BİRİNCİ MERTEBEDEN YÜKSEK DERECEDEN DİFERENSİYEL DENKLEMLER

Clairaut Diferensiyel Denklemi:

$$y = xy' + f(y') \quad , \quad y' = p$$

$y = xp + f(p)$ şeklindeki diferensiyel denkleme Clairaut dif denk. denir.

x'e göre türev alırsak

$$p = p + x\frac{dp}{dx} + f'(p)\frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dp}{dx}\left[x + f'(p)\right] = 0$$

Buradan $\frac{dp}{dx} = 0$ ve $x + f'(p) = 0$ denklemlerinin çözümleriyle Clairaut denkleminin genel çözümü bulunur.

$\frac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow p = c$ buradan $y = cx + f(c)$ doğru ailesi elde edilir.

$x + f'(p) = 0$ ile $y = xp + f(p)$ arasından p yok edilerek bir çözüm elde edilir. Bu çözüm hem aykırı çözüm hem de zarftır. (Bir eğri ailesinin bütün eğrilerine teğet olan eğri.)

Eğri ailesini temsil eden denklem ile, bu denk. parametreye göre kısmi türevi arasından parametre yok edilerek zarf denk. bulunur.

102

Sorular: As. denk çözümlerini bulunuz

1) $y = xp - e^p$

2) $y = xy' + \frac{1}{y'}$

3) $y = px + \sqrt{4+p^2}$

4) $(y-px)^2 = 1+p^2$

5) $y = xy' + y'^3$

6) $y = xy' - \frac{2\sqrt{3}}{9}\sqrt{y'^3}$

7) $y = xy' - y'^2$

Çözüm: 1) $y = xp - e^p$ $\qquad \frac{dy}{dx} = p$

x'e göre türev alalım.

$$p = p + x\frac{dp}{dx} - e^p\frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dp}{dx}(x - e^p) = 0$$

$$\left.\begin{aligned} x &= e^p \\ y &= xp - e^p \end{aligned}\right\} \qquad x = e^p \Rightarrow p = \ln x$$

$$\boxed{y = x\ln x - x}$$ Aykırı çözüm

$$\frac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow \begin{cases} p = c \\ y = xp - e^p \end{cases} \Rightarrow \boxed{y = cx - e^c}$$ Parametreli çözüm

2) $y = xy' + \frac{1}{y'}$ $\qquad y' = p$

$y = xp + \frac{1}{p}$ $\qquad$ x'e göre türev alalım

$p = p + x\frac{dp}{dx} - \frac{1}{p^2}\frac{dp}{dx}$

$\Rightarrow \frac{dp}{dx}\left(x - \frac{1}{p^2}\right) = 0$

$\frac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow p = c$

$p = c$ ise $\boxed{y = cx + \frac{1}{c}}$ parametreli çözüm

$x - \frac{1}{p^2} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{p^2}$

$x = \frac{1}{p^2} \Rightarrow p^2 = \frac{1}{x}$

$y = px + \frac{1}{p} \Rightarrow y = \frac{x}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}$

$\Rightarrow \boxed{y^2 = 4x}$ aykırı çözüm

13) $y = px + \sqrt{4+p^2}$ x'e göre türev alalım

$$p = p + x\frac{dp}{dx} + \frac{\cancel{2}p}{\cancel{2}\sqrt{4+p^2}}\frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dp}{dx}\left(x + \frac{\cancel{2}p}{\cancel{2}\sqrt{4+p^2}}\right) = 0$$

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{dp}{dx} = 0 \\ y = px + \sqrt{4+p^2} \end{array}\right. \Rightarrow p = c \Rightarrow \boxed{y = cx + \sqrt{4+c^2}}$$ parametreli çözüm

$$\left\{\begin{array}{l} x + \frac{p}{\sqrt{4+p^2}} = 0 \\ y = px + \sqrt{4+p^2} \end{array}\right. \Rightarrow \frac{2p}{2\sqrt{4+p^2}} = -x$$

$$2p = -2x\sqrt{4+p^2}$$

$$4p^2 = 4x^2(4+p^2)$$

$$4p^2 = 16x^2 + 4p^2x^2$$

$$4p^2 - 4p^2x^2 = 16x^2$$

$$4p^2(1-x^2) = 4x^2$$

$$p^2 = \frac{4x^2}{4(1-x^2)} \Rightarrow p = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\boxed{y = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{4 + \frac{x^2}{1-x^2}}}$$

Aykırı çözüm

4) $(y-px)^2 = 1+p^2$

$y = px \mp \sqrt{1+p^2}$ x'e göre türev alalım

$$\cancel{p} = \cancel{p} + x\frac{dp}{dx} + \frac{2p}{2\sqrt{1+p^2}}\frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dp}{dx}\left(x + \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right) = 0$$

$$\frac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow p = c \Rightarrow \boxed{(y-cx)^2 = 1+c^2}$$ Parametrik çözüm

$$x + \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} = 0 \Rightarrow \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} = -x \Rightarrow p^2 = x^2(1+p^2)$$

$$\Rightarrow p^2 = x^2 + x^2p^2$$

$$\Rightarrow p^2(1-x^2) = x^2$$

$$\Rightarrow p^2 = \frac{x^2}{1-x^2}$$

$$\Rightarrow p = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\left\{\begin{array}{l} y = px + \sqrt{1+p^2} \\ p = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} \end{array}\right. \Rightarrow \boxed{y = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}}$$ Aykırı çözüm

+5) $y = xy' + y'^3$ x'e göre türev alalım.

$y = xp + p^3$

$\Rightarrow p = p + x\dfrac{dp}{dx} + 3p^2\dfrac{dp}{dx}$

$\Rightarrow \dfrac{dp}{dx}(x + 3p^2) = 0$

$\begin{cases} y = xp + p^3 \\ p = c \end{cases} \Rightarrow \boxed{y = cx + c^3}$ parametreli çözüm

$x + 3p^2 = 0 \Rightarrow x = -3p^2 \Rightarrow p^2 = -\dfrac{x}{3}$

Buradan $\boxed{y^2 = -\dfrac{4}{27}x^3}$ Aykırı çözümü bulunur.

+6) $y = xy' - \dfrac{2\sqrt{3}}{9}\sqrt{y'^3}$ $y' = p$ dersek

$y = xp - \dfrac{2\sqrt{3}}{9}\sqrt{p^3}$ x'e göre türev alalım.

$p = p + x\dfrac{dp}{dx} - \dfrac{2\sqrt{3}}{9}\dfrac{3}{2}\sqrt{p}\dfrac{dp}{dx}$

veya

$\dfrac{dp}{dx}\left(x - \dfrac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{p}\right) = 0$

$\dfrac{dp}{dx} = 0$ dan $\boxed{y = cx - \dfrac{2\sqrt{3}}{9}\sqrt{c^3}}$ ~~Aykırı~~ parametreli çözümü bulunur.

Sabit Katsayılı Lineer Homojen olmayan Denklemler.

Belirsiz katsayılar Metodu

$a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = F(x)$ denklemi verilmiş olsun. $F(x)$ fonksiyonunun polinom, üstel ve trigonometrik (sinüs, cosinüs) şeklindeki fonksiyonlardan herhangi biri olması durumunda veya bunların çarpımı şeklinde olması durumunda özel çözüm tahmin edilebilir. Buna göre,

i) $F(x) = P_n(x)$ ise

$y_p = Q_n(x)$ şeklinde aranır.

Yani $F(x)$ n-yinci dereceden bir polinom ise y_p yani özel çözümde bu şekilde bir polinom olarak araştırılır.

Eğer karakteristik denklemin k-tane kökü 0 (sıfır) ise homojen kısmın genel çözümü polinom şeklinde olacağından

$y_p = x^k Q_n(x)$ şeklinde seçilmelidir.

Ör $y'' + 2y' + 2y = x+1$ denk genel çözümünü bulunuz.

Denklemin homojen kısmına ait genel çözüm

$r^2 + 2r + 2 = 0 \quad r_{1,2} = -1 \mp i$ ile

$y_h = e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$ şeklindedir.

$F(x) = x+1$ birinci derece polinom old. dan

$y_p = Ax+B$ şeklinde seçilerek A ve B katsayıları bulunabilir. y_h içinde polinomal ifade yok yani karakteristik denklemin kökleri içinde "0" yok.

$y_p = Ax+B$ çözüm olacak ise denklemi sağlamalıdır.

Buna göre $y_p' = A$, $y_p'' = 0$ değerleri denklemde yerlerine yazılırsa

$A = \frac{1}{2}$ $B = 0$ olarak bulunur.

Böylece $y_p = \frac{1}{2}x$ olup

$$y_g = y_h + y_p$$

$$\boxed{y_g = e^{-x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x) + \frac{1}{2}x}$$

olarak elde edilir.

Ör $y''' + y' = x^2+1$ denk. ye...

$r^3 + r = 0 \Rightarrow r(r^2+1)=0$ olup

$r_1 = 0 \quad r_{2,3} = \mp i$ olur

$y_h = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x$

$y_p = Ax^2 + Bx + C$ olarak seçilemez.

Çünkü karakteristik denklemin bir kökü "0"

ve y_h ile y_p toplandığında lineer bağımsızlık

korunmamış olur. Bu nedenle

$y_p = x(Ax^2+Bx+C) = Ax^3 + Bx^2 + Cx$

şeklinde seçilmeli ve çözüm sağlanacak şekilde

A, B ve C katsayıları bulunmalıdır.

BİRİNCİ DERECEDEN VE BİRİNCİ MERTEBEDEN DİFERENSİYEL DENKLEMLERİ

Birinci mertebe ve birinci dereceden bir diferensiyel denklem şu şekilde yazılabilir

$P = P(x,y) \quad Q = Q(x,y)$ olmak üzere

$$P\,dx + Q\,dy = 0$$

Değişkenlerine ayrılabilen denklemler:

$$X_1 y_1\, dx + X_2 y_2\, dy = 0 \qquad X_1 = X_1(x) \quad y_1 = y_1(y)$$
$$X_2 = X_2(x) \quad y_2 = y_2(y)$$

$$\frac{X_1}{X_2}\,dx + \frac{y_2}{y_1}\,dy = 0 = \left(f(x)\,dx + g(y)\,dy = 0 \right)$$

Ör: $(x-2)y^3\,dx + x^4(y-3)\,dy = 0$ denk çöz. bulunuz

$$\frac{x-2}{x^4}\,dx + \frac{y-3}{y^3}\,dy = 0$$

$$\left(\frac{1}{x^3} - \frac{2}{x^4}\right)dx + \left(\frac{1}{y^2} - \frac{3}{y^3}\right)dy = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2x^2} + \frac{2}{3x^3} - \frac{1}{y} + \frac{3}{2y^2} = c$$

Ör: $x\sin y\,dx + (x^2+1)\cos y\,dy = 0$ denk çöz. bulunuz

$$\frac{x}{x^2+1}\,dx + \frac{\cos y}{\sin y}\,dy = 0$$

$$\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \ln\sin y = c_0 \qquad \ln c = 2c_0$$

$$\ln(x^2+1) + 2\ln\sin y = \ln c$$
$$(x^2+1)\sin^2 y = c$$

$\sin y = 0$

$$\left.\begin{array}{l} y = 2k\pi \\ y = (2k+1)\pi \end{array}\right\} \Rightarrow y = n\pi$$

$y = n\pi$ $c=0$'a karşılık geldiğinden ayrı bir çözüme gerek yok.

