Tarih: 29/05/2024
Saat : 16.00 – 17.20

ADI SOYADI:

ÖĞRENCİ NO:

BİLGİSAYAR MÜHENDİSLİĞİ BÖLÜMÜ
DİFERENSİYEL DENKLEMLER DERSİ YILSONU SINAVI

SORU 1	SORU 2	SORU 3	SORU 4	TOPLAM

AÇIKLAMA: Sınav süresi 80 dakikadır. Sorular eşit puanlıdır. İşlem yapılmadan verilen cevaplar dikkate alınmayacaktır.. Başarılar dileriz.

1. $x^3 \frac{dy}{dx} = y\left(3y - x^2\right)$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$x^3 y' = 3y^2 - x^2 y \Rightarrow x^3 y' + x^2 y = 3y^2$

$\Rightarrow y' + \frac{1}{x} y = \frac{3}{x^3} y^2$ (Bernoulli)

$y^{-2} y' + \frac{1}{x} y^{-1} = \frac{3}{x^3}$ $\qquad y^{-1} = u \qquad -y^{-2} y' = u'$

$-u' + \frac{1}{x} u = \frac{3}{x^3} \Rightarrow u' - \frac{1}{x} u = -3x^{-3}$ (lineer)

$\lambda = e^{\int -\frac{1}{x} dx} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{x} u' - \frac{1}{x^2} u = -3x^{-4}$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{x} u\right)' = -3x^{-4} \Rightarrow \frac{1}{x} u = x^{-3} + c$

$\Rightarrow u = cx + x^{-2} \Rightarrow \boxed{y^{-1} = cx + x^{-2}}$

Veya

$$\boxed{y = \frac{x^2}{cx^3 + 1}}$$

2. Karakteristik denklemi $r^3\left(r^2+9\right)^2\left(r^2-4r+29\right)=0$ olan sabit katsayılı lineer homojen olmayan denkleme ilişkin sağ taraftaki fonksiyon $f(x)=3x+4+3\cos 3x+xe^{2x}\sin 5x$ şeklindedir. Buna göre,

a) Bu denkleme ilişkin homojen kısma ait y_h çözümünü elde ediniz. (15)

$$r^3(r^2+9)^2(r^2-4r+29)=0 \Rightarrow \begin{array}{l} r_1=r_2=r_3=0 \\ r_{4,5}=\mp 3i \qquad r_{6,7}=\mp 3i \\ r_{8,9}=2\mp 5i \end{array}$$

$$T.Ç.K=\{1, x, x^2, \cos 3x, \sin 3x, x\cos 3x, x\sin 3x, e^{2x}\cos 5x, e^{2x}\sin 5x\}$$

$$y_h = c_1 + c_2x + c_3x^2 + \cos 3x(c_4+c_5x) + \sin 3x(c_6+c_7x) + e^{2x}(c_8\cos 5x + c_9\sin 5x)$$

b) Belirsiz katsayılar yöntemi yardımıyla y_p özel çözümünün nasıl seçilmesi gerektiğini belirtiniz. (Katsayıları bulmaya çalışmayınız.) (10)

$$y_p = x^3(Ax+B) + x^2(C\cos 3x + D\sin 3x) + xe^{2x}\left[(Ex+F)\sin 5x + (Gx+H)\cos 5x\right]$$

3. $\left(1-x^2\right)y''+xy'+2y=0$ denklemi veriliyor. Buna göre

a) Denklemin aykırı nokta(ları) varsa hangi tiptendir? (5)

$1-x^2=0 \Rightarrow \quad x=\mp 1 \quad$ Aykırı nokta

$x=-1 \quad \frac{x}{1-x^2}(x+1)=\frac{x}{1-x}, \quad \frac{2}{1-x^2}(x+1)^2=\frac{2}{1-x}(x+1) \quad$ D. A. N.

$x=1 \quad \frac{x}{1-x^2}(x-1)=\frac{-x}{1+x}, \quad \frac{2}{1-x^2}(x-1)^2=\frac{-2(x-1)}{1+x} \quad$ D. A. N.

b) Denklemin $x=0$ noktası komşuluğundaki çözümünü kuvvet serileri yardımıyla elde ediniz. (20)

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \qquad y'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1} \qquad y''=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}$$

$$\underbrace{\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}}_{n\to n+2}-\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^n+\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}2a_nx^n=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n-\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^n+\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}2a_nx^n=0$$

$$2a_2+6a_3x+a_1x+2a_0+2a_1x+\sum_{n=2}^{\infty}\left\{(n+1)(n+2)a_{n+2}-(n^2-2n-2)a_n\right\}x^n=0$$

$$2a_2+2a_0=0 \qquad a_{n+2}=\frac{n^2-2n-2}{(n+1)(n+2)}a_n \quad n\geq 2$$

$$3a_1+6a_3=0$$

$n=2$

$$a_4=\frac{-2}{12}a_2$$

$$a_2=-a_0 \qquad a_3=-\frac{1}{2}a_1 \qquad a_4=\frac{1}{6}a_0$$

$n=3$

$$a_5=\frac{1}{20}a_3=-\frac{1}{40}a_1 \quad ---$$

$$y=a_0+a_1x-a_0x^2-\frac{1}{2}a_1x^3+\frac{1}{6}a_0x^4-\frac{1}{40}a_1x^5+\cdots$$

$$\boxed{y=a_0\left(1-x^2+\frac{1}{6}x^4+\cdots\right)+a_1\left(x-\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{40}x^5+\cdots\right)}$$

4. $y'' + y = e^{-2x}\sin x$
$y(0) = y'(0) = 0$

Probleminin çözümünü Laplace dönüşümü yardımıyla bulunuz.

$L\{y(x)\} = Y(s)$

$L\{y^{(n)}\} = s^nY(s) - s^{n-1}y(0) - s^{n-2}y'(0) - \dots - y^{(n-1)}(0)$

$L\{f(x)\} = F(s) \Rightarrow L\{e^{ax}f(x)\} = F(s-a)$

$$L\{y'' + y\} = L\{e^{-2x}\sin x\} \Rightarrow s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + Y(s) = \frac{1}{(s+2)^2+1}$$

$$\Rightarrow (s^2+1)Y(s) = \frac{1}{s^2+4s+5} \Rightarrow \boxed{Y(s) = \frac{1}{(s^2+1)(s^2+4s+5)}}$$

$$y(x) = L^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4s+5)}\right\}$$

$$\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4s+5)} = \frac{As+B}{s^2+1} + \frac{Cs+D}{s^2+4s+5}$$

$A = -\frac{1}{8}$

$B = \frac{1}{8}$ $\quad C = \frac{1}{8}$

$D = \frac{3}{8}$

$$y(x) = L^{-1}\left\{\frac{-\frac{1}{8}s}{s^2+1} + \frac{\frac{1}{8}}{s^2+1} + \frac{\frac{1}{8}s + \frac{3}{8}}{(s+2)^2+1}\right\}$$

$$= -\frac{1}{8}L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} + \frac{1}{8}L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} + \frac{1}{8}\left[L^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s+2)^2+1}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2+1}\right\}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = -\frac{1}{8}\cos x + \frac{1}{8}\sin x + \frac{1}{8}e^{-2x}\cos x + \frac{1}{8}e^{-2x}\sin x}$$