Université de Paris **(Date : 09/11/2020)**

UFR Mathématiques

Théorie des modèles TD4

Professor: T. Servi Juan Ignacio Padilla, M2 LMFI

Exercice 0.1 Considérer l'ensemble ordonné $\mathcal{R} = \langle \mathbb{R}, < \rangle$, et le sous-ensemble $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$. Décrire $\mathrm{acl}_{\mathcal{R}}(\mathbb{Q})$.

Solution : $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}$ sont tous deux des ordres linéaires denses sans extrémités, et il est clair que $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$. On va utiliser le fait que DLO élimine les quantificateurs pour montrer que $\mathbb{Q} \preceq \mathbb{R}$. Soit $\bar{q} \in \mathbb{Q}$ et soit $\phi(x, \bar{y})$ une $\{<\}$-formule. Soit $\psi(\bar{y})$ une formule sans quantificateur telle que $\mathsf{DLO} \models \forall \bar{y}(\exists x \phi(x, \bar{y}) \leftrightarrow \psi(\bar{y}))$. Alors on a que

$$\mathbb{R} \models \exists x \phi(x, \bar{q})$$

$$\mathbb{R} \models \psi(\bar{q})$$

$$\mathbb{Q} \models \psi(\bar{q}) \quad \text{puisque } \psi \text{ est sans quantificateur}$$

$$\mathbb{Q} \models \exists x \phi(x, \bar{q}) \quad \text{puisque } \mathbb{Q} \models \mathsf{DLO}$$

Donc par Tarski-Vaught, $\mathbb{Q} \preceq \mathbb{R}$. Puis par une remarque faite en cours, $\mathrm{acl}_{\mathbb{R}}(\mathbb{Q}) = \mathrm{acl}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$.

Exercice 0.2 (Lemme de la chaîne de Tarski) Soit $(I, <)$ un ensemble dirigé. Considérer une collection de $\mathcal{L}$-structures $\{\mathcal{M}_i\}_{i \in I}$ telle que pour tous $i < j$, $\mathcal{M}_i \subseteq \mathcal{M}_j$. Soit $M = \bigcup_i M_i$.

(1) Munir M d'une structure de $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{M}$ telle que pour tout $i \in I$, $\mathcal{M}_i \subseteq \mathcal{M}$.

(2) Soit T une $\mathcal{L}$-théorie et supposons que pour tout $i \in I$, $\mathcal{M}_i \models T$. Est-ce que $\mathcal{M} \models T$?

(3) Supposons maintenant que pour tous $i < j$, $\mathcal{M}_i \preceq \mathcal{M}_j$. Montrer que pour tout i, $\mathcal{M}_i \preceq \mathcal{M}$.

(4) Supposons que $\{M_i\}_{i \in I}$ est une chaîne élémentaire et que $\mathcal{N}$ est une $\mathcal{L}$-structure. Si pour tout i, $\mathcal{M}_i \preceq \mathcal{N}$, alors $\mathcal{M} \preceq \mathcal{N}$.

Solution :

(1) Soit c un symbole de constante, puisque son interprétation est la même dans chaque $\mathcal{M}_i$, on prend $c^{\mathcal{M}} = c^{\mathcal{M}_i}$. Soit f un symbole de fonction de n'importe quelle arité, et on définit

$f^{\mathcal{M}} = \bigcup_i f^{\mathcal{M}_i}$, c'est bien défini car si $\bar{a} \in M_i \cup M_j$, on prend un $k \geq i, j$, et alors puisque $M_i \cup M_j \subseteq M_k$, $f^{\mathcal{M}_i}(\bar{a}) = f^{\mathcal{M}_k}(\bar{a}) = f^{\mathcal{M}_j}(\bar{a})$. De même, pour un symbole de relation R, on définit $R^{\mathcal{M}} = \bigcup_i R^{\mathcal{M}_i}$. On a que $R^{\mathcal{M}} \cap M_i = \bigcup_j R^{\mathcal{M}_j} \cap M_i = \bigcup_{j \leq i} R^{\mathcal{M}_j} = R^{\mathcal{M}_i}$: cela découle du fait que si $i \leq j, R^{\mathcal{M}_j} \subseteq M_i$ et si $i < j, R^{\mathcal{M}_j} \cap M_i = R^{\mathcal{M}_i}$, par hypothèse. La structure donnée satisfait ce qui est demandé par construction.

