Université de Paris **(Date : 19/07/2020)**

UFR Mathématiques

Théorie des ensembles, TD1

Professor: A. Vignati Juan Ignacio Padilla, M2 LMFI

Exercice 1. Soit R une relation sur un ensemble X. Montrer que R n'est pas bien fondée si et seulement s'il existe une suite $\{x_n\} \subseteq X$ telle que $x_{n+1}Rx_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Solution : Supposons que R n'est pas bien fondée (cela implique $X \neq \varnothing$), alors il existe un sous-ensemble non vide $Y \subseteq X$ sans élément minimal. C'est-à-dire que pour tout $y \in Y$ il existe $z \in Y$ tel que zRy. Prenons un $x_0 \in Y$ quelconque (*choix*) et prenons $x_1 \in Y$ tel que $x_1 R x_0$. Par récurrence, si $\{x_0, \dots, x_k\} \subseteq Y$ sont tels que $x_{i+1}Rx_i$ pour $i < k$, alors par hypothèse, il existe $x_{n+1} \in Y$ tel que $x_{n+1}Rx_n$. Par l'axiome de *réunion*, on peut former $S = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ comme requis. Réciproquement, supposons que $\{x_n\}$ est une suite comme énoncé, alors $S = \{x_0, x_1, \dots, x_n, \dots\}$ n'a pas d'élément minimal.

Exercice 2. Montrer que $\in$ est une relation bien fondée, ensembliste et extensionnelle sur V. Est-ce que $\in$ est transitive ? Est-ce que $\in$ est un ordre strict ?

Solution : Si $\in$ n'était pas bien fondée, il existerait une suite $S = \{x_n\}$ d'ensembles dans V avec $x_{n+1} \in x_n$. Le fait que S soit un ensemble contredit l'axiome de *régularité*, puisque pour tout n, $x_{n+1} \in x_n \cap S$. La relation $\in$ est ensembliste : prenons un ensemble x, alors $\in^{-1}[x] = \{y, y \in x\} = \{y \in x, y \in x\} = x$. Elle est aussi extensionnelle puisque $\in^{-1}[x] = \in^{-1}[y]$ signifie que x, y ont les mêmes éléments, donc $x = y$ par *extensionalité*. Elle n'est pas transitive : prenons un ensemble x et $A = \{\{x\}\}$, alors $x \in \{x\}$ et $\{x\} \in \{\{x\}\}$ mais $x \notin A$. Ce n'est pas non plus un ordre strict puisqu'elle n'est pas transitive.

Exercice 3. Soit x un ensemble. Montrer qu'il existe un ensemble transitif y tel que $x \subseteq y$. Montrer qu'un tel y peut être choisi de manière minimale, ce qu'on appellera la **clôture transitive de** x.

Solution. Posons $x_0 = x$ et par récurrence $x_{n+1} = \cup x_n$. Puis prenons $y = \cup_{n\in\mathbb{N}} x_n$. Clairement $x = x_0 \subseteq y$, pour voir que y est transitif, soit $w \in z \in y$, alors pour un certain k, $z \in x_k$, et puisque $x_{k+1} = \cup x_k$, on a $w \in x_{k+1} \subset y$. Enfin, pour voir la minimalité, soit $x \subseteq T$ pour un ensemble transitif T. On va montrer que $y \subseteq T$. Soit $z = z_k \in y$, de sorte que pour un certain k, $z_k \in x_k$. Cela signifie que pour un certain $z_{k-1} \in x_{k-1}$, $z_k \in z_{k-1}$, en répétant cet argument, on obtient une suite finie $z_k, z_{k-1}, \ldots, z_0$ telle que pour $i = 0, \ldots k$, $z_i \in x_i$ et $z_i \in z_{i-1}$. Puisque $z_0 \in x_0 \subseteq T$, par transitivité de T, $z_1 \in T, \ldots, z_k = z \in T$.

Exercice 4. Utiliser l'axiome de régularité et la clôture transitive pour montrer que si C est une classe, alors C possède un élément $\in$-minimal.

