $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}_G b$. Alors

$$RM(\mathrm{tp}(ba/G, a)) = RM(\mathrm{tp}(b/G, a)) = RM(\mathrm{tp}(b/G)) = RM(\mathrm{Stab}(p)).$$

De plus, puisque ba réalise p, nous avons $RM(\mathrm{tp}(ba/G, a)) \leq RM(\mathrm{tp}(ba/G)) = RM(p)$, prouvant *(i)*. Soit maintenant $c \in \mathrm{Stab}(p)$, et soit $\varphi(x)$ définissant G^0 (possiblement avec des paramètres dans M). Soit $g \in G$ tel que $\varphi(g^{-1}x) \in p$, donc $\varphi(g^{-1}cx) \in p$. Soit $G \preceq H$ et $h \in H$ réalisant p. Alors $g^{-1}ch \in H^0$ et $g^{-1}h \in H^0$. Ainsi $(g^{-1}h)^{-1}g^{-1}ch = h^{-1}ch \in H^0$, et puisque H^0 est normal, $c \in G^0$ par le Lemme 2.3. □

Définition 2.8. Un type $p \in S_1(G)$ est *générique* si $RM(p) = RM(G)$. Un élément $a \in G(M)$ est générique sur $A \subseteq G$ si $RM(\mathrm{tp}(a/A)) = RM(G)$.

Lemme 2.9. *Un type $p \in S_1(G)$ est générique si et seulement si $[G : \mathrm{Stab}(p)]$ est fini.*

Démonstration. Supposons que p est générique. Remarquons que $\{ap,\ a \in G\}$ est fini, puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de types de rang de Morley maximal. Choisissons $b_1, \ldots, b_n \in G$ tels que si $a \in G$, alors $ap = b_i p$ pour un certain $i \leq n$. Si $ap = b_i p$ alors $b_i^{-1}a \in \mathrm{Stab}(p)$ et $a \in b_i \mathrm{Stab}(p)$. Par conséquent, $[G : \mathrm{Stab}(p)] \leq n$. Supposons maintenant que $\mathrm{Stab}(p)$ a un indice fini, donc $RM(G) = RM(\mathrm{Stab}(p))$, mais $RM(\mathrm{Stab}(p)) \leq RM(p)$ par le Lemme 2.7, donc p est générique. □

Corollaire 2.10.

(i) Un type $p \in S_1(G)$ est générique si et seulement si $\mathrm{Stab}(p) = G^0$

(ii) G a un unique type générique si et seulement si G est connexe.

Démonstration.

(i) Par le Lemme 2.9, si p est générique, $\mathrm{Stab}(p)$ a un indice fini, nous avons $G^0 \leq \mathrm{Stab}(p)$. Par le Lemme 2.7 *(ii)*, nous avons $G^0 \geq \mathrm{Stab}(p)$. L'autre direction est claire par le Lemme 2.9, puisque G^0 a un indice fini.

(ii) Soit p l'unique type générique. Pour tout $a \in G$, ap est générique, donc $ap = p$. Ainsi, $G = \mathrm{Stab}(p) = G^0$ par *(i)*. Réciproquement, supposons $G = G^0$, et par contradiction, supposons que p, q sont des types génériques distincts. Soient a, b réalisant p, q respectivement, avec $b \in H \succeq G$ et soit a' réalisant $p|H$. Alors, $\mathrm{tp}(a, b/G) = \mathrm{tp}(a', b/G)$, et $p|H$ est un générique de H. Par *(i)*, $\mathrm{Stab}(p|H) = H^0 = H$. Ainsi, ba' réalise $p|H$. En particulier, ba' réalise p, donc ba réalise p. Si $a \in K \succeq G$, et b' réalise $q|K$, un argument analogue montre que ba réalise q. Cela contredit notre hypothèse, donc G a un unique type générique.

□

3 Paires de Corps Algébriquement Clos

Tout au long de cette section, nous poserons $T = ACF_p$ pour p premier ou 0 (dans le langage usuel L), et nous considérons L_P, le langage obtenu en ajoutant un prédicat unaire P. Une paire élémentaire de modèles de T, $N \preceq M$, est considérée comme une L_P-structure en interprétant P comme l'univers de la structure N, et les L_P-structures seront naturellement notées comme des paires (M, P).

Définition 3.1. Une *belle paire* de modèles de T est une paire élémentaire $N \preceq M$ telle que N est $|T|^+$-saturée et M est $|T|^+$-saturée sur N, ce qui signifie que M réalise tout L-type sur $N \cup A$, où $A \subseteq M \setminus N$ est tel que $|A| < |T|^+$. La théorie T_P des paires propres $P \prec M$ de modèles de T a été montrée complète par Keisler dans [5].

Fait 3.2. *([12]) Soit (M, P) un modèle saturé de T_P.*

(i) (M, P) est une belle paire.

(ii) T_P est stable.

(iii) Toute L_P-formule $\phi(x)$ est équivalente modulo T_P à une combinaison booléenne de L_P-formules de la forme $\exists y P(y) \wedge \psi(y, x)$ où ψ est une L_P-formule sans quantificateurs.

Buechler dans [2] note que T_P est en fait ω-stable de rang de Morley ω. Désormais (M, P) sera un modèle saturé de T_P.

Notation : Si $A \subseteq M$, nous notons le corps engendré par A par $\langle A \rangle$. Pour tous $A, B, C \subseteq M$, nous notons l'indépendance au sens de L par $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_C^L B$, et au sens de L_P par $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_C^{L_P} B$. Nous distinguerons aussi les L-types des L_P-types en utilisant tp_L et tp_{L_P} respectivement. Nous adoptons la même convention pour les opérateurs acl et dcl.

Lemme 3.3. *Tout $C \subset P^n$ qui est L_P-définissable avec des paramètres de M, est L-définissable avec des paramètres de P. En particulier, P est fortement minimal et stablement plongé (au sens de L_P).*

Démonstration. Soit $\varphi(x, m)$ avec $m \in M$ une L_P-formule définissant C. Notons que P est algébriquement clos au sens de L_P. Par stabilité de T_P, $p(y) = \mathrm{tp}_{L_P}(m/P)$ est définissable sur P, donc nous avons que pour tout $a \in M$,

$$a \in C \iff \varphi(a, y) \in p \iff M \models d\varphi(a),$$

où $d\varphi(x)$ est une L_P-formule avec des paramètres dans P. Maintenant, par le Fait 3.2, $d\varphi(x)$ est équivalente à une combinaison booléenne de formules de la forme $\exists z P(z) \wedge \psi(x,z)$ où ψ est une L_P-formule sans quantificateurs. Puisque $C \subseteq P^n$ et

$$M \models \forall x \; d\varphi(x) \to P(x),$$

C est L-définissable par une combinaison booléenne de formules de la forme $\exists z \psi'(x,z)$, où ψ' est la L-formule obtenue de ψ en remplaçant toute occurrence de $P(t)$ par $t = t$, pour tout terme t. □

Remarque 3.4. Par l'élimination des quantificateurs dans T, la formule $\exists z \psi'(x,z)$ est équivalente modulo T à une L-formule sans quantificateurs $\theta(x)$. Remarquons aussi que l'ensemble C ne dépend que de m, donc si c est un L_P-code pour C, nous avons que $c \in \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}_{L_P}(m) \cap P$.

Définition 3.5. Soit $a \in M$ un tuple (possiblement infini), définissons $\widehat{a} = (a, a^c)$, où $a^c = \mathrm{Cb}(\mathrm{tp}_L(a/P))$. Puisque T est totalement transcendante et élimine les imaginaires, a^c est dans la clôture définissable au sens de L d'un tuple réel fini. Plus spécifiquement, a^c peut être considéré, à interdéfinissabilité près, comme un tuple de générateurs pour le corps de définition du lieu algébrique de a sur P (c'est-à-dire : la variété associée à l'idéal premier des polynômes dans $P[X]$ qui s'annulent en a).

Lemme 3.6. *Pour tous tuples $a \in M$, $\langle \widehat{a} \rangle$ est linéairement disjoint de P sur $\langle a^c \rangle$.*

Démonstration. Notons que $\langle \widehat{a} \rangle = \langle a^c \rangle(a)$. Soit $\{M_0(X), \ldots, M_m(X)\}$ un ensemble de monômes tel que $\{M_0(a), \ldots, M_m(a)\}$ est linéairement indépendant sur $\langle a^c \rangle$. Supposons qu'il existe une relation linéaire $\sum c_i M_i(a) = 0$, où $c_i \in P$. Par définition de a^c nous pouvons écrire

$$\sum_{i=0}^{m} c_i M_i(X) = \sum_{j=0}^{n} b_j f_j(X),$$

où $b_j \in \langle a^c \rangle$, $f_j(a) \in I := \{f(X) \in \langle a^c \rangle(X),\ f(a) = 0\}$ pour tout j, et tel que $\{f_0(X), \ldots, f_n(X)\}$ est un ensemble linéairement indépendant de polynômes sur $\langle a^c \rangle$. Nous affirmons que $\{M_1, \ldots, M_m, f_1, \ldots, f_n\}$ est aussi linéairement indépendant sur $\langle a^c \rangle$: sinon, $\sum r_i M_i(X) + \sum s_j f_j(X) = 0$, pour certains $r_i, s_j \in \langle a^c \rangle$. Nous pouvons substituer a à X pour obtenir $\sum r_i M_i(a) = 0$, ce qui donne $r_i = 0$ pour tout i, donc $\sum s_j f_j(X) = 0$ et $s_j = 0$ pour tout j. Comme ce sont des polynômes formels, ils restent linéairement indépendants sur P, donc $c_i = 0$ pour tout i. □

Remarque 3.7. Pour tous tuples $a \in M$, $a^c \in \mathrm{dcl}_{L_P}(a)$.

