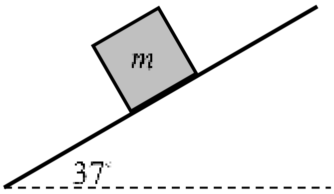
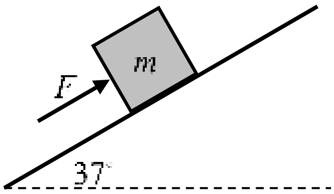
# <u>פתרון תרגיל בית 7- חיכוך, קפיץ</u>

להגשה: שאלות 2, 4, 6, עד יום א' 22 בדצמבר

## <u>שאלה 1:</u>



איור א'



איור ב'

גוף שמסתו 5 ק"ג משוחרר ממנוחה על פני מישור משופע בעל חיכוך (ראה/י איור א'). מקדמי החיכוך בין הגוף והמישור הם: $\mu_k = 0.2$ , $\mu_s = 0.4$ . זווית הנטייה של המישור היא $\theta = 37^\circ$ .

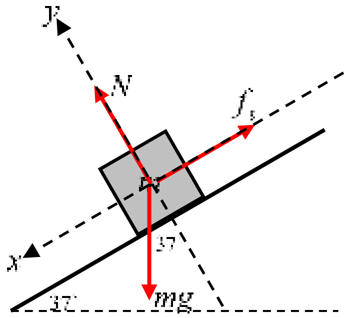
א. האם הגוף יתחיל לנוע? אם כן, מהי תאוצתו? אם לא, מה כוח החיכוך הפועל עליו?

ב. במצב בו הגוף במנוחה מפעילים עליו כוח קבוע, $F$ , במקביל למישור כלפי מעלה (ראו איור ב'). מהו גודלו של הכוח המקסימאלי $F_{max}$ אותו ניתן להפעיל מבלי שהגוף יתחיל לנוע מעלה?

ג. אם לא פועל כוח חיצוני מהי זווית השיפוע המקסימאלית האפשרית כך שגוף המשוחרר ממנוחה יישאר במנוחה?

**פתרון:**

א. נניח שהגוף נשאר במנוחה. המשמעות היא שפועל עליו כוח חיכוך סטטי ושמשוואת ציר $x$ מתאפסת. נשרטט תרשים כוחות על הגוף ונכתוב את משוואת הכוחות:




$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad N - mg\cos 37 = 0 \quad (1)$$
$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad mg\sin 37 - f_s = 0 \quad (2)$$

נחשב את כוח החיכוך הסטטי ואת כוח החיכוך הסטטי המקסימאלי האפשרי במצב זה:

$$f_s = mg\sin 37 = 50\sin 37 - 30\text{ N}$$
$$N = mg\cos 37 = 50\cos 37 = 30\text{ N} \quad \Rightarrow \quad f_{smax} = \mu_s N = 0.4 \cdot 40 = 16\text{ N}$$
$$\Downarrow$$
$$f_s > f_{smax} \quad \Rightarrow \quad \text{הגוף יתחיל לנוע כלפי מטה}$$

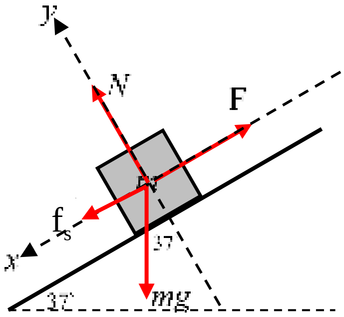
מכיוון שהגוף מתחיל לנוע כלפי מטה, פועל עליו כוח חיכוך קינטי, במקביל למישור כלפי מעלה והוא מאיץ בציר $x$ .

נשרטט כוחות ונכתוב משוואות מחדש:

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad N - mg\cos 37 = 0 \quad (1) \qquad N = mg\cos 37$$
$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad mg\sin 37 - \mu_k N = ma \quad (2) \qquad mg\sin 37 - \mu_k mg\cos 37 = ma$$

$$a = g(\sin 37 - \mu_k\cos 37) = 10(\sin 37 - 0.2\cos 37) = 4.4\ \text{m/s}^2$$

ב. הגוף על סף תנועה כלפי מעלה, כלומר פועל עליו כוח חיכוך סטטי מקסימאלי במקביל למישור כלפי הפעם החיכוך פועל דווקא במורד המישור, וגודלו הוא המקסימלי, ויש כוח חיצוני במעלה המישור.:




$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad N - mg\cos 37 = 0 \quad (1)$$
$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{max} - mg\sin 37 - \mu_s N = 0 \quad (2)$$
$$\Downarrow$$
$$N = mg\cos 37$$
$$F_{max} = mg\sin 37 + \mu_s mg\cos 37 = 50\sin 37 + 0.2 \cdot 50\cos 37 = 46\ N$$

ג. הגוף נמצא על סף תנועה כלפי מטה, כלומר פועל עליו חיכוך סטטי מקסימאלי במקביל למישור כלפי מעלה (כמו באיור מסעיף א', רק בזווית אחרת). המשוואות הן

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad N - mg\cos\theta = 0 \quad (1)$$
$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad mg\sin\theta - \mu_s N = 0 \quad (2)$$
$$\Downarrow$$
$$(1) \quad N = mg\cos\theta$$
$$(2) \quad mg\sin\theta - \mu_s mg\cos\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad mg\sin\theta = \mu_s mg\cos\theta \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \mu_s$$
$$\tan\theta = \mu_s = 0.4 \quad \Rightarrow \quad \theta = 21.8^\circ$$

**שאלה 2 - להגשה**

ארון עם מסה $M = 100kg$ מונח על הרצפה.

