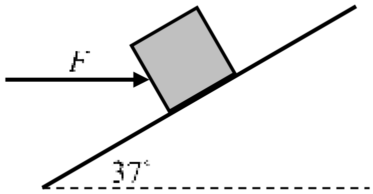
<u>פתרון עבודת בית 6 – חוקי ניוטון</u>

בדף זה נשתמש בערך היותר מדוייק $g = 9.8 m/s^2$, או שנשאיר אותו כפרמטר, אם גם שאר השאלה פרמטרית

להגשה- שאלות 1, 4, 8

<u>תרגיל 1 - להגשה</u>

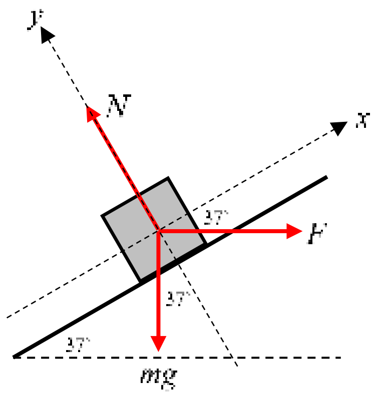


גוף שמסתו m נמצא על משטח חסר חיכוך בשיפוע $\alpha=37^\circ$. כשהוא נדחף על ידי כוח אופקי F הוא נע במעלה המשטח המשופע <u>במהירות קבועה</u>.

א. מהו גודל הכוח F הפועל על הגוף? ומהו גודל הכוח הנורמאלי N שהמשטח מפעיל עליו?

ב. אם מגדילים את F פי 2, מה תאוצת הגוף a, ומה גודל הכוח הנורמלי N?

פתרון:



א. נשרטט את תרשים הכוחות הפועלים על הגוף:

נבחר מערכת צירים מקבילה וניצבת למישור.

נכתוב את משוואות הכוחות:

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad F\cos 37 - mg\sin 37 = 0 \quad (1)$$
$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad N - mg\cos 37 - F\sin 37 = 0 \quad (2)$$

נפתור את מערכת המשוואות:

$$(1) \quad \Rightarrow \quad F = \frac{mg\sin 37}{\cos 37} = mg\tan 37 = \frac{3}{4}mg = 0.75mg$$

$$(2) \quad \Rightarrow \quad N = mg\cos 37 + F\sin 37 = \frac{4}{5}mg + \left(\frac{3}{4}mg\right)\frac{3}{5} = \frac{16+9}{20}mg = \frac{5}{4}mg = 1.25mg$$

ב. במצב החדש הכוח הוא $\tilde{F} = 2F = 2\frac{3}{4}mg = \frac{3}{2}mg$.

הגוף יכול להאיץ רק במקביל למישור, לכן $a_x = a$

$$a_x = \frac{\sum F_x}{m} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{\tilde{F}\cos 37 - mg\sin 37}{m} \quad (1)$$
$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad N - mg\cos 37 - \tilde{F}\sin 37 = 0 \quad (2)$$

$$(1) \quad \Rightarrow \quad a = \frac{\tilde{F}\cos 37 - mg\sin 37}{m} = \frac{\left(\frac{3}{2}mg\right)\frac{4}{5} - mg\frac{3}{5}}{m} = \frac{3}{5}g = 0.6g$$

$$(2) \quad \Rightarrow \quad N = mg\cos 37 + \tilde{F}\sin 37 = \frac{4}{5}mg + \left(\frac{3}{2}mg\right)\frac{3}{5} = \frac{8+9}{10}mg = \frac{17}{10}mg = 1.7mg$$

<u>תרגיל 2</u>

נתונים איש שמסתו היא $m=100kg$ ו"מאזניים חשמלים" ("משקל חשמלי") שעל פני כדור הארץ, שם $g=9.8m/s^2$, מראה שהוא "שוקל" $100kg$.

א. מה יראה המשקל אם האדם יהיה על פני מאדים שם $g^*=3.7m/s^2$?

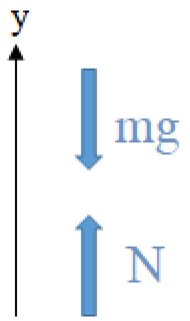
ב. מה יראה המשקל אם האדם יהיה במעלית שתאוצתה (כלפי מעלה) היא $a=2m/s^2$? באילו מקרים זה קורה?

ג. מה יראה המשקל אם האדם יהיה במעלית שתאוצתה היא $a=-2m/s^2$? באילו מקרים זה קורה?

ד. מה יראה המשקל אם האדם יהיה במעלית שהכבל שלה נקרע, והיא נופלת באופן חופשי?

<u>פתרון</u>

חשוב להבין מה עושה המכשיר. זה לא מכשיר שמודד מסה, אלא מודד את הכוח הנורמלי N שהוא מפעיל על האדם. בשביל למצוא בכל מקרה מהו N, נשתמש בחוק השני של ניוטון עבור האדם.



במצב הרגיל, על פני כדור הארץ, האדם נמצא בשיווי משקל והכוחות שפועלים עליו הם $W=mg$ ו N לכן:

$$\sum F_y = N - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad N = mg = 100 \cdot 9.8 = 980N$$

אבל המכשיר נותן לנו תוצאה בק"ג. מה שהוא בעצם עושה הוא <u>מודד</u> את N <u>ומחשב</u> ממנו את המסה <u>בהנחות</u> ש $g=9.8m/s^2$ ושהמערכת נמצאת בשיווי משקל, ע"י חלוקה פשוטה. אם נקרא למסה שהמכשיר חישב m' אז על פני כדור הארץ

$$m' = \frac{N}{g} = \frac{mg}{g} = m = 100kg$$

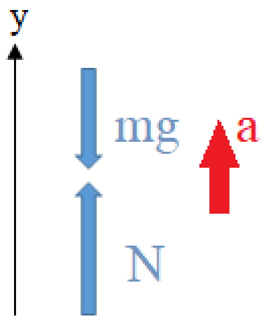
א. על פני מאדים יש g שונה. אבל אף אחד לא סיפר את זה למכשיר, לכן הוא נותן תשובה שמתבססת על <u>ההנחה שעכשיו היא שגויה</u> ש g לא השתנה. לכן במקרה זה:

$$N = mg^* = 100 \cdot 3.7 = 370N$$

$$m' = \frac{N}{g} = \frac{mg^*}{g} = \frac{370}{9.8} = 38kg$$

ובאופן כללי:

$$m' = m\frac{g^*}{g}$$



ב. + ג. + ד. עכשיו ההנחה המוטעה היא שהמערכת נמצאת במנוחה. אבל היא לא. עכשיו הגוף לא נמצא בשיווי משקל אלא יש לו תאוצה a אותה אנחנו יודעים בכל מקרה. בכל המקרים:

$$\sum F_y = N - mg = ma \quad \Rightarrow \quad N = m(g+a)$$

אגב, גם פה אפשר להגדיר $g^*=g+a$ אבל על זה נלמד בהמשך השנה

ב. כאשר המעלית בתאוצה של $2m/s^2$ (מתחילה לעלות, או בולמת ירידה)

$$a = +2m/s^2, \quad N = m(g+a) = 100(9.8+2) = 1180N, \quad m' = \frac{N}{g} = \frac{1180}{9.8} = 120.4kg$$