(2) Pas nécessairement, considérons T la théorie des ordres linéaires avec les deux extrémités. La famille de modèles donnée par $\mathcal{M}_i = \{-i, -i+1, \ldots, 0, \ldots, i-1, i\}$ avec l'ordre évident, a $\mathbb{Z}$ comme réunion, qui n'a pas d'extrémités.

(3) Soit $\phi(x, \bar{y})$ une $\mathcal{L}$-formule, soit $i \in I$, $\bar{a} \in M_i$, et $m \in M$ tel que $\mathcal{M} \models \phi(m, \bar{a})$. Il existe $k \geq i$ tel que $m, \bar{a} \in M_k$, donc $\mathcal{M}_k \models \phi(m, \bar{a})$ et par conséquent $\mathcal{M}_i \models \exists x(x, \bar{a})$ par hypothèse. Réciproquement si $\mathcal{M}_i \models \exists x(x, \bar{a})$ il s'ensuit immédiatement que $\mathcal{M} \models \exists x(x, \bar{a})$. Donc, $\mathcal{M}_i \preceq \mathcal{M}$.

(4) Soit $\bar{a} \in M$ et $\phi(\bar{x})$ n'importe quelle formule, alors $\mathcal{N} \models \phi(\bar{a}) \iff \mathcal{M}_i \models \phi(\bar{a}) \iff \mathcal{M} \models \phi(\bar{a})$.

Exercice 1. Soient $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ des $\mathcal{L}$-structures telles que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$. On veut montrer que $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ et $\mathcal{A} \preceq \mathcal{C}$ n'implique pas $\mathcal{B} \preceq \mathcal{C}$.

(1) En partant de $\mathcal{A} = \langle \mathbb{Z}, < \rangle$, construire une extension élémentaire propre $\mathcal{C}$.

(2) Trouver $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$ tel que $|C \setminus B| = 1$, ainsi qu'un isomorphisme $\sigma : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ tel que $\sigma(a) = a \ \forall a \in A$.

(3) Trouver une formule existentielle φ avec paramètres de B telle que $\mathcal{C} \models \phi$ et $\mathcal{B} \models \neg\phi$.

Solution :

(1) Considérons la théorie

$$T = \mathrm{Diag}_{el}(\mathcal{A}) \cup \{c > a\}_{a \in \mathbb{Z}}$$

où c est un nouveau symbole de constante. Toute partie finie de T a la forme

$$T_0 \subseteq \mathrm{Diag}_{el}(\mathcal{A}) \cup \{c > a\}_{a < m}$$

pour un certain $m \in \mathbb{Z}$. Donc en interprétant c comme $m+1$ (le successeur et le prédécesseur d'un élément peuvent être définis dans notre langage), on a que $\mathcal{A} \models T_0$. Par conséquent, tout modèle $\mathcal{C} \models T$ est une extension élémentaire propre de $\mathcal{A}$ (en tant que $\{<\}$-structures).

(2) Considérons $\mathcal{B} = \mathcal{C} \setminus \{c\}$, et on interprète $<^{\mathcal{B}} = <^{\mathcal{C}} \cap B^2$. Soit $\sigma : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ définie par

$$\sigma(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < c \\ x+1 & \text{sinon} \end{cases}$$

c'est clairement un plongement d'ordre qui fixe A.

(3) Considérons ϕ comme $\exists x\ c-1 < x < c+1$.

Exercice 2 : Soit $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}$-structure et $A \subseteq M$. Définir $\mathrm{dcl}_{\mathcal{M}}(A) = \{b \in M, \{b\} \text{ est } A\text{-définissable}\}$.

