Bezier Yüzeyleri

Kübik bir Bezier eğrisi oluşturmak için kontrol noktalarımızın üzerinden geçeceği tanımlamaları yapmamız gerekmektedir. Aşağıdaki formun grafiksel olarak görüntüsü bir eğridir.

$$(a+b)^3 = a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 + b^3$$

Bununla işlem yapmaya çalışırsak elimizde sadece 4 kontrol noktası bulunan bir Bezier Eğrisi bulunur.

Örnek verecek olursak:

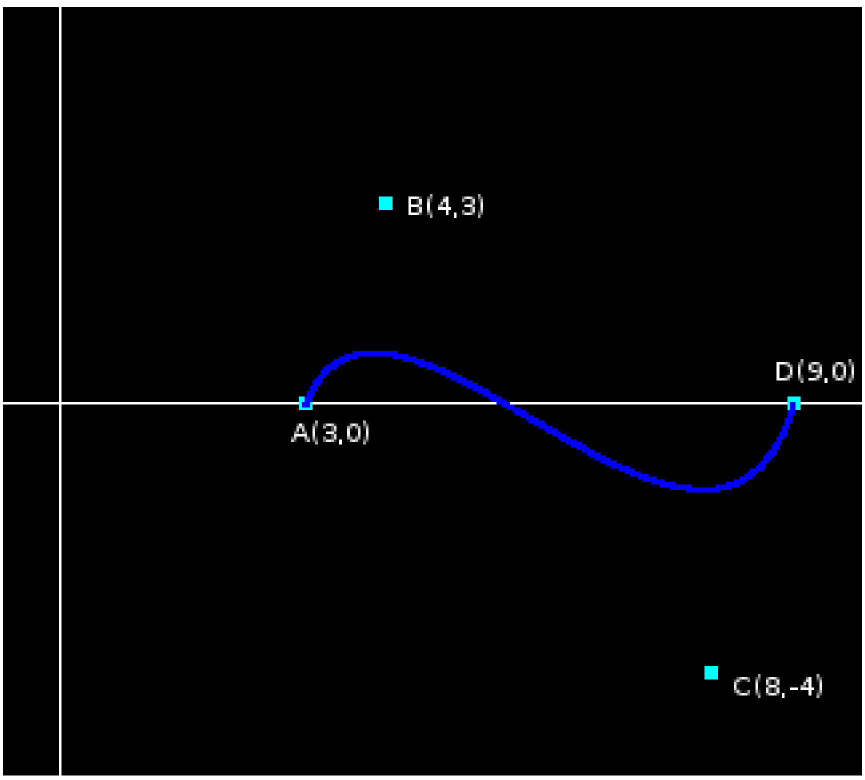
A(3,0), B(4,3), C(8,-4), D(9,0) noktalarını alırsak ve çizimin sadece istediğimiz aralıkta olmasını istediğimiz için daha önce bahsettiğimiz kübik formu kullanırsak:

Ax, A noktasının x koordinatını temsil eder ve diğer noktalar da buna benzer şekilde temsil edilir. Birbirinin tamamlayıcısı olması açısından a = 1-b 'dir.

$$X(a) = Ax \cdot a^3 + Bx \cdot 3 \cdot a^2 \cdot b + Cx \cdot 3 \cdot a \cdot b^2 + Dx \cdot b^3$$
$$Y(a) = Ay \cdot a^3 + By \cdot 3 \cdot a^2 \cdot b + Cy \cdot 3 \cdot a \cdot b^2 + Dy \cdot b^3$$
$$Z(a) = Az \cdot a^3 + Bz \cdot 3 \cdot a^2 \cdot b + Cz \cdot 3 \cdot a \cdot b^2 + Dz \cdot b^3$$

Bu üç boyutlu eğri formülüdür. Bizim örneğimizde iki boyutlu bir eğri oluşturacağız. Örnek verdiğimiz noktaları kullanırsak:

$$X(a) = 3 \cdot a^3 + 4 \cdot 3 \cdot a^2 \cdot b + 8 \cdot 3 \cdot a \cdot b^2 + 9 \cdot b^3$$
$$Y(a) = 0 \cdot a^3 + 3 \cdot 3 \cdot a^2 \cdot b \ \ -4 \cdot 3 \cdot a \cdot b^2 + 0 \cdot b^3$$



