I.BA_ANLIS.H22 - Formelsammlung - Eldar Omerovic - 15. Jan 2023

1 Funktionen

1.1 Funktionsgleichungen

Die Grundform einer Funktionsgleichung sieht wie folgt aus

$$y = mx + b$$

Um die Schnittpunkte zweier Funktionen zu berechnen, setzt man die Funktionen gleich

$$m_1x_1 + b_1 = m_2x_2 + b_2$$

1.2 Funktionen verschieben

Um 2 nach oben

Addition von a

$$f(x) = x^2 \rightarrow f(x) = x^2 + a \\ \rightarrow f(x) = x^2 + 2$$

Um 2 nach unten

Subtraktion von a

$$f(x) = x^2 \rightarrow f(x) = x^2 - a \\ \rightarrow f(x) = x^2 - 2$$

Um 2 nach rechts

x ersetzen mit $x - a$

$$f(x) = x^2 \rightarrow f(x) = (x - a)^2 \\ \rightarrow f(x) = (x - 2)^2$$

Um 2 nach links

x ersetzen mit $x + a$

$$f(x) = x^2 \rightarrow f(x) = (x + a)^2 \\ \rightarrow f(x) = (x + 2)^2$$

1.3 Funktionen strecken und stauchen

Strecken und stauchen in y-Richtung

Ob die Funktion gestreckt oder gestaucht wird, hängt von a ab. Wenn $a > 1$ wird die Funktion gestreckt, wenn $a < 1$ wird die Funktion gestaucht.

$$g(x) = a \cdot f(x) \rightarrow g(x) = a \cdot x^2 \rightarrow g(x) = 2 \cdot x^2$$

Strecken und stauchen in x-Richtung

Ob die Funktion gestreckt oder gestaucht wird, hängt von a ab. Wenn $a > 1$ wird die Funktion gestreckt, wenn $a < 1$ wird die Funktion gestaucht.

$$g(x) = f(\frac{x}{a}) \rightarrow g(x) = \frac{x^2}{a} \rightarrow g(x) = \frac{x^2}{2}$$

1.4 Gerade und ungerade Funktionen

Gerade Funktion

Eine Funktion wird dann als gerade bezeichnet, wenn sie y-Achsensymmetrisch ist. Um dies zu beweisen kann man wie folgt vorgehen.

$$f(x) = f(-x)$$
$$f(x) = x^2 + 3$$
$$x^2 + 3 = (-x)^2 + 3 \rightarrow true!$$

Wenn $f(x) = f(-x)$ dann ist die Funktion gerade (Spiegelsymmetrie).

Ungerade Funktion

Eine Funktion ist dann ungerade, wenn sie Punktsymmetrisch ist. Um dies zu beweisen, muss folgendes zutreffen: $f(x) \neq f(-x)$. Das Vorgehen ist das selbe, wie auch bei den geraden Funktionen.

2 Folgen & Reihen

Eine Folge muss man in die Form $\sum_{k=0}^{\infty} a_1 \cdot q^k$ bringen

Die Summe kann man nur berechnen, wenn $|q| < 1$

Beispiel:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{7+3^k}{7^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{7}{7^k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{7^k}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} 7(\frac{1}{7})^k + \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{3}{7})^k$$
$$7 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{7}} + \frac{1}{1-\frac{3}{7}} = 9.916$$

2.1 Grenzwert

Den Grenzwert von Folgen und Reihen bestimmt man in dem man für x den Wert für den Grenzwert einsetzt.

$$\lim_{x \to \infty} 2x = \infty$$
$$\lim_{x \to \infty} \frac{2}{x} = 0$$
$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x}{x} = \frac{\infty}{\infty} \to \text{Umformen oder Regel von l'Hopital nötig}$$

Das Quotiontenkriterium

Das Quotientenkriterium ist ein mathematisches Konvergenzkriterium für Reihen. Mit diesem Kriterium kann man auch die Konvergenz oder Divergenz nachweisen.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_k \rightarrow \frac{|a_{k+1}|}{a_k} \rightarrow \lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{a_k}$$

Beispiel:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k}{5^k} \rightarrow \frac{k+1}{5^{k+1}} : \frac{k}{5^k} = ... = \frac{k+1}{5k} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

Das Wurzelkriterium

Das Wurzelrkriterium ist ein mathematisches Konvergenzkriterium für Reihen. Mit diesem Kriterium kann man auch die Konvergenz oder Divergenz nachweisen.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_k \rightarrow \sqrt[k]{|a_k|} \rightarrow \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$$

Beispiel:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k}{5^k} \rightarrow \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{k}{5^k}} = \frac{\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k}}{\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{5^k}} = \frac{1}{5}$$

2.2 Konvergenz / Divergenz

Eine Reihe konvergiert dann, wenn die Reihe auf einen Wert zuläuft. Wenn eine Reihe in Richtung $-\infty, \infty$ läuft.