(1) Montrer que $\mathrm{dcl}_{\mathcal{M}}$ est un opérateur de clôture sur $\mathcal{P}(M)$, qui a un caractère fini.

(2) Montrer que tout PEM $f : \mathcal{M} \supseteq A \hookrightarrow \mathcal{N}$ a une unique extension en un PEM $\hat{f} : \mathcal{M} \supseteq \mathrm{dcl}_{\mathcal{M}}(A) \hookrightarrow \mathcal{N}$ et que $\mathrm{Im}(\hat{f}) = \mathrm{dcl}_{\mathcal{N}}(\mathrm{Im}(f))$.

(3) Soit $b \in \mathrm{dcl}_{\mathcal{M}}(A)$ et $\sigma \in \mathrm{Aut}_A(\mathcal{M}) = \{\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathcal{M}) : \sigma(a) = a\ \forall a \in A\}$. Que peut-on dire de l'orbite de b sous l'action de σ ?

(4) Soient $b, c \in M$ et $A \subseteq M$. Montrer que $c \in \mathrm{dcl}_{\mathcal{M}}(A \cup \{b\})$ si et seulement s'il existe $f : M \to N$ A-définissable telle que $f(b) = c$.

(5) Soit T une théorie avec fonctions de Skolem intégrées et soit $\mathcal{M} \models T$. Montrer que pour tout $A \subseteq M$, $\mathrm{dcl}_{\mathcal{M}}(A) = \langle A \rangle_{\mathcal{M}}$.

(6) Soit T une théorie avec fonctions de Skolem définissables et soit $\mathcal{M} \models T$. Montrer que $\mathrm{dcl}_{\mathcal{M}}(A) \preceq \mathcal{M}$.

(7) Soit $\mathcal{M}$ une expansion d'un ordre total. Montrer que $\mathrm{acl}_{\mathcal{M}} = \mathrm{dcl}_{\mathcal{M}}$.

(8) Soit $\mathcal{M} \equiv \langle \mathbb{N}, 0, 1, +, \cdot, < \rangle$ et soit $\varnothing \neq A \subseteq M$. Montrer que $\mathrm{dcl}_{\mathcal{M}}(A) \preceq \mathcal{M}$.

Solution :

(1) C'est réflexif puisque pour tout $a \in A$, on considère la formule $x = a$ qui définit $\{a\}$. C'est monotone car si $\{a\}$ est A-définissable, et $A \subseteq B$, alors automatiquement $\{a\}$ est B-définissable. Ces deux propriétés impliquent que $\mathrm{dcl}_{\mathcal{M}}(A) \subseteq \mathrm{dcl}_{\mathcal{M}}(\mathrm{dcl}_{\mathcal{M}}(A))$. Pour vérifier l'autre inclusion, soit $b \in \mathrm{dcl}_{\mathcal{M}}(\mathrm{dcl}_{\mathcal{M}}(A))$, et soit $\varphi(x, \bar{c})$ une $\mathcal{L}$-formule avec $\bar{c} \in \mathrm{dcl}_{\mathcal{M}}(A)$ telle que $\varphi(\mathcal{M}, \bar{c}) = \{b\}$. Pour chaque c_i, soit $\phi_i(x, \bar{a}_i)$ une formule avec $\bar{a}_i \in A$ telle que $\phi_i(\mathcal{M}, \bar{a}_i) = \{c_i\}$. Alors, considérons la formule $\mathcal{L}_A$

$$\psi(x, \bar{y}) = \exists! z \varphi(z, \bar{y}) \wedge \varphi(x, \bar{y}) \wedge \bigwedge_i \phi_i(y_i, \bar{a}_i).$$

Puisqu'il n'y a qu'un seul n-uplet $\bar{c}$ tel que $\bigwedge_i \phi_i(y_i, \bar{a}_i)$, et un seul b tel que $\varphi(b, \bar{c})$, on conclut que cette formule définit un seul n-uplet $(b, \bar{c})$. Donc, sa projection est définissable et $\{b\} = \{x, \exists \bar{y} \psi(x, \bar{y})\}$.