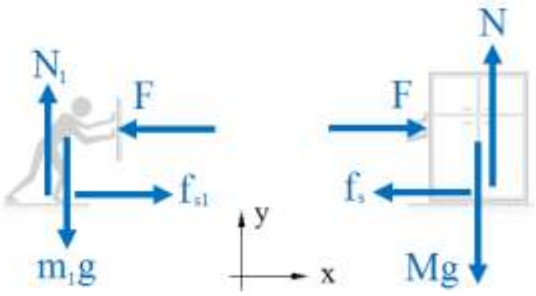
מקדם החיכוך הסטטי בינו לבין הרצפה הוא $\mu_s = 0.8$

א. מה הכוח המינימלי שצריך להפעיל עליו בכיוון האופקי בשביל שיהיה אפשר להזיז אותו?

ב. האם אדם עם מסה $m_1 = 80kg$ , שגם בין נעליו לרצפה גם יש מקדם חיכוך סטטי $\mu_s = 0.8$ יצליח להזיז אותו בלי שהאדם בעצמו יחליק? האם אדם עם מסה $m_2 = 120kg$ יצליח?

ג. מה מקדם החיכוך הסטטי המינימלי בין הנעלים לרצפה שצריך כל אחד מהאנשים בשביל שיוכל להזיז את הארון בלי להחליק?

**פתרון:**




משוואות הכוחות על הארון ועל האדם:

$$\sum F_x = F - f_s = 0 \qquad \sum F_{1x} = -F + f_{s1} = 0$$
$$\sum F_{1y} = -Mg + N \qquad \sum F_{1y} = -m_1 g + N_1$$

א. הכוח המינימלי אותו צריך להפעיל בשביל שהארון יזוז הוא כמובן הכוח המקסימלי אותו ניתן להפעיל בלי שהוא יחליק, כלומר

$$F_{min} = f_{s,max} = \mu_s Mg = 0.8 \cdot 100 \cdot 10 = 800_N$$

ב. כשמישהו רוצה להזיז את הארון הוא צריך להפעיל כאמור כוח שגודלו גדול מ800N. אבל לפי החוק השלישי פועל גם עליו כוח כזה לכיוון ההפוך. וכדי שהוא לא יחליק צריך כוח חיכוך שייתנגד לו.

אבל כוח החיכוך המקסימלי בין האדם עם המסה $m_1 = 80kg$ לבין הריצפה הוא:

$$f_{s1,max} = \mu_s m_1 g = 0.8 \cdot 80 \cdot 10 = 640_N$$

לכן הוא לא יוכל להזיז את הארון, כי הוא בעצמו יחליק.

לעומת זאת, כוח החיכוך המקסימלי בין האדם עם המסה $m_2 = 120kg$ לבין הריצפה הוא:

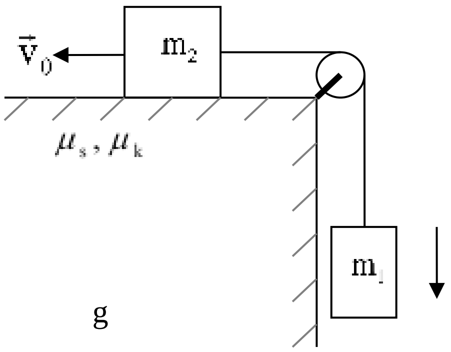
$$f_{s2,max} = \mu_s m_2 g = 0.8 \cdot 120 \cdot 10 = 960_N$$

לכן הוא כן יכול להפעיל כוח שיגרום לארון לזוז בלי שהוא בעצמו יחליק.

ג. אם רוצים מקדם חיכוך שונה, $\mu'_s$ , בין הנעלים לרצפה, הוא צריך להיות כזה שכוח החיכוך המקסימלי שאפשר להפעיל על האדם בלי שהוא יחליק יהיה גדול מכוח החיכוך המקסימלי שאפשר להפעיל על הארון בלי שהוא יחליק. כלומר:

$$\mu'_s mg > \mu_s Mg$$
$$\mu'_s > \frac{M}{m}\mu_s$$
$$\mu'_{s1} > \frac{M}{m_1}\mu_s = \frac{100}{80} \cdot 0.8 = 1$$
$$\mu'_{s2} > \frac{M}{m_2}\mu_s = \frac{100}{120} \cdot 0.8 = 0.67$$

**<u>שאלה 3:</u>**




מסה $m_2$ מחוברת למסה $m_1$ באמצעות חוט אידיאלי וגלגלת אידיאלית. חבטה קצרה בזמן $t=0$ מביאה את המסה $m_2$ למהירות התחלתית $v_0$ שמאלה, כך שהיא מתרחקת מהגלגלת.

$m_1 = 8\,kg$ , $m_2 = 16\,kg$ , $\mu_s = 0.4$ , $\mu_k = 0.25$ , $v_0 = 20\,m/s$ .

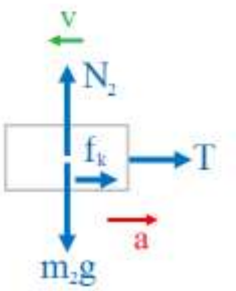
א. מתי, ובאיזה מרחק ממיקומה ההתחלתי המסה $m_2$ תיעצר?

ב. האם המסה תישאר במקום לאחר העצירה?

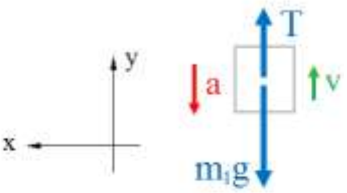
ג. אם לא, תוך כמה זמן תחזור המסה למקומה המקורי?

**פתרון:**

א. מחוק שני עבור מסה 2 נקבל $N=mg$ . המסות מחוברות ונעות ביחד, ולכן תאוצתן זהה ($a_1=a_2=a$ הסימן אותו סימן בזכות בחירת הכיוונים החיובי של הצירים, x שמאלה ו y למעלה, ככה שתנועה של מסה 1 בכיוון החיובי גוררת תנועה של מסה 2 בכיוון החיובי ולהפך).