Bezier Yüzeyi ise iki bezier eğrisinin çarpımından oluşmaktadır. Yani:

1. Bezier eğrisinden 4 nokta,

$(a+b)^3 = a^3 + 3\cdot a^2\cdot b + 3\cdot a\cdot b^2 + b^3$

2. Bezier eğrisinden 4 nokta olmak üzere,

$(c+d)^3 = c^3 + 3\cdot c^2\cdot d + 3\cdot c\cdot d^2 + c^3$

Çarpımları sonucu 16 noktalı Beizer Yüzeyi oluşur:

$(a^3 + 3\cdot a^2\cdot b + 3\cdot a\cdot b^2 + b^3)\cdot(c^3 + 3\cdot c^2\cdot d + 3\cdot c\cdot d^2 + d^3) =$
$a^3\cdot c^3 + 3\cdot a^3\cdot c^2\cdot d + 3\cdot a^3\cdot c\cdot d^2 + a^3\cdot d^3$
$+ 3\cdot a^2\cdot b\cdot c^3 + 9\cdot a^2\cdot b\cdot c^2\cdot d + 9\cdot a^2\cdot b\cdot c\cdot d^2 + 3\cdot a^2\cdot b\cdot d^3$
$+ 3\cdot a\cdot b^2\cdot c^3 + 9\cdot a\cdot b^2\cdot c^2\cdot d + 9\cdot a\cdot b^2\cdot c\cdot d^2 + 3\cdot a\cdot b^2\cdot d^3$
$+ b^3\cdot c^3 + 3\cdot b^3\cdot c^2\cdot d + 3\cdot b^3\cdot c\cdot d^2 + b^3\cdot d^3$

Yukarıdaki formülasyon her eksen için uygulanmalıdır. Sonuçta:

$X(a,c) = Ax\cdot a^3\cdot c^3 + Bx\cdot 3\cdot a^3\cdot c^2\cdot d$
$+ Cx\cdot 3\cdot a^3\cdot c\cdot d^2 + Dx\cdot a^3\cdot d^3$
$+ Ex\cdot 3\cdot a^2\cdot b\cdot c^3 + Fx\cdot 9\cdot a^2\cdot b\cdot c^2\cdot d$
$+ Gx\cdot 9\cdot a^2\cdot b\cdot c\cdot d^2 + Hx\cdot 3\cdot a^2\cdot b\cdot d^3$
$+ Ix\cdot 3\cdot a\cdot b^2\cdot c^3 + Jx\cdot 9\cdot a\cdot b^2\cdot c^2\cdot d$
$+ Kx\cdot 9\cdot a\cdot b^2\cdot c\cdot d^2 + Lx\cdot 3\cdot a\cdot b^2\cdot d^3$
$+ Mx\cdot b^3\cdot c^3 + Nx\cdot 3\cdot b^3\cdot c^2\cdot d$
$+ Ox\cdot 3\cdot b^3\cdot c\cdot d^2 + Px\cdot b^3\cdot d^3$
İlk hesaplanacak değer aşağıdaki köşeye ait olacaktır.