(2) Soit Ω l'ensemble des fonctions PEM avec domaine $A \subseteq A' \subseteq \mathrm{dcl}_{\mathcal{M}}(A)$ et image $B \subseteq B' \subseteq \mathrm{dcl}_{\mathcal{N}}(B)$ ordonné par extension de fonctions. C'est une vérification directe que Ω est clos par prise de chaînes, donc par le lemme de Zorn on peut obtenir un $g \in \omega$ maximal, avec domaine A_0 et image B_0. On affirme que $A_0 = \mathrm{dcl}_{\mathcal{M}}(A)$ et $B_0 = \mathrm{dcl}_{\mathcal{N}}(B)$. Supposons par contradiction qu'il existe $c \in \mathrm{dcl}_{\mathcal{M}}(A) \setminus A_0$, puisque $A \subseteq A_0$, $c \in \mathrm{dcl}_{\mathcal{M}}(A_0)$. Choisissons $\varphi(x, \bar{a})$, avec $\bar{a} \in A_0$ tel que $\varphi(\mathcal{M}, \bar{a}) = \{c\}$. Autrement dit, $\mathcal{M} \models \exists! x \varphi(x, \bar{a})$, et puisque g_0 est un PEM, $\mathcal{N} \models \exists! x \varphi(x, f(\bar{a}))$. Puisque $c \notin A_0$, on obtient que $\varphi(\mathcal{M}, \bar{a}) \cap A_0 = \varnothing$ et donc $\varphi(\mathcal{N}, g_0(\bar{a})) \cap B_0 = \varnothing$. Soit d le seul élément dans $\varphi(\mathcal{N}, g_0(\bar{a})) \setminus B_0$ (en particulier $d \in \mathrm{dcl}_{\mathcal{N}}(B_0)$). Définissons $g_1 : A_0 \cup \{c\} \to B_0 \cup \{d\}$ étendant g_0 et envoyant c sur d. Si on prouve que g_1 est un PEM, on contredit la maximalité de g_0. Soit $\theta(c, \bar{a}')$ une $\mathcal{L}_{A_0 \cup \{c\}}$-phrase satisfaite par $\mathcal{M}$, alors $\mathcal{M} \models \theta(c, \bar{a}') \wedge \varphi(c, \bar{a})$, et puisque $|\theta(\mathcal{M}, \bar{a}') \cap \varphi(\mathcal{M}, \bar{a})| = 1$, on a

$$\mathcal{M} \models \forall x (\varphi(x, \bar{a}) \to \theta(x, \bar{a}')$$

$$\mathcal{N} \models \forall x (\varphi(x, g_0(a)) \to \theta(x, g_0(\bar{a}'))$$

Mais puisque $\mathcal{N} \models \varphi(d, g_0(\bar{a}))$, alors $\mathcal{N} \models \theta(d, g_0(\bar{a}'))$, et donc $\mathcal{N} \models \theta(g_1(c), g_1(\bar{a}'))$. En répétant cet argument avec $\neg\theta$ on obtient l'autre direction pour conclure $\mathcal{M}_{A_0 \cup \{c\}} \equiv \mathcal{N}_{g_1(A_0 \cup \{c\})}$. Pour prouver $B_0 = \mathrm{dcl}_{\mathcal{N}}(B)$ on utilise le même argument mais pour le PEM g_0^{-1}, si on étend cette application, l'inverse de cette extension étendra g_0 à nouveau contredisant la maximalité. Finalement, pour vérifier l'unicité, soit $c \in \mathrm{dcl}_{\mathcal{M}}(A)$, alors il existe une $\mathcal{L}_A$-formule $\varphi(x, \bar{a})$ telle que $\mathcal{M} \models \exists! x \varphi(x, \bar{a})$, alors $\mathcal{N} \models \exists! x \varphi(x, f(\bar{a}))$, de sorte que deux extensions quelconques de f dans $\mathrm{dcl}_{\mathcal{M}}(A)$ doivent coïncider partout.

