IMAGINARIOS EN PARES DE CUERPOS ALGEBRAICAMENTE CERRADOS

Juan Ignacio Padilla Barrientos

Directora de tesis: Zoé CHATZIDAKIS

Máster en Lógica y Fundamentos de la Informática

Septiembre 2021

Resumen

Consideremos la teoría T de los cuerpos algebraicamente cerrados de una característica dada p, en el lenguaje $L = \{0, 1, +, -, \cdot\}$. Extendamos L a un lenguaje L_P agregando un predicado P, el cual se interpreta en un modelo $M \models T$ como una subestructura elemental propia. Dado que T tiene eliminación de cuantificadores, estos pares pueden axiomatizarse expresando $P \models T$, y $\exists x \neg P(x)$, obteniendo una teoría T_P de pares elementales $P \prec M$. El objetivo principal es agregar suertes al lenguaje L_P, para obtener *eliminación débil de imaginarios*. Keisler en [5] demostró que T_P es completa, y en [2], Buechler mostró que T_P es una teoría ω-estable, de rango de Morley ω. Este trabajo está basado en gran medida en [9], de Anand Pillay.

Índice

1. Preliminares sobre Teoría de la Estabilidad

Sea T una teoría completa en un lenguaje L. Si $M \models T$, y $A \subseteq M$, denotamos el espacio de n-tipos con parámetros en A por $S_n(A)$, y definimos $S(A) = \cup_{i<\omega} S_n(A)$. Recordemos que una teoría es κ-estable si para todo $M \models T$ y todo $A \subseteq M$, si $|A| \leq \kappa$, entonces $|S_1(A)| \leq \kappa$, y decimos que T es estable si es κ-estable para algún cardinal κ. Utilizaremos una caracterización equivalente de la estabilidad, dada por la definibilidad de tipos.

Definición 1.1. Sea $M \models T$, y sean A, B subconjuntos de M. Un tipo $p(x) \in S_n(A)$ es *definible* sobre B si para toda L-fórmula $\varphi(x, y)$ existe una $L(B)$-fórmula $\psi(y)$ tal que para todo $a \in A^{|y|}$, $\varphi(x, a) \in p$ si y solo si $M \models \psi(a)$. La fórmula $\psi(y)$ se escribirá como $d_p(\varphi)(y)$, y el conjunto de las $d_p(\varphi)(y)$, donde $\varphi(x, y)$ varía sobre las L-fórmulas, se llama un *esquema de definición* para p.
La siguiente proposición es el Corolario 8.3.2 de [13].

Proposición 1.2. *La teoría T es estable si y solo si todos los tipos son definibles.*

A lo largo de esta sección, suponemos que T es una teoría completa, ω-estable arbitraria. Trabajaremos dentro de un modelo saturado M de T, y los tipos sobre M se llamarán *tipos globales.* Procedemos enunciando algunas definiciones y resultados sobre bases canónicas y bifurcación (forking) en este contexto estable.

Definición 1.3. Sea $E(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ una L-fórmula que define una relación de equivalencia sobre M^n. Por *elementos reales*, nos referimos a las tuplas en M^n, mientras que las clases de equivalencia de elementos reales módulo E se llamarán *elementos imaginarios.*

Definición 1.4. Sea $X \subseteq M$ un conjunto definible. Una tupla $c \subset M$ se llama un *parámetro canónico* (o código) de X si c es fijado por exactamente los mismos automorfismos de M que fijan X conjuntistamente.
Es posible extender T a una nueva teoría T^{eq} (en un nuevo lenguaje L^{eq}), en la cual todo conjunto definible tiene un código. Sea $(E_i)_{i\in I}$, una enumeración de toda relación de equivalencia $\varnothing$-definible sobre n_i-tuplas. Para definir L^{eq}, agregamos a L una nueva suerte S_i para cada i, que debe interpretarse como M^{n_i}/E_i. Consideremos la estructura multi-sorteada $M^{\mathrm{eq}} = (M, M^{n_i}/E_i)_{i\in I}$, y definamos para todo i la proyección natural $\pi_i : M^{n_i} \mapsto M^{n_i}/E_i$ que envía a a a/E_i. La teoría de M^{eq} se denotará T^{eq}. Por el Corolario 8.4.6 de [13], T^{eq} tiene *eliminación de imaginarios:* todo imaginario es interdefinible con

una tupla real. Hay también tres nociones relacionadas que se usarán a lo largo de este trabajo.

Definición 1.5.

I) T tiene *eliminación de imaginarios finitos* si para todo n, todo conjunto finito de n-tuplas tiene un parámetro canónico.

II) T tiene *eliminación débil de imaginarios*, si para todo imaginario e existe una tupla real d tal que $e \in \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(c)$ y $d \in \mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(e)$.

III) T tiene *eliminación geométrica de imaginarios*, si para todo imaginario e existe una tupla real d tal que $e \in \mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(c)$ y $d \in \mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(e)$.

Procedemos ahora con un repaso de la bifurcación en el contexto **ω-estable**. Para un conjunto definible $X \subseteq M$, denotamos por $RM(X)$ su rango de Morley, y $DM(X)$ su grado de Morley. Recordemos que las teorías ω-estables son *totalmente trascendentes*: todo conjunto definible tiene un rango de Morley. Este rango también puede definirse para tipos: si $p \in S_n(A)$, entonces $RM(p)$ es el rango de Morley mínimo de una fórmula en p, y $DM(p)$ es el grado de Morley mínimo de una fórmula en p que tiene rango de Morley $RM(p)$.

Definición 1.6. (Bifurcación) Supongamos $A \subseteq B \subseteq M$, $p \in S_n(A)$, $q \in S_n(B)$, y $p \subseteq q$. Si $RM(p) = RM(q)$, entonces q es una extensión *no bifurcante* de p a B. De lo contrario, si $RM(p) < RM(q)$, decimos que q *bifurca sobre* A. Decimos que $p \in S_n(A)$ es *estacionario* si para todo $B \supseteq A$, existe una única extensión no bifurcante de p a B, o equivalentemente si $DM(p) = 1$.

Notación: Si $p \in S(A)$ y $C \subseteq A$, denotamos la restricción de p a $S(C)$ por $p \restriction C$. Si p es estacionario y $A \subseteq B$, denotamos la única extensión no bifurcante de p a $S(B)$ por $p|B$.

Definición 1.7. Sea $A \subseteq M$, $p \in S(A)$ un tipo estacionario. Una *base canónica* de p, denotada $\mathrm{Cb}(p)$, es una tupla $e \subseteq M^{\mathrm{eq}}$ tal que para todo $\sigma \in \mathrm{Aut}(M)$, $\sigma(p) = p$ si y solo si $\sigma(e) = e$ (esta tupla es única salvo interdefinibilidad). Si p no es estacionario, consideremos el conjunto finito $\mathcal{P}$ de extensiones no bifurcantes de p a M, y definamos $\mathrm{cb}(p)$ como un código para el conjunto $\{\mathrm{Cb}(q), q \in \mathcal{P}\}$; entonces todo automorfismo de M fija $\mathrm{cb}(p)$ si y solo si permuta $\mathcal{P}$ (ver Hecho 1.8 *(i)*).

Lo siguiente es un resumen de las propiedades de las bases canónicas que usaremos, pueden encontrarse como Proposición 2.20 y Observaciones 2.26, 3.19 en el Capítulo 1 de [8].

Hecho 1.8. *Sea $A \subseteq M$, $p \in S(A)$. Entonces*

(I) (Conjugación) El conjunto de automorfismos de M que fijan A punto por punto actúa transitivamente sobre $\mathcal{P}$.

(II) $\mathrm{cb}(p) \subseteq \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(A)$.

(III) Para todo $B \subseteq A$, p no bifurca sobre B si y solo si $\mathrm{cb}(p) \subseteq \mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(B)$.

(IV) Si p es estacionario, para todo $B \subseteq A$, p no bifurca sobre B y $p \upharpoonright B$ es estacionario si y solo si $\mathrm{Cb}(p) \subseteq \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(B)$.

(V) Si p es estacionario, y $(a_i, i < \omega)$ es una sucesión tal que para todo i, a_i realiza $p|A \cup \{a_j, j < i\}$, entonces $\mathrm{Cb}(p) \subseteq \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(a_0 \ldots, a_n)$ *para algún n.*

Lema 1.9. *Sea e un imaginario en M y sea a una tupla finita de reales tal que $e = f(a)$ para alguna función f $\varnothing$-definible. Entonces $e = \mathrm{cb}(\mathrm{tp}(a/e))$. Además, si $e' = \mathrm{Cb}(\mathrm{tp}(a/\operatorname{acl}^{\mathrm{eq}}(e)))$, entonces $e' \in \mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(e)$ y $e \in \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(e')$.*

Demostración. Sea $p = \mathrm{tp}(a/e)$ y $p' = \mathrm{tp}(a/\operatorname{acl}^{\mathrm{eq}}(e))$. Para ver por qué $e = \mathrm{cb}(\mathrm{tp}(a/e))$, consideremos la relación de equivalencia $E(x, y)$ dada por $f(x) = f(y)$; entonces e es un código para la clase de a. Sea $\mathcal{P}$ como en la Definición 1.7. Como $\mathcal{P}$ es finito, y e' es la base canónica de un elemento de $\mathcal{P}$, se sigue que $e' \in \mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(e)$. Ahora, supongamos $\sigma(e') = e'$ para algún automorfismo de M^{eq}; entonces $\sigma p' = p'$, así que ambas fórmulas $f(x) = e$ y $f(x) = \sigma(e)$ pertenecen a p', lo que implica $\sigma(e) = e$, de donde $e \in \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(e')$. □

Lema 1.10. *Sea e un imaginario en M y sea a una tupla finita de reales tal que $e = f(a)$ para alguna función f $\varnothing$-definible. Existe $a' \in M^{\mathrm{eq}}$ tal que $e \in \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(a')$ y $\mathrm{tp}(a'/e)$ es estacionario.*

Demostración. Sea $p = \mathrm{tp}(a/e)$ y sean $p_1, \ldots, p_n$ sus extensiones no bifurcantes a $\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(e)$. Sean $a_1, \ldots, a_n \in M$ tales que a_i realiza $p_i|\{a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n\}$. Sea a' un código de este conjunto de realizaciones. Entonces como $a \in \mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(a')$, existe una fórmula $\varphi(x, a')$ que aísla $\mathrm{tp}(a/a')$; así $M \models \forall x \varphi(x, a') \to f(x) = e$, pues f es $\varnothing$-definible, de donde $e \in \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(a')$. Además, todo automorfismo de M que fija e permuta $\{p_1, \ldots, p_n\}$, así que fija $\mathrm{tp}(a'/e)$. □

Definición 1.11. (Independencia) Sean $A, B, C \subseteq M$. Decimos que A es *independiente* de B sobre C, denotado

$$A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}_C B,$$

si para toda tupla finita a de A, $\mathrm{tp}(a/BC)$ no bifurca sobre C.
Lo siguiente es un resumen de las propiedades de la relación de independencia en el contexto ω-estable. Se encuentran como Teorema 8.5.5 de [13], y Lemas 6.3.16 a 6.3.21 de [7].

Hecho 1.12. *Sean $A, B, C, D \subseteq M$. La independencia por bifurcación tiene las siguientes propiedades.*

1. *(Monotonía) Si $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_C B$ y $B' \subseteq B$, entonces $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_C B'$.*
2. *(Transitividad) $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_C BD$ si y solo si $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_C B$ y $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{C,B} D$.*
3. *(Existencia) Todo $p \in S(A)$ tiene una extensión no bifurcante a todo conjunto que contiene A.*
4. *(Simetría) Si $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_C B$, entonces $B \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_C A$.*
5. *(Clausura algebraica) $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_C \mathrm{acl}(A)$.*

Definición 1.13. Sean $A, B \subseteq M$ y sea $p \in S(A)$ definible sobre B por un esquema d_p. Este esquema de definición se dice *bueno* (sobre B) si el conjunto

$$\{\varphi(x, m) \mid\ M \models d_p(\varphi)(m),\ m \in M,\ \varphi(x, y) \text{ una } L\text{-fórmula}\}$$

es un tipo global que extiende p.