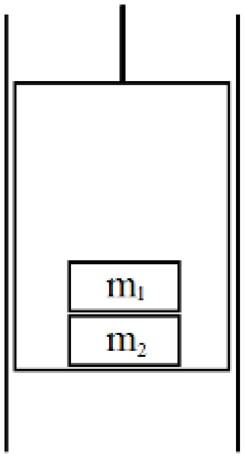
בגלל התאוצה הכוח על המכשיר <u>באמת</u> יותר גדול. המכשיר <u>מפרש את זה בטעות כאילו</u> המסה של האדם יותר גדולה.

ג. כאשר המעלית בתאוצה של $2m/s^2$ למטה (בולמת את העליה, או מתחילה לרדת)

$$a = -2m/s^2, \quad N = m(g+a) = 100(9.8-2) = 780N, \quad m' = \frac{N}{g} = \frac{780}{9.8} = 79.6kg$$

ד. כאשר המעלית נופלת **בנפילה חופשית**

$$a = -g = -9.8m/s^2, \quad N = m(g+(-g)) = 0 \quad m' = \frac{N}{g} = \frac{0}{9.8} = 0$$



<u>תרגיל 3</u>

שתי תיבות עם מסות $m_1 = m_2 = 10kg$ נמצאות על רצפת מעלית

א. מה הגדלים של הכוח הנורמלי בין הקופסות N_{12} ושל הכוח הנורמלי בין התיבה התחתונה לבין רצפת המעלית N_{02}, כשהמעלית נמצאת במנוחה?

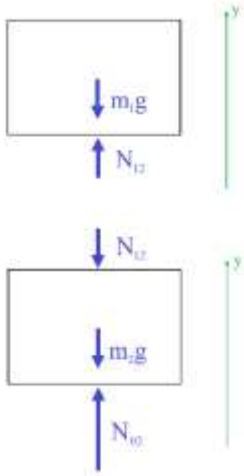
ב. מה N_{12} ו- N_{02} כאשר המעלית מאיצה למעלה בתאוצה שגודלה $a = 2.2\frac{m}{s^2}$?

הקפידו:

- לשרטט תרשים כוחות לכל גוף בנפרד בו יופיעו כל הכוחות שפועלים עליו
- לכתוב לכל גוף בנפרד את המשוואה של החוק השני של ניוטון לפי התרשים

<u>פתרון</u>

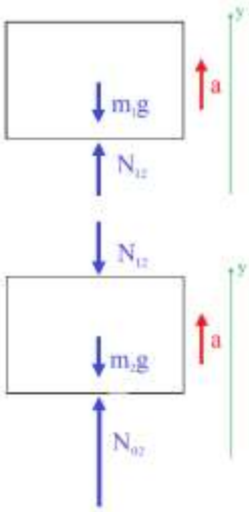
<u>א.</u> כשהמעלית נמצאת במנוחה (או נעה במהירות קבועה) התאוצה שלה, ויחד איתה של שתי התיבות היא אפס. במצב זה:



$$\sum F_{1y} = 0$$
$$-m_1g + N_{12} = 0$$
$$N_{12} = m_1g = 10 \cdot 9.8 = 98N$$

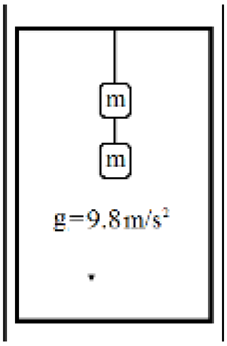
$$\sum F_{2y} = 0$$
$$-m_2g - N_{12} + N_{02} = 0$$
$$N_{02} = m_2g + N_{12} = 10 \cdot 9.8 + 98 = 196N$$

ב.



$$\sum F_{1y} = m_1a_{1y}$$
$$-m_1g + N_{12} = m_1a$$
$$N_{12} = m_1g + m_1a = 10 \cdot 9.8 + 10 \cdot 2.2 = 120N$$

$$\sum F_{2y} = m_2a_{2y}$$
$$-m_2g - N_{12} + N_{02} = m_2a$$
$$N_{02} = m_2g + N_{12} + m_2a = 10 \cdot 9.8 + 120 + 10 \cdot 2.2 = 240N$$



תרגיל 4 - להגשה

משקולת בעלת מסה $m=10kg$ תלויה מחוט על תקרת מעלית. על המשקולת תלויה משקולת נוספת זהה.

מה המתיחויות בחוטים כאשר:

א. המעלית עולה במהירות קבועה $v=3.2m/s$?

ב. עליית המעלית נבלמת בתאוצה שגודלה $|a|=1.8m/s^2$

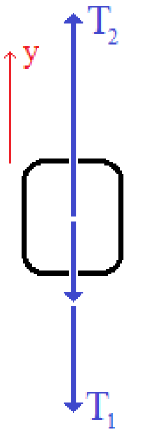
ג. המעלית מתחילה לרדת ומאיצה בתאוצה שגודלה $|a|=1.8m/s^2$?

ד. ירידת המעלית נבלמת בתאוצה שגודלה $|a|=1.8m/s^2$

פתרון

נתחיל מלכתוב ביטויים פרמטרים למתיחויות, ורק אחרי זה נציב את הנתונים לכל מקרה.

נקרא לחוט התחתון חוט 1, ולעליון חוט 2, ונבחר את ציר y כלפי מעלה.



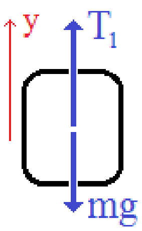
מהחוק השני של ניוטון, עבור המשקולת התחתונה:

$$\sum F_y = T_1 - mg = ma \quad \Rightarrow \quad T_1 = m(g+a)$$

עבור המשקולת העליונה:

$$\sum F_y = T_2 - T_1 - mg = ma \quad \Rightarrow \quad T_2 = T_1 + mg + ma = 2m(g+a)$$

א. כשהמהירות קבועה, היא לא משתנה. והתאוצה היא קצת שינוי המהירות, לכן $a=0$. (הנתון של מהי המהירות הקבועה הוא כמובן מיותר). במצב זה : $T_2 = 2mg = 196_N$ $\qquad$ $T_1 = mg = 98_N$



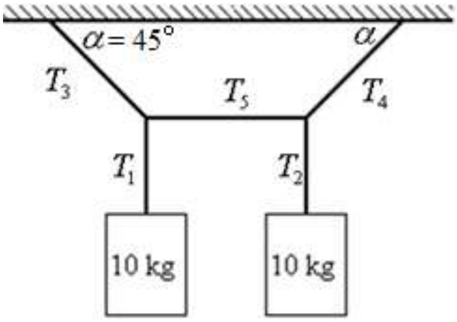
ב. כשעליה של המעלית נבלמת, התאוצה היא כלפי מטה, כלומר $a=-1.8_{m/s^2}$, ואז

$$T_1 = m(g+a) = 10(9.8-1.8) = 80_N \qquad T_2 = 2m(g+a) = 160_N$$

ג. כשהמעלית מתחילה להאיץ כלפי מטה, שוב התאוצה היא כלפי מטה, לכן התשובות הן כמו בסעיף הקודם.