(3) On a que $\{\sigma^m(b), m \in \mathbb{N}\} = \{b\}$: si $\varphi(x, \bar{a})$ est une formule définissant $\{b\}$ avec $\bar{a} \in A$, alors

$$\begin{aligned}
& \mathcal{M} \models \varphi(b, \bar{a}) \\
\iff & \mathcal{M} \models \varphi(\sigma(b), \sigma(\bar{a})) \\
\iff & \mathcal{M} \models \varphi(\sigma(b), \bar{a}) \\
\iff & \quad \sigma(b) \in \{b\}
\end{aligned}$$

(4) Supposons $c \in \mathrm{dcl}_{\mathcal{M}}(A)$, alors il existe une formule $\varphi(x, \bar{a}, b)$ telle que $\varphi(\mathcal{M}, \bar{a}, b) = \{c\}$. L'ensemble $D = \{x, \exists! y\ \varphi(y, \bar{a}, x)\}$ est A-définissable. Fixons $a \in A$, et définissons

$$f(m) = \begin{cases} n & \text{tel que } \varphi(n, \bar{a}, m), \text{ si } m \in D \\ a & \text{sinon} \end{cases}$$

par définition, $f(b) = c$. Réciproquement, supposons qu'il existe une fonction A-définissable $f : M \to N$ qui envoie b sur c. Soit $\theta(x, y, \bar{a})$ une formule définissant le graphe de f. Alors $\theta(b, \mathcal{M}, \bar{a}) = \{c\}$.

(5) « $\subseteq$ » : Soit $b \in \mathrm{dcl}_{\mathcal{M}}(A)$, et choisissons $\varphi(x, \bar{a})$ tel que $\mathcal{M} \models \exists! y \varphi(y, \bar{a}) \wedge \varphi(b, \bar{a})$, alors par hypothèse il existe $f \in \mathcal{L}$ une fonction telle que $\mathcal{M} \models \varphi(f(\bar{a}), \bar{a}) \wedge \varphi(b, \bar{a})$, d'où $b = f(\bar{a})$ ce qui implique $b \in \langle A \rangle_{\mathcal{M}}$.

« $\supseteq$ » : Soit maintenant $b \in \langle A \rangle_{\mathcal{M}}$, donc $b = t(\bar{a})$ pour un certain terme t, on montre que $b \in \mathrm{dcl}_{\mathcal{M}}(A)$ par récurrence sur les termes : le cas où t est une variable ou une constante est immédiat, donc supposons $b = f(t_1(\bar{a}), \ldots, t_m(\bar{a}))$ avec $t_i(\bar{a}) \in \mathrm{dcl}_{\mathcal{M}}(A)$ et $f \in \mathcal{L}$. Considérons la formule $\theta(\bar{x}, y)$ qui définit le graphe de f, donc on a

$$\mathcal{M} \models \exists! y\ \theta(t_1(\bar{a}), \ldots, t_m(\bar{a}), y) \wedge \theta(t_1(\bar{a}), \ldots, t_m(\bar{a}), b)$$

de sorte que $b \in \mathrm{dcl}_{\mathcal{M}}(\mathrm{dcl}_{\mathcal{M}}(A)) = \mathrm{dcl}_{\mathcal{M}}(A)$.