Um herauszufinden, ob eine Reihe konvergiert oder divergiert rechnen wir den Grenzwert der Funktion berechnen.

$$p = \lim_{x\to\infty} f(x) = \begin{cases} p < 1 \rightarrow \text{konvergiert} \\ p > 1 \rightarrow \text{divergiert} \\ p = 1 \rightarrow \text{keine Aussage möglich} \end{cases}$$

Das Leibnizkriterium

Mit dem Leibnizkriterium bestimmt man ob eine alternierende Reihe konvergiert oder divergiert. Folgendes muss zutreffen, damit die Reihe konvergiert.

$$\begin{gathered}1.\ \lim_{k\to\infty} a_k = 0\\ 2.\ a_k > a_{k+1}\end{gathered}$$

Beispiel:

$$\begin{gathered}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}\\ 1.\ (-1)^{k+1}\frac{1}{2k+1} \to 0\\ 2.\ \frac{1}{2k+1} > \frac{1}{2k+2}\\ = 2k+2 > 2k+1 \to \text{Reihe konvergiert}\end{gathered}$$

2.3 Arithmetische Folgen

Arithmetische Folgen zeichnen sich dadurch aus, dass die Differenz zweier aufeinanderfolgenden Glieder eine konstante Addition oder Subtraktion ist.

$$a_{n+1} = a_n + d$$

Summe einer arithmetischen Folge

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = n \cdot a_1 + d \cdot \frac{n(n-1)}{2}$$

Ein Glied anhand des ersten Glieds und der Differenz

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

Die Differenz anhand zweier aufeinanderfolgenden Gliedern

$$d = a_{n+1} - a_n$$

Die Differenz anhand zweier nicht aufeinanderfolgenden Gliedern

$$a_{\color{red}m} = a_{\color{blue}n} + ({\color{red}m} - {\color{blue}n}) \cdot d$$

2.4 Geometrische Folgen

Geometrische Folgen besitzen einen Quotienten q, wobei dieser konstant multipliziert oder dividiert wird.

$$a_{n+1} = q \cdot a_n$$

Ein Glied anhand des ersten Glieds und dem Quotienten

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Die Summe anhand dem ersten Glied und dem Quotienten (unendliche Summe)

$$\sum_{n=1}^{\infty} = a_1 \cdot \frac{1}{1-q}$$

⚠ Gilt nur wenn $|q| < 1$

Nützlichen Summen

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2+n)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = (\frac{n(n+1)}{2})^2$$

$$\sum_{k=1}^{n} 1 = n$$

Die Summe anhand dem ersten Glied und dem Quotienten (endliche Summe)

$$\sum_{k=0}^{n} = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

i Nur für Summen mit einer Grenze n

Den Quotienten anhand zweier aufeinanderfolgenden Gliedern

$$q = \frac{n_{n+1}}{a_n}$$

Den Quotienten anhand zweier nicht aufeinanderfolgenden Gliedern

$$a_m = a_n \cdot q^{m-n}$$

3 Grenzwerte und Stetigkeit

3.1 Stetigkeit

Definition der Stetigkeit an einer Stelle x_0:

$$
\begin{gathered}
1)\ f(x_0) existiert \\
2)\ \lim_{x \to 0} f(x) \text{ existiert} \\
3)\ f(x_0) = \lim_{x \to 0} f(x)
\end{gathered}
$$

f ist im Intervall I stetig, wenn sie an jeder stelle $x_0 \in I$ stetig ist.

Beispiel

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{\sqrt{2x-5}} \text{ in } [3,4] \\
f \text{ ist stetig, solage } \sqrt{2x+5} \geq 0 \text{ , im Intervall } [3,4] \text{ stimmt dies.}
\end{gathered}
$$

4 Differentialrechnung I

4.1 Differenzieren

$$a^n \to n \cdot a^{n-1}$$

4.2 Ableitungsregeln

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
x^n	$n \cdot x^{n-1}$	x^3	$3x^2$
$c \cdot x^n$	$n \cdot c \cdot x^{n-1}$	$2x^{10}$	$10 \cdot 2x^9$
$u(x) + v(x)$	$u'(x) + v'(x)$	$x^3 - 4x$	$3x^2 - 4$
$u(x) \cdot v(x)$	$u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'()$	$x^2 \cdot x^3$	$2x \cdot x^3 + x^2 \cdot 3x^2$
$\frac{u(x)}{v(x)}$	$\frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$	$\frac{x^4}{x^{10}}$	$\frac{4x^3 \cdot x^{10} - x^4 \cdot 10x^9}{(x^{10})^2}$
$u(v(x))$	$u'(v(x)) \cdot v'(x)$	$3(x^2-4)^{10}$	$30(x^2-4)^9 \cdot 2x$

