Eldar Omerovic

MAT2 - Visualisiert

- Matrizenrechnung (**MAT**)
    - Kamera-Transformation in der Computergraphik
- Mathematische Anwendungen in der Informatik (**ANW**)
    - Fehlerbehebung in Codes (Visualisierung bei QR-Codes)
- Finanzmathematik (**FIN**)
    - Sparplan-Simulator, Investitionen bewerten

Inhalt

1

Matrizenrechnung

Homogene Koordinaten, Matrixmultiplikation

Matrizen

Matrizen können verwendet werden, um die Position, Skalierung und Rotation eines Objektes im 3D-Raum zu beschreiben.

Wieso 4x4-Matrizen? Die zusätzliche Dimension, die homogenen Koordinaten, erlaubt es uns alle Transformationen (Translation, Rotation, Skalierung) mittels Matrixmultiplikation zu kombinieren.

Eine Einheitsmatrix erzeugt keine verändernde Transformation, da jede Matrix sich selbst ergibt, wenn man sie mit einer Einheitsmatrix multipliziert. Daher bildet die Einheitsmatrix unsere neutrale Basis:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrizen - Translation

Eine Translation bewegt ein Objekt von einem Punkt zu einem Anderen. Die Translations-parameter kommen in die letzte Spalte einer Einheitsmatrix.

$$T(t_x, t_y, t_z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Um also ein Objekt zu einem Punkt (2, 0, -3) zu bewegen, würden wir die untenstehende Transformationsmatrix verwenden und mit einem Vektor (Punkt / Objekt) multiplizieren.

$$T(2,\ 0,\ -3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T \cdot \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10+2 \\ 20 \\ 5-3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 20 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Matrizen - Rotation

Eine Rotation dreht ein Objekt um eine spezifische Achse. Dazu verwenden wir folgende 3 Transformationsmatrizen.

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrizen - Multiplikation

Die Matrixmultiplikation ist eine Operation, bei der die Reihenfolge eine Rolle spielt (nicht kommutativ).

Sie ist entscheidend, wenn wir Transformationen (z.B. eine Translation und eine Rotation) kombinieren möchten.

Denn wir multiplizieren die einzelnen Transformationsmatrizen in umgekehrter Reihenfolge auf, um die resultierende Transformationsmatrix zu erhalten, die alle Transformationen beinhaltet.

Als Beispiel: Wir wollen zuerst rotieren, und dann translieren. Dann würden wir in folgender Reihenfolge multiplizieren:

$$\text{Finale Matrix} = \text{Translationsmatrix} \times \text{Rotationsmatrix}$$

Ab zum Notebook

Verkettete Transformationen


Visual Tool
3d-matrices.omeldar.com

2 Mathematische Anwendungen in der Informatik

1. In IDs findet man oft eine Prüfziffer (ISBN, EAN, IBAN)
2. Wie ist ein QR Code codiert? Wie funktioniert die Fehlerkorrektur
3. Bis zu ~30% Fehlerkorrektur, aber wie?

QR-Codes

QR-Codes

Orientierungsmuster

- Für Orientierung von Scannern (z.B: Handys, Kameras)
- Für Ausrichtung nur 3

QR-Codes

QR-Code Grösse

- Abwechselnd weiss/schwarz
- Erkennung der Grösse des QR Codes für Lesegeräte

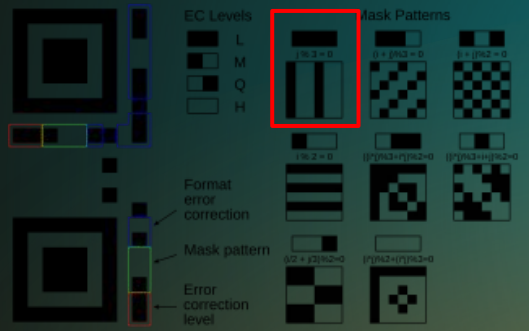
QR-Codes

“Meta-Informationen”