Solution : Soit x un ensemble quelconque dans C, si x et C n'ont aucun élément en commun, alors x est minimal. Sinon il existe $y \in S \cap x$ (notation informelle pour y est dans C et dans x). Notons que $\mathrm{TC}(y) \cap C$ est un ensemble non vide. Par *régularité*, il existe un élément minimal $z \in \mathrm{TC}(y) \cap C$ (sinon il y aurait une suite infinie descendante dans w). Vérifions que z est bien $\in$-minimal dans C : s'il ne l'était pas, il existerait $z' \in C$ tel que $z' \in z$. Cela signifierait $z' \in \mathrm{TC}(y)$, et donc $z' \in \mathrm{TC}(y) \cap C$, contredisant la minimalité de z dans ce dernier ensemble.

Exercice 5. Montrer que si M_1 et M_2 sont des classes transitives et $\pi : M_1 \to M_2$ est un $\in$-isomorphisme, alors π est l'identité.

Solution : On définit la classe $C = \{x, \pi(x) \neq x\}$. Par l'ex.4, choisissons un élément minimal $x \in C$. On va montrer que $\pi(x) = x$ et arriver à une contradiction. D'abord voyons que $x \subseteq \pi(x)$. Soit $y \in x \Rightarrow y \in M_1 \wedge \pi(y) \in \pi(x)$. Puisque x est minimal dans C, $\pi(y) = y$ et donc $y \in \pi(x)$. Maintenant vérifions $\pi(x) \subseteq x$: prenons $w \in \pi(x)$, alors $\pi^{-1}(w) \in x$ et par minimalité de x on a $w = \pi(\pi^{-1}(w)) = \pi^{-1}(w) \Rightarrow w \in x$. Il y a une contradiction, C ne peut pas avoir d'élément $\in$-minimal, donc elle doit être vide. Cela implique que $\pi \equiv id$.

Exercice 6. (Lemme d'effondrement de Mostowski). Soit C une classe et R une relation bien fondée, ensembliste et extensionnelle. Alors il existe une unique classe transitive M et un unique isomorphisme $(C, R) \to (M, \in)$.

Solution : D'abord, notons que l'élément R-minimal $x \in C$ est unique, car s'il y avait un autre élément minimal $y \in C$, on aurait $R^{-1}[x] = R^{-1}[y] = \varnothing$, ce qui impliquerait $x = y$ par extensionalité. On définit maintenant $\pi(x) = \varnothing$, et pour tout autre $y \in C$, $\pi(y) = \{\pi(z), zRy\} = \pi(R^{-1}[x])$. Cette fonction préserve $\in$ puisque $yRx \Rightarrow y \in R^{-1}[x] \Rightarrow \pi(y) \in \pi(R^{-1}[x]) = \pi(x)$. On prend maintenant $M = \cup_{x \in C} \pi(x)$. Notons que M est une classe transitive car si $z \in M$ cela signifie qu'il existe $x, y \in C$ tels que $z = \pi(y)$ avec yRx, ce qui implique $z \in M$. Par construction, π est clairement surjective. Enfin, pour voir que π est injective, prenons $x \neq y$ dans C, alors par extensionalité $R^{-1}[x] \neq R^{-1}[y]$ donc il existe $z \in C$ tel que $zRx \wedge z \not R y$, ce qui implique $\pi(x) \neq \pi(y)$. Pour vérifier l'unicité, supposons que M_1 et M_2 sont des classes transitives satisfaisant le lemme, avec les applications respectives π_1, π_2. On aurait alors le $\in$-isomorphisme $\pi_1 \circ \pi_2^{-1} : M_2 \to M_1$. Par l'ex.5, c'est l'identité, donc $M_1 = M_2$.

$$\begin{tikzcd}
& M_1 \arrow[dd, dash, "="] \\
C \arrow[ur, "\pi_1"] \arrow[dr, "\pi_2"'] & \\
& M_2
\end{tikzcd}$$

Exercice 7. Soient $(X, <_1)$, $(Y, <_2)$ des ensembles ordonnés. Définir $<_3$ sur $X \times Y$ par $(x, y) < (x', y')$ si et seulement si $x <_1 x'$ et $y <_2 y'$. Montrer que c'est un ordre. Si $<_1$ et $<_2$ sont des ordres totaux, est-ce que $<_3$ est un ordre total ?