Démonstration. Tout L_P-automorphisme laisse P invariant, donc s'il fixe aussi a, il doit laisser $\mathrm{tp}_L(a/P)$ invariant, donc il doit fixer a^c. $\square$

Lemme 3.8. *Pour tous tuples $a, b \in M$, $\mathrm{tp}_{L_P}(a) = \mathrm{tp}_{L_P}(b)$ si et seulement si $\mathrm{tp}_L(\widehat{a}) = \mathrm{tp}_L(\widehat{b})$.*

Démonstration. S'il existe un L_P-automorphisme σ de M envoyant a sur b, par la Remarque 3.7 nous avons $\sigma(a^c) = b^c$, donc $\mathrm{tp}_{L_P}(\widehat{a}) = \mathrm{tp}_{L_P}(\widehat{b})$. En restreignant le langage on obtient $\mathrm{tp}_L(\widehat{a}) = \mathrm{tp}_L(\widehat{b})$. Réciproquement, supposons qu'il existe un L-isomorphisme partiel σ envoyant a sur b et a^c sur b^c. Puisque $\langle \widehat{a} \rangle$ et P sont linéairement disjoints sur $\langle a^c \rangle$, et aussi $\langle \widehat{b} \rangle$ et P sont l.d. sur $\langle b^c \rangle$, la restriction $\sigma \upharpoonright \langle \widehat{a} \rangle$ peut être étendue à un L-isomorphisme $\sigma' : P(a) \to P(b)$ tel que $\sigma'(P) = P$, en d'autres termes, à un L_P-isomorphisme, qui peut lui-même être étendu à un L_P-automorphisme de M par saturation de M sur P (voir le Fait 3.2 *(iii)*). $\square$

Lemme 3.9. *Pour tous tuples $a \in M$,*

(i) $a^c \subseteq P$.

(ii) *Si $b \in P$ est un tuple, $\widehat{ab}$ et $\widehat{a}b$ sont L-interdéfinissables.*

(iii) $\widehat{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}\nolimits_{a^c}^{L_P} P$

Démonstration. Par élimination des imaginaires dans T, $a^c \in \mathrm{acl}_L^{\mathrm{eq}}(P) = P$, cela donne *(i)*. Pour voir *(ii)*, remarquons que $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}\nolimits_{a^c}^{L} P$ implique $ab \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}\nolimits_{a^c b}^{L} P$, et puisque $\mathrm{tp}_L(ab/a^c b)$ est stationnaire, nous obtenons $(ab)^c \subseteq \mathrm{dcl}_L(a^c b)$, donc $\widehat{ab} \in \mathrm{dcl}_L(\widehat{a}b)$. Clairement $\widehat{a}b \subseteq \widehat{ab}$, donc l'autre direction suit. Pour *(iii)*, soit $a^c \in B \subseteq P$, et choisissons une suite L_P-indiscernable sur a^c, $(B_i)_{i<\omega}$, telle que $B_0 = B$. Soit $p = \mathrm{tp}_L(\widehat{a}/B)$, et pour chaque i soit p_i l'image de p sous un L-automorphisme qui fixe a^c et envoie B sur B_i. Comme $\widehat{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}\nolimits_{a^c}^{L} P$, $B_i \subseteq P$, et $\widehat{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}\nolimits_{a^c}^{L} B_i$ pour tout i, $\hat{a}$ réalise $\cup_i p_i$. Par le Lemme 3.8 et *(ii)*, $\mathrm{tp}_L(\widehat{a}/P) \vdash \mathrm{tp}_{L_P}(\widehat{a}/P)$. Si nous posons $p' = \mathrm{tp}_{L_P}(\widehat{a}/B)$ et p'_i l'image de p' sous un L_P-automorphisme qui fixe a^c et envoie B sur B_i, nous avons prouvé la consistance de $\cup_i p'_i$. Donc, $\mathrm{tp}_{L_P}(\widehat{a}/B)$ ne bifurque pas sur a^c. Puisque B a été choisi arbitrairement, le résultat suit. $\square$

Définition 3.10. Un sous-ensemble A de M est dit P-indépendant si $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}\nolimits_{A \cap P}^{L} P$.

Remarque 3.11.

(i) Pour tout $a \in M$, $\widehat{a}$ est P-indépendant.

(ii) Tout sous-ensemble de P est P-indépendant.

Démonstration. La première condition découle directement du Lemme 3.9 *(i)*, *(iii)*, et de la monotonie. La seconde affirmation est claire. $\square$

Lemme 3.12. *Soient $A \subseteq B, C \subseteq M$ avec $C = Ac$, où $c \in M$ est un tuple fini. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $C \mathop{\smile\hskip-0.9em\mid}^{L_P}_{A} B$

(ii) $C \mathop{\smile\hskip-0.9em\mid}^{L}_{AP} BP$, *et* $C^c \mathop{\smile\hskip-0.9em\mid}^{L}_{A^c} B^c$.

(iii) $C \mathop{\smile\hskip-0.9em\mid}^{L}_{AP} BP$, *et* $\widehat{C} \mathop{\smile\hskip-0.9em\mid}^{L}_{\widehat{A}} \widehat{B}$.

Démonstration.
(i) implique *(ii)* : Par la Remarque 3.7, nous pouvons supposer $B = \widehat{B}$. Pour la première partie, supposons par contradiction que $\mathrm{tp}_L(c/BP)$ bifurque sur AP. Soit $(B_i)_{i<\lambda}$ une suite de réalisations de $\mathrm{tp}_L(B/AP)$ telle que $B_i \mathop{\smile\hskip-0.9em\mid}^{L}_{AP} (B_j)_{j<i}$ et $B_0 = B$; notons qu'en particulier, comme $\widehat{B_i} = B_i$, pour tout i, nous obtenons $\mathrm{tp}_{L_P}(B_i) = \mathrm{tp}_{L_P}(B)$ par le Lemme 3.9. Nous pouvons choisir λ assez grand pour appliquer le Fait 1.19, ce qui donne une suite L_P-indiscernable sur AP, $(B'_i)_{i<\omega}$, telle que $\mathrm{tp}_{L_P}(B'_i/AP) = \mathrm{tp}_{L_P}(B/AP)$ pour tout i. Soit $p = \mathrm{tp}_{L_P}(c/B)$ et soit p_i sa copie sur B'_i ; alors par *(i)*, $\cup_{i<\omega} p_i$ peut être réalisé par un certain c'. Nous avons que pour tout i, $c' \not\mathop{\smile\hskip-0.9em\mid}^{L}_{AP} B'_i P$: cela contredit l'ω-stabilité de T, puisque $(B'_i)_{i<\omega}$ est aussi L-indépendante sur AP. Pour prouver la dernière partie de *(ii)*, nous appliquons les propriétés de la bifurcation : par le Lemme 3.9 *(iii)* nous avons que $\widehat{A} \mathop{\smile\hskip-0.9em\mid}^{L_P}_{A^c} P$, ce qui implique par symétrie et monotonie que $C^c \mathop{\smile\hskip-0.9em\mid}^{L_P}_{A^c} \widehat{A}$. De plus, la Remarque 3.7 donne

$$\begin{aligned} C \mathop{\smile\hskip-0.9em\mid}^{L_P}_{A} B &\Rightarrow CC^c \mathop{\smile\hskip-0.9em\mid}^{L_P}_{AA^c} BB^c \\ &\Rightarrow C^c \mathop{\smile\hskip-0.9em\mid}^{L_P}_{\widehat{A}} B^c, \text{ par monotonie.} \end{aligned}$$

En appliquant la transitivité, $C^c \mathop{\smile\hskip-0.9em\mid}^{L_P}_{A^c} B^c$. Comme ces trois ensembles sont tous dans P, nous obtenons en fait l'indépendance désirée au sens de L.
(ii) implique *(iii)* : Nous prouverons $AC^c \mathop{\smile\hskip-0.9em\mid}^{L}_{\widehat{A}} \widehat{B}$ et $\widehat{C} \mathop{\smile\hskip-0.9em\mid}^{L}_{AC^c} \widehat{B}$, puis *(iii)* suivra par transitivité et parce que $A^c \subseteq C^c$. Pour obtenir la première relation, partons de $\widehat{B} \mathop{\smile\hskip-0.9em\mid}^{L}_{B^c} P$ et utilisons $C^c \subseteq P$ pour obtenir $\widehat{B} \mathop{\smile\hskip-0.9em\mid}_{B^c} C^c$. En combinant cela avec notre hypothèse $C^c \mathop{\smile\hskip-0.9em\mid}^{L}_{A^c} B^c$, nous obtenons $C^c \mathop{\smile\hskip-0.9em\mid}^{L}_{A^c} \widehat{B}$, ce qui implique $AC^c \mathop{\smile\hskip-0.9em\mid}^{L}_{\widehat{A}} \widehat{B}$ puisque $A^c \subseteq \hat{A} \subseteq \hat{B}$. Pour la seconde relation, partons de $\widehat{C} \mathop{\smile\hskip-0.9em\mid}_{C^c} P$ et $A \subseteq C$ pour obtenir $\widehat{C} \mathop{\smile\hskip-0.9em\mid}^{L}_{AC^c} AP$ (I). Maintenant, l'hypothèse $C \mathop{\smile\hskip-0.9em\mid}^{L}_{AP} BP$ donne

$\widehat{C} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}^{L}_{AP} \widehat{B}$ (II), puisque $B^c, C^c \subseteq P$. En combinant (I) et (II) on obtient $\widehat{C} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}^{L}_{AC^c} \widehat{B}$.

