Newton's Method

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 1$$

$$f(0) = 0^3 - 0^2 + 1 = \boxed{1}$$

$$f(1) = 1^3 - 4(1)^2 + 1$$

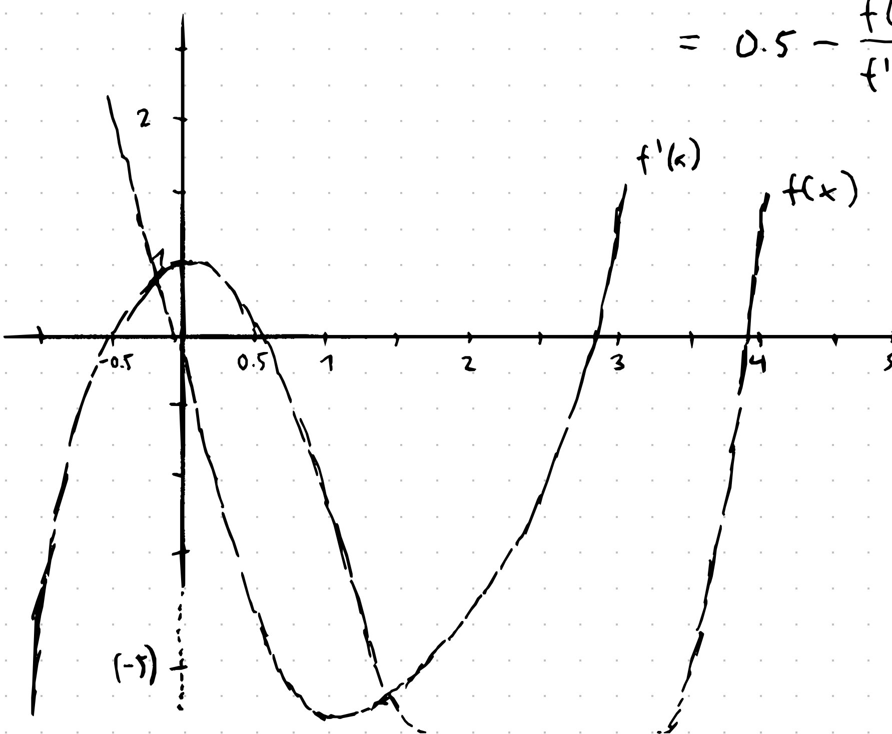
$$1 - 4 + 1 = \boxed{-2}$$

Irgendwo hier gibt es einen Wert der wahrsch. $y=0$ treffen muss für ein unbekanntes x.

$$x^3 - 4x^2 + 1 = 0, \quad x_0 = 0.5$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$= 0.5 - \frac{f(0.5)}{f'(0.5)}$$



$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 1$$

$$\underline{f(0.5)} = 0.5^3 - 4 \cdot 0.5^2 + 1 = \underline{0.125}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 8x$$

$$\underline{f'(0.5)} = 3(0.5)^2 - 8(0.5) = \underline{-3.25}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0.5 - \frac{0.125}{-3.25} = \underline{0.5385}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

$$= 0.5385 - \frac{(-0.003774)}{(-3.4381)} = 0.5374$$

<u>Probe</u> (Evaluate if $f(x_2) = 0$)

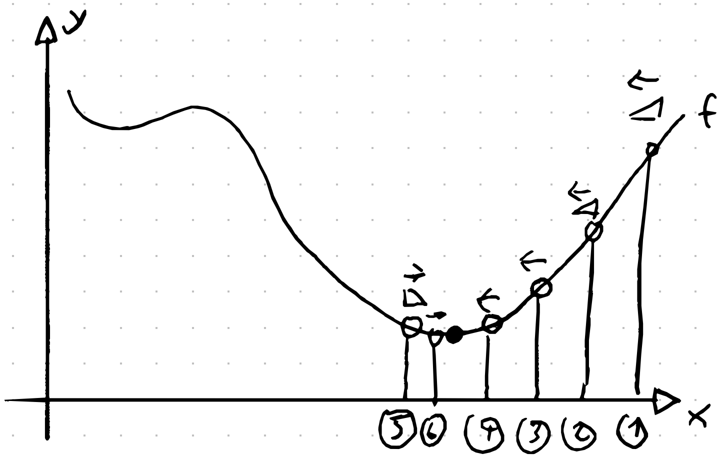
$$f(x_2) = x^3 - 4x^2 + 1 = 0.5374^3 - 4 \cdot (0.5374)^2 + 1$$

$$= 0.0000054136$$

$$= 5.4136 \cdot 10^{-6}$$

$$\underline{\underline{\approx 0}}$$

Abstiegsverfahren



$$x_{k+1} = x_k - \alpha \nabla f(x_k)$$: gibt an, wie nächster Punkt x_{k+1} zu berechnen ist.

x_k : Aktuelle Punkt im Iterationsverfahren

$\nabla f(x_k)$: Gradient, der die Richtung des steilsten Anstiegs am Punkt x_k angibt

Für eine Funktion $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist der Gradient gegeben durch

$$\nabla f(x_k) - \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \Big)_{x = x_k}$$

α : Schrittweite / Lernrate

$-\alpha \nabla f(x_k)$: Richtung des nächsten Schrittes