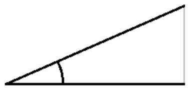
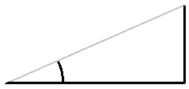
תרגול 1 – וקטורים

הקדמה טריגונומטרית

סינוס – היחס בין הניצב מול הזוית, ליתר



קוסינוס – היחס בין הניצב ליד הזוית, ליתר



טנגנס - היחס בין הניצב מול הזוית לניצב ליד הזוית $\tan(x)=\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$

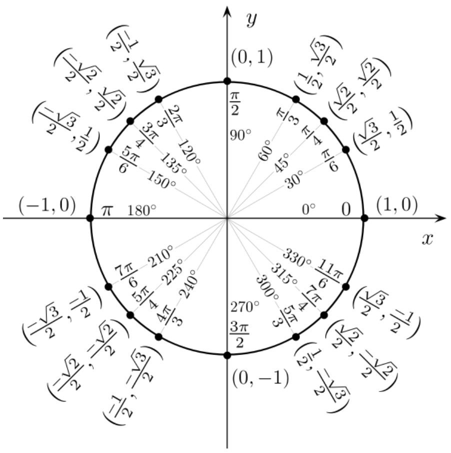
רדיאנים

הגדרה: הזווית ברדיאנים היא היחס בין אורך הקשת לרדיוס.

1rad היא הזווית מול קשת שאורכה שווה לרדיוס.

במעגל יש 360 מעלות ו 2π רדיאנים. $360^\circ = 2\pi\text{rad}$

מעגל היחידה

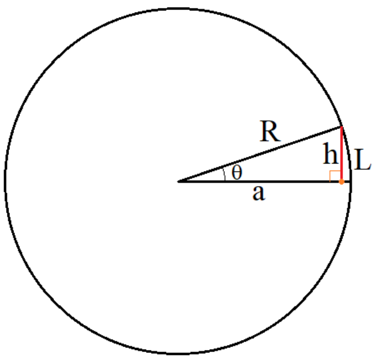


אם נצייר מעגל ברדיוס אחד, אזי ניתן ליצור משולש עם יתר באורך 1 כאשר ההיטלים על ציר ה-x וה-y הם למעשה הקוסינוס והסינוס של הזוית .

בעזרת מעגל היחידה ניתן למצוא זהויות טריגונומטריות, למשל:

$$\sin\alpha = -\sin(-\alpha) \qquad \sin(180-\alpha)=\sin\alpha$$
$$\cos\alpha = \cos(-\alpha) \qquad \cos(180-\alpha)=-\cos\alpha$$

שאלה 1



במעגל עם רדיוס $R=20\text{cm}$ מציירים שני רדיוסים שיוצרים זווית $\theta=18^\circ$.

מקצה רדיוס אחד מורידים אנך אל הרדיוס האחר

א. מה האורך L של הקשת שמול הזווית (בין קצות הרדיוסים)?

ב. מה האורך h של האנך? ומה המרחק a של הקצה שלו ממרכז המעגל?

ג. מצאו את הזווית אם היא לא היתה ידועה, אלא דווקא h ו a.

וקטורים

מוטיבציה: לתאר גדלים בהם חשוב לא רק הגודל אלא גם הכיוון.

סימון של וקטור : $\vec{A}$.

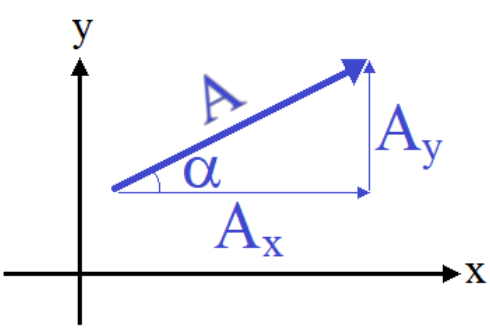
הצגות

בשני מימדים את הוקטור ניתן לכתוב בשתי דרכים עיקריות (נקראות הצגות).

1. הצגה פולרית - הגודל (שמסומן ב $\left|\vec{A}\right|$, או לפעמים פשוט ב A) והזווית יחסית לציר x (נקרא לה α)
2. הצגה קרטזית - A_x ו A_y, שהם ההיטלים של הוקטור על הצירים השונים.

