Московский физико-технический институт
Физтех-школа прикладной математики и информатики

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

IV СЕМЕСТР

Лектор: *Жуковский Сергей Евгеньевич*

h\nu

Авторы: *Дмитрий Лизюра*,
Яков Даниличев

весна 2025

Содержание

1 Автономные системы **2**

1.1 Основные понятия . . . 2

1.2 Свойства автономных систем . . . 3

2 Автономные системы на плоскости **5**

2.1 Линейные автономные системы . . . 5

2.1.1 $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ . . . 5

2.1.2 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}$ . . . 7

2.1.3 $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i \in \mathbb{C}$, $\beta \neq 0$ . . . 8

2.2 Нелинейные автономные системы . . . 10

3 Теорема о выпрямлении траекторий **11**

4 Устойчивость по Ляпунову и асимптотическая устойчивость **16**

4.1 Определение и примеры . . . 16

4.2 Достаточные условия устойчивости . . . 17

4.2.1 Устойчивость линейных систем . . . 17

4.2.2 Устойчивость нелинейных систем . . . 18

5 Первые интегралы **20**

5.1 Первые интегралы автономных систем . . . 20

5.2 Множество всех первых интегралов автономной системы . . . 21

6 Линейные однородные уравнения в частных производных **24**

6.1 Основные понятия . . . 24

6.2 Задача Коши для ЛДУ в частных производных . . . 25

7 Вариационное исчисление **27**

7.1 Простейшая задача вариационного исчисления . . . 27

7.2 Задача со свободным концом . . . 30

7.3 Изопериметрическая задача . . . 31

7.4 Задача для функционалов, зависящих от нескольких функций . . . 33

7.5 Функционалы, содержащие производные высших порядков . . . 34

1 Автономные системы

1.1 Основные понятия

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ открыто, а функция $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ непрерывно дифференцируема. Рассмотрим систему

$$x' = f(x). \tag{1}$$

Определение. Такая система называется *автономной*, а Ω — это её *фазовое пространство.*

Основная идея такой системы в том, что в правой части нет зависимости от t.

Определение. Пусть $x\colon I \to \mathbb{R}^n$ — непродолжаемое решение системы (1). Множество $\{x(t) : t \in I\}$ называется *фазовой траекторией.*

Определение. Пусть есть $\widehat{x} \in \Omega$ такой, что $x(t) \equiv \widehat{x}$ является решением (1) $\Leftrightarrow f(\widehat{x}) = 0$. Тогда вектор $\widehat{x}$ называется *положением равновесия.*

Рассмотрим несколько примеров.

1. Пусть $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, а также существует единственная точка $\widehat{x} \in \mathbb{R} : f(\widehat{x}) = 0$. Тогда решение $\widehat{x}$ даёт нам одну фазовую траекторию — это будет просто одна точка в фазовом пространстве. Кроме того, будут ещё два решения: одно будет лежать выше $\widehat{x}$, а другое — ниже. Можно показать, что их фазовых траектории: это два открытых луча, расходящихся из положения равновесия в разные стороны.

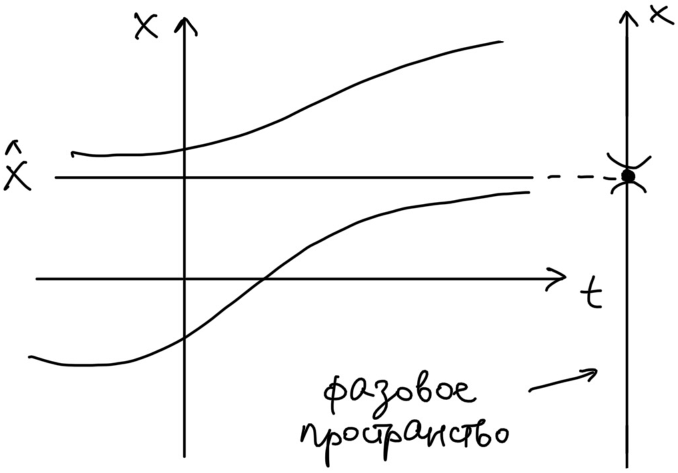

Рис. 1: Фазовые траектории

2. Рассмотрим теперь двумерный случай: $x_1' = x_2$ и $x_2' = -x_1$. Это линейная система, её общее решение: $x_1 = r\cos(t+\alpha)$, $x_2 = r\sin(t+\alpha)$, где $r \geqslant 0, \alpha \in [0, 2\pi)$. В этом случае фазовыми траекториями будут начало координат (положение равновесия) и всевозможные концентрические окружности с центром в начале координат.