נרשום את משוואות הכוחות (ונשים לב שהחיכוך הקינטי פועל נגד כיוון התנועה, כלומר ימינה, בכיוון השלילי של ציר x, ולכן הסימן שלו במשוואה עבור גוף 2 הוא כמו של T)




$$\sum F_{1y} = T - m_1 g = m_1 a$$
$$\sum F_{2x} = -T - f_k = m_2 a$$
$$-m_1 g - f_k = (m_1 + m_2)a$$
$$f_k = \mu_k N = \mu_k m_2 g$$
$$a = -\frac{m_1 + \mu_k m_2}{m_1 + m_2} g = -5_{m/s^2}$$

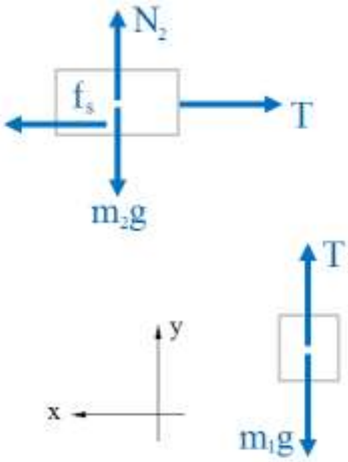
הסימן השלילי מראה שהתאוצה היא ימינה, כלומר מאיטה את המהירות שביא בכיוון שמאלה אותו בחרנו כחיובי.

עכשיו הבעיה היא בקינמטיקה:

$$v^2 = v_o^2 + 2a \cdot \Delta x$$
$$\Delta x = \frac{0 - v_o^2}{2a} = 40_m$$

דרך אחרת למצוא מהתאוצה את המרחק היא:

$$v(t) = v_o + at = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{v_o}{-a} = \frac{20}{5} = 4_{sec}$$
$$\Delta x = v_o t + \frac{1}{2} a t^2 = 20 \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot (-5) \cdot 4^2 = 40_m$$



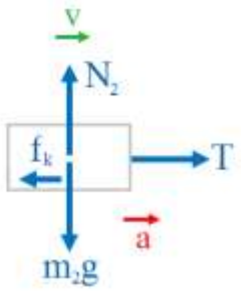

ב. נניח שמסה $m_1$ נשארת במקומה, ונראה מה כוח החיכוך הדרוש לשם כך

$$\sum F_{1y}=T-m_1g=0 \quad \Rightarrow \quad T=m_1g$$
$$\sum F_{2x}=f_s-T=0$$
$$f_s=T=m_1g=80N$$

אבל כח החיכוך המקסימלי האפשרי עבור גוף 2 הוא:

$$f_{s,max}=\mu_s N=\mu_s m_2 g=160\cdot 0.4=64_N$$

קיבלנו כי $f_{s,max}<f_s$, ולכן המסה חייבת להחליק, ולהתחיל לזוז ימינה.

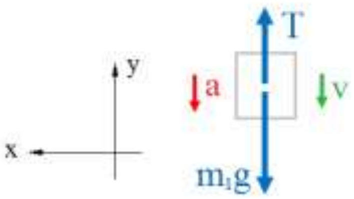



ג. משוואות הכוחות החדשות, דומות לסעיף א', אולם הפעם בגלל שכיוון התנועה הוא ימינה, כיוון החיכוך הקינטי הוא שמאלה (בכיוון החיובי), לכן חיבור המשוואות ייתן:

$$-m_1g+\mu_k N=(m_1+m_2)a$$

(דומה לסעיף א, אבל עכשיו החיכוך הוא בעל סימן הפוך) והתאוצה בהתאם תהיה:

$$a=-\frac{m_1-m_2\mu_k}{m_1+m_2}g=-1.667_{m/s^2}$$




התאוצה היא עדיין שמאלה (שזה הכיוון השלילי), אבל הפעם היא יותר קטנה בגודלה המוחלט, ומאיצה את התנועה (שגם היא בכיוון השלילי של הצירים).

משוואות התנועה (כעת $V_0=0$ ו $x_0=40_m$):

$$x(t)=x_0+\frac{1}{2}at^2$$

שימו לב, שבבחירת הקורדינטות למשוואה זו, בחרנו את ראשית הצירים כמקום שבו מסה 2 התחילה לנוע ממקומה (בסעיף א), ואילו הזמן $t=0$ הוא כאשר המסה מתחילה בתנועה חזרה.

נמצא מתי $x(t)=0$:

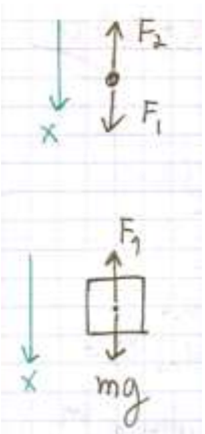
$$x(t)=x_0+\frac{1}{2}at^2=0$$
$$t=\sqrt{\frac{2x_0}{-a}}=6.93_{sec}$$

בגלל שהחיכוך עכשיו הוא שמאלה, ומתנגד למתיחות, התאוצה יותר קטנה, ולכן זמן החזרה ארוך מזמן ההגעה (שהיה 4 שניות).

## **שאלה 4 - להגשה**


נתונים שני קפיצים שקשורים אחד לשני ותלויים מהתקרה.
התחתון עם קבוע קפיץ $k_1=100\ _{N/m}$ והעליון עם $k_2=200\ _{N/m}$.
על הקפיץ התחתון תולים מסה $m=4_{kg}$.
א. בכמה מתארכים כל אחד מהקפיצים?
ב. מה צריך להיות הקבוע k של קפיץ יחיד שאם נתלה עליו את המסה m הוא ייתארך כמו שני הקפיצים ביחד?
ג. אם במקום משקולת אחת, תולים שתי משקולות בעלות $m/2$, אחת בין הקפיצים ואחת על הקפיץ התחתון, בכמה כל אחד מתארך?

**פתרון:**
א. נכתוב משוואת כוחות עבור המסה, ועבור נקודת החיבור חסרת המסה בין הקפיצים.
חשוב לזכור – על הקפיצים עצמם לא עושים משוואת כוחות. אם הקפיצים חסרי מסה, הדבר היחידי שאפשר להסיק ממשוואת הכוחות זה שהכוחות שפועלים משני צדדיו חייבים להיות שווים, לכן (מהחוק השלישי) הוא מפעיל כוח שווה על שני צדדיו. נקרה <u>לגודל</u> של כוח הזה $F_1$ עבור קפיץ $k_1$ ו $F_2$ עבור קפיץ $k_2$.