בהצגה קרטזית, אפשר לכתוב את הווקטור כווקטור שורה או עמודה (איך שנוח):

$$\vec{A}=\left(A_x,A_y\right) \text{ או } \vec{A}=\begin{pmatrix}A_x\\A_y\end{pmatrix}$$



מעבר בין הצגות

(תמיד ע"פ דוגמה מהרביע הראשון)

$$A=\sqrt{A_x^2+A_y^2} \qquad A_x=A\cos\alpha$$

$$\tan\alpha=\frac{A_y}{A_x} \qquad A_y=A\sin\alpha$$

(צריך לשים לב שבמעגל יש שתי זוויות שנותנות אותו טנגנס)

וקטור יכול להיות בעל <u>יחידות</u>. במקרה כזה אלה היחידות של הגודל, וגם של כל אחד מהרכיבים.

שאלה 2

נתון ווקטור בהצגה קרטזית $\vec{A}=\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$. חשבו את $\left|\vec{A}\right|$ ו α.

שאלה 3

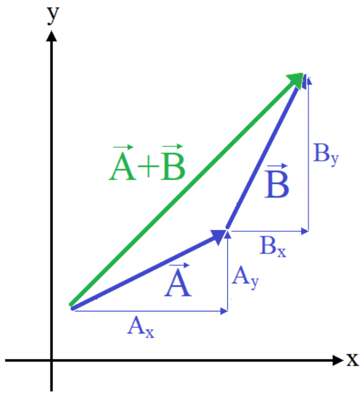
נתון וקטור $\vec{B}$ אשר עבורו: $\left|\vec{B}\right|=6\text{cm}$, $\beta=150^{\circ}$.

א. מה רכיביו, B_x ו B_y?

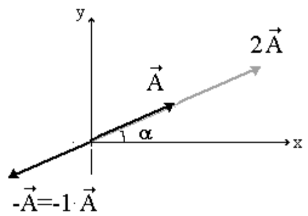
ב. חשבו מחדש, מהרכיבים, את הזווית שהוא יוצר עם ציר x.

פעולות עם וקטורים

- חיבור וקטורים
  - הצגה קרטזית: אם $\vec{A}=\begin{pmatrix}A_x\\A_y\end{pmatrix}$ ו $\vec{B}=\begin{pmatrix}B_x\\B_y\end{pmatrix}$,
    אז $\vec{A}+\vec{B}=\begin{pmatrix}A_x\\A_y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}B_x\\B_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_x+B_x\\A_y+B_y\end{pmatrix}$
  - הצגה פולרית: אי אפשר לחשב!
    מקסימום אפשר לומר ש $\left||\vec{A}|-|\vec{B}|\right|\le|\vec{A}+\vec{B}|\le|\vec{A}|+|\vec{B}|$, בהתאם לזווית בינהם
  - גראפית:



- כפל בסקלר
  - הצגה קרטזית: אם יש וקטור $\vec{A}=\begin{pmatrix}A_x\\A_y\end{pmatrix}$, וסקלר c, אז $c\vec{A}=\begin{pmatrix}cA_x\\cA_y\end{pmatrix}$
  - הצגה פולרית: אם יש וקטור $\vec{A}$ שגודלו $|\vec{A}|$ ושיוצר זווית α עם ציר x, אז $|c\vec{A}|=|c||\vec{A}|$ והזווית לא משתנה (אם c חיובי), או מתווסף לה 180^0 (אם c שלילי).
  - גראפית:



שאלה 4:

כוחות מתוארים בעזרת וקטורים.

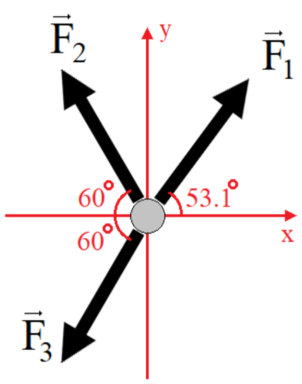
כשכמה כוחות פועלים על גוף, הכוח הכולל הוא הסכום הוקטורי שלהם.

היחידות של כוח נקראות ניוטון (N)

על גוף פועלים שלושה כוחות $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ ו-$\vec{F}_3$ שגודל כל אחד מהם הוא 100 ניוטון

$|\vec{F}_1|=|\vec{F}_2|=|\vec{F}_3|=F=100N$.

כולם נמצאים במישור, בכיוונים שמתוארים באיור.