ד. כשהמעלית בולמת את המהירות כלפי מטה, התאוצה שלה היא כלפי מעלה, לכן חיובית. במצב זה:

$$T_1 = m(g+a) = 10(9.8+1.8) = 116_N \qquad T_2 = 2m(g+a) = 232_N$$



<u>תרגיל 5</u>

שני גופים זהים בעלי מסות של 10 ק"ג תלויים על חבלים כמתואר בציור. מהן המתיחויות בכל אחד מהחבלים?

<u>פתרון</u>

ממשוואת הכוחות עבור המסות, כח המשיכה גורם למתיחויות בחבלים:

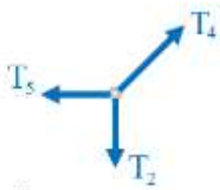
$$\sum F_y = -mg + T_1 = 0 \Rightarrow T_1 = mg$$
$$\sum F_y = -mg + T_2 = 0 \Rightarrow T_2 = mg$$

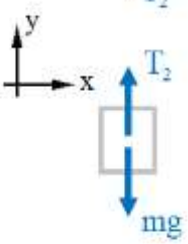
בגלל הסימטריה של הבעיה מספיק לקחת גוף אחד בלבד.

נרשום את משוואת הכוחות עבור אחד מצמתי החבלים (הם **חסרי מסה** ולכן סכום הכוחות הוא 0)

צומת ימני:

$$\sum \vec{F} = \vec{T}_2 + \vec{T}_4 + \vec{T}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T_4 \cos\alpha \\ T_4 \sin\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -T_5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$





ממשוואות אלה נקבל:

$$T_5 = T_4 \cos\alpha$$
$$T_4 \sin\alpha = mg$$

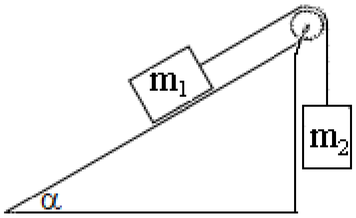
נציב $\alpha = 45°, g = 9.8_{m/s^2}$ ונקבל כי

$$T_1 = T_2 = mg = 98N$$
$$T_3 = T_4 = \frac{mg}{\sin\alpha} = \frac{98}{\sin 45} = 138.6N$$
$$T_5 = T_4 \cos\alpha = \frac{mg\cos\alpha}{\sin\alpha} = 98N$$

<u>תרגיל 6</u>

גוף עם מסה $m_1 = m$ נמצא על משטח משופע בזווית α. בין המשטח לגוף אין חיכוך. הוא קשור בחוט אידאלי שעובר דרך גלגלת אידאלית שנמצאת בראש המישור וממשיך ממנה למטה.

על קצה החוט תולים משקולת שגם המסה שלה היא $m_2 = m$.



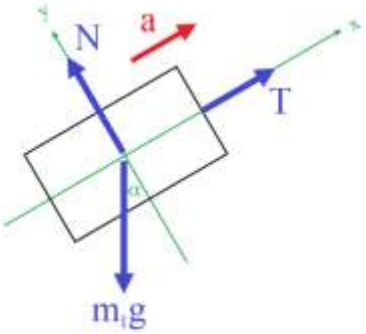
א. מה גודל התאוצה a של המערכת?

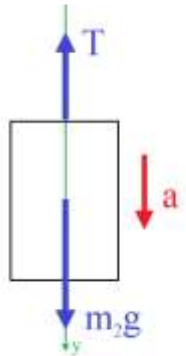
ב. מה גודל המתיחות T בחוט?

ג. מה המסה של המשקולת m_2 שצריך לתלות בשביל שהמערכת תשאר במנוחה?

ד. מה גודל המתיחות T במצב זה?

<u>פתרון:</u>





נבחר עבור m_1 את ציר x במקביל למשטח ואת הכיוון החיובי שלו ימינה-למעלה, ועבור המשקולת m_2 את ציר y כלפי מטה.

בגלל שהגופים מחוברים בחבל אחד, מובטח ש $\Delta y_2 = \Delta x_1$,

ולכן מגזירה ש $a_{2y} = a_{x1}$. נקרא לגודל זה a.

מהחוק השני:

$$\sum F_{1x} = m_1 a_{1x} \qquad \sum F_{2y} = m_2 a_{2y}$$

$$-mg\sin\alpha + T = ma \qquad mg - T = ma$$

מחיבור המשוואות מקבלים

$$mg(1-\sin\alpha) = 2ma$$

$$a = \frac{1-\sin\alpha}{2} g$$

ב. מהצבה במשוואה עבור $\sum F_{2y}$ (אפשר גם בשניה) מקבלים:

$$T = mg - ma = mg - m\left(\frac{1-\sin\alpha}{2} g\right) = \frac{1+\sin\alpha}{2} mg$$

<u>ג + ד</u>

בשביל שהמערכת תשאר במנוחה צריך

$$\sum F_{1x} = 0 \qquad \sum F_{2y} = 0$$

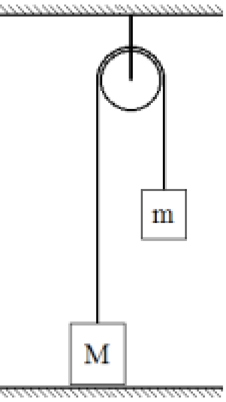
$$-mg\sin\alpha + T = 0 \qquad m_2 g - T = 0$$

ומכאן אפשר למצוא:

$$T = mg\sin\alpha$$

$$m_2 = \frac{T}{g} = \frac{mg\sin\alpha}{g} = m\sin\alpha$$

תרגיל 7



א. משקולת בעלת מסה $M=10kg$ מונחת על הרצפה. היא קשורה לחבל אידאלי שעובר דרך גלגלת אידאלית שתלויה על תקרה אידאלית.