נבחר את ציר x כלפי מטה.

עבור המשקולת: $\sum F = mg - F_1 = 0$

עבור נקודת החיבור: $\sum F = F_1 - F_2 = 0$

$$F_2 = F_1 = mg = 40_N$$

לכן
$$\Delta x_1 = \frac{F_1}{k_1} = \frac{mg}{k_1} = \frac{40}{100} = 0.4m$$
$$\Delta x_2 = \frac{F_2}{k_2} = \frac{mg}{k_2} = \frac{40}{200} = 0.2m$$

ב. אם היה קפיץ אחד עם קבוע k, גם הוא היה מפעיל על המסה כוח F, כך ש:
$$F = mg \quad \Leftarrow \quad \sum F = mg - F = 0$$

כוח זה גורם להתארכות הקפיץ ב: $\Delta x = \frac{F}{k} = \frac{mg}{k}$

אבל מצד שני: $\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2$

לכן $k = \frac{mg}{\Delta x_1 + \Delta x_2} = \frac{40}{0.2 + 0.4} = 66.7\frac{N}{m}$

דרך אחרת (שנותנת באופן כללי את הקבוע של הקפיץ השקול, שבו אפשר להחליף שני קפיצים "בטוא") היא לומר שבגלל ש

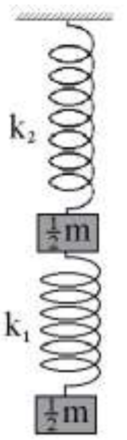
$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 = \frac{mg}{k_1} + \frac{mg}{k_2}$$

אז

$$\frac{mg}{k} = \frac{mg}{k_1} + \frac{mg}{k_2}$$

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

$$k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} = \frac{100 \cdot 200}{100 + 200} = 66.7_{N/m}$$




ג. במצב זה:

עבור המשקולת התחתונה:

$$\sum F = \frac{m}{2}g - F_1 = 0$$

עבור המשקולת בנקודת החיבור:

$$\sum F = F_1 - F_2 + \frac{m}{2}g = 0$$

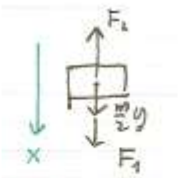
$$F_1 = \frac{m}{2}g = 20_N$$

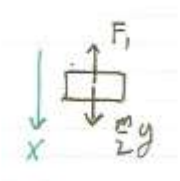
$$F_2 = F_1 + \frac{m}{2}g = \frac{m}{2}g + \frac{m}{2}g = mg = 40_N$$

לכן

$$\Delta x_1 = \frac{F_1}{k_1} = \frac{\frac{m}{2}g}{k_1} = \frac{20}{100} = 0.2m$$

$$\Delta x_2 = \frac{F_2}{k_2} = \frac{mg}{k_2} = \frac{40}{200} = 0.2m$$

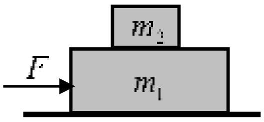



הקפיץ התחתון נושא רק חצי מהעומס, לכן מתארך בחצי ממה שהיה קודם.
הקפיץ העליון נושא את כל העומס כמו קודם, ולכן התארכותו כמו קודם.

## שאלה 5:

שני גופים $m_1 = 3\,kg$ ו- $m_2 = 2\,kg$ נמצאים על משטח אופקי. מקדם החיכוך בין גוף $m_1$ והמשטח $\mu_1 = 0.3$ ובין הגופים $\mu_2 = 0.7$. מפעילים על גוף $m_1$ כוח אופקי שגודלו $F$.




א. מהו הגודל המינימאלי של הכוח, $F_{min}$, שיגרום לגופים לזוז ממנוחה?

ב. במצב בו נתון כי גודל הכוח $F = \frac{F_{min}}{2}$, מה כל כוחות החיכוך הפועלים על כל אחד מהגופים.

ג. נתון כי $F = 20N$. מהן תאוצות הגופים?

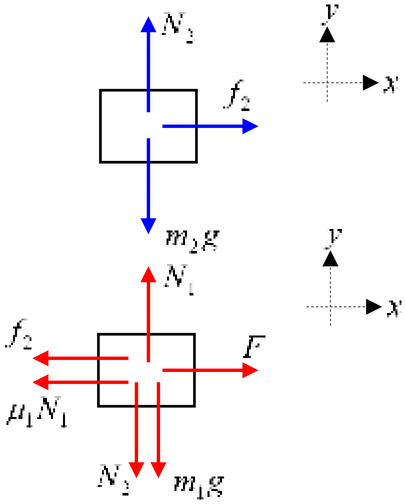
ד. מהו הכוח המקסימלי שניתן להפעיל כך שהגופים עדיין ינועו יחד?

ה. נתון כי $F = 55N$. מהן תאוצות הגופים כעת?

**פתרון:**

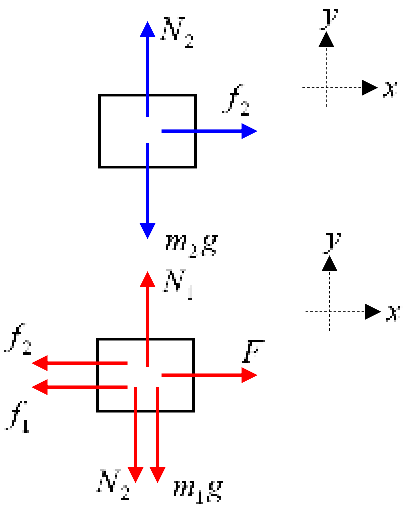
א. תרשים כוחות, משוואות כוחות ופתרון המשוואות:

$$m_2: \quad \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad N_2 - m_2 g = 0 \quad (1)$$
$$m_2: \quad \sum F_x = m_2 a \quad \Rightarrow \quad f_2 = 0 \quad (2)$$
$$m_1: \quad \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad N_1 - N_2 - m_1 g = 0 \quad (3)$$
$$m_1: \quad \sum F_x = m_1 a \quad \Rightarrow \quad F_{min} - f_2 - \mu_1 \cdot N_1 = 0 \quad (4)$$
$$\Downarrow$$
$$N_2 = m_2 g = 20\,N \quad , \quad N_1 = (m_1 + m_2) g = 50\,N$$
$$(2)+(4) \quad \Rightarrow \quad F - \mu_1 \cdot N_1 = 0$$
$$F_{min} = \mu_1 \cdot N_1 = 0.3 \cdot 50 = 15\,N$$



