תרגול 5 – קינמטיקה במרחב. תנועה בתאוצה משתנה

גם בתרגול זה, כל השאלות מתרחשות בכוכב לכת ידידותי לסטודנטים, בו $g = 10m/s^2$

באופן כללי:	תנועה בהשפעת כוח הכוכב בלבד:
$\vec{a}(t)=\frac{\sum\vec{F}}{m}$ $\vec{v}(t)=\int\vec{a}(t)dt$ $\vec{r}(t)=\int\vec{v}(t)dt$	$\vec{v}(t)=\vec{v}_0+\vec{g}(t-t_0)$ $\vec{r}(t)=\vec{r}_0+\vec{v}_0(t-t_0)+\frac{1}{2}\vec{g}(t-t_0)^2$ $y(x)=\tan\phi\cdot x-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\phi}x^2$

שאלה 1

לפי החוק השני של ניוטון, לגוף שפועלים עליו כמה כוחות יש תאוצה $\vec{a}=\frac{\sum\vec{F}}{m}$

רקטה במסה $m = 20kg$ משוגרת ממנוחה. המנוע מפעיל כוח $F_E = 1131N$ בזווית $45°$ לאופק למשך 5 שניות ואז כבה.

א. מה תאוצת הרקטה לפני ואחרי שהמנוע כבה?

ב. מה מהירות הרקטה $\vec{v}(t)$, כל עוד המנוע עובד, ואחרי שהוא מפסיק?

ג. ומה וקטור המיקום שלו $\vec{r}(t)$ של הרקטה? מה משוואת המסלול $y(x)$ שלה?

ד. מה יהיה שיא הגובה שלה?

ה. מתי ואיפה הרקטה תפגע בקרקע (אם הקרקע מישורית)?

פתרון

להדגיש את ההבדל בין פגז שכבר משוגר במהירות, וכל ההאצה בתוך הקנה, לרקטה שמתחילה ממנוחה

נבחר את ציר y כלפי מעלה, וציר x אופקי שלכיוונו מופנית הרקטה.

א. ב 5 השניות הראשונות, על הרקטה פועלים שני כוחות:

כוח הכוכב: $m\vec{g}=20\begin{pmatrix}0\\-10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-200\end{pmatrix}_N$ וכוח המנוע $\vec{F}=\begin{pmatrix}1131\cos 45\\1131\sin 45\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}800\\800\end{pmatrix}_N$

הכוח הכולל הוא $m\vec{g}+\vec{F}_E=\begin{pmatrix}800\\800\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-200\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}800\\600\end{pmatrix}_N$

לכן התאוצה היא: $\vec{a}=\frac{\sum\vec{F}}{m}=\frac{1}{20}\begin{pmatrix}800\\600\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}40\\30\end{pmatrix}_{\frac{m}{s^2}}$

אפשר לחשב גם כך: $\vec{a}=\frac{\sum\vec{F}}{m}=\frac{m\vec{g}+\vec{F}_E}{m}=\vec{g}+\frac{\vec{F}_E}{m}=\begin{pmatrix}0\\-10\end{pmatrix}+\frac{1}{20}\begin{pmatrix}800\\800\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}40\\30\end{pmatrix}_{\frac{m}{s^2}}$

אחרי שמסתיימות 5 השניות, התאוצה היא פשוט $\vec{a}=\frac{m\vec{g}}{m}=\vec{g}=\begin{pmatrix}0\\-10\end{pmatrix}$

ב. כל עוד המנוע עובד: $\vec{v}(t)=\vec{v}(0)+\vec{a}t=0+\begin{pmatrix}40\\30\end{pmatrix}t=\begin{pmatrix}40t\\30t\end{pmatrix}$

זו מהירות שתמיד בכיוון $37°$ וגודלה הוא $v(t)=50t$.