1.2 Свойства автономных систем

1. Если $x\colon (a,b) \to \mathbb{R}^n$ является непродолжаемым решением системы (1), то для любого $c \in \mathbb{R}$ функция $y(t) \coloneqq x(t+c)$, где $t \in (a-c, b-c)$ тоже является непродолжаемым решением.

   Доказательство. Для начала покажем, что $y(t)$ является решением (1). Действительно, для $t \in t \in (a-c, b-c)$ имеем:

   $$y'(t) \equiv \frac{d}{dt}x(t+c) \equiv f(x(t+c)) \equiv f(y(t)).$$

   Теперь докажем, что оно непродолжаемое. Предположим противное: пусть $z\colon (d,e) \to \mathbb{R}^n$ является решением (1), причём $(a-c, b-c) \subsetneq (d,e)$, при этом $z(t) \equiv y(t)$ для $t \in (a-c, b-c)$. Тогда функция $z(t-c)$, где $t \in (d+c, e+c)$, является решением (1), $(a,b) \subsetneq (d+c, e+c)$, а также $z(t-c) \equiv y(t-c) \equiv x(t) \Rightarrow x$ не является непродолжаемым решением, противоречие.

   □

2. Любые две фазовые траектории $X, Y \in \Omega$ либо не пересекаются, либо совпадают.

   Доказательство. Пусть $X \cap Y \neq \varnothing$. Пусть $x_0 \in X \cap Y$. Переведём на язык решений: для X и Y соответственно существуют непродолжаемые решения $x\colon (a,b) \to \mathbb{R}^n, y\colon (c,d) \to \mathbb{R}^n$, а также точки $t_1 \in (a,b)$ и $t_2 \in (c,d) : x(t_1) = x_0 = y(t_2)$. Возьмём функцию $z(t) \coloneqq y(t+t_2-t_1)$, $t \in (c-t_2+t_1, d-t_2+t_1)$, тогда по первому свойству она является непродолжаемым решением (1). При $t = t_1$ получаем $y(t+t_2-t_1) = x_0$. Значит, $z(t)$ является решением задачи Коши

   $$\begin{cases} x' = f(x) \\ x(t_1) = x_0 \end{cases}.$$

   Заметим, что x тоже является непродолжаемым решением этой задачи, а тогда по теореме о существовании и единственности

   $$x(t) \equiv z(t) \Rightarrow X = \{z(t) : t \in (c-t_2+t_1, d-t_2+t_1)\} = Y.$$

   □

   Следствие. Решение автономной системы не достигает положения равновесия за конечное время.

   Понимать это можно следующим образом. Вспомним картинку из примера 1. Возьмём один из получившихся лучей в фазовом пространстве. Ему соответствует какое-то решение $x(t)$. Начнём подставлять в $x(t)$ разные t. Если для какого-то t_0 мы попадём в положение равновесия, то у нас пересекутся две фазовые траектории: выбранный луч и сама точка положения равновесия. Тогда они должны совпадать, но это невозможно. Поэтому ни для какого конечного t мы не попадём в положение равновесия.

3. Пусть $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ — непродолжаемое решение (1). Предположим, что нашлись $t_1 < t_2 :$ $x(t_1) = x(t_2)$, причём $x(t) \not\equiv \mathrm{const}$. Тогда функция x — это периодическая функция с

положительным наименьшим периодом, а её фазовая траектория является замкнутой кривой без самопересечений.

Доказательство. Возьмём функцию $y(t) \coloneqq x(t + t_2 - t_1), t \in \mathbb{R}$, она является непродолжаемым решением (1). Более того, $y(t_1) = x(t_2) = x(t_1)$, а тогда функции x и y являются решениями одной и той же задачи Коши $\Rightarrow$ по теореме о существовании и единственности $y(t) \equiv x(t)$. Положим $d = t_2 - t_1$, тогда это тождество переписывается в виде $x(t) \equiv x(t+d)$. Пусть P — это множество всех периодов функции x. Мы знаем, что оно непусто, так как $d \in P$.