$X(1,1) = 2\cdot 1^3\cdot 1^3 + 3\cdot 3\cdot 1^3\cdot 1^2\cdot 0$
$+ 6\cdot 3\cdot 1^3\cdot 1\cdot 0^2 + 9\cdot 1^3\cdot 0^3$
$+ 0\cdot 3\cdot 1^2\cdot 0\cdot 1^3 + 3\cdot 9\cdot 1^2\cdot 0\cdot 1^2\cdot 0$
$+ 6\cdot 9\cdot 1^2\cdot 0\cdot 1\cdot 0^2 + 10\cdot 3\cdot 1^2\cdot 0\cdot 0^3$
$+ 0\cdot 3\cdot 1\cdot 0^2\cdot 1^3 + 3\cdot 9\cdot 1\cdot 0^2\cdot 1^2\cdot 0$
$+ 6\cdot 9\cdot 1\cdot 0^2\cdot 1\cdot 0^2 + 10\cdot 3\cdot 1\cdot 0^2\cdot 0^3$
$+ 1\cdot 0^3\cdot 1^3 + 3\cdot 3\cdot 0^3\cdot 1^2\cdot 0$
$+ 6\cdot 3\cdot 0^3\cdot 1\cdot 0^2 + 7\cdot 0^3\cdot 0^3 = 2.0$
$Y(a,c) = Ay\cdot a^3\cdot c^3 + By\cdot 3\cdot a^3\cdot c^2\cdot d$
$+ Cy\cdot 3\cdot a^3\cdot c\cdot d^2 + Dy\cdot a^3\cdot d^3$
$+ Ey\cdot 3\cdot a^2\cdot b\cdot c^3 + Fy\cdot 9\cdot a^2\cdot b\cdot c^2\cdot d$
$+ Gy\cdot 9\cdot a^2\cdot b\cdot c\cdot d^2 + Hy\cdot 3\cdot a^2\cdot b\cdot d^3$
$+ Iy\cdot 3\cdot a\cdot b^2\cdot c^3 + Jy\cdot 9\cdot a\cdot b^2\cdot c^2\cdot d$
$+ Ky\cdot 9\cdot a\cdot b^2\cdot c\cdot d^2 + Ly\cdot 3\cdot a\cdot b^2\cdot d^3$
$+ My\cdot b^3\cdot c^3 + Ny\cdot 3\cdot b^3\cdot c^2\cdot d$
$+ Oy\cdot 3\cdot b^3\cdot c\cdot d^2 + Py\cdot b^3\cdot d^3$
$Z(a,c) = Az\cdot a^3\cdot c^3 + Bz\cdot 3\cdot a^3\cdot c^2\cdot d$
$+ Cz\cdot 3\cdot a^3\cdot c\cdot d^2 + Dz\cdot a^3\cdot d^3$
$+ Ez\cdot 3\cdot a^2\cdot b\cdot c^3 + Fz\cdot 9\cdot a^2\cdot b\cdot c^2\cdot d$
$+ Gz\cdot 9\cdot a^2\cdot b\cdot c\cdot d^2 + Hz\cdot 3\cdot a^2\cdot b\cdot d^3$
$+ Iz\cdot 3\cdot a\cdot b^2\cdot c^3 + Jz\cdot 9\cdot a\cdot b^2\cdot c^2\cdot d$
$+ Kz\cdot 9\cdot a\cdot b^2\cdot c\cdot d^2 + Lz\cdot 3\cdot a\cdot b^2\cdot d^3$