SORULAR:

1) Aş. dif. denklemlerin çözümlerini bulunuz.

a) $a\left[x\frac{dy}{dx} + 2y\right] = xy\frac{dy}{dx}$ $\qquad y(2a) = a$

Çözüm:

$a\left[x\frac{dy}{dx} + 2y\right] = xy\frac{dy}{dx}$ $\qquad$ dx ile çarpalım

$a(x\,dy + 2y\,dx) = xy\,dy$

$ax\,dy - xy\,dy + 2ay\,dx = 0$

$2ay\,dx + (a-y)x\,dy = 0$ $\qquad$ (Her iki tarafı y ile bölelim)

$2a\,dx + \frac{(a-y)}{y}x\,dy = 0$ $\qquad$ (Her iki tarafı x ile bölelim)

$\frac{2a}{x}dx + \frac{(a-y)}{y}dy = 0$

$2a\ln x + a\ln y - y = \ln c$

$\ln x^{2a} + \ln y^{a} - \ln c = y$

$\Rightarrow y = \ln\frac{x^{2a}y^{a}}{c}$

x yerine 2a, y yerine a yazalım

$(2a)^{2a}a^{a} = ce^{a} \Rightarrow c = 4^{a}a^{3a}e^{-a}$

$\Rightarrow \boxed{x^{2a}y^{a} = 4^{a}a^{3a}e^{y-a}}$

b) $xy^2\,dx + e^x\,dy = 0 \qquad x \to \infty$ için $y \to \frac{1}{2}$

Çözüm: $\frac{x}{e^x}\,dx + \frac{1}{y^2}\,dy = 0$ (Her iki tarafı y^2e^x'e bölelim)

$$\int x e^{-x}\,dx + \int y^{-2}\,dy = \int 0$$

$$\boxed{\int e^x \underbrace{p(x)}_{\text{Polinom}}\,dx = e^x\left(p - p' + p'' - p''' + \cdots\right) + c}$$

$-x = t$

$dx = -dt$

$$\int t e^t\,dt - \frac{1}{y} = c$$

$$e^t(t-1) - \frac{1}{y} = c$$

$$e^{-x}(-x-1) - \frac{1}{y} = c \Rightarrow \lim_{x\to\infty} e^{-x}(-x-1) - \frac{1}{\frac{1}{2}} = c$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-x-1}{e^x} - 2 = c \qquad \lim_{x\to\infty} -\frac{1}{e^x} = c \Rightarrow c = -2$$

$$\boxed{e^{-x}(x+1) + \frac{1}{y} = 2}$$

c) $(xy + x)\,dx = (x^2y^2 + x^2 + y^2 + 1)\,dy$

Çözüm: $x(y+1)\,dx = [x^2(y^2+1) + (y^2+1)]\,dy$

$$x(y+1)\,dx = (y^2+1)(x^2+1)\,dy$$

$$\frac{2x}{2x^2+1}\,dx = \frac{y^2+1}{y+1}\,dy \qquad \left[\frac{y^2+1}{y+1} = y - 1 + \frac{2}{y+1}\right]$$

$$\frac{1}{2}\ln(1+x^2) = \frac{y^2}{2} - y + 2\ln(y+1) + \ln c$$

$$\frac{\ln\sqrt{1+x^2}}{(y+1)^2 c} = \frac{y^2}{2} - y \Rightarrow \frac{\sqrt{1+x^2}}{(y+1)^2 c} = e^{\frac{y^2}{2} - y}$$

—o—

Ödev

• d) $y' = [\sin\ln x + \cos\ln x + a]y$

$$\frac{dy}{y} = (\sin\ln x + \cos\ln x + a)\,dx$$

$$\ln y = \int \sin\ln x\,dx + \int \cos\ln x\,dx + ax + \ln c$$

$\int \sin\ln x\,dx \qquad u = \sin\ln x \qquad du = \cos\ln x\,\frac{1}{x}$

$\qquad\qquad\qquad dv = dx \qquad v = x$

$$= x\sin\ln x - \int x\cos\ln x\,\frac{1}{x}\,dx = x\sin\ln x - \int \cos\ln x\,dx$$

$$\ln y = x\sin\ln x - \int \cos\cancel{\ln x}\,dx + \int \cos\cancel{\ln x}\,dx + ax + \ln c$$

$$\ln y = x\sin\ln x + ax + \ln c$$

$$\Rightarrow \boxed{y = c e^{x\sin\ln x + ax}}$$

—o—

Ödev

• 2) $(1+2x)y\,dy + (1+y^2)\,dx = 0$ dif denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$\frac{y}{1+y^2}\,dy + \frac{dx}{1+2x} = 0$ Her iki tarafın integrali alınırsa

$$\frac{1}{2}\ln(1+y^2) + \frac{1}{2}\ln(1+2x) = \ln c$$

$$\ln\sqrt{(1+y^2)(1+2x)} = \ln c$$

$$(1+y^2)(1+2x) = \sqrt{c} = c_1$$

$$\boxed{y^2 = \frac{c_1}{1+2x} - 1}$$ olarak bulunur

Ödev 3) $y' - xy^2 + x = 0$ dif. denkleminin genel çöz. bulunuz.

Çözüm: Verilen denklem

$y' - x(y^2-1) = 0$ şeklinde düzenlenirse

$\frac{dy}{y^2-1} - x\,dx = 0$ ifadesinde integral alınarak

$\frac{1}{2}\ln(y-1) - \frac{1}{2}\ln(y+1) - \frac{x^2}{2} = \ln c$

bulunur. Buradan genel çözüm

$$\boxed{\frac{y-1}{y+1} = c e^{x^2}}$$ olarak bulunur

---

4) $\sin x \cos^2 y\,dx + \cos^2 x\,dy = 0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz

Çözüm: $\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx + \frac{dy}{\cos^2 y} = 0$ integral alınırsa

$$\sec x + \tan y = c$$

$$\Rightarrow \tan y = c - \sec x$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \arctan(c - \sec x)}$$ elde edilir.

---

5) $(x+y)\,dx + dy = 0$ dif denk çöz bulunuz.

Çözüm: $\dfrac{dy}{dx} = -(x+y)$

[Not: $\dfrac{dy}{dx} = f(ax+by+c)$ biçiminde ise
$ax+by+c = z$ değişken değiştirmesi yapılır]

Buradan $\dfrac{dy}{dx} = -(x+y)$ ise

$$x+y = z \Rightarrow 1 + \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 1$$

$$\frac{dz}{dx} - 1 = -z \Rightarrow \frac{dz}{dx} = 1-z \Rightarrow \int \frac{dz}{1-z} = \int dx$$

$$\Rightarrow \ln(1-z) = x + \ln c$$

$$\ln\left(\frac{1-z}{c}\right) = x \Rightarrow 1-z = ce^{x}$$

$$\Rightarrow \boxed{1 - x - y = ce^{x}}$$

6) $2\,dy = [\cos x \cos 2y + \sin x \sin 2y + 1]\,dx$ dif denkleminin çözümünü bulunuz.

Çözüm: $2\dfrac{dy}{dx} = \cos(x-2y) + 1$

$$X-2Y=z \Rightarrow 1-2\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx}$$

$$\Rightarrow 2\frac{dy}{dx}=1-\frac{dz}{dx}$$

Buradan

$$\cancel{1}-\frac{dz}{dx}=\cos z+\cancel{1} \Rightarrow \frac{dz}{\cos z}=-dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{dz}{\cos z}+x=\ln c$$

$$\int \frac{dx}{\sin x}=\ln\tan\frac{x}{2}+c$$

$$\int \frac{dx}{\cos x}=\int \frac{dx}{\sin(\frac{\pi}{2}-x)}$$

$$\frac{\pi}{2}-x=t \qquad -dx=dt$$

$$\int -\frac{dt}{\sin t}=-\ln\tan\frac{t}{2}+c$$

$$=-\ln\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)+c$$

$$\Rightarrow -\ln\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{z}{2}\right)+x=\ln c$$

$$\Rightarrow -\ln\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x-2y}{2}\right)+x=\ln c$$

$$\Rightarrow \boxed{e^x=c\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x-2y}{2}\right)}$$ olarak elde edilir.

7) Bir memleketin nüfusu, o memleketteki insan sayısına orantılı olarak değişiyor. Orantı sabiti 0,028 ve 1990 yılında 60 milyonluk nüfus olduğuna göre 2000 yılındaki nüfusu bulunuz.

Çözüm

m: doğum oranı Δy: nüfustaki artış

n: ölüm oranı Δt: zaman

$y(t)$: zamana bağlı nüfus

$$\Delta y = m y(t)\Delta t - n y(t)\Delta t$$

$$= (m-n)\, y(t)\Delta t \qquad m-n=k$$

$$= k\, y(t)\Delta t \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta t} = k y(t) \qquad k = 0{,}028$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} k y(t) \Rightarrow \frac{dy}{dt} = k y(t)$$

$y(0)=60$ $\qquad \dfrac{dy}{y} = k\,dt \Rightarrow \ln y = kt + c$

$$\Rightarrow y = c e^{kt}$$

$$c = 60$$

$$\Rightarrow y(t) = 60 e^{0{,}028 \cdot t} \qquad t = 10$$

$$y(10) = (60) e^{(0{,}028)\cdot(10)}$$

$$= 60 \cdot (1.3231)$$

$$= 79{,}3860 \text{ milyon}$$

---

8) $y' = (3x+3y+8)^2$ dif denk genel çöz. bulunuz

Çözümü $\quad u = 3x+3y+8$ dönüşümü yapılırsa

$$\frac{du}{dx} = 3 + 3\frac{dy}{dx}$$

olacağından

$$\frac{1}{3}\left(\frac{du}{dx} - 3\right) = u^2 \quad \text{veya}$$

10) $\frac{e^{\cos x}}{\cos^2 y} y' - \sin x \tan y = 0$ dif. denk.

genel çöz. bulunuz.

