Université de Paris **(Date : 08/11/2020)**

UFR Mathématiques

Théorie des ensembles, Devoir Maison

Professor: A. Vignati Juan Ignacio Padilla, M2 LMFI

Exercice 1. Montrer que ω_1 muni de la topologie de l'ordre n'est pas métrisable.

Solution.

Supposons qu'il est métrisable, avec une fonction métrique $d : \omega_1 \times \omega_1 \to \mathbb{R}$. On désigne la *sphère de centre* α *et de rayon* r par

$$B_r(\alpha) = \{\beta \in \omega_1, d(\alpha, \beta) < r\}.$$

Rappelons que si X est un espace topologique et $A \subseteq X$, on dit que A est *dense* si son adhérence topologique $\bar{A} = X$ et on dit que X est *séparable* s'il contient un sous-ensemble dénombrable dense. On voit d'abord que ω_1 n'est pas séparable : soit $C \subseteq \omega_1$ dénombrable, et soit $\alpha = \sup C < \omega_1$. Alors on a $C \subseteq [0, \alpha] \subsetneq \omega_1$ donc C est contenu dans un ensemble fermé propre, par conséquent il ne peut pas être dense.

Lemme : Il existe $\varepsilon > 0$ et un ensemble non dénombrable $C \subseteq \omega_1$ tel que pour tous $x \neq y \in C$, $d(x, y) > \varepsilon$.

Preuve : On va construire C et ϵ. D'abord, on définit une suite $\{\alpha_\beta, \beta < \omega_1\}$ et une fonction $k : \omega_1 \to \mathbb{N}$ par récurrence par

— $\alpha_0 = 0$, $k_0 = 0$.

— Supposons que α_γ a été défini pour tout $\gamma < \beta$. Alors $X = \{\alpha_\gamma, \gamma < \beta\}$ est dénombrable, donc il ne peut pas être dense. On choisit $\alpha_\beta \in \omega_1 \setminus \bar{X}$, et on choisit k_β tel que $B_{1/k_\beta}(\alpha_\beta) \cap X = \varnothing$. Cela implique que pour tout $\gamma \leq \beta$, $d(\alpha_\gamma, \alpha_\beta) > 1/k_\beta$.

Puisque k peut être considéré comme une application de ω_1 vers ω, alors k est régressive, donc il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que $C = \{\alpha_\gamma \in \omega_1, k_\gamma = K\}$ est non dénombrable. Étant donné $\alpha_{\gamma_1}, \alpha_{\gamma_2} \in C$ avec $\gamma_1 > \gamma_2$, par construction, $d(\alpha_{\gamma_1}, \alpha_{\gamma_2}) > 1/k_{\gamma_2} = 1/K$. On peut alors prendre $\varepsilon = 1/K$.

Pour montrer le résultat, considérons une suite quelconque $\{\alpha_n, n < \omega\}$ dans C, puisqu'elle est dénombrable, elle converge dans la topologie de l'ordre (plus précisément $\alpha = \sup \alpha_n < \omega_1$), mais comme on suppose que la topologie métrique coïncide avec celle de l'ordre, on doit avoir

$$\lim_{n\to\infty} d(\alpha_n, \alpha) = 0.$$

En effet, pour tout $\epsilon > 0$ comme les topologies coïncident, $B_\epsilon(\alpha)$ contient une queue de α, donc en particulier contient un certain α_n. Par l'inégalité triangulaire, $d(\alpha_m, \alpha_n) \leq d(\alpha_n, \alpha) + d(\alpha_m, \alpha)$, donc on obtient

$$\lim_{n,m\to\infty} d(\alpha_n, \alpha_m) = 0$$

cela contredit le fait que deux membres quelconques de C sont distants d'au moins ε. Notre hypothèse initiale était donc incorrecte, ω_1 ne peut pas être métrisable.

Exercice 2. Soit α un ordinal dénombrable.

(1) Montrer que la topologie de l'ordre sur α coïncide avec la topologie induite $\alpha \subseteq \omega_1$.

(2) Montrer que la topologie de l'ordre sur α est métrisable.

(3) En déduire que si $X \subseteq \omega_1$, X est métrisable avec la topologie de l'ordre induite.

Solution.