5 Differentialrechnung II

5.1 Einseitige Ableitung

Einseitige Ableitungen werden dann gebraucht, wenn wir für unterschiedliche Wertebereiche, unterschiedliche Funktionen haben, wie hier:

$$f(x) = \begin{cases} 5 & \forall x < 0 \\ x^2 + 5 & \forall x \in [0, 2] \\ \frac{1}{2}x + 8 & \forall x > 2 \end{cases}$$

5.2 Differenzieren mit der Kettenregel

Um verschachtelte Funktionen abzuleiten, nutzen wir die Kettenregel.

Hierbei leiten wir die äussere Funktion ab, lassen die inneren Funktionen wie sie sind und multiplizieren die abgeleiteten inneren Funktionen dann wieder.

$$\begin{gathered} f(x) = (u)^v \\ = \frac{d}{dx}[(u)^v] \\ = v'(u) \cdot \frac{d}{dx}[u] \\ = v'(u) \cdot u' \end{gathered}$$

Beispiel:

$$\begin{gathered} f(x) = (x^2+1)^{100} \\ = \frac{d}{dx}[(x^2+1)^{100}] \\ = 100(x^2+1)\ 99 \cdot \frac{d}{dx}[x^2+1] \\ = 100(x^2+1)^{99} \cdot (2x+0) \\ = 200x(x^2+1)^{99} \end{gathered}$$

5.3 Differential und Änderung des Funktionswertes

Differential einer Funktion bestimmen und die Änderung des Funktionswertes wenn $dx = \frac{1}{2}$

Zuerst leiten wir die Funktion ab und setzen dann x_0 in die abgeleitete Funktion ein.

$$f(x) = x \cdot ln(x), \qquad x_0 = e^2$$
$$f'(x) = ln(x) + 1$$
$$f'(e^2) = ln(e^2) + 1 = 3$$

Jetzt können wir folgende Formel verwenden um die Änderung des Funktionswertes zu bestimmen

$$f(x_0 + dx) - f(x_0)$$

Jetzt setzen wir ein.

$$f(e^2 + 0.5) - f(e^2) = 1.5165$$

Von diesem Resultat müssen wir für den Fehler noch df abziehen.

$$df = f'(e^2)dx = 3 \cdot 0.5 = 1.5$$
$$\epsilon = 1.5165 - df = 1.5165 - 1.5 = 0.0165$$

5.4 Differenzieren anhand Werten

Bestimmen von Werten anhand anderen Werten.

$$\frac{d}{dx} f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

x	$f(x)$	$f'(x)$
-9	-7	1
-7	1	5

Anhand Beispiele in Tabelle:

$$f(-7) = 1 \qquad \text{durch ablesen}$$
$$f^{-1}(-7) = -9 \qquad \text{durch ablesen}$$
$$(f^{-1})'(-7) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{f'(f^{-1}(-7))} = \frac{1}{f'(-9)} = \frac{1}{1} = 1$$

6 Differentialrechnung III

6.1 Implizite Differentiation

Wenn wir eine Gleichung mit mehr als einer Unbekannten haben, müssen wir implizit Ableiten.

$$\begin{gathered}
\frac{d}{dx}[x^3 - x \cdot y + y^3 = 200] \\
= 3x^2 - (1 \cdot y + x \cdot 1 \cdot \frac{d}{dx}) + 3y^2 \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \\
= -x \cdot \frac{dy}{dx} + 3y^2 \frac{dy}{dx} = +y - 3x^2 \\
\frac{dy}{dx}(-x + 3y^2) = y - 3x^2 \\
\frac{dy}{dx} = \frac{y - 3x^2}{-x + 3y^2}
\end{gathered}$$

7 Differentialrechnung IV

7.1 Parameterdarstellung von Kurven

Dies wird hier anhand einer Aufgabe demonstriert.

$$x(t) = \frac{t^2}{1-t}, y(t) = \frac{1+t^2}{1-t}$$

Ableitung von y' bilden

Kurve in y und x Richtung nach t ableiten.