Çözümü $u = \tan y$ $u' = \frac{y'}{\cos^2 y}$ Dönüşümü ile

$e^{\cos x} u' - u \sin x = 0$ elde edilir

$\frac{du}{u} - \sin x \, e^{-\cos x} = 0$

$\Rightarrow \ln u - e^{-\cos x} = \ln c$

$\ln \frac{u}{c} = e^{-\cos x} \Rightarrow u = c e^{e^{-\cos x}}$ elde edilir

$u = \tan y$ konulursa

$\tan y = c e^{e^{-\cos x}}$ veya

$y = \arctan(c e^{e^{-\cos x}})$ bulunur

Homogen Diferensiyel Denklemler:

Bir $f(x,y)$ fonksiyonu

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x,y)$$

şeklinde yazılabiliyorsa n-inci dereceden homogendir denir. $P(x,y)$ ve $Q(x,y)$ homogen fonksiyonlar olmak üzere $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$ şeklindeki bir diferensiyel denkleme "Homogen Diferensiyel Denklem" denir. Homogen Denklemler $y = vx$ transformasyonu ile değişkenlerine ayrılabilen denklemlere dönüşürler. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ şek. yazılabiliyorsa denk. homogendir denir.

Örnek $f(x,y) = x^4 - x^3 y$ fonksiyonu 4. dereceden homogendir. Gerçekten;

$$f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^4 - (\lambda x)^3 (\lambda y)$$
$$= \lambda^4 x^4 - \lambda^4 x^3 y = \lambda^4 (x^4 - x^3 y) = \lambda^4 f(x,y)$$

Örnek: $f(x,y) = e^{y/x} + \tan\frac{y}{x}$ 0. dereceden homogendir. Çünkü

$$f(\lambda x, \lambda y) = e^{\lambda y/\lambda x} + \tan\frac{\lambda y}{\lambda x} = e^{y/x} + \tan\frac{y}{x} = \lambda^0 f(x,y)$$

Örnek: $f(x,y) = x^2 + \sin x \sin y$ Homogen değildir

Çünkü $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 x^2 + \sin(\lambda x)\cos(\lambda y) \neq \lambda^n f(x,y)$

Alıştırmalar

1) $Mdx + Ndy = 0$ denklemi homogen iken $y = vx$ transformasyonu ile değişkenlerine ayrılacaktır. Gösteriniz

<u>Çözüm:</u> $Mdx + Ndy = 0$ n inci dereceden homogen ise

$$Mdx + Ndy = x^n \{M_1(\tfrac{y}{x})dx + N_1(\tfrac{y}{x})dy\} = 0 \text{ yazılabilir}$$

ve $M_1(\frac{y}{x})dx + N_1(\frac{y}{x})dy = 0$ dır

$Y = vx, \quad dy = vdx + xdv$ transformasyonu bunu

$M_1(v)dx + N_1(v)\{vdx + xdv\} = 0$ veya $\{M_1(v) + vN_1(v)\}dx + xN_1(v)dv = 0$

şekline indirger ve sonuç olarak

$$\frac{dx}{x} + \frac{N_1(v)dv}{M_1(v) + vN_1(v)} = 0$$ elde edilir. Bu da değişkenlerine ayrılmış denklemdir.

---

2) $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$ denkleminin çözümünü bulunuz.

<u>Çözüm:</u>

$$xdy = (\sqrt{x^2 - y^2} + y)\,dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{x^2 - y^2} + y}{x}$$ (Homogen) (dy ve dx in katsayıları I. dereceden homogen old. dan)

$$y = vx \Rightarrow y' = v'x + v$$

Buradan

$$v'x + v = \frac{\sqrt{x^2 - v^2x^2} + vx}{x} = \sqrt{1 - v^2} + v$$

$$\Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \sqrt{1 - v^2} \Rightarrow \frac{dv}{\sqrt{1 - v^2}} = \frac{dx}{x}$$

$\Rightarrow \arcsin v = \ln x + \ln c = \ln cx \Rightarrow v = \sin(\ln cx)$

$\Rightarrow y = x \sinh(cx)$

ikinci bir çözüm $v = \mp 1$ $\quad y = \pm x \quad$ $x\frac{dv}{dx} = \sqrt{1-v^2}$ sağ tarafı

sıfır yapan değerlere bakıyoruz

• 3) $\left(2x\sinh\frac{y}{x} + 3y\cosh\frac{y}{x}\right)dx - 3x\cosh\frac{y}{x}\,dy = 0$ denklemini

çözünüz

<u>Çözüm:</u> Denklem birinci derecede homojendir

$f(tx,ty) = \left(2tx\sinh\frac{ty}{tx} + 3ty\cosh\frac{ty}{tx}\right)dx - 3tx\cosh\frac{ty}{tx}\,dy = 0$

$= t\left[\left(2x\sinh\frac{y}{x} + 3y\cosh\frac{y}{x}\right)dx - 3x\cosh\frac{y}{x}\,dy\right] = 0$

$f(tx,ty) = t f(x,y)$ $\quad$ 1. dereceden homojen.

$y = vx$ dönüşümü uygulanırsa

$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$

$\left(2x\sinh\frac{vx}{x} + 3vx\cosh\frac{vx}{x}\right)dx - 3x\cosh\frac{vx}{x}(v\,dx + x\,dv)$

$(2x\sinh v + 3vx\cosh v)\,dx - 3xv\cosh v\,dx - 3x^2\cosh v\,dv = 0$

$2x\sinh v\,dx - 3x^2\cosh v\,dv = 0$ $\quad$ x'e bölelim

$2\sinh v\,dx - 3x\cosh v\,dv = 0$

Değişkenlerine ayırırsak

$$2\,\frac{dx}{x} - 3\,\frac{\cosh v}{\sinh v}\,dv = 0$$

$$\Rightarrow 2\ln x - 3\ln\sinh v = \ln c$$

$$\Rightarrow x^2 = c\sinh^3 v \Rightarrow \boxed{x^2 = c\sinh^3\frac{y}{x}}$$

—o—

4) $x^2y\,dx - (x^3 - y^3)\,dy = 0$ denkleminin çözümünü bulunuz

Çözüm: $f(tx,ty) = t^2x^2ty\,dx - (t^3x^3 - t^3y^3)\,dy = 0$

$= t^3[x^2y\,dx - (x^3 + y^3)\,dy] = 0$

$= t^3 f(x,y)$

3. dereceden homojen.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2y}{x^3 - y^3} \qquad y = vx \Rightarrow y' = v'x + v$$

$$v'x + v = \frac{v}{1 - v^3} \Rightarrow v'x = \frac{v}{1-v^3} - v \Rightarrow v'x = \frac{v - v + v^4}{1 - v^3}$$

değişkenlerine ayırırsak

$$\frac{1 - v^3}{v^4}\,dv - \frac{dx}{x} = 0$$ elde edilir. İntegral alırsak

$$-\frac{1}{3v^3} - \ln v - \ln x = \ln c$$

$$-\frac{1}{3v^3} = \ln cxv$$ ya da

$3v^3 \ln cxv + 1 = 0$ bulunur $v = \frac{y}{x}$ yazarsak

$3\frac{y^3}{x^3} \ln cx\frac{y}{x} + 1 = 0$ ya da

$\boxed{3y^3 \ln cy + x^3 = 0}$ bulunur

—o—

5) $(2ye^{\frac{y}{x}} - x)y' - 2x + y = 0$ denk. çöz. bulunuz.

Çözüm: 1. dereceden homogen. (Ödev)

—o—

6) $(2x+3y)dx + (y-x)dy = 0$ Denklemini çözünüz.

1. dereceden homogen. $y = vx \Rightarrow y' = v'x + v$

$\Rightarrow dy = v\,dx + x\,dv$

Buradan

$(2+3v)dx + (v-1)(v\,dx + x\,dv) = 0$ veya

$(v^2+2v+2)dx + x(v-1)dv = 0$. bulunur

Değişkenlerine ayırırsak

$$\frac{dx}{x} + \frac{v-1}{v^2+2v+2}dv = \frac{dx}{x} + \frac{1}{2}\frac{2v+2}{v^2+2v+2}dv - \frac{2\,dv}{(v+1)^2+1} = 0$$

Buradan integral alırsak

$$\ln x + \frac{1}{2}\ln(v^2+2v+2) - 2\arctan(v+1) = c_1$$

Sonuç olarak

$\boxed{\ln(y^2+2xy+2x^2) - 4\arctan\frac{x+y}{x} = c}$

elde edilir.

Homogen Hale Getirebilen Diferensiyel Denklemler:

$$(ax+by+c)\,dx+(a'x+b'y+c')\,dy=0$$

diferensiyel denklemi homogen olmamasına rağmen basit bir değişken değiştirmesi ile homogen hale getirilebilir.

$ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$ düzlemde iki doğruyu gösterirler.

$$\Delta=\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}=ab'-a'b=0 \text{ ise bu iki}$$

doğru paralel, sıfır değilse ($\Delta\neq 0$) bu iki doğru bir noktada kesişirler.

(*) $\Delta\neq 0$ hali: $ax+by+c=0$ ve $a'x+b'y+c'=0$ doğrularının kesim noktası (α,β) olmak üzere

$$x=\alpha+\xi \quad , \quad y=\beta+\eta$$

değişken transformasyonu yapalım. $dx=d\xi$, $dy=d\eta$ olacağından dif. denk.

$$(a\xi+b\eta)\,d\xi+(a'\xi+b'\eta)\,d\eta=0$$

halini alır. Bu da homogen bir dif denk. dir.

(*) $\Delta = 0$ hali:

$\Delta = ab' - a'b = 0$ old dan

$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = k$ yazılabilir Bu durumda dif denk

$(ax+by+c)\,dx + [k(ax+by)+c']\,dy = 0$

şeklinde yazılabilir Bu son denklemde

$u = ax+by$ dönüşümü yapılırsa

$du = a\,dx + b\,dy$ olduğundan

$b(u+c)\,dx + (ku+c')(du - a\,dx) = 0$

elde edilir. Bu denklem homogendir.

Bu denklemler

$y' = \varphi\left(\frac{ax+by+c}{a'x+b'y+c'}\right)$ şeklinde dif denklerin

bir özel halidir.

SORULAR:

Aş. Diferensiyel Denklemlerin Çözümlerini bulunuz.

1) $(x+2y+7)y'+(2x-y+4)=0$

2) $(x-y-1)\,dx+(4y+x-1)\,dy=0$

3) $(2x-5y+3)\,dx-(2x+4y-6)\,dy=0$

4) $(5x+2y+1)\,dx+(2x+y+1)\,dy=0$

5) $(x+2y+1)y'+(x+2y-1)=0$

6) $(x+y)\,dx+(3x+3y-4)\,dy=0$

7) $y(xy+1)\,dx+x(1+xy+x^2y^2)\,dy=0$

8) $(x+2y+3)\,dx+(2x+4y-1)\,dy=0$

Çözümler: 1) $(x+2y+7)y'+(2x-y+4)=0$

Verilen denklemde

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1-4=-5\neq 0 \quad \text{old dan}$$

$x+2y+7=0$ ve $2x-y+4=0$ doğruları bir noktada kesişirler.

$$y' = \frac{-2x+y-4}{x+2y+7}$$ Kesim noktasını bulmak için

$$\begin{cases} -2x+y-4=0 & y_0=-2=\beta \\ x+2y+7=0 & x_0=-3=\alpha \end{cases}$$ old. dan

$x=-3+\xi$ ve $y=-2+\eta$ dönüşümü yapılırsa

$dx=d\xi$ $dy=d\eta$ olup verilen denklemde yerlerine konulursa

$$(-3+\xi+2(-2+\eta)+7)\frac{d\eta}{d\xi}+2(-3+\xi)-(-2+\eta)+4=0$$

$$(\xi+2\eta)\frac{d\eta}{d\xi}+(2\xi-\eta)=0$$ elde edilir.