Так как $x(t) \not\equiv \mathrm{const}$, то существует $\tau \in \mathbb{R} : x(\tau) \neq x(t_1)$. Пусть $\varepsilon = \frac{1}{2}|x(\tau) - x(t_1)|$. В силу непрерывности функции x существует $\delta > 0 : x(t) \in (x(\tau) - \varepsilon, x(\tau) + \varepsilon)$ для любого $t \in (\tau - \delta, \tau + \delta)$. В силу выбора ε получаем, что $x(t) \neq x(t_1)$ для любого $t \in (\tau - \delta, \tau + \delta) \Rightarrow$ для любого $p \in P$ имеем $p > \delta$, а тогда $\widehat{p} \coloneqq \inf P \geqslant \delta > 0$. Докажем теперь, что $\widehat{p} \in P$. Для этого рассмотрим последовательность $\{p_j\} \subset P$ такую, что $p_j \to \widehat{p}$ при $j \to \infty$. Тогда для любого j имеем $x(t+p_j) \equiv x(t)$. Переходя к пределу по j и пользуясь непрерывностью функции x, получаем, что $x(t+\widehat{p}) \equiv x(t)$, то есть $\widehat{p} \in P$. Таким образом, мы показали, что существует положительный наименьший период.

Осталось доказать, что фазовая траектория X функции x не имеет самопересечений, то есть для любых $\widehat{t}_1, \widehat{t}_2 \in \mathbb{R} : |\widehat{t}_1 - \widehat{t}_2| < \widehat{p}$ выполняется $x(\widehat{t}_1) \neq x(\widehat{t}_2)$. Предположим противное: пусть существуют $\widehat{t}_1, \widehat{t}_2 \in \mathbb{R} : \widehat{t}_1 < \widehat{t}_2, \widehat{t}_2 - \widehat{t}_1 < \widehat{p}$, при этом $x(\widehat{t}_1) = x(\widehat{t}_2)$. Тогда из начала доказательства получаем, что $\widehat{t}_2 - \widehat{t}_1 \in P$. Но тогда получаем противоречие с минимальностью $\widehat{p}$.

$\square$

4. Вывод: траектория — это либо точка, либо замкнутая кривая без самопересечений, либо незамкнутая кривая без самопересечений.

5. (групповое свойство автономной системы) Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} x' = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases} . \tag{2}$$

Обозначим через $\varphi(t, x_0)$ непродолжаемое решение (2), $x_0 \in \Omega$, $t \in \mathbb{R}$. Тогда справедливо тождество $\varphi(t, \varphi(\tau, x_0)) \equiv \varphi(t + \tau, x_0)$.

Доказательство. Зафиксируем τ. Тогда по свойству 1 функция $\varphi(t+\tau, x_0)$ является решением системы (1). В то же время по определению $\varphi(t, \varphi(\tau, \xi))$ тоже является решением (1). Рассмотрим $t = 0$: тогда в левой части имеем $\varphi(0, \varphi(\tau, x_0)) = \varphi(\tau, x_0)$, в правой — $\varphi(0 + \tau, x_0) = \varphi(\tau, x_0)$. То есть в $t = 0$ решения совпадают, а тогда по теореме о существовании и единственности для любого τ выполняется $\varphi(t + \tau, x_0) \equiv \varphi(t, \varphi(\tau, x_0))$.

$\square$

6. Функция φ непрерывна.

Это верно в силу теоремы о непрерывной зависимости непродолжаемого решения задачи Коши от начального условия и параметра, которая доказывалась в прошлом семестре.

7. Рассмотрим множество отображений $\Phi \coloneqq \{\varphi(t, \cdot)\colon \Omega \to \Omega \mid t \in \mathbb{R}\}$. Зададим операцию композиции: $\varphi(t, \cdot) \circ \varphi(s, \cdot) = \varphi(t, \varphi(s, \cdot))$. Тогда $(\Phi, \circ)$ — это абелева группа.

   Доказательство. Здесь нам помогает групповое свойство, которое мы только что доказали. Запишем следующее равенство:

$$\varphi(t, \varphi(s, \cdot)) \equiv \varphi(t + s, \cdot) \equiv \varphi(s, \varphi(t, \cdot)).$$

   Из него получаем, что Φ замкнуто относительно композиции и операция коммутативна. Это же равенство показывает, что нейтральным элементом будет $\varphi(0, \cdot)$, а обратным к $\varphi(t, \cdot)$ будет $\varphi(-t, \cdot)$.

□

2 Автономные системы на плоскости

2.1 Линейные автономные системы

Нам дана невырожденная матрица $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Рассмотрим автономную систему $x' = Ax$:

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases}. \tag{1}$$

У неё гарантированно есть положение равновесия $x = 0$. Чтобы понять, как система ведёт себя в окрестности нулевого положения равновесия, посмотрим на собственные значения λ_1, λ_2 матрицы A.

Примечание. Для удобства все фазовые портреты будем строить в системе координат для базиса (h_1, h_2). Направление движения можно определить, устремив $t \to +\infty$. Кроме того, помним, что фазовые траектории не пересекаются.

