אינדיקטורים:

תוחלת: $E(X_i) = P(X_i = 1)$ **שונות:** $Var(X_i) = P(X_i = 1) \cdot P(X_i = 0)$ ***or*** $Var(X_i) = E(X_i^2) - E(X_i^2)$

COV: $Cov(X_i, X_j) = P(X_i = 1, X_j = 1) - P(X_i = 1) \cdot P(X_i = 0)$

מ"מ פיצול לאינדיקטורים:

תוחלת: $E(X) = E(\Sigma X_i) = \Sigma E(X_i)$ **שונות (שאין תלות בין אינדיקטורים):** $Var(X) = \Sigma Var(X_i)$. **יש תלות:** $= \Sigma \mathrm{Var}(X_i) + 2 \cdot \Sigma_{i<j} Cov(X_i, X_j)$

אי שוויוניים:

מרקוב: אם X הוא משתנה מקרי אי שלילי, $t > 0$ אז $P(X \geq t) \leq \frac{E(X)}{t}$.

הערה: אם t קרוב לממוצע אז מרקוב לא יעיל, צריך שיהיה גדול כדי שיהיה לנו חסם.

צ'בישב: אם X מ"מ עם שונות סופית $t > 0$ אז, $P(|X - E(X)| \geq t) \leq \frac{Var(x)}{t^2}$.

הערה: כאשר שמים את הערך מוחלט אנחנו מגדילים את ההסתברות לכן אם רוצים ללא ערך מוחלט זה עדיין עובד רק שזה יותר קטן מהערך המוחלט.

צ'רנוף: אם $X_1, X_2 \dots X_n$ מ"מ ב"ת המחזירים ערכים בטווח $[0,1]$ ואם $X = \Sigma X_i$ אז:

1. רוצה לדעת מה המרחק כמו צ'בישב: לכל $t > 0$ מתקיים:
   $P(X \geq E(X) + t) \leq e^{\frac{-2t^2}{n}}$ וגם $P(X \leq E(X) - t) \leq e^{\frac{-2t^2}{n}}$ או לחלופין
   $P(|X - E(X)| \geq t) \leq 2e^{\frac{-2t^2}{n}}$.
   ככל ש t גדול אנחנו יורדים אספוננציאלית בניגוד לצ'בישב ולכן חזק יותר.
   וגם בכיוון ההפוך .
2. ולכן $\epsilon > 0$ מתקיים: $P(X \leq (1 - \epsilon)E(X)) \leq e^{-\frac{\epsilon^2 E(X)}{2}}$.
3. אם $\epsilon \leq \frac{3}{2}$ בנוסף למקודם, אז: $P(X \geq (1 + \epsilon)E(X)) \leq e^{-\frac{\epsilon^2 E(X)}{3}}$

צ'רנוף הופדינג: אם $X_1, X_2 \dots X_n$ מ"מ ב"ת כך ש: $\frac{1}{2} = P(X_i = 1) = P(X_i = -1)$, ואם $X = \Sigma X_i$ אז: לכל $t > 0$ מתקיים $P(X \geq t) \leq e^{-\frac{t^2}{2n}}$ וגם $P(X < -t) \leq e^{-\frac{t^2}{2n}}$.

משפטי גבול:

החוק החלש של המספרים הגדולים:

נתונה לנו סדרה מ"מ $\{X_n\}$ ב"ת אחד בשני על אותו מרחב עם תוחלת μ (תוחלת שווה) לכל אחד. אזי לכל $\varepsilon > 0$ מתקיים:

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\left|\frac{X_1 + \cdots X_n}{n} - \mu\right| \geq \varepsilon\right) = 0$$

- **אינטואיציה:** ממוצע התוצאה של הטלת קובייה הוא 3.5 ככל שנטיל יותר קוביות (יותר מ"מ, בנוסחה כל X_i הוא תוצאת הטלת הקובייה ה i) הממוצע (חישוב הסכום וחלוקה במספר הקוביות) יתקרב ל3.5 יותר ויותר עד שההסתברות לחרוג מהממוצע אפילו במקצת שואפת ל0.

החוק החזק של המספרים הגדולים: (אומר אותו דבר אבל מחמיר יותר)

נתונה לנו סדרה מ"מ $\{X_n\}$ ב"ת אחד בשני על אותו מרחב עם תוחלת μ לכל אחד ושונות סופית. אזי מתקיים:

$$\mathrm{P}\left(\lim_{n \to \infty} \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} = \mu\right) = 1$$

- בהוכחה הגבלנו לשונות סופית כדי להשתמש בצ'בישב.

מושגים מכלילים את החוקים לעיל:

-התכנסות בהסתברות: סדרת משתנים מקריים $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ **מתכנסת בהסתברות** למ"מ X .
פורמלית: $X_n \to^P X$ אם לכל $\varepsilon > 0$ מתקיים: $\lim_{n \to \infty} P(\{\omega \in \Omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon\}) = 0$
החוק החלש זה מקרי פרטי של זה.
התכנסות כמעט בוודאות: סדרת משתנים מקריים $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ **מתכנסת כמעט בוודאות** למ"מ X .
פורמלית: $X_n \to^{a.s} X$.אם מתקיים: $P(\{\omega \in \Omega : \lim_{n \to \infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}) = 1$

דוגמה: $X \equiv 0$ והסדרה $\{X\}_n^{\infty}$ לכל X_n: $X_n \sim \begin{cases} n, 1/n^2 \\ 0, 1 - 1/n^2 \end{cases}$:

- $X_n \to^p X$: $\lim_{n \to \infty} P(|X_n - X| \geq \varepsilon) = \lim_{n \to \infty} P(X_n = 1) = \lim_{n \to \infty} 1/n^2 = 0$
  רק כאשר $X_n = 1$ נקבל ש $|X_n - 0| \geq \varepsilon$ לכן זה שקול להסתברות $P(X_n = 1)$.
- $X_n \nrightarrow^{a.s} X$: נבדוק האם קיים אינדקס כלשהו m כך שמהאינדקס הזה כל איברי הסדרה שווים לX.
  נחשב את $\mathrm{P}\left(\lim_{n \to \infty} X_n = X\right) = \prod_{n=m}^{\infty} P(X_n = X) = \prod_{n=m}^{\infty} P(X_n = 0) = \prod_{n=m}^{\infty} 1 - \frac{1}{n^2} \leq \prod_{n=m}^{\infty} e^{-\frac{1}{n^2}} = e^{\Sigma_{n=m}^{\infty} - \frac{1}{n^2}} = 0 \neq 1$

הערה: **כלי חשוב בחסמים - חסם איחוד:** $(union\ bound) = P(\bigcup_{i=1}^n A_i) \leq \Sigma_{i=1}^n P(A_i)$ מוותרים על הכלה והדחה ולכן לא מוותרים על החיתוכים ולכן זה הסכום גדול יותר מהאיחוד.

השיטה ההסתברותית:

מומנט ראשון (חסם חלש וליניארי – מרקוב) – לראות שאין משהו.

נדבר בדרך כלל על **משתנים מקריים עם מספרים שלמים** ולכן: $P(X>0)=P(X\geq 1)$

ואז לפי מרקוב: $P(X>0)=P(X\geq 1)\leq \frac{E(X)}{1}=E(X)$

ולכן פשוט נוכל לחשב תוחלת ובאמצעותה לדעת האם $E(X)$ חיובי או לא.

בנוסף: נשתמש בשיטה זו כדי לחשב גבולות. אם ככל ש n גדל התוחלת שואפת ל0 זה אומר ש: $\lim_{(n\to\infty)} P(X=0)=1$. כי הקיום תלוי בתחולת ואם התוחלת שואפת ל0 אז הקיום שואף ל0 ולכן ערכו של X יהיה 0 בהסתברות השואפת ל1.

מומנט שני (חסם חזק וריבועי – צ'בישב) – להראות שיש משהו.

כאשר התוחלת שואפת ל1 ומעלה ואז לא נותנת לנו שום חסם.

$$P(X=0)=P\big(X-E(X)=-E(X)\big)\leq P\big(|X-E(X)|=E(X)\big)\leq P\big(|X-E(X)|\geq E(X)\big)\leq \frac{Var(X)}{E(X)^2}$$

כאן המטרה הסופית היא להראות ש: $P(X=0)\leq\cdots\to 0$ ולכן $P(X=0)\to 0$.

טריק לVar של אינדיקטור: $Var(X)=E(X_i^2)-E(X_i)^2\leq E(X_i^2)$ (מקל בחישובים).

גרפים אקראיים : מודל בשיטה ההסתברותית (הוכחות שמשהו קיים או לא קיים דרך הסתברות) כדי להוכיח תוכנות של גרפים.

מודלים של גרפים אקראיים:

- **$G(n,m)$ –** מרחב הסתברות של כל הגרפים עם n קוד' וm צלעות.
  לכל ההסתברות היא על "איפה להניח את הצלעות".
  מה ההסתברות לכל גרף ספציפי? בחר m מקומות מתוך ה $\binom{n}{2}$ הפוטנציאליים לצלע. לכן זה 1 חלקי כמות הגרפים השונים שיש עם n קודקודים וm צלעות $\binom{\binom{n}{2}}{m}$
  כלומר : $P\big(G\in G(n,m)\big)=\frac{1}{\binom{\binom{n}{2}}{m}}$. זו התפלגות אחידה.
- **$G(n,p)$ –** מרחב הסתברות של כל הגרפים על n קוד' כאשר כל צלע אפשרית בגרף היא נמצאת בהסתברות p. כאן זו לא התפלגות אחידה כי : $P\big(G\in G(n,p)\big)=p^{|E|}(1-p)^{\binom{n}{2}-|E|}$.

תוכנות של גרפים: תכונה Q של גרפים יכולה לתאר לדוגמה: גרף קשיר, יש קודקוד בודד בגרף וכו'..
כאשר גרף G מקיים את התכונה נסמן $G\in Q$, כלומר, תכונה היא קבוצת כל הגרפים שמקיימים אותה.

תכונה מונוטונית: (שייך ל $G(n,p)$)

- **עולה:** תכונה מונוטונית עולה אם הוספה של צלעות יכולה לקיים אותה או לשמור את הקיום אך לא לגרום לתכונה לא להתקיים. (ככל שמוסיפים צלעות יותר טוב לתכונה). פורמאלית: $P(G(n,p_1)\in Q)\leq P(G(n,p_2)\in Q)$ כאשר $p_1\leq p_2$.
  או $P(G(n,m)\in Q)\leq P(G(n,m+1)\in Q)$.
- **יורדת:** באותו אופן, ככל שמוסיפים צלעות, יורד הסיכוי לקיים את התכונה.

סף תכונה ספציפית Q: פונקציה של הסתברויות, לכל גרף עם n קוד' יש הסתברות לצלע התלויה בn: $p(n)$.

$p(n)$ המקיימת: שאם ההסתברות לצלע קטנה בסדר גודל מ$p(n)$ התכונה לא תתקיים ואם ההסתברות לצלע גדולה בסדר גודל מ$p(n)$ אז התכונה כן תתקיים.במילים אחרות, מהו הגבול בו עוברים מלא לקיים את התכונה לכן לקיים את התכונה?.