Bu son denklem homojen old. dan

$$\eta = v\xi \qquad \frac{d\eta}{d\xi}=\frac{dv}{d\xi}\xi+v$$

dönüşümü uygulanırsa

$$(\xi+2v\xi)\left(\xi\frac{dv}{d\xi}+v\right)+(2\xi-v\xi)=0$$

veya

$$(1+2v)\left(\xi\frac{dv}{d\xi}+v\right)+(2-v)=0$$

elde edilir.

$$\Rightarrow \quad \xi(1+2v)\frac{dv}{d\xi}+2(1+v^2)=0$$

yazılabilir

Bu son denklemi değişkenlerine ayırırsak

$$\frac{1+2v}{1+v^2}\,dv + 2\frac{d\xi}{\xi} = 0$$ şek. yazarız ve integral

alırsak

$$\arctan v + \ln(1+v^2) + 2\ln\xi = \ln c$$ sonucunu

elde ederiz

$$v = \frac{\eta}{\xi}$$ konulursa

$$\arctan\frac{\eta}{\xi} + \ln\left(1+\frac{\eta^2}{\xi^2}\right) + 2\ln\xi = \ln c$$

veya

$$\arctan\frac{\eta}{\xi} + \ln(\xi^2+\eta^2) = \ln c$$

bulunur

$\xi = x+3$ $\quad \eta = y+2$ değerleri yerine yazılırsa

$$\boxed{\arctan\frac{y+2}{x+3} + \ln\left[(x+3)^2 + (y+2)^2\right] = \ln c}$$

değeri elde edilir.

2) $(x-y-1)dx+(4y+x-1)dy=0$

$\Delta = 5 \neq 0$ old dan

$x-y-1=0 \quad x+4y-1=0$ doğruların kesim noktası $(\alpha=1, \beta=0)$ dır.

$x=1+\xi \quad y=0+\eta \qquad dx=d\xi \quad dy=d\eta$

$(\xi-\eta)d\xi+(4\eta+\xi)d\eta=0$ homogen dif denk.mi elde ederiz.

$\eta = v\xi \qquad \dfrac{d\eta}{d\xi}=\dfrac{dv}{d\xi}\xi+v$

dönüşümü yapılırsa

$$\xi\frac{dv}{d\xi}+v=\frac{v-1}{4v+1}$$

veya

$$\xi\frac{dv}{d\xi}+\frac{1+4v^2}{4v+1}=0$$ bu denklemi

değişkenlerine ayırırsak

$$\frac{4v+1}{4v^2+1}dv+\frac{d\xi}{\xi}=0$$ bulunur İntegral

alırsak

$$\frac{1}{2}\frac{2\cdot 4v}{4v^2+1}dv+2\frac{dv}{4v^2+1}+\ln\xi=c_1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\ln(4v^2+1)+\frac{1}{2}\arctan 2v+\ln\xi=c_1$$

bulunur.

Bu denklem

$$\ln \xi^2(4u^2+1) + \arctan 2u = c$$

formunda yazılabilir. $u = \dfrac{\eta}{\xi}$ ters dönüşümü ile

$$\ln(4\eta^2+\xi^2) + \arctan 2\frac{\eta}{\xi} = c$$ bulunur.

$\xi = x-1 \quad \eta = y$ yazılırsa

$$\boxed{\ln\left[4y^2+(x-1)^2\right] + \arctan\frac{2y}{x-1} = c}$$

çözümü elde edilir.

3) $(2x-5y+3)\,dx - (2x+4y-6)\,dy = 0$

$$y' = \frac{2x-5y+3}{2x+4y-6}$$

$\Delta = 2.4 - 2.5 = -2 \neq 0$ dır.

Doğrular kesişiyor. Kesişme noktası $(1,1)$ dir.

$x = 1+\xi \quad y = 1+\eta$

$dx = d\xi \quad dy = d\eta$

dönüşümü ile

$$(2\xi - 5\eta)\,d\xi - (2\xi+4\eta)\,d\eta = 0$$

denklemini elde ederiz. Bu denklem birinci dereceden homogendir.

$\eta = \xi v$ dönüşümü yapılırsa

$d\eta = v\,d\xi + \xi\,dv$

değerlerini denklemde yerine koyalım.

$$(2-5v)\,d\xi-(2+4v)(v\,d\xi+\xi\,dv)=0$$

$$\Rightarrow (2-7v-4v^2)\,d\xi-\xi(2+4v)\,dv=0$$

Bu denklemi değişkenlerine ayırırsak

$$\frac{d\xi}{\xi}+\frac{4}{3}\frac{dv}{4v-1}+\frac{2}{3}\frac{dv}{v+2}=0 \quad \text{elde edilir.}$$

Bu integralin sonucu

$$\ln\xi+\frac{1}{3}\ln(4v-1)+\frac{2}{3}\ln(v+2)=\ln c_1$$

$$\xi^3(4v-1)(v+2)^2=c \qquad v=\frac{\eta}{\xi} \text{ yazılırsa}$$

$$(4\eta-\xi)(\eta+2\xi)^2=c \quad \text{elde edilir}$$

Bu son denklemde $\xi=x-1$ $\eta=y-1$ değerleri yerine konulursa

$$\boxed{(4y-x-3)(y+2x-3)^2=c}$$

değeri elde edilir

$$\Rightarrow \frac{z+1}{-z+3}\,dz = dx \quad \Rightarrow \left(-1 + \frac{4}{-z+3}\right) dz = dx$$

$$\Rightarrow -z - 4\ln(-z+3) = x + \ln c$$

$$\Rightarrow -z - x = \ln\left(c(3-z)^4\right] \Rightarrow c(3-z)^4 = e^{-z-x}$$

$$\Rightarrow \boxed{c(3-x-2y)^4 = e^{-2x-2y}}$$ elde edilir.

---

6) $(x+y)\,dx + (3x+3y-4)\,dy = 0$

$\Delta = 0$ old dan denklemi

$(x+y)\,dx + [3(x+y)-4]\,dy = 0$ şeklinde

yazabiliriz. $u = x+y$ dersek

$dy = du - dx$ old dan

$u\,dx + (3u-4)(du-dx) = 0$ elde edilir

Bu denklem

$(4-2u)\,dx + (3u-4)\,du = 0$ şeklinde yazılabilir

Bu denklemi de değişkenlerine ayırırsak

$$2\,dx + \frac{3u-4}{2-u}\,du = 0 \quad \text{ve}$$

$$2x + \int\left(-3 + \frac{2}{2-u}\right) du = c$$

$$2x - 3u - 2\ln(2-u) = c$$

$u = x + y$ yazarsak

$$-3(x+y) - 2\ln(2-x-y) + 2x = c$$

veya

$$-x - 3y - 2\ln(2-x-y) = c \quad \text{ve}$$

$$\boxed{x + 3y + 2\ln(2-x-y) = c_1}$$ sonucunu buluruz

---

7) $y(xy+1)\,dx + x(1+xy+x^2y^2)\,dy = 0$

$xy = v$, $y = \frac{v}{x}$ $dy = \frac{x\,dv - v\,dx}{x^2}$

dönüşümü denklemi

$$\frac{v}{x}(v+1)\,dx + x(1+v+v^2)\frac{x\,dv - v\,dx}{x^2} = 0$$ şekline indirgen

Bu denklemi düzenlersek

$$v^3\,dx - x(1+v+v^2)\,dv = 0$$ elde ederiz

Bu denklemi de değişkenlerine ayırırsak

$$\frac{dx}{x} - \frac{dv}{v^3} - \frac{dv}{v^2} - \frac{dv}{v} = 0$$ elde ederiz

İntegral alınırsa

$$\ln x + \frac{1}{2v^2} + \frac{1}{v} - \ln v = c_1$$

$$2v^2\ln\left(\frac{v}{x}\right) - 2v - 1 = cv^2$$ $v = xy$ dersek

$$\boxed{2x^2y^2\ln y - 2xy - 1 = cx^2y^2}$$ bulunur.

Tam Diferensiyel Denklemler:

$P=P(x,y)$ $\quad Q=Q(x,y)$ ol. üz.

$P\,dx+Q\,dy=0$ denkleminin tam diferensiyel olması için gerek ve yeter şart

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$ olmasıdır.

Bir $f(x,y)$ fonksiyonu

$$\frac{\partial f}{\partial x}=P(x,y) \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=Q(x,y)$$ olacak şekilde

mevcuttur. Diferensiyel denklem sonuçta

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=0$$ şeklini alır.

Sorular: Aş. diferensiyel denklemlerin

çözümlerini bulunuz.

1) $(3x^2+4xy)\,dx+(2x^2+2y)\,dy=0$

2) $(3x^2+3xy^2)\,dx+(3x^2y-3y^2+2y)\,dy=0$

3) $\dfrac{3y^2}{x^2+3x}\,dx+\left[2y\ln\dfrac{5x}{x+3}+3\sin y\right]dy=0$

4) $y^2z^3\,dx+2xyz^3\,dy+3xy^2z^2\,dz=0$

5) $\dfrac{y+\ln x}{x^2}\,dx-\dfrac{1}{x}\,dy=0$

6) $(ye^x + 2e^x + y^2)\,dx + (e^x + 2xy)\,dy = 0$; $y(0) = 6$

7) $(2x\cos y + 3x^2 y)\,dx + (x^3 - x^2 \sin y - y)\,dy = 0$; $y(0) = 2$

Çözüm:

1) $(3x^2 + 4xy)\,dx + (2x^2 + 2y)\,dy = 0$

$P(x,y) = 3x^2 + 4xy \qquad Q(x,y) = 2x^2 + 2y$

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = 4x \qquad \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = 4x \qquad \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$$

old. dan verilen denk tam dif denk dir

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 4xy \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2 + 2y$$

$$f(x,y) = \int (3x^2 + 4xy)\,dx + \phi(y) = x^3 + 2x^2 y + \phi(y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2 + \phi'(y) = 2x^2 + 2y$$

$$\Rightarrow \quad \phi'(y) = 2y \Rightarrow \phi(y) = y^2 + c_0$$

$$\Rightarrow \quad f(x,y) = x^3 + 2x^2 y + y^2 + c_0$$ Buradan genel çözüm

$$\Rightarrow \quad \boxed{x^3 + 2x^2 y + y^2 = c}$$

2) $(3x^2+3xy^2)\,dx+(3x^2y-3y^2+2y)\,dy=0$

Denklem tam diferensiyeldir.