(1) Soient τ_o, τ_s les topologies de l'ordre et induite, respectivement. Il est clair que $\tau_o \subseteq \tau_s$ puisque tout intervalle ouvert dans α est aussi ouvert dans ω_1. Pour voir l'autre direction, considérons l'ensemble τ_s-ouvert $U = \alpha \cap (\beta, \gamma)$ pour un intervalle ouvert (β, γ) dans ω_1. Si $\beta \geq \alpha$, alors $U \cap \alpha = \varnothing$ donc il est ouvert, sinon $U \cap \alpha = (\beta, \min(\alpha, \gamma))$, qui est τ_o-ouvert.

(2) Soit $\phi : \alpha \to \mathbb{Q}$ un plongement d'ordre. On va montrer que α est homéomorphe à son image par ϕ. Puisque ϕ est injectif, on n'a pas besoin de prouver la bijectivité. Remarquons que pour tous $\gamma_1 < \gamma_2 < \alpha$, on a $\phi[(\gamma_1, \gamma_2)] = (\phi(\gamma_1), \phi(\gamma_2))$ (parce que ϕ préserve l'ordre), et pour tous $p < q \in \mathbb{Q}$, $\phi^{-1}((p,q) \cap \mathrm{Im}(\phi)) = (\gamma_p, \delta_p)$ où $\gamma_p = \min\{\beta < \alpha, \phi(\beta) > p\}$ et $\delta_p = \sup\{\beta < \alpha, \phi(\beta) < q\}$. Donc, on a que ϕ et ϕ^{-1} préservent tous deux les ensembles ouverts par image réciproque. Alors, on peut métriser α comme $d(\beta, \gamma) = |\phi(\beta) - \phi(\gamma)|$ (on copie la métrique de l'image homéomorphe de α dans $\mathbb{Q}$).

(3) Enfin, si $X \subseteq \omega_1$ est borné, il est dénombrable (sinon $\sup X$ serait un ordinal non dénombrable sous ω_1), et donc métrisable par les arguments précédents.

Exercice 3. Soit $X \subseteq \omega_1$. Montrer que si X est un club, alors $X \approx \omega_1$ (espaces homéomorphes). En déduire que les clubs ne sont pas métrisables.

Solution. Considérons la fonction $f : \omega_1 \to X$ définie par récurrence par

— $f(0) = \min X$.

— $f(\alpha + 1) = \min\{x \in X, x > f(\alpha)\}$.

— Si α est limite et $f(\beta)$ est défini pour tout $\beta < \alpha$, on pose $f(\alpha) = \sup_{\beta<\alpha} f(\beta)$. Ceci est bien défini puisque X est un club, donc on peut prendre le sup et rester dans X.

Remarquons que, par construction f respecte les suprema, et donc f est continue (cela a été prouvé au TD1). Clairement f est injectif, montrons que f est surjectif par contradiction : soit $x = \min(X \setminus f[\omega_1])$. Soit $A = \{\beta < \omega_1, f(\beta) < x\}$, remarquons que A est borné par x puisque pour tout β, $f(\beta) \geq \beta$. Soit $\alpha = \sup A$, donc on a $f(\alpha) < x$ par monotonie, et aussi $f(\alpha + 1) > x$, parce que sinon $\alpha + 1$ serait dans A (les inégalités sont toutes deux strictes puisque x n'est pas dans l'image de f). On a donc $f(\alpha) < x < f(\alpha+1)$ de sorte que x est inférieur à l'élément minimum de X supérieur à $f(\alpha)$ (définition de $f(\alpha+1)$), donc on a atteint une contradiction, et f est donc surjectif. Enfin, puisque f est aussi un plongement d'ordre, pour tous $\gamma < \beta < \omega_1$, $f[(\gamma, \beta)] = (f(\gamma), f(\beta)) \cap X$ ce qui signifie que f est une application ouverte. Tout cela montre que f est un homéomorphisme. Pour conclure, si X était métrisable, alors ω_1 le serait aussi, une contradiction avec ex1, puisque les homéomorphismes préservent la métrisabilité (car ils copient essentiellement la topologie).

Exercice 4. Si $S \subseteq \omega_1$ est stationnaire, alors il n'est pas paracompact.

