Université de Paris **(Date : 21/09/2020)**

UFR Mathématiques

Théorie des modèles TD1

Professor: T. Servi — Juan Ignacio Padilla, M2 LMFI

Exercice 0.1. Soit $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}$-structure, $m, n \in \mathbb{N}$ et $A \subseteq M^{n+m}$ définissable dans $\mathcal{M}$. Pour $\bar{b} \in M^m$, soit $A_{\bar{b}} = \{\bar{a} \in M^n, (\bar{a}, \bar{b}) \in A\}$ la fibre de A au-dessus de b. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que l'ensemble $\{\bar{b} \in M^n, |A_{\bar{b}}| < k\}$ est définissable. (*) Est-ce que l'ensemble $\{\bar{b} \in M^n, |A_{\bar{b}}| < \infty\}$ est définissable ?

Solution 0.1. Si $A \subseteq M^{n+m}$ est définissable, alors il existe $\bar{s} \in M$, et une formule $\phi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ telle que $A = \{(\bar{x}, \bar{y}) \in M^{n+m}, \mathcal{M} \models \phi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{s})\}$. La formule suivante exprime que la fibre $A_{\bar{b}}$ a moins de k éléments.

$$\phi_k(y_1, \ldots, y_m) = \forall \bar{x_1} \ldots \bar{x_k} \left(\bigwedge_{i=1}^{k} \phi(\bar{x_i}, \bar{y}) \Rightarrow \bigvee_{1 \leq i \neq j \leq k} \bar{x_i} = \bar{x_j} \right).$$

On voit que $\mathcal{M} \models \phi_k(\bar{b})$ si et seulement si $A_{\bar{b}}$ a moins de k éléments.

(*) Considérons $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, <)$, et soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre non principal sur $\mathbb{N}$. Soit $\mathcal{M} = \mathcal{N}^{\mathcal{U}}$. On peut identifier chaque $n \in \mathbb{N}$ avec $[n, n, \ldots,]_{\mathcal{U}} \in \mathcal{M}$. Remarquons que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\omega = [0, 1, 2, \ldots, n, n+1, \ldots]_{\mathcal{U}} > n$$

On appelle les éléments plus grands que tout n, *infinis.* Supposons maintenant que l'ensemble $\{\bar{b} \in M^n, |A_{\bar{b}}| < \infty\}$ est définissable par une formule $\phi(x, \bar{m})$ avec paramètres $\bar{m} \in \mathcal{M}$. Autrement dit, $\mathcal{M} \models \phi(x, \bar{m})$ si et seulement s'il y a un nombre fini d'éléments en dessous de x (au sens fini usuel), on montre que cela implique que x est nécessairement fini : supposons le contraire, alors pour tout n, $\mathcal{U}$-presque partout, $x_i \neq n$. On veut prouver qu'en fait $x_i \geq n$: si ce n'était pas le cas, alors à nouveau, $\mathcal{U}$-presque partout $x_i < n \Rightarrow x_i \in \{0, 1, \ldots, n-1\} = \bigcup_{j=0}^{n-1}\{j\}$. Autrement dit, cela signifie que

$$\bigcup_{j=0}^{n-1} \{i, x_i = j\} \in \mathcal{U}.$$

Par les propriétés des ultrafiltres, (si $A \cup B \in \mathcal{U}$ alors soit $A \in \mathcal{U}$ soit $B \in \mathcal{U}$) on conclut que pour un certain k, $[x] = [k]$, ce qui est une contradiction puisque x est infini. Considérons maintenant $\Sigma(x, \bar{m}) =$

$\{\neg\phi_k(x,\bar{m})\}_{k\in\mathbb{N}} \cup \{\phi(x,\bar{m})\}$. Elle est finiment consistante, puisque si $\Sigma_N(x,\bar{m}) = \{\neg\phi_k(x,\bar{m})\}_{k<N} \cup \{\phi(x,\bar{m})\}$ est une partie finie de Σ, alors $\mathcal{M} \models \Sigma_N(N,\bar{m})$ (N a au moins k éléments en dessous pour tout $k > N$, et a aussi un nombre fini d'éléments en dessous puisqu'il est fini). Par compacité, il existe $N' \in \mathcal{M}$ tel que $\mathcal{M} \models \Sigma_N(N',\bar{m})$. On conclut que N' a au moins k éléments en dessous pour tout k, et que N est fini par ce qui précède. C'est une contradiction, donc $\{\bar{b} \in M^n, |A_{\bar{b}}| < \infty\}$ n'est pas définissable.

