I

a) $(n+1) \% n = 1$, $n \div n = 1$, durch $(n+1)$ bleibt 1 übrig

b) $n^2 \% n = 0$, da durch n teilbar

c) $(3n+6) \% n = (\underbrace{3n \% n}_{=0}) + (\underline{6 \% n}) = 6 \% n$

d) $(4n-1) \% n = n-1$

e) $((n+1)n) \% n = (n^2+n) \% n = 0$

f) $(n^3 + 2n^2 + 4) \% n = (\underbrace{n^3 \% n}_{=0}) + (\underbrace{2n^2 \% n}_{=0}) + (\underline{4 \% n}) = 4 \% n$

g) $((2n+2)(n+1)) \% n = \underbrace{2n^2}_{=0} + \underbrace{4n}_{=0} + 2$ $\begin{cases} 0 & \text{für } n = 2 \\ 2 & \forall n > 2 \end{cases}$

h) $n! \% n = 0$

II.

%

$$587 = 1 \cdot 392 + 195$$
$$392 = 2 \cdot 195 + 2$$
$$195 = 97 \cdot 2 + 1$$

$$\begin{aligned}
1 &= 195 - 97 \cdot 2 \\
&= 195 - 97 \cdot (392 - 2 \cdot 195) \\
&= 195 - 97 \cdot 392 + 194 \cdot 195 \\
&= 195 \cdot 195 - 97 \cdot 392 \\
&= 195 \cdot (587 - 392) - 97 \cdot 392 \\
&= 195 \cdot 587 - 195 \cdot 392 - 97 \cdot 392 \\
&= \underbrace{195 \cdot 587}_{=0} - 292 \cdot 392 \quad \Big| \ \% \ 587 \\
&= (587 - 292) \cdot 392 \quad \Big| \ \% \ 587 \\
1 &\equiv 295 \cdot 392 \quad \Big| \ \% \ 587
\end{aligned}$$

III. $x \equiv 1 \ (\% \ 2)$

$x \equiv 2 \ (\% \ 3)$

$x \equiv 3 \ (\% \ 5)$

$x \equiv 4 \ (\% \ 11)$

$m = m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdot m_4 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 = 330$

$$M_1 = \frac{m}{m_1} = \frac{330}{2} = 165$$

$$M_2 = \frac{m}{m_2} = \frac{330}{3} = 110$$

$$M_3 = \frac{m}{m_3} = \frac{330}{5} = 66$$

$$M_4 = \frac{m}{m_4} = \frac{330}{11} = 30$$

$\forall i \in (1 \leq 1 \leq 4): 1 \ \% \ m_i \equiv M_i \cdot y_i$

$$y_1 = 165^{-1} \pmod 2 \equiv 1^{-1} \equiv 3$$

$$3 \cdot 1 \equiv 1 \pmod 2$$

$$y_2 = 110^{-1} \pmod 3 \equiv 2^{-1} \equiv 2$$

$$2 \cdot 2 \equiv 1 \pmod 3$$

$$y_3 = 66^{-1} \pmod 5 \equiv 1^{-1} \equiv 6$$

$$6 \cdot 1 \equiv 1 \pmod 5$$

$$y_4 = 30^{-1} \pmod{11} \equiv 8^{-1} \equiv 7$$

$$7 \cdot 8 \equiv 1 \pmod{11}$$

$$x \equiv 1 \cdot 165 \cdot 3 + 2 \cdot 110 \cdot 2 + 3 \cdot 66 \cdot 6$$
$$+ 4 \cdot 30 \cdot 7 \pmod{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11}$$
$$\equiv 2963 \pmod{330}$$
$$\equiv \underline{\underline{323}}$$

IV. $12!$

$$\phi(12!) = \phi(2^{10} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11)$$

$$= (2-1) \cdot 2^{10-1} \cdot (3-1) \cdot 3^{5-1} \cdot (5-1) 5^{2-1} \cdot (7-1) 7^{1-1} \cdot (11-1) \cdot 11^{1-1}$$

$$= 1 \cdot 2^9 \cdot 2 \cdot 3^4 \cdot 4 \cdot 5^1 \cdot 6 \cdot 10$$

$$= 2^{13} \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 6$$

$$= 99'532'800$$