(iii) implique *(i)* :

Affirmation : *(iii)* implique que $\widehat{Ac}\widehat{B}$ est P-indépendant.

$\widehat{Ac}\widehat{B}$ est P-indépendant équivaut à dire que si t_C, t_B sont des bases de transcendance pour $\widehat{Ac}, \widehat{B}$ sur $\widehat{A}P = AP$ respectivement, alors $t_C \cup t_B$ reste algébriquement indépendant sur AP, ce qui équivaut à $C \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}\nolimits^{L}_{AP} BP$. $\blacksquare$

Soit $(\widehat{B}_i)_i$ une suite L_P-indiscernable sur $\widehat{A}$ avec $\widehat{B_0} = \widehat{B}$. Par hypothèse $C^c \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}\nolimits^{L}_{\widehat{A}} \widehat{B}$, donc nous pouvons supposer que $(\widehat{B}_i)_i$ est aussi L-indiscernable sur $\widehat{A}C^c$. Soit $p = \mathrm{tp}_L(\widehat{c}/\widehat{B}C^c)$, et soit p_i ses copies sur $\widehat{B_i}C^c$. Par la première condition de *(iii)*, nous pouvons réaliser $\cup_i p_i$ par un certain $\widehat{C'}$ qui est L-indépendant de P sur $\cup_i \widehat{B_i}C^c$. Par le Lemme 3.8 et par l'affirmation, il s'ensuit que $\mathrm{tp}_{L_P}(\widehat{C}'\widehat{B_i}C^c) = \mathrm{tp}_{L_P}(\widehat{C}\widehat{B_i}C^c)$, donc p ne L_P-bifurque pas sur $\widehat{A}$. Par conséquent, $\widehat{C} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}\nolimits^{L_P}_{\widehat{A}} \widehat{B}$, et *(i)* suit de la Remarque 3.7. $\square$

Lemme 3.13. *Soit $a \in M$, alors*

i) $\mathrm{acl}_{L_P}(a) = \mathrm{acl}_L(\widehat{a})$.

ii) $\mathrm{dcl}_{L_P}(a) = \mathrm{dcl}_L(\widehat{a})$.

Démonstration. Dans les deux cas, l'inclusion $\supseteq$ suit de la Remarque 3.7.

i) D'abord nous montrons que $\mathrm{acl}_{L_P}(a) \cap P = \mathrm{acl}_L(a^c)$. Soit $b \in \mathrm{acl}_{L_P}(a) \cap P$, alors puisque $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}\nolimits^{L}_{a^c} P$, nous obtenons $\widehat{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}\nolimits^{L}_{a^c} b$. Supposons $b \notin \mathrm{acl}_L(a^c)$, donc $b \notin \mathrm{acl}_L(\widehat{a})$. Alors, dans P, il existe une infinité de $(b_i, i < \omega)$ tels que $\mathrm{tp}_L(\widehat{a}b_i) = \mathrm{tp}_L(\widehat{a}b)$. Par le Lemme 3.9 *(ii)*, $\mathrm{tp}_L(\widehat{ab_i}) = \mathrm{tp}_L(\widehat{ab})$. Par le Lemme 3.8, ces b_i sont aussi L_P-conjugués sur $\widehat{a}$, une contradiction. Considérons maintenant $b' \in M \setminus P$ tel que $b' \in \mathrm{acl}_{L_P}(a)$ mais $b' \notin \mathrm{acl}_L(\widehat{a})$. Alors

$$(b'\widehat{a})^c \in \mathrm{dcl}_{L_P}(b'\widehat{a}) \cap P \subseteq \mathrm{acl}_{L_P}(\widehat{a}) \cap P = \mathrm{acl}_L(a^c),$$

ce qui implique par le Fait 1.8 *(iii)* que $b'\widehat{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}\nolimits^{L}_{a^c} P$, donc $b' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}\nolimits^{L}_{\widehat{a}} P$. Par hypothèse il existe une infinité de L-conjugués de b' sur $\widehat{a}$. Puisque M est saturé sur P, il existe une infinité de réalisations de $\mathrm{tp}_L(b'/\widehat{a}P)$. Cela implique qu'il existe une infinité de réalisations de $\mathrm{tp}_{L_P}(b'/\widehat{a})$, une contradiction.

ii) La preuve est similaire. D'abord, nous montrons que $\mathrm{dcl}_{L_P}(a) \cap P = \mathrm{dcl}_L(a^c)$, donc soit

$b \in \mathrm{dcl}_{L_P}(a) \cap P$. Alors, par *(i)*, $b \in \mathrm{acl}_L(a^c)$. Supposons $b \notin \mathrm{dcl}_L(\widehat{a})$, alors il existe $b' \in P$ distinct de b tel que $\mathrm{tp}_L(b'\widehat{a}) = \mathrm{tp}_L(b\widehat{a})$, et en appliquant le Lemme 3.9 *(ii)* et le Lemme 3.8 on obtient $\mathrm{tp}_{L_P}(b'\widehat{a}) = \mathrm{tp}_{L_P}(b\widehat{a})$, une contradiction. Considérons maintenant $b' \in M \setminus P$, $b' \in \mathrm{dcl}_{L_P}(a)$, mais supposons $b' \notin \mathrm{dcl}_L(\widehat{a})$. Alors

$$(b'\widehat{a})^c \in \mathrm{dcl}_{L_P}(b'\widehat{a}) \cap P \subseteq \mathrm{dcl}_{L_P}(\widehat{a}) \cap P = \mathrm{dcl}_L(a^c),$$

donc $\langle \widehat{a} \rangle (b')$ et P sont linéairement disjoints sur $\langle \widehat{a} \rangle$. Par hypothèse il existe au moins deux L-conjugués de b sur $\widehat{a}$, qui sont aussi des L_P-conjugués sur $\widehat{a}$ par le Lemme 3.8, une contradiction.

□

Corollaire 3.14. *Si $A \subseteq M$ est tel que $A = \widehat{A}$, alors* $\mathrm{acl}_{L_P}(A) = \mathrm{acl}_L(A)$ *et* $\mathrm{dcl}_{L_P}(A) = \mathrm{dcl}_L(A)$*. En particulier P est algébriquement clos au sens de L_P.*

Définition 3.15.

i) Considérons pour tout $n > 1$, le prédicat $l_n(x_1, \ldots, x_n)$, qui affirme que $x_1, \ldots, x_n$ sont linéairement indépendants sur E, c'est-à-dire,

$$l_n(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \forall e_1, \ldots, e_n \left(\bigwedge_i P(e_i) \wedge \sum_i e_i x_i = 0 \rightarrow \bigwedge_i e_i = 0 \right).$$

ii) Considérons pour tout $n > 1$ et pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, la fonction $(n+1)$-aire $f_{n,i}(y, x_1, \ldots, x_n)$ qui donne la i-ème coordonnée de y écrit comme combinaison linéaire de $x_1, \ldots, x_n$. Plus spécifiquement, si $l_n(x_1, \ldots, x_n) \wedge \neg l_n(y, x_1, \ldots, x_n)$, alors

$$z = f_{n,i}(y, x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \exists z_1, \ldots, z_n \left(z = z_i \wedge y = \sum_j z_j x_j \wedge \bigwedge P(z_j) \right),$$

sinon, si la condition n'est pas satisfaite, définissons $f_{n,i}(y, x_1, \ldots, x_n) = 0$.

iii) Définissons le langage $L_P^{l,f}$ comme le langage obtenu en ajoutant à L_P les symboles de prédicats l_n et $f_{n,i}$, pour tout $n > 1$ et $i \in \{1, \ldots, n\}$. Remarquons que dans ce langage, $P(x)$ peut être défini par la formule $\neg l_n(1, x)$.

Le résultat suivant est le Corollaire 15 de [3] :

Fait 3.16. *Soit $N \subseteq M$ un modèle de T_P, alors l'inclusion est élémentaire ssi N est une $L_P^{l,f}$-sous-structure ssi N est P-indépendant.*

Corollaire 3.17. *Soit $A \subseteq M$. Soit C le corps engendré par A et les $f_{n,i}(A)$ pour tous $n > 1$ et $i \leq n$. Alors $\widehat{A} \subseteq C$, et par conséquent*

i) $\mathrm{acl}_{L_P}(A) = \mathrm{acl}_L(C)$.

ii) $\mathrm{dcl}_{L_P}(A) = \mathrm{dcl}_L(C)$.