פורמאלית: פונקציה $p(n)$ היא סף אם:

- $p=\omega(p(n))$ אז $P(G(n,p)\in Q)\to 1$ - אם טיפה ירדנו מהגבול – ההסתברות שואפת ל0.
- $p=o(p(n))$ אז $P(G(n,p)\in Q)\to 0$ - אם טיפה עברנו את הגבול – ההסתברות שואפת ל1.

הערה: נשים לב ש $o(1)\to 0$ ואז שמבקשים את הסף בודקים מתי זה קורה.

סף חד: p_0 יקרא סף חד של תכונה Q מונוטונית עולה אם :

- $p\geq(1+\epsilon)p_0$ אז $P(G(n,p)\in Q)\to 1$.
- $p=(1+\epsilon)p_0$ אז $P(G(n,p)\in Q)\to 0$.

הערה: בעוד שלכל תכונה מונוטונית עולה יש סף לא בהכרח שיש לה סף חד.

טענות עזר: $(1-x)^n\leq e^{-xn}$, $x=e^{\ln x}$.

טענות עזר 2: $(1-x)\leq e^{-x}\ or\ (1-x)\geq e^{-(x+x^2)}$

אלגוריתמים אקראיים:

1. **לאס וגאס –** אלגו' שתמיד צודק בתשובה אבל זמן הריצה שלו תלוי במשתנה מקרי.
2. **מונטה קרלו –** אלגו' שטועה בהסתברות (בדרך כלל נמוכה) :
   a. **טעות חד צדדית:** אם צריך להחזיר $true$ אז האלגוריתם תמיד צודק. אם צריך להחזיר $false$ אז האלגוריתם יכול להחזיר $true$ בהסתברות נמוכה.

b. **טעות דו צדדית:** בכל מקרה יש טעות בהסתברות (בדרך כלל נמוכה).

הערה: בדרך כלל הם יהיו אלגו' פשוטים, הניתוח ההסתברותי יהיה בדרך כלל יותר מסובך. כמעט תמיד נשתמש באינדיקטורים.

שיטות:

1. בדרך כלל מדובר בבחירה אקראית מתוך קבוצה של איברים.
2. חזרה על התהליך מספר פעמים מקטינה את ההסתברות לטעות.

מרחב הסתברות רציף:

במרחב ההסתברות כזה: $P: P(\Omega) \to [0,1]$

1. $P(\omega) = 0$
2. $P(A) = 0$ לכל A בת מניה.
3. $0 \le P(X) \le 1$.
4. $P(\Omega) = 1$

לא חייבים לדבר על כל תתי הקבוצות, לעיתים ניתן לדבר על חלק מהם. במקרה כזה תת הקבוצה: $F \subseteq P(\Omega)$ תקרא סיגמא אלגברה: הקבוצה שיש בה את הקבוצה הריקה, את הכל והיא סגורה לפעולות על קבוצות כאשר מספר הפעולות הוא בן מניה.

משתנים מקריים רציפים:

משתנה X על מרחב הסתברות (R, F, P) יקרא משתנה מקרי רציף אם קיימת פונקציה: $f_X: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ כך ש: $P(X \in A) = \int_A f_X(x)dx$.
לפונקציה f_X קוראים פונקציית צפיפות.

תכונות:

1. $P(X = a) = \int_a^a f_X(x)dx = 0$
2. $P(X \in \mathbb{R}) = P(\mathbb{R}) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$
3. $P(a \le X \le b) = P(a < X < b) = \int_b^a f_X(x)dx$

מסקנה – כדי להוכיח שמדובר במרחב הסתברותי צריך להוכיח שהאינטגרל על הכל שווה ל1 ($\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx$).

פונקציית צפיפות מצטברת: $F_X(a) = P(X \le a) = \int_{-\infty}^{a} f_X(x)dx$

$\int_a^b f_X(x)dx = F_X(b) - F_X(a)$ כי אם רוצים את השטח בין a לb אז לוקחים את כל השטח ממינוס אינסוף עד b ומורידים את השטח ממינוס אינסוף עד a.

תוחלת של משתנה מקרי רציף:

עבור משתנה רציף נקבל ש: $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)dx$

תכונות של תוחלת:

1. ליניאריות התוחלת נשמרת: $E(aX + b) = aE(X) + b$.
2. $E\big(g(X)\big) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_X(x)dx$.

שונות:

$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$

תכונות:

1. $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$

(כמו מה שהיה במרחב בדיד.)

התפלגויות מיוחדות:

1. **התפלגות אחידה רציפה בקטע $[a, b]$:**
   פונקציית הצפיפות היא: $f_X(x) = \frac{1}{b-a}\ if\ a \le x \le b$
   פונ' הצפיפות המצטברת: $F_X(x) = \frac{x-a}{b-a}\ if a \le x \le b, 1\ if\ x > b, 0\ if\ x < a$
   בצורה אחרת: $F_X(x) = P(X \le x) \begin{cases} 0\ , x < a \\ \frac{x-a}{b-a}\ , a \le x \le b \\ 1\ , x > b \end{cases}$
   תוחלת: $E(X) = \frac{a+b}{2}$
   שונות: $Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

2. **התפלגות אקספוננציאלית\מעריכית : פרמטר λ.**
   פונקציית הצפיפות היא: $f_X(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x}\ if\ x \ge 0, 0\ if\ x < 0$

פונ' הצפיפות המצטברת: $F_X(x) = P(X \le x) = 1 - e^{-\lambda x}\ if\ x \ge 0\ ,0\ if\ x < 0$

בצורה אחרת: $F_X(x) = P(X \le x)\begin{cases} 0\ ,x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x},\ x \ge 0 \end{cases}$

תוחלת: $E(X) = \frac{1}{\lambda}$

שונות: $Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

<u>תכונה שהתפלגות זו מקיימת:</u> <u>חוסר זיכרון.</u>

במילים אחרות: $P(X > s + t | x > t) = P(X > s).P(X > s + t) = P(X > s) \cdot P(X > t)$

<u>משפט:</u> משתנה רציף אי-שלילי יהיה חסר זיכרון **אם ורק אם** הוא מתפלג מעריכית.