$+ Mz \cdot b^3 \cdot c^3 + Nz \cdot 3 \cdot b^3 \cdot c^2 \cdot d$
$+ Oz \cdot 3 \cdot b^3 \cdot c \cdot d^2 + Pz \cdot b^3 \cdot d^3$
Şeklinde bir sonuç elde edilir. Örnek verecek olursak:

A(2,0,1), B(3,2,-1), C(6,2,1), D(9,0,-1), E(0,3,1), F(3,4,-1), G(6,4,1), H(10,3,-1), I(0,5,1), J(3,6,-1), K(6,6,1), L(10,5,-1), M(1,9,1), N(3,8,-1), O(6,8,1),P(7,9,-1)

Öncelikle yukarıda a ve c değişkenli fonksiyonları yazdık fakat yüzey çizmek için bu noktaların normaline ihtiyacımız var bunu da dört aşamada gerçekleştireceğiz.

A değişkenine göre türev alıyoruz. B'ye göre almaya gerek yok zaten b'nin 1-a olduğunu biliyoruz. XDA a'ya göre türev alınmış X(a,c) demektir.

$$
\begin{aligned}
XDA(a,c) = {} & Ax \cdot 3 \cdot a^2 \cdot c^3 + Bx \cdot 9 \cdot a^2 \cdot c^2 \cdot d \\
& + Cx \cdot 9 \cdot a^2 \cdot c \cdot d^2 + Dx \cdot 3 \cdot a^2 \cdot d^3 \\
& + Ex \cdot 3 \cdot (2 \cdot a - 3 \cdot a^2) \cdot c^3 + Fx \cdot 9 \cdot (2 \cdot a - 3 \cdot a^2) \cdot c^2 \cdot d \\
& + Gx \cdot 9 \cdot (2 \cdot a - 3 \cdot a^2) \cdot c \cdot d^2 + Hx \cdot 3 \cdot (2 \cdot a - 3 \cdot a^2) \cdot d^3 \\
& + Ix \cdot 3 \cdot (1 - 4 \cdot a + 3 \cdot a^2) \cdot c^3 + Jx \cdot 9 \cdot (1 - 4 \cdot a + 3 \cdot a^2) \cdot c^2 \cdot d \\
& + Kx \cdot 9 \cdot (1 - 4 \cdot a + 3 \cdot a^2) \cdot c \cdot d^2 + Lx \cdot 3 \cdot (1 - 4 \cdot a + 3 \cdot a^2) \cdot d^3 \\
& + Mx \cdot 3 \cdot (2 \cdot a - 1 - a^2) \cdot c^3 + Nx \cdot 9 \cdot (2 \cdot a - 1 - a^2) \cdot c^2 \cdot d \\
& + Ox \cdot 9 \cdot (2 \cdot a - 1 - a^2) \cdot c \cdot d^2 + Px \cdot 3 \cdot (2 \cdot a - 1 - a^2) \cdot d^3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
YDA(a,c) = {} & Ay \cdot 3 \cdot a^2 \cdot c^3 + By \cdot 9 \cdot a^2 \cdot c^2 \cdot d \\
& + Cy \cdot 9 \cdot a^2 \cdot c \cdot d^2 + Dy \cdot 3 \cdot a^2 \cdot d^3 \\
& + Ey \cdot 3 \cdot (2 \cdot a - 3 \cdot a^2) \cdot c^3 + Fy \cdot 9 \cdot (2 \cdot a - 3 \cdot a^2) \cdot c^2 \cdot d \\
& + Gy \cdot 9 \cdot (2 \cdot a - 3 \cdot a^2) \cdot c \cdot d^2 + Hy \cdot 3 \cdot (2 \cdot a - 3 \cdot a^2) \cdot d^3 \\
& + Iy \cdot 3 \cdot (1 - 4 \cdot a + 3 \cdot a^2) \cdot c^3 + Jy \cdot 9 \cdot (1 - 4 \cdot a + 3 \cdot a^2) \cdot c^2 \cdot d \\
& + Ky \cdot 9 \cdot (1 - 4 \cdot a + 3 \cdot a^2) \cdot c \cdot d^2 + Ly \cdot 3 \cdot (1 - 4 \cdot a + 3 \cdot a^2) \cdot d^3 \\
& + My \cdot 3 \cdot (2 \cdot a - 1 - a^2) \cdot c^3 + Ny \cdot 9 \cdot (2 \cdot a - 1 - a^2) \cdot c^2 \cdot d \\
& + Oy \cdot 9 \cdot (2 \cdot a - 1 - a^2) \cdot c \cdot d^2 + Py \cdot 3 \cdot (2 \cdot a - 1 - a^2) \cdot d^3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
ZDA(a,c) = {} & Az \cdot 3 \cdot a^2 \cdot c^3 + Bz \cdot 9 \cdot a^2 \cdot c^2 \cdot d \\
& + Cz \cdot 9 \cdot a^2 \cdot c \cdot d^2 + Dz \cdot 3 \cdot a^2 \cdot d^3 \\
& + Ez \cdot 3 \cdot (2 \cdot a - 3 \cdot a^2) \cdot c^3 + Fz \cdot 9 \cdot (2 \cdot a - 3 \cdot a^2) \cdot c^2 \cdot d \\
& + Gz \cdot 9 \cdot (2 \cdot a - 3 \cdot a^2) \cdot c \cdot d^2 + Hz \cdot 3 \cdot (2 \cdot a - 3 \cdot a^2) \cdot d^3 \\
& + Iz \cdot 3 \cdot (1 - 4 \cdot a + 3 \cdot a^2) \cdot c^3 + Jz \cdot 9 \cdot (1 - 4 \cdot a + 3 \cdot a^2) \cdot c^2 \cdot d \\
& + Kz \cdot 9 \cdot (1 - 4 \cdot a + 3 \cdot a^2) \cdot c \cdot d^2 + Lz \cdot 3 \cdot (1 - 4 \cdot a + 3 \cdot a^2) \cdot d^3 \\
& + Mz \cdot 3 \cdot (2 \cdot a - 1 - a^2) \cdot c^3 + Nz \cdot 9 \cdot (2 \cdot a - 1 - a^2) \cdot c^2 \cdot d \\
& + Oz \cdot 9 \cdot (2 \cdot a - 1 - a^2) \cdot c \cdot d^2 + Pz \cdot 3 \cdot (2 \cdot a - 1 - a^2) \cdot d^3
\end{aligned}
$$