Exercice 2. Soit M un ensemble et $\mathcal{D} = \bigcup_n D_n$ une collection de sous-ensembles de $\bigcup_n M^n$ contenant $\varnothing$, M^n pour tout n, les diagonales, et close par permutation des coordonnées, produits cartésiens, les opérations booléennes sur les ensembles et les projections linéaires. Montrer que $\mathcal{D} = \mathrm{Def}(\mathcal{M},\varnothing)$, pour un certain langage $\mathcal{L}$ et une certaine $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{M}$.

Solution 0.2. Prendre $\mathcal{C} = \varnothing$, et $\mathcal{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{(x_1,\ldots,x_n),(x_1,\ldots,x_n) \in D_n\}$. Autrement dit, ne prendre aucune constante et définir chacun des D_n comme un prédicat. Pour chaque n, si pour tout $(x_1,\ldots,x_n) \in M^n$, il existe $y \in M$ tel que $(x_1,\ldots,x_n,y) \in D_{n+1}$, on définit $f : M^n \to M$ qui envoie $(x_1,\ldots,x_n)$ sur y. On peut avoir à faire cela (possiblement une infinité de) fois puisqu'un tel y peut ne pas être unique.

Exercice 0.3. Soit $\mathcal{M}$ une expansion d'un ordre total muni de la *topologie de l'ordre*. Soit $A \subseteq M^n$ et $f : A \to M$ tous deux définissables.

(1) Montrer que $A^\circ, \overline{A}$ et $\mathrm{bd}(A)$ sont tous définissables.

(2) Montrer que l'ensemble des points de discontinuité de f est définissable.

(3) Montrer que les propriétés suivantes sont définissables : A est discret, A est borné.

(4) Qu'en est-il de A est compact et connexe ?

Solution 0.3. On utilise les abréviations suivantes : $\bar{x} < \bar{y}$ pour $x_i < y_i$ pour chaque i et si ϕ est une formule alors $Qx \in A\ (\phi)$ (où Q est un quantificateur) pour $Qx(x \in A \Rightarrow \phi)$.

(1) $\bar{x} \in A^\circ$ si et seulement si $\exists \bar{y},\bar{z} \in A\ (\bar{z} < \bar{x} < \bar{y})$.
$\bar{x} \in \bar{A}$ si et seulement si $\forall \bar{y},\bar{z}((\bar{z} < \bar{x} < \bar{y}) \Rightarrow \exists \bar{w} \in A(\bar{z} < \bar{w} < \bar{y}))$
$\bar{x} \in \mathrm{bd}(A)$ si et seulement si $\bar{x} \notin A^\circ \wedge \bar{x} \in \bar{A}$.

(2) $\bar{x}$ est un point de discontinuité de f si et seulement si

$$\exists r \exists s((r < f(\bar{x}) < s) \wedge \forall \bar{y},\bar{z} \in A((\bar{z} < \bar{x} < \bar{y}) \Rightarrow \exists \bar{w}((\bar{z} < \bar{w} < \bar{y}) \wedge (f(\bar{w}) < r \vee f(\bar{w}) > s))$$

(3) On dit que A est discret si $\forall \bar{x} \in A\ \exists \bar{y} \in A(\bar{x} < \bar{y} \Rightarrow \nexists \bar{z} \in A(\bar{x} < \bar{z} < \bar{y}))$. On dit que A est borné si $\forall \bar{x} \in A\ \exists \bar{y}, \bar{z}(\bar{x} < \bar{y} \wedge \bar{x} > \bar{z})$.

(4) Considérons $\mathcal{U}$ un ultrafiltre non principal sur $\mathcal{N}$ et soit $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}^{\mathcal{U}}$. Considérons

$$\varepsilon = [1, 1/2, 1/3, \dots, 1/n, \dots]_{\mathcal{U}}.$$

Remarquons que pour $i \geq n$, $\varepsilon_i < 1/n$, et puisque $\{n, n+1, \dots\} \in \mathcal{U}$ (il est cofini), on conclut que pour tout n, $\varepsilon < 1/n$. Cela prouve que $\mathbb{R}^*$ n'est pas archimédien, et en particulier cela prouve aussi que l'archimédianité pour un corps n'est pas axiomatisable, car si elle l'était par, disons, une théorie T, on aurait $\mathbb{R} \models T$ et $\mathbb{R}^* \not\models T$, contredisant le théorème de Łos. On va montrer que la connexité et la compacité ne sont pas exprimables au premier ordre : considérons E l'ensemble des éléments *infinitésimaux* dans $\mathbb{R}^*$, i.e l'ensemble des éléments plus petits que tout $1/n$.