3. התפלגות נורמלית: פרמטרים – ממוצע μ ושונות σ^2 כאשר $\sigma > 0$ היא סטיית תקן.

פונקציית הצפיפות היא: $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$.

פונ' הצפיפות המצטברת: לא קיימת פונקציה סגורה נורמאלית. משתמשים בדרך כלל בהזזה להתפלגות נורמאלית סטנדרטית.

<u>התפלגות נורמאלית סטנדרטית:</u>

התפלגות נורמאלית כך ש: $\mu = 0$ ו$\sigma = 1$.

בדרך כלל טבלת הערכים היא על ההתפלגות הסטנדרטית.

פונ' הצפיפות המצטברת של ההתפלגות הסטנדרטית: $P(X \le x) \approx \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$.

הסימון הוא עבור התפלגות נורמאלית הסטנדרטית.

לפונקציה הזו יש טבלת ערכים.

בטווח ידוע נקבל ש: $P(a \le X \le b) \approx \Phi(b) - \Phi(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{a}^{b} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

תוחלת: $E(X) = \mu$. בסטנדרטית =0.

שונות: $Var(X) = \sigma^2$. בסטנדרטית =1.

(כשמקבלים תרגיל בהתפלגות נורמלית נהפוך לנורמלי סטנדרטי ע"י הורדת E וחילוק בVAR ואז נעשה את כל החישוב על הנורמלי סטנדרטית שיהיה יותר קל ולבסוף למה שקבלנו בנורמלי סטנדרטי נהפוך חזרה לנורמלי בעזרת

$E(aX + b) = aE(X) + b\ Var(aX + b) = a^2Var(X)$:

<u>תכונות:</u>

א. אם X מתפלג נורמאלית עם ממוצע μ ושונות σ^2 וגם $Y = aX + b$.
אז Y מתפלג נורמאלית עם ממוצע $a\mu + b$ ושונות: $a^2\sigma^2$.
לכן כדי להמיר משתנה שמתפלג נורמאלית למשתנה מתפלג נורמאלית סטנדרטית:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

ב. לכל $x \in R$. $\Phi(x) + \Phi(-x) = 1$. במילים אחרות: $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

ג. $E\big(X \cdot g(X)\big) = E\big(g'(X)\big)$ כי יש לפתוח כך: $E\big(X \cdot g(X)\big) = \int f_X(x) \cdot g(x)$.

<u>משפט הגבול המרכזי:</u>

אם $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ סדרה של אינסוף משתנים מקריים:

1. ב"ת אחד בשני
2. בעלי התפלגות זהה עם תוחלת μ ושונות σ^2 (גם כן זהות) כאשר $\sigma > 0$.

אם נסמן לכל $n \in \mathbb{N}$: $Y_n = \frac{X_1 + \cdots X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$. כך ש$F_n$ היא פונקציית הצפיפות המצטברת של Y_n. אז:

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) \approx \Phi(x)$$

המשפט הופך כל סדרת משנים (עם התנאים לעיל) למשתנה נורמאלי סטנדרטי.

המשפט עוזר כאשר לא ידוע ההתפלגות אלא רק הממוצע וסטיית הקן או שידוע ההתפלגות אך היא קשה לחישוב ואנו רוצים חסמים על הסתברות מסוימת.

אם אין אינסוף משתנים אז המשפט נותן הערכה ולא משהו מדויק אבל צריך לפחות כמות גדולה של משתנים וניתן יהיה להתשמש בY_n עבור n ספציפי יחסית גדול.

<u>משפט: (*Berry – Esseen*)</u>

אם $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ סדרה של אינסוף משתנים מקריים:

1. ב"ת אחד בשני .
2. בעלי התפלגות זהה עם תוחלת 0 ושונות σ^2 (גם כן זהות) כאשר $\sigma > 0$.
3. בנוסף: $E(|X_i|^3) = \rho$

אם נסמן לכל $n \in \mathbb{N}$: $Y_n = \frac{X_1 + \cdots X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$. כך ש$F_n$ היא פונקציית הצפיפות המצטברת הסטנדרטית של Y_n. אז:

$$|F_n(x) - \Phi(x)| \le \frac{\rho}{\sigma^3\sqrt{n}}$$

המשפט מבטיח בהיתן התנאים הנוספים את הקצב שבו מתקרבים להתפלגות נורמאלית.