Solution : Facile.

Exercice 8. Soient $(X, <_1)$, $(Y, <_2)$ des ensembles totalement ordonnés. Montrer que $<_{lex}$ ordonne totalement $X \times Y$. Si $<_1$ et $<_2$ sont des bons ordres, est-ce que $<_{lex}$ en est un ?

Solution. Facile, c'est un bon ordre.

Exercice 9. Montrer que tout ordre total dénombrable se plonge dans $\mathbb{Q}$.

Solution :

Lemme : Si $X = \{x_0, \ldots, x_n\}$ est un ordre total fini, $X' = X \cup \{x_{n+1}\}$ est un ordre total étendant celui de X, et $\varphi : X \to \mathbb{Q}$ est un plongement, alors il existe un plongement $\varphi' : X' \to \mathbb{Q}$ tel que $\varphi' \restriction_X = \varphi$.

Preuve : On a trois cas : si $x_{n+1} > \max(X)$, prendre $\varphi'(x_{n+1}) = \varphi(\max(X)) + 1$, sinon si

$x_{n+1} < \min(X)$, prendre $\varphi'(x_{n+1}) = \varphi(\min(X)) - 1$. Sinon, il existe $i, j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ tels que $x_i < x_{n+1} < x_j$, alors prendre $\varphi'(x_{n+1}) = \frac{1}{2}(\varphi(x_j) + \varphi(x_i))$, ce qui complète la preuve du lemme. Pour montrer que $X = \{x_0, \ldots, x_n, \ldots\}$ se plonge dans $\mathbb{Q}$, posons $X_0 = x_0$ et $X_{n+1} = X_n \cup x_{n+1}$. En prenant $\varphi_0 : X_0 \to \mathbb{Q}$ comme $x_0 \mapsto 0$, et en utilisant le lemme pour définir $\varphi_n : X_n \to \mathbb{Q}$ tel que $\varphi_{n+1} \restriction X_n = \varphi_n$, on peut prendre notre plongement comme $\varphi = \cup_{n \in \mathbb{N}} \varphi_n$.

Exercice 10. Soit X un ensemble. Montrer que $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ est ordonné. Montrer que $\subseteq$ est extensionnelle sur $\mathcal{P}(x)$.

Solution : $\subseteq$ est clairement un ordre. Si $\subseteq^{-1}[A] = \subseteq^{-1}[B]$, puisque $\subseteq$ est réflexive, on a en particulier que $A \subseteq B$ et $B \subseteq A$. Donc, $A = B$.

Exercice 11. Soit $(X, <)$ un ensemble ordonné. Montrer qu'il existe un morphisme d'ordre de $(X, <)$ dans $(\mathcal{P}(X) \subseteq)$. Explicitement, écrire un morphisme ϕ avec la propriété que ϕ est injectif si et seulement si $<$ est extensionnelle.

Solution : $x \mapsto \{y \in X, y < x\}$.

Exercice 12. Pour $A, B \subseteq \mathbb{N}$, définir

$$A \subseteq^* B \text{ si et seulement si } A \setminus B \text{ est fini}$$

Montrer que $\subseteq^*$ est transitive. Est-ce un ordre ? Décrire tous les $\subseteq^*$-prédécesseurs de $\varnothing$.

Solution : La transitivité découle du fait que $A \setminus C \subseteq A \setminus B \cup B \setminus C$. Ce n'est pas un ordre puisqu'elle n'est pas antisymétrique (prendre $\{1, 2\}$ et $\{2, 3\}$). L'ensemble des prédécesseurs de $\varnothing$ est constitué de tous les ensembles finis.

Exercice 13. Soit $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ muni de Δ et $\cap$ comme addition et produit. Montrer que c'est un anneau commutatif unitaire. Montrer que l'ensemble

$$\mathrm{Fin} = \{A \subseteq \mathbb{N}, A \text{ est fini}\}$$

est un idéal.