Démonstration. Par le théorème 7, §2, Ch 3. de [6], le corps de définition du lieu de A sur P est engendré par $\{f_{n,i}(M_0, M_1, \ldots, M_n), n < \omega, i \leq n\}$, où le tuple $(M_0, M_1, \ldots, M_n)$ parcourt l'ensemble des monômes formés par les éléments de A. Par conséquent, $A^c \subseteq C$. De là, nous obtenons à la fois $\mathrm{acl}_L(\widehat{A}) \subseteq \mathrm{acl}_L(C)$ et $\mathrm{dcl}_L(\widehat{A}) \subseteq \mathrm{dcl}_L(C)$, tandis que l'inclusion inverse suit de la définissabilité des $f_{n,i}$. Le résultat désiré est obtenu en invoquant le Lemme 3.13. □

Lemme 3.18. *Soient $a, b, c \in M$, $p_1 = \mathrm{tp}_{L_P}(a/bc)$, $p_2 = \mathrm{tp}_{L_P}(b/c)$. Si p_1, p_2 sont stationnaires, alors $p_3 = \mathrm{tp}_{L_P}(a/c)$ est stationnaire.*

Démonstration. Par stabilité de T_P et par hypothèse, il existe des bons schémas de définition dp_1 sur bc et dp_2 sur c. Nous voulons trouver une bonne définition pour p_3, c'est-à-dire une qui définit un type global, cela impliquerait la stationnarité par le Lemme 1.14. Soit $\varphi(x, y)$ une L_P-formule et soit $m \in M$ tel que $M \models \varphi(a, m)$. Il existe une formule $dp_1(\varphi)(y, z, w)$ telle que $M \models dp_1(\varphi)(m, b, c)$. De plus, il existe alors une formule $dp_2(dp_1(\varphi))(y, w)$ telle que $M \models dp_2(dp_1(\varphi))(m, c)$. Le résultat suit. □

Remarque : T_P élimine les imaginaires finis.

Démonstration. Soit $A = \{a_1, \ldots, a_k\} \subseteq M^n$, où $a_i = (a_{i,1}, \ldots, a_{i,n})$. Considérons le polynôme suivant

$$p(X, Y_0, \ldots, Y_{n-1}) = \prod_{i=1}^{k} \left(X - \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} Y_j \right),$$

Si σ est un L_P-automorphisme, alors comme c'est en particulier un L-isomorphisme, nous avons que $\sigma p(X, Y_0, \ldots, Y_{n-1}) = \prod_{i=1}^{k} \left(X - \sum_{j=1}^{n} \sigma(a_{i,j}) Y_j \right)$. En notant que $M[X, Y_0, \ldots, Y_{n-1}]$ est un anneau factoriel, nous déduisons $\sigma p = p$ si et seulement si $\sigma A = A$. Le tuple consistant en les coefficients de p est un paramètre canonique pour A. □

Lemme 3.19. *Soit M_0 une sous-structure élémentaire de (M,P), et soit $a \in M$ tel que $a = \widehat{a}$. Définissons $d = \mathrm{Cb}(\mathrm{tp}_L(a/\operatorname{acl}_L(M_0P)))$, $e' = \mathrm{Cb}(\mathrm{tp}_{L_P}(d/M_0))$, et $e = \mathrm{Cb}(\mathrm{tp}_{L_P}(a/M_0))$. Alors e' et e sont L_P-interdéfinissables.*

Démonstration. Notons que par définition de e, e' et parce que $M_0 \preceq M$, $\mathrm{tp}_{L_P}(a/e)$ et $\mathrm{tp}_{L_P}(d/e')$ sont stationnaires.

Affirmation I :

(i) $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,\,|}_{d}^{L_P} M_0P$.

(ii) $d \in \operatorname{acl}_{L_P}(aM_0)$.

(i) : Par le Lemme 3.12, il suffit de prouver $\widehat{ad} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,\,|}_{\widehat{d}}^{L} \widehat{M_0P}$. Remarquons que puisque $(M_0P)^c \subseteq P$, nous avons $M_0P = \widehat{M_0P}$, puis par définition de d, $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,\,|}_{d}^{L} M_0P$ et puisque $d^c \in P$, la monotonie donne $a\widehat{d} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,\,|}_{\widehat{d}}^{L} \widehat{M_0P}$. Il suffit maintenant de prouver $(ad)^c = d^c$, ce qui impliquerait $\widehat{ad} = a\widehat{d}$. Par définition de d, $\langle ad\rangle$ est linéairement disjoint (l.d.) de $\operatorname{acl}_L(M_0P)$ sur $\langle d\rangle$, donc $\langle ad\rangle$ et $P(d)$ sont l.d. sur $\langle d\rangle$. Puisque $\langle d\rangle$ est l.d de P sur $\langle d^c\rangle$, il s'ensuit que $\langle ad\rangle$ et P sont l.d sur $\langle d^c\rangle$, donc $(ad)^c = d^c$.
(ii) : Puisque $aM_0 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,\,|}_{(aM_0)^c}^{L} P$, alors $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,\,|}_{M_0(aM_0)^c}^{L} M_0P$. Par le Fait 1.8 *(iii)* et la Remarque 3.7, il s'ensuit que

$$d \in \operatorname{acl}_L(M_0(aM_0)^c) \subseteq \operatorname{acl}_{L_P}(M_0(aM_0)^c) \subseteq \operatorname{acl}_{L_P}(aM_0). \blacksquare$$

Affirmation II : $d \in \operatorname{dcl}_{L_P}(a, e)$.
Soit σ un L_P-automorphisme qui fixe a, e, et soit $M_0' = \sigma(M_0)$. Choisissons une réalisation M_0'' de $\mathrm{tp}_{L_P}(M_0/a, e)$ indépendamment de $M_0 \cup M_0'$ sur a, e. En utilisant $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,\,|}_{e}^{L_P} M_0$ et $e \in M_0 \cap M_0' \cap M_0''$, nous obtenons les relations suivantes

$$a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,\,|}_{M_0}^{L_P} M_0M_0'',\ a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,\,|}_{M_0''}^{L_P} M_0M_0'',\ a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,\,|}_{M_0'}^{L_P} M_0'M_0'',\ a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,\,|}_{M_0''}^{L_P} M_0'M_0''.$$

En appliquant le Lemme 3.12 on obtient

$$a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,\,|}_{PM_0}^{L} PM_0M_0'',\ a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,\,|}_{PM_0''}^{L} PM_0M_0'',\ a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,\,|}_{PM_0''}^{L} PM_0'M_0'',\ a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,\,|}_{PM_0'}^{L} PM_0'M_0''.$$

Puisque $\mathrm{tp}_L(a/\operatorname{acl}_L(M_0P))$ est stationnaire, cela se traduit en termes de bases canoniques par

$$d = \mathrm{Cb}(\mathrm{tp}_L(a/\operatorname{acl}_L(M_0P))) = \mathrm{Cb}(\mathrm{tp}_L(a/\operatorname{acl}_L(M_0''P))) = \mathrm{Cb}(\mathrm{tp}_L(a/\operatorname{acl}_L(M_0'P))),$$

donc $\sigma(d) = d$, donc l'affirmation est prouvée. $\blacksquare$

Par définition de e, $a \mathop{\smile\hspace{-0.9em}\vert\hspace{0.5em}}_{e}^{L_P} M_0$. Comme $\mathrm{tp}_{L_P}(a/e)$ est stationnaire, $e \in M_0$, et $d \in \mathrm{dcl}_{L_P}(a, e)$, nous concluons que $\mathrm{tp}_{L_P}(d/e)$ est stationnaire par le Lemme 1.15. Par conséquent, $e' \in \mathrm{dcl}_{L_P}(e)$.

Affirmation III : $a \mathop{\smile\hspace{-0.9em}\vert\hspace{0.5em}}_{e'}^{L_P} M_0$. Par conséquent, $e \in \mathrm{acl}_{L_P}(e')$.

Par l'Affirmation I,

$$\begin{aligned} a \mathop{\smile\hspace{-0.9em}\vert\hspace{0.5em}}_{d}^{L_P} M_0P &\Rightarrow a \mathop{\smile\hspace{-0.9em}\vert\hspace{0.5em}}_{d}^{L_P} M_0d \\ &\Rightarrow a \mathop{\smile\hspace{-0.9em}\vert\hspace{0.5em}}_{de'}^{L_P} M_0 \quad \text{car } e' \in \mathrm{dcl}_{L_P}(M_0) = M_0. \end{aligned}$$

Par définition de e' nous avons $de' \mathop{\smile\hspace{-0.9em}\vert\hspace{0.5em}}_{e'}^{L_P} M_0$. En appliquant la transitivité on obtient l'affirmation. $\blacksquare$

