Tarih: 02/02/2024
Saat : 09.00 – 10.15

ADI SOYADI:

ÖĞRENCİ NO:

DİFERENSİYEL DENKLEMLER DERSİ BÜTÜNLEME SINAVI

SORU 1	SORU 2	SORU 3	SORU 4	TOPLAM

AÇIKLAMA: Sınav süresi 75 dakikadır. Sorular eşit puanlıdır. İşlem yapılmadan verilen cevaplar dikkate alınmayacaktır. Başarılar dileriz.

---

1. $(2x+3y)dx+(y-x)dy=0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.
2. $2p^2(y-xp)=1$ denkleminin genel ve varsa tekil çözümlerini elde ediniz.
3. $y''+xy'+(x^2-3)y=0$ denkleminin çözümünü $x=0$ noktası komşuluğunda kuvvet serileri yardımıyla bulunuz.
4. $xy''+2(1-x)y'+(x-2)y=2e^x$ denkleminin homojen kısmının bir özel çözümü $y_1=e^x$ olduğuna göre genel çözümünü mertebe düşürme yöntemiyle bulunuz.

1) $(2x+3y)dx+(y-x)dy=0$

Denklem homojen olduğdan $y=vx$ dön uygulanırsa

$y'=v'x+v$ ile $xv'+v=\dfrac{2x+3vx}{x-vx}=\dfrac{2+3v}{1-v}$

$$\Rightarrow xv'=\frac{v^2+2v+2}{1-v} \Rightarrow \frac{1-v}{v^2+2v+2}dv=\frac{dx}{x}$$

veya $\dfrac{dx}{x}+\dfrac{v-1}{v^2+2v+2}dv=0$

$$\Rightarrow \ln x+\frac{1}{2}\ln(v^2+2v+2)-2\arctan(v+1)=C$$

$v=\dfrac{y}{x}$ ile

$$\boxed{\ln(y^2+2xy+2x^2)-4\arctan\frac{x+y}{x}=C}$$

2) $2p^2(y-xp)=1 \Rightarrow y=xp+\dfrac{1}{2p^2}$ Clairaut

x'e göre türev alınırsa

$$p=p+x\frac{dp}{dx}-\frac{1}{p^3}\frac{dp}{dx} \Rightarrow \frac{dp}{dx}\left(x-\frac{1}{p^3}\right)=0$$

$\dfrac{dp}{dx}=0 \Rightarrow p=c \Rightarrow \boxed{2c^2(y-cx)=1}$ Genel çözüm

$$\left.\begin{aligned} y&=xp+\frac{1}{2p^2} \\ x-\frac{1}{p^3}&=0 \end{aligned}\right\} \boxed{y=\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}}$$ Aykırı çözüm

3) $y'' + xy' + (x^2-3)y = 0$ $\quad x=0$ adi nokta

$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$ ile

$(2a_2 - 3a_0) + (6a_3 - 2a_1)x + \sum_{n=2}^{\infty} \{(n+1)(n+2)a_{n+2} + (n-3)a_n + a_{n-2}\} x^n = 0$

elde edilir

$a_2 = \frac{3}{2} a_0 \quad a_3 = \frac{1}{3} a_1 \quad a_{n+2} = -\frac{(n-3)a_n + a_{n-2}}{(n+1)(n+2)}, \; n \geq 2$

$a_4 = \frac{1}{24} a_0 \quad a_5 = -\frac{1}{20} a_1 \quad \ldots$

$$\boxed{y = a_0\left(1 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{37}{720}x^6 + \ldots\right) + a_1\left(x + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{20}x^5 + \ldots\right)}$$

---

4) $xy'' + 2(1-x)y' + (x-2)y = 2e^x$

$y_1 = e^x \quad y = e^x u \quad y' = e^x u + e^x u'$

$y'' = e^x u + 2e^x u' + e^x u''$ ile

denklem, $xu'' + 2u' = 2$ şekline indirgenir

$u' = v$ ile $xv' + 2v = 2$ $\quad \boxed{v = \frac{c_1}{x^2} + 1}$

$u' = \frac{c}{x^2} + 1 \Rightarrow \boxed{u = x - \frac{c_1}{x} + c_2}$

$$\boxed{y = \left(x - \frac{c_1}{x} + c_2\right)e^x}$$