- Informationen über Format (Maske)
- Informationen über Fehlerkorrektur

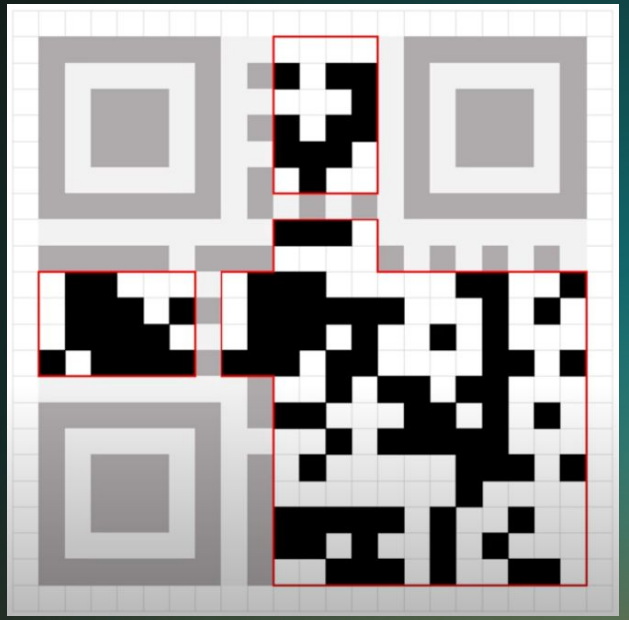
QR-Codes

- Maske, die über Information liegt
- Beeinträchtigt das Muster
    - z.B. vermeidet die Maske, dass ähnliche Muster wie das Orientierungsmuster nochmals auftaucht.

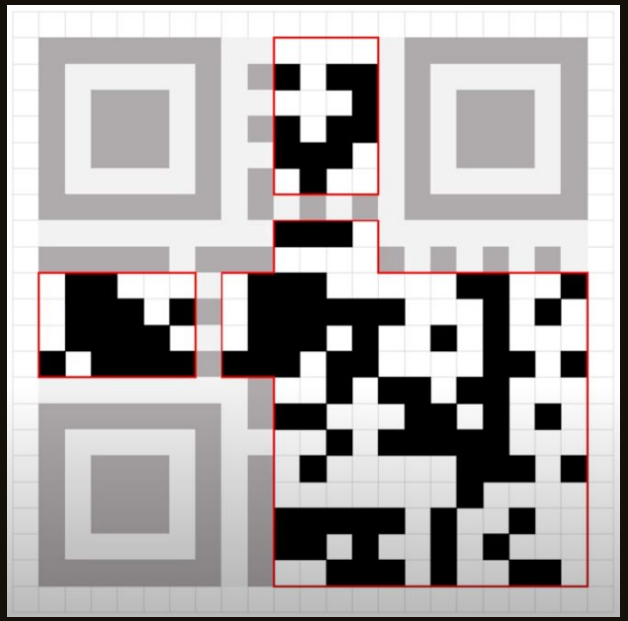


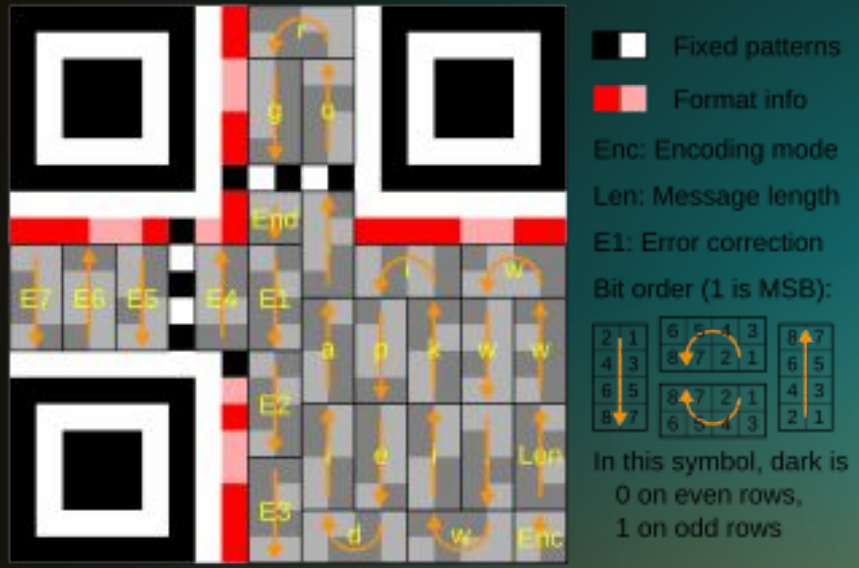
Quelle: https://en.wikipedia.org/wiki/QR_code