Daha sonra c'ye göre türev alıyoruz.

$$
\begin{aligned}
XDC(a,c) = {} & Ax \cdot 3 \cdot a^3 \cdot c^2 + Bx \cdot 3 \cdot a^3 \cdot (2 \cdot c - 3 \cdot c^2) \\
& + Cx \cdot 3 \cdot a^3 \cdot (1 - 4 \cdot c + 3 \cdot c^2) + Dx \cdot 3 \cdot a^3 \cdot (-1 + 2 \cdot c - c^2) \\
& + Ex \cdot 9 \cdot a^2 \cdot b \cdot c^2 + Fx \cdot 9 \cdot a^2 \cdot b \cdot (2 \cdot c - 3 \cdot c^2) \\
& + Gx \cdot 9 \cdot a^2 \cdot b \cdot (1 - 4 \cdot c + 3 \cdot c^2) + Hx \cdot 9 \cdot a^2 \cdot b \cdot (-1 + 2 \cdot c - c^2) \\
& + Ix \cdot 9 \cdot a \cdot b^2 \cdot c^2 + Jx \cdot 9 \cdot a \cdot b^2 \cdot (2 \cdot c - 3 \cdot c^2) \\
& + Kx \cdot 9 \cdot a \cdot b^2 \cdot (1 - 4 \cdot c + 3 \cdot c^2) + Lx \cdot 9 \cdot a \cdot b^2 \cdot (-1 + 2 \cdot c - c^2) \\
& + Mx \cdot 3 \cdot b^3 \cdot c^2 + Nx \cdot 3 \cdot b^3 \cdot (2 \cdot c - 3 \cdot c^2) \\
& + Ox \cdot 3 \cdot b^3 \cdot (1 - 4 \cdot c + 3 \cdot c^2) + Px \cdot 3 \cdot b^3 \cdot (-1 + 2 \cdot c - c^2)
\end{aligned}
$$

$YDC(a,c) = Ay \cdot 3 \cdot a^3 \cdot c^2 + By \cdot 3 \cdot a^3 \cdot (2 \cdot c - 3 \cdot c^2)$

$+ Cy\cdot 3\cdot a^3\cdot(1-4\cdot c+3\cdot c^2)$ $+ Dy\cdot 3\cdot a^3\cdot(-1+2\cdot c-c^2)$
$+ Ey\cdot 9\cdot a^2\cdot b\cdot c^2$ $+ Fy\cdot 9\cdot a^2\cdot b\cdot(2\cdot c-3\cdot c^2)$
$+ Gy\cdot 9\cdot a^2\cdot b\cdot(1-4\cdot c+3\cdot c^2)$ $+ Hy\cdot 9\cdot a^2\cdot b\cdot(-1+2\cdot c-c^2)$
$+ Iy\cdot 9\cdot a\cdot b^2\cdot c^2$ $+ Jy\cdot 9\cdot a\cdot b^2\cdot(2\cdot c-3\cdot c^2)$
$+ Ky\cdot 9\cdot a\cdot b^2\cdot(1-4\cdot c+3\cdot c^2)$ $+ Ly\cdot 9\cdot a\cdot b^2\cdot(-1+2\cdot c-c^2)$
$+ My\cdot 3\cdot b^3\cdot c^2$ $+ Ny\cdot 3\cdot b^3\cdot(2\cdot c-3\cdot c^2)$
$+ Oy\cdot 3\cdot b^3\cdot(1-4\cdot c+3\cdot c^2)$ $+ Py\cdot 3\cdot b^3\cdot(-1+2\cdot c-c^2)$