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=6xy \text{ dir.}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}&=P=3x^2+3xy^2\\ \frac{\partial f}{\partial y}&=Q=3x^2y-3y^2+2y\end{aligned}\right\}\quad \begin{aligned}&f(x,y)=x^3+\frac{3}{2}y^2x^2+\phi(y)\\ &\frac{\partial f}{\partial y}=3yx^2+\phi'(y)=3x^2y-3y^2+2y\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \phi'(y)=2y-3y^2$$

Buradan genel çözüm $\Rightarrow \phi(y)=y^2-y^3+C_1$

$\Rightarrow$ $\boxed{f(x,y)=x^3+\frac{3}{2}x^2y^2+y^2-y^3=C}$ olarak bulunur.

---

3) $\dfrac{3y^2}{x^2+3x}\,dx+\left(2y\ln\dfrac{5x}{x+3}+3\sin y\right)dy=0$

Denklem tam diferensiyeldir

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{6y}{x^2+3x} \text{ dir.}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{3y^2}{x^2+3x} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=2y\ln\frac{5x}{x+3}+3\sin y$$

$$f(x,y)=\int\left(2y\ln\frac{5x}{x+3}+3\sin y\right)dy+\phi(x)$$

$$\Rightarrow f(x,y)=y^2\ln\frac{5x}{x+3}-3\cos y+\phi(x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2\left(\frac{5(x+3)-5x}{(x+3)^2}\right)\frac{x+3}{5x} + \phi'(x) = \frac{3y^2}{x^2+3x}$$

$$= \frac{3y^2}{x^2+3x} + \phi'(x) = \frac{3y^2}{x^2+3x} \Rightarrow \phi'(x) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\phi(x) = c}$$

$$\Rightarrow f(x,y) = y^2 \ln\frac{5x}{x+3} - 3\cos y + c_1 = c_2$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x,y) = y^2 \ln\frac{5x}{x+3} - 3\cos y = c}$$

---

4) $y^2z^3dx + 2xyz^3dy + 3xy^2z^2dz = 0 \quad Pdx + Qdy + Rdz = 0$

Denklem $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$

old. dan tam diferansiyeldir.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 2yz^3, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} = 3y^2z^2$$

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} = 6xyz^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2z^3, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2xyz^3, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 3xy^2z^2$$

$$f(x,y,z) = \int y^2z^3dx + \phi(y,z) = xy^2z^3 + \phi(y,z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xyz^3 + \frac{\partial \phi}{\partial y} = 2xyz^3 \Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \Rightarrow \phi = h(z)$$

$$\Rightarrow f(x,y,z) = xy^2z^3 + h(z)$$

6) $(ye^x+2e^x+y^2)\,dx + (e^x+2xy)\,dy=0$, $y(0)=6$

$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = e^x+2y$ old. dan tam dif.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= ye^x+2e^x+y^2 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= e^x+2xy \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &f(x,y)=\int(ye^x+2e^x+y^2)\,dx+\phi(y) \\ &\Rightarrow f(x,y)=ye^x+2e^x+y^2x+\phi(y) \end{aligned}$$

y 'ye göre türev alırsak

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^x+2xy+\phi'(y)=e^x+2xy$$

$\Rightarrow \phi'(y)=0$ olup $\phi(y)=c_1$ dir.

Buradan $f(x,y)=ye^x+2e^x+xy^2+c_1=c_2$

olup $\boxed{f(x,y)=ye^x+2e^x+xy^2=c}$

bulunur. Şimdi verilen başlangıç koşulunu uygulayalım. $x=0$, $y=6$ değerlerini denklemde yerine yazalım ve c'yi bulalım.

$6+2=8$ olup $c=8$ dir.

Öyleyse $\boxed{ye^x+2e^x+xy^2=8}$

olarak genel çözüm bulunur.

İntegrasyon çarpanı:

$Pdx + Q\,dy = 0$ biçiminde verilen denklemde

$\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$ ise denklem tam diferensiyel

değildir $\lambda = \lambda(x,y)$ şeklinde bir integral

çarpanı arayalım

$$\frac{\partial}{\partial y}(P\lambda) = \frac{\partial}{\partial x}(Q\lambda)$$

Gerekli türevler alındıktan sonra

$v = v(x,y)$ ol. üz. $\lambda = \lambda(v)$ olsun

$$\boxed{\frac{\lambda'(v)}{\lambda(v)} = \frac{Q_x - P_y}{P V_y - Q V_x}}$$

şeklinde integral çarpanını buluruz.

$$\frac{Q_x - P_y}{-Q} = f(x) \qquad \frac{Q_x - P_y}{P} = f(y)$$

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{Q_x - P_y}{-Q}\, dx \qquad \lambda = e^{-\int f(x)\, dx}$$

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{Q_x - P_y}{P}\, dy \qquad \lambda = e^{\int f(y)\, dy}$$

$$\frac{1}{\lambda}\frac{d\lambda}{dx} = \frac{Q_x - P_y}{Px - Qy}\, d(xy) \qquad \frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{Q_x - P_y}{PV_y - QV_x}$$

$$\boxed{\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{Q_x - P_y}{PV_y - QV_x}}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(P\lambda) = \frac{\partial}{\partial x}(Q\lambda)$$

$$\lambda\frac{\partial P}{\partial y} + P\frac{\partial \lambda}{\partial y} = \lambda\frac{\partial Q}{\partial x} + Q\frac{\partial \lambda}{\partial y}$$

$$P\frac{\partial \lambda}{\partial y} - Q\frac{\partial \lambda}{\partial x} = \lambda\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

$$V = V(x,y) \qquad \lambda = \lambda(V)$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial y} = \frac{\partial \lambda}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial y} \qquad \frac{\partial \lambda}{\partial x} = \frac{\partial \lambda}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial x}$$

Soru: $(x^2+y^2+x)\,dx + xy\,dy = 0$ dif. denklemini çözünüz.

Çözüm: $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 2y \quad \dfrac{\partial Q}{\partial x} = y$ den

$\dfrac{\partial P}{\partial y} \neq \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ old. dan denk. tam dif. değildir.

$V = x$ olsun.

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{Q_x - P_y}{P V_y - Q V_x} = \frac{-y}{-xy} = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \lambda = e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\ln x} = x \quad \text{olup}$$

$\lambda = x$ integral çarpanıdır.

Denklemi $\lambda = x$ ile çarpalım.

$$x(x^2+y^2+x)\,dx + x(xy)\,dy = 0$$

$$(x^3+xy^2+x^2)\,dx + x^2y\,dy = 0$$

Burada $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 2xy$ olup denklem tam dif. tir

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= x^3+xy^2+x^2 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= x^2y \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} f(x,y) &= \int x^2y\,dy + \phi(x) \\ &= \frac{x^2y^2}{2} + \phi(x) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \phi'(x) + xy^2 = x^3+xy^2+x^2$$

$$\Rightarrow \phi'(x) = x^3+x^2$$

$$\Rightarrow \phi(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + c_1$$

Buradan $f(x,y) = \frac{x^2y^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + c_1 = c_2$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{x^2y^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} = c}$$

$\boxed{c_2 - c_1 = c}$ bulunur

Soru: $(2xy^2 - 3y^3)\,dx + (7 - 3xy^2)\,dy = 0$ dif denklemini çözünüz.

Çözüm: $\frac{\partial P}{\partial y} = 4xy - 9y^2 \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -3y^2$

denklem tam dif değildir.

$$\frac{Q_x - P_y}{-Q} = \frac{-3y^2 - 4xy + 9y^2}{-7 + 3xy^2} \neq f(x)$$

$$\frac{Q_x - P_y}{P} = \frac{-3y^2 - 4xy + 9y^2}{2xy^2 - 3y^3} = \frac{6y^2 - 4xy}{2xy^2 - 3y^3} = \frac{6y^2 - 4xy}{y(2xy - 3y^2)}$$

$$= \frac{-2(-3y^2 + 2xy)}{y(2xy - 3y^2)} = -\frac{2}{y} = g(y)$$

$$\lambda = e^{\int -\frac{2}{y}dy} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{y^2} \text{ int. çarpanıdır}$$

Denklemi $\frac{1}{y^2}$ ile çarpalım

$(2x-3y)dx+(\frac{7}{y^2}-3x)dy=0$ olup tam dif tir.

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}&=2x-3y\\ \frac{\partial f}{\partial y}&=\frac{7}{y^2}-3x\end{aligned}\right\}\quad \begin{aligned}f(x,y)&=\int(2x-3y)dx+\phi(y)\\ &=x^2-3xy+\phi(y)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}=-3x+\phi'(y)=\frac{7}{y^2}-3x$$

$$\Rightarrow \phi'(y)=\frac{7}{y^2}\Rightarrow \phi(y)=-\frac{7}{y}$$

Buradan genel çözüm

$$\boxed{x^2-3xy-\frac{7}{y}=c}$$ olarak bulunur.

Soru: Aş denklemlerin herbiri için $x^m y^n$ şeklinde bir integral çarpanı araştırınız.

a) $y(x^3-y)dx-x(x^3+y)dy=0$

b) $4y\,dx-x\,dy=xy^2dx$

Çözüm: a) $y(x^3-y)dx-x(x^3+y)dy=0$ ($x^m y^n$ ile çarpalım)

$$(y^{n+1}x^{m+3}-x^m y^{n+2})dx-(x^{m+4}y^n+x^{m+1}y^{n+1})dy=0$$

Tam diferensiyel olması için $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ eşitliğine bakalım

$$(n+1)y^n x^{m+3}-(n+2)x^m y^{n+1}=-(m+4)x^{m+3}y^n-(m+1)x^m y^{n+1}$$

$$n+1=-m-4\Rightarrow n=-m-5$$

$$-(n+2)=-m-1$$

Buradan $\quad -(-m-5+2) = -m-1$

$$m+5-2 = -m-1$$

$$\Rightarrow 2m = -1-3 \Rightarrow m = -2$$

$m=-2$ ye karşılık $n=-3$ dır.

Öyleyse int. çarpanı $\lambda = \dfrac{1}{x^2 y^3}$ dır.