Solution. Montrons d'abord que si C est un club, alors $S \cap C$ est stationnaire : en effet si C' est un club quelconque, puisque $C \cap C'$ est aussi un club, alors $(S \cap C) \cap C' = S \cap (C \cap C')$ est non vide, donc $S \cap C$ est un club. Cela nous permet en particulier de supposer que S ne contient que des points limites, puisqu'on peut se restreindre à l'intersection de S et du club des ordinaux limites. Considérons le recouvrement de S donné par la famille $U_\alpha = [0, \alpha + 1)$ pour $\alpha \in S$. Supposons par contradiction qu'il existe un recouvrement $\mathcal{V}$ qui est un raffinement localement fini de $\mathcal{U}$. Alors par définition, pour tout $\alpha \in S$ il existe un voisinage de α n'intersectant qu'un nombre fini d'éléments de $\mathcal{V}$, plus précisément, puisque les voisinages ouverts contiennent des queues d'éléments limites, il existe $\beta(\alpha) < \alpha$ tel que $[\beta(\alpha), \alpha + 1)$ n'intersecte qu'un nombre fini d'éléments de $\mathcal{V}$. La fonction $\alpha \mapsto \beta(\alpha)$ est donc régressive, et par le lemme de Pressing Down de Fodor, il existe un $\beta < \omega_1$

fixé et un sous-ensemble stationnaire $T \subseteq \omega_1$ tel que pour tout $\alpha \in T$, $[\beta, \alpha+1)$ n'intersecte qu'un nombre fini d'éléments de $\mathcal{V}$.

On construit une suite $\{\alpha_n, n < \omega\} \subseteq T$ en prenant $\alpha_0 \in T$ un élément quelconque plus grand que β. Si α_n est défini, supposons que $[\beta, \alpha_n + 1)$ intersecte $m_n < \omega$ éléments de $\mathcal{V}$. Puisque $\mathcal{V}$ est un raffinement de $\mathcal{U}$, il existe γ_n tel que l'union de ces m_n ensembles dans $\mathcal{V}$ est contenue dans $[0, \gamma_n)$. On choisit $\alpha_{n+1} > \gamma_n$ dans T. Alors l'intervalle $[0, \alpha_{n+1} + 1]$ intersecte au moins $m_n + 1$ éléments dans $\mathcal{V}$, parce que α_{n+1} doit être dans un certain $V \in \mathcal{V}$ non inclus parmi les autres m_n (grâce au fait que $\mathcal{V}$ est aussi un recouvrement). En posant $\alpha = \sup \alpha_n$ on observe que $[\beta, \alpha + 1)$ intersecte une infinité d'ensembles dans $\mathcal{V}$, mais $\alpha \in T$, c'est une contradiction.

Exercice 5. Si X est un espace topologique métrisable, X est paracompact. En déduire que les ensembles stationnaires dans ω_1 ne sont pas métrisables.

Solution. Soit $\{U_\alpha, \alpha < \kappa\}$ un recouvrement ouvert de X et supposons que d est une fonction métrique. On définit pour $n > 1$ (par récurrence) les ensembles $U_{\alpha,n}$ comme l'union de toutes les sphères de la forme $B_{2^{-n}}(x)$ où x satisfait les conditions suivantes :

(1) α est le plus petit ordinal tel que $x \in U_\alpha$.

(2) Pour tout $\beta \in \kappa$, $x \notin U_{\beta,i}$ si $i < n$.

(3) $B_{3 \cdot 2^{-n}}(x) \subseteq U_\alpha$.

On va montrer que cette famille est un raffinement localement fini de U qui est aussi un recouvrement. Remarquons aussi que $U_{\alpha,n}$ sont tous des ensembles ouverts, étant des unions de sphères.
D'abord, il est clair que c'est un raffinement puisque chacune des sphères qui composent $U_{\alpha,n}$ sont contenues dans U_α par (3). Ensuite, pour vérifier que c'est un recouvrement, soit $x \in X$, et soit α minimal tel que $x \in U_\alpha$. Puisque U_α est ouvert, on peut choisir n assez grand pour que $B_{3 \cdot 2^{-n}}(x) \subseteq U_\alpha$. Donc on a (1) et (3), si x satisfait (2) alors automatiquement $x \in U_{\alpha,n}$, et sinon $x \in U_{\beta,i}$ pour un certain β et un certain $i < n$. Dans tous les cas, cela montre que cette famille recouvre X.
Pour prouver qu'elle est localement finie, soit $x \in X$ contenu dans un certain $U_{\alpha,n}$, et choisissons k assez grand pour que $B_{2^{-k}}(x) \subseteq U_{\alpha,n}$. On affirme que $B_{2^{-k-n}}(x)$ n'intersecte qu'un nombre fini de $U_{\beta,i}$.