Lema 1.14. *Sea $p \in S(A)$. Entonces p es estacionario si y solo si tiene una buena definición sobre A.*

Demostración. Si p es estacionario, sea q su extensión global no bifurcante. Entonces q es definible e invariante bajo todos los automorfismos que fijan A conjuntistamente, así que es definible sobre A. Esto da una buena definición para p. Recíprocamente, supongamos que p tiene una buena definición sobre A. Entonces existe una extensión global no bifurcante $p' \in \mathcal{P}$, definible sobre A. Como todos los elementos de $\mathcal{P}$ son conjugados sobre A, y p' es fijado por todo automorfismo que fija A conjuntistamente, debe ocurrir que $\{p'\} = \mathcal{P}$. Por lo tanto, p es estacionario. □

Lema 1.15. *Sea $a \in M$ una tupla y $A \subseteq M$. Supongamos que $p = \mathrm{tp}(a/A)$ es estacionario y sea $a' \in M$ una tupla tal que $a' \in \mathrm{dcl}(Aa)$. Entonces $\mathrm{tp}(a'/A)$ es estacionario.*

Demostración. Daremos un buen esquema de definición sobre A para $\text{tp}(a'/A)$. Sea $\varphi(x, y)$ una L-fórmula y $m \in M$ tal que $M \models \varphi(a', m)$. Por estacionariedad de p, existe una $L(A)$-fórmula $d_p(\varphi)(y)$ tal que $\varphi(x, m) \in \text{tp}(a/A)$ si y solo si $M \models d_p(\varphi)(m)$. Por hipótesis, existe una función g A-definible tal que $a' = g(a)$, entonces $\varphi(a', m) \in \text{tp}(a'/A)$ si y solo si $\varphi(g(x), m) \in \text{tp}(a/A)$ si y solo si $M \models d_p(\varphi(g(x), y))(m)$. Queda verificar que es un buen esquema. $\square$

Definición 1.16. Sea $p \in S(A)$ un tipo estacionario, y sea $B \supseteq A$. Decimos que p es *casi B-interno*, si existe $C \supseteq B$ con p teniendo una extensión no bifurcante $q \in S(C)$, una realización a de $q|B$, y $(b_1, \ldots, b_n) \in B^n$ tales que $a \in \text{acl}(C \cup \{b_1, \ldots, b_n\})$. Si la igualdad $a \in \text{dcl}(C \cup \{b_1, \ldots, b_n\})$ vale, entonces p es *B-interno*.

Lema 1.17. *Sean $p, q \in S(\text{acl}(e))$ tales que q es estacionario, P-interno, y $e = \text{Cb}(q)$. Sea $a = (a_1, \ldots, a_n)$ una sucesión de realizaciones de q, independientes sobre $\text{acl}(e)$, tales que $e \in \text{dcl}(a_1, \ldots, a_n)$. Entonces existe una función g definible sobre e y $c \in P$ tales que para toda realización d de q, $d = g(a, c)$, para algún $c \in P$.*

Demostración. Por P-internalidad de q, para toda realización d de q, existe $c_d \in P$ tal que $d \in \text{dcl}(\text{acl}(e) \cup c_d) \subseteq \text{dcl}(\text{acl}(a) \cup c) = \text{dcl}(a \cup c)$, donde la última igualdad es por definición de e. Por lo tanto, existe una función g definible sobre $\varnothing$ tal que $d = g(a, c_d)$. $\square$

Hecho 1.18. *(Sucesión de Morley) Para todo tipo $p \in S(A)$, existe una sucesión de Morley $I = (a_i, i < \omega)$, es decir, una A-sucesión indiscernible de realizaciones de p tal que a_i realiza alguna extensión no bifurcante de p a $A \cup \bigcup_{j<i} a_i$. Además, dada cualquier sucesión $(b_i)_{i \in \omega}$ de realizaciones de p, existe una sucesión de Morley I cuyo tipo EM sobre A es el mismo que el de $(b_i)_{i<\omega}$.*

Hecho 1.19. *(Definibilidad del rango de Morley) Sea P una estructura fuertemente minimal, y sea $\varphi(x_1, \ldots, x_n, \bar{y})$ una fórmula con $\bar{y}$ variando sobre P. Entonces existen conjuntos P-definibles, $(Y'_{n,k})$, tales que para todo n, k y para todo $\bar{b} \in P$,*
$RM(\varphi(x_1, \ldots, x_n, \bar{b})) \geq k$ si y solo si $\bar{b} \in Y'_{n,k}$.

Demostración. Procedemos por inducción sobre n. Notemos que $Y'_{1,1}$ es definible ya que $RM(\varphi(x_1, \bar{b})) \geq 1$ si y solo si $\exists^\infty x_1 \varphi(x_1, \bar{b})$, lo cual es a su vez equivalente (por minimalidad fuerte de P) a $\exists^{\geq N} x_1 \varphi(x_1, \bar{b})$, para algún N. Además, notemos que

$$Y_{n,0} = \{\bar{b} \in M, \exists x_1, \ldots, x_n \varphi(x_1, \ldots, x_n, \bar{b})\}$$

es definible para todo n. Sea ahora $n > 0$, trabajaremos por inducción sobre $k > 0$. Para $\bar{b} \in P$, consideremos la $\bar{b}$-fórmula $\phi_{\bar{b}}(x_0, \ldots, x_{n-1})$ dada por $\exists x_n \varphi(x_0, \ldots, x_{n-1}, x_n, \bar{b})$. Si $RM(\phi_{\bar{b}}) \geq k$, entonces $\bar{b} \in Y'_{n,k}$, y si $RM(\phi_{\bar{b}}) < k$, consideremos en cambio la $L(\bar{b})$-fórmula $\psi_{\bar{b}}(x_0, \ldots, x_{n-1})$ dada por $\exists^\infty x_n \varphi(x_0, \ldots, x_{n-1}, x_n, \bar{b})$, entonces como la dimensión algebraica de una tupla en P coincide con su rango de Morley, tenemos en este caso que $RM(\psi_{\bar{b}}) \geq k-1$ si y solo si $\bar{b} \in Y'_{n,k}$. Hemos mostrado que $\bar{b} \in Y'_{n,k}$ si y solo si $RM(\phi_{\bar{b}}) \geq k$ o $RM(\psi_{\bar{b}}) \geq k-1$. La primera de estas dos condiciones es definible por nuestra hipótesis de inducción sobre n, mientras que la última es definible por inducción sobre k, así que $Y'_{n,k}$ también es definible. $\square$

2. Grupos Estables

Un grupo ω-estable es una estructura ω-estable $(G, \cdot, 1, \dots)$, donde $(G, \cdot, 1)$ es un grupo. En esta sección presentamos algunos conceptos y herramientas básicas utilizados en el estudio de grupos ω-estables. Para más detalles, ver [11] y el Capítulo 7 de [7]. A lo largo de esta sección G denotará un grupo infinito, ω-estable, definible dentro de un modelo saturado M de una teoría completa, ω-estable T.

Lema 2.1. *No existe una cadena estrictamente descendente infinita de subgrupos definibles $G > G_1 > G_2 > \dots$*

Demostración. Para todo subgrupo definible $H \leq G$, y todo $a \in G \backslash H$, la clase $aH \subseteq G$ es disjunta de H, y como $x \mapsto ax$ es una biyección definible, entonces $RM(H) = RM(aH)$. Si $G > G_1 > G_2 > \dots$ es una sucesión estrictamente decreciente, y si $[G_i : G_{i+1}]$ es infinito, entonces $RM(G_i) > RM(G_{i+1})$. Si $[G_i : G_{i+1}]$ es finito, entonces $DM(G_i) > DM(G_{i+1})$, y esto implica la existencia de una sucesión estrictamente decreciente respecto al orden lexicográfico $RM(G) \times \omega$, por lo tanto, esta sucesión no puede ser infinita. $\square$

Lema 2.2. *Existe un subgrupo normal definible $G^0 \leq G$ que está contenido en todo subgrupo de G de índice finito.*

Demostración. Sea $\mathcal{H}$ la familia de subgrupos definibles de G de índice finito. Afirmamos que existen $H_1, \dots, H_n$ en $\mathcal{H}$ tales que

$$\bigcap_{H \in \mathcal{H}} H = H_1 \cap \dots \cap H_n.$$

De lo contrario, para todo m existen $j_0, \dots, j_m$ tales que si $G_m = H_{j_0} \cap \dots \cap H_{j_m}$, entonces $G_0 > G_1 > G_2 > ...$, contradiciendo el Lema 2.1. Podemos entonces definir $G^0 = H_1 \cap \dots \cap H_n$. Si $h \in G$, como $x \mapsto hxh^{-1}$ es un automorfismo de grupo, tenemos que hG^0h^{-1} es un subgrupo definible con $[G : hG^0h^{-1}] = [G : G^0]$, así que $hG^0h^{-1} = G^0$ por minimalidad. $\square$

Lema 2.3. *Sea $A \subseteq M$. Si G es A-definible, entonces G^0 es A-definible.*

Demostración. Por el Lema 2.2, existe una $L(A)$-fórmula $\varphi(x, y)$ y $g \in G$ tales que la fórmula $\varphi(x, g)$ define G^0. Sea $n = [G : G^0]$, y consideremos

$$W = \{b \in G,\ \varphi(x, b) \text{ define un subgrupo de índice } n\ \},$$

un conjunto A-definible. Si $b \in W$ y $H = \varphi(G, b)$, entonces $H \cap G^0$ es un subgrupo de índice finito de G^0, así que $H \supseteq G^0$. Sin embargo, como $[G : H] = n$, tenemos $[H : G^0] = 1$, de donde $H = G^0$. Podemos entonces definir G^0 como $\{g \in G, \exists b\,(b \in W \wedge \varphi(g, b))\}$. $\square$

Definición 2.4. G es *conexo* si $G = G^0$.

Definición 2.5. Existe una acción de G sobre $S_1(G)$ dada por $g \cdot p = \{\varphi(x),\ \varphi(gx) \in p\}$. El *estabilizador* de p es el grupo

$$\mathrm{Stab}(p) = \{g \in G, g \cdot p = p\}.$$

Lema 2.6. $\mathrm{Stab}(p)$ *es un subgrupo definible de G, para todo $p \in S_1(G)$.*

Demostración. Para $\varphi(x, y)$ una L-fórmula, sea

$$\mathrm{Stab}_\varphi(p) = \{g \in G \mid p_\varphi = g \cdot p_\varphi\},$$

donde

$$p_\varphi = \{\varphi(x, g) \mid g \in G, \varphi(x, g) \in p\} \cup \{\neg\varphi(x, g) \mid g \in G, \varphi(x, g) \notin p\}.$$

Un cálculo simple muestra que para todo φ, $\mathrm{Stab}_\varphi(p) \leq G$. Por estabilidad, existe un esquema de definición para p, digamos d_p. Así,

$$\mathrm{Stab}_\varphi(p) = \{g \in G |\ \forall h(d_p(\varphi)(h) \leftrightarrow d_p(\varphi)(hg))\}.$$

Notemos que $\mathrm{Stab}(p) = \bigcap_{\varphi(x,y) \in L} \mathrm{Stab}_\varphi(p)$. Por el Lema 2.1, existen $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in L$ tales que $\mathrm{Stab}(p) = \mathrm{Stab}_{\varphi_1}(p) \cap \cdots \cap \mathrm{Stab}\,\varphi_n(p)$, lo que concluye la demostración. $\square$

Lema 2.7. *Sea $p \in S_1(G)$.*

(I) $RM(\mathrm{Stab}(p)) \leq RM(p)$.