Pour prouver $e \in \mathrm{dcl}_{L_P}(e')$, nous montrerons la stationnarité de $\mathrm{tp}_{L_P}(a/e')$ et appliquerons le Fait 1.8 *(iv)*. Par définition de e', $\mathrm{tp}_{L_P}(d/e')$ est stationnaire, puis par le Lemme 3.18, il suffirait de prouver que $\mathrm{tp}_{L_P}(a/de')$ est stationnaire. Cependant, l'Affirmation I implique $a \mathop{\smile\hspace{-0.9em}\vert\hspace{0.5em}}_{d}^{L_P} e'$, donc il suffit de prouver que $p = \mathrm{tp}_{L_P}(a/d)$ est stationnaire. Soit N une L_P-sous-structure élémentaire de M contenant d, et supposons que $p \subseteq p_1, p_2$ sont des extensions non bifurquantes de p à N. Soient a_1, a_2 des réalisations de p_1, p_2 respectivement. Par le Lemme 3.12, $a_i \mathop{\smile\hspace{-0.9em}\vert\hspace{0.5em}}_{dP}^{L} NP$. Puisque $\mathrm{tp}_{L_P}(a_i/d) = \mathrm{tp}_{L_P}(a/d)$ pour $i = 1, 2$, et $a \mathop{\smile\hspace{-0.9em}\vert\hspace{0.5em}}_{d}^{L} dP$ (par définition de d et monotonie), nous obtenons que pour $i = 1, 2,$ $a_i \mathop{\smile\hspace{-0.9em}\vert\hspace{0.5em}}_{d}^{L} NP$. Cela implique à son tour $Na_i \mathop{\smile\hspace{-0.9em}\vert\hspace{0.5em}}_{N}^{L} P$, puisque $d \in N$. Puisque $N = \widehat{N}$, par la Remarque 3.11 *(ii)*, $N \mathop{\smile\hspace{-0.9em}\vert\hspace{0.5em}}_{P\cap N}^{L} P$. En appliquant la transitivité on obtient $Na_i \mathop{\smile\hspace{-0.9em}\vert\hspace{0.5em}}_{N\cap P}^{L} P$, donc $N(a_i)$ et NP sont linéairement disjoints sur N. Cela implique $\widehat{N(a_i)} = N(a_i)$. Puisque $\mathrm{tp}_L(a/d)$ est stationnaire, $\mathrm{tp}_L(a_1N) = \mathrm{tp}_L(a_2N)$. Nous pouvons alors appliquer le Lemme 3.8 pour obtenir que $\mathrm{tp}_{L_P}(a_1N) = \mathrm{tp}_{L_P}(a_2N)$. $\square$

Lemme 3.20. *Soit $a \in M$, $A \subseteq M$. Si $A = \widehat{A}$ et $\mathrm{tp}_{L_P}(a/A)$ est stationnaire, alors $\mathrm{tp}_L(a/A)$ est stationnaire.*

Démonstration. Supposons par contradiction que $\mathrm{tp}_L(a/A)$ n'est pas stationnaire et soit $k = \langle A\rangle$. L'extension $k(a)|k$ n'est pas primaire : il existe un certain $\alpha \in k(a)$ tel que $\alpha \in \mathrm{acl}_L(k) \setminus \mathrm{dcl}_L(k)$. Notons aussi que $\widehat{k} = k$. Par le Corollaire 3.14, $\alpha \in \mathrm{acl}_{L_P}(k) \setminus \mathrm{dcl}_{L_P}(k)$, contredisant la stationnarité de $\mathrm{tp}_L(a/A)$. $\square$

Lemme 3.21. *Supposons $d \in M$ tel que $d = \widehat{d}$, et soit $e \in \mathrm{dcl}_{L_P}^{\mathrm{eq}}(d)$ un imaginaire tel que $\mathrm{tp}_{L_P}(d/e)$ est stationnaire. Soit $d' \models \mathrm{tp}_{L_P}(d/e)$ avec $d \mathop{\smile\hspace{-0.9em}\vert\hspace{0.5em}}_{e}^{L_P} d'$. Soit $B_1' = \mathrm{dcl}_{L_P}^{\mathrm{eq}}(e) \cap M$*

et $B_1 = \mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}_{L_P}(e) \cap M$. *Alors* $\langle d \rangle$ *et* $\langle d' \rangle$ *sont linéairement disjoints sur* B_1', *en particulier* $d \downfree^{L}_{B_1} d'$.

Démonstration. Nous notons $p(x) = \mathrm{tp}_{L_P}(d/e)$,
Affirmation : Soit $d'' \models p|\{d, d'\}$, alors $d \downfree^{L}_{d'} d''d'$ et $d \downfree^{L}_{d''} d''d'$.
Par définition de d'', nous avons $d \downfree^{L_P}_{d'} d''d'$, et par hypothèse $d \downfree^{L_P}_{e} d'$. De plus, $e \in \mathrm{dcl}_{L_P}(d'') \cap \mathrm{dcl}_{L_P}(d')$, donc les deux relations $d \downfree^{L_P}_{d''} d'$, $\quad d \downfree^{L_P}_{d'} d''$ sont vraies. À partir de la première relation, nous voyons que $dd'' \downfree^{L_P}_{d''} d'd''$, et par le Lemme 3.11, $\widehat{dd''} \downfree^{L}_{\widehat{d''}} \widehat{d'd''}$. Puisque d, d' et d'' sont indépendants sur e, et e est définissable sur chacun de d, d', d'', la stationnarité de $\mathrm{tp}_{L_P}(d/e)$ implique celle de $\mathrm{tp}_{L_P}(d/d''), \mathrm{tp}_{L_P}(d/d')$. Il s'ensuit par 3.20 que $\mathrm{tp}_L(d/d''), \mathrm{tp}_L(d/d')$ sont stationnaires. Alors, comme $\widehat{d''} = d''$, nous obtenons $d \downfree^{L}_{d''} d''d'$, donc, le corps de définition du lieu de d sur $\langle d''d' \rangle$ est contenu dans $\langle d'' \rangle$. L'autre partie de l'affirmation s'obtient de manière similaire, en utilisant que $\widehat{d'} = d'$ au lieu de cela, ce qui donne que le corps de définition du lieu de d sur $\langle d''d' \rangle$ est contenu dans $\langle d' \rangle$. ■
Nous obtenons donc

$$\mathrm{Cb}(\mathrm{tp}_L(d/d')) = \mathrm{Cb}(\mathrm{tp}_L(d/d'')) \subset \mathrm{dcl}_L(d') \cap \mathrm{dcl}_L(d'').$$

Mais d' et d'' sont indépendants sur e, $\mathrm{dcl}_{L_P}(d') = \mathrm{dcl}_L(d')$, et $\mathrm{dcl}_{L_P}(d'') = \mathrm{dcl}_L(d'')$, donc $\mathrm{Cb}(\mathrm{tp}_L(d/d')) \subseteq \mathrm{dcl}^{eq}_{L_P}(e) \cap M = B_1'$. □

Lemme 3.22. *Soit* $e \in (M, P)^{\mathrm{eq}}$, *et* $B_0 = \mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}_{L_P}(e) \cap P$. *Alors pour tout* $c \in P$, $\mathrm{tp}_{L_P}(c/B_0 e)$ *est finiment satisfaisable dans* B_0.

Démonstration. Soit $a \in M$ tel que $e = f(a)$ pour une certaine fonction définissable. Puisque $\widehat{aP} = \hat{a}P$, par le Lemme 3.8 $\mathrm{tp}_{L_P}(a/a^c) \vdash \mathrm{tp}_{L_P}(a/P)$. Nous prouverons que $\mathrm{tp}_{L_P}(a/P)$ est stationnaire, cela impliquerait par le Lemme 1.15 que $\mathrm{tp}_{L_P}(e/P)$ est stationnaire. Supposons que non, donc nous pouvons trouver $b_1, \ldots, b_n \in M$ et des formules $\varphi(x, b_i)$, qui distinguent entre les extensions non bifurquantes de $\mathrm{tp}_{L_P}(a/a^c)$ à M. En d'autres termes, elles définissent une partition de l'ensemble des réalisations de $\mathrm{tp}_{L_P}(a/a^c)$. Par saturation de M sur P, nous pouvons supposer

$$a \downfree^{L_P}_{a^c} b_1, \ldots, b_n, P.$$

Si a' est une autre réalisation de $\mathrm{tp}_{L_P}(a/a^c)$, telle que $a' \downfree^{L_P}_{a^c} b_1, \ldots, b_n, P$, alors il existe un automorphisme de M qui fixe $\mathrm{acl}_{L_P}(P, b_1, \ldots, b_n)$ et envoie a sur a'. Cela implique

$\mathrm{tp}_{L_P}(a'/P) = \mathrm{tp}_{L_P}(a/P)$.
Définissons $e^c = \mathrm{Cb}(\mathrm{tp}_{L_P}(e/P))$. Notons que

$$e^c \in \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}_{L_P}(e) \cap \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}_{L_P}(P) = \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}_{L_P}(e) \cap P.$$

Par définition de e^c nous avons $e \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{L_P}_{\mathrm{acl}_L(e^c)} P$, et la preuve du Lemme 3.13 montre que $\mathrm{acl}_L(e^c) = B_0$. Donc, $\mathrm{tp}_{L_P}(e/P)$ est stationnaire et est une extension non bifurquante de $\mathrm{tp}_{L_P}(e/B_0)$. Cela implique la définissabilité de $\mathrm{tp}_{L_P}(e/P)$ sur B_0. Ainsi, pour toute L_P^{eq}-formule $\psi(x,y)$ avec des paramètres dans B_0, il existe une formule $d\psi(y)$ avec des paramètres dans B_0 telle que pour tout $c \in P$, $M \models \psi(e,c)$ ssi $M \models d\psi(c)$. Par le Lemme 3.3, nous pouvons supposer que $d\psi(y)$ est une L-formule. Puisque nous avons aussi que $B_0 \prec P$ au sens de L, nous avons que pour tout $c \in P$, si $P \models \psi(e,c)$ alors $P \models d\psi(c)$, ce qui implique qu'il existe $b \in B_0$ tel que $P \models d\psi(b)$, et donc $M \models \psi(e,b)$. □

4 Élimination Faible des Imaginaires

Tout au long de cette section nous maintiendrons notre notation et nos conventions de la Section 3. Nous posons $T = ACF_p$, et T_P la théorie des belles paires de modèles de T. Nous avons que $(M,P) \models T_P$ est saturé.