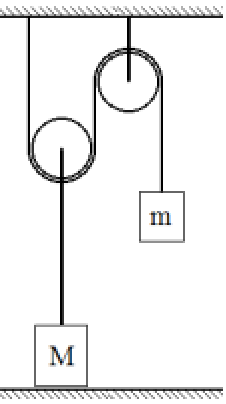
על צדו השני של החבל אפשר לתלות משקולות במסה m משתנה: $m=4kg\ ,\ 8kg\ ,\ 12kg$

עבור כל אחד מהערכים של m, בדקו האם המשקולת M תתנתק מהקרקע?

אם כן - מה התאוצות של המשקולות, ומה המתיחויות בשני החבלים? (זה שמחבר את המשקולות, וזה שעליו תלויה הגלגלת)

אם לא – מה הכוח הנורמאלי שהרצפה מפעילה על M, ומה המתיחויות בשני החבלים?

ב. מה המסה m שצריך לתלות בשביל ששתי המשקולות יוכלו להיות באוויר בשיווי משקל?



ג. משנים את המערכת, והפעם תולים את המשקולת M על חבל שקשור לציר של גלגלת ניידת.

דרך הגלגלת הניידת עובר חבל שקשור דרך הגלגלת שתלויה על התקרה, ששוב אפשר לתלות עליו את המשקולות השונות עם המסות $m=4kg\ ,\ 8kg\ ,\ 12kg$

עבור כל אחד מהערכים של m, בדקו האם המשקולת M תתנתק מהקרקע?

אם כן - מה התאוצות של המשקולות, ומה המתיחויות בשלושת החבלים?

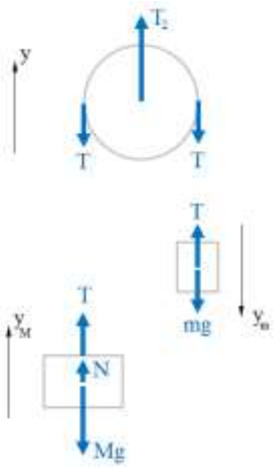
אם לא – מה הכוח הנורמאלי שהרצפה מפעילה על M, ומה המתיחויות בחבלים?

ד. במערכת זו, מה המסה m שצריך לתלות בשביל ששתי המשקולות יוכלו להיות באוויר בשיווי משקל?

פתרון

א. בגלל שהחבל והגלגלת אידאליים, אפשר לדבר על **ה**מתיחות בחבל שעובר בין המשקולות. נקרא למתיחות הזו סתם T.

נבחר עבור המשקולת התלויה m נבחר את ציר y_m כלפי מטה (הכיוון בו היא יכולה לנוע), ועבור המשקולת M שעל הקרקע את ציר y_M כלפי מעלה.



כאשר המשקולת M לא התנתקה והיא על הקרקע, המערכת בשיווי משקל.

עבור המשקולת התלויה, m מתקיים:

$$\sum F_{y_m}=0$$
$$mg-T=0 \quad \Rightarrow \quad T=mg$$

עבור המשקולת M:

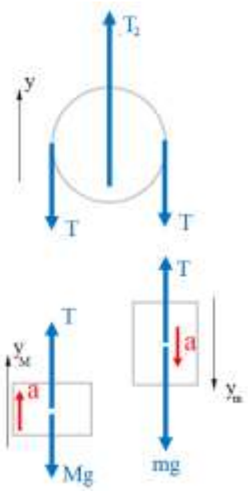
$$\sum F_{y_M}=0$$
$$-Mg+T+N=0 \quad \Rightarrow \quad N=Mg-T=Mg-mg=(M-m)g$$

בשביל שהמשקולת לא תתנתק חייב להתקיים $N>0$ (כי הנחנו שהוא כלפי מעלה, ואם הוא חיובי זה אומר שהנורמל אכן לכיוון זה, כלומר מונע מהמשקולת לפול מתחת לקרקע, ולא מנסה להחזיק אותה שלא תברח – מה שהוא לא יכול).
זה מתקיים כאשר $m<M$, כלומר עבור $m=4kg$ ו $m=8kg$

כאמור המתיחות בחבל שמחבר את המשקולות היא $T=mg$, שזה יוצא $T=4\cdot10=40_N$ ו $T=8\cdot10=80_N$
והכוח הנורמלי משלים את T למשקל של המשקולת שזה $N=Mg-T=100-40=60_N$, ו
$N=100-80=20_N$.

אם הגלגלת אידאלית המסה שלה זניחה, ואז הכוחות היחידים שפועלים עליה זה המתיחות T פעמיים כלפי מטה, והמתיחות T_2 של החוט שעליה התיר שלה תלוי, כלפי מעלה. לכן $T_2=2T=2\cdot40=80_N$ במקרה הראשון, ו
$T_2=2T=2\cdot80=160_N$ בשני.

כאשר המערכת מאיצה, ככל שהמשקולת m יורדת, המשקולת M עולה באותו גובה. בזכות הבחירה של כיווני הצירים זה אומר שגם y_m (שהוא כלפי מטה) וגם y_M שהוא כלפי מעלה, גדלים, ובאותו ערך. לכן גם $a_m=a_M$ ואפשר לקרוא לתאוצה המשותפת הזו a.



מהחוק השני של ניוטון עבור כל משקולת:

$$\sum F_{y_m}=ma_m \qquad \sum F_{y_M}=Ma_M$$
$$mg-T=ma \qquad -Mg+T=Ma$$

מחיבור המשוואות מקבלים:

$$(mg-T)+(-Mg+T)=ma+Ma$$
$$(m-M)g=(m+M)a$$
$$a=\frac{m-M}{m+M}g$$

ושוב רואים שרק כאשר $m>M$ אכן תהיה תאוצה למערכת (לכיוון השלילי היא לא יכולה להאיץ כאשר המשקולת Mעל הקרקע). המקרה היחידי בו זה מתקיים, הוא עבור $m=12kg$, בו $a=\frac{12-10}{12+10}\cdot10=\frac{20}{22}=0.909_{m/s^2}$.

את המתיחות אפשר למצוא מהצבה באחת המשוואות, למשל זאת עבור m, ומקבלים:

$$T=mg-ma=12\cdot10-12\cdot\frac{20}{22}=109_N$$

במקרה הזה זה גודל שקטן מ-mg (אבל גדול מ Mg).

אפשר גם קודם לקבל ביטוי פרמטרי:

$$T=mg-ma=\left(1-\frac{m-M}{m+M}\right)mg=\frac{(m+M)-(m-M)}{m+M}mg=\frac{2Mm}{m+M}g$$

וגם מהמשוואה עבור M

$$T=Ma+Mg=\left(\frac{m-M}{m+M}+1\right)Mg=\frac{m-M+m+M}{m+M}Mg=\frac{2mM}{m+M}g$$

גם כשהגלגלת מסתובבת, היא לא זזה (ובלאו הכי המסה שלה זניחה) אז עדיין $T_2=2T$, ובמקרה הזה הוא $T_2=218_N$.