(II) $\mathrm{Stab}(p) \leq G^0$.

Demostración. Sean $a, b \in M$ tales que a realiza p, $b \in \mathrm{Stab}(p)$ satisface $RM(\mathrm{tp}(b/G)) = RM(\mathrm{Stab}(p))$, y $a \perp_G b$. Entonces

$$RM(\mathrm{tp}(ba/G, a)) = RM(\mathrm{tp}(b/G, a)) = RM(\mathrm{tp}(b/G)) = RM(\mathrm{Stab}(p)).$$

Además, como ba realiza p, tenemos $RM(\mathrm{tp}(ba/G,a)) \leq RM(\mathrm{tp}(ba/G)) = RM(p)$, demostrando *(i)*. Sea ahora $c \in \mathrm{Stab}(p)$, y sea $\varphi(x)$ definiendo G^0 (posiblemente con parámetros en M). Sea $g \in G$ tal que $\varphi(g^{-1}x) \in p$, así que $\varphi(g^{-1}cx) \in p$. Sea $G \preceq H$ y $h \in H$ realizando p. Entonces $g^{-1}ch \in H^0$ y $g^{-1}h \in H^0$. Así $(g^{-1}h)^{-1}g^{-1}ch = h^{-1}ch \in H^0$, y como H^0 es normal, $c \in G^0$ por el Lema 2.3. $\square$

Definición 2.8. Un tipo $p \in S_1(G)$ es *genérico* si $RM(p) = RM(G)$. Un elemento $a \in G(M)$ es genérico sobre $A \subseteq G$ si $RM(\mathrm{tp}(a/A)) = RM(G)$.

Lema 2.9. *Un tipo $p \in S_1(G)$ es genérico si y solo si $[G : \mathrm{Stab}(p)]$ es finito.*

Demostración. Supongamos que p es genérico. Notemos que $\{ap,\ a \in G\}$ es finito, ya que hay solo un número finito de tipos de rango de Morley máximo. Elijamos $b_1, \ldots, b_n \in G$ tales que si $a \in G$, entonces $ap = b_ip$ para algún $i \leq n$. Si $ap = b_ip$ entonces $b_i^{-1}a \in \mathrm{Stab}(p)$ y $a \in b_i \mathrm{Stab}(p)$. Por lo tanto, $[G : \mathrm{Stab}(p)] \leq n$. Supongamos ahora que $\mathrm{Stab}(p)$ tiene índice finito, así que $RM(G) = RM(\mathrm{Stab}(p))$, pero $RM(\mathrm{Stab}(p)) \leq RM(p)$ por el Lema 2.7, así que p es genérico. $\square$

Corolario 2.10.

(i) *Un tipo $p \in S_1(G)$ es genérico si y solo si* $\mathrm{Stab}(p) = G^0$

(ii) *G tiene un único tipo genérico si y solo si G es conexo.*

Demostración.

(i) Por el Lema 2.9, si p es genérico, $\mathrm{Stab}(p)$ tiene índice finito, tenemos $G^0 \leq \mathrm{Stab}(p)$. Por el Lema 2.7 *(ii)*, tenemos $G^0 \geq \mathrm{Stab}(p)$. La otra dirección es clara por el Lema 2.9, ya que G^0 tiene índice finito.

(ii) Sea p el único tipo genérico. Para todo $a \in G$, ap es genérico, así que $ap = p$. Por lo tanto, $G = \mathrm{Stab}(p) = G^0$ por *(i)*. Recíprocamente, supongamos $G = G^0$, y por contradicción, supongamos que p, q son tipos genéricos distintos. Sean a, b realizando p, q respectivamente, con $b \in H \succeq G$ y sea a' realizando $p|H$. Entonces, $\mathrm{tp}(a, b/G) = \mathrm{tp}(a', b/G)$, y $p|H$ es un genérico de H. Por *(i)*, $\mathrm{Stab}(p|H) = H^0 = H$. Así, ba' realiza $p|H$. En particular, ba' realiza p, así que ba realiza p. Si $a \in K \succeq G$, y b' realiza $q|K$, un argumento análogo muestra que ba realiza q. Esto contradice nuestra suposición, así que G tiene un único tipo genérico.

$\square$

3. Pares de Cuerpos Algebraicamente Cerrados

A lo largo de esta sección, estableceremos $T = ACF_p$ para p primo o 0 (en el lenguaje usual L), y consideramos L_P, el lenguaje obtenido al agregar un predicado unario P. Un par elemental de modelos de T, $N \preceq M$, se considera como una L_P-estructura al interpretar P como el universo de la estructura N, y las L_P-estructuras se denotarán naturalmente como pares (M, P).

Definición 3.1. Un *par bello* de modelos de T es un par elemental $N \preceq M$ tal que N es $|T|^+$-saturado y M es $|T|^+$-saturado sobre N, lo que significa que M realiza todo L-tipo sobre $N \cup A$, donde $A \subseteq M \setminus N$ es tal que $|A| < |T|^+$. La teoría T_P de pares propios $P \prec M$ de modelos de T fue demostrada completa por Keisler en [5].

Hecho 3.2. *([12]) Sea (M, P) un modelo saturado de T_P.*

(I) (M, P) es un par bello.

(II) T_P es estable.

(III) Toda L_P-fórmula $\phi(x)$ es equivalente módulo T_P a una combinación booleana de L_P-fórmulas de la forma $\exists y P(y) \wedge \psi(y, x)$ donde ψ es una L_P-fórmula sin cuantificadores.

Buechler en [2] nota que T_P es de hecho ω-estable de rango de Morley ω. De aquí en adelante (M, P) será un modelo saturado de T_P.
Notación: Si $A \subseteq M$, denotamos el cuerpo generado por A por $\langle A \rangle$. Para cualesquiera $A, B, C \subseteq M$, denotamos la independencia en el sentido de L por $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}_{C}^{L} B$, y en el sentido de L_P por $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}_{C}^{L_P} B$. También distinguiremos los L-tipos de los L_P-tipos usando tp_L y tp_{L_P} respectivamente. Adoptamos la misma convención para los operadores acl y dcl.

Lema 3.3. *Todo $C \subset P^n$ que es L_P-definible con parámetros de M, es L-definible con parámetros de P. En particular, P es fuertemente minimal y establemente incrustado (en el sentido de L_P).*

Demostración. Sea $\varphi(x, m)$ con $m \in M$ una L_P-fórmula definiendo C. Notemos que P es algebraicamente cerrado en el sentido de L_P. Por estabilidad de T_P, $p(y) = \mathrm{tp}_{L_P}(m/P)$ es definible sobre P, así que tenemos que para todo $a \in M$,

$$a \in C \iff \varphi(a, y) \in p \iff M \models d\varphi(a),$$

donde $d\varphi(x)$ es una L_P-fórmula con parámetros en P. Ahora, por el Hecho 3.2, $d\varphi(x)$ es equivalente a una combinación booleana de fórmulas de la forma $\exists z P(z) \wedge \psi(x,z)$ donde ψ es una L_P-fórmula sin cuantificadores. Como $C \subseteq P^n$ y

$$M \models \forall x\ d\varphi(x) \to P(x),$$

C es L-definible por una combinación booleana de fórmulas de la forma $\exists z \psi'(x,z)$, donde ψ' es la L-fórmula obtenida de ψ al reemplazar toda ocurrencia de $P(t)$ por $t = t$, para todo término t. $\square$

Observación 3.4. Por eliminación de cuantificadores en T, la fórmula $\exists z \psi'(x,z)$ es equivalente módulo T a una L-fórmula sin cuantificadores $\theta(x)$. Notemos también que el conjunto C solo depende de m, así que si c es un L_P-código para C, tenemos que $c \in \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}_{L_P}(m) \cap P$.

Definición 3.5. Sea $a \in M$ una tupla (posiblemente infinita), definamos $\widehat{a} = (a, a^c)$, donde $a^c = \mathrm{Cb}(\mathrm{tp}_L(a/P))$. Como T es totalmente trascendente y elimina imaginarios, a^c está en la clausura definible en el sentido de L de una tupla real finita. Más específicamente, a^c puede considerarse, salvo interdefinibilidad, como una tupla de generadores para el cuerpo de definición del lugar algebraico de a sobre P (es decir: la variedad asociada al ideal primo de polinomios en $P[X]$ que se anulan en a).

Lema 3.6. *Para toda tupla $a \in M$, $\langle \widehat{a} \rangle$ es linealmente disjunto de P sobre $\langle a^c \rangle$.*

Demostración. Notemos que $\langle \widehat{a} \rangle = \langle a^c \rangle(a)$. Sea $\{M_0(X), \ldots, M_m(X)\}$ un conjunto de monomios tal que $\{M_0(a), \ldots, M_m(a)\}$ es linealmente independiente sobre $\langle a^c \rangle$. Supongamos que existe una relación lineal $\sum c_i M_i(a) = 0$, donde $c_i \in P$. Por definición de a^c podemos escribir

$$\sum_{i=0}^{m} c_i M_i(X) = \sum_{j=0}^{n} b_j f_j(X),$$

donde $b_j \in \langle a^c \rangle$, $f_j(a) \in I := \{f(X) \in \langle a^c \rangle(X),\ f(a) = 0\}$ para todo j, y tal que $\{f_0(X), \ldots, f_n(X)\}$ es un conjunto linealmente independiente de polinomios sobre $\langle a^c \rangle$. Afirmamos que $\{M_1, \ldots, M_m, f_1, \ldots, f_n\}$ es también linealmente independiente sobre $\langle a^c \rangle$: de lo contrario, $\sum r_i M_i(X) + \sum s_j f_j(X) = 0$, para algunos $r_i, s_j \in \langle a^c \rangle$. Podemos sustituir a por X para obtener $\sum r_i M_i(a) = 0$, lo que da $r_i = 0$ para todo i, así que $\sum s_j f_j(X) = 0$ y $s_j = 0$ para todo j. Como estos son polinomios formales, permanecen linealmente independientes sobre P, así que $c_i = 0$ para todo i. $\square$

Observación 3.7. Para toda tupla $a \in M$, $a^c \in \mathrm{dcl}_{L_P}(a)$.

Demostración. Todo L_P-automorfismo deja P invariante, así que si también fija a, debe dejar $\mathrm{tp}_L(a/P)$ invariante, por lo tanto debe fijar a^c. $\square$

Lema 3.8. *Para cualesquiera tuplas $a, b \in M$, $\mathrm{tp}_{L_P}(a) = \mathrm{tp}_{L_P}(b)$ si y solo si $\mathrm{tp}_L(\widehat{a}) = \mathrm{tp}_L(\widehat{b})$.*

Demostración. Si existe un L_P-automorfismo σ de M enviando a a b, por la Observación 3.7 tenemos $\sigma(a^c) = b^c$, así que $\mathrm{tp}_{L_P}(\widehat{a}) = \mathrm{tp}_{L_P}(\widehat{b})$. Al restringir el lenguaje obtenemos $\mathrm{tp}_L(\widehat{a}) = \mathrm{tp}_L(\widehat{b})$. Recíprocamente, supongamos que existe un L-isomorfismo parcial σ enviando a a b y a^c a b^c. Como $\langle\widehat{a}\rangle$ y P son linealmente disjuntos sobre $\langle a^c\rangle$, y también $\langle\widehat{b}\rangle$ y P son l.d. sobre $\langle b^c\rangle$, la restricción $\sigma \restriction \langle\widehat{a}\rangle$ puede extenderse a un L-isomorfismo $\sigma' : P(a) \to P(b)$ tal que $\sigma'(P) = P$, en otras palabras, a un L_P-isomorfismo, el cual puede a su vez extenderse a un L_P-automorfismo de M por saturación de M sobre P (ver el Hecho 3.2 *(iii)*). $\square$

Lema 3.9. *Para toda tupla $a \in M$,*

(I) $a^c \subseteq P$.