Définition 4.1. Soit G un groupe algébrique et X une variété algébrique tous deux définis sur $k \subseteq M$. Une action k-rationnelle est une action de groupe $\alpha : G \times X \to X$ telle que pour tout $g \in G$, l'application $\alpha(g,\cdot) : X \to X$ est une application k-rationnelle.

Définition 4.2. Une action de groupe définissable est un triplet $((G,\cdot),X,\alpha)$, où $(G,\cdot)$ est un groupe définissable, $X \subseteq M$ un ensemble définissable et $\alpha : G \times X \to X$ une action de groupe dont le graphe est définissable. Si l'action est *transitive* sur X, c'est-à-dire, pour tous $a,b \in X$ il existe $g \in G$ tel que $\alpha(g,a) = b$, le triplet est appelé un *espace homogène définissable*. De plus, si l'action est *strictement transitive (ou régulière)*, c'est-à-dire, $\alpha(g,x) = x$ ssi $g = e$, il sera appelé un *espace homogène principal définissable* (ou EHP).

Nous abuserons de la notation et noterons $\alpha(g,a)$ comme $g \cdot a$. Dans notre contexte, comme $T = ACF_p$, nous obtenons le fait suivant du Théorème 7.4.14 de [7].

Fait 4.3. *Si $G \subseteq M^n$ est un groupe L-définissable, alors G est définissablement isomorphe à un groupe algébrique.*

Proposition 4.4. *Soit $e \in (M,P)^{\mathrm{eq}}$. Alors il existe : un groupe algébrique connexe G, une variété irréductible V sur P, et une action rationnelle de G sur V, définissable sur P, tels que*

(i) L'action de $G(P)$ sur $V(M)$ est génériquement libre : si $a \in V(M)$ est un point générique de V sur P, et $g \in G(P)$ n'est pas l'identité, alors $g \cdot a \neq a$.

(ii) Pour un certain $a \in V(M)$ générique sur P, si r est un paramètre canonique pour l'orbite $X = \{g \cdot a\ ,\ g \in G(P)\}$, alors $e \in \mathrm{dcl}_{L_P}(r)$ et $r \in \mathrm{acl}_{L_P}(e)$.

La preuve de la Proposition 4.4 nécessitera quelques résultats.

Lemme 4.5. *Soit $e \in (M,P)^{\mathrm{eq}}$. Il existe $d' \in M$ tel que $\mathrm{tp}_{L_P}(d'/e)$ est stationnaire et P-interne, et de plus $e \in \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}_{L_P}(d')$.*

Démonstration. Soit $a \in M$ tel que $a = \hat{a}$ et $e = f(a)$ pour une certaine fonction $\varnothing$-interprétable. Par le Lemme 1.10 nous pouvons supposer que $\mathrm{tp}_{L_P}(a/e)$ est stationnaire, donc $e = \mathrm{Cb}(\mathrm{tp}_{L_P}(a/M_0))$, où M_0 est une L_P-sous-structure élémentaire quelconque de M telle que $e \in {M_0}^{\mathrm{eq}}$ et $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\perp}^{L_P}_{e} M_0$. Soit $d = \mathrm{Cb}(\mathrm{tp}_L(a/\,\mathrm{acl}_L(M_0P))$. Par le Lemme 3.19, $e = \mathrm{Cb}(\mathrm{tp}_{L_P}(d/M_0))$, donc $d \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\perp}^{L_P}_{e} M_0$. Puisque $M_0 \preceq M$, $\mathrm{tp}_{L_P}(d/M_0)$ est stationnaire, $\mathrm{tp}_{L_P}(d/e)$ est stationnaire et presque P-interne. En remplaçant d par un nombre fini de réalisations indépendantes de $\mathrm{tp}_{L_P}(d/e)$, par le Fait 1.8 *(v)*, nous pouvons supposer sans perte de généralité que $e \in \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(d)$, ou que $e = g(d)$ pour une certaine fonction définissable g. Par le Lemme 1.17, il existe $d' \in \mathrm{dcl}_{L_P}(d)$, un code pour un ensemble fini de réalisations de $\mathrm{tp}_{L_P}(d/e)$, tel que $d \in \mathrm{acl}_{L_P}(d')$ et $\mathrm{tp}_{L_P}(d'/e)$ est stationnaire et P-interne. Alors comme $d \in \mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}_{L_P}(d')$, il existe une formule $\varphi(x,d')$ isolant $\mathrm{tp}_{L_P}(d/d')$; donc $M \models \forall x \varphi(x,d') \to g(x) = e$, donc $e \in \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(d')$. □

Lemme 4.6. *Il existe un tuple $d \in M$, une fonction L_P-définissable f (sur $\varnothing$), une $L_P(e)$-formule $\psi(x)$, et une fonction $L_P(e)$-définissable h tels que*

(i) $f(d) = e$.

(ii) $\psi(x) \in \mathrm{tp}_{L_P}(d/e)$.

(iii) $M \models \forall x, x'(\psi(x) \wedge \psi(x') \to \exists c(P(c) \wedge h(x,c) = x')$.

Démonstration. Soit d' comme dans le Lemme 4.5. Alors $p = \mathrm{tp}_{L_P}(d'/e)$ est stationnaire, P-interne, et $e = \mathrm{Cb}(p)$. Par le Lemme 1.18, il existe un tuple d consistant en un nombre fini de réalisations de p, et une fonction g e-définissable telle que pour toute réalisation d'' de p, il existe un tuple $c_{d''} \in P$ tel que $d'' = g(d, c_{d''})$. Clairement $e \in \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}_{L_P}(d)$, donc nous pouvons trouver une fonction f L_P-définissable telle que *(i)* est satisfait. Si d_1, d_2

réalisent $\mathrm{tp}_{L_P}(d/e)$, alors il existe une fonction h e-définissable et un tuple $c \in P$ tels que $d_1 = h(d_2, c)$. En appliquant la compacité on obtient une L_P-formule $\psi \in \mathrm{tp}_{L_P}(d/e)$ telle que pour tous deux d_1, d_2 satisfaisant ψ, il existe $c \in P$ tel que $h(d_1, c) = d_2$, ce qui prouve directement *(ii)* et *(iii)*. Notons que $\mathrm{tp}_{L_P}(d/e)$ reste P-interne. $\square$

Lemme 4.7. *Dans le Lemme 4.6, d peut être choisi tel que (i),(ii),(iii) sont satisfaites, et* $d \perp\!\!\!\perp_e^{L_P} P$.

Démonstration. Soit ψ comme dans le Lemme 4.6. Soit $\chi(x, y)$ une $L_P(e)$-formule qui exprime la conjonction de $x^c = y$, $\psi(x)$ et $f(x) = e$. Considérons la $L_P(e)$-formule $\theta(y)$ donnée par $\exists x(\chi(x, y))$. Puisque $M \models \theta(d^c)$, par le Lemme 3.22, il existe $d_0 \in \mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}_{L_P}(e) \cap P$ tel que $M \models \theta(d_0)$. Par conséquent, il existe d_1 tel que $M \models \chi(d_1, d_0)$, donc $d_1 \perp\!\!\!\perp_e^{L_P} P$. $\square$

Notation : Pour le reste de cette section, fixons d comme dans le Lemme 4.7. Par la Remarque 3.7 $d^c \in \mathrm{dcl}_{L_P}(d)$, donc nous pouvons aussi supposer désormais que $d = \widehat{d}$, car toutes les propriétés des Lemmes 4.6, 4.7, et 4.8 restent vraies après avoir adjoint d^c à d. Désormais, posons

$$B = \mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}_{L_P}(e),$$
$$B_1 = B \cap M,$$
$$B_0 = B \cap P.$$

Lemme 4.8. $\mathrm{tp}_{L_P}(d/B)$ *est isolé.*

Démonstration. Par stabilité de $Th(M^{\mathrm{eq}})$, il existe $M_1 \preceq M$, un modèle premier sur Bd et $M_0 \preceq M_1$ un modèle premier sur B.
Affirmation : $B_0 = M_0 \cap P = M_1 \cap P$: Il est clair que $B \subseteq M_0, M_1$, une inclusion suit. Réciproquement, si $a \in M_0 \cap P$, alors $\mathrm{tp}_{L_P}(a/B)$ est isolé, ce qui est une extension non bifurquante de $\mathrm{tp}_{L_P}(a/e)$, donc $\mathrm{tp}_{L_P}(a/e)$ est aussi isolé, et en appliquant le Lemme 3.22, il peut être réalisé par un certain $a' \in B_0$. En particulier, cela implique $a \in \mathrm{acl}_{L_P}(e)$. La preuve pour la seconde égalité est similaire, soit $a \in M_1 \cap P$, alors $\mathrm{tp}_{L_P}(a/Bd)$ est isolé. Rappelons que $d \perp\!\!\!\perp_e^{L_P} P$, donc $\mathrm{tp}(a/Bd)$ ne bifurque pas sur $\mathrm{tp}_{L_P}(a/e)$, qui est alors isolé, et en appliquant le Lemme 3.22 on obtient le résultat.
Soit ψ comme dans le Lemme 4.6, et choisissons $d' \in M_0$ tel que $M \models \psi(d')$. En appliquant le Lemme 4.6 *(iii)* à l'intérieur du modèle M_1, il existe $c \in P \cap M_1 = B_0$ tel que $d \in \mathrm{dcl}_{L_P}(d', c) \subseteq M_0$, donc par définition d'un modèle premier, $\mathrm{tp}_{L_P}(d/B)$ est isolé. $\square$

Lemme 4.9. *Soit X l'ensemble des réalisations de* $\mathrm{tp}_{L_P}(d/B)$. *Il existe : un groupe algébrique connexe G défini sur* B_0 *et une action régulière* $L_P(e)$*-définissable de* $G(P)$ *sur* X. *De plus, si r est un paramètre canonique pour l'EHP* $(G(P), X)$, *alors* $e \in \mathrm{dcl}_{L_P}(r)$ *et* $r \in \mathrm{acl}_{L_P}(e)$.