ב. זה המקרה בו התאוצה שווה לאפס, ומהביטוי הפרמטי של התאוצה רואים שזה קורה עבור

$$a=\frac{m-M}{m+M}g=0 \quad\Rightarrow\quad m=M=10kg$$

היה אפשר להגיע לשם גם מתוך הביטוי הפרמטרי של הכוח הנורמלי ולראות שזה קורה עבור

$$N=(M-m)g \quad\Rightarrow\quad m=M=10kg$$

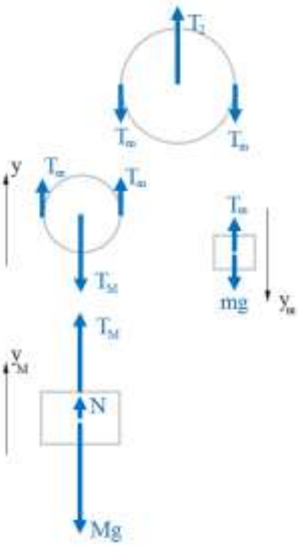
המקרה הזה הוא בדיוק הגבול בין המקרה שבו M על הקרקע, ובין זה שהיא מאיצה.

לסיכום החלק הזה:

	אם המשקולת M על הקרקע			אם שתי המשקולות באוויר		
מסת משקולת	כוח נורמלי על המשקולת M	מתיחות בחבל בין המשקולות	מתיחות בחבל שעליו הגלגלת	תאוצה	מתיחות בחבל שבין המשקולות	מתיחות בחבל שעליו הגלגלת
m כללי	$N=(M-m)g$	$T=mg$	$T_2=2mg$	$a=\frac{m-M}{m+M}g$	$T=\frac{2Mm}{m+M}g$	$T_2=\frac{4Mm}{m+M}g$
$m=4kg$	60_N	40_N	80_N	שלילי - לא ייתכן	ביטוי לא מתאים	ביטוי לא מתאים
$m=8kg$	20_N	80_N	160_N	שלילי - לא ייתכן	ביטוי לא מתאים	ביטוי לא מתאים
$m=10kg$ (מקרה גבול)	0_N	100_N	200_N	0	100_N	200_N
$m=12kg$	שלילי - לא ייתכן	ביטוי לא מתאים	ביטוי לא מתאים	$0.909_{m/s^2}$	109_N	218_N

ג. עכשיו יש לנו שלושה חבלים. החבל שמחובר את המשקולת M לגלגלת הניידת, שלמתיחות בו נקרא T_M, חבל שמחבר את משקולת התלויה m לתקרה, שלמתיחות בו נקרא T_m, והחבל שמחבר את המשקולת הנייחת לתקרה, שלו נקרא שוב T_2. נבחר את הצירים לכל משקולת כמו בסעיף א', ולגלגלת הניידת גם נשתמש בציר y_M כלפי מעלה.

כאשר המשקולת M לא התנתקה והיא על הקרקע, המערכת בשיווי משקל.



עבור המשקולת התלויה, m מתקיים:

$$\sum F_{y_m} = 0$$
$$mg - T_m = 0 \quad \Rightarrow \quad T_m = mg$$

עבור הגלגלת הניידת

$$\sum F_{y_O} = 0$$
$$-2T_m + T_M = 0 \quad \Rightarrow \quad T_M = 2T_m = 2mg$$

עבור המשקולת M:

$$\sum F_{y_M} = 0$$
$$-Mg + T_M + N = 0 \quad \Rightarrow \quad N = Mg - T_M = Mg - 2mg = (M - 2m)g$$

בשביל שהמשקולת לא תתנתק עדיין חייב להתקיים $N > 0$.

זה מתקיים כאשר $m < \frac{M}{2} = 5kg$, כלומר רק עבור $m = 4kg$.

במקרה זה כמובן $T_m = mg = 40_N$, ומהמשוואות על הגלגלות גם $T_M = 2T_m = 80_N$ וגם $T_2 = 2T_m = 80_N$.

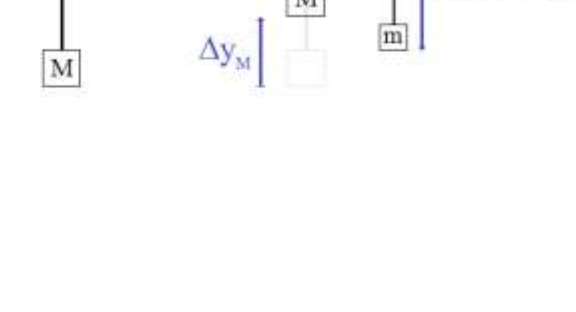
והכוח הנורמלי הוא מה שמשלים את בשביל להתנגד לכוח הכבידה:

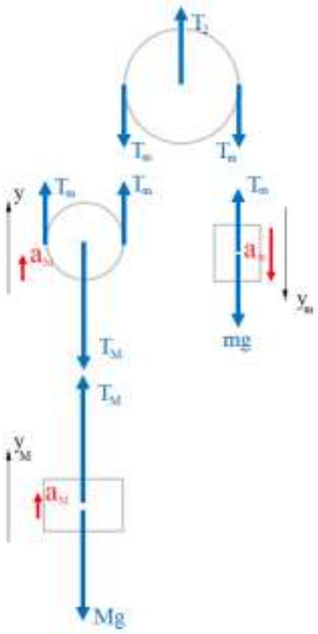
$N = Mg - T_M = Mg - 2mg = 100 - 80 = 20_N$.

כאשר המערכת מתחילה לזוז יש תאוצה שונה לשתי המשקולות. בשביל למצוא את הקשר בין התאוצות נמצא את הקשר הגאומטרי בין התזוזות של המשקולות.

כאשר המשקולת M עולה ב- Δy_M, הגלגלת הניידת עולה איתה, וגם שתי נקודות המגע של החוט שמחבר את התקרה למשקולת m. לכן משתחרר ממנו אורך ששווה ל- $2\Delta y_M$, מה שאומר שהמשקולת m יורדת ב $\Delta y_m = 2\Delta y_M$.

מכיוון שהתאוצה היא נגזרת שניה של המיקום זה אומר שגם $a_m = 2a_M$ (ואין הבדל סימן, כי דאגנו שהצירים יתאימו לכיווני התאוצות).





החוק השני עבור שתי המשקולות והגלגלת הניידת, נותן:

$$\sum F_{y_M} = Ma_M \qquad \sum F_{y_O} = 0\cdot a_M \qquad \sum F_{y_m} = ma_m$$
$$-Mg + T_M = Ma_M \qquad -T_M + 2T_m = 0 \qquad mg - T_m = ma_m$$

הצבה של המשוואות (כולל הקשר בין התאוצות) נותנת

$$-Mg + T_M = Ma_M$$
$$-Mg + 2T_m = Ma_M$$
$$-Mg + 2(mg - ma_m) = Ma_M$$
$$(-M + 2m)g - 2m(2a_M) = Ma_M$$
$$(2m - M)g = (4m + M)a_M$$
$$a_M = \frac{2m - M}{4m + M}g$$
$$a_m = 2a_M = \frac{4m - 2M}{4m + M}g$$

$$T_m = mg - ma_m = \left(1 - \frac{4m - 2M}{4m + M}\right)mg = \frac{(4m + M) - (4m - 2M)}{4m + M}mg = \frac{3mM}{4m + M}g$$
$$T_M = 2T_m = \frac{6mM}{4m + M}g$$

פה יש שני מקרים רלוונטיים.