(II) Si $b \in P$ es una tupla, $\widehat{ab}$ y $\hat{a}b$ son L-interdefinibles.

(III) $\hat{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^{L_P}_{a^c} P$

Demostración. Por eliminación de imaginarios en T, $a^c \in \mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}_L(P) = P$, esto da *(i)*. Para ver *(ii)*, notemos que $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^{L}_{a^c} P$ implica $ab \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^{L}_{a^c b} P$, y como $\mathrm{tp}_L(ab/a^c b)$ es estacionario, obtenemos $(ab)^c \subseteq \mathrm{dcl}_L(a^c b)$, así que $\widehat{ab} \in \mathrm{dcl}_L(\hat{a}b)$. Claramente $\hat{a}b \subseteq \widehat{ab}$, así que la otra dirección sigue. Para *(iii)*, sea $a^c \in B \subseteq P$, y elijamos una sucesión L_P-indiscernible sobre a^c, $(B_i)_{i<\omega}$, tal que $B_0 = B$. Sea $p = \mathrm{tp}_L(\widehat{a}/B)$, y para cada i sea p_i la imagen de p bajo un L-automorfismo que fija a^c y envía B a B_i. Como $\widehat{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^{L}_{a^c} P$, $B_i \subseteq P$, y $\widehat{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^{L}_{a^c} B_i$ para todo i, $\hat{a}$ realiza $\cup_i p_i$. Por el Lema 3.8 y *(ii)*, $\mathrm{tp}_L(\widehat{a}/P) \vdash \mathrm{tp}_{L_P}(\widehat{a}/P)$. Si ponemos $p' = \mathrm{tp}_{L_P}(\widehat{a}/B)$ y p'_i la imagen de p' bajo un L_P-automorfismo que fija a^c y envía B a B_i, hemos probado la consistencia de $\cup_i p'_i$. Por lo tanto, $\mathrm{tp}_{L_P}(\widehat{a}/B)$ no bifurca sobre a^c. Como B fue elegido arbitrariamente, el resultado sigue. $\square$

Definición 3.10. Un subconjunto A de M se dice P-independiente si $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^{L}_{A\cap P} P$.

Observación 3.11.

(I) Para todo $a \in M$, $\widehat{a}$ es P-independiente.

(II) Todo subconjunto de P es P-independiente.

Demostración. La primera condición se sigue directamente del Lema 3.9 *(i)*, *(iii)*, y de monotonía. La segunda afirmación es clara. $\square$

Lema 3.12. *Sean $A \subseteq B, C \subseteq M$ con $C = Ac$, donde $c \in M$ es una tupla finita. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(I) $C \downfree^{L_P}_A B$

(II) $C \downfree^{L}_{AP} BP$, *y* $C^c \downfree^{L}_{A^c} B^c$.

(III) $C \downfree^{L}_{AP} BP$, *y* $\widehat{C} \downfree^{L}_{\widehat{A}} \widehat{B}$.

Demostración.
(i) implica *(ii)*: Por la Observación 3.7, podemos suponer $B = \widehat{B}$. Para la primera parte, supongamos por contradicción que $\mathrm{tp}_L(c/BP)$ bifurca sobre AP. Sea $(B_i)_{i<\lambda}$ una sucesión de realizaciones de $\mathrm{tp}_L(B/AP)$ tal que $B_i \downfree^{L}_{AP} (B_j)_{j<i}$ y $B_0 = B$; notemos que en particular, como $\widehat{B_i} = B_i$, para todo i, obtenemos $\mathrm{tp}_{L_P}(B_i) = \mathrm{tp}_{L_P}(B)$ por el Lema 3.9. Podemos elegir λ suficientemente grande para aplicar el Hecho 1.19, lo que da una sucesión L_P-indiscernible sobre AP, $(B_i')_{i<\omega}$, tal que $\mathrm{tp}_{L_P}(B_i'/AP) = \mathrm{tp}_{L_P}(B/AP)$ para todo i. Sea $p = \mathrm{tp}_{L_P}(c/B)$ y sea p_i su copia sobre B_i'; entonces por *(i)*, $\cup_{i<\omega} p_i$ puede ser realizado por algún c'. Tenemos que para todo i, $c' \not\downfree^{L}_{AP} B_i'P$: esto contradice la ω-estabilidad de T, ya que $(B_i')_{i<\omega}$ es también L-independiente sobre AP. Para probar la última parte de *(ii)*, aplicamos las propiedades de la bifurcación: por el Lema 3.9 *(iii)* tenemos que $\widehat{A} \downfree^{L_P}_{A^c} P$, lo que implica por simetría y monotonía que $C^c \downfree^{L_P}_{A^c} \widehat{A}$. Además, la Observación 3.7 da

$$\begin{aligned} C \downfree^{L_P}_A B &\Rightarrow CC^c \downfree^{L_P}_{AA^c} BB^c \\ &\Rightarrow C^c \downfree^{L_P}_{\widehat{A}} B^c, \text{ por monotonía.} \end{aligned}$$

Al aplicar transitividad, $C^c \downfree^{L_P}_{A^c} B^c$. Como estos tres conjuntos están todos en P, de hecho obtenemos la independencia deseada en el sentido de L.
(ii) implica *(iii)*: Probaremos $AC^c \downfree^{L}_{\widehat{A}} \widehat{B}$ y $\widehat{C} \downfree^{L}_{AC^c} \widehat{B}$, luego *(iii)* seguirá por transitividad y porque $A^c \subseteq C^c$. Para obtener la primera relación, partamos de $\widehat{B} \downfree^{L}_{B^c} P$ y usemos $C^c \subseteq P$ para obtener $\widehat{B} \downfree_{B^c} C^c$. Combinando esto con nuestra hipótesis $C^c \downfree^{L}_{A^c} B^c$, obtenemos $C^c \downfree^{L}_{A^c} \widehat{B}$, lo que implica $AC^c \downfree^{L}_{\widehat{A}} \widehat{B}$ ya que $A^c \subseteq \hat{A} \subseteq \hat{B}$. Para la segunda relación, partamos de $\widehat{C} \downfree_{C^c} P$ y $A \subseteq C$ para obtener $\widehat{C} \downfree^{L}_{AC^c} AP$ (I). Ahora, la hipótesis

$C \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\bot}^{L}_{AP} BP$ da $\widehat{C} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\bot}^{L}_{AP} \widehat{B}$ (II), ya que $B^c, C^c \subseteq P$. Combinando (I) y (II) obtenemos $\widehat{C} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\bot}^{L}_{AC^c} \widehat{B}$.

(iii) implica *(i)*:

Afirmación: *(iii)* implica que $\widehat{Ac}\widehat{B}$ es P-independiente.

$\widehat{Ac}\widehat{B}$ es P-independiente equivale a decir que si t_C, t_B son bases de trascendencia para $\widehat{Ac}, \widehat{B}$ sobre $\widehat{A}P = AP$ respectivamente, entonces $t_C \cup t_B$ permanece algebraicamente independiente sobre AP, lo que equivale a $C \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid\,}^{L}_{AP} BP$. ∎

Sea $(\widehat{B}_i)_i$ una sucesión L_P-indiscernible sobre $\widehat{A}$ con $\widehat{B_0} = \widehat{B}$. Por hipótesis $C^c \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid\,}^{L}_{\widehat{A}} \widehat{B}$, así que podemos suponer que $(\widehat{B}_i)_i$ es también L-indiscernible sobre $\widehat{A}C^c$. Sea $p = \mathrm{tp}_L(\widehat{c}/\widehat{B}C^c)$, y sea p_i sus copias sobre $\widehat{B_i}C^c$. Por la primera condición de *(iii)*, podemos realizar $\cup_i p_i$ por algún $\widehat{C'}$ que es L-independiente de P sobre $\cup_i \widehat{B_i}C^c$. Por el Lema 3.8 y por la afirmación, se sigue que $\mathrm{tp}_{L_P}(\widehat{C'}\widehat{B_i}C^c) = \mathrm{tp}_{L_P}(\widehat{C}\widehat{B_i}C^c)$, así que p no L_P-bifurca sobre $\widehat{A}$. Por lo tanto, $\widehat{C} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid\,}^{L_P}_{\widehat{A}} \widehat{B}$, y *(i)* sigue de la Observación 3.7. □

Lema 3.13. *Sea $a \in M$, entonces*

I) $\mathrm{acl}_{L_P}(a) = \mathrm{acl}_L(\widehat{a})$.

II) $\mathrm{dcl}_{L_P}(a) = \mathrm{dcl}_L(\widehat{a})$.

Demostración. En ambos casos, la inclusión $\supseteq$ sigue de la Observación 3.7.

I) Primero mostramos que $\mathrm{acl}_{L_P}(a) \cap P = \mathrm{acl}_L(a^c)$. Sea $b \in \mathrm{acl}_{L_P}(a) \cap P$, entonces como $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid\,}^{L}_{a^c} P$, obtenemos $\widehat{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid\,}^{L}_{a^c} b$. Supongamos $b \notin \mathrm{acl}_L(a^c)$, así que $b \notin \mathrm{acl}_L(\widehat{a})$. Entonces, en P, existe una infinidad de $(b_i, i < \omega)$ tales que $\mathrm{tp}_L(\widehat{a}b_i) = \mathrm{tp}_L(\widehat{a}b)$. Por el Lema 3.9 *(ii)*, $\mathrm{tp}_L(\widehat{ab_i}) = \mathrm{tp}_L(\widehat{ab})$. Por el Lema 3.8, estos b_i son también L_P-conjugados sobre $\widehat{a}$, una contradicción. Consideremos ahora $b' \in M \setminus P$ tal que $b' \in \mathrm{acl}_{L_P}(a)$ pero $b' \notin \mathrm{acl}_L(\widehat{a})$. Entonces

$$(b'\widehat{a})^c \in \mathrm{dcl}_{L_P}(b'\widehat{a}) \cap P \subseteq \mathrm{acl}_{L_P}(\widehat{a}) \cap P = \mathrm{acl}_L(a^c),$$

lo que implica por el Hecho 1.8 *(iii)* que $b'\widehat{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid\,}^{L}_{a^c} P$, así que $b' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid\,}^{L}_{\widehat{a}} P$. Por hipótesis existe una infinidad de L-conjugados de b' sobre $\widehat{a}$. Como M es saturado sobre P, existe una infinidad de realizaciones de $\mathrm{tp}_L(b'/\widehat{a}P)$. Esto implica que existe una infinidad de realizaciones de $\mathrm{tp}_{L_P}(b'/\widehat{a})$, una contradicción.

II) La demostración es similar. Primero, mostramos que $\mathrm{dcl}_{L_P}(a) \cap P = \mathrm{dcl}_L(a^c)$, así que sea

$b \in \mathrm{dcl}_{L_P}(a) \cap P$. Entonces, por *(i)*, $b \in \mathrm{acl}_L(a^c)$. Supongamos $b \notin \mathrm{dcl}_L(\widehat{a})$, entonces existe $b' \in P$ distinto de b tal que $\mathrm{tp}_L(b'\widehat{a}) = \mathrm{tp}_L(b\widehat{a})$, y aplicando el Lema 3.9

(ii) y el Lema 3.8 obtenemos $\mathrm{tp}_{L_P}(b'\widehat{a}) = \mathrm{tp}_{L_P}(b\widehat{a})$, una contradicción. Consideremos ahora $b' \in M \setminus P$, $b' \in \mathrm{dcl}_{L_P}(a)$, pero supongamos $b' \notin \mathrm{dcl}_L(\widehat{a})$. Entonces

$$(b'\widehat{a})^c \in \mathrm{dcl}_{L_P}(b'\widehat{a}) \cap P \subseteq \mathrm{dcl}_{L_P}(\widehat{a}) \cap P = \mathrm{dcl}_L(a^c),$$

así que $\langle\widehat{a}\rangle(b')$ y P son linealmente disjuntos sobre $\langle\widehat{a}\rangle$. Por hipótesis existen al menos dos L-conjugados de b sobre $\widehat{a}$, los cuales son también L_P-conjugados sobre $\widehat{a}$ por el Lema 3.8, una contradicción.