Solution : Il est de routine de montrer que Δ et $\cap$ sont commutatifs et associatifs. $\varnothing$ est l'élément neutre pour l'addition et $\mathbb{N}$ pour la multiplication. Étant donné $A \subseteq \mathbb{N}$, on a $A \Delta A = \varnothing$. Enfin, en utilisant le fait que $X \cap (Y \setminus Z) = (X \cap Z) \setminus (X \cap W)$, on obtient la distributivité :

$$\begin{aligned} A \cap (B \Delta C) &= A \cap ((B \setminus C) \cup (C \setminus B)) \\ &= (A \cap ((B \setminus C)) \cup (A \cap ((C \setminus B)) \\ &= ((A \cap B) \setminus (A \cap C)) \cup ((A \cap C) \setminus (A \cap B)) \\ &= (A \cap B) \Delta (A \cap C) \end{aligned}$$

Tout ceci montre que $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \Delta, \cap)$ est un anneau avec identité. La famille des ensembles finis forme un idéal puisqu'elle est clairement close sous Δ et l'intersection de tout $X \subseteq \mathbb{N}$ avec un ensemble fini est finie.

Exercice 14. Sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})/\operatorname{Fin}$, définir $[A] \subseteq [B]$ ssi $A \subseteq^* B$. Montrer que cette relation est bien définie. Conclure que $\subset^*$ ordonne strictement $\mathcal{P}(\mathbb{N})/\operatorname{Fin}$, et montrer qu'elle est extensionnelle.

Solution : Remarquons que $[A] = [B]$ ssi $A \Delta B$ est fini ssi $A \subseteq^* B$ et $B \subseteq^* A$. Supposons que $A \subseteq^* B$, $[C] = [A]$ et que $[D] = [B]$. Alors par ce qui précède, $C \subseteq^* A \subseteq^* B \subseteq^* D$, le résultat découle de la transitivité de $\subseteq^*$. Pour vérifier l'extensionalité, remarquons que $[X] \subseteq [X]$ pour tout $X \subseteq \mathbb{N}$, si on suppose que $\subseteq^{-1} [A] = \subseteq^{-1} [B]$, alors en particulier $A \subseteq^* B$ et réciproquement, ce qui prouve que $[A] = [B]$.

Exercice 15. Deux éléments d'un ensemble ordonné sont incompatibles s'il n'existe pas d'élément en dessous des deux, un sous-ensemble $C \subset X$ est une chaîne si pour tous $x, y \in C$ soit $x > y$ soit $y > x$. Montrer qu'il existe une famille infinie non dénombrable d'éléments deux à deux incompatibles de $(\mathcal{P}(\mathbb{N})/\operatorname{Fin} \setminus [\varnothing], \subset^*)$, et qu'il existe une chaîne bien fondée non dénombrable dans $(\mathcal{P}(\mathbb{N})/\operatorname{Fin} \setminus [\mathbb{N}], \subset^*)$. Conclure que $\mathcal{P}(\mathbb{N})/\operatorname{Fin}, \subset)$ ne se plonge pas dans $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subset)$.

Solution : Remarquons que $[\varnothing]$ et $[\mathbb{N}]$ représentent les classes des ensembles finis et cofinis, respectivement. Aussi, deux éléments $[A], [B]$ sont incompatibles si et seulement si $A \cap B$ est fini : supposons que $Y = A \cap B$ est infini, alors $[Y] \subseteq [A]$ et $[Y] \subseteq [B]$, ce qui rend $[A], [B]$ compatibles, d'autre part, si $A \cap B$ est fini, si on suppose qu'il existe $[X] \subseteq [A], [B]$, alors $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$ est fini, ce qui implique $[X] \subseteq [A \cap B] \Rightarrow X$ est fini, une contradiction puisqu'on a exclu $[\varnothing]$.

Pour montrer l'existence d'une famille infinie non dénombrable d'ensembles deux à deux incompatibles, on va montrer que toute famille dénombrable peut être étendue, et qu'une famille maximale de tels ensembles ne peut pas être dénombrable.