שם	תומך	התפלגות $\mathbb{P}$	תוחלת $\mathbb{E}$	שונות Var	דוגמא
אחידה $U(a,b)$	$\{a, a+1, \dots b\}$	$\mathbb{P}(X=k) = \frac{1}{\lvert b-a+1 \rvert}$	$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}$ **הוכחה:** נוסחא ← התפלגות אחידה ← ולהשתמש בנוסחא $\sum_{k=a}^{b} k = \frac{(b+a)\cdot(b-a+1)}{2}$	$Var(X) = \frac{(b-a+1)^2-1}{12}$ **הוכחה:** נרצה להזיז לקטע $(1,n)$. נגדיר משתנה מקרי $Y = X-a+1$ ונסמן $n = b-a+1$ לנוחות, נשים לי כי מתקיים $Var(X) = Var(Y+a-1) = Var(Y)$ ולכן מספיק להוכיח כי $Var(Y) = \frac{n^2-1}{12}$ נשים לב כי $Y \sim U(1,n)$ **המשך בדוגמא**	הטלת קובייה הוגנת כעת, נחשב תחילה את $\mathbb{E}(Y^2)$: $\mathbb{E}(Y^2) = \sum_y y^2 \cdot \mathbb{P}(Y=y) = \sum_{k=1}^{n} k^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k^2$ $= \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ $= \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$ כעת נחשב את $Var(Y)$: $Var(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - (\mathbb{E}(Y))^2$ $= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4}$ $= \frac{n+1}{12} \cdot [4n+2-3n-3]$
ברנולי $Ber(p)$ $\sim Bin(1,p)$	$\{0,1\}$	$\mathbb{P}(X=1) = p$ $\mathbb{P}(X=0) = 1-p$	$\mathbb{E}(X) = p + (1-p)\cdot 0 = p$	$Var(X) = p(1-p)$ **הוכחה** $\mathbb{E}(X^2) = \sum_{x \in S} x^2 \mathbb{P}(X=x) = p$	X סופר הצלחה 1 בסיכוי p או כישלון 0 בסיכוי $1-p$
בינומית $Bin(n,p)$ __טענה:__ $\mathbb{P}(X \le k)$ $= \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$	$[0,n]$ __טענה:__ יהיו $X_1, \dots, X_n$ __משתנים מקריים בלתי תלויים__ כך ש $X_i \sim Ber(p)$ לכל $i \in [1,n]$ ויהי $S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i$ אזי $S_n \sim Bin(n,p)$	$\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	$\mathbb{E}(X) = np$ **הוכחה:** יהי $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ כאשר כל X_i התפלגויות ברנולי בלתי תלויות ולכן: $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i) = np$	$Var(X) = np(1-p)$ **הכחה:** יהי $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ כאשר כל X_i התפלגויות ברנולי בלתי תלויות ולכן: $Var(X) = Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{(i=1)}^{n} Var(X_i) = nVar(X_1)$ $= n(1-p)p$	# עץ ב-n הטלות בלתי תלויות __הוכחה כי $Bin(n,p)$ היא התפלגות:__ **1**. נשים כי התומך בגודל $n+1$ ולכן סופי. **2**. נשים לב כי $\mathbb{P}(X=k) \ge 0$ (נראה $\sum_k \mathbb{P}(X=k) = 1$) ולכן $\mathbb{P}(X=k) \in [0,1]$ **3**. נראה כי $\sum_k \mathbb{P}(X=k) = 1$: $\sum_k \mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = 1^n$
גאומטרית $Geom(p)$ $\sim NB(1,p)$	$[1,\infty)$	$P(X=k) = p\cdot(1-p)^{k-1}$	$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$ **הוכחה:** נוסחא ← להחליף k ל $(k-1)+1$ ואז לפתוח סוגריים. לבסוף לקבל $\mathbb{E}(X) = (1-p)\cdot\mathbb{E}(X) + 1$ כאשר 1 מתקבל מסכום על התומך	$Var(X) = \frac{(1-p)}{p^2}$ $\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot \mathbb{P}(X=k) =$ $= \sum_{k=1}^{\infty} (k^2-2k+1)(1-p)^{k-1}p + \cdots$	X סופר ניסויים עד וכולל הצלחה ראשונה (תנאי עצירה) בסדרה לא מוגבלת של ניסויים **ב"ת** **דוגמא:** עד הפעם הראשונה שיוצא עץ אז $Geom(\mathbb{P}(\{\text{סיכוי שיצא עץ}\}))$
היפרגאומטרית $Hyp(D,N,n)$	$\{max(0, n+D-N), min(D,n)\}$	$\mathbb{P}(X=k) = \frac{\binom{D}{k}\cdot\binom{N-D}{n-k}}{\binom{N}{n}}$	$\mathbb{E}(X) = n \cdot \frac{D}{N}$ **הוכחה:** בעזרת $\binom{D}{N} = \frac{D}{N}\binom{D-1}{N-1}$ ולהוציא מהסיגמא $\frac{nD}{N}$	$Var(X) =$ $D \cdot n \cdot (N-D) \cdot \frac{(N-n)}{N^2\cdot(N-1)}$ **הוכחה:** בעזרת טריק $Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 =$ $\mathbb{E}(X^2-X) + \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)^2$	# הכדורים האדומים מכד עם N כדורים כאשר D מהם אדומים ובוחרים n כדורים __בלי החזרה__ $\mathbb{E}(X^2-X) = \mathbb{E}(X(X-1)) = \cdots$
פואסון $Poi(\lambda)$	$[0,\infty)$ אם מגרילים באופן אחיד $\pi \in S_n$ ומסמנים ב-X את מס' נק' השבת של π אז $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X=k) = e^{-1}\cdot\frac{1}{k!}$ כלומר כש $n \to \infty$ אזי $X \sim Poi(1)$.	$\mathbb{P}(X=k) = e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}$	$\mathbb{E}(X) = \lambda$ **הוכחה:** נוסחא ← $e^{-\lambda}\lambda\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$ ← טור טיילור	$Var(X) = \lambda$ **הוכחה:** בעזרת אותו **טריק**	לתמורה יש בדיוק k נק' שבת עבור המספרים $1,\dots,n$ __משפט הגבול הפואסוני:__ תהי $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה של הסתברויות, כך ש $\lim_{n\to\infty} n \cdot p_n = \lambda$ לאיזשהו $\lambda > 0$ ממשי אזי ההתפלגות הבינומית $Bin(n,p_n)$ שואפת להתפלגות $Poi(\lambda)$, כלומר לכל $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ מתקיים $\lim_{n\to\infty}\binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} = e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}$
בינומית שלילית $NB(r,p)$ אם המשתנים המקריים $X_1, \dots X_r \sim Geon(p)$ ובלתי תלויים אזי $X = \sum_{i=1}^{r} X_i \sim NB(r,p)$	$[r,\infty)$ זו אכן התפלגות כי התומך בן מנייה (תת קבוצה של N) ו $\binom{n-1}{r-1}\cdot p^r(1-p)^{n-r} \ge 0$ עבור כל $n \ge r$ טבעי. ניתן להוכיח כי $\sum_{n=r}^{\infty}\binom{n-1}{r-1}\cdot p^r(1-p)^{n-r} = 1$ ע"י הוכחה באינדוקציה על r ש- $\sum_{n=r}^{\infty}\binom{n-1}{r-1}\cdot(1-p)^{n-r} = p^{-r}$ ושימוש בזהות פסקל $\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m}$	$\mathbb{P}(X=n) =$ $\binom{n-1}{r-1}\cdot p^r(1-p)^{n-r}$	$\mathbb{E}(X) = \frac{r}{p}$ $\mathbb{E}(X)$ $= \sum_{n=r}^{\infty} n \cdot \mathbb{P}(X=n) = \cdots =$ $= \frac{r}{p}\underbrace{\sum_{n=r}^{\infty}\binom{n}{r} p^{r+1}(1-p)^{n-r}}_{=1 \to NB(r+1,p)} = \frac{r}{p}$	$Var(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}$ **הוכחה:** בעזרת אותו **טריק** (מתחיל **בדוגמא**) $= \frac{r(r+1)}{p^2}\cdot\sum_{m=r+2}^{\infty}\binom{m-1}{(r+2)-1}\cdot p^{r+2}\cdot(1-p)^{m-(r+2)}$ $= \frac{r^2+r}{p^2},$	נטיל מטבע עם הסתברות p לעץ עד שנקבל עץ r פעמים, כאשר כל ההטלות **בלתי תלויות**. נסמן ב-X את מס' ההטלות הכולל. $\mathbb{E}(X(X+1)) = \sum_{n=r}^{\infty} n(n+1)\cdot\binom{n-1}{r-1}\cdot p^r\cdot(1-p)^{n-r}$ $= r(r+1)\cdot\sum_{n=r}^{\infty}\binom{n+1}{r+1}\cdot p^r\cdot(1-p)^{n-r}$ $= \frac{r(r+1)}{p^2}\cdot\sum_{n=r}^{\infty}\binom{n+1}{r+1}\cdot p^{r+2}\cdot(1-p)^{n-r}$

