BİLGİSAYAR MÜHENDİSLİĞİ BÖLÜMÜ
DİFERENSİYEL DENKLEMLER DERSİ YILSONU SINAVI

SORU 1	SORU 2	SORU 3	SORU 4	TOPLAM

AÇIKLAMA: Sınav süresi 80 dakikadır. Sorular eşit puanlıdır. İşlem yapılmadan verilen cevaplar dikkate alınmayacaktır.. Başarılar dileriz.

1. $(y - xp)^2 = 1 + p^2$ denkleminin genel çözümünü ve varsa aykırı çözümünü bulunuz.

$$y = xp + \sqrt{1+p^2} \quad \text{(Clairaut)}$$

$$P = p + x\frac{dp}{dx} + \frac{2P}{2\sqrt{1+p^2}}\frac{dp}{dx} \quad \Rightarrow \quad \frac{dP}{dx}\left(x + \frac{P}{\sqrt{1+p^2}}\right) = 0$$

$$\frac{dP}{dx} = 0 \Rightarrow P = C \Rightarrow \boxed{y = Cx + \sqrt{1+C^2}} \quad \text{Genel Çözüm}$$

$$\left.\begin{array}{c} y = xp + \sqrt{1+p^2} \\ x + \frac{P}{\sqrt{1+p^2}} = 0 \end{array}\right\} \quad \boxed{y = \frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}}} \quad \text{Aykırı Çözüm}$$

2. $x^2 y'' + xy' + y = \sin(\ln x)$ denkleminin genel çözümünü bulunuz. **Cauchy-Euler**

$x = e^t \qquad y' = \frac{1}{x} \frac{dy}{dt} \qquad y'' = \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)$ ile

$\dfrac{d^2y}{dt^2} + y = \sin t \qquad\qquad r^2 + 1 = 0 \qquad\qquad r = \mp i$

$\boxed{y_h = C_1 \cos t + C_2 \sin t}$

$y_p = t(A\cos t + B\sin t)$

$A = -\frac{1}{2}, \quad B = 0$

$\boxed{y_p = -\frac{1}{2} t \cos t}$

$y_g = C_1 \cos t + C_2 \sin t - \frac{t}{2}\cos t \qquad\qquad t = \ln x \text{ ile}$

$\boxed{y_g(x) = C_1 \cos(\ln x) + C_2 \sin(\ln x) - \frac{1}{2}\ln x \left(\cos(\ln x)\right)}$

3. $x^2(1-\ln x)y'' + xy' - y = \dfrac{(1-\ln x)^2}{x}$ denkleminin homojen kısmına ait lineer bağımsız iki çözüm

$y_1 = x$ ve $y_2 = \ln x$ olduğuna göre denklemin özel çözümünü elde ediniz.

$$\boxed{y_h = C_1 x + C_2 \ln x}$$ $$\boxed{y_p = C_1(x) \cdot x + C_2(x) \ln x}$$

$$C_1' x + C_2' \ln x = 0$$

$$C_1' \cdot 1 + C_2' \cdot \frac{1}{x} = \frac{(1-\ln x)^2 \cdot x}{x(x^2)(1-\ln x)}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} C_1' x + C_2' \ln x = 0 \\[2mm] C_1' x + C_2' = \dfrac{1-\ln x}{x^2} \end{array}}$$

$$C_2' = \frac{1}{x^2}$$

$$\boxed{C_2 = -\frac{1}{x}}$$

$$C_1' = -\frac{\ln x}{x^3} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{C_1 = \frac{1+2\ln x}{4x^2}}$$

$$\boxed{y_p = \frac{1-2\ln x}{4x}}$$

$$\left(y_g = C_1 x + C_2 \ln x + \frac{1-2\ln x}{4x} \right)$$

4. $y'' + 2y' + y = 3xe^{-x}$
$y(0) = 4, \ y'(0) = 2$

Probleminin çözümünü Laplace dönüşümü yardımıyla bulunuz.

$L\{y(x)\} = Y(s)$

$L\{y^{(n)}\} = s^n Y(s) - s^{n-1} y(0) - s^{n-2} y'(0) - \ldots - y^{(n-1)}(0)$

$L\{f(x)\} = F(s) \Rightarrow L\{e^{ax} f(x)\} = F(s-a)$

$$L\left\{ y'' + 2y' + y \right\} = L\left\{ 3xe^{-x} \right\}$$

$$\left(s^2 + 2s + 1 \right) Y(s) - 4s - 10 = \frac{3}{(s+1)^2}$$

$$Y(s) = \frac{4s+10}{(s+1)^2} + \frac{3}{(s+1)^4} = \frac{3}{(s+1)^4} + \frac{4}{s+1} + \frac{6}{(s+1)^2}$$

$$\Rightarrow y(x) = L^{-1}\left\{ \frac{3}{(s+1)^4} + \frac{4}{s+1} + \frac{6}{(s+1)^2} \right\}$$

$$\boxed{ y(x) = 4e^{-x} + 6xe^{-x} + \frac{1}{2} x^3 e^{-x} }$$