$\square$

Corolario 3.14. *Si $A \subseteq M$ es tal que $A = \widehat{A}$, entonces $\mathrm{acl}_{L_P}(A) = \mathrm{acl}_L(A)$ y $\mathrm{dcl}_{L_P}(A) = \mathrm{dcl}_L(A)$. En particular P es algebraicamente cerrado en el sentido de L_P.*

Definición 3.15.

I) Consideremos para todo $n > 1$, el predicado $l_n(x_1, \ldots, x_n)$, que afirma que $x_1, \ldots, x_n$ son linealmente independientes sobre E, es decir,

$$l_n(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \forall e_1, \ldots, e_n \left(\bigwedge_i P(e_i) \wedge \sum_i e_i x_i = 0 \rightarrow \bigwedge_i e_i = 0 \right).$$

II) Consideremos para todo $n > 1$ y para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, la función $(n+1)$-aria $f_{n,i}(y, x_1, \ldots, x_n)$ que da la i-ésima coordenada de y escrito como combinación lineal de $x_1, \ldots, x_n$. Más específicamente, si $l_n(x_1, \ldots, x_n) \wedge \neg l_n(y, x_1, \ldots, x_n)$, entonces

$$z = f_{n,i}(y, x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \exists z_1, \ldots, z_n \left(z = z_i \wedge y = \sum_j z_j x_j \wedge \bigwedge P(z_j) \right),$$

de lo contrario, si la condición no se satisface, definimos $f_{n,i}(y, x_1, \ldots, x_n) = 0$.

III) Definamos el lenguaje $L_P^{l,f}$ como el lenguaje obtenido al agregar a L_P los símbolos de predicados l_n y $f_{n,i}$, para todo $n > 1$ e $i \in \{1, \ldots, n\}$. Notemos que en este lenguaje, $P(x)$ puede definirse por la fórmula $\neg l_n(1, x)$.

El siguiente resultado es el Corolario 15 de [3]:

Hecho 3.16. *Sea $N \subseteq M$ un modelo de T_P, entonces la inclusión es elemental ssi N es una $L_P^{l,f}$-subestructura ssi N es P-independiente.*

Corolario 3.17. *Sea $A \subseteq M$. Sea C el cuerpo generado por A y los $f_{n,i}(A)$ para todo $n > 1$ e $i \leq n$. Entonces $\widehat{A} \subseteq C$, y por lo tanto*

I) $\mathrm{acl}_{L_P}(A) = \mathrm{acl}_L(C)$.

II) $\mathrm{dcl}_{L_P}(A) = \mathrm{dcl}_L(C)$.

Demostración. Por el teorema 7, §2, Cap 3. de [6], el cuerpo de definición del lugar de A sobre P es generado por $\{f_{n,i}(M_0, M_1, \ldots, M_n), n < \omega, i \leq n\}$, donde la tupla $(M_0, M_1, \ldots, M_n)$ recorre el conjunto de monomios formados por los elementos de A. Por lo tanto, $A^c \subseteq C$. De aquí, obtenemos tanto $\mathrm{acl}_L(\widehat{A}) \subseteq \mathrm{acl}_L(C)$ como $\mathrm{dcl}_L(\widehat{A}) \subseteq \mathrm{dcl}_L(C)$, mientras que la inclusión inversa sigue de la definibilidad de los $f_{n,i}$. El resultado deseado se obtiene al invocar el Lema 3.13. □

Lema 3.18. *Sean $a, b, c \in M$, $p_1 = \mathrm{tp}_{L_P}(a/bc)$, $p_2 = \mathrm{tp}_{L_P}(b/c)$. Si p_1, p_2 son estacionarios, entonces $p_3 = \mathrm{tp}_{L_P}(a/c)$ es estacionario.*

Demostración. Por estabilidad de T_P y por hipótesis, existen buenos esquemas de definición dp_1 sobre bc y dp_2 sobre c. Queremos encontrar una buena definición para p_3, es decir una que define un tipo global, esto implicaría la estacionariedad por el Lema 1.14. Sea $\varphi(x, y)$ una L_P-fórmula y sea $m \in M$ tal que $M \models \varphi(a, m)$. Existe una fórmula $dp_1(\varphi)(y, z, w)$ tal que $M \models dp_1(\varphi)(m, b, c)$. Además, existe entonces una fórmula $dp_2(dp_1(\varphi))(y, w)$ tal que $M \models dp_2(dp_1(\varphi))(m, c)$. El resultado sigue. □

Observación: T_P elimina imaginarios finitos.

Demostración. Sea $A = \{a_1, \ldots, a_k\} \subseteq M^n$, donde $a_i = (a_{i,1}, \ldots, a_{i,n})$. Consideremos el siguiente polinomio

$$p(X, Y_0, \ldots, Y_{n-1}) = \prod_{i=1}^{k} \left(X - \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} Y_j \right),$$

Si σ es un L_P-automorfismo, entonces como es en particular un L-isomorfismo, tenemos que $\sigma p(X, Y_0, \ldots, Y_{n-1}) = \prod_{i=1}^{k} \left(X - \sum_{j=1}^{n} \sigma(a_{i,j}) Y_j \right)$. Notando que $M[X, Y_0, \ldots, Y_{n-1}]$ es un dominio de factorización única, deducimos $\sigma p = p$ si y solo si $\sigma A = A$. La tupla consistente en los coeficientes de p es un parámetro canónico para A. □

Lema 3.19. *Sea M_0 una subestructura elemental de (M,P), y sea $a \in M$ tal que $a = \widehat{a}$. Definamos $d = \operatorname{Cb}(\operatorname{tp}_L(a/\operatorname{acl}_L(M_0P)))$, $e' = \operatorname{Cb}(\operatorname{tp}_{L_P}(d/M_0))$, y $e = \operatorname{Cb}(\operatorname{tp}_{L_P}(a/M_0))$. Entonces e' y e son L_P-interdefinibles.*

Demostración. Notemos que por definición de e, e' y porque $M_0 \preceq M$, $\operatorname{tp}_{L_P}(a/e)$ y $\operatorname{tp}_{L_P}(d/e')$ son estacionarios.

Afirmación I:

(I) $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{d}^{L_P} M_0P$.

(II) $d \in \operatorname{acl}_{L_P}(aM_0)$.

(i): Por el Lema 3.12, basta probar $\widehat{ad} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{\widehat{d}}^{L} \widehat{M_0P}$. Notemos que como $(M_0P)^c \subseteq P$, tenemos $M_0P = \widehat{M_0P}$, luego por definición de d, $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{d}^{L} M_0P$ y como $d^c \in P$, la monotonía da $a\widehat{d} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{\widehat{d}}^{L} \widehat{M_0P}$. Ahora basta probar $(ad)^c = d^c$, lo que implicaría $\widehat{ad} = a\widehat{d}$. Por definición de d, $\langle ad \rangle$ es linealmente disjunto (l.d.) de $\operatorname{acl}_L(M_0P)$ sobre $\langle d \rangle$, así que $\langle ad \rangle$ y $P(d)$ son l.d. sobre $\langle d \rangle$. Como $\langle d \rangle$ es l.d de P sobre $\langle d^c \rangle$, se sigue que $\langle ad \rangle$ y P son l.d sobre $\langle d^c \rangle$, así que $(ad)^c = d^c$.
(ii): Como $aM_0 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{(aM_0)^c}^{L} P$, entonces $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{M_0(aM_0)^c}^{L} M_0P$. Por el Hecho 1.8 *(iii)* y la Observación 3.7, se sigue que

$$d \in \operatorname{acl}_L(M_0(aM_0)^c) \subseteq \operatorname{acl}_{L_P}(M_0(aM_0)^c) \subseteq \operatorname{acl}_{L_P}(aM_0). \blacksquare$$

Afirmación II: $d \in \operatorname{dcl}_{L_P}(a, e)$.
Sea σ un L_P-automorfismo que fija a, e, y sea $M_0' = \sigma(M_0)$. Elijamos una realización M_0'' de $\operatorname{tp}_{L_P}(M_0/a, e)$ independientemente de $M_0 \cup M_0'$ sobre a, e. Usando $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{e}^{L_P} M_0$ y $e \in M_0 \cap M_0' \cap M_0''$, obtenemos las siguientes relaciones

$$a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{M_0}^{L_P} M_0M_0'',\ a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{M_0''}^{L_P} M_0M_0'',\ a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{M_0'}^{L_P} M_0'M_0'',\ a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{M_0''}^{L_P} M_0'M_0''.$$

Aplicando el Lema 3.12 obtenemos

$$a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{PM_0}^{L} PM_0M_0'',\ a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{PM_0''}^{L} PM_0M_0'',\ a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{PM_0''}^{L} PM_0'M_0'',\ a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{PM_0'}^{L} PM_0'M_0''.$$

Como $\operatorname{tp}_L(a/\operatorname{acl}_L(M_0P))$ es estacionario, esto se traduce en términos de bases canónicas como

$$d = \mathrm{Cb}(\mathrm{tp}_L(a/\operatorname{acl}_L(M_0P))) = \mathrm{Cb}(\mathrm{tp}_L(a/\operatorname{acl}_L(M_0''P))) = \mathrm{Cb}(\mathrm{tp}_L(a/\operatorname{acl}_L(M_0'P))),$$

así que $\sigma(d) = d$, así que la afirmación queda probada. ■

Por definición de e, $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\perp}_e^{L_P} M_0$. Como $\mathrm{tp}_{L_P}(a/e)$ es estacionario, $e \in M_0$, y $d \in \mathrm{dcl}_{L_P}(a, e)$, concluimos que $\mathrm{tp}_{L_P}(d/e)$ es estacionario por el Lema 1.15. Por lo tanto, $e' \in \mathrm{dcl}_{L_P}(e)$.

Afirmación III: $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\perp}_{e'}^{L_P} M_0$. Por lo tanto, $e \in \operatorname{acl}_{L_P}(e')$.