QR-Codes



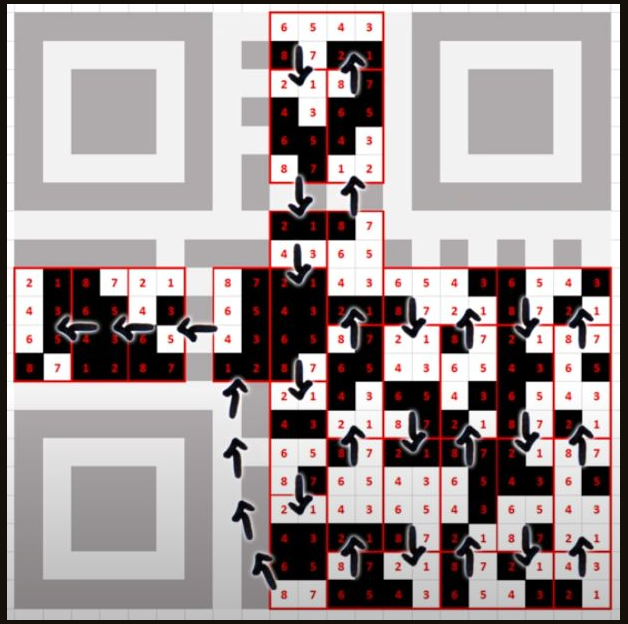
QR-Codes

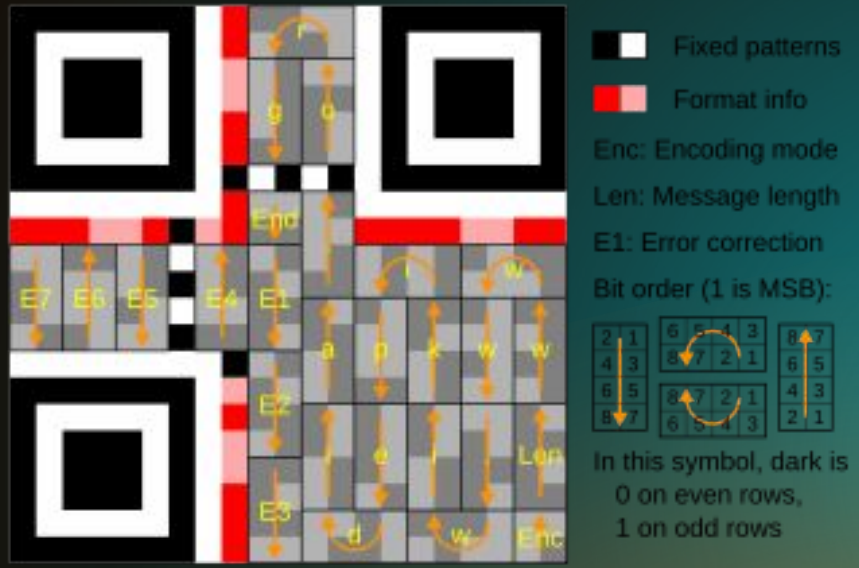




Quelle: https://en.wikipedia.org/wiki/QR_code

QR-Codes





Quelle: https://en.wikipedia.org/wiki/QR_code

Daten in Zahlen (Bytes) umwandeln

Sollten wir also zum Beispiel das Wort “WIKI” umwandeln wollen, dass es Fehlerkorrektur-Informationen erhält:

- W: 87
- I: 73
- K: 75
- I: 73

Unsere Daten sind [87, 73, 75, 73]

Polynom, Division und Rest

Diese Zahlenreihe wird als Koeffizienten eines Polynoms interpretiert:

D(x) = $87x^3 + 73x^2 + 75x^1 + 73x^0$

Nun können wir folgendes berechnen:

$$\frac{\text{Datenpolynom(x)}}{Generatorpolynom\,(x)} = Ergebnis\,(x) \rightarrow Rest \rightarrow Fehlerkorrekturpolynom\,(x)$$

Nehmen wir an, der Rest wäre (vereinfachtes Beispiel): $120x^2 + 15x + 201$

Dann wären unsere Fehlerkorrektur-Bytes: [120, 15, 201]

Somit finden wir folgende Informationen im QR-Code: [87, 73, 75, 73, ..., 120, 15, 201, ...]

Reed-Solomon Fehlerkorrektur für QR-Codes

Festellen, ob Fehler vorliegt

Die “eingescannten” Daten ergeben ein Nachrichten-Polynom.

Wir setzen in das Polynom, vom QR-Code-Standard definierte Werte ein. Wenn wir für dies für alle Daten machen, erhalten wir die Syndrome. z.B:

[0, 0, 0, 0, 0, 0, ...] -> alles okay, keine Fehler gefunden

[93, 120, 17, 236, 168, 63, ...] -> es gibt irgendwo einen Fehler

Reed-Solomon Fehlerkorrektur für QR-Codes

Fehlerlokalisierung

Mit Berlekamp-Massey-Algorithmus werden Syndrome benutzt, um neues Polynom zu konstruieren: Das Fehler-Lokalisierer-Polynom.

Mit der Chien-Suche finden wir dann durch das Fehler-Lokalisierer-Polynom die Kehrwerte der Fehlerpositionen im Code.