בסוף 5 השניות המהירות היא $\vec{v}(5)=\begin{pmatrix}40\cdot 5\\30\cdot 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}200\\150\end{pmatrix}m/s$

אחרי שהמנוע כבה המהירות בכיוון x נשמרת, אבל בכיוון y הולכת וקטנה ואף הופכת שלילית.

$$\vec{v}(t)=\vec{v}(5)+\vec{g}(t-5)=\begin{pmatrix}200\\150\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-10\end{pmatrix}\cdot(t-5)=\begin{pmatrix}200\\150-10(t-5)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}200\\200-10t\end{pmatrix}$$

ג. בחמש השניות הראשונות:

$$\vec{r}(t)=\vec{r}(0)+\vec{v}(0)t+\frac{1}{2}\vec{a}t^2=\begin{pmatrix}20t^2\\15t^2\end{pmatrix}$$

זה אומר

$$x(t)=20t^2 \quad\Rightarrow\quad t^2=\frac{x}{20}$$

$$y(t(x))=15t^2=15\left(\frac{x}{20}\right)=\frac{3}{4}x$$

כלומר הגוף נע לאורך **<u>הקו הישר</u>** $y(x)=\frac{3}{4}x$, אבל בתאוצה (קבועה).

כשמנוע כבה, התנועה הזו היא נפילה חופשית, והמשך המסלול הוא **בצורת פרבולה**.

בסוף 5 השניות בהן המנוע עובד המיקום הוא $\vec{r}(5)=\begin{pmatrix}20\cdot 5^2\\15\cdot 5^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}20\cdot 5^2\\15\cdot 5^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}500\\375\end{pmatrix}m$

לזמן מרגע זה נקרא $t'=t-5$

$$\vec{r}(t')=\vec{r}_0+\vec{v}_0t'+\frac{1}{2}\vec{g}(t')^2=\begin{pmatrix}500\\375\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}200\\150\end{pmatrix}t'+0.5\begin{pmatrix}0\\-10\end{pmatrix}(t')^2=\begin{pmatrix}500+200\cdot t'\\375+150\cdot t'-5(t')^2\end{pmatrix}$$

וגם פה, אם נחלץ את t' כפונקציה של x, נציב ב $y(t')$:נקבל:

$$x(t)=500+200\cdot t' \quad\Rightarrow\quad t'=\frac{x-500}{200}$$

$$y(t(x))=375+150\cdot\frac{x-500}{200}-5\left(\frac{x-500}{200}\right)^2=375+\frac{3}{4}\cdot(x-500)-\frac{1}{8000}(x-500)^2$$

אפשר (לא חייבים) לפתוח את הסוגריים ולקבל

$$y(x)=375+\frac{3}{4}x-375-\frac{1}{8000}x^2+\frac{1}{8}x-31.25=-\frac{1}{8000}x^2+\frac{7}{8}x-31.25$$

ד. שיא הגובה יהיה כאשר

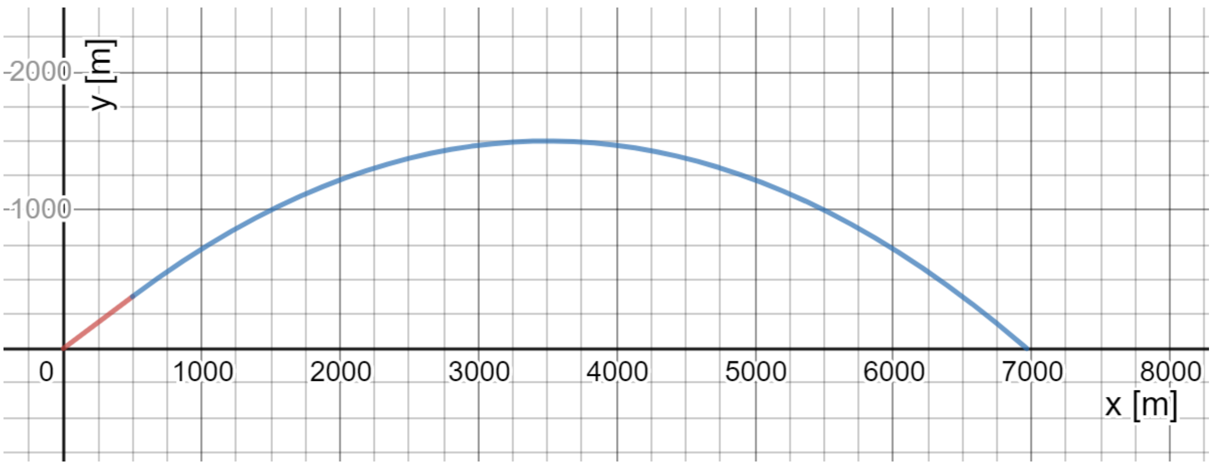
$$v_y=150-10(t-5)=150-10t'=0 \quad \Rightarrow \quad t'=\frac{150}{10}=15s$$