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}$$

Mithilfe der Quotientenregel für y ableiten:

$$\dot{y}(t) = \frac{(1-t)\cdot 2t - (1+t^2)\cdot(-1)}{(1-t)^2} = \frac{2t - 2t^2 + 1 + t^2}{(1-t)^2} = \frac{-t^2 + 2t + 1}{(1-t)^2}$$

Mithilfe der Quotientenregel für x ableiten:

$$\dot{x}(t) = \frac{(1-t)\cdot 2t - t^2\cdot(-1)}{(1-t)^2} = \frac{2t - 2t^2 + t^2}{(1-t)^2} = \frac{2t - t^2}{(1-t)^2} = \frac{t(2-t)}{(1-t)^2}$$

Nun können wir die Ableitung so schreiben:

$$y' = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = \frac{\frac{-t^2+2t+1}{(1-t)^2}}{\frac{t(2-t)}{(1-t)^2}} = \frac{-t^2+2t+1}{t(2-t)}$$

7.2 Polarkoordinaten

Wenn man einen Punkt $P(r, \phi)$ in Polarkoordinaten angeben möchte, nimmt man den Radius (die Länge vom Nullpunkt zum Punkt) und den Winkel zur x-Achse, um zu definieren, wo dieser Punkt P im Koordinatensystem steht.

Polarkoordinaten → Kartesische Koordinaten

$$x = r \cdot cos(\phi)$$
$$y = r \cdot sin(\phi)$$

Kartesische Koordinaten → Polarkoordinaten

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$tan(\phi) = \frac{y}{x}$$

7.3 Ableitung einer in Polarkoordinaten gegebenen Funktion

Die gewöhnliche Ableitung einer Funktion wird bestimmt, indem man die Polarkoordinaten in die Parameterform transofmirt:

$$x = x(\phi) = r(\phi) \cdot cos(\phi)$$
$$y = y(\phi) = r(\phi) \cdot sin(\phi)$$

Hier ist ϕ der Parameter der Kurve. Man wenden die bereits bekannte Formel $y'(x) = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ an, wobei der Punkt die Ableitung nach dem Parameter bedeutet:

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\dot{r}(\phi)sin(\phi) + r(\phi)cos(\phi)}{\dot{r}(\phi)cos(\phi) - r(\phi)sin(\phi)}$$

7.4 Kurvendiskussion

Vorgehen

1. Definitions- und Wertebereich, Definitionslücken, Unstetigkeitsstellen
2. Symmetrien: ist die Funktion gerade, ungerade oder T-periodisch ($f(x+T) = f(x)$)
3. Nullstellen, Schnittpunkt mit y-Achse
4. Pole, senkrechte Asymptoten (Polgeraden)
5. Ableitungen (in der Regel bis zur dritten Ordnung)
6. Relative Extremwerte (Maxima, Minima): Notwendige Bedingung $f'(x) = 0$
7. Monotonieeigenschaften, Wendepunkt, Krümmung, etc
8. Asymptotisches Verhalten für $x \to \pm\infty$
9. Krümmungskreismittelpunkt (Evolute) (optional)
10. Skizze des Graphen

Wendepunkte und Sattelpunkte

Die Funktion hat an der Stelle x_0 einen Wendepunkt, wenn die beiden Bedingungen zutreffen:

$$f''(x_0) = 0 \text{ und } f'''(x_0) \neq 0$$

Wenn zusätzlich folgendes gilt, liegt ein Sattelpunkt vor:

$$f'(x_0) = 0$$

7.5 Optimierungsprobleme

Vorgehen bei Optimierungsproblemen

1. Was soll maximal / minimal werden? (Hauptbedingung)
2. Was ist die Nebenbedingung?
3. Nebenbedingung umstellen
4. Nebenbedingung bei Hauptbedingung einsetzen
5. Zusammenfassen und umstellen
6. Extremwert und gesuchte Werte ermitteln mittels Differenzierung

Beispiel für das Maximieren einer Fläche

In diesem Beispiel soll die Fläche A eines Rechtecks entstehen, in dem wir die Seiten a und b so wählen, dass A maximal wird. Umfang des Rechtecks soll dabei 16m betragen.

1. **Was soll maximal / minimal werden?**
   Wir wollen das A maximal wird. Unsere Hauptbedingung sieht wie folgt aus:

$$A = a \cdot b$$

2. **Was ist die Nebenbedingung?**
   Da wir nur 16m im Umfang haben, ist der Umfang unsere Nebenbedingung:

$$2a + 2b = 16$$

3. **Nebenbedingung umstellen**
   Nun stellen wir sie so um, dass wir sie in unserer Hauptbedingung einsetzen können.

$$a = 8 - 1b$$

4. **Nebenbedingung in Hauptbedingung einsetzen**

$$A(b) = (8 - 1b) \cdot b$$

5. **Zusammenfassen und umstellen**
   Hier soll der Term so umgestellt werden, damit man ihn möglichst einfach differenzieren kann. Dies macht man in dem man ausmultipliziert.