---

b) $\quad 4y\,dx - x\,dy = xy^2 dx \qquad x^m y^n$ ile çarpalım

$$(4x^m y^{n+1} - x^{m+1} y^{n+2})\,dx - x^{m+1} y^n\,dy = 0 \quad \text{(tam dif)}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$4(n+1)x^m y^n - (n+2)x^{m+1}y^{n+1} \equiv -(m+1)x^m y^n$$

$$4(n+1) = -m-1$$

$$-(n+2) = 0 \Rightarrow n = -2 \qquad m = 3$$

$$\boxed{\lambda = x^3 y^{-2}}$$

<u>Soru:</u> Aşağıdaki dif. denk çözümlerini bulunuz.

a) $x\,dy - y\,dx = (xy)y^2\,dy$

b) $x\,dy - y\,dx = (x^2-3)\,dx$

<u>Çözüm:</u> <u>Not:</u> Eğer verilen dif. denk $x\,dy - y\,dx$ ya da $y\,dx - x\,dy$ gruplarından birisini kapsıyorsa denklemin biçimine göre $\dfrac{1}{ax^2+bxy+cy^2}$ şeklinde bir integral çarpanı araştırılabilir. $(a^2+b^2+c^2 \neq 0)$

a) $\dfrac{x\,dy - y\,dx}{ax^2+bxy+cy^2} = \dfrac{(xy)y^2\,dy}{ax^2+bxy+cy^2}$ $\dfrac{1}{ax^2+bxy+cy^2}$ ile çarpalım

$\Rightarrow$ $a=0$, $b=1$, $c=0$ İnt. çarpanı $\dfrac{1}{xy}$ dır

$\dfrac{x\,dy - y\,dx}{xy} = y^2\,dy$

$\Rightarrow \dfrac{1}{x}dx + \left(y^2 - \dfrac{1}{y}\right)dy = 0$ (tam dif.tir)

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1}{x}\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= y^2 - \frac{1}{y}\end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} f(x,y) &= \int \frac{1}{x}dx + \phi(y)\\ &= \ln x + \phi(y) + c\end{aligned}$$

$\Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial y} = \phi'(y) = y^2 - \dfrac{1}{y} \Rightarrow \phi(y) = \dfrac{y^3}{3} - \ln y + c_1$

$\Rightarrow f(x,y) = \ln x + \dfrac{y^3}{3} - \ln y + c_1 = c_2$

Genel çözüm $\Rightarrow \boxed{\ln\dfrac{x}{y} + \dfrac{y^3}{3} = c}$ dır.

b) $x\,dy - y\,dx = (x^2-3)\,dx$ $\dfrac{1}{ax^2+bxy+cy^2}$ ile çarpalım

$a=1$, $b=0$, $c=0$ olup $\lambda = \dfrac{1}{x^2}$ dır

Denklemi $\dfrac{1}{x^2}$ ile çarpalım

$\left(\dfrac{x^2-3}{x^2} + \dfrac{y}{x^2}\right)dx - \dfrac{1}{x}\,dy = 0$ (tam dif)

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{x^2-3}{x^2}+\frac{y}{x^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -\frac{1}{x} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} & f(x,y)=\int -\frac{1}{x}\,dy+\phi(x) \\ & \Rightarrow f(x,y)=-\frac{y}{x}+\phi(x) \end{aligned}$$

Buradan $\frac{\partial f}{\partial x}=+\frac{y}{x^2}+\phi'(x)=\frac{x^2-3}{x^2}+\frac{y}{x^2}$

$$\Rightarrow \phi'(x)=\frac{x^2-3}{x^2}$$

$$\Rightarrow \phi'(x)=1-\frac{3}{x^2} \Rightarrow \phi(x)=x+\frac{3}{x}$$

$$\Rightarrow f(x,y)=-\frac{y}{x}+x+\frac{3}{x}=c$$

Buradan genel çözüm

$\boxed{\frac{3-y}{x}+x=c}$ dır.

—— o ——

Soru: $x\,dx+y\,dy+x(x\,dy-y\,dx)=0$ dif. denk. için $u=x^2+y^2$ ol. üz. $\lambda=\lambda(u)$ biç. bir int. çarpanı bulunuz.

Çözüm: $x\,dx+y\,dy+x(x\,dy-y\,dx)=0$

$(x-xy)\,dx+(y+x^2)\,dy=0$ Denklemi λ ile çarpalım [$\lambda=\lambda(u)$ u ya bağlı bir fonk.]

$$\lambda(x-xy)\,dx+\lambda(y+x^2)\,dy=0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial \lambda}{\partial y}(x-xy) + \lambda(-x) = \left(\frac{\partial \lambda}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}\right)(x-xy) - \lambda x$$

$$= \frac{\partial \lambda}{\partial u} 2y(x-xy) - \lambda x$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial \lambda}{\partial x}(y+x^2) + \lambda(2x) = \left(\frac{\partial \lambda}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}\right)(y+x^2) + \lambda 2x$$

$$= \frac{\partial \lambda}{\partial u} 2x(x^2+y) + \lambda 2x$$

Denklemin tam dif. ol. için $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ olması gereklidir. Öyleyse

$$\frac{\partial \lambda}{\partial u}(2xy - 2xy^2) - \lambda x = \frac{\partial \lambda}{\partial u}(2xy + 2x^3) + 2\lambda x$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \lambda}{\partial u}(\cancel{2xy} - 2xy^2 - \cancel{2xy} - 2x^3) = 3\lambda x$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \lambda}{\partial u}(-2x)(x^2+y^2) = 3\lambda x \qquad x^2+y^2=u$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \lambda}{\partial u}(-2u) = 3\lambda$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \lambda}{\lambda} = -\frac{3}{2}\frac{du}{u} \Rightarrow \ln \lambda = -\frac{3}{2}\ln u$$

$$\Rightarrow \lambda = u^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{u^{3/2}} = \frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

Lineer Diferensiyel Denklemleri

$f(x)y' + g(x)y = h(x)$ şek dif denke lineer denir.
$f(x)$ ile bölersek

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

denklemini elde ederiz ki bu da lineer diferensiyel denklemlerin genel formudur.

** a) $y = u.v$ dönüşümünü yaparsak

$$y' = u'v + uv'$$

$$u'v + v'u + P(x)uv - Q(x) = 0$$

$$(u' + P(x)u)v + v'u - Q(x) = 0$$

u yu $u' + P(x)u = 0$ ol. bir seçelim.

$$u = e^{-\int P dx} \quad \text{elde edilir.}$$

$$v\overbrace{(u' + Pu)}^{0} + uv' - Q = 0 \Rightarrow v' = Q e^{\int P dx}$$

$$\Rightarrow v = \int [Q e^{\int P dx}] dx + c \quad \text{elde edilir}$$

Buradan $\boxed{y = e^{-\int P dx} \left[\int Q e^{\int P dx} dx + c \right)}$

elde edilir.

b) $\lambda = \lambda(x)$ şeklinde x'e bağlı bir integrasyon çarpanı araştıralım

$$y' + P(x)y - Q(x) = 0$$

$$dy + [P(x)y - Q(x)]\,dx = 0$$

$$\frac{\lambda'(x)}{\lambda(x)} = \frac{0 - P(x)}{-1} = P(x)$$

$$\ln \lambda(x) = \int P(x)\,dx \Rightarrow \lambda(x) = e^{\int P(x)\,dx}$$

Denklemi λ ile çarpalım.

$$e^{\int P dx} dy + (Py - Q) e^{\int P dx} = 0$$

Buradan Tam diferensiyel denklemin çözümü

$$\boxed{y e^{\int P dx} - \int Q e^{\int P dx} dx = c}$$

olarak bulunur.

c) $Y' + PY = Q$ denkleminin çözümünü sağ tarafsız olarak bulalım.

$$Y' + PY = 0 \Rightarrow \frac{dY}{Y} + P\,dx = 0 \Rightarrow \ln Y + \int P\,dx = \ln c$$

$$\Rightarrow y = c e^{-\int P dx}$$

c yerine $c(x)$ alalım

$$Y = c(x) e^{-\int P dx}$$

Bunu denklemde yerine yazalım

$$c'(x) = Qe^{\int P dx} \Rightarrow c(x) = \int (Qe^{\int P dx})\, dx + c$$

elde edilir. Buradan

$$\boxed{y = \left[\int Qe^{\int P dx} dx + c\right] e^{-\int P dx}}$$

çözümü bulunur.

Lineer Denklemlerin Genel özellikleri:

1) Lin. dif denkin genel çözümü iki terimden oluşur
2) Lin denk genel çözümü çeşitli aşamalarda iki kez integral almayla bulunur.
3) Lin. dif. denkin bir özel çözümü bilinirse genel çözüm bir integral ile bulunur.

Ör: $y' + Py = Q$ $\quad y_1$: özel çözüm

$$y' - y_1' + P(y - y_1) = 0$$

$$y - y_1 = u \Rightarrow u' + Pu = 0$$

$$\frac{du}{u} = -P dx \Rightarrow u = ce^{-\int P dx}$$

$$\boxed{y = y_1 + ce^{-\int P dx}}$$

4) İki özel çözümü bilinen lin. dif. denk.in genel çözümü doğrudan alınabilir.

$$y - y_1 = c e^{-\int P dx} \qquad y_2 : 2. \text{ özel çözüm}$$

$$y_2 - y_1 = c_1 e^{-\int P dx}$$

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{c}{c_1} = k = \text{sabit}$$

Sorular: Aşağıdaki diferensiyel denklemleri çözünüz

1) $y' + \frac{1}{x-2} y = x^2$

2) $(x^4 + 2y)\,dx - x\,dy = 0$

3) $(1+x^2)\,dy + (2xy - \tan x)\,dx = 0$

4) $(1 + 2x\cot y)\,dy = dx$ (ödev)

5) $2y(e^{y^2} + x)\,dy - dx = 0$

6) $y' + tgx \cdot y = -\cot g^2 x$

7) $y' + 2xy = -e^{-x^2}$

8) $\frac{dy}{dx} + y\cot x = 5e^{\cos x}$ $\quad x = \frac{\pi}{2}$, $y = -4$ için özel çözüm bulunuz

9) $y \ln y\,dx + (x - \ln y)\,dy = 0$

10) $\frac{dy}{dx} + \left(\frac{2x+1}{x}\right) y = e^{-2x}$

11) $(x^2+1)\frac{dy}{dx} + 4xy = x$; $y(2) = 1$

12) $y^2 dx + (3xy - 1)\,dy = 0$

Çözümleri

+ 1) $y' + \frac{1}{x-2} y = x^2$ $\qquad P(x) = \frac{1}{x-2} \quad Q(x) = x^2$

$\lambda = e^{\int P dx}$ integral çarpanıdır

$\lambda = e^{\int \frac{1}{x-2} dx} = e^{\ln(x-2)} = x-2$ $\qquad \boxed{\lambda y = \int \lambda Q \, dx + c}$

$(x-2) y = \int (x-2) x^2 dx + c$

$(x-2) y = \frac{1}{4} x^4 - \frac{2}{3} x^3 + c$

$\Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{4} \frac{x^4}{(x-2)} - \frac{2}{3} \frac{x^3}{x-2} + \frac{c}{x-2}}$

2) $(x^4 + 2y) dx - x dy = 0$

$\frac{dy}{dx} - \frac{x^4 + 2y}{x} = 0$

$\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x} = x^3$ $\qquad P(x) = -\frac{2}{x} \quad Q(x) = x^3$

Burada $\lambda = e^{\int -\frac{2}{x} dx} = e^{-2\ln x} = e^{\ln x^{-2}} = \frac{1}{x^2}$

Genel çözüm $\lambda y = \int \lambda Q \, dx + c$

$\frac{1}{x^2} y = \int \frac{1}{x^2} x^3 dx + c$

$$\Rightarrow \frac{y}{x^2} = \int x\,dx + c \Rightarrow \frac{y}{x^2} = \frac{x^2}{2} + c$$

olup genel çözüm

$$\boxed{y = \frac{x^4}{2} + cx^2}$$ dir.