ושיא הגובה יהיה $y_{max}=y(t'=15)=375+150\cdot 15-5\cdot(15)^2=1500m=1.5km$

המיקום שלו הוא $x(t'=15)=500+200\cdot 15=3500m=3.5km$

ה. הפגיעה בקרקע כאשר:

$$375+150\cdot t'-5(t')^2=0$$
$$(t')^2-30t'-75=0$$
$$t'=-2.3s \ , \ 32.3s$$
$$x(32.3)=500+200\cdot 32.3=6960m\approx 7km$$

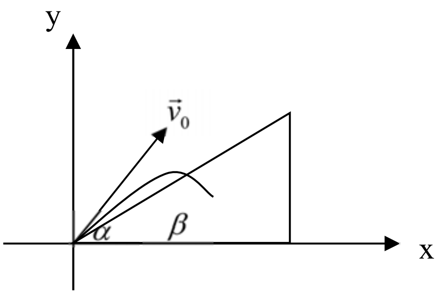


שאלה 2

פגז נורה ממרגמה במהירות $v_0 = 100_{m/s}$ מפני הקרקע בזווית $\alpha = 53^0$ מעל פני האופק. המרגמה ניצבת בתחילת מישור משופע היוצר זווית של $\beta = 37^0$ מעל פני האופק.

א. מהו שיא הגובה של הפגז?

ב. היכן יפגע הפגז במישור המשופע?



פתרון:

נחשב את משוואת המסלול.

$$y(x) = \tan\phi \cdot x - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\phi}x^2$$

$$\tan\phi = \tan 53° = \frac{4}{3}$$

$$\frac{g}{2v_0^2\cos^2\phi} = \frac{10}{2\cdot 100^2\cdot 0.6^2} = \frac{1}{720}$$

$$y(x) = \frac{4}{3}x - \frac{1}{720}x^2$$

אפשר גם:

$$\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} v_0\cos 53° \\ v_0\sin 53° \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100\cdot\frac{3}{5} \\ 100\cdot\frac{4}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 80 \end{pmatrix}_{m/s}$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2 = \begin{pmatrix} 60 \\ 80 \end{pmatrix} t + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ -10 \end{pmatrix} t^2 = \begin{pmatrix} 60t \\ 80t - 5t^2 \end{pmatrix}$$

ולמצא את משוואת המסלול $y(x)$ של הפגז

$$x = 60t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x}{60}$$

$$y(x) = 80\cdot\frac{x}{60} - 5\left(\frac{x}{60}\right)^2 = \frac{4}{3}x - \frac{1}{720}x^2$$

א. שיא הגובה יהיה (כמו תמיד) בנקודה בה הנגזרת מתאפסת:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4}{3} - \frac{1}{360}x = 0$$

$$x_{max} = \frac{4}{3}\cdot 360 = 480_m$$

$$y_{max} == \frac{4}{3}(480) - \frac{1}{720}(480)^2 = 320_m$$

אבל האם אכן הפגז מגיע לנקודה זו? לא בטוח! יכול להיות שהוא ייתקע במישור עוד לפני שיא הגובה!
נוכל לדעת רק אחרי סעיף ב'!

ב. נקודת הפגיעה תהיה בחיתוך בין משוואת מסלול הפגז למשוואת המישור

משוואת המישור תהיה $y_{pl} = a + bx$. החיתוך עם ציר y הוא באפס ולכן $a = 0$. והשיפוע יהיה $b = \tan(37°) = \frac{3}{4}$

ולכן משוואת השיפוע היא $y_{pl} = \frac{3}{4}x$

כאשר הפגז פוגע במישור $y(x) = y_{pl}(x)$:

$$\frac{4}{3}x - \frac{1}{720}x^2 = \frac{3}{4}x$$

$$\left(\frac{4}{3} - \frac{3}{4}\right)x - \frac{1}{720}x^2 = 0$$

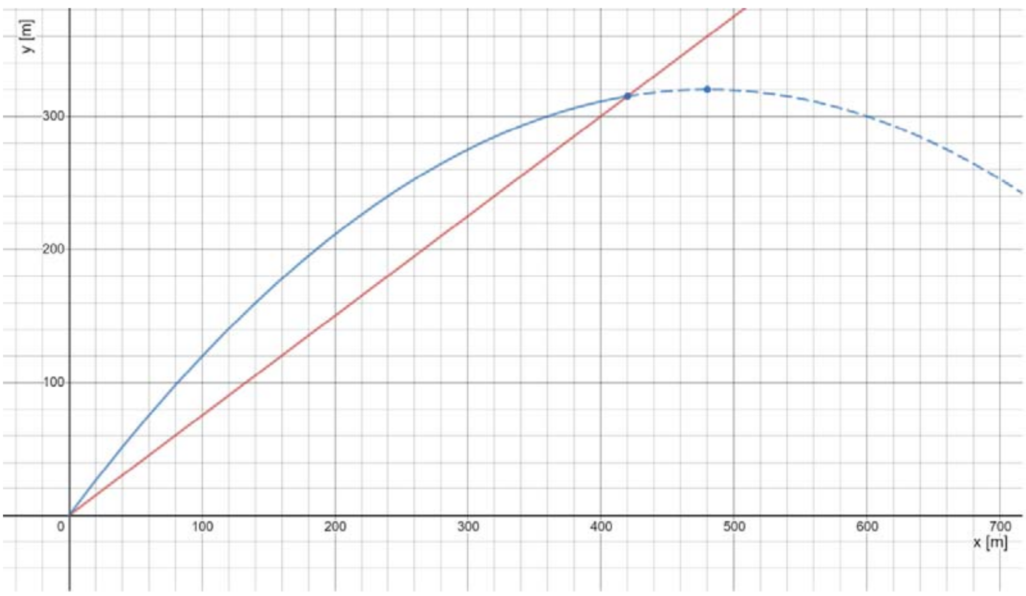
$$\left(\frac{7}{12} - \frac{1}{720}x\right)x = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = \frac{7 \cdot 720}{12} = 420_m$$

$$y_2 = \frac{3}{4}x_2 = \frac{3}{4} \cdot 420 = 315_m$$

בגלל ש $x_2 < x_{max}$ הפגז ייתקע בצלע ההר לפני שהוא יגיע לשיא המסלול.



<u>שאלה 3</u>

גוף עם מסה $m = 10\ kg$ נזרק מראש מגדל בגובה $h = 20\ m$ במהירות אופקית $v_0 = 27\ \ m/s$.

בזמן שהוא באוויר פועל עליו מלבד כוח המשיכה כוח אופקי <u>נגד כיוון הזריקה</u>, שגודלו משתנה ונתון ע"י $F_2\left(t\right) = 240t^2$

(הכוח בניוטון והזמן בשניות).

א. מה התאוצה כפונקציה של הזמן, $\vec{a}\left(t\right)$?

ב. מה המהירות כפונקציה של הזמן, $\vec{v}\left(t\right)$?

ג. מה המיקום כפוקנציה של הזמן, $\vec{r}\left(t\right)$?

ד. איפה הגוף פוגע בקרקע? מה מהירותו שם?

ה. מה המרחק המקסימלי של הגוף מהמגדל במהלך תנועתו? באיזה גובה זה קורה?

ו. ציירו את מסלול הגוף.

פתרון

א. נבחר את כיוון הזריקה ככיוון החיובי של ציר x. לכן $\vec{F}_2\left(t\right) = \left(240t^2, 0\right)$

התאוצה: $$\vec{a}\left(t\right) = \frac{\sum \vec{F}}{m} = \frac{m\vec{g} + \vec{F}_2}{m} = \frac{\left(0,-100\right) + \left(240t^2, 0\right)}{10} = \frac{\left(240t^2, -100\right)}{10} = \left(24t^2, -10\right)\tfrac{m}{s^2}$$

ב. המהירות צריכה לקיים $\frac{d\vec{v}}{dt} = \begin{pmatrix} -24t^2 \\ -10 \end{pmatrix}$ ואת תנאי ההתחלה $\vec{v}\left(0\right) = \begin{pmatrix} 27 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\vec{v}\left(t\right) = \int \vec{a}\left(t\right) dt = \int \begin{pmatrix} -24t^2 \\ -10 \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} -8t^3 \\ -10t \end{pmatrix} + \vec{C}$$

$$\vec{v}\left(0\right) = \vec{C} = \begin{pmatrix} 27 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}\left(t\right) = \begin{pmatrix} 27 - 8t^3 \\ -10t \end{pmatrix}$$