$$A(b) = 8b - b^2$$

6. **Extremwert und gesuchte Werte ermitteln**
   Mit der ersten Ableitung bestimmen wir den Wert von b
   Mit der zweiten Ableitung wird überprüft ob tatsächlich das Maximum oder Minimum erreicht wurde

$$A'(b) = 8 - 2b$$
$$A''(b) = -2 < 0$$
$$b = 4$$

Jetzt wird b eingesetzt um so a und auch die Fläche A zu berechnen

$$a = 8 - 1b\,, \text{für b} = 4$$
$$a = 4$$
$$A = a \cdot b\,, \text{für a=4, b} = 4$$
$$A = 16$$

7.6 Regel von de l'Hôpital

Wenn wir bei der Grenzwertberechnung einer Funktion $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ kriegen, können wir mit dieser Regel mit der Grenzwertberechnung fortfahren.

Dazu muss man die Funktion ableiten und dann wieder neu einsetzen.

Beispiel:

$$f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \to \lim_{x \to 1} \frac{2x}{1} = \lim_{x \to 1} 2x = 2$$

8 Integralrechnung I

8.1 Stammfunktionen

Stammfunktionen sind differenzierbare Funktionen. Also falls.

$$F'(x) = f(x)$$

Die Integration von Funktionen ist die Umkehrung der Differentiation.

8.2 Bestimmtes Integral

Ein bestimmtes Integral kann genutzt werden um die Fläche einer Funktion zur x-Achse in einem Intervall zu berechnen.

8.3 Nummerische Integration

Die nummerische Integration ist das "manuelle" Integrieren. Man berechnet dabei die Fläche einer Funktion, in dem man die Fläche unendlich vieler Rechtecke im Intervall unter der Funktion berechnet. Im Normalfall berechnen wir so zuerst die Fläche von $x = 0$ bis zu beiden Grenzen und ziehen dann die Berechnung vom linken Rand der Berechnung vom rechten Rand ab.

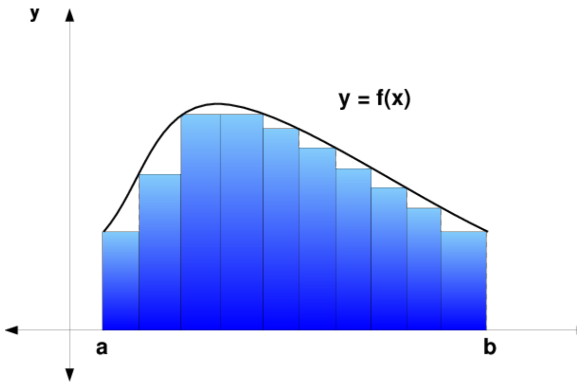

Bild: www.researchgate.net/

Beispiel

Wir möchten ein bestimmtes Integral nummerisch integrieren. Wir haben die Funktion $y = x^3$ und möchten nun die Fläche dieser Funktion zur x-Achse im Intervall $[0, 2]$ berechnen.

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^\star) \Delta x$$

In einem ersten Schritt, definieren wir Δx anhand unserer Intervallgrenzen.

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$$

Nun definerien wir, was unser x_k ist.

$$x_k = a + k \cdot \Delta x = 0 + k\frac{2}{n} = \frac{2k}{n}$$

Jetzt, jenachdem zu welchem Rand der Funktion wir das Integral berechnen, definieren wir die Funktion.

Linker Rand

$$f(x^\star_{k-1}) = x^3_{k-1} = (\frac{2(k-1)}{n})^3$$

Rechter Rand

$$f(x^\star_k) = x^3_k = (\frac{k}{n})^3$$

Ab hier wird im Beispiel mit dem Linken Rand gearbeitet.

Jetzt können wir mittels Induktion folgende Summe bilden:

$$\sum_{k=1}^{n}(\frac{2(k-1)}{n})^3 \cdot \frac{2}{n} = \frac{2^4}{n^4} \cdot \sum_{k=1}^{n-1}(k^3)$$

Mittels Induktioon können wir nun folgenden Term bilden:

$$\frac{2^4}{n^4} \cdot (\frac{n(n-1)}{2})^2 = 4(1-\frac{1}{n})^2$$

Jetzt berechnen wir den Grenzwert dieser Funktion um an die Fläche zu gelangen.

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x^\star_k)\Delta x = \lim_{n\to\infty} 4(1-\frac{1}{n})^2 = 4 \cdot 1 = 4$$

Im Normalfall berechnen wir so zuerst die Fläche von $x = 0$ bis zu beiden Grenzen und ziehen dann die Berechnung vom linken Rand der Berechnung vom rechten Rand ab.