$ZDC(a,c) = Az\cdot 3\cdot a^3\cdot c^2$ $+ Bz\cdot 3\cdot a^3\cdot(2\cdot c-3\cdot c^2)$
$+ Cz\cdot 3\cdot a^3\cdot(1-4\cdot c+3\cdot c^2)$ $+ Dz\cdot 3\cdot a^3\cdot(-1+2\cdot c-c^2)$
$+ Ez\cdot 9\cdot a^2\cdot b\cdot c^2$ $+ Fz\cdot 9\cdot a^2\cdot b\cdot(2\cdot c-3\cdot c^2)$
$+ Gz\cdot 9\cdot a^2\cdot b\cdot(1-4\cdot c+3\cdot c^2)$ $+ Hz\cdot 9\cdot a^2\cdot b\cdot(-1+2\cdot c-c^2)$
$+ Iz\cdot 9\cdot a\cdot b^2\cdot c^2$ $+ Jz\cdot 9\cdot a\cdot b^2\cdot(2\cdot c-3\cdot c^2)$
$+ Kz\cdot 9\cdot a\cdot b^2\cdot(1-4\cdot c+3\cdot c^2)$ $+ Lz\cdot 9\cdot a\cdot b^2\cdot(-1+2\cdot c-c^2)$
$+ Mz\cdot 3\cdot b^3\cdot c^2$ $+ Nz\cdot 3\cdot b^3\cdot(2\cdot c-3\cdot c^2)$
$+ Oz\cdot 3\cdot b^3\cdot(1-4\cdot c+3\cdot c^2)$ $+ Pz\cdot 3\cdot b^3\cdot(-1+2\cdot c-c^2)$

Normal vektörleri bulmak için:

Nx = (YDA·ZDC)-(YDC·ZDA)
Ny = -((XDA·ZDC)-(XDC·ZDA))
Nz =(XDA·YDC)-(XDC·YDA)

Formüllerini kullanabiliriz. Burada bulduğumuz vektör Normalize edilmemiş vektördür. Normalize etmek için vektörlerin uzunluğu bulunur ve bu uzunluğa vektörler bölünür.

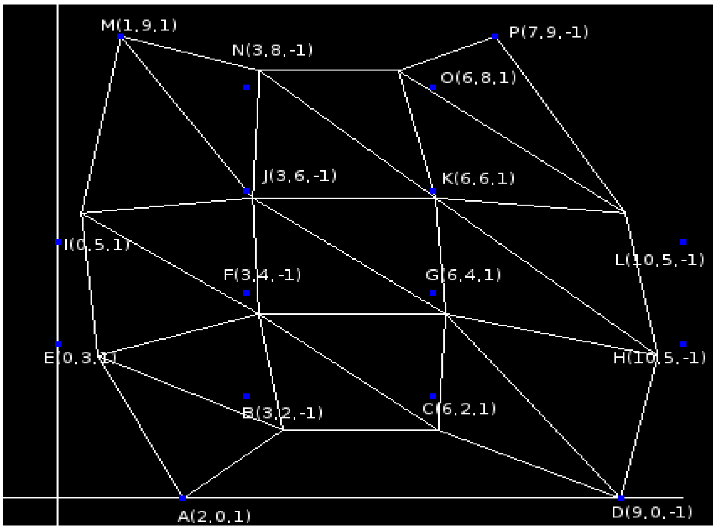
$L = \mathrm{sqrt}(Nx^2+Ny^2+Nz^2)$

Nx'= Nx/L
Ny'= Ny/L
Nz'= Nz/L

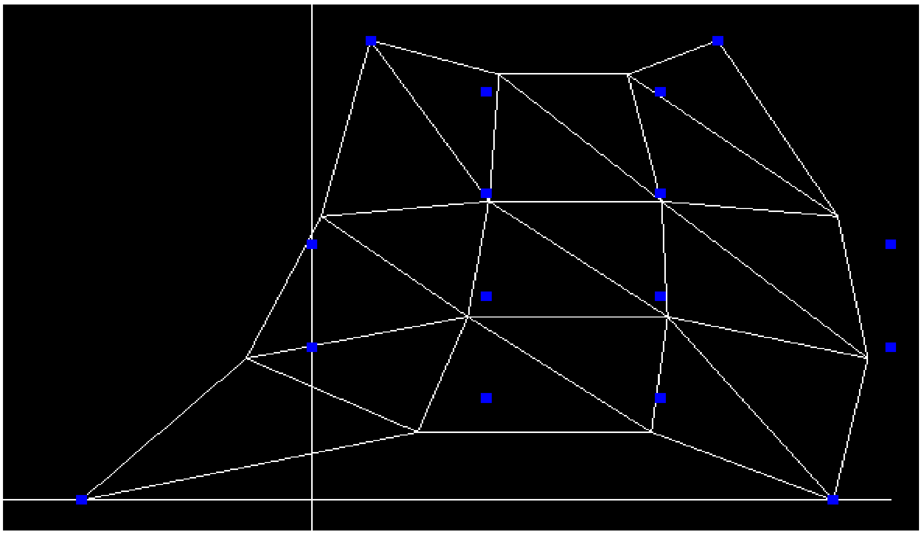
Bu vektörler X(a,c), Y(a,c) ve Z(a,c) vektörleriyle birlikte istediğimiz yüzeyi bize verirler.