E est fermé : Soit $\varepsilon \in \bar{E}$, alors pour tout $x, y \in \mathbb{R}^*$ tels que $x < \varepsilon < y$ il existe $\epsilon \in E$ tel que $x < \epsilon < y$. Si $\varepsilon \geq 1/n$ pour un certain n, alors on peut trouver un infinitésimal $1/n < \epsilon < 1$, une contradiction.

E est ouvert : Pour tout $\varepsilon \in E$ on a $\varepsilon/2 < \varepsilon < 2\varepsilon$. On doit montrer que ceux-ci sont infinitésimaux : pour $\varepsilon/2$ c'est trivial puisqu'il est en dessous d'un infinitésimal. Maintenant si $2\varepsilon \notin E$, on peut trouver n tel que $1/n < 2\varepsilon \Rightarrow 1/2n < \varepsilon$, ce qui est impossible.

E n'a pas de supremum : Soit $r = \sup E$. On a que $r \notin E$ (sinon $r < 2r \in E$), maintenant soit $\epsilon \in E$, et on affirme que $r - \epsilon$ borne E : supposons le contraire, alors il existe $\varepsilon \in E$ tel que

$$r - \epsilon < \varepsilon < r \Rightarrow r < \varepsilon + \epsilon < r + \epsilon.$$

Remarquons aussi que $\epsilon + \varepsilon \in E$ car, pour tout $n \in \mathbb{N}$ puisque $\epsilon, \varepsilon < 1/2n$, alors $\epsilon + \varepsilon < 1/n$. On a que $r \leq$ un infinitésimal, une contradiction. E ne peut pas avoir de supremum.

E n'est pas compact : la suite

$$\varepsilon < 2\varepsilon < \dots < n\varepsilon < \dots$$

est contenue dans E (par l'argument précédent), elle est strictement croissante et est bornée supérieurement par 1. L'argument précédent peut être utilisé pour montrer qu'elle n'a pas de point limite. Cela prouve que E n'est pas compact. Si la compacité d'un ensemble A était donnée par une phrase ϕ_A, alors on aurait $\mathbb{R} \models \phi_{[0,1]}$ mais $\mathbb{R}^* \not\models \phi_{[0,1]}$, contredisant le théorème de Łos.

Finalement, puisque E est ouvert-fermé et n'est ni $\varnothing$ ni $[0,1]$, on conclut que $[0,1]$ n'est pas connexe dans $\mathbb{R}^*$, et on peut en déduire que la connexité n'est pas non plus exprimable au premier ordre.

Exercice 1. Soit $\mathcal{L} = \varnothing$ et $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}$-structure. Montrer que $A \subseteq M$ est définissable dans $\mathcal{M}$ si et seulement si A est soit fini soit cofini.

Solution 1.

Lemma 0.1. *Si A est S-définissable, alors tout automorphisme σ qui fixe S point par point fixe A point par point.*

Démonstration. Soit $\psi(x, \bar{s})$ une formule définissant A, puisque les automorphismes préservent les formules, on a

$$\mathcal{M} \models \psi(x, \bar{s}) \iff \mathcal{M} \models \psi(\sigma(x), \sigma(\bar{s})) \iff \mathcal{M} \models \psi(\sigma(x), s)$$

de sorte que $\sigma(X) = X$. □

S'il existait un A définissable qui n'est ni fini ni cofini, alors on pourrait choisir des ensembles infinis

$$\{a_0, a_1 \ldots, a_n, \ldots\} \in A \setminus S$$

$$\{b_0, b_1 \ldots, b_n, \ldots\} \in (M \setminus A) \setminus S$$

Alors la bijection qui envoie a_i sur b_i et fixe tout le reste (en particulier S) est un automorphisme qui ne fixe pas A, une contradiction. Réciproquement, si $A = \{a_0 \ldots, a_n\}$ est fini, la formule

$$\phi(x, \bar{a}) = \bigvee_{i=0}^{n} x = a_i$$

définit A. Si A est cofini on répète cet argument pour $M \setminus A$.