Bei einem Fehler, kann das Fehler-Lokalisierer-Polynom wie folgt aussehen:

[1, 201] = $\Lambda(x) = 1 + 201x$

Die Chien-Suche überprüft alle möglichen Werte für die Stellen im Polynom. Eine Nullstelle im Polynom bedeutet, dass an dieser Stelle im Polynom ein Fehler ist. So finden wir die Positionen.

Reed-Solomon Fehlerkorrektur für QR-Codes

Fehlerkorrektur

Jetzt müssen wir zuerst herausfinden, was an dieser fehlerhaften Stelle ursprünglich gestanden ist.

Mit diesem erstellen wir das Fehler-Auswerter-Polynom, indem wir unser Syndrom-Polynom mit unserem Fehler-Lokalisierer-Polynom multiplizieren (nur Terme bis: x^{2t-1})

$$\Omega(x) = S(x) \cdot \Lambda(x) \pmod{x^{2t}}$$

Die Formel von Forney berechnet den Fehlerwert (Magnitude), also Abstand zwischen falschen und richtigen Wert.

$$\text{Fehlerwert}_j = \frac{\Omega\left(X_j^{-1}\right)}{\Lambda'\left(X_j^{-1}\right)}$$

Dann müssen wir eine XOR-Operation mit dem Fehlerwert auf die fehlerhaften Daten anwenden (innerhalb des Galois-Feldes).

Ab zum Notebook

Error Correction Notebook | Generator Notebook

3 Finanzmathematik

1. Sparplan-Simulator: Nominales Vermögen vs. Reale Kaufkraft
2. Bewertung von Investitionen (DCF)

QR-Codes

Sparplan-Simulator

Kaufkraft: Was ist mein Geld Wert?

Nominalwert: Wie viel habe ich auf dem Konto? (z.B. 332'194 CHF)

Wir wissen, wie teuer das Leben heute ist, also bewerten wir Sparplan-Ziele einfach indem wir die Kaufkraft der Gesamt-Sparsumme für heute berechnen.

Beispiel: Die 332'194 CHF in 30 Jahren haben die gleiche Kaufkraft wie 183'395 CHF heute. Wieso? Wegen Inflation: Preisniveau steigt jährlich leicht.

Sparplan-Simulator: Nominales Wachstum

Für jedes Jahr gilt:

$$V_t = V_{t-1} \cdot (1 + r_{nom}) + E$$

Dabei ist:

- V_t : Vermögen am Ende des Jahres t
- V_{t-1} : Vermögen zu Beginn des Jahres t
- r_{nom} : Nominaler Zinssatz pro Jahr
- E : Jährliche Einzahlung

Sparplan-Simulator: Reale Kaufkraft

Für jedes Jahr gilt:

$$V_{real,t} = \frac{V_{\text{nominal,t}}}{(1+i)^t}$$

Dabei ist:

- $V_{real,t}$: Reales Vermögen zum Zeitpunkt t
- $V_{\text{nominal,t}}$: Nominales Vermögen zum Zeitpunkt t
- i : Erwartete Inflationsrate pro Jahr
- t : Anzahl der Jahre

Ab zum Notebook

Sparplan Simulator Notebook

Investitionsbewertung mit DCF

DCF = Discounted Cash Flow

Um den Wert einer Investition heute beurteilen zu können, müssen wir die zukünftigen Einnahmen auf ihren heutigen Wert zurückrechnen und mit der Ausgabe vergleichen.

Der heutige Wert wird Present Value genannt.

z. B.: Der versprochene Erhalt von 108 CHF in einem Jahr bei einem Zinssatz von 8% ist heute genau 100 CHF Wert.

Investitionsbewertung mit DCF: Diskontierung

Die allgemeine Formeln zur Diskontierung ist:

$$PV = \frac{C_t}{(1+r)^t}$$

Dabei ist:

- PV : Heutiger Wert des zukünftigen Cashflow
- C_t : Erwarteter Cashflow zum Zeitpunkt t
- r : Diskontierungsrate (risikoadjustierter Zinssatz, z. B. WACC)
- t : Zeitperiode (i.d.R. in Jahre)

Investitionsbewertung mit DCF : NPV

Der Kapitalwert ist die Summe aller diskontierten zukünftigen Cashflows abzüglich der ursprünglichen Investitionskosten. Er zeigt den heutigen Wert des gesamten Projekts / Investition.

$$NPV = \left(\sum_{t=1}^{n} \frac{C_t}{(1+r)^t}\right) - C_0$$

Dabei ist:

- NPV : Kapitalwert (Net Present Value)
- C_0 : Anfangsinvestition zum Zeitpunkt t = 0
- $\sum$: Summe aller Barwerte von Jahr 1 bis n

Ab zum Notebook

Investitionen bewerten (DCF)

Danke!

By Eldar Omerovic