Démonstration. Par le Lemme 4.8, X est L_P-définissable sur B. Définissons

$$C = \{c \in P,\ \exists d'(d' \in X \wedge h(d,c) = d')\},$$

qui est non vide par le Lemme 4.6 *(iii)*, et $L(B_0)$-définissable par le Lemme 3.3. Considérons maintenant la relation d'équivalence E dans C définie par $M \models E(c_1, c_2)$ si et seulement si $M \models h(d, c_1) = h(d, c_2)$. Dans C/E nous pouvons définir une fonction $L_P(e)$-interprétable $h'(d, c/E)) = h(d, c)$. Par les Lemmes 4.7 et 4.8 $d \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^{L_P}_{B} P$, donc tous les éléments de X ont le même L_P-type sur BP. Puisque E est contenu dans une puissance quelconque de P, il est $L(B_0)$-définissable, donc il ne dépend pas du choix de d. Cela implique que pour tous $c_1, c_2 \in C$ la valeur de $h(h(d, c_1), c_2)$ est définie, et en prenant les classes modulo E, il existe un unique c_3/E tel que $h'(h'(d, c_1/E), c_2/E) = h'(d, c_3/E)$, nous définissons une opération binaire sur C/E comme $(c_1/E) \cdot (c_2/E) = c_3/E$. Une fois encore par le Lemme 3.3, cette opération est $L(B_0)$-définissable. De plus, par la Remarque 3.4, nous pouvons supposer sans perte de généralité que C/E contient des tuples réels.
Affirmation : $(C/E, \cdot)$ est un groupe B_0-définissable.
Soient $c_1, c_2, c_3 \in C/E$. Pour vérifier l'associativité, remarquons que

$$h'(d, (c_1c_2)c_3) = h'(h'(d, c_1c_2), c_3) = h'(h'(h'(d, c_1), c_2), c_3),$$

de plus, puisque $h'(d, c_2c_3) = h'(h'(d, c_2), c_3))$ et $\mathrm{tp}_{L_P}(h'(d, c_1)/BP) = \mathrm{tp}_{L_P}(d/BP)$, nous obtenons

$$h'(d, c_1(c_2c_3)) = h'(h'(d, c_1), c_2c_3) = h'(h'(h'(d, c_1), c_2), c_3)).$$

Pour vérifier l'existence d'un élément neutre, par le Lemme 4.6 *(iii)*, il existe $c' \in P$ tel que $h(d, c') = d$. Alors, pour tout $d' \in X$, $h'(d', c') = d'$, en particulier

$$h'(d, c_1c') = h'(h'(d, c_1), c') = h'(d, c_1) \Rightarrow c_1c' = c_1.$$

Pour vérifier l'existence d'inverses, remarquons que puisque $h(d, c_1) \in X$, il existe un L_P-automorphisme σ fixant BP point par point tel que $h(d, c_1) = \sigma(d)$, ce qui implique $h'(\sigma^{-1}(d), c_1) = d$. Par le Lemme 4.6 *(iii)*, il existe un unique c_1' tel que $h'(d, c_1') = \sigma^{-1}(d)$, donc

$$h'(d, c_1'c_1) = h'(h'(d, c_1'), c_1) = h'(\sigma^{-1}(d), c_1) = d = h'(d, c'),$$
$$h'(d, c_1c_1') = h'(h'(d, c_1), c_1') = h'(\sigma(d), c_1') = d = h'(d, c'),$$

donc, $c_1c_1' = c_1'c_1 = c'$. ■

Par l'affirmation précédente et par le Fait 4.3, C/E est B_0-définissablement isomorphe à un certain groupe algébrique G sur B_0. Nous pouvons alors induire une action $L(B_0)$-définissable de $G(P)$ sur X en utilisant l'application h' : si $F : G \to C/E$ est un isomorphisme, alors pour $(g, d) \in G \times X$, définissons $g \cdot d = h'(d, F(g))$. Par le Lemme 4.6 *(iii)* et par définition de E, cette action est régulière. Comme X est l'ensemble des réalisations d'un type stationnaire, $G(P)$ doit être connexe (en tant que groupe L_P-définissable), donc connexe en tant que groupe algébrique. Clairement, l'EHP $(G(P), X)$ est L_P-définissable sur B, cela implique que si r est un paramètre canonique pour $(G(P), X)$, alors $r \in \mathrm{acl}_{L_P}(e)$. De plus, si σ est un L_P-automorphisme fixant r, alors il permute les réalisations de $\mathrm{tp}_{L_P}(d/B)$, et par stationnarité de $\mathrm{tp}_{L_P}(d/e)$ nous avons $e = \mathrm{Cb}(\mathrm{tp}_{L_P}(d/B))$, donc $\sigma(e) = e$, donc $e \in \mathrm{dcl}_{L_P}(r)$, complétant la preuve. □

L'ensemble X du Lemme 4.9 sera identifié avec une orbite générique de l'action de $G(P)$ sur une variété quelconque $V(M)$. Nous énonçons d'abord la Proposition 2.2 de [4].

Lemme 4.10. *Soit G un groupe définissable connexe avec une action générique sur l'ensemble des réalisations X_1 d'un L-type stationnaire q, c'est-à-dire, pour tout $g \in G$ générique et pour d réalisant $q|g$, $g \cdot d$ est défini et réalise q, et pour tous g_1, g_2, d indépendants, $g_1 \cdot (g_2 \cdot d) = (g_1 g_2) \cdot d$ quand l'action est définie. Il existe alors un ensemble type-définissable Y, un plongement définissable $X_1 \subseteq Y$, et une action définissable de G sur Y, étendant l'action générique de G sur X_1. De plus, pour tout $y \in Y$ il existe $g \in G$ et $d \models q$ tels que $y = g \cdot d$.*

Démonstration. Considérons l'ensemble des paires (g, d) avec $g \in G$, $d \models q$. Définissons une relation d'équivalence sur ces paires par : $(g, d) \sim (g', d')$ si pour tout $h \in G$ générique tel que $(hg) \cdot d = (hg') \cdot d'$. Soit Y l'ensemble des classes, ses éléments sont notés $[g, d]$. Si $(hg_2) \cdot d = (hg_2') \cdot d'$ est vraie pour h générique, alors, puisque hg_1 est aussi générique, il est aussi vrai que $(hg_1g_2) \cdot d = (hg_1g_2') \cdot d'$, donc nous pouvons définir une action de G sur Y par $g_1 \cdot [g_2, d] = [g_1g_2, d]$, et identifier chaque $d \models q$ avec $[1_G, d]$. Pour vérifier la dernière affirmation, soit $[g, d] \in Y$, et soit h un générique de G, indépendant de d, alors $h[g, d] = [hg, d] = [1, hg \cdot d]$, donc $[g, d] = h^{-1}[1, hg \cdot d]$. □

Lemme 4.11. *Pour X comme dans le Lemme 4.9 il existe une variété irréductible Y définie sur B_1, et une action rationnelle transitive de G sur Y, définie sur B_1, telle que $X \subseteq Y$, d est un point générique de Y sur B_1, et l'action de G sur Y se restreint à l'action donnée de $G(P)$ sur X.*

Démonstration. Rappelons que pour $g \in G(P)$, $d \in X$, $g \cdot d$ est e-définissable, cela signifie $g \cdot d \in \mathrm{dcl}_{L_P}(g, d, e)$. Puisque $e \in \mathrm{dcl}_{L_P}(d)$, alors $g \cdot d \in \mathrm{dcl}_{L_P}(g, d) = \mathrm{dcl}_L(\widehat{g, d})$ par le Lemme 3.13. Mais $\mathrm{dcl}_L(\widehat{g, d}) = \mathrm{dcl}_L(g, d)$ par le Lemme 3.9 *(ii)*. Par conséquent, $g \cdot d \in \mathrm{dcl}_L(g, d)$.

Affirmation : $d \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\!\;|}^{L}_{B_0} g$.