9 Integralrechnung II

9.1 Substitutionsregeln

Die Substitution hat nicht wirlich regeln, ausser dass sie invertierbar sein muss. Das Vorgehen sieht wie folgt aus.

1. Geeignete invertierbare Substitutionsfunktion wählen
2. $x = \phi(u)$ wählen und differenzieren
3. Umwandeln, so dass Substitutionsvariable die Funktion ersetzt: $dx = \phi'(u)\,du$
4. Integrieren mit Substitutionsvariable anstelle Funktion
5. Rücksubstituieren

Ein Beispiel für eine Substitution:

$$\int \frac{1}{xln(x)}\,dx$$
$$\text{Substituieren:}$$
$$u = ln(x) \rightarrow \frac{1}{x} = \frac{du}{dx} \rightarrow dx = \frac{x}{1}\,du$$
$$\text{Mit Substitution integrieren:}$$
$$\rightarrow \int \frac{x}{x \cdot u} = \frac{1}{u}$$
$$\text{Rücksubstituiren:}$$
$$= ln(u) = ln(ln(x)) + C$$

10 Integralrechnung III

10.1 Partielle Integration

Dies ist die Formel um partiell zu integrieren.

$$\int u' \cdot v \, dx = u \cdot v - \int u \cdot v' \, dx$$

Partiell Integrieren: Schritt für Schritt

Anhand des Beispiels: $\int x \cdot ln(x) \, dx$

⚠ Beachte, dass u' und v frei gewählt werden können. Der erste Faktor des Terms muss nicht gleich u' sein. Man sollte u' am besten so wählen, dass es möglichst einfach zum weiterrechnen ist nach dem man es integriert hat zu u.

U' und V wählen

Um zu entscheiden, was wir wann ntzen, können wir uns an ***LIATE*** halten.

L: logarithmische Funktionen log, ln, lg

I: inverse Winkelfunktionen $asin, acos, atan$

A: algebraische Funktionen $x^2, 5x^3$

T: trigonometrische Funktionen $sin, cos, tan, ...$

E: Exponentialfunktionen $e^x, 5a^x, ...$

Schritte

1. u' wird integriert und hinter das $=$ geschrieben

$$\int x \cdot ln(x)\,dx = \frac{x^2}{2} \ldots$$

2. Wir übernehmen v so wie es bereits da steht hinter das $=$

$$\int x \cdot ln(x)\,dx = \frac{x^2}{2} \cdot ln(x) - \ \ldots$$

3. Nun müssen wir noch das Integral von $u \cdot v'$ subtrahieren.

$$\int x \cdot ln(x)\,dx = \frac{x^2}{2} \cdot ln(x) - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x}\,dx$$

Hier eine Representation von den Werten in den verschiedenen 3 Phasen.

Phase 1	*Phase 2*	*Phase 3*
$u' \to x$	$u \to \frac{x^2}{2}$	$u \to \frac{x^2}{2}$
$v \to ln(x)$	$v \to ln(x)$	$v' \to \frac{1}{x}$

Wir sehen also, dass u von Phase 1 zu Phase 2 integriert und v von Phase 2 zu Phase 3 differenziert wird.

11 Integralrechnung IV

11.1 Trapezregel und Simpsonverfahren

> i Diese verwendet man am besten mit einem Onlinerechner wie WolframAlpha, PlanetCalc, EmathHelp.net, etc.
> Empfehlung: https://de.planetcalc.com/5494/

11.2 Bogenlänge

Zur Berechnung der Bogenlänge einer Funktion in einem Intervall $[x_1, x_2]$ können wir folgende Formel verwenden

$$\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

Beispiel

Die Bogenlänge von $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ im Intervall $x = 0$, $x = 5$

$$\int_0^5 \sqrt{1 + [\frac{3\sqrt{x}}{2}]^2}\, dx = \frac{335}{27} = 12.407$$

> i In Wolframalpha kann dies mithilfe des arc length calculator berechnet werden. Dazu gibt man einfach "arc length calculator" ein wobei man dann ein Formular mit den Angaben zu Funktion, etc ausfüllt.

12 Potenz- und Taylorreihen

12.1 Indextransformation einer Summe

Wenn man eine Indexverschiebung vornimmt, ändern wir den Wert der Summe nicht. Somit können wir durch die Indexverschiebung Terme vereinfachen oder sie anderen Summentermen anpassen, wenn man mit diesen rechnen möchte.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i$$

Wenn man den Index dieser Summe um m Einheiten verschiebt, sieht der Summenterm wie folgt aus:

$$\sum_{i=1+m}^{n+m} a_{i-m}$$

Ein Beispiel

$$\sum_{k=0}^{n} (k+1)^3 \rightarrow \sum_{k=1}^{n+1} k^3$$

12.2 Konvergenzradius

$$R = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k = a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots$$

Die Formeln für den Konvergenzradius sind folgende

$$R = \lim_{k \to \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| \qquad R = \lim_{k \to \infty} \left(\sqrt[k]{|a_k|} \right)^{-1}$$

12.3 Taylor-Reihe

Mit der Taylor-Reihe kann ein Wert wie zum Beispiel e als eine unendliche Reihe ausgedrückt werden, die gegen den Wert (hier e) konvergiert.