ג. וקטור המיקום צריך לקיים $\frac{d\vec{r}}{dt} = \begin{pmatrix} 27 - 8t^3 \\ -10t \end{pmatrix}$ ואת תנאי ההתחלה $\vec{r}\left(0\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \end{pmatrix}$

$$\vec{r}(t)=\int\vec{v}(t)\,dt=\int\begin{pmatrix}27-8t^3\\-10t\end{pmatrix}dt=\begin{pmatrix}27t-2t^4\\-5t^2\end{pmatrix}+\vec{C}$$

$$\vec{r}(0)=\vec{C}=\begin{pmatrix}0\\20\end{pmatrix}$$

$$\vec{r}(t)=\begin{pmatrix}27t-2t^4\\20-5t^2\end{pmatrix}$$

ד. זמן הפגיעה בקרקע: $t=2s \qquad \Rightarrow \qquad y(t)=20-5t^2=0$

בזמן זה:

$$x(2)=27\cdot2-2\cdot2^4=22m$$

$$\vec{v}(2)=\begin{pmatrix}27-8\cdot2^3\\-10\cdot2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-37\\-20\end{pmatrix}m/s$$

ה. המרחק המקסימלי הוא כאשר

$$v_x(t)=0$$

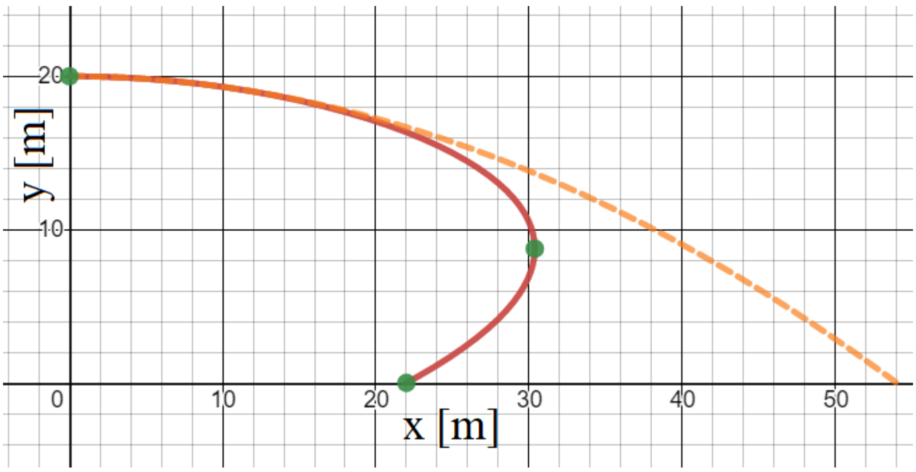
$$27-8t^3=0$$

$$t=\sqrt[2]{\frac{27}{8}}=1.5s$$

בזמן זה

$$\vec{r}(1.5)=\begin{pmatrix}27\cdot\frac{3}{2}-2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^4\\20-5\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}30.375\\8.75\end{pmatrix}m$$

כלומר הוא מגיע למרחק 30.4 מטרים מהמגדל, בגובה 8.8 מטר.



(בכתום – מה היה קורה בלי הכוח האופקי)

<u>שאלה 4</u>

גוף מתחיל לנוע ממנוחה ($v = 0$) מהראשית ($x = 0$).
תאוצתו היא

$$a(t) = \begin{cases} 0.6t & 0 < t \le 5 \\ 6 - 0.6t & 5 < t \le 10 \\ 0 & t > 10 \end{cases}$$

א. מה המהירות $v(t)$ עבור $t > 0$?

ב. ציירו גרפים של התאוצה, והמהירות והמיקום עד $t = 15s$.

ג. מה המיקום $x(t)$ עבור $t > 0$? מהו בזמנים $t = 5, 10, 15s$?

ד. מה התאוצה הממוצעת במשך 5 השניות הראשונות? במשך 10 השניות הראשונות?

ה. מה המהירות הממוצעת במשך 5 השניות הראשונות? במשך 10 השניות הראשונות?