Si $e^c = \mathrm{Cb}(\mathrm{tp}_{L_P}(e/P))$, alors $e \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\!\;|}^{L_P}_{e^c} P$, et par le Lemme 4.7, $d^c \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\!\;|}^{L_P}_{e} P$. En appliquant la transitivité on obtient $d^c \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\!\;|}^{L_P}_{e^c} P$, et puisque tout est dans P, nous pouvons restreindre notre langage pour obtenir $d^c \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\!\;|}^{L}_{e^c} P$. Par la preuve du Lemme 3.13, $B_0 = \mathrm{acl}_L(e^c)$, donc $d^c \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\!\;|}^{L}_{B_0} P$ et par définition de d^c nous avons $d \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\!\;|}^{L}_{d^c} P$. L'affirmation suit car $g \in P$. ∎

Maintenant, en travaillant dans L, puisque $e \in \mathrm{dcl}_{L_P}(d) = \mathrm{dcl}_L(\widehat{d})$, $B_1 \in \mathrm{acl}_L(d)$, donc l'affirmation précédente donne $dB_1 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\!\;|}_{B_0} g$. Alors, si g est générique sur B_0, alors il est générique sur dB_1. L'action est génériquement régulière et transitive : étant donnés $d_1, d_2 \in X$ indépendants, il existe un unique $g \in G(P)$ tel que $g \cdot d_1 = d_2$. Donc, en travaillant dans L_P, $RM(G) = RM(X)$, et si $g \in G$, $d \in X$ sont indépendants sur e, alors parce que l'action est définie sur e, nous avons que $g \in \mathrm{dcl}_L(g \cdot d, d)$, de sorte que nous devons avoir $RM(g \cdot d, d/e) = 2RM(G)$, ce qui implique $g \cdot d \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\!\;|}^{L_P}_{e} d$. Par le Lemme 3.21, $g \cdot d \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\!\;|}^{L}_{B_1} d$.

Nous avons une action définissable de $G(P)$ sur l'ensemble L_P-définissable X, et l'action est donnée par une application $G \times X \to X$ qui est $L(B_1)$-définissable dans T. En passant à la clôture de Zariski, nous obtenons une action générique du groupe algébrique $G(M)$ sur l'ensemble X_1 des éléments génériques (sur B) de la clôture de Zariski de X. Par le Lemme 4.10, il existe un $Y \supseteq X_1$ type-définissable (au sens de L, et sur B_1) tel que G agit sur Y d'une manière qui se restreint à l'action générique de G sur X_1. De plus, pour tout $y \in Y$ il existe $g \in G$ et $d \in X_1$ tel que $y = g \cdot d$, donc l'action de G sur Y est transitive, alors Y a un unique type générique par connexité de G, et ce doit être en effet $\mathrm{tp}_L(d/B_1)$. Cela prouve que d est un générique de Y sur B_1. Nous affirmons que Y est aussi définissable : Soit $\varphi(x, y)$ une certaine $L(B_1)$-formule définissant $x \in G \cdot y$, et soit E la relation d'équivalence donnée par yEy' ssi $M \models \forall x \varphi(x, y) \leftrightarrow \varphi(x, y')$, par transitivité, pour tout $y \in Y$ nous avons $[y]_E = Y$, maintenant par type-définissabilité de Y sur B_1, Y est fixé par tout $\sigma \in \mathrm{Aut}(M/B_1)$, donc l'imaginaire $[y]_E$ est aussi fixé, ce qui implique que $[y]_E$ est B_1-définissable, donc Y est B_1-définissable. Puisque $X \subseteq X_1 \subseteq Y$, et l'action de G sur Y se restreint à l'action générique sur X_1, alors elle se restreint à l'action de G sur X qui a été définie dans le Lemme 4.9. Finalement, par le Fait 4.3,

$(G, Y, \cdot)$ est B_1-définissablement isomorphe à $(G', Y', \cdot')$, où G' est un groupe algébrique, Y' une variété irréductible, et $\cdot'$ est une action B_1-rationnelle. $\square$

Preuve de la Proposition 4.4

Démonstration. Pour $e \in M^{\mathrm{eq}}$, d, G, Y comme dans le Lemme 4.11, choisissons un $b \in B_1$ fini tel que $(G, Y, \cdot)$ est définissable sur b. Réécrivons Y comme Y_b. Par le Lemme 4.7, $d \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^{L_P}_{e} P$, ensemble avec $e \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^{L_P}_{B_0} P$ implique que $bd \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^{L_P}_{B_0} P$ (rappelons $b \in \mathrm{acl}_{L_P}(e)$). Puisque $e \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^{L_P}_{e^c} P$, et $(bd)^c \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^{L_P}_{e} P$, en appliquant la transitivité on obtient $(bd)^c \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^{L_P}_{e^c} P$, et puisque tout est dans P, nous pouvons restreindre notre langage pour obtenir $(bd)^c \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^{L}_{e^c} P$. Par la preuve du Lemme 3.13, $B_0 = \mathrm{acl}_L(e^c)$, donc $(bd)^c \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^{L}_{B_0} P$ et par définition de $(bd)^c$ nous avons $bd \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^{L}_{(bd)^c} P$, en appliquant la transitivité une fois de plus on obtient $bd \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^{L_P}_{B_0} P$. Soient V, Z les lieux de bd et b sur B_0, respectivement, et considérons la projection $f : V \to Z$ envoyant bd sur b, puis notons que $f^{-1}(b) = Y_b$. Alors par compacité, il existe un sous-ensemble de Zariski ouvert U dans Z, aussi défini sur B_0, tel que G agit rationnellement dans $f^{-1}(U)$ et cette action restreinte à Y_b coïncide avec celle définie dans le Lemme 4.9. Cela prouve *(i)*, car tout $a \in V$ générique a le même L-type sur B_1 que bd, et l'action dans le Lemme 4.9 est régulière par construction. Puisque $f^{-1}(U)$ est toujours une variété, en réduisant V nous pouvons sans perte de généralité poser $V = f^{-1}(U)$, et par $bd \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^{L}_{B_0} P$, nous concluons que bd est un point générique de V sur P, donc *(ii)* suit en appliquant le Lemme 4.9. $\square$

Nous énonçons notre résultat principal, qui suivra de la Proposition 4.4.

Corollaire 4.12. *Il existe un ensemble de sortes $\mathcal{S} \subseteq L^{\mathrm{eq}}$, tel que T_P a l'élimination faible des imaginaires dans le langage obtenu en ajoutant $\mathcal{S}$ à L.*

Démonstration. Soient G, V comme dans la Proposition 4.4, et soit $c \in P$ engendrant un corps sur lequel $(G, V, \cdot)$ sont définis. Il existe une variété Z définie sur le corps premier telle qu'il existe des variétés $\mathcal{G}, \mathcal{V}$, avec des applications régulières surjectives vers Z, et pour chaque $b \in Z$, la fibre $\mathcal{G}_b$ est un groupe algébrique qui agit sur $\mathcal{V}_b$, et de plus $\mathcal{G}_c = G$ et $\mathcal{V}_c = V$. Pour chaque $e \in M^{\mathrm{eq}}$, nous définissons une sorte $S_{(\mathcal{G},\mathcal{V},Z,e)}$ de la manière suivante : soit $W_e = \cup\{\mathcal{V}_b, b \in Z(P)\}$, et définissons une relation d'équivalence sur W comme $w_1 \sim w_2$ ssi pour un certain $b \in Z(P)$, $w_1, w_2 \in \mathcal{V}_b$ et il existe $g \in \mathcal{G}_b(P)$ tel que $w_1 = g \cdot w_2$. Nous interprétons les éléments de $S_{(\mathcal{G},\mathcal{V},Z,e)}$ comme les classes de W modulo $\sim$, qui sont à leur tour des représentants de chaque orbite de l'action fibre par fibre de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{V}$. Par la Proposition 4.4, pour tout $e \in M^{eq}$, il existe $r \in S_{(\mathcal{G},\mathcal{V},Z,e)}$, tel que $e \in \mathrm{dcl}_{L_P}(r)$ et $r \in \mathrm{acl}_{L_P}(e)$. $\square$

Références

[1] I. Ben-Yaacov, A. Pillay , E. Vassiliev , Lovely pairs of models, Annals of Pure and Applied Logic 122 (2003) 235-261.

[2] S. Buechler . Pseudoprojective strongly minimal sets are locally projective, Journal of Symbolic Logic 56 (1991) 1184-1194.

[3] F. Delon . Élimination des quantificateurs dans les paires de corps algébriquement clos. Confluentes Mathematici, Vol. 4, No. 2 (2012) 1250003 , 1-11.

[4] E. Hrushovski. Locally modular regular types, in J.T Baldwin (Ed.), Classification Theory, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1292, Springer, 1987.

[5] H.J. Keisler. Complete theories of algebraically closed fields with distinguished subfields, Michigan Mathematics Journal. 11 (1964) 71-81.

[6] S. Lang. Introduction to Algebraic Geometry. Interscience (1958), 62.

[7] D. Marker, Introduction to Model Theory, Springer (2002), 273-277.

[8] A. Pillay. Geometric Stability Theory, Oxford University Press (1996).

[9] A. Pillay. Imaginaries in pairs of algebraically closed fields. Annals of Pure and Applied Logic 146 (2007) 13-20.

[10] A. Pillay, E. Vassiliev, Imaginaries in beautiful pairs. Illinois Journal of Mathematics 48 (2004) 759-768.

[11] B. Poizat. Stable Groups, American Mathematical Society, Providence, RI (2001)

[12] B. Poizat. Une théorie de Galois imaginaire, Journal of Symbolic Logic 48 (1983) 1151-1170.

[13] K. Tent , M Ziegler. A course in Model Theory, Cambridge University Press (2012)