__סד"פים:__

__**כאשר יש שאלה הוכיחו שקיים:**__
קודם כל נעשה את נתוני השאלה בצורה רנדומלית (נגיד צביעה נצבע רנדומלית), ואז נעשה אינדיקטור שבודק לי מה ההסתברות שמקרה פרטי לא עובד, ואז נבדוק מה ההסתברות שבכללי לא עובד וננסה להגיע לזה שזה קטן מ1.

__אי שוויונות:__

- אם יש $<$ ורוצים $\ge$ צריך לדעת שזה מגדיל את ההסתברות.
- פתיחת ערך מוחלט:
  - $P(\lvert X \rvert < a) \to P(-a < X < a)$
  - $P(\lvert X \rvert > a) \to P(X < -a \text{ or } X > a)$
- כדי להזיז משתנה X_i שהוא בטווח $[a,b]$ במקרה שלנו $[-1,1]$ אז צריך להחסיר את הערך התחתון ביותר ואז את כל התוצאה לחלק בערך העליון ביותר. כלומר $Y_i = \frac{(X_i - a)}{b-a}$.
- **צ'רנוף:**
  - חשוב שכל המ"מ יהיו בין $\{0,1\}$ – אחרת צריך לנרמל ולאחר הנרמול נראה איזה ערכים יכולים להיות לנו.
  - כאשר רוצים להגיע לצורה של צ'רנוף – **חשוב** לזכור מה התוחלת שלנו ולנסות למצוא אותו באי שיוויון. (אם לא להוסיף בכוח +-)
- **משפט הגבול המרכזי:**
  - לזכור שעושים שימוש בתוחלת והשונות של המשתנה הבודד ולא של הסכום.

__כתיבת אלגוריתם:__

- בדרך כלל האלגוריתם פשוט – "בחר כמות משתנים.. תחזיר את ה(--) שלהם"
- **אינטואיציה:** לחשוב מה היה הפתרון ללא מגבלת הזמן ריצה ואז נבחר איזה משתנה שיגביל ללא תלות (אם צריך).
- לזכור שצריך להדגיש שזה עם חזרות וללא תלות.
- להראות שהזמן ריצה קבוע ולא תלוי בn.
- **ניתוח אלגוריתם:**
  - **טיפ:** אנחנו יכולים לחשב הסתברות לפי הנחה שהקלט תקין ו\או שהקלט לא תקין (בדרך כלל אם הפלט זה "כן"\ "לא").
  - תמיד משתנים מקריים! (מחליף את הבחירה האקראית במשנה מקרי)
  - מיד לאחר הגדרת משתנים לחשב תוחלת.
  - לאחר כל זה נציב בהסתברות (בדרך כלל מסומן ב$\varepsilon >$ $\lvert condition \rvert$ כדי למצוא את החסם.)
    - **לשים לב:** חסמים נותנים לי לכל היותר לכן אם יש $1-\delta$ כנראה שצריך להפוך את ההסתברות. ז"א להחליף את האי שוויון.
  - **טריק:** כדאי לקחת את ההסתברות מהשאלה לכתוב אותה ואז לראות איך ניתן להמיר את נתוני השאלה למ"מ שלנו ולתוחלת שלו.
  - לאחר סידור ההסתברות מוצאים את האי שוויון הרלוונטי ומציבים.
  - נציב את התוצאה באי שיוון השני שאמור להתקיים מהאלגוריתם (קטן מ$1-\delta$ לדוגמה)