2.1.1 $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$

Пусть h_1 и h_2 — соответствующие собственные векторы. Тогда в базисе (h_1, h_2) система будет иметь вид

$$\begin{cases} y_1' = \lambda_1 y_1 \\ y_2' = \lambda_2 y_2 \end{cases}$$

и её решением будет

$$\begin{cases} y_1 = c_1 e^{\lambda_1 t} \\ y_2 = c_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases}.$$

Напишем уравнение её траектории, исключив параметр t:

$$e^{\lambda_1 t} = \frac{y_1}{c_1} \Rightarrow y_2 = c_2 (e^{\lambda_1 t})^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} = c_2 \left(\frac{y_1}{c_1}\right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$$

при $c_1 \neq 0$, а при $c_1 = 0$ получится уравнение $y_1 = 0$.

▷ Первый случай: $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$. На рисунке 2 слева изображён портрет для случая $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$, а справа для случая $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$.

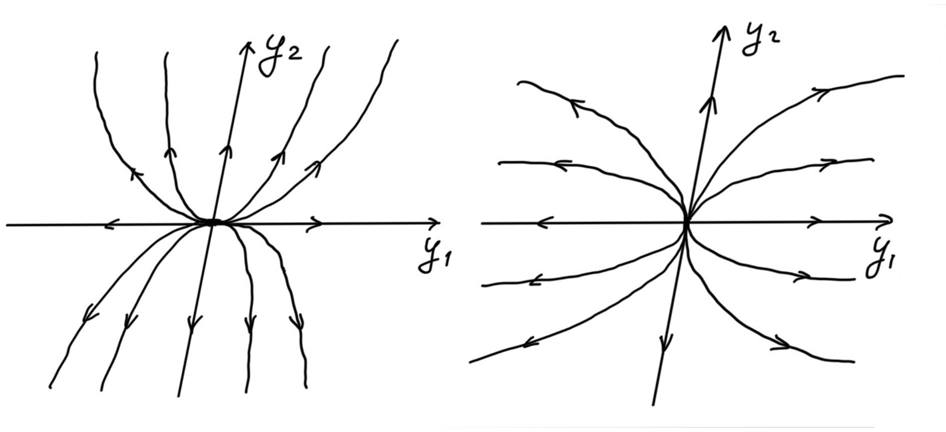

Рис. 2: Неустойчивый узел

Определение. Полученный портрет называется *неустойчивым узлом*.

Если $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ или $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, то получатся аналогичные портреты, но с направлением к началу координат.

Определение. Тогда портрет называется *устойчивым узлом*.

Устойчивость означает, что при $t \to +\infty$ точка движется к положению равновесия.

▷ Второй случай: $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$. На рисунке 3 слева изображён портрет для случая $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$, а справа для случая $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$.

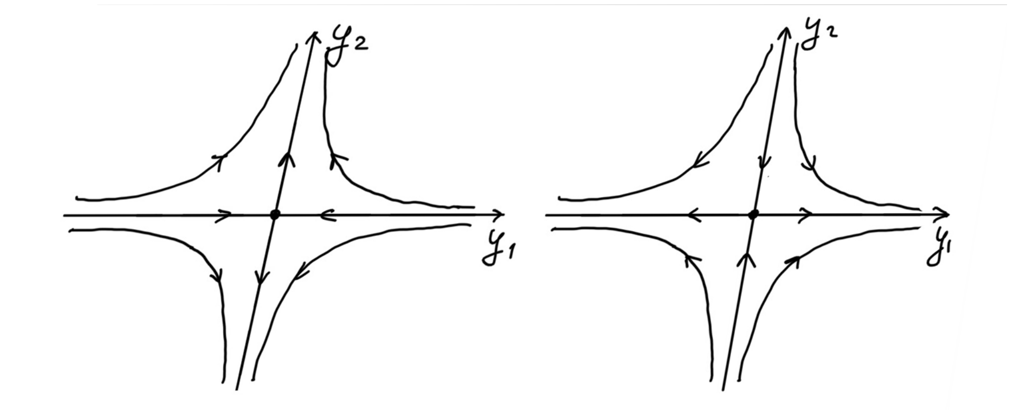

Рис. 3: Седло

Определение. Полученный портрет называется *седлом*.

2.1.2 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}$

- Первый случай: A имеет два линейно независимых собственных вектора h_1 и h_2. Тогда аналогично прошлым рассуждениям получаем, что кривая имеет вид

$$\begin{cases} y_2 = \frac{c_2}{c_1} y_1, & c_1 \neq 0 \\ y_1 = 0, & c_1 = 0 \end{cases}.$$

На рисунке 4 слева изображён портрет для случая $\lambda > 0$, а справа для случая $\lambda