(6) Soit $\bar{a} \in \mathrm{dcl}_{\mathcal{M}}(A)$ et n'importe quelle formule φ telle que $\mathcal{M} \models \exists x\ \varphi(x, \bar{a})$. Alors par hypothèse

$\mathcal{M} \models \exists z\ \varphi(z, \bar{a}) \wedge \theta_\varphi(z, \bar{a})$, où θ_φ définit le graphe de la fonction de Skolem pour φ. En particulier $|\theta_\varphi(\mathcal{M}, \bar{a})| = 1$, donc si $b \in \mathcal{M}$ est tel que $\mathcal{M} \models \varphi(\bar{a}, b)$, alors il existe $b' \in \mathcal{M}$ tel que $\mathcal{M} \models \varphi(b', \bar{a}) \wedge \theta_\varphi(b', \bar{a})$, en particulier $\mathcal{M} \models \theta_\varphi(b', \bar{a})$, donc $b' \in \mathrm{dcl}_{\mathcal{M}}(\mathrm{dcl}_{\mathcal{M}}(A)) = \mathrm{dcl}_{\mathcal{M}}(A)$.

(7) Clairement $\mathrm{dcl}_{\mathcal{M}}(A) \subseteq \mathrm{acl}_{\mathcal{M}}(A)$ puisqu'un ensemble A-définissable de taille 1 a une taille finie. Soit $b \in \mathrm{acl}_{\mathcal{M}}(A)$, alors il existe φ tel que $|\varphi(\mathcal{M}, b)| = n$ et $\mathcal{M} \models \varphi(b, \bar{a})$. Supposons que $\varphi(\mathcal{M}, b) = \{b_1, \ldots, b_n\}$ et sans perte de généralité $b_1 < \cdots < b_n$. Alors pour un certain k, $b = b_k$ et on définit $\{b_k\}$ avec la formule

$$\varphi(x, \bar{a}) \wedge \exists^k y \ (\varphi(y, \bar{a}) \wedge y < x) \wedge \exists^{n-k} y \ (\varphi(y, \bar{a}) \wedge y > x)$$

(8) Il suffit de montrer que $T = \mathrm{Th}(\mathcal{M})$ a des fonctions de Skolem définissables. Soit $\varphi(\bar{x}, y)$ une formule telle que pour $\bar{a} \in \mathcal{M}$, $T \models \exists y \varphi(\bar{a}, y)$, de sorte que $D = \{\bar{b}, \mathcal{M} \models \exists y \ \varphi(\bar{b}, y)\}$ est un ensemble définissable, non vide. Considérons la fonction

$$f_\varphi(\bar{b}) = \begin{cases} \min\{c, \mathcal{M} \models \varphi(\bar{b}, c)\} & \text{si } b \in D \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Le graphe de f_φ est défini par la formule $\theta(\bar{x}, y)$ donnée par

$$(\bar{x} \in D \wedge \varphi(\bar{x}, y) \wedge \forall z \ (\varphi(\bar{x}, z) \to z \geq y)) \vee (\bar{x} \notin D \wedge y = 0).$$

Donc on peut conclure que $\mathcal{M}$ a des fonctions de Skolem définissables, et par (6), on a le résultat.

Exercice 3 : Soit T une $\mathcal{L}$-théorie. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) Pour tout $\mathcal{M} \models T$ et pour tous $\mathcal{A}, \mathcal{B} \preceq \mathcal{M}$ on a $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \preceq \mathcal{M}$.

(2) Pour tout $\mathcal{M} \models T$ et pour tout $C \subseteq M$, on a $\mathrm{acl}_{\mathcal{M}}(C) \preceq \mathcal{M}$.

Solution : Pour prouver que (2) implique (1), soient $\mathcal{A}, \mathcal{B} \preceq \mathcal{M}$, donc en particulier $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B} \equiv \mathcal{M}$, alors on peut appliquer la propriété de plongement joint (deux fois), pour trouver $\mathcal{S}$ tel que $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{M} \preceq \mathcal{S}$. On peut aussi demander que $\mathrm{acl}_{\mathcal{S}}(\varnothing) = A \cap B$. Puisque $\varnothing \subseteq \mathcal{M} \preceq \mathcal{S}$, $\mathrm{acl}_{\mathcal{S}}(\varnothing) = \mathrm{acl}_{\mathcal{M}}(\varnothing)$ et donc par hypothèse $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \mathrm{acl}_{\mathcal{M}}(\varnothing) \preceq \mathcal{M}$.