(Cas 1 : $i < n + k$) On va montrer que dans ce cas, $B_{2^{-k-n}}(x)$ peut intersecter au plus un des $U_{\beta,i}$. On va montrer cela en prouvant que tout élément de $U_{\beta,i}$ est à distance au moins 2^{-i} de tout élément dans $U_{\gamma,i}$, pour tous $\beta < \gamma$: en effet soient x_1, x_2 satisfaisant (1),(2),(3) tels que si

$a \in B_{2^{-i}}(x_1) \subseteq U_{\beta,i}$ et $b \in B_{2^{-i}}(x_2) \subseteq U_{\gamma,i}$. Alors, par (3) $B_{3 \cdot 2^{-i}}(x_1) \subseteq U_{\beta,i}$ et par (1), $x_2 \notin U_\beta$ (par minimalité de γ). Donc $d(x_1, x_2) \geq 3 \cdot 2^{-i}$ et par conséquent $d(a, b) \geq 2^{-i}$: sinon si $d(a, b) < 2^{-i}$, on aurait par l'inégalité triangulaire $d(x_1, x_2) \leq d(a, x_1) + d(a, b) + d(b, x_2) < 3 \cdot 2^{-i}$ (ceci se voit mieux avec un dessin). Mais $i \leq n + k - 1$, donc $d(a, b) \geq 2^{-n-k+1}$ donc notre sphère $B_{2^{-k-n}}(x)$ ne peut pas intersecter à la fois $U_{\beta,i}$ et $U_{\gamma,i}$.

(Cas 2 : $i \geq n + k$) Dans ce cas, on va montrer que $B_{2^{-k-n}}(x)$ n'intersecte aucun autre $U_{\beta,i}$. Soit $U_{\beta,i}$ l'union de sphères de la forme $B_{2^{-i}}(y)$ pour y satisfaisant (1),(2),(3). Par (2), et parce que $i \geq n$, $y \notin U_{\alpha,n}$. Maintenant, puisque $B_{2^{-k}}(x) \subseteq U_{\alpha,n}$, on a $d(x, y) \geq 2^{-k}$, cela implique que

$$B_{2^{-k-n}}(x) \cap B_{2^{-i}}(y) = \varnothing$$

parce que le rayon de chaque sphère est inférieur à la moitié de la distance entre leurs centres. En prenant l'union sur tous les y satisfaisant (1),(2),(3), on a montré que $B_{2^{-k-n}}(x) \cap U_{\beta,i} = \varnothing$.

Enfin, pour conclure : si un ensemble stationnaire $X \subseteq \omega_1$ est métrisable, alors il est paracompact par ces arguments, mais cela contredit l'exercice 4.

Exercice 6. Montrer que si $S \subseteq \omega_1$ est non stationnaire, il possède une base σ-localement finie. En déduire que $S \subseteq \omega_1$ est métrisable si et seulement si S est non stationnaire.

Solution. On commence par un lemme de topologie.

Lemme : Si X est un espace topologique T_3, alors tout $Y \subseteq X$ est aussi T_3 avec la topologie induite.

Preuve : Soient $y \in Y$ et $C \cap Y$ avec $C \subseteq X$ fermé tel que $y \notin C$. Puisque X est T_3, on choisit des ouverts disjoints U_1, U_2 contenant respectivement y et C. Alors $U_1 \cap Y$ et $U_2 \cap Y$ sont Y-ouverts et séparent y et $C \cap Y$.