עבור $m = 8kg$ (למרות שהמסה קטנה יותר מזו של המשקולת M היא מצליחה לגרום לה להתנתק ולמערכת להאיץ),

ועבור $m = 12kg$

$m = 12kg$	$m = 8kg$
$a_M = \frac{2m - M}{4m + M}g = \frac{2\cdot 12 - 10}{4\cdot 12 + 10}10 = 2.41_{m/s^2}$	$a_M = \frac{2m - M}{4m + M}g = \frac{2\cdot 8 - 10}{4\cdot 8 + 10}10 = 1.43_{m/s^2}$
$a_m = 2a_M = 4.83_{m/s^2}$	$a_m = 2a_M = 2.86_{m/s^2}$
$T_m = \frac{3mM}{4m + M}g = \frac{3\cdot 12\cdot 10}{4\cdot 12 + 10}10 = 62.1_N$	$T_m = \frac{3mM}{4m + M}g = \frac{3\cdot 8\cdot 10}{4\cdot 8 + 10}10 = 57.1_N$
$T_M = 2T_m = 124_N$	$T_M = 2T_m = 114_N$

גם פה בשני המקרים המתיחות על החבל שמחבר את הגלגלת הנייחת לתקרה הוא $T_2 = 2T_m = T_M$.

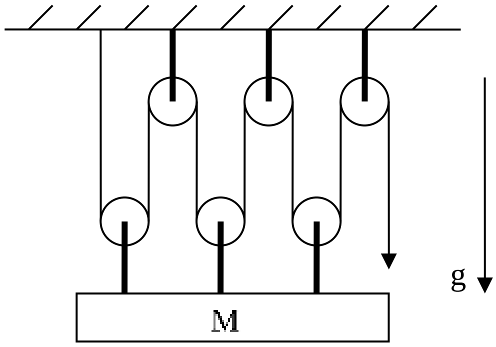
ד. שוב אפשר למצוא באיזה מקרה בדיוק יש איזון גם בלי הכוח הנורמלי של הרצפה, מהביטויים הפרמטריים.

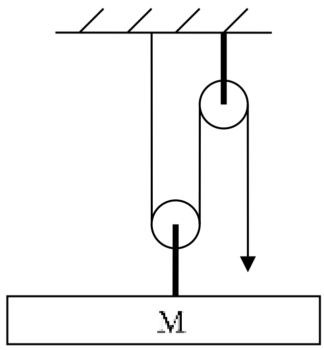
או מתי התאוצות מתאפסות: $$a_M = \frac{2m - M}{4m + M}g = 0 \quad \Rightarrow \quad m = \frac{M}{2} = 5kg$$

או מתי הכוח הנורמלי מתאפס: $$N = Mg - 2mg = 0 \quad \Rightarrow \quad m = \frac{M}{2} = 5kg$$

<u>תרגיל 8 - להגשה</u>

נתונה מערכת של מטען עם מסה M, גלגלות וחבלים אידיאלים. (הערה: בשאלה זו אין מספרים, התשובה צריכה להנתן באמצעות הקבועים בשאלה – במידה ויש בהם צורך)





שלושת הסעיפים הראשונים מתייחסים למערכת בציור הימני בה יש שתי גלגלות:

א. באיזה אורך יש למשוך את החבל על מנת שהמסה תתרומם מטר אחד?

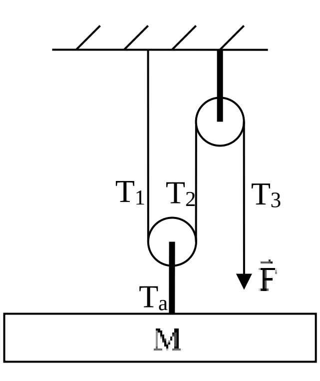
ב. מהו הכוח שיש להפעיל בשביל להשאיר המטען במקומו?

ג. מה הכוח שיש להפעיל בשביל להעלות את המטען במהירות קבועה?

ד. חזרו על סעיפים א' ו-ב' עבור המערכת בציור השמאלי.

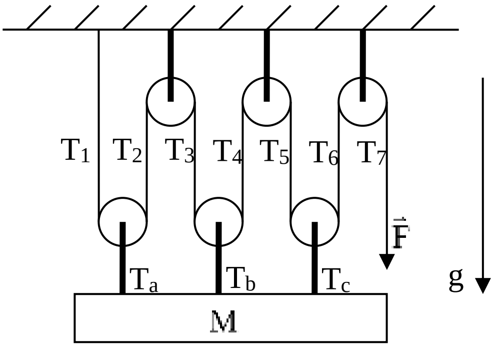
ה. אתם צריכים להעלות חפצים כבדים בבניין בו אין מעלית, ובמקום זה משתמשים במערכת של חבלים וגלגלות חסרי מסה. הניחו שלרשותכם עומדים מספר בלתי מוגבל של גלגלות אידיאליות וחבל אידיאלי ארוך כרצונכם, ואתם מתלבטים בכמה גלגלות כדאי להשתמש.
מהם הנימוקים בעד הרבה גלגלות? מה הנימוקים נגד?
במה תלוי מספר הגלגלות המינימלי האפשרי?

פיתרון:



א. נסמן את החבלים משמאל לימין כ 1, 2 ו-3. (למעשה כולם אותו חבל שעובר בגלגלות, אך נוח להתייחס אליהם כמספר חבלים). על מנת שהמטען יתרומם במטר, כל הגלגלת צריכה לעלות במטר, כלומר גם חבל 1 וגם חבל 2 מתקצרים במטר. סך ההתקצרות הכללי (לאורך החבל ה"מורכב" משלושת החבלים) הוא בשני מטר. מכיוון החבל לא באמת מתקצר, יש צורך לפצות על כך העזרות חבל 3, כלומר להאריך אותו השני מטר. ולכן בסך הכל, יש צורך למשוך את החבל בשני מטר.