Exercice 2. Soit $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}$-structure, soit $m, n \in \mathbb{N}$. Une collection $\mathcal{A} = \{A_{\bar{b}}\}_{\bar{b} \in M^m}$ de sous-ensembles de M^n est une *famille définissable* s'il existe $S \subseteq M$ et une formule $\phi \in \mathcal{F}_{n+m}(\mathcal{L}_S)$ telle que $A_{\bar{b}} = \{\bar{a} \in M^n, \mathcal{M}_S \models \phi(\bar{a}, \bar{b})\}$. Soit $D \subseteq M$ un ensemble fini. Étant donné une famille D-définissable $\mathcal{A} = \{A_{\bar{b}}\}_{\bar{b} \in M^m}$, soit $A = \cup\mathcal{A}$ et soit $f : A \to M$ une fonction.

(1) Montrer que f est D-définissable si et seulement si toutes les restrictions $f \restriction A_{\bar{b}}$ sont D-définissables.

(2) Que peut-on dire si D est infini ?

Solution 2. Supposons qu'il existe $\phi \in \mathcal{F}_{n+1}(\mathcal{L}_D)$ tel que $f(a_1, \ldots, a_n) = y$ si et seulement si $\mathcal{M}_D \models \phi(\bar{a}, y)$. Alors $f \restriction_{A_{\bar{b}}} (\bar{a}) = y$ si et seulement si $\mathcal{M}_D \models \varphi(\bar{a}, \bar{b}) \wedge \phi(\bar{a}, y)$, où φ est la formule qui définit la famille $\{A_{\bar{b}}\}_{\bar{b} \in D^m}$. Réciproquement, s'il existe $\phi_{\bar{b}}$ qui définit chaque $f \restriction_{A_{\bar{b}}}$, on a que $f(\bar{a}) = y$ si et seulement si

$$\mathcal{M}_D \models \bigvee_{\bar{b} \in D^m} \varphi(\bar{a}, \bar{b}) \wedge \phi_{\bar{b}}(\bar{a}, y).$$

Dans le cas où D est infini, la première direction est vraie, mais la réciproque peut ne pas l'être, par exemple prendre $\mathcal{M} = \langle \mathbb{C}, +, -, \times, 0, 1 \rangle$ et $D = \mathbb{R}$. Prendre $A_b = \{a \in \mathbb{R}, a = b\} = \{b\}$, et $f : A_b \to \mathbb{C}$ comme l'identité. Puisque $A = \mathbb{R}$, et l'inclusion $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ n'est pas définissable, même si ses restrictions le sont.

Exercice 3. Soit $\bar{\mathbb{R}} = \langle \mathbb{R}, 0, 1, -, +, \cdot, < \rangle$ le corps ordonné des réels. Soit f un symbole unaire et $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{OR} \cup \{f\}$.

(1) Montrer que les $\mathcal{L}$-structures $\langle \bar{\mathbb{R}}, \sin\left(\frac{1}{1+x^2}\right) \rangle$ et $\langle \bar{\mathbb{R}}, \arctan x \rangle$ sont interdéfinissables.

(2) Montrer que $\bar{\mathbb{R}}$ est définissable dans la structure $\langle \mathbb{R}, +, \exp(x) \rangle$.

(3) Soit $\mathbb{R}_{\exp} = \langle \bar{\mathbb{R}}, \exp \rangle$ le corps ordonné exponentiel réel. Un *polynôme exponentiel* est une fonction $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telle qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m]$ tel que $F(x_1, \ldots, x_n) = P(x_1, \ldots, x_n, e^{x_1}, \ldots, e^{x_n})$. Montrer que tout ensemble $A \in \mathbb{R}^m$ existentiellement définissable dans $\mathbb{R}_{\exp}$ est une projection linéaire de l'ensemble des zéros d'un certain polynôme exponentiel F_A.

Solution 3.