__השיטה הסתברותית:__

- שאלות של "הוכיחו כי קיים...." ותנאי מסוים.
- בשיטה הסתברותית: בוחרים דברים באופן אקראי ומוכיחים:
  - קיים – ההסתברות של מה שאנחנו רוצים גדול מ0

- לא קיים – ההסתברות של מה שאנחנו רוצים שווה ל0.
- **טיפ:** אחרי המילה "קיים" זה האלמנט ההסתברותי – תעשה את התנאי וההסתברות שזה "עומד בתנאי" זה גדול מ0 או שווה ל0.
- **טיפ 2:** יותר קל להוכיח מתי זה לא מתקיים.
- חלוקה למ"מ: התנאי של כל אחד בדרך כלל יהיה על הקבוצות.
- בשלב האחרון (לפעמים לאחר חסם איחוד) – יהיה צורך לבחון במה ההסתברות שלנו חסומה, האם זה שואף ל0 או לאינסוף.
- **טיפ 3:** ניקח את התנאי ונניח כי יש קבוצות שונות שמנסות לקיים אותו, לכל קבוצה נגדיר אינדיקטור "האם הקבוצה עומדת\לא עומדת בתנאי" – **מה עדיף??** כדאי לבדוק מתי "מספיק 1" כדי שיתקיים\לא יתקיים, כדי שנסכום אותם נעשה שימוש באיחוד ואז חסם איחוד.

דוגמה:

X_s – להיות אינדיקטור האם A_i היא קבוצה שלטת ב$G\left(n,\frac{1}{2}\right)$. $S=\Sigma_{i=1}^{\binom{n}{100}}X_S$

$E(X_s)=P(X_s=1)=1-P(X_s=0)=1-\frac{n-100}{2^{100}}$. לכן:

$$P(exists\ DomSet)=P(\cup X_S=1)\le\Sigma_{i=1}^{\binom{n}{100}}1-\frac{n-100}{2^{100}}\le\binom{n}{100}\left(1-\frac{n-100}{2^{100}}\right)\le n^{100}\cdot e^{-\frac{(n-100)}{2^{100}}}\to 0$$

- **טיפ 4:** אם גודל הקבוצות יכול להשתנות אז צריך לבחור לפי כל גודל את הקבוצות בגודל הזה והאם מישהו מקיים.

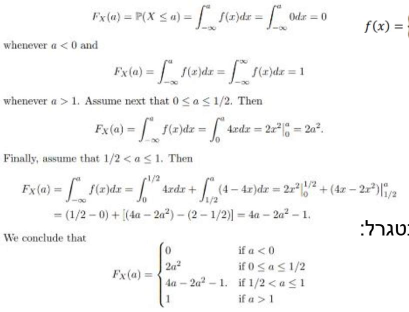
  יש קבוצה בגודל $1\le t\le n$ שמקיימת תכונה Q. $P(Good)=\Sigma^{t}P(\cup^{x}X_i=1)$ (x הכמות של הקבוצות שניתן לייצר).
- **טיפ 5:** יש חסמים שונים ל$choose$ – לא הדוק: $\binom{n}{k}\le n^k$ הדוק: $\binom{n}{k}\le\left(\frac{en}{k}\right)^k$
- **טיפ 6:** פיצול סיגמות – אם יש סיגמא עם חזקות ושברים שתלויים בt שתלוי בn :
  - ננסה להציב בחזקה את הערך הכי קטן ובשבר – נציב לפי הרצון להגדיל אותו.
  - אם זה לא עבד ננסה את הפיצול עד לנק' קטנה שגם תלויה בn (כמו $\sqrt{n}$) כך:
    - הסיגמא הראשון – מ1 עד הנק' פיצול שלנו שיהיה וארציה שונה וקטנה יותר מהn הכי גדול שניתן.
    - הסיכמה השנייה – מהוראציה הקטנה עד לn המקסימלי שניתן להגיע אליו.

<u>משתנה מקרי רציף ופונקציות צפיפות:</u>

- זה בעצם להפוך את ההסתברות $P(X\le a)$ לאינטגרל $\int_{-\infty}^{a}f_X(x)dx=1$ ה$f(x)$ היא פונקציה שיגדירו.
- **אינפי:** $\int_{-\infty}^{\infty}ae^{-|x|}=\int_{-\infty}^{0}ae^{x}+\int_{0}^{\infty}ae^{-x}=\lim_{b\to-\infty}ae^{0}-ae^{b}+\lim_{b\to\infty}-ae^{-b}+ae^{0}$ |
- **שאלות "מצאו את a,b" :**
  - אם יש לנו פונקציה מפוצלת אז צריך לעשות אינטגרל של מ.. עד.. לפי ערכי הפונקציה.
  - **חשוב לזכור:** צריך 2 משוואות לכן נעשה שימוש גם בפונקציית הצפיפות וגם בתוחלת.
  - לזכור: $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf_X(x)dx$ למשתנה רציף.
- **שאלות של "הסתברות שיש a פתרונות למשוואה":**
  - **טיפ:** שיש לנו $P(X>a)$ צריך לעשות: $1-P(X\le a)$.
  - לפי מה שיש בנוסחת השורשים מתחת לשורש: $b^2-4ac>0$, נבדוק מתי חיובי.