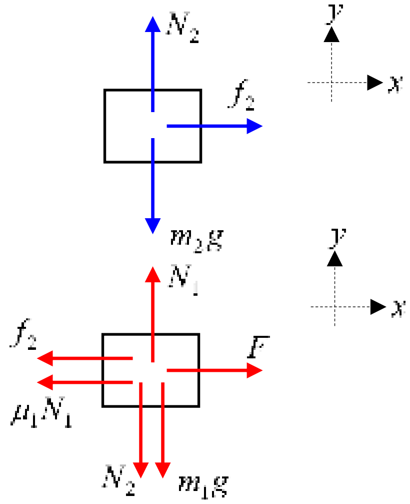

ב. תרשים כוחות, משוואות כוחות ופתרון המשוואות:

$$m_2: \quad \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad N_2 - m_1 g = 0 \quad (1)$$
$$m_2: \quad \sum F_x = m_2 a \quad \Rightarrow \quad f_2 = 0 \quad (2)$$
$$m_1: \quad \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad N_1 - N_2 - m_1 g = 0 \quad (3)$$
$$m_1: \quad \sum F_x = m_1 a \quad \Rightarrow \quad F - f_2 - f_1 = 0 \quad (4)$$
$$\Downarrow$$
$$N_2 = m_2 g = 20\,N \quad , \quad N_1 = (m_1 + m_2) g = 50\,N$$
$$(2)+(4) \quad \Rightarrow \quad F - f_1 = 0$$
$$f_1 = F = 7.5\,N \quad , \quad f_2 = 0\,N$$



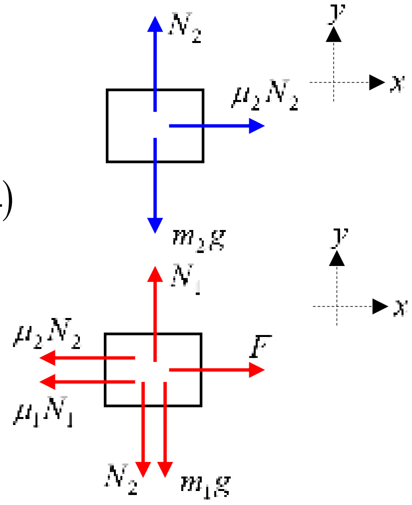
ג. תרשים כוחות, משוואות כוחות ופתרון המשוואות:

$$m_2: \quad \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad N_2 - m_1 g = 0 \quad (1)$$
$$m_2: \quad \sum F_x = m_2 a \quad \Rightarrow \quad f_2 = m_2 a \quad (2)$$
$$m_1: \quad \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad N_1 - N_2 - m_1 g = 0 \quad (3)$$
$$m_1: \quad \sum F_x = m_1 a \quad \Rightarrow \quad F - f_2 - \mu_1 \cdot N_1 = m_1 a \quad (4)$$
$$\Downarrow$$
$$N_2 = m_2 g = 20\,N \quad , \quad N_1 = (m_1 + m_2) g = 50\,N$$
$$(2)+(4) \quad \Rightarrow \quad F - \mu_1 \cdot N_1 = (m_1 + m_2) a$$
$$a = \frac{F - \mu_1 \cdot N_1}{m_1 + m_2} = \frac{20 - 0.3 \cdot 50}{5} = 1\,m/s^2$$



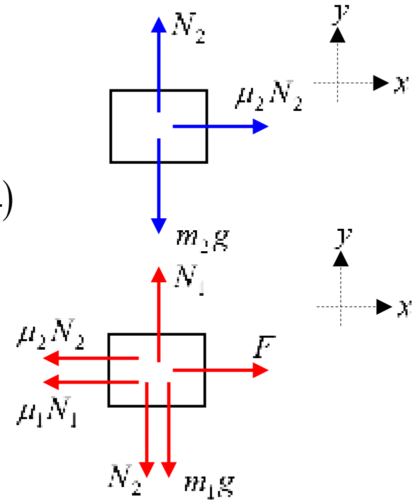

ד. תרשים כוחות, משוואות כוחות ופתרון המשוואות:

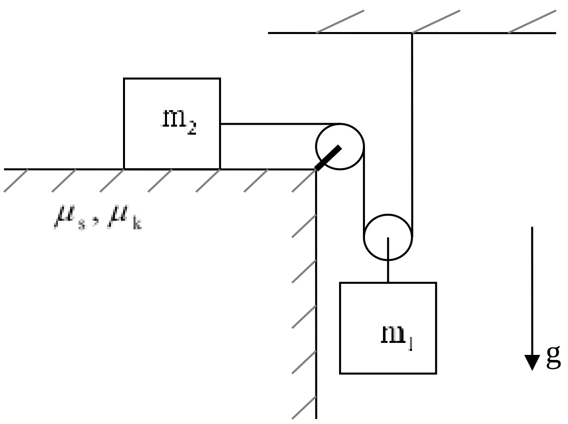
$$m_2: \quad \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad N_2 - m_1 g = 0 \quad (1)$$
$$m_2: \quad \sum F_x = m_2 a \quad \Rightarrow \quad \mu_2 N_2 = m_2 a \quad (2)$$
$$m_1: \quad \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad N_1 - N_2 - m_1 g = 0 \quad (3)$$
$$m_1: \quad \sum F_x = m_1 a \quad \Rightarrow \quad F - \mu_2 N_2 - \mu_1 \cdot N_1 = m_1 a \quad (4)$$
$$\Downarrow$$
$$N_2 = m_2 g = 20\,N \quad , \quad N_1 = (m_1 + m_2) g = 50\,N$$
$$(2) \quad \Rightarrow \quad a = \frac{\mu_2 N_2}{m_2} = \frac{0.7 \cdot 20}{2} = 7\,m/s^2$$