(1) On définit d'abord $\sin(x) \restriction_{[0,1]}$ à partir de $\sin\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$:

$$\operatorname{graph} \sin(x) \restriction_{[0,1]} = \left\{ (x, y), (x = 0 \wedge y = 0) \vee \exists z (x(1 + x^2) = 1 \wedge y = \sin\left(\frac{1}{1 + z^2}\right) \right\}.$$

On peut maintenant définir

$$x = \frac{\pi}{2} \iff 2 \sin^2 \restriction_{[0,1]} (x/2) = 2$$

Et définir pour $0 < x < \pi/2$,

$$\tan(x) = \frac{2 \sin \restriction_{[0,1]} (x/2) \sqrt{1 - \sin^2 \restriction_{[0,1]} (x/2)}}{1 - 2 \sin^2 \restriction_{[0,1]} (x/2)}.$$

Et pour $-\pi/2 < x < 0$

$$\tan(x) = -\tan(-x).$$

Puis finalement poser

$$y = \arctan(x) \iff \tan(x) = y.$$

Pour l'autre direction, on peut définir $\tan x$ à partir de $\arctan x$ et poser

$$\sin\restriction_{[0,1]} x = \frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$$

définir $\sin(1/(1+x^2))$ comme ci-dessus.

(2) (a) $x = 0 \iff x + x = x$

(b) $1 = e^0$

(c) $y = -x \iff x + y = 0$

(d) $x > 0 \iff \exists y e^y = x$

(e) $xy = \exp(\log x + \log y)$

(3) Soit $\varphi(\bar{x}, \bar{c})$ une formule existentielle dans $\mathcal{L}_{\text{exp}}$ avec paramètres $\bar{c} \in \mathbb{R}$. On peut supposer que φ a la forme

$$\varphi(\bar{x}, \bar{c}) = \exists z_1, \ldots, \exists z_n \bigvee_{i=1}^{l} \bigwedge_{j=1}^{s} \theta_{ij}(\bar{x}, \bar{z}, \bar{c})$$

où θ_{ij} est atomique ou $\neg$-atomique. On sait que les formules atomiques ont la forme $t_1 = t_2, t_1 < t_2, t_1 = 0$ ou $t_1 < 0$ pour t_1, t_2 des termes avec paramètres $\bar{c}$. On peut remplacer dans θ_{ij}, $t \neq 0$ par $t < 0 \wedge -t < 0$ et $t < 0$ par $\exists y t y^2 + 1 = 0$ $t \neq 0$, et $t_1 = t_2$ par $t_1 - t_2 = 0$. Autrement dit, on peut supposer que θ_{ij} est de la forme $t = 0$. On montre maintenant par récurrence sur $t(\bar{x}, \bar{c})$ que tout terme peut être remplacé par une conjonction de formules existentielles ne contenant que des termes de la forme $F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{c})$, où F est un polynôme exponentiel et $\bar{y}$ sont de nouvelles variables. Autrement dit, $t(\bar{x}, \bar{c}) = 0$ devient un système d'équations polynomiales exponentielles sur les variables $\bar{y}$.

Si $t = c$ alors $c = 0$ est déjà de la forme voulue.

Si $t = t_1 + t_2$ alors, puisque la somme de polynômes exponentiels est aussi un polynôme exponentiel, on peut simplement additionner chacune des lignes de chaque système d'équations pour en obtenir un pour $t = 0$.

Le cas $t_1 t_2$ est similaire.

Si $t(\bar{x},\bar{c}) = e^{t_1(\bar{x},\bar{c})}$, alors on peut remplacer

$$t(\bar{x},\bar{c}) = 0 \iff \exists w e^w = 0 \wedge w = t_1(\bar{x},\bar{c})$$

et ensuite on peut appliquer la récurrence sur t_1, en ajoutant la variable w à notre polynôme exponentiel.

On peut alors supposer (en renommant les variables et réindexant) que θ_{ij} a la forme $F_{ij}(\bar{x},\bar{z},\bar{c}) = 0$ pour un certain polynôme exponentiel. De sorte que

$$\varphi(\bar{x},\bar{c}) = \exists z_1,\ldots,\exists z_n \bigvee_{i=1}^{l} \bigwedge_{j=1}^{s} F_{ij}(\bar{x},\bar{z},\bar{c}) = 0.$$

Il est clair que l'ensemble des zéros de

$$F = \sum_{i=1}^{l} \left(\prod_{j=1}^{s} F_{ij}(\bar{x},\bar{c}) \right)^2$$

définit le même ensemble que $\varphi(\bar{x},\bar{c})$.