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \dots$$

12.4 Taylor-Polynom

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k}_{\text{Näherungspolynom}} + R_n(x, x_0)$$

Wenn wir diese Reihe als Polynomschreibweise ($2x^3 + 4x^2 + \dots$) ausdrücken möchten, müssen wir die Aktion im Näherungspolynom so oft wiederholen, bis wir nahe genug am gewünschten Resultat sind.
Beispiel

$$t(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \\ \to \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \underbrace{R_n(x, x_0)}_{\text{Restglied nach Lagrange}}$$

Restglied nach Lagrange / Fehlerintervall

Das Restglied, also der Approximationsfehler, ist im Prinzip das nächste darauf folgende Glied, um den Fehler zu minimieren. Dies ist jedoch auch wieder nur eine Abschätzung und kein genauer Wert. Für ξ gilt $\xi \in [x, x_0]$

$$\underbrace{R_n(x, x_0)}_{\text{Restglied}} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x)^{n+1}$$

Abweichung berechnen

Um die Abweichung von $f(x)$und t an einer Stelle x zu berechnen, verwenden wir dieses Vorgehen.

Zuerst rechnen wir den Wert aus, wenn wir x_0 in f einsetzen

Im Beispiel mit $f(x) = ln(x)$ gearbeitet und $x_0 = 0.5$

$$f(0.5) = -0.69315$$

Nun berechnen wir den Wert, der uns das Taylor Polynom dieser Funktion gibt.

$$t(0.5) = -0.68854$$

Jetzt subtrahieren wir den Wert des Taylor-Polynoms vom Wert der Funktion für x_0

$$f(0.5) - t(0.5) = -4.61 \cdot 10^{-3}$$

13 Mehrdimensionale Differentialrechnung I

13.1 Konturlinien

Die Kontur- oder Niveaulinien sind die Kurven, welche die folgende Gleichung einhalten:

$$f(x,y) = c, \text{ für irgendein } c \in \mathbb{R}$$

Um Kontur- oder Niveaulinien für irgend ein Niveau c zu zeichnen, muss man die Gleichung nach (x,y) auflösen. Dies kann mittels Octave/Matlab (Maple) wie folgt durchgeführt werden:

```
ticks = [ -3.0:0.1:3.0];
[x , y] = meshgrid ( ticks , ticks );
z = x .^2/2 + y .^2;
contour (x ,y ,z );
title ("Eliptische Bowle mit meshgrid");
print ("figs/ellipticbowle_contour_01.png");
```

13.2 Gradient

$$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \end{bmatrix}$$

i Der Nabla Operator ∇ steht für partielle Ableitung von x, y und z

Beispiel:

In der Funktion $f(x,y) = x + e^y$, an der Stelle: $(1,1)$

$$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ e^y \end{bmatrix}, \nabla f(1,1) = \begin{bmatrix} 1 \\ e \end{bmatrix}$$

Eigenschaften des Gradienten

Wenn f eine anständige Funktion, d.h insbesondere im Punkt (x_0, y_0) differenzierbar mit dem Gradienten $\nabla f(x, y) \neq 0$, dann:

- ist die Richtung des Gradienten senkrecht (orthogonal) zu den Konturlinien von f durch (x_0, y_0), d. h. den Kurven mit $f(x_0, y_0) = f(x, y)$
- ist der Gradient gleich der Richtung der maximalen Zunahme von f
- ist der Betrag des Gradienten $|\nabla f(x_0, y_0)|$ gleich der maximalen Änderungsrate von f in diesem Punkt.
- ist der Betrag des Gradienten $|\nabla f(x_0, y_0)|$ gross, wenn die Konturlinien nahe beieinander sind und klein, wenn sie weit auseinander liegen.