---

3) $(1+x^2)\,dy + (2xy - \tan x)\,dx = 0$

$$(1+x^2)\frac{dy}{dx} + (2xy - \tan x) = 0$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2xy - \tan x}{1+x^2} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2x}{1+x^2}y = \frac{\tan x}{1+x^2} \qquad P(x) = \frac{2x}{1+x^2} \quad Q(x) = \frac{\tan x}{1+x^2}$$

$$\lambda = e^{\int P\,dx} = e^{\int \frac{2x}{1+x^2}dx} = e^{\ln(1+x^2)} = 1+x^2$$

$$\lambda y = \int \lambda Q\,dx + c$$

$$\Rightarrow (1+x^2)y = \int (1+x^2)\frac{\tan x}{1+x^2}\,dx + c$$

$$\Rightarrow \boxed{y = -\frac{\ln\cos x}{1+x^2} + \frac{c}{1+x^2}}$$

+ 5) $2y(e^{y^2}+x)\,dy - dx = 0$

$$2y(e^{y^2}+x)\,\frac{dy}{dx} - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} - \frac{1}{2y(e^{y^2}+x)} = 0$$

$$\boxed{\frac{dx}{dy} + P(y)x = Q(y)}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dy} - 2yx = 2ye^{y^2}$$

$$\lambda = e^{\int -2y\,dy} = e^{-y^2}$$

$$e^{-y^2} x = \int e^{-y^2} 2ye^{y^2}\,dy + c$$

$$\Rightarrow \boxed{x = y^2e^{y^2} + ce^{y^2}}$$

---

4) $(1+2x\cot y)\,dy = dx$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+2x\cot y} \Rightarrow \frac{dx}{dy} - (1+2x\cot y) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dy} - 2\cot y\,(x) = 1$$

$$P(y) = -2\cot y \qquad Q(y) = 1$$

$$\lambda = e^{-2\int \cot y\,dy} = e^{-2\ln(\sin y)} = \sin^{-2} y = \frac{1}{\sin^2 y}$$

$$\frac{1}{\sin^2 y} x = \int \frac{1}{\sin^2 y} \cdot 1\, dy + c = -\cot y + c$$

$$\Rightarrow \quad x = -\sin^2 y \cot y + c \sin^2 y$$

$$\boxed{x = -\sin y \cos y + c\sin^2 y}$$

6) $y' + \tan x . y = -\cot^2 x$

$y = uv$ diyelim $\quad y' = u'v + uv'$

$u'v + uv' + \tan x . (u.v) + \cot^2 x = 0$

$(u' + u\tan x) v + v'u + \cot^2 x = 0$

$u' + u \tan x = 0$ ol. bir u'yu seçelim

$\frac{du}{u} + \tan x\, dx = 0 \Rightarrow u = \cos x$

Bu değeri yerine koyalım

$v' \cos x + \cot^2 x = 0$

$v' + \frac{\cos x}{\sin^2 x} = 0 \Rightarrow dv + \cot g x . \operatorname{cosec} x\, dx = 0$

integral alırsak

$v - \operatorname{cosec} x = c \Rightarrow v = c + \operatorname{cosec} x$

bulunur.

8) $\frac{dy}{dx} + y\cot x = 5e^{\cos x}$; $x = \frac{\pi}{2}$, $y = -4$

$P(x) = \cot x$

Denklemin integral çarpanı $Q(x) = 5e^{\cos x}$

$\lambda = e^{\int \cot x\, dx} = e^{\ln \sin x} = \sin x$

$\lambda y = \int \lambda Q(x)\, dx + c$ den

$y \sin x = 5\int e^{\cos x} \sin x\, dx = -5e^{\cos x} + c$

Buradan $y\sin x = -5e^{\cos x} + c$

Şimdi verilen değerleri yerlerine yazıp özel çözümü bulalım.

$x = \frac{\pi}{2}$, $y = -4$ iken $(-4)\sin\frac{\pi}{2} = -5e^{\cos\frac{\pi}{2}} + c$

$\Rightarrow \quad c = 1$ dir

Buradan

$\boxed{y\sin x + 5e^{\cos x} = 1}$ elde edilir

11) $(x^2+1)\dfrac{dy}{dx}+4xy=x \quad ; \quad y(2)=1$

$$\frac{dy}{dx}+\frac{4x}{x^2+1}y=\frac{x}{x^2+1} \qquad p(x)=\frac{4x}{x^2+1}$$

$$Q(x)=\frac{x}{x^2+1}$$

$$\lambda=e^{\int \frac{4x}{x^2+1}dx}=e^{2\ln(x^2+1)}=e^{\ln(x^2+1)^2}=(x^2+1)^2$$

Buradan $\lambda y=\int \lambda Q(x)\,dx+c$ de gerekli işlemleri yaparsak

$$(x^2+1)^2y=\int (x^2+1)^2\cdot\frac{x}{x^2+1}\,dx+c$$

$$=\int x(x^2+1)\,dx+c$$

$$(x^2+1)^2y=\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}+c$$

$y(2)=1$ için $x=2$ $y=1$

$$(4+1)^2\cdot 1=\frac{16}{4}+\frac{4}{2}+c \Rightarrow c=25-6=19$$

olup

$$\boxed{(x^2+1)^2y=\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}+19}$$

olarak genel çözüm bulunur.

Bazı uygun dönüşümler yardımıyla lineer denklemlere indirgenebilen Dif. Denklemleri

$f'(y)y' + f(y)P(x) = Q(x)$ şeklindeki bir denklemin

Çözümü

$u = f(y)$, $u' = f'(y)y'$ dönüşümü ile

$u' + uP(x) = Q(x)$ denklemine indirgenir.

Sorular 41) $e^y y' + e^y = 4e^{-x}\sin x$ denk. çöz. bulunuz

Çözüm: $u = e^y$ dönüşümünü yapalım.

$u' = e^y y'$

Buradan $u' + u = 4e^{-x}\sin x$ lineer denklemini

elde ederiz.

$u' + u = 0 \Rightarrow \ln u + x = \ln c \Rightarrow u = ce^{-x}$

$u = c(x)e^{-x}$ yazılırsa $u' = c'(x)e^{-x} - c(x)e^{-x}$

bunu denklemde yazalım

$c'(x)e^{-x} - c(x)e^{-x} + c(x)e^{-x} = 4e^{-x}\sin x$

$\Rightarrow c'(x) = 4\sin x$ bulunur

Buradan $\Rightarrow c(x) = -4\cos x + c_1$ elde edilir.

Genel çözüm ise

$u = (-4\cos x + c_1)e^{-x} = -4e^{-x}\cos x + c_1 e^{-x}$ ve $u = e^y$

yazılırsa $\boxed{e^y = -4e^{-x}\cos x + c_1 e^{-x}}$ elde edilir

2) $(1+e^y)y'+y+e^y=e^{-x}$ denk. çöz. bulunuz.

<u>Çözüm:</u> $u=y+e^y \Rightarrow u'=(1+e^y)y'$

$u'+u=e^{-x}$ (*) lin. denklemine indirgenir.

$\frac{du}{u}+dx=0$ için $u=ce^{-x}$

$u=c(x)e^{-x}$ için $u'=c'(x)e^{-x}-c(x)e^{-x}$

değerini (*) da yerine yazalım

Buradan $c'(x)e^{-x}-c(x)e^{-x}+c(x)e^{-x}=e^{-x}$

$c'(x)=1$

için $c(x)=x+c_1$ ve

$u=(x+c_1)e^{-x}$ ve $u=y+e^y$ için

$\boxed{y+e^y=(x+c_1)e^{-x}}$ genel çözümü bulunur.

3) $2ye^{y^2}y'-2e^{y^2}=e^x$ denk. çözümünü bulunuz.

<u>Çözüm:</u> $u=e^{y^2} \Rightarrow u'=2ye^{y^2}y'$

Buradan $u'-2u=e^x$ (*) lineer denk. indirgenir.

$\frac{du}{u}-2\,dx=0$ için $u=ce^{+2x}$

$u=c(x)e^{+2x}$ için $u'=c'(x)e^{+2x}+2c(x)e^{+2x}$ değerini

(*) da yerine yazalım.

$$c'(x)\, e^{+2x} + 2c(x)\, e^{+2x} - 2c(x)\, e^{+2x} = e^{x}$$

$$\Rightarrow c'(x) = e^{-x} \Rightarrow c(x) = -e^{-x} + c_1$$

Buradan $u = (-e^{-x} + c_1)\, e^{2x}$

$$u = -e^{x} + c_1 e^{2x}$$

elde edilir. Genel çözüm ise

$u = e^{y^2}$ den $\boxed{-e^{x} + c_1 e^{2x} = e^{y^2}}$

olarak bulunur.

Soru: $\frac{1}{y} y' - a \ln y = \cos x$ dif. denklemini uygun dönüşüm yardımıyla çözünüz

---

$u = \ln y \quad u' = \frac{1}{y} y'$

$$u' - au = \cos x$$

$u' - au = 0 \Rightarrow u = c e^{ax} \qquad c = c(x)$

$u = c(x)\, e^{ax} \qquad u' = c'(x) e^{ax} + a e^{ax} c(x)$

$$c'(x) e^{ax} + \cancel{a e^{ax} c(x)} - \cancel{a\, c(x)\, e^{ax}} = \cos x$$

$$e^{ax} c'(x) = \cos x$$

$$c'(x) = e^{-ax} \cos x$$

$$c(x) = \int e^{-ax} \cos x\, dx$$

Bernoulli Diferensiyel Denklemi

$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$ biçimindeki diferensiyel denklemlere "Bernoulli Dif. Denk." denir.

Burada $(n \neq 0$ ve $n \neq 1)$ dır.

Denklemi çözmek için $u = y^{1-n}$ dönüşümü yapılır. Denklem lineer denk.e indirgenir. Buradan u bulunur ve $u = y^{1-n}$ de yerine konularak y çözümü elde edilir.

SORULAR Aş. Dif Denklemlerin Çözümlerini bulunuz.