ה. תרשים כוחות, משוואות כוחות ופתרון המשוואות:

$$m_2: \quad \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad N_2 - m_1 g = 0 \quad (1)$$
$$m_2: \quad \sum F_x = m_2 a \quad \Rightarrow \quad \mu_2 N_2 = m_2 a_2 \quad (2)$$
$$m_1: \quad \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad N_1 - N_2 - m_1 g = 0 \quad (3)$$
$$m_1: \quad \sum F_x = m_1 a \quad \Rightarrow \quad F - \mu_2 N_2 - \mu_1 \cdot N_1 = m_1 a_1 \quad (4)$$
$$\Downarrow$$
$$N_2 = m_2 g = 20\,N \quad , \quad N_1 = (m_1 + m_2) g = 50\,N$$
$$(2) \quad \Rightarrow \quad a_2 = \frac{\mu_2 N_2}{m_2} = \frac{0.7 \cdot 20}{2} = 7\,m/s^2$$
$$(4) \quad \Rightarrow \quad a_1 = \frac{F - \mu_2 N_2 - \mu_1 \cdot N_1}{m_1} =$$
$$= \frac{55 - 0.7 \cdot 20 - 0.3 \cdot 50}{3} = 8.666\,m/s^2$$






**<u>שאלה 6 - להגשה</u>**

נתונה מערכת של משקולות, גלגלות אידיאליות וחבלים אידיאלים כמתואר באיור, המשקולות נמצאות במנוחה.

$m_1 = 5_{kg}; m_2 = 3_{kg}; \mu_s = 0.5; \mu_k = 0.2$ .

א. האם המשקולות יזוזו ממקומן?

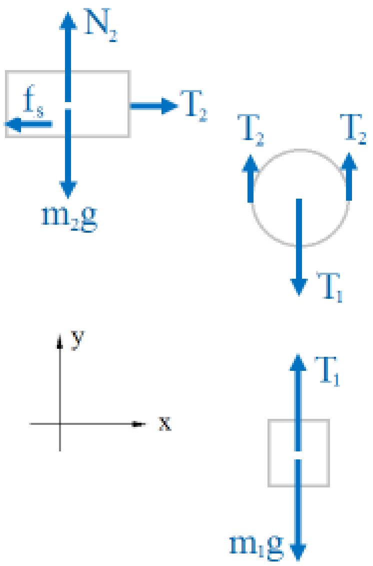
ב. אם כן, מהן תאוצותיהן?

ג. מהי המסה המינימלית של משקולת אותה צריך להציב במקום $m_1$ על מנת שהגופים יתחילו לזוז?

**<u>פתרון:</u>**

נקרא למתיחות בחוט בין הגלגלת ל $m_1$ בשם $T_1$, ולזו שבין התקרה, דרך הגלגלות ל $m_2$ בשם $T_2$.

ראשית נבדוק האם המערכת תשאר במנוחה. נניח שכן, כלומר שפועל חיכוך סטטי, ונבדוק האם זה ייתכן.
כמו בשאלה 1, נניח כי המסות נמצאות במנוחה ונבדוק האם זה ייתכן.




עבור המשקולת התלויה: $\sum F_{1y} = -m_1g + T_1 = 0$

עבור הגלגלת הניידת $\sum F_{0y} = -T_1 + 2T_2 = 0$

עבור המשקולת שעל השולחן:

$$\sum F_{2x} = T_2 - f_s = 0$$
$$\sum F_{2y} = -m_2g + N_2 = 0$$

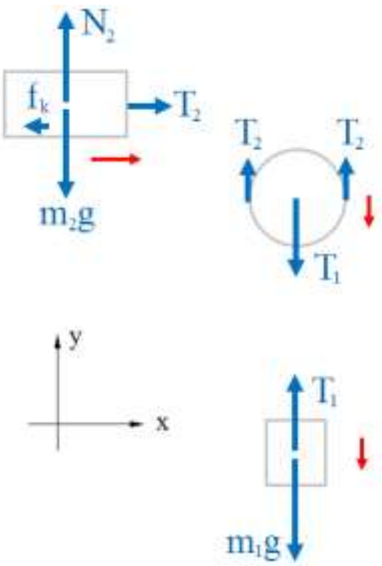
מציבים ומקבלים שגודל החיכוך הסטטי שדרוש בשביל למנוע החלקה הוא:

$$f_s = T_2 = \frac{T_1}{2} = \frac{m_1g}{2} = \frac{5 \cdot 10}{2} = 25N$$

אבל $N_2 = m_2g$ לכן גודל כוח החיכוך הסטטי המקסימלי הוא:

$$f_{smax} = \mu_s N_2 = \mu_s m_2 g = 0.5 \cdot 3 \cdot 10 = 15N$$

קיבלנו כי $f_{s,max} < f_s$ , כלומר כוח החיכוך הדרוש בשביל להחזיק את הגוף במקום גדול מהמקסימום האפשרי עבור החומרים האלה בסיטואציה הזו, ולכן המסה תזוז.




ב. אם המשקולת שעל השולחן מחליקה, צריך לקחת בחשבון גם תאוצות, ולהשתמש בחיכוך קינטי.