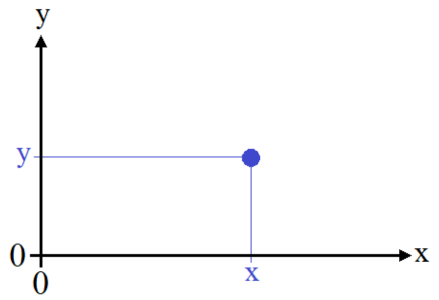
א. מה הכוח הכולל שפועל על הגוף?

ב. אם רוצים להוסיף כוח $\vec{F}_4$, שייגרום לכך שהכוח הכולל יתאפס, מה הוא צריך להיות? מה גודלו וכיוונו?

ג. אם מפעילים בטעות כוח שגדול פי 3, מה הכוח הכולל? מה גודלו וכיוונו?

קואורדינטות, וקטור מיקום, ווקטור העתק:

קואורדינטות – במישור דו מימדי המיקום נתון ע"י שתי קואורדינטות. במערכת צירים קרטזית הקואורדינטות הן x, y



"וקטור מיקום" - אפשר לתאר מיקום של נקודה בעזרת "וקטור מיקום" שמסומן על ידי $\vec{r}$,
שרכיב x שלו יהיה קואורדינטת x, ורכיב y שלו יהיה קואורדינטת y.

אפשר לכתוב אותו כוקטור שורה $\vec{r}=(x,y)$ או כווקטור עמודה $\vec{r}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

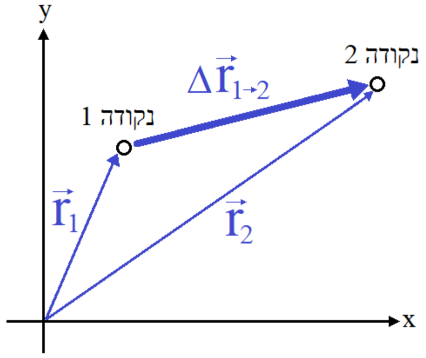
הערה – בניגוד לוקטורים אמיתיים, את הראשית של "וקטור המיקום" אי אפשר להזיז, וחייבים לצייר אותו מהראשית.
(אפשר לחשוב עליו כוקטור ההעתק מהראשית אל הנקודה שהוא מתאר)

מרחק – המרחק בין שתי נקודות במימד אחד שהקואורדינטות של אחת הן x_1, y_1 ושל השנייה x_2, y_2
מחושב לפי משפט פיתגורס: $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

העתק (displacement) – מתאר כאמור תזוזה בין שתי נקודות.
בשני מימדים, ההעתק הוא וקטור שרכיב x שלו הוא ההפרש בקואורדינטות x של הנקודות ורכיב y הוא ההפרש
בקואורדינטות y שלהן.

וקטור ההעתק בין שתי נקודות שמתוארות ע"י וקטורי המיקום $\vec{r}_1$ ו- $\vec{r}_2$ הוא ההפרש הוקטורי בין שני וקטורי המקום
שמתארים את הנקודות:

$$\Delta\vec{r}_{1\to2}=\vec{r}_2-\vec{r}_1$$



מהעברת אגפים אפשר לקבל:

$$\vec{r}_2=\vec{r}_1+\Delta\vec{r}_{1\to2}$$

כלומר שההעתק $\Delta\vec{r}_{1\to2}$ "מעביר" אותנו מהנקודה $\vec{r}_1$ אל $\vec{r}_2$.
הגודל של וקטור ההעתק בין שתי נקודות הוא המרחק ביניהן.

שאלה 5:

אדם מתחיל לנוע מנקודה 1 שהקואורדינטות שלה הן $y_1 = 50m \quad , \quad x_1 = -50m$

הוא הולך 60 מטר בכיוון ציר x עד נקודה 2, ואז מסתובב ב-$120°$ עם כיוון השעון, והולך עוד 100 מטר עד נקודה 3.

א. מה ההעתק הכולל שלו בין נקודות 1 ל-3? תנו תשובה גם בהצגה קרטזית, וגם בהצגה פולארית.

ב. מה הקואורדינטות של נקודה 3?

ג. לאיזה כיוון הוא צריך לפנות, ואיזה מרחק ללכת בשביל להגיע לנקודה 4 שהקואורדינטות שלה הן

$y_4 = 20m \quad , \quad x_4 = 20m$