1) $y(6y^2-1)\,dx = 2x\,dy$

2) $6y^2\,dx - x(2x^3+y)\,dy = 0$

3) $x(y+4)y' - y^2 - 2y - 2x = 0 \;;\; \frac{y}{x} = z$

4) $\frac{dy}{dx} + y = xy^3$

5) $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{3}y = \frac{1}{3}(1-2x)y^4$

6) $x\,dy - \{y + xy^3(1+\ln x)\}\,dx = 0$

7) $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = -\frac{y^2}{x}$

8) $x\frac{dy}{dx} + y = -2x^6y^4$

9) $y^3y' + \frac{1}{x}y^4 = \frac{\sin x}{x^4}$

10) $y' + y = y^2e^x$

Çözümleri

1) $y(6y^2-1)\,dx = 2x\,dy$

$$2x\,dy - y(6y^2-1)\,dx = 0$$

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y(6y^2-1)}{2x} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{2x}y = \frac{3}{x}y^3 \qquad \text{(Bernoulli)}$$

$$u = y^{1-3} \Rightarrow u = y^{-2} \Rightarrow -2y^{-3}\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}$$

Buradan $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}y^3\frac{du}{dx}$

bu değeri denklemde yerine koyalım.

$$-\frac{1}{2}y^3\frac{du}{dx} + \frac{1}{2x}y = \frac{3}{x}y^3$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx} - \frac{1}{x}y^{-2} = -\frac{6}{x}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{du}{dx} - \frac{1}{x}u = -\frac{6}{x} \qquad \text{(lineer)}$$

$$\lambda = e^{-\int \frac{1}{x}dx} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{x}u = \int \frac{1}{x}\left(-\frac{6}{x}\right)dx + c$$

$$\Rightarrow \quad \frac{u}{x} = \frac{6}{x} + c \quad \Rightarrow \quad u = cx + 6$$

$$\Rightarrow \quad y^{-2} = cx + 6 \Rightarrow \boxed{y^2 = \frac{1}{cx+6}}$$

---

2) $$6y^2\,dx - x(2x^3+y)\,dy = 0$$

$$6y^2\frac{dx}{dy} - x(2x^3+y) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{dy} - \frac{2x^4+yx}{6y^2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{dy} - \frac{1}{6y}x = \frac{1}{3y^2}x^4$$

$$u = x^{1-4} = x^{-3} \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dy} = -3x^{-4}\frac{dx}{dy}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{dy} = -\frac{1}{3}x^4\frac{du}{dy}$$

$$-\frac{1}{3}x^4\frac{du}{dy} - \frac{1}{6y}x = \frac{1}{3y^2}x^4$$

$$\Rightarrow \quad \frac{du}{dy} + \frac{1}{2y}x^3 = -\frac{1}{y^2}$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dy}+\frac{1}{2y}u=-\frac{1}{y^2} \qquad \text{(lineer)}$$

$$\lambda = e^{\int \frac{1}{2y}dy} = y^{\frac{1}{2}}$$

$$y^{\frac{1}{2}}.u=\int y^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{y^2}\right)dy+c$$

$$\Rightarrow \boxed{y^{\frac{1}{2}}x^{-3}=2y^{-\frac{1}{2}}+c}$$

3) $x(y+4)y'-y^2-2y-2x=0 \;;\; \frac{y}{x}=z$

$$\frac{y}{x}=z \Rightarrow y=xz \Rightarrow y'=z+xz'$$

Bunu denklemde yerine yazalım.

$$x(xz+4)(z+xz')-x^2z^2-2xz-2x=0$$

$$(x^2z+4x)(z+xz')-x^2z^2-2xz-2x=0$$

$$\cancel{x^2z^2}+x^3zz'+4xz+4x^2z'-\cancel{x^2z^2}-2xz-2x=0$$

$$(x^3z+4x^2)z'+2xz-2x=0$$

$$(x^3z+4x^2)\frac{dz}{dx}+2xz-2x=0$$

$$(x^3z+4x^2)+(2xz-2x)\frac{dx}{dz}=0$$

$$\Rightarrow 2x(z-1)\frac{dx}{dz}+x^3z+4x^2=0$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dz}+\frac{x^2z}{2(z-1)}+\frac{2x}{z-1}=0$$

Buradan $z = y/x$ konulmasıyla

$$\boxed{\frac{1}{\left(\frac{y}{x}-1\right)^2} x^{-1} = -\frac{1}{2\left(\frac{y}{x}-1\right)} - \frac{1}{4\left(\frac{y}{x}-1\right)^2} + c}$$

4) $\frac{dy}{dx} + y = xy^3$ (Bernoulli)

$u = y^{1-3} = y^{-2}$ $\quad \frac{du}{dx} = -2y^{-3}\frac{dy}{dx}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}y^3\frac{du}{dx}$

$-\frac{1}{2}y^3\frac{du}{dx} + y = xy^3$

$\Rightarrow \frac{du}{dx} - 2y^{-2} = -2x \Rightarrow \frac{du}{dx} - 2u = -2x$ (lineer)

$\lambda = e^{-\int 2dx} = e^{-2x}$

$e^{-2x}u = \int e^{-2x}(-2x)\,dx$

$e^{-2x}u = xe^{-2x} + \frac{1}{2}e^{-2x} + c$

$\Rightarrow u = x + \frac{1}{2} + ce^{2x}$

$u = y^{-2}$ için $\boxed{\frac{1}{y^2} = x + \frac{1}{2} + ce^{2x}}$

5) $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{3} = \frac{1}{3}(1-2x)y^4$ (Bernoulli)

$u = y^{1-4} = y^{-3}$ $\qquad \frac{du}{dx} = -3y^{-4}\frac{dy}{dx}$

$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{3}y^4\frac{du}{dx}$

$-\frac{1}{\cancel{3}}y^4\frac{du}{dx} + \frac{y}{\cancel{3}} = \frac{1}{\cancel{3}}(1-2x)y^4$

$\Rightarrow \quad \frac{du}{dx} - y^{-3} = 2x-1$ (lineer) $\frac{du}{dx} - u = (2x-1)$

$\lambda = e^{-\int dx} = e^{-x}$

$e^{-x}u = \int e^{-x}(2x-1)\,dx + c$

$= 2\int xe^{-x}dx - \int e^{-x}dx + c$

$= 2\left[-xe^{-x} - e^{-x}\right] + e^{-x} + c$

$= -2xe^{-x} - e^{-x} + c$

$\Rightarrow u = -2x - 1 + ce^{x}$ $\qquad u = y^{-3}$ idi

$$\boxed{\frac{1}{y^3} = -2x - 1 + ce^{x}}$$

Örnek. $y''+5y'+6y=0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Karakteristik denklem

$r^2+5r+6=0$ olup kökler $r_1=-2, r_2=-3$ şeklinde farklı ve reeldir. Buna göre temel

çözümler kümesi

$\left\{e^{-2x}, e^{-3x}\right\}$ şeklinde yazılabilir. Buradan genel çözüm,

$y=c_1e^{-2x}+c_2e^{-3x}$ olarak elde edilir.

Örnek. $y''-8y'+16y=0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Karakteristik denklem

$r^2-8r+16=0$ olup kökler $r_1=r_2=4$ şeklinde reel ve çakışıktır. Buna göre temel

çözümler kümesi

$\left\{e^{4x}, xe^{4x}\right\}$ şeklinde yazılabilir. Buradan genel çözüm,

$y=\left(c_1+c_2x\right)e^{4x}$ olarak elde edilir.

Örnek: $y^2\,dx + 2xy\,dy = 0$ denklemi tam dif. denklemdir. Gerçekten $F(x,y) = xy^2$ fonksiyonunun tam diferensiyeli $dF = y^2\,dx + 2xy\,dy$ olup yukarıdaki tanımı sağlar.

Teorem: $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ (1)
denklemini ele alalım. Burada M ve N dikdörtgensel bir D bölgesinde birinci mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip fonksiyonlardır.

1) Eğer (1) denklemi D de tam ise $\forall (x,y) \in D$ için

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \qquad (2)$$

dir.

2) Tersine $\forall (x,y) \in D$ için

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

ise (1) denklemi tam diferensiyel denklemdir.

İspat: 1) Eğer (1) denklemi D de tam ise $M\,dx + N\,dy$ D de tam diferensiyeldir. bu durumda Tam dif in tanımından

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = N$$

ol. şekilde bir F fonksiyonu vardır.

Buradan $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial M}{\partial y}$ ve $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$

sağlanır. M ve N nin sürekli kısmi türevlere sahip olmasından dolayı $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$ olup

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

sağlanır.

2) $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ sağlansın (1) denkleminin tam dif olduğunu ispatlamaya çalışalım. Bunun için

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y) \quad (3)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y) \quad (4)$$

ol. şekilde bir $F(x,y)$ fonksiyonun varlığını göstermeliyiz. Bu durumda

$F(x,y)$, (3) ü sağlasın

$$F(x,y) = \int M(x,y)\,dx + \phi(y) \quad (5)$$

olacaktır. (5) in y'ye göre türevi

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int M(x,y)\,dx + \frac{d\phi}{dy}$$ olup

(4) den dolayı

$$N(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx + \frac{d\phi}{dy} \qquad (6)$$

ve böylece

$$\frac{d\phi}{dy} = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx.$$

$\phi(y)$, sadece y'ye bağlı old.dan, $\frac{d\phi}{dy}$ türevi de ~~sadece~~ x'den bağımsız ~~bağlı~~ olmalıdır. Dolayısıyla

$$N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx \qquad (7)$$

~~Yani~~ de x'den bağımsız olmalıdır.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx\right] = 0 \quad \text{olmalıdır}$$

~~Bunu~~ gösterelim

Buradan

$$\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\int M(x,y)\,dx$$

elde edilir. Eğer (3) ve (4) sağlanıyor ise (2) den dolayı

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\int M(x,y)\,dx = \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = \frac{\partial^2}{\partial y\partial x}\int M(x,y)\,dx$$

ve böylece

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx\right] = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}$$

elde edilir. Hipotezden (2) den

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad \text{idi}$$

Dolayısıyla $\frac{\partial}{\partial x}\left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx \right] = 0$

elde edilir. Böylece

$\phi(y) = \int \left(N(x,y) - \int \frac{\partial M}{\partial y}\,dx \right) dy$ yazılabilir. Bu değer

(5) de yerine yazılırsa

$F(x,y) = \int M(x,y)\,dx + \int \left(N(x,y) - \int \frac{\partial M}{\partial y}\,dx \right) dy$

elde edilir. Bu $F(x,y)$ (3) ve (4) ü sağlar ve

$M\,dx + N\,dy = 0$ denkleminin tam olduğu ispat edilmiş olur.

Tam Diferensiyel Denklem :

Tanım: F, bir D bölgesinde birinci mertebeden kısmi türevlere sahip iki değişkenli bir fonksiyon olsun. F nin tam diferensiyeli $\forall (x,y) \in D$ için

$$dF(x,y) = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} dx + \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} dy$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek: $F(x,y) = xy^2 + 2x^3y$ için

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy$$ den

$$dF = (y^2 + 6x^2y)\, dx + (2xy + 2x^3)\, dy$$ dir.

Tanım Eğer $\forall (x,y) \in D$ için

$$dF(x,y) = M(x,y)\, dx + N(x,y)\, dy$$ ise

$M(x,y)\, dx + N(x,y)\, dy$ ifadesi tam diferensiyel olarak adlandırılır.

Eğer $M\, dx + N\, dy$ tam diferensiyel ise

$M\, dx + N\, dy = 0$ denklemi tam dif denk olarak adlandırılır.