עכשיו החוק השני של ניוטון נותן עבור המשקולת התלויה:

$$\sum F_{1y} = -m_1g + T_1 = m_1a_1$$

עבור הגלגלת הניידת $\sum F_{0y} = -T_1 + 2T_2 = 0 \cdot a_1 = 0$

עבור המשקולת שעל השולחן:

$$\sum F_{2x} = T_2 - f_k = m_2a_2$$
$$\sum F_{2y} = -m_2g + N_2 = 0$$

לגוף 1 יש שינוי מיקום של $\Delta y_1$ לגוף 2, יש שינוי מיקום של $\Delta x_2 = -2\Delta y_1$ . ה-2 בא מכך שירידה של הגלגלת מאריכה את החוט פעמיים בקטע הימני שלו (גם בירידה וגם בעליה), ולכן צריך לפצות על זה בתזוזה כפולה של המסה שעל השולחן . מכאן $a_2 = -2a_1$

המינוס נובע מכך שכאשר גוף 1 דווקא יורד (תזוזה בכיוון השלילי של y במערכת הצירים כפי שבחרנו) גוף 2 זז ימינה (בכיוון החיובי של x). היה אפשר להמנע ממנו אם היינו בוחרים למשל את ציר y עבור המשקולת התלויה כלפי מטה.

מהמשוואות עבור משקולת 1, הגלגלת, והקשר בין התאוצות מקבלים:

$$-m_1g+T_1=m_1a_1$$
$$-m_1g+2T_2=m_1a_1$$
$$-2m_1g+4T_2=2m_1a_1$$
$$-2m_1g+4T_2=-m_1a_2$$

מהמשוואות עבור משקולת 2 (שעל השולחן), מקבלים $f_k=\mu_kN=\mu_km_2g$ ולכן

$$T_2-\mu_km_2g=m_2a_2$$

ומהצבה מקבלים:

$$-2m_1g+4\left(\mu_km_2g+m_2a_2\right)=-m_1a_2$$
$$\left(4m_2+m_1\right)a_2=2m_1g-4\mu_km_2g$$
$$a_2=\frac{2m_1-4\mu_km_2}{4m_2+m_1}g=\frac{2\cdot5-4\cdot0.2\cdot3}{4\cdot3+5}\cdot10=\frac{10-2.4}{17}\cdot10=4.47m/s^2$$
$$a_1=-\frac{1}{2}a_2=-2.24m/s^2$$

ג.

בשאלות כאלה, בגלל שהתנאי שיש לנו שמפריד בין המקרים מדבר לע החיכוך הסטטי, כששואלים שאלה מהסוג

"מהי המסה **המינימלית** של משקולת אותה **צריך** לתלות על מנת שהגופים יתחילו לזוז?"

בעצם צריך "לתרגם אותה" לשאלה אחרת:

"מהי המסה **המקסימלית** של משקולת אותה **אפשר** לתלות על מנת שהגופים **לא** יתחילו לזוז?"

כששואלים שאלה כמו "מה המסה המינימלית שמצ

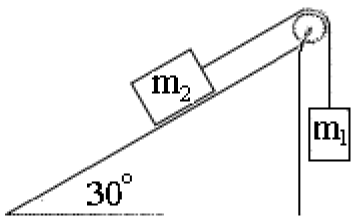
בסעיף א' ראינו שכוח החיכוך שדרוש על מנת להחזיק את הגוף במקום הוא $f_s=\frac{m_1g}{2}$, כדאי שהמשקולות לא יתחילו לזוז אסור שהוא יעלה על $f_{smax}=\mu_sm_2g$.

לכן בשביל שהמשקולות כן יתחילו לזוז, צריך שיתקיים:

$$f_s>f_{smax}$$
$$\frac{m_1g}{2}>\mu_sm_2g$$
$$m_1>2\mu_sm_2=2\cdot0.5\cdot3=3kg$$

**שאלה 7:**

נתון משטח משופע <u>בעל חיכוך</u> בזווית α. מסה $m_1$ תלויה באוויר על חוט שעובר דרך גלגלת למסה $m_2$ שנמצאת על המשטח המשופע.




$$m_2 = 10\text{kg}$$
$$\mu_s = \mu_k = 0.4$$
$$\alpha = 30^o$$

א. אם המסה $m_2$ נמצאת במנוחה, ותולים על החוט משקולת בעלת $m_1 = 8\text{kg}$. האם המערכת תשאר במנוחה? אם כן, מה כוח החיכוך הסטטי?

ב. מה צריכה להיות המסה של המשקולת $m_1$ על מנת שאם המערכת נעזבת במנוחה, היא תישאר במנוחה?

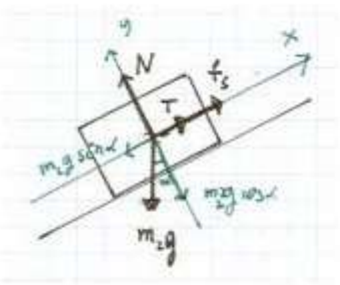
ג. שוב $m_1 = 8\text{kg}$, רק שהפעם נותנים למערכת מהירות התחלתית ימינה. מה התאוצה של הגופים?

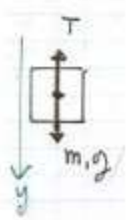
ד. מה קורה, באותה מערכת, אם נותנים לה מהירות התחלתית שמאלה?

**פתרון:**

א. נבחר צירים בהמשכיות. עבור $m_1$ , ציר y כלפי מטה. עבור $m_2$ ציר x שמקביל לשיפוע ופונה ימינה, ציר y בניצב לשיפוע (כלפי מעלה, אבל זה פחות חשוב, כי אין תאוצה לכיוון זה).

נניח שאכן יש שיווי משקל, ונחשב מה כוח החיכוך הסטטי <u>שדרוש</u> לשם כך. אחר כך נבדוק האם הוא עומד <u>בתנאי</u> שכוח חיכוך סטטי צריך לעמוד בו.