Örneğimizdeki Bezier Yüzeyinin, 4 noktasını hesaplayıp, o noktaları birleştirerek detayı az olan bir yüzey elde etmiş olacağız. Bezier yüzeyinin üzerindeki x ve y noktaları yaklaşık olarak aşağıdaki gibidir. Z eksenindeki hesaplamanın iki boyutta gösterimi karışık olacağı için buraya alınmamıştır. İki boyut için gerekli noktaları almak bile bize bezier yüzeyi hakkında bilgi verecektir zaten.

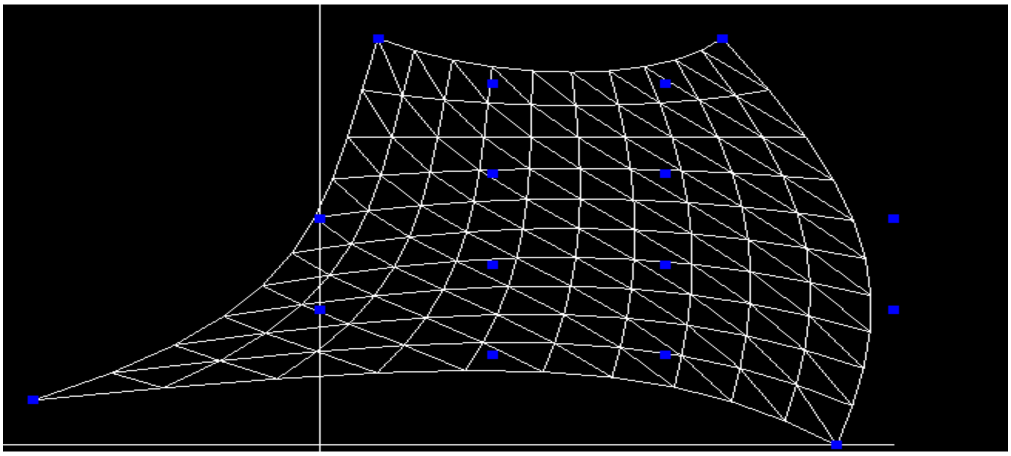
VA = (2.0,0.0)	VE = (0.6,2.7)	VI = (0.3,5.5)	VM = (1.9,9.0)
VB = (3.6,1.3)	VF = (3.2,3.6)	VJ = (3.1,5.85)	VN = (3.2,8.33)
VC = (6.07,1.33)	VG = (6.2,3.6)	VK= (6.0,5.86)	VO = (5.4,8.33)
VD = (9.0,0.0)	VH = (9.6,2.7)	VL = (9.07,5.5)	VP = (6.9,8.9)