ב. ממשוואת כוחות עבור המסה (<u>במנוחה</u>!) נקבל כי $T_a=Mg$ בגלל שהחוט והגלגלות אידאליים $T_1=T_2=T_3=F$. נרשום את משוואת הכוחות בציר y (כלפי מעלה) עבור הגלגלת השמאלית (שהיא <u>חסרת מסה</u> ולכן סכום הכוחות עליה הוא 0):



$$\sum F_y = T_1 + T_2 - T_a = 2F - Mg = 0 \Rightarrow F = Mg/2$$

ג. על מנת להעלות את המסה במהירות קבועה, יש לדרוש כי סכום הכוחות יהיה 0 (כמו בסעיף ב) ולכן הכוח הוא עדיין $Mg/2$.

ד. משיקולים דומים לסעיף א', יש צורך למשוך את החוט ב6 מטר על מנת שהמסה תתרומם במטר אחד. את הכח נמצא גם בצורה דומה: ממשוואת כוחות עבור כל גלגלת נקבל:

$$T_a = T_1 + T_2, \quad T_b = T_3 + T_4, \quad T_c = T_5 + T_6$$

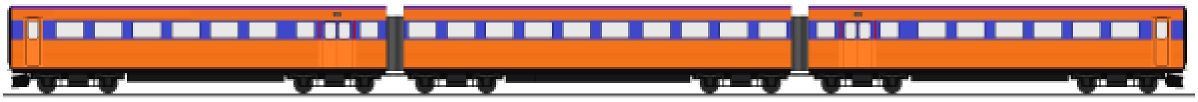
ועבור המטען:

$$T_a + T_b + T_c - Mg = 0 \Rightarrow F = Mg/6$$

ה. כמו תמיד, אף פעם לא צריך להגזים. ריבוי גלגלות אמנם מקל על הרמת המסות אך מגדיל את כמות החבל אותה צריך למשוך, כך למשל על ידי שימוש ב100 גלגלות אפשר להרים את המקרר שמסתו 100 ק"ג כאילו היתה לו מסה של ק"ג אחד. אך על מנת להגיע עד לקומה חמישית בגובה 15 מטר, צריך למשוך 1500 מטר של חבל, פעילות הגוזלת זמן רב.

בכל מקרה, המספר המינימלי של הגלגלות תלוי בכוח שהאדם יכול להפעיל, ובפרט ביחס בין המסה של הגוף אותו רוצים להרים, למסה של האדם (או המכשיר) שמושך את החבל. הכוח שהוא מפעיל חייב להיות קטן מהמשקל שלו (כוח הכובד שפועל עליו), אחרת הוא בעצמו ייתלה על החוט עם הרגלים באוויר! לכן מספר הגלגלות חייב להיות גדול מהיחס בין M לבין מסת האדם.

תרגיל 9



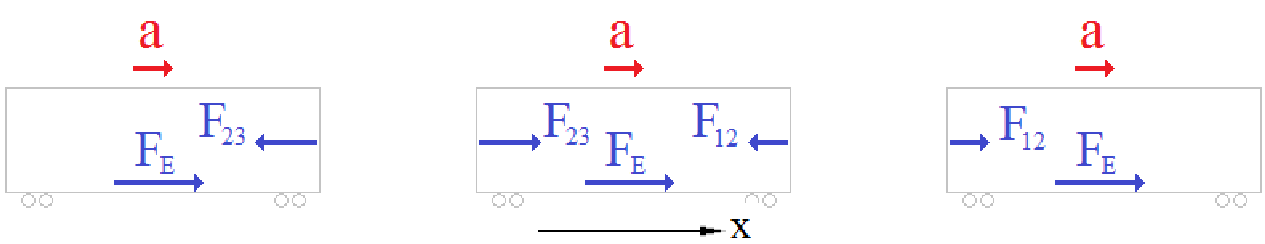
רכבת מורכבת משלושה קרונועים, שלכל אחד מהם מנוע עצמאי שגורם להפעלת כוח F_E על הקרון בו הוא נמצא.
מסת כל קרון היא m. בין כל זוג קרונות יכול לפעול כוח דחיפה, או משיכה. (בחישובים הניחו שהוא כוח דחיפה, ואם הסימן בסוף יצא שלילי, סימן שבמקרה הספציפי הוא דווקא משיכה).

א. מה התאוצה a של הרכבת, מה הכוח F_{12} בין הקרון הקדמי לאמצעי, ומה הכוח F_{23} בין הקרון האמצעי והאחורי, כשהרכבת מתחילה לנוע על מסילה אופקית, והמנועים פועלים בשיא כוחם?

ב. לרגל חניכת קו חדש, ראש הממשלה ושר התחבורה נוסעים ברכבת. לשם כך משריינים את אחד הקרונות ואחרי השיריון המסה שלו כפולה (כלומר 2m).
מה התאוצה a של הרכבת, ומה הכוחות F_{12} , F_{23} בין הקרונות, עבור כל בחירה של איזה קרון לשריין - את הקרון הקדמי, האמצעי, או האחורי?

ג. נסיעת ראש הממשלה הסתימה, מסירים את השיריון, והמסות של הקרונות שוב שווה.
אבל בגלל ההוצאות לא נשאר מספיק כסף לדלק, לכן מחליטים להפעיל את המנוע רק בשניים מהקרונועים.
מה התאוצה a של הרכבת, ומה הכוחות F_{12} , F_{23} בין הקרונות, עבור כל בחירה באיזה קרון לא להפעיל את המנוע – בקרון הקדמי, האמצעי או האחורי?

פתרון



נבחר את כיוון x ככיוון פעולת המנועים. בתרשימי הכוחות נניח שכיוון זה הוא ימינה.
בכל הסעיפים הקרונות נעים ביחד, לכן יש להם תאוצה משותפת $a_{1x} = a_{2x} = a_{3x} = a$
א. על הקרון הקדמי (קרון 1) פועל הכוח F_E שהמנוע שלו גורם (שלמעשה המסילה מפעילה דרך הגלגלים, אבל זה לא משנה בשלב זה) שהוא בטוח בכיוון החיובי, והכוח F_{12} שהקרון האמצעי מפעיל עליו, שאנחנו מניחים שהוא דחיפה, לכן גם אותו נכתוב כחיובי. ומהחוק השני:

$$\sum F_{1x} = m_1 a_{1x}$$
$$F_E + F_{12} = ma$$

על הקרון האמצעי (קרון 2) פועל הכוח F_E שהמנוע שלו גורם, הכוח F_{12} שהקרון הראשון מפעיל ייחשב כדחיפה, לכן בכיוון השלילי, והכוח F_{23} שהקרון האחורי מפעיל, שגם אותו אנחנו מחשיבים כדחיפה, ולכן הוא בכיוון החיובי.