פתרון

א.

$$v(t) = \int a(t)\,dt = \begin{cases} 0.3t^2 + C_1 & 0 < t \le 5 \\ -0.3t^2 + 6t + C_2 & 5 < t \le 10 \\ C_3 & t > 10 \end{cases}$$

$$v(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0$$

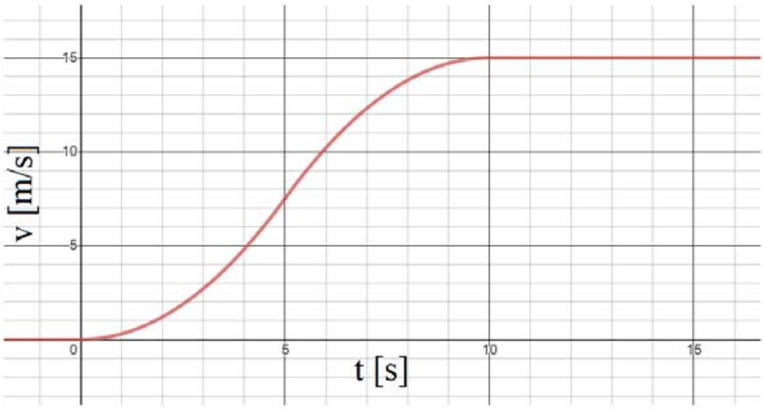
$$v(5^+) = v(5^-) \quad \Rightarrow \quad -7.5 + 30 + C_2 = 7.5 \quad \Rightarrow \quad C_2 = -15$$

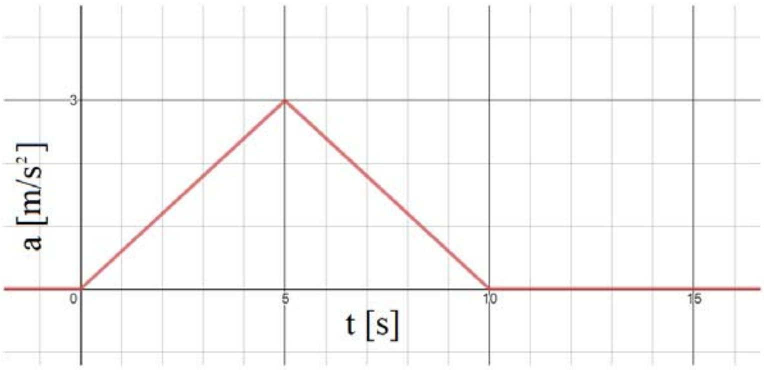
$$v(10^+) = v(10^-) \quad \Rightarrow \quad C_3 = -30 + 60 - 15 = 15$$

$$v(t) = \begin{cases} 0.3t^2 & 0 < t \le 5 \\ -0.3t^2 + 6t - 15 & 5 < t \le 10 \\ 15 & t > 10 \end{cases}$$

ערכים עיקריים בשביל הגרפים:

t [s]	a [$\frac{m}{s^3}$]	v [$\frac{m}{s}$]
0	0	0
2.5	3	1.875
5	6	7.5
7.5	3	13.125
10	0	15





ג.

$$x(t)=\int v(t)dt=\begin{cases} 0.1t^3+C_1 & 0<t\le 5 \\ -0.1t^3+3t^2-15t+C_2 & 5<t\le 10 \\ 15t+C_3 & t>10 \end{cases}$$

$$x(0)=0 \quad \Rightarrow \quad C_1=0$$

$$x(5^+)=x(5^-) \quad \Rightarrow \quad -12.5+75-75+C_2=12.5 \quad \Rightarrow \quad C_2=25$$

$$v(10^+)=v(10^-) \quad \Rightarrow \quad 150+C_3=-100+300-150+25 \quad \Rightarrow \quad C_3=-75$$

$$x(t)=\begin{cases} 0.1t^3 & 0<t\le 5 \\ -0.1t^3+3t^2-15t+25 & 5<t\le 10 \\ 15t-75 & t>10 \end{cases}$$

$$x(5)=12.5m \qquad x(10)=75m \qquad x(15)=150$$

ד.

$$\bar{a}_{0,5}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{7.5-0}{5-0}=3\frac{m}{s^2}$$
$$\bar{a}_{0,10}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{15-0}{10-0}=3\frac{m}{s^2}$$

ה.

$$\bar{v}_{0,5}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{12.5-0}{5-0}=2.5\frac{m}{s}$$
$$\bar{v}_{0,10}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{75-0}{10-0}=7.5\frac{m}{s}$$

צריך לשים לב ש $\bar{v}_{0,5}\neq v(2.5)$

(דרך לראות את זה: כי השטח מתחת לגרף של $v(t)$ קטן ממה שהיה אם היינו מחברים את קצות הקטע בקו ישר)