עבור גוף 1:
$$\sum F_y = m_1 g - T = 0 \quad \Rightarrow \quad T = m_1 g \qquad (1)$$

עבור גוף 2: אנחנו לא יודעים מה יהיה כיוון כוח החיכוך הסטטי. <u>נניח</u> שהוא חיובי (ונשרטט בתרשים הכוחות בהתאם). אם נקבל תוצאה שלילית אז הוא לכיוון השני.

$$\sum F_x = T + f_s - m_2 g \cdot \sin\alpha = 0 \qquad (2)$$
$$\sum F_y = N - m_2 g \cdot \cos\alpha = 0 \qquad (3)$$

$$(1) \rightarrow (2) \quad \Rightarrow \quad m_1 g + f_s - m_2 g \cdot \sin\alpha = 0$$
$$f_s = (m_2 \cdot \sin\alpha - m_1)g = \left(10 \cdot \frac{1}{2} - 8\right) \cdot 10 = -30\text{N}$$

סימן המינוס מראה שכוח החיכוך פועל הפוך ממה שציירנו (אבל צריך שהציור יתאים למה שכתבנו במשוואות! לכן כך צריך לצייר, אם רוצים אפשר להוסיף ציור נוסף אחרי שמגלים את הכיוון, אבל לא במקום תרשים הכוחות

המקורי). המערכת "רוצה" להחליק ימינה, צריך כוח שמאלה שיחזיק אותה. זה היה יכול להיות עוד חוט, ואז זו היתה המתיחות שלה. זה יכול להיות כוח חיכוך אם הוא לא יעבור את המקסימום המותר:

$$f_{s\max} = \mu_s N$$
$$(3) \quad \Rightarrow \quad N = m_2 g \cdot \cos\alpha$$
$$f_{s\max} = \mu_s N = \mu_s m_2 g \cdot \cos\alpha = 0.4 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 0.866 = 34.6N$$
$$|f_s| = |-30| < f_{s\max} = 34.6$$

לכן זה אפשרי שהחיכוך יחזיק את המערכת במקומה.

חשוב לשים לב: באופן כללי $f_s \neq \mu_s N$ . הוא מה שצריך בשביל להחזיק בתנאי שהוא לא גדול גדול מהערך המקסימלי

ב. כבר ראינו שהכוח הדרוש בשביל להחזיק את המערכת במקום הוא:

$$f_s = (m_2 \cdot \sin\alpha - m_1)g$$

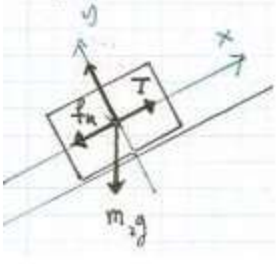
וצריך למנוע גם החלקה ימינה, וגם החלקה שמאלה. כלומר:

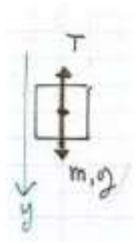
$$-\mu_s N < f_s < \mu_s N$$
$$-\mu_s m_2 g \cdot \cos\alpha < (m_2 \cdot \sin\alpha - m_1)g < \mu_s m_2 g \cdot \cos\alpha$$
$$-\mu_s m_2 \cdot \cos\alpha - m_2 \cdot \sin\alpha < -m_1 < \mu_s m_2 \cdot \cos\alpha - m_2 \cdot \sin\alpha$$
$$m_2(\mu_s \cdot \cos\alpha + \sin\alpha) > m_1 > m_2(-\mu_s \cdot \cos\alpha + \sin\alpha)$$
$$10 \cdot (0.4 \cdot 0.866 + 0.5) > m_1 > 10 \cdot (-0.4 \cdot 0.866 + 0.5)$$
$$8.45kg > m_1 > 1.54kg$$

אם $m_1 < 1.54kg$ אז המערכת מתחילה להחליק שמאלה.

אם $m_1 > 8.45kg$ אז המערכת מתחילה להחליק ימינה.

ג. $f_k$ תמיד נגד כיוון התנועה (היחסי) בין הגופים! לכן אם הגוף נע ימינה, $f_k$ <u>חייב להיות</u> לכיוון שמאל (כלומר בכיוון השלילי של ציר x).




עבור גוף 1:

$$(1) \qquad \sum F_y = m_1 g - T = m_1 a$$

עבור גוף 2:

$$(2) \qquad \sum F_x = T - f_k - m_2 g \cdot \sin\alpha = m_2 a$$

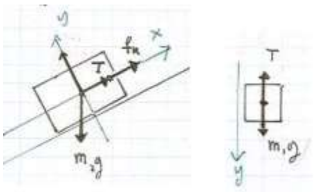
$$(3) \qquad \sum F_y = N - m_2 g \cdot \cos\alpha = 0$$

$$(1)+(2) \quad \Rightarrow \quad m_1 g - f_k - m_2 g \cdot \sin\alpha = m_1 a + m_2 a$$

$$m_1 g - \mu_k m_2 g \cdot \cos\alpha - m_2 g \cdot \sin\alpha = (m_1 + m_2)a$$

$$a = \frac{m_1 - \mu_k m_2 \cdot \cos\alpha - m_2 \cdot \sin\alpha}{m_1 + m_2} g = \frac{8 - 0.4 \cdot 10 \cdot 0.866 - 10 \cdot 0.5}{8 + 10} g = -0.026g = -0.26 m/s^2$$

זה שהגודל שלילי, אומר שהחיכוך בולם את התנועה, עד שהמערכת תעצר.



ד. במצב הזה, אם הגוף נע שמאלה, $f_k$ חייב להיות לכיוון ימין (כלומר בכיוון החיובי של ציר x).

עבור גוף 1:

$$(1) \qquad \sum F_y = m_1 g - T = m_1 a$$

עבור גוף 2:

$$(2) \qquad \sum F_x = T + f_k - m_2 g \cdot \sin\alpha = m_2 a$$

$$(1)+(2) \quad \Rightarrow \quad m_1 g + f_k - m_2 g \cdot \sin\alpha = m_1 a + m_2 a$$

$$m_1 g + \mu_k m_2 g \cdot \cos\alpha - m_2 g \cdot \sin\alpha = (m_1 + m_2)a$$

$$a = \frac{m_1 + \mu_k m_2 \cdot \cos\alpha - m_2 \cdot \sin\alpha}{m_1 + m_2} g = \frac{8 + 0.4 \cdot 10 \cdot 0.866 - 10 \cdot 0.5}{8 + 10} g = 0.36g = 3.6 m/s^2$$

תאוצה לכיוון החיובי, אומר שהתנועה שמאלה נבלמת