13.3 Richtungsableitung

Wenn wir eine Funktion gegeben haben, müssen wir zuerst den Gradienten dieser berechnen, um auf die Richtungsableitung zu kommen. Nehmen wir beispielsweise die Richtungsableitung bei $P(2,-5)$ in Richtung von $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -0.6 \\ 0.8 \end{pmatrix}$ in der Funktion $f(x,y) = 2x^2y - 2304xy + 3y^2$

1. Zuerst leiten wir nach x und y ab um den Gradienten zu bestimmen

$$f_x = 4xy - 2304y$$
$$f_y = 2x^2 - 2304x + 6y$$

2. Nun setzen wir den Gradienten mithilfe der Ableitungen zusammen und setzen $P(x,y)$ ein.

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 4xy - 2304y \\ 2x^2 - 2304x + 6y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 2 \cdot -5 - 2304 \cdot -5 \\ 2 \cdot 2^2 - 2304 \cdot 2 + 6 \cdot -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11480 \\ -4630 \end{pmatrix}$$

Im letzten Schritt wollen wir noch die Richtung in Vektor V berücksichtigen, was wir machen, in dem wir ihn mit mit unserem Gradienten multiplizieren.

3. Zuerst muss jedoch der Richtungsvektor überprüft werden, da er 1 sein muss.

$$|\overrightarrow{v}| = \sqrt{(-0.6)^2 + 0.8^2} = 1$$

Wenn dies nicht stimmt müssen wir im nächsten Schritt unser Resultat durch den Betrag des berechneten Vektors $|\overrightarrow{v}|$ teilen.
4. Wenn dies stimmt, multiplizieren wir nun die Vektoren und bilden so ein Skalarprodukt.

$$\begin{pmatrix} 11480 \\ -4630 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0.6 \\ 0.8 \end{pmatrix} = 11480(-0.6) + (-4630)0.8 = -10592$$

14 Mehrdimensionale Differentialrechnung II

14.1 Tangentialebene einer Funktion

Die Tangentialebene ist die Tangente des 3-dimensionalen Raumes. Sie lehnt sich auf einen Punkt in der 3-dimensionalen Funktion an und bildet eine Fläche mit der Steigung an diesem Punkt.

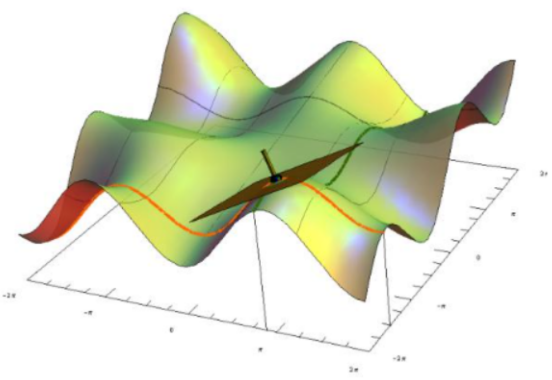

Bild: docplayer.org

$$f_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + f_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

Niveaufläche / Konturfläche berechnen

Gegeben, dass wir den Punkt $P(-6, -4, -4)$ und die Funktion $f(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 + 4z^2$ haben, soll die Niveaufläche in der Form $F(x, y, z)$ angegeben werden.

Dazu setzt man die Werte von P in die Funktion ein, und zieht dann das von der Funktion ab.

$$\begin{gathered} f(-6, -4, -4) = 2(-6)^2 \cdot 3(-4)^2 + 4(-4)^2 \\ = 72 + 48 + 64 = 184 \\ F(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 + 4z^2 - 184 = 0 \end{gathered}$$

Gradient berechnen

Im Punkt $P(-6, -4, -4)$ soll der Gradient der Funktion $f(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 + 4z^2$ berechnet werden.

$$\nabla f(x, y, z) = \begin{bmatrix} \color{red}{f_x(x, y, z)} \\ \color{blue}{f_y(x, y, z)} \\ \color{green}{f_z(x, y, z)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \color{red}{4x} \\ \color{blue}{6y} \\ \color{green}{8z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \color{red}{4 \cdot -6} \\ \color{blue}{6 \cdot -4} \\ \color{green}{8z \cdot -4} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \color{red}{-24} \\ \color{blue}{-24} \\ \color{green}{-32} \end{pmatrix}$$

Tangentialebene berechnen

Hier setzen wir die Berechnung im Gradienten für die Funktionen f_x, f_y, f_z und die Werte aus dem Punkt $P(x, y, z) = P(-6, -4, -4)$ für x_0, y_0, z_0 in die Formel für die Tangentialebene ein.

$$f_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + f_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

Diese Werte muss man jeder einsetzen, woraus folgende Gleichung folgt.

$$-24(x - -6) + -24(y - -4) + -32(z - -4) = 0$$
$$-24(x + 6) + -24(y + 4) + -32(z + 4) = 0$$

15 Weitere Informationen

15.1 Tools und Webseiten

- WolframAlpha - https://www.wolframalpha.com/
- Integralrechner - https://www.integralrechner.de/
- Ableitungsrechner - https://www.ableitungsrechner.net/
- PlanetCalc - https://de.planetcalc.com/5494/