E.O.

I. Möglichst gute Big-O Abschätzung für folgende Funktionen

a) $n\log(n^2+1)+n^2\log n =$

$$
\begin{aligned}
&\le \log(n^2+1)+n^2\log n, \quad \forall n \ge 1\\
&\le n^2\log(n^2+1)+n^2\log(n^2+1) \quad \forall n \ge 1\\
&= 2n^2\log(n^2+1)\\
&\le 2n^2\log(n^3) \quad \forall n \ge 2\\
&= 2n^2\cdot 3\log(n) \quad \forall n \ge 2\\
&= \underbrace{6}_{c}\underbrace{n^2\log(n)}_{O} \quad \forall n \ge \underbrace{2}_{k}
\end{aligned}
$$

$O(n^2\log(n))$, $C = 6$, $k = 2$

b) $(n \cdot \log n + 1)^2 + (\log n + 1)(n^2 + 1)$

$= (n \cdot \log n)^2 + 2n \log n + 1 + n^2 \cdot \log n + \log n + n^2 + 1$

$= n^2 (\log n)^2 + 2n \log n + n^2 \cdot \log n + \log n + n^2 + 2$

$= n^2 (\log n)^2 + \log n\,(2n + n^2 + 1) + n^2 + 2$

$= n^2 (\log n)^2 + \log n\,\underline{(n^2 + 2n + 1)} + n^2 + 2$

$\leq n^2 (\log n)^2 + \log n \cdot n^3 + n^2 \quad ; \forall n \geq 3$

$\leq n^2 (\log n)^2 + \log n \cdot n^3 + 2n^2 \quad ; \forall n \geq 3$

$\leq n^2 (\log n)^2 + \log n \cdot n^3 \quad ; \forall n \geq 3$

$\Rightarrow$ wird zu aufwendig, andere Ansatz

$(n \cdot \log n + 1)^2 + (\log n + 1)(n^2 + 1)$

$\leq (n \cdot \log n + 1)^2 + (\log n + 1)\, n^3 \quad ; \forall n \geq 2$

$\leq (n \cdot \log n + 1)^2 + 2 \log n \cdot n^3 \quad ; \forall n \geq 2$

$\leq (n \cdot 2 \log n)^2 + 2 \log n \cdot n^3 \quad ; \forall n \geq 2$

$\leq (n \cdot n)^2 + n \cdot n^3 \quad ; \forall n \geq 2$

$= n^4 + n^4$

$= 2n^4$

$O(n^4)$, $c = 2$, $k = 2$

$\forall n \geq 2$

$\underbrace{2 \log_2 n}_{2} \leq \overset{2}{n}$

b) $(n \cdot \log n + 1)^2 + (\log n + 1)(n^2 + 1)$

$$= (n \cdot \log n)^2 + 2n \log n + 1 + n^2 \cdot \log n + \log n + n^2 + 1$$

$$= n^2 (\log n)^2 + 2n \log n + n^2 \cdot \log n + \log n + n^2 + 2$$

$$= n^2 (\log n)^2 + \log n (2n + n^2 + 1) + n^2 + 2$$

$$= n^2 (\log n)^2 + \log n \underline{(n^2 + 2n + 1)} + n^2 + 2$$

$$= n^2 (\log n)^2 + \log n (n^2 + 2n^2 + n^2) + n^2 + 2, \quad \forall n \geq 1$$

$$\geq n^2 (\log n)^2 + \log n (4n^2) + n^2 + 2, \quad \forall n \geq 1$$

$$\geq n^2 (\log n)^2 + \log n (4n^2) + n^2 + n^2, \quad \forall n \geq 2$$

$$= n^2 (\log n)^2 + 4n^2 \log n + 2n^2, \quad \forall n \geq 2$$

$$\geq n^2 (\log n)^2 + 4n^2 (\log n)^2 + 2n^2 (\log n)^2, \quad \forall n \geq 10$$

wieso?

$$= 7n^2 (\log n)^2$$

$O(n^2 (\log n)^2)$, $c = 7$, $k = 10$

c) $n^{2^n} + n^{n^2}$

$\leq n^{2^n} + n^{2^n}$ $\qquad \forall n \geq 2$

$2^{2^2} + 2^{2^2}$ $\qquad \forall n \geq 2$

$3^8 \leftarrow 3^{2^3} \; X \geq 3^{3^2} \rightarrow 3^9$ also: $k=4$

$O(2^n)$, $C = 2$, $k = 4$

wieso in Lösung $k = 4$?

II $ggT(12345, 54321)$

$12345 : 54321 = 0$, Rest 12345

$54321 : 12345 = 4$, Rest 4941

$12345 : 4941 = 2$, Rest 2463

$4941 : 2463 = 2$, Rest 15

$2463 : 15 = 164$, Rest 3

$15 : 3 = 5$, Rest $0 \rightarrow ggT(3, 0)$

Wolfram Alpha: $gcd(12345, 54321) = 3$

III Gesucht ist eine Matrix A, so dass:

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \cdot a + 3 \cdot c & 2 \cdot b + 3 \cdot d \\ 1 \cdot a + 4 \cdot c & 1 \cdot b + 4 \cdot d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\left| \begin{array}{l} 2 \cdot a + 3 \cdot c = 3 \\ 2 \cdot b + 3 \cdot d = 0 \\ 1 \cdot a + 4 \cdot c = 1 \\ 1 \cdot b + 4 \cdot d = 2 \end{array} \right| \begin{array}{l} a = \frac{9}{5} \\ b = -\frac{6}{5} \\ c = -\frac{1}{5} \\ d = \frac{4}{5} \end{array}$$

IV Matrizen & Logik

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) $A \vee B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $A \wedge B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

c) $A \odot B$

$$\begin{bmatrix} (1\wedge 0)\vee(0\wedge 1)\vee(1\wedge 1) & (1\wedge 1)\vee(0\wedge 0)\vee(1\wedge 0) & (1\wedge 1)\vee(0\wedge 1)\vee(1\wedge 1) \\ (1\wedge 0)\vee(1\wedge 1)\vee(0\wedge 1) & (1\wedge 1)\vee(1\wedge 0)\vee(0\wedge 0) & (1\wedge 1)\vee(1\wedge 1)\vee(0\wedge 1) \\ (0\wedge 0)\vee(0\wedge 1)\vee(1\wedge 1) & (0\wedge 1)\vee(0\wedge 0)\vee(1\wedge 0) & (0\wedge 1)\vee(0\wedge 1)\vee(1\wedge 1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0\vee 0\vee 1 & 1\vee 0\vee 0 & 1\vee 0\vee 1 \\ 0\vee 1\vee 0 & 1\vee 0\vee 0 & 1\vee 1\vee 0 \\ 0\vee 0\vee 1 & 0\vee 0\vee 0 & 0\vee 0\vee 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}}$$

$$\begin{bmatrix} (1\wedge 0)\vee(0\wedge 1)\vee(1\wedge 1) & (1\wedge 1)\vee(0\wedge 0)\vee(1\wedge 0) & (1\wedge 1)\vee(0\wedge 1)\vee(1\wedge 1) \\ (1\wedge 0)\vee(1\wedge 1)\vee(0\wedge 1) & (1\wedge 1)\vee(1\wedge 0)\vee(0\wedge 0) & (1\wedge 1)\vee(1\wedge 1)\vee(0\wedge 1) \\ (0\wedge 0)\vee(0\wedge 1)\vee(1\wedge 1) & (0\wedge 1)\vee(0\wedge 0)\vee(1\wedge 0) & (0\wedge 1)\vee(0\wedge 1)\vee(1\wedge 1) \end{bmatrix}$$