D'abord, montrons que ω_1 est T_3 (tout ordinal est T_3). Tout point est fermé puisque pour tout $\alpha \in \omega_1$, $\omega_1 \setminus \{\alpha\} = [0, \alpha) \cup (\alpha, \omega_1)$. Soient $\alpha \in \omega_1$ et $C \subseteq \omega_1$ fermé tel que $\alpha \notin C$. On sait que les ordinaux successeurs sont des points isolés dans la topologie de l'ordre (cela est clair par $\{\gamma + 1\} = (\gamma, \gamma + 2)$), donc on peut supposer que α est limite et écrire $C = C' \cup C''$ où C' contient les éléments successeurs dans C et C'' les éléments limites, aussi C' est ouvert puisqu'il ne contient que des points isolés. Pour tout $\beta \in C''$ on peut trouver γ_β tel que $\alpha \notin (\gamma_\beta, \beta + 1)$ (puisque $\{\alpha\}$ est fermé) et pour la même raison on peut trouver γ_α tel que $(\gamma_\alpha, \alpha + 1) \cap C = \varnothing$. On prend alors comme ouverts séparants

$$U_1 = \bigcup_{\beta \in C''} (\gamma_\beta, \beta+1) \cup C' \ , \ U_2 = (\gamma_\alpha, \alpha+1).$$

On montre maintenant que si $S \subseteq \omega_1$ est non stationnaire, alors il possède une base σ-localement finie. Puisque $\omega_1 \setminus S$ contient un club C, alors S est contenu dans $\omega_1 \setminus C$, un ensemble ouvert. On peut alors poursuivre la construction suivante dans $\omega_1 \setminus C$, ou simplement supposer que S est ouvert et le faire pour S. Supposons que S est ouvert, alors par définition de notre topologie, $S = \cup_{\alpha\in\kappa} S_\alpha$ pour une famille d'intervalles ouverts S_α. Puisque l'union d'intervalles ouverts d'intersection non vide est elle-même un intervalle ouvert, on peut supposer (quitte à fusionner certains S_α) que S est l'union d'intervalles ouverts disjoints. Aussi, si l'un des S_α est non borné, on obtiendrait que pour un certain $\alpha < \omega_1$, $[\alpha, \omega_1) \subseteq S$, ce qui est impossible puisque $\omega_1 \setminus S$ est non borné, donc chaque S_α doit être borné et donc dénombrable.

Par l'ex3, chaque S_α est métrisable (et dénombrable par le fait d'être borné), donc considérons la base dénombrable $S_{\alpha,n}$ constituée de tous les $B_{1/n}(x) \cap S_\alpha$ pour $x \in S_\alpha$ et $n \in \mathbb{N}$. Cette famille est bien une base : elle recouvre clairement S_α, et aussi si $z \in B_{r_1}(x) \cap B_{r_2}(y) \cap S_\alpha$, en choisissant n tel que $1/n < \min\{r_1 - d(z,x), r_2 - d(z,y)\}$, on a $B_{1/n}(z) \cap S_\alpha \subseteq B_{r_1}(x) \cap B_{r_2}(y) \cap S_\alpha$. Énumérons $S_{\alpha,n} = \{S^1_{\alpha,n}, S^2_{\alpha,n}, \dots\}$. Maintenant, définissons

$$\mathcal{B} = \bigcup_{k<\omega} \{S^k_{\alpha,n}, \alpha \in \kappa\}.$$

Chacun des $\{S^k_{\alpha,n}, \alpha \in \kappa\}$ est localement fini, puisque si $x \in S^k_{\alpha,n}$, on peut toujours trouver un voisinage ouvert de x contenu dans $S^k_{\alpha,n}$ qui n'intersecte qu'un seul ensemble d'indice k ($S^k_{\alpha,n}$ lui-même), parce que les S_α sont pris ouverts et disjoints. Puisque $\mathcal{B}$ contient des bases pour chaque S_α, cela signifie que $\mathcal{B}$ est une base σ-localement finie pour S. Pour conclure, si S est non stationnaire, alors il possède une base σ-localement finie et puisqu'on a prouvé que S est aussi T_3, par le théorème de Nagata-Smirnov, S est métrisable. Réciproquement si S est métrisable mais aussi stationnaire, alors par l'ex3, $\omega_1 \approx S$ ce qui implique que ω_1 est métrisable, contredisant l'ex1.