Por la Afirmación I,

$$\begin{aligned} a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\perp}_d^{L_P} M_0P &\Rightarrow a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\perp}_d^{L_P} M_0d \\ &\Rightarrow a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\perp}_{de'}^{L_P} M_0 \quad \text{pues } e' \in \mathrm{dcl}_{L_P}(M_0) = M_0. \end{aligned}$$

Por definición de e' tenemos $de' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\perp}_{e'}^{L_P} M_0$. Aplicando transitividad obtenemos la afirmación. ■

Para probar $e \in \mathrm{dcl}_{L_P}(e')$, mostraremos la estacionariedad de $\mathrm{tp}_{L_P}(a/e')$ y aplicaremos el Hecho 1.8 *(iv)*. Por definición de e', $\mathrm{tp}_{L_P}(d/e')$ es estacionario, luego por el Lema 3.18, bastaría probar que $\mathrm{tp}_{L_P}(a/de')$ es estacionario. Sin embargo, la Afirmación I implica $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\perp}_d^{L_P} e'$, así que basta probar que $p = \mathrm{tp}_{L_P}(a/d)$ es estacionario. Sea N una L_P-subestructura elemental de M conteniendo d, y supongamos que $p \subseteq p_1, p_2$ son extensiones no bifurcantes de p a N. Sean a_1, a_2 realizaciones de p_1, p_2 respectivamente. Por el Lema 3.12, $a_i \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\perp}_{dP}^{L} NP$. Como $\mathrm{tp}_{L_P}(a_i/d) = \mathrm{tp}_{L_P}(a/d)$ para $i = 1, 2$, y $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\perp}_d^{L} dP$ (por definición de d y monotonía), obtenemos que para $i = 1, 2$, $a_i \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\perp}_d^{L} NP$. Esto implica a su vez $Na_i \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\perp}_N^{L} P$, ya que $d \in N$. Como $N = \widehat{N}$, por la Observación 3.11 *(ii)*, $N \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\perp}_{P\cap N}^{L} P$. Aplicando transitividad obtenemos $Na_i \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\perp}_{N\cap P}^{L} P$, así que $N(a_i)$ y NP son linealmente disjuntos sobre N. Esto implica $\widehat{N(a_i)} = N(a_i)$. Como $\mathrm{tp}_L(a/d)$ es estacionario, $\mathrm{tp}_L(a_1N) = \mathrm{tp}_L(a_2N)$. Podemos entonces aplicar el Lema 3.8 para obtener que $\mathrm{tp}_{L_P}(a_1N) = \mathrm{tp}_{L_P}(a_2N)$. □

Lema 3.20. *Sea $a \in M$, $A \subseteq M$. Si $A = \widehat{A}$ y $\mathrm{tp}_{L_P}(a/A)$ es estacionario, entonces $\mathrm{tp}_L(a/A)$ es estacionario.*

Demostración. Supongamos por contradicción que $\mathrm{tp}_L(a/A)$ no es estacionario y sea $k = \langle A \rangle$. La extensión $k(a)|k$ no es primaria: existe algún $\alpha \in k(a)$ tal que $\alpha \in \operatorname{acl}_L(k) \backslash \mathrm{dcl}_L(k)$. Notemos también que $\widehat{k} = k$. Por el Corolario 3.14, $\alpha \in \operatorname{acl}_{L_P}(k) \backslash \mathrm{dcl}_{L_P}(k)$, contradiciendo la estacionariedad de $\mathrm{tp}_L(a/A)$. □

Lema 3.21. *Supongamos $d \in M$ tal que $d = \widehat{d}$, y sea $e \in \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}_{L_P}(d)$ un imaginario tal que $\mathrm{tp}_{L_P}(d/e)$ es estacionario. Sea $d' \models \mathrm{tp}_{L_P}(d/e)$ con $d \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;\vert}^{L_P}_{e} d'$. Sea $B'_1 = \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}_{L_P}(e) \cap M$ y $B_1 = \mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}_{L_P}(e) \cap M$. Entonces $\langle d \rangle$ y $\langle d' \rangle$ son linealmente disjuntos sobre B'_1, en particular $d \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;\vert}^{L}_{B_1} d'$.*

Demostración. Denotemos $p(x) = \mathrm{tp}_{L_P}(d/e)$,

Afirmación: Sea $d'' \models p|\{d, d'\}$, entonces $d \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;\vert}^{L}_{d'} d''d'$ y $d \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;\vert}^{L}_{d''} d''d'$.

Por definición de d'', tenemos $d \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;\vert}^{L_P}_{d'} d''d'$, y por hipótesis $d \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;\vert}^{L_P}_{e} d'$. Además, $e \in \mathrm{dcl}_{L_P}(d'') \cap \mathrm{dcl}_{L_P}(d')$, así que ambas relaciones $d \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;\vert}^{L_P}_{d''} d'$, $d \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;\vert}^{L_P}_{d'} d''$ son verdaderas. De la primera relación, vemos que $dd'' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;\vert}^{L_P}_{d''} d'd''$, y por el Lema 3.11, $\widehat{dd''} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;\vert}^{L}_{\widehat{d''}} \widehat{d'd''}$. Como d, d' y d'' son independientes sobre e, y e es definible sobre cada uno de d, d', d'', la estacionariedad de $\mathrm{tp}_{L_P}(d/e)$ implica la de $\mathrm{tp}_{L_P}(d/d''), \mathrm{tp}_{L_P}(d/d')$. Se sigue por 3.20 que $\mathrm{tp}_L(d/d''), \mathrm{tp}_L(d/d')$ son estacionarios. Entonces, como $\widehat{d''} = d''$, obtenemos $d \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;\vert}^{L}_{d''} d''d'$, así que, el cuerpo de definición del lugar de d sobre $\langle d''d' \rangle$ está contenido en $\langle d'' \rangle$. La otra parte de la afirmación se obtiene de manera similar, usando que $\widehat{d'} = d'$ en su lugar, lo que da que el cuerpo de definición del lugar de d sobre $\langle d''d' \rangle$ está contenido en $\langle d' \rangle$. ■

Obtenemos por lo tanto

$$\mathrm{Cb}(\mathrm{tp}_L(d/d')) = \mathrm{Cb}(\mathrm{tp}_L(d/d'')) \subset \mathrm{dcl}_L(d') \cap \mathrm{dcl}_L(d'').$$

Pero d' y d'' son independientes sobre e, $\mathrm{dcl}_{L_P}(d') = \mathrm{dcl}_L(d')$, y $\mathrm{dcl}_{L_P}(d'') = \mathrm{dcl}_L(d'')$, así que $\mathrm{Cb}(\mathrm{tp}_L(d/d')) \subseteq \mathrm{dcl}^{eq}_{L_P}(e) \cap M = B'_1$. □

Lema 3.22. *Sea $e \in (M, P)^{\mathrm{eq}}$, y $B_0 = \mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}_{L_P}(e) \cap P$. Entonces para todo $c \in P$, $\mathrm{tp}_{L_P}(c/B_0 e)$ es finitamente satisfacible en B_0.*

Demostración. Sea $a \in M$ tal que $e = f(a)$ para alguna función definible. Como $\widehat{aP} = \widehat{a}P$, por el Lema 3.8 $\mathrm{tp}_{L_P}(a/a^c) \vdash \mathrm{tp}_{L_P}(a/P)$. Probaremos que $\mathrm{tp}_{L_P}(a/P)$ es estacionario, esto implicaría por el Lema 1.15 que $\mathrm{tp}_{L_P}(e/P)$ es estacionario. Supongamos que no, así que podemos encontrar $b_1, \ldots, b_n \in M$ y fórmulas $\varphi(x, b_i)$, que distinguen entre las extensiones no bifurcantes de $\mathrm{tp}_{L_P}(a/a^c)$ a M. En otras palabras, definen una partición del conjunto de realizaciones de $\mathrm{tp}_{L_P}(a/a^c)$. Por saturación de M sobre P, podemos suponer

$$a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;\vert}^{L_P}_{a^c} b_1, \ldots, b_n, P.$$

Si a' es otra realización de $\mathrm{tp}_{L_P}(a/a^c)$, tal que $a' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;\vert}^{L_P}_{a^c} b_1, \ldots, b_n, P$, entonces existe un automorfismo de M que fija $\mathrm{acl}_{L_P}(P, b_1, \ldots, b_n)$ y envía a a a'. Esto implica $\mathrm{tp}_{L_P}(a'/P) =$

$\mathrm{tp}_{L_P}(a/P)$.
Definamos $e^c = \mathrm{Cb}(\mathrm{tp}_{L_P}(e/P))$. Notemos que

$$e^c \in \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}_{L_P}(e) \cap \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}_{L_P}(P) = \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}_{L_P}(e) \cap P.$$

Por definición de e^c tenemos $e \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}^{L_P}_{\mathrm{acl}_L(e^c)} P$, y la demostración del Lema 3.13 muestra que $\mathrm{acl}_L(e^c) = B_0$. Por lo tanto, $\mathrm{tp}_{L_P}(e/P)$ es estacionario y es una extensión no bifurcante de $\mathrm{tp}_{L_P}(e/B_0)$. Esto implica la definibilidad de $\mathrm{tp}_{L_P}(e/P)$ sobre B_0. Así, para toda L_P^{eq}-fórmula $\psi(x,y)$ con parámetros en B_0, existe una fórmula $d\psi(y)$ con parámetros en B_0 tal que para todo $c \in P$, $M \models \psi(e,c)$ ssi $M \models d\psi(c)$. Por el Lema 3.3, podemos suponer que $d\psi(y)$ es una L-fórmula. Como también tenemos que $B_0 \prec P$ en el sentido de L, tenemos que para todo $c \in P$, si $P \models \psi(e,c)$ entonces $P \models d\psi(c)$, lo que implica que existe $b \in B_0$ tal que $P \models d\psi(b)$, y por lo tanto $M \models \psi(e,b)$. $\square$

4. Eliminación Débil de Imaginarios

A lo largo de esta sección mantendremos nuestra notación y convenciones de la Sección 3. Establecemos $T = ACF_p$, y T_P la teoría de los pares bellos de modelos de T. Tenemos que $(M,P) \models T_P$ es saturado.

Definición 4.1. Sea G un grupo algebraico y X una variedad algebraica ambos definidos sobre $k \subseteq M$. Una acción k-racional es una acción de grupo $\alpha : G \times X \to X$ tal que para todo $g \in G$, la aplicación $\alpha(g,\cdot) : X \to X$ es una aplicación k-racional.

Definición 4.2. Una acción de grupo definible es una terna $((G,\cdot),X,\alpha)$, donde $(G,\cdot)$ es un grupo definible, $X \subseteq M$ un conjunto definible y $\alpha : G \times X \to X$ una acción de grupo cuyo grafo es definible. Si la acción es *transitiva* sobre X, es decir, para cualesquiera $a,b \in X$ existe $g \in G$ tal que $\alpha(g,a) = b$, la terna se llama un *espacio homogéneo definible*. Además, si la acción es *estrictamente transitiva (o regular)*, es decir, $\alpha(g,x) = x$ ssi $g = e$, será llamado un *espacio homogéneo principal definible* (o EHP).

Abusaremos de la notación y escribiremos $\alpha(g,a)$ como $g \cdot a$. En nuestro contexto, como $T = ACF_p$, obtenemos el siguiente hecho del Teorema 7.4.14 de [7].

Hecho 4.3. *Si $G \subseteq M^n$ es un grupo L-definible, entonces G es definiblemente isomorfo a un grupo algebraico.*

Proposición 4.4. *Sea $e \in (M,P)^{\mathrm{eq}}$. Entonces existen: un grupo algebraico conexo G, una variedad irreducible V sobre P, y una acción racional de G sobre V, definible sobre P, tales que*

(I) La acción de $G(P)$ sobre $V(M)$ es genéricamente libre: si $a \in V(M)$ es un punto genérico de V sobre P, y $g \in G(P)$ no es la identidad, entonces $g \cdot a \neq a$.

(II) Para algún $a \in V(M)$ genérico sobre P, si r es un parámetro canónico para la órbita $X = \{g \cdot a\ ,\ g \in G(P)\}$, entonces $e \in \mathrm{dcl}_{L_P}(r)$ y $r \in \mathrm{acl}_{L_P}(e)$.

La demostración de la Proposición 4.4 requerirá algunos resultados.