    אם הפרבולה בוכה או מחייכת ולפי זה נחליט מה התווך של המשתנה הרציף.
- **הוכח שפונקציה היא פונקציית צפיפות:** דוגמה←
  - צריך להראות שהאינטגרל שלה בין הערכים שווה בסוף ל1 (לפי תכונה 2).

$$f(x)=\begin{cases}4x & 0\le x<1/2\\ 4-4x & 1/2\le x\le 1\end{cases}$$



$$F_X(a)=\mathbb{P}(X\le a)=\int_{-\infty}^{a}f(x)dx=\int_{-\infty}^{a}0dx=0$$

whenever $a<0$ and

$$F_X(a)=\int_{-\infty}^{a}f(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=1$$

whenever $a>1$. Assume next that $0\le a\le 1/2$. Then

$$F_X(a)=\int_{-\infty}^{a}f(x)dx=\int_{0}^{a}4xdx=2x^2|_0^a=2a^2.$$

Finally, assume that $1/2<a\le 1$. Then

$$F_X(a)=\int_{-\infty}^{a}f(x)dx=\int_{0}^{1/2}4xdx+\int_{1/2}^{a}(4-4x)dx=2x^2|_0^{1/2}+(4x-2x^2)|_{1/2}^{a}$$
$$=(1/2-0)+[(4a-2a^2)-(2-1/2)]=4a-2a^2-1.$$

We conclude that

$$F_X(a)=\begin{cases}0 & \text{if } a<0\\ 2a^2 & \text{if } 0\le a\le 1/2\\ 4a-2a^2-1. & \text{if } 1/2<a\le 1\\ 1 & \text{if } a>1\end{cases}$$

- **הצגת פונקציית צפיפות מצטברת של מ"מ:**
  - **חשוב לזכור:** צריך להראות לפי a כלשהו ולהציג את פונ' הצפיפות לכל טווח הערכים.
  - **לזכור**: כי הטווח העליון תמיד יהיה a!
  - **צריך לבחון**: (הערך הכי קטן שמוגדרת פונ' הצפיפות) $\int_{-\infty}^{a}f_x(a):a<$

    וגם (הערך הכי גדול שבו מוגדרת פונ' הצפיפות) $\int_{-\infty}^{a}f_x(a):a>$ (תמיד = 1 לפי הגדרה!).

    לאחר מכן לפי הטווחים של הפונ', **אבל** להתחיל תמיד מ$-\infty$ עד a :

    אם פונ' הצפיפות מוגדרת בטווח כלשהו שהוא מתחת לגודל a (כמו בדוגמה למטה) צריך לעשות אינטגרל:
    - **הראשון**: מהערך הכי נמוך שמוגדרת הפונק' עד הערך הכי גדול **שהוא לא** בטווח של a.
    - **השני**: מהטווח הכי נמוך של a עד a.

<u>מתכנס בוודאות \ בהסתברות:</u>

דוגמה: $X\equiv 0$ והסדרה $\{X\}_n^{\infty}$ לכל X_n: $X_n\sim\begin{cases}n, & 1/n^2\\ 0, & 1-1/n^2\end{cases}$:

- $X_n\to^{p}X$: $\lim_{n\to\infty}P(|X_n-X|\ge\varepsilon)=\lim_{n\to\infty}P(X_n=1)=\lim_{n\to\infty}1/n^2=0$

  רק כאשר $X_n=1$ נקבל ש$|X_n-0|\ge\varepsilon$ לכן זה שקול להסתברות $P(X_n=1)$.
- $X_n\nrightarrow^{a.s}X$: נבדוק האם קיים אינדקס כלשהו m כך שמהאינדקס הזה כל איברי הסדרה שווים לX.

נחשב את $\mathrm{P}\left(\lim_{n\to\infty}X_n=X\right)=\prod_{n=m}^{\infty}P(X_n=X)=\prod_{n=m}^{\infty}P(X_n=0)=\prod_{n=m}^{\infty}1-\frac{1}{n^2}\le\prod_{n=m}^{\infty}e^{-\frac{1}{n^2}}=e^{\Sigma_{n=m}^{\infty}-\frac{1}{n^2}}=0\ne 1$

<u>נקודות לזכור:</u>

ספירה של צלעות בגוף: $\binom{n}{2}$ || ספירה של כמות מתוך סה"כ כל האופציות של צלעות: $\binom{\binom{n}{2}}{k}$|| נסמן משתנה מקרי X_i את הדרגה של i.

מכאן: $E(X_i)=\left(\frac{1}{2}\right)\cdot(n-1)<\frac{n}{2}$. בממוצע אני אהיה מחובר לחצי מכלל הקודקודים שאני יכול להתחבר אליהם ב$G\left(n,\frac{1}{2}\right)$. || לא קבוצה שלטת (תבחר קודקוד 1 שלא מהקבוצה כפול ההסתברות שהוא לא מחובר לאף אחד [החזקהx]) $\binom{n-x}{1}(p)^{x}$ - $G(n,p)$ || ההסתברות שיש קודקוד בודד:

$P(isolated\ vetex)\le 2n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n}=n\cdot 2^{1-n}\to 0$ || ההסתברות שיש שני קודקודים ללא שכן משותף: $P(u,v\ without\ commin\ neighbor)\le 2\cdot$

$\binom{n}{2}\cdot\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\right)^{n}\to 0$ ב$B\left(n,n,\frac{1}{2}\right)$.