מהחוק השני מקבלים:

$$\sum F_{2x} = m_2 a_{2x}$$
$$F_E - F_{12} + F_{23} = ma$$

על הקרון האחורי (קרון 3) פועל שוב כוח המנוע, והכוח שהקרון האמצעי מפעיל עליו, שנחשיב כשלילי, לכן:

$$\sum F_{3x} = m_3 a_{3x}$$
$$F_E - F_{23} = ma$$

מחיבור המשוואות מקבלים:

$$\left(F_E + F_{12}\right) + \left(F_E - F_{12} + F_{23}\right) + \left(F_E - F_{23}\right) = ma + ma + ma$$
$$3F_E = 3ma$$
$$a = \frac{F_E}{m}$$

אם נציב במשוואה עבור קרון 1, נקבל:
$$F_E + F_{12} = m\frac{F_E}{m} \quad \Rightarrow \quad F_{12} = 0$$

ובמשוואה עבור קרון 3, נקבל:
$$F_E - F_{23} = m\frac{F_E}{m} \quad \Rightarrow \quad F_{23} = 0$$

המשמעות של זה היא שאם כל הקרונות שווים (גם במסה, וגם בכוח), אז בלאו הכי יש להם את התאוצה שהיתה אם כל אחד היה נע לבד, שהיא $a = F_E / m$. לכם אין צורך בכוחות בין הקרונות, שידאגו שהתאוצה תהיה אחידה.

ב.

אם <u>הקרון הקדמי הוא המשורין</u>, אז המשוואות יהיו:

$$F_E + F_{12} = 2ma$$
$$F_E - F_{12} + F_{23} = ma$$
$$F_E - F_{23} = ma$$

וחיבור המשוואות ייתן:

$$\left(F_E + F_{12}\right) + \left(F_E - F_{12} + F_{23}\right) + \left(F_E - F_{23}\right) = 2ma + ma + ma$$
$$3F_E = 4ma$$
$$a = \frac{3F_E}{4m}$$

אם נציב במשוואה עבור קרון 1, נקבל:
$$F_E + F_{12} = 2m\frac{3F_E}{4m} \quad \Rightarrow \quad F_{12} = \frac{F_E}{2}$$

ובמשוואה עבור קרון 3, נקבל:
$$F_E - F_{23} = m\frac{3F_E}{4m} \quad \Rightarrow \quad F_{23} = \frac{F_E}{4}$$

כלומר בגלל שהמסה של הקרון הקדמי גדולה יותר, הוא היה צריך מנוע חזק יותר. אבל אם אין לו, שני הקרונות האחרים דוחפים אותו. האמצעי ישירות, והאחרון דרך הקרון האמצעי.

אם הקרון האמצעי הוא המשורין, אז המשוואות יהיו:

$$F_E + F_{12} = ma$$
$$F_E - F_{12} + F_{23} = 2ma$$
$$F_E - F_{23} = ma$$

וחיבור המשוואות ייתן שוב: $a = 3F_E / 4m$

אם נציב במשוואה עבור קרון 1, נקבל: $F_E + F_{12} = m\frac{3F_E}{4m} \quad \Rightarrow \quad F_{12} = -\frac{F_E}{4}$

ובמשוואה עבור קרון 3, נקבל: $F_E - F_{23} = m\frac{3F_E}{4m} \quad \Rightarrow \quad F_{23} = \frac{F_E}{4}$

הפעם הקרון עם המסה הגדולה יותר הוא האמצעי, לכן הקרון האחורי דוחף אותו, והקדמי מושך אותו.

אם הקרון האחורי הוא המשורין, אז המשוואות יהיו:

$$F_E + F_{12} = ma$$
$$F_E - F_{12} + F_{23} = ma$$
$$F_E - F_{23} = 2ma$$

וחיבור המשוואות ייתן שוב : $a = 3F_E / 4m$

אם נציב במשוואה עבור קרון 1, נקבל: $F_E + F_{12} = m\frac{3F_E}{4m} \quad \Rightarrow \quad F_{12} = -\frac{F_E}{4}$

ובמשוואה עבור קרון 3, נקבל: $F_E - F_{23} = 2m\frac{3F_E}{4m} \quad \Rightarrow \quad F_{23} = -\frac{F_E}{2}$

הפעם הקרון הראשון והשני מושכים את השלישי. השני ישירות, והקדמי דרך האמצעי.

ג.

אם המנוע בקרון הקדמי לא עובד, אז המשוואות יהיו:

$$F_{12} = ma$$
$$F_E - F_{12} + F_{23} = ma$$
$$F_E - F_{23} = ma$$

וחיבור המשוואות ייתן:

$$(F_{12}) + (F_E - F_{12} + F_{23}) + (F_E - F_{23}) = ma + ma + ma$$
$$2F_E = 3ma$$
$$a = \frac{2F_E}{3m}$$

אם נציב במשוואה עבור קרון 1, נקבל: $F_{12} = m\frac{2F_E}{3m} \quad \Rightarrow \quad F_{12} = \frac{2F_E}{3}$

ובמשוואה עבור קרון 3, נקבל: $F_E - F_{23} = m\frac{2F_E}{3m} \quad \Rightarrow \quad F_{23} = \frac{F_E}{3}$

כלומר בגלל שהמנוע שלו לא עובד, שני הקרונות האחרים דוחפים אותו. האמצעי ישירות, והאחרון דרך הקרון האמצעי.

אם <u>המנוע בקרון האמצעי לא עובד</u>, אז המשוואות יהיו:

$$\begin{aligned} F_E + F_{12} &= ma \\ -F_{12} + F_{23} &= ma \\ F_E - F_{23} &= ma \end{aligned}$$

וחיבור המשוואות שוב ייתן: $a = 2F_E / 3m$

אם נציב במשוואה עבור קרון 1, נקבל: $F_E + F_{12} = m\dfrac{2F_E}{3m} \quad \Rightarrow \quad F_{12} = -\dfrac{F_E}{3}$

ובמשוואה עבור קרון 3, נקבל: $F_E - F_{23} = m\dfrac{2F_E}{3m} \quad \Rightarrow \quad F_{23} = \dfrac{F_E}{3}$

כלומר בגלל שהמנוע של הקרון האמצעי לא עובד, הקדמי מושך אותו, והאחורי דוחף אותו.

אם <u>המנוע בקרון האחורי לא עובד</u>, אז המשוואות יהיו:

$$\begin{aligned} F_E + F_{12} &= ma \\ F_E - F_{12} + F_{23} &= ma \\ -F_{23} &= ma \end{aligned}$$

וחיבור המשוואות שוב ייתן: $a = 2F_E / 3m$

אם נציב במשוואה עבור קרון 1, נקבל: $F_E + F_{12} = m\dfrac{2F_E}{3m} \quad \Rightarrow \quad F_{12} = -\dfrac{F_E}{3}$

ובמשוואה עבור קרון 3, נקבל: $-F_{23} = m\dfrac{2F_E}{3m} \quad \Rightarrow \quad F_{23} = -\dfrac{2F_E}{3}$

כלומר בגלל שהמנוע של הקרון האחורי לא עובד, שני הקרונות שלפניו מושכים אותו. האמצעי ישירות, והקדמי דרך האמצעי.