Lema 4.5. *Sea $e \in (M,P)^{\mathrm{eq}}$. Existe $d' \in M$ tal que $\mathrm{tp}_{L_P}(d'/e)$ es estacionario y P-interno, y además $e \in \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}_{L_P}(d')$.*

Demostración. Sea $a \in M$ tal que $a = \hat{a}$ y $e = f(a)$ para alguna función $\varnothing$-interpretable. Por el Lema 1.10 podemos suponer que $\mathrm{tp}_{L_P}(a/e)$ es estacionario, así que $e = \mathrm{Cb}(\mathrm{tp}_{L_P}(a/M_0))$, donde M_0 es una L_P-subestructura elemental cualquiera de M tal que $e \in {M_0}^{\mathrm{eq}}$ y $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\bigm|}_e^{L_P} M_0$. Sea $d = \mathrm{Cb}(\mathrm{tp}_L(a/\operatorname{acl}_L(M_0P))$. Por el Lema 3.19, $e = \mathrm{Cb}(\mathrm{tp}_{L_P}(d/M_0))$, así que $d \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\bigm|}_e^{L_P} M_0$. Como $M_0 \preceq M$, $\mathrm{tp}_{L_P}(d/M_0)$ es estacionario, $\mathrm{tp}_{L_P}(d/e)$ es estacionario y casi P-interno. Al reemplazar d por un número finito de realizaciones independientes de $\mathrm{tp}_{L_P}(d/e)$, por el Hecho 1.8 *(v)*, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $e \in \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(d)$, o que $e = g(d)$ para alguna función definible g. Por el Lema 1.17, existe $d' \in \mathrm{dcl}_{L_P}(d)$, un código para un conjunto finito de realizaciones de $\mathrm{tp}_{L_P}(d/e)$, tal que $d \in \mathrm{acl}_{L_P}(d')$ y $\mathrm{tp}_{L_P}(d'/e)$ es estacionario y P-interno. Entonces como $d \in \mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}_{L_P}(d')$, existe una fórmula $\varphi(x,d')$ aislando $\mathrm{tp}_{L_P}(d/d')$; así que $M \models \forall x \varphi(x,d') \to g(x) = e$, así que $e \in \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(d')$. $\square$

Lema 4.6. *Existe una tupla $d \in M$, una función L_P-definible f (sobre $\varnothing$), una $L_P(e)$-fórmula $\psi(x)$, y una función $L_P(e)$-definible h tales que*

(I) $f(d) = e$.

(II) $\psi(x) \in \mathrm{tp}_{L_P}(d/e)$.

(III) $M \models \forall x, x'(\psi(x) \wedge \psi(x') \to \exists c(P(c) \wedge h(x,c) = x')$.

Demostración. Sea d' como en el Lema 4.5. Entonces $p = \mathrm{tp}_{L_P}(d'/e)$ es estacionario, P-interno, y $e = \mathrm{Cb}(p)$. Por el Lema 1.18, existe una tupla d consistente en un número finito de realizaciones de p, y una función g e-definible tal que para toda realización

d'' de p, existe una tupla $c_{d''} \in P$ tal que $d'' = g(d, c_{d''})$. Claramente $e \in \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}_{L_P}(d)$, así que podemos encontrar una función f L_P-definible tal que *(i)* se satisface. Si d_1, d_2 realizan $\mathrm{tp}_{L_P}(d/e)$, entonces existe una función h e-definible y una tupla $c \in P$ tales que $d_1 = h(d_2, c)$. Aplicando compacidad obtenemos una L_P-fórmula $\psi \in \mathrm{tp}_{L_P}(d/e)$ tal que para cualesquiera dos d_1, d_2 satisfaciendo ψ, existe $c \in P$ tal que $h(d_1, c) = d_2$, lo que prueba directamente *(ii)* y *(iii)*. Notemos que $\mathrm{tp}_{L_P}(d/e)$ permanece P-interno. $\square$

Lema 4.7. *En el Lema 4.6, d puede elegirse tal que (i),(ii),(iii) se satisfacen, y $d \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}_{e}^{L_P} P$.*

Demostración. Sea ψ como en el Lema 4.6. Sea $\chi(x, y)$ una $L_P(e)$-fórmula que expresa la conjunción de $x^c = y$, $\psi(x)$ y $f(x) = e$. Consideremos la $L_P(e)$-fórmula $\theta(y)$ dada por $\exists x(\chi(x, y))$. Como $M \models \theta(d^c)$, por el Lema 3.22, existe $d_0 \in \mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}_{L_P}(e) \cap P$ tal que $M \models \theta(d_0)$. Por lo tanto, existe d_1 tal que $M \models \chi(d_1, d_0)$, así que $d_1 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}_{e}^{L_P} P$. $\square$

Notación: Para el resto de esta sección, fijemos d como en el Lema 4.7. Por la Observación 3.7 $d^c \in \mathrm{dcl}_{L_P}(d)$, así que podemos también suponer de aquí en adelante que $d = \widehat{d}$, pues todas las propiedades de los Lemas 4.6, 4.7, y 4.8 permanecen verdaderas después de adjuntar d^c a d. De aquí en adelante, pongamos

$$B = \mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}_{L_P}(e),$$
$$B_1 = B \cap M,$$
$$B_0 = B \cap P.$$

Lema 4.8. $\mathrm{tp}_{L_P}(d/B)$ *es aislado.*

Demostración. Por estabilidad de $Th(M^{\mathrm{eq}})$, existe $M_1 \preceq M$, un modelo primo sobre Bd y $M_0 \preceq M_1$ un modelo primo sobre B.
Afirmación: $B_0 = M_0 \cap P = M_1 \cap P$: Es claro que $B \subseteq M_0, M_1$, una inclusión sigue. Recíprocamente, si $a \in M_0 \cap P$, entonces $\mathrm{tp}_{L_P}(a/B)$ es aislado, lo cual es una extensión no bifurcante de $\mathrm{tp}_{L_P}(a/e)$, así que $\mathrm{tp}_{L_P}(a/e)$ es también aislado, y aplicando el Lema 3.22, puede realizarse por algún $a' \in B_0$. En particular, esto implica $a \in \mathrm{acl}_{L_P}(e)$. La demostración para la segunda igualdad es similar, sea $a \in M_1 \cap P$, entonces $\mathrm{tp}_{L_P}(a/Bd)$ es aislado. Recordemos que $d \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}_{e}^{L_P} P$, así que $\mathrm{tp}(a/Bd)$ no bifurca sobre $\mathrm{tp}_{L_P}(a/e)$, el cual es entonces aislado, y aplicando el Lema 3.22 obtenemos el resultado.
Sea ψ como en el Lema 4.6, y elijamos $d' \in M_0$ tal que $M \models \psi(d')$. Aplicando el Lema 4.6 *(iii)* dentro del modelo M_1, existe $c \in P \cap M_1 = B_0$ tal que $d \in \mathrm{dcl}_{L_P}(d', c) \subseteq M_0$, así que por definición de un modelo primo, $\mathrm{tp}_{L_P}(d/B)$ es aislado. $\square$

Lema 4.9. *Sea X el conjunto de realizaciones de $\mathrm{tp}_{L_P}(d/B)$. Existen: un grupo algebraico conexo G definido sobre B_0 y una acción regular $L_P(e)$-definible de $G(P)$ sobre X. Además, si r es un parámetro canónico para el EHP $(G(P), X)$, entonces $e \in \mathrm{dcl}_{L_P}(r)$ y $r \in \mathrm{acl}_{L_P}(e)$.*

Demostración. Por el Lema 4.8, X es L_P-definible sobre B. Definamos

$$C = \{c \in P,\ \exists d'(d' \in X \wedge h(d,c) = d')\},$$

el cual es no vacío por el Lema 4.6 *(iii)*, y $L(B_0)$-definible por el Lema 3.3. Consideremos ahora la relación de equivalencia E en C definida por $M \models E(c_1, c_2)$ si y solo si $M \models h(d, c_1) = h(d, c_2)$. En C/E podemos definir una función $L_P(e)$-interpretable $h'(d, c/E)) = h(d, c)$. Por los Lemas 4.7 y 4.8 $d \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}_B^{L_P} P$, así que todos los elementos de X tienen el mismo L_P-tipo sobre BP. Como E está contenido en cualquier potencia de P, es $L(B_0)$-definible, así que no depende de la elección de d. Esto implica que para cualesquiera $c_1, c_2 \in C$ el valor de $h(h(d, c_1), c_2)$ está definido, y tomando las clases módulo E, existe un único c_3/E tal que $h'(h'(d, c_1/E), c_2/E) = h'(d, c_3/E)$, definimos una operación binaria sobre C/E como $(c_1/E) \cdot (c_2/E) = c_3/E$. Una vez más por el Lema 3.3, esta operación es $L(B_0)$-definible. Además, por la Observación 3.4, podemos suponer sin pérdida de generalidad que C/E contiene tuplas reales.

Afirmación: $(C/E, \cdot)$ es un grupo B_0-definible.

Sean $c_1, c_2, c_3 \in C/E$. Para verificar la asociatividad, notemos que

$$h'(d, (c_1c_2)c_3) = h'(h'(d, c_1c_2), c_3) = h'(h'(h'(d, c_1), c_2), c_3),$$

además, como $h'(d, c_2c_3) = h'(h'(d, c_2), c_3))$ y $\mathrm{tp}_{L_P}(h'(d, c_1)/BP) = \mathrm{tp}_{L_P}(d/BP)$, obtenemos

$$h'(d, c_1(c_2c_3)) = h'(h'(d, c_1), c_2c_3) = h'(h'(h'(d, c_1), c_2), c_3)).$$

Para verificar la existencia de un elemento neutro, por el Lema 4.6 *(iii)*, existe $c' \in P$ tal que $h(d, c') = d$. Entonces, para todo $d' \in X$, $h'(d', c') = d'$, en particular

$$h'(d, c_1c') = h'(h'(d, c_1), c') = h'(d, c_1) \Rightarrow c_1c' = c_1.$$

Para verificar la existencia de inversos, notemos que como $h(d, c_1) \in X$, existe un L_P-automorfismo σ fijando BP punto por punto tal que $h(d, c_1) = \sigma(d)$, lo que implica $h'(\sigma^{-1}(d), c_1) = d$. Por el Lema 4.6 *(iii)*, existe un único c_1' tal que $h'(d, c_1') = \sigma^{-1}(d)$, así que

$$h'(d, c_1'c_1) = h'(h'(d, c_1'), c_1) = h'(\sigma^{-1}(d), c_1) = d = h'(d, c'),$$
$$h'(d, c_1c_1') = h'(h'(d, c_1), c_1') = h'(\sigma(d), c_1') = d = h'(d, c'),$$

así que, $c_1c'_1 = c'_1c_1 = c'$. ■

Por la afirmación anterior y por el Hecho 4.3, C/E es B_0-definiblemente isomorfo a algún grupo algebraico G sobre B_0. Podemos entonces inducir una acción $L(B_0)$-definible de $G(P)$ sobre X usando la aplicación h': si $F : G \to C/E$ es un isomorfismo, entonces para $(g,d) \in G \times X$, definimos $g \cdot d = h'(d, F(g))$. Por el Lema 4.6 *(iii)* y por definición de E, esta acción es regular. Como X es el conjunto de realizaciones de un tipo estacionario, $G(P)$ debe ser conexo (como grupo L_P-definible), así que conexo como grupo algebraico. Claramente, el EHP $(G(P), X)$ es L_P-definible sobre B, esto implica que si r es un parámetro canónico para $(G(P), X)$, entonces $r \in \mathrm{acl}_{L_P}(e)$. Además, si σ es un L_P-automorfismo fijando r, entonces permuta las realizaciones de $\mathrm{tp}_{L_P}(d/B)$, y por estacionariedad de $\mathrm{tp}_{L_P}(d/e)$ tenemos $e = \mathrm{Cb}(\mathrm{tp}_{L_P}(d/B))$, así que $\sigma(e) = e$, así que $e \in \mathrm{dcl}_{L_P}(r)$, completando la demostración. □

El conjunto X del Lema 4.9 será identificado con una órbita genérica de la acción de $G(P)$ sobre alguna variedad $V(M)$. Enunciamos primero la Proposición 2.2 de [4].