Prenons une famille dénombrable d'éléments deux à deux incompatibles de $(\mathcal{P}(\mathbb{N})/\operatorname{Fin}\setminus[\varnothing]$, disons $[X_n]$, $n \in \mathbb{N}$. Soit

$$Y_0 = X_0 \text{ et } Y_{n+1} = X_{n+1} \setminus \bigcup_{i \leq n} X_n.$$

Tous les Y_n sont deux à deux disjoints et $[Y_n] = [X_n]$ pour tout n, puisque $X_n \cap Y_n = X_n \cap (\bigcap_{i<n} X_n \setminus X_i)$ est fini. Choisissons un élément $x_n \in Y_n$, alors l'ensemble $Y = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ est presque disjoint de chaque X_n, ce qui rend la famille originale non maximale. Par le lemme de Zorn, on peut étendre toute famille d'éléments deux à deux incompatibles à une famille maximale la contenant. Enfin, prenons pour tout n, $X_n = \{p_n^k, k > 0\}$ où p_n est le n-ème nombre premier. C'est une famille dénombrable d'ensembles deux à deux incompatibles, et on peut l'étendre à une famille maximale, qui ne peut pas être dénombrable. Ensuite, on doit montrer qu'il n'existe pas de plongement de $(\mathcal{P}(\mathbb{N})/\operatorname{Fin}\setminus[\varnothing], \subseteq)$ dans $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$.

Lemme : Toutes les chaînes bien fondées dans $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subset)$ sont dénombrables.

Preuve : Supposons qu'il existe une $\subset$-chaîne non dénombrable. Pour x dans C, soit $S(x)$ l'élément $\subset$-minimal de C au-dessus de x (existe grâce à la bonne fondation). Si $x \neq y$, alors *sqpg* $x \subseteq y$ et donc $S(x) \subseteq y$. Cela implique que pour tous $x \neq y$ dans C

$$(S(x) \setminus x) \cap (S(y) \setminus y) = \varnothing.$$

Puisque chaque $S(x) \setminus x$ est non vide (ordre strict), l'ensemble $X = \bigcup_{x \in C} S(x) \setminus x \subseteq \mathbb{N}$ est infini non dénombrable, c'est une contradiction. Puisque les plongements de chaînes sont des chaînes, il suffit de trouver une chaîne bien fondée infinie non dénombrable dans $\mathcal{P}(\mathbb{N})/\operatorname{Fin}\setminus[\mathbb{N}]$. Soit

$$\mathcal{D} = \{\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})/\operatorname{Fin}\setminus[\mathbb{N}], \mathcal{C} \text{ est une chaîne bien fondée}\}.$$

On peut ordonner $\mathcal{D}$ par extensions terminales de chaînes. En prenant par le lemme de Zorn une chaîne maximale dans $\mathcal{D}$, il existe une chaîne bien fondée dans $\mathcal{P}(\mathbb{N})/\operatorname{Fin}\setminus[\mathbb{N}]$ qui ne peut pas être étendue. Une telle chaîne ne peut pas être dénombrable, pour le prouver on va montrer *que toute chaîne dénombrable dans $\mathcal{D}$ est extensible.*

Preuve : Soit $\mathcal{C} = [A_n]$ une chaîne dénombrable (on suppose les $[A_n]$ distincts). On veut trouver un $C \subseteq \mathbb{N}$ non cofini tel que pour tout n, $A_n \subseteq^* C$. Soit $B_n = \bigcup_{i \leq n} A_n$, et remarquons que $B_n \subseteq B_{n+1}$ pour tout n. Remarquons que $B_{n+1} \setminus B_n$ est infini pour tout n puisque $[A_n] \subsetneq [A_{n+1}]$ implique que

$A_{n+1} \setminus A_n$ est infini. Notons que si C est un ensemble non cofini tel que pour tout n, $B_n \subseteq^* C$, la même chose est vraie pour tout A_n. Soit $k_i = \min B_{i+1} \setminus B_i$ et $C = \mathbb{N} \setminus \{k_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ (il est non cofini par construction). On a que si $i \geq n$, alors $k_i \notin B_n$, ce qui implique que pour tout n, $B_n \cap \{k_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ est fini ou de manière équivalente, $B_n \subseteq^* C$. Pour conclure, on peut supposer ladite $\mathcal{C}$ bien fondée et l'étendre à une chaîne maximale infinie non dénombrable dans $\mathcal{P}(\mathbb{N}) / \operatorname{Fin} \setminus [\mathbb{N}]$ qui ne peut pas être plongée dans $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ comme conséquence d'un des lemmes.