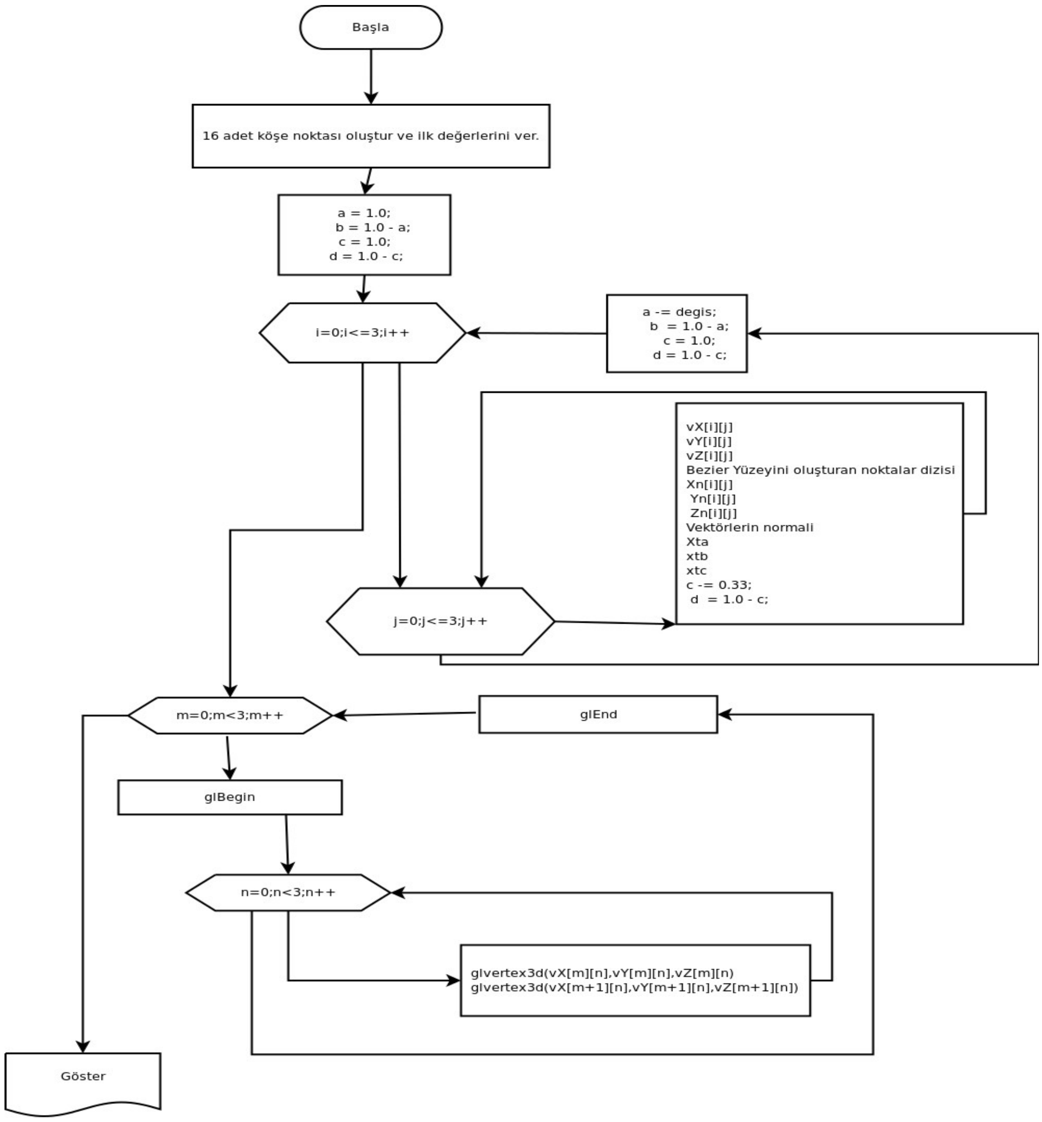
Detayı düşük ve mouse ile çekilmiş bezier yüzeyi.



Bezier Yüzeyinin detayı artırılmış ve mouse ile çekilmiş şekli:



Blok Diyagramı


Başla
16 adet köşe noktası oluştur ve ilk değerlerini ver.
a = 1.0;
b = 1.0 - a;
c = 1.0;
d = 1.0 - c;
i=0;i<=3;i++
a -= degis;
b = 1.0 - a;
c = 1.0;
d = 1.0 - c;
vX[i][j]
vY[i][j]
vZ[i][j]
Bezier Yüzeyini oluşturan noktalar dizisi
Xn[i][j]
Yn[i][j]
Zn[i][j]
Vektörlerin normali
Xta
xtb
xtc
c -= 0.33;
d = 1.0 - c;
j=0;j<=3;j++
m=0;m<3;m++
glEnd
glBegin
n=0;n<3;n++
glvertex3d(vX[m][n],vY[m][n],vZ[m][n])
glvertex3d(vX[m+1][n],vY[m+1][n],vZ[m+1][n])
Göster