Lema 4.10. *Sea G un grupo definible conexo con una acción genérica sobre el conjunto de realizaciones X_1 de un L-tipo estacionario q, es decir, para todo $g \in G$ genérico y para d realizando $q|g$, $g \cdot d$ está definido y realiza q, y para cualesquiera g_1, g_2, d independientes, $g_1 \cdot (g_2 \cdot d) = (g_1g_2) \cdot d$ cuando la acción está definida. Entonces existe un conjunto tipo-definible Y, una inmersión definible $X_1 \subseteq Y$, y una acción definible de G sobre Y, extendiendo la acción genérica de G sobre X_1. Además, para todo $y \in Y$ existen $g \in G$ y $d \models q$ tales que $y = g \cdot d$.*

Demostración. Consideremos el conjunto de pares (g,d) con $g \in G$, $d \models q$. Definamos una relación de equivalencia sobre estos pares por: $(g,d) \sim (g',d')$ si para todo $h \in G$ genérico tal que $(hg) \cdot d = (hg') \cdot d'$. Sea Y el conjunto de clases, sus elementos se denotan $[g,d]$. Si $(hg_2) \cdot d = (hg'_2) \cdot d'$ es verdadera para h genérico, entonces, como hg_1 es también genérico, es también verdad que $(hg_1g_2) \cdot d = (hg_1g'_2) \cdot d'$, así que podemos definir una acción de G sobre Y por $g_1 \cdot [g_2, d] = [g_1g_2, d]$, e identificar cada $d \models q$ con $[1_G, d]$. Para verificar la última afirmación, sea $[g,d] \in Y$, y sea h un genérico de G, independiente de d, entonces $h[g,d] = [hg,d] = [1, hg \cdot d]$, así que $[g,d] = h^{-1}[1, hg \cdot d]$. □

Lema 4.11. *Para X como en el Lema 4.9 existe una variedad irreducible Y definida sobre B_1, y una acción racional transitiva de G sobre Y, definida sobre B_1, tal que $X \subseteq Y$, d es un punto genérico de Y sobre B_1, y la acción de G sobre Y se restringe a la acción dada de $G(P)$ sobre X.*

Demostración. Recordemos que para $g \in G(P)$, $d \in X$, $g \cdot d$ es e-definible, esto significa $g \cdot d \in \mathrm{dcl}_{L_P}(g, d, e)$. Como $e \in \mathrm{dcl}_{L_P}(d)$, entonces $g \cdot d \in \mathrm{dcl}_{L_P}(g, d) = \mathrm{dcl}_L(\widehat{g, d})$ por el Lema 3.13. Pero $\mathrm{dcl}_L(\widehat{g, d}) = \mathrm{dcl}_L(g, d)$ por el Lema 3.9 *(ii)*. Por lo tanto, $g \cdot d \in \mathrm{dcl}_L(g, d)$.
Afirmación: $d \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^{L}_{B_0} g$.
Si $e^c = \mathrm{Cb}(\mathrm{tp}_{L_P}(e/P))$, entonces $e \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^{L_P}_{e^c} P$, y por el Lema 4.7, $d^c \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^{L_P}_{e} P$. Aplicando transitividad obtenemos $d^c \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^{L_P}_{e^c} P$, y como todo está en P, podemos restringir nuestro lenguaje para obtener $d^c \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^{L}_{e^c} P$. Por la demostración del Lema 3.13, $B_0 = \mathrm{acl}_L(e^c)$, así que $d^c \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^{L}_{B_0} P$ y por definición de d^c tenemos $d \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^{L}_{d^c} P$. La afirmación sigue pues $g \in P$. ∎

Ahora, trabajando en L, como $e \in \mathrm{dcl}_{L_P}(d) = \mathrm{dcl}_L(\widehat{d})$, $B_1 \in \mathrm{acl}_L(d)$, así que la afirmación anterior da $dB_1 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_{B_0} g$. Entonces, si g es genérico sobre B_0, entonces es genérico sobre dB_1. La acción es genéricamente regular y transitiva: dados $d_1, d_2 \in X$ independientes, existe un único $g \in G(P)$ tal que $g \cdot d_1 = d_2$. Así que, trabajando en L_P, $RM(G) = RM(X)$, y si $g \in G$, $d \in X$ son independientes sobre e, entonces porque la acción está definida sobre e, tenemos que $g \in \mathrm{dcl}_L(g \cdot d, d)$, de modo que debemos tener $RM(g \cdot d, d/e) = 2RM(G)$, lo que implica $g \cdot d \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^{L_P}_{e} d$. Por el Lema 3.21, $g \cdot d \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^{L}_{B_1} d$.

Tenemos una acción definible de $G(P)$ sobre el conjunto L_P-definible X, y la acción está dada por una aplicación $G \times X \to X$ que es $L(B_1)$-definible en T. Al pasar a la clausura de Zariski, obtenemos una acción genérica del grupo algebraico $G(M)$ sobre el conjunto X_1 de los elementos genéricos (sobre B) de la clausura de Zariski de X. Por el Lema 4.10, existe un $Y \supseteq X_1$ tipo-definible (en el sentido de L, y sobre B_1) tal que G actúa sobre Y de una manera que se restringe a la acción genérica de G sobre X_1. Además, para todo $y \in Y$ existe $g \in G$ y $d \in X_1$ tal que $y = g \cdot d$, así que la acción de G sobre Y es transitiva, entonces Y tiene un único tipo genérico por conexidad de G, y este debe ser en efecto $\mathrm{tp}_L(d/B_1)$. Esto prueba que d es un genérico de Y sobre B_1. Afirmamos que Y es también definible: Sea $\varphi(x, y)$ una cierta $L(B_1)$-fórmula definiendo $x \in G \cdot y$, y sea E la relación de equivalencia dada por yEy' ssi $M \models \forall x \varphi(x, y) \leftrightarrow \varphi(x, y')$, por transitividad, para todo $y \in Y$ tenemos $[y]_E = Y$, ahora por tipo-definibilidad de Y sobre B_1, Y es fijado por todo $\sigma \in \mathrm{Aut}(M/B_1)$, así que el imaginario $[y]_E$ es también fijado, lo que implica que $[y]_E$ es B_1-definible, así que Y es B_1-definible. Como $X \subseteq X_1 \subseteq Y$, y la acción de G sobre Y se restringe a la acción genérica sobre X_1, entonces se restringe a la acción de G sobre X que fue definida en el Lema 4.9. Finalmente, por el Hecho 4.3, $(G, Y, \cdot)$ es B_1-definiblemente isomorfo a $(G', Y', \cdot')$, donde G' es un grupo algebraico, Y' una variedad irreducible, y $\cdot'$ es una acción B_1-racional. □

Demostración de la Proposición 4.4

Demostración. Para $e \in M^{\mathrm{eq}}$, d, G, Y como en el Lema 4.11, elijamos un $b \in B_1$ finito tal que $(G, Y, \cdot)$ es definible sobre b. Reescribamos Y como Y_b. Por el Lema 4.7, $d \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_e^{L_P} P$, junto con $e \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_{B_0}^{L_P} P$ implica que $bd \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_{B_0}^{L_P} P$ (recordemos $b \in \mathrm{acl}_{L_P}(e)$). Como $e \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_{e^c}^{L_P} P$, y $(bd)^c \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_e^{L_P} P$, aplicando transitividad obtenemos $(bd)^c \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_{e^c}^{L_P} P$, y como todo está en P, podemos restringir nuestro lenguaje para obtener $(bd)^c \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_{e^c}^{L} P$. Por la demostración del Lema 3.13, $B_0 = \mathrm{acl}_L(e^c)$, así que $(bd)^c \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_{B_0}^{L} P$ y por definición de $(bd)^c$ tenemos $bd \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_{(bd)^c}^{L} P$, aplicando transitividad una vez más obtenemos $bd \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_{B_0}^{L_P} P$. Sean V, Z los lugares de bd y b sobre B_0, respectivamente, y consideremos la proyección $f : V \to Z$ enviando bd a b, luego notemos que $f^{-1}(b) = Y_b$. Entonces por compacidad, existe un subconjunto de Zariski abierto U en Z, también definido sobre B_0, tal que G actúa racionalmente en $f^{-1}(U)$ y esta acción restringida a Y_b coincide con la definida en el Lema 4.9. Esto prueba *(i)*, pues todo $a \in V$ genérico tiene el mismo L-tipo sobre B_1 que bd, y la acción en el Lema 4.9 es regular por construcción. Como $f^{-1}(U)$ es aún una variedad, reduciendo V podemos sin pérdida de generalidad poner $V = f^{-1}(U)$, y por $bd \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_{B_0}^{L} P$, concluimos que bd es un punto genérico de V sobre P, así que *(ii)* sigue al aplicar el Lema 4.9. □

Enunciamos nuestro resultado principal, que seguirá de la Proposición 4.4.

Corolario 4.12. *Existe un conjunto de suertes $\mathcal{S} \subseteq L^{\mathrm{eq}}$, tal que T_P tiene eliminación débil de imaginarios en el lenguaje obtenido al agregar $\mathcal{S}$ a L.*

Demostración. Sean G, V como en la Proposición 4.4, y sea $c \in P$ generando un cuerpo sobre el cual $(G, V, \cdot)$ están definidos. Existe una variedad Z definida sobre el cuerpo primo tal que existen variedades $\mathcal{G}, \mathcal{V}$, con aplicaciones regulares sobreyectivas hacia Z, y para cada $b \in Z$, la fibra $\mathcal{G}_b$ es un grupo algebraico que actúa sobre $\mathcal{V}_b$, y además $\mathcal{G}_c = G$ y $\mathcal{V}_c = V$. Para cada $e \in M^{\mathrm{eq}}$, definimos una suerte $S_{(\mathcal{G},\mathcal{V},Z,e)}$ de la siguiente manera: sea $W_e = \cup\{\mathcal{V}_b, b \in Z(P)\}$, y definamos una relación de equivalencia sobre W como $w_1 \sim w_2$ ssi para algún $b \in Z(P)$, $w_1, w_2 \in \mathcal{V}_b$ y existe $g \in \mathcal{G}_b(P)$ tal que $w_1 = g \cdot w_2$. Interpretamos los elementos de $S_{(\mathcal{G},\mathcal{V},Z,e)}$ como las clases de W módulo $\sim$, las cuales son a su vez representantes de cada órbita de la acción fibra por fibra de $\mathcal{G}$ sobre $\mathcal{V}$. Por la Proposición 4.4, para todo $e \in M^{eq}$, existe $r \in S_{(\mathcal{G},\mathcal{V},Z,e)}$, tal que $e \in \mathrm{dcl}_{L_P}(r)$ y $r \in \mathrm{acl}_{L_P}(e)$. □

Referencias

[1] I. Ben-Yaacov, A. Pillay , E. Vassiliev , Lovely pairs of models, Annals of Pure and Applied Logic 122 (2003) 235-261.

[2] S. Buechler . Pseudoprojective strongly minimal sets are locally projective, Journal of Symbolic Logic 56 (1991) 1184-1194.

[3] F. Delon . Élimination des quantificateurs dans les paires de corps algébriquement clos. Confluentes Mathematici, Vol. 4, No. 2 (2012) 1250003 , 1-11.

[4] E. Hrushovski. Locally modular regular types, in J.T Baldwin (Ed.), Classification Theory, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1292, Springer, 1987.

[5] H.J. Keisler. Complete theories of algebraically closed fields with distinguished subfields, Michigan Mathematics Journal. 11 (1964) 71-81.

[6] S. Lang. Introduction to Algebraic Geometry. Interscience (1958), 62.

[7] D. Marker, Introduction to Model Theory, Springer (2002), 273-277.

[8] A. Pillay. Geometric Stability Theory, Oxford University Press (1996).

[9] A. Pillay. Imaginaries in pairs of algebraically closed fields. Annals of Pure and Applied Logic 146 (2007) 13-20.

[10] A. Pillay, E. Vassiliev, Imaginaries in beautiful pairs. Illinois Journal of Mathematics 48 (2004) 759-768.

[11] B. Poizat. Stable Groups, American Mathematical Society, Providence, RI (2001)

[12] B. Poizat. Une théorie de Galois imaginaire, Journal of Symbolic Logic 48 (1983) 1151-1170.

[13] K. Tent , M Ziegler. A course in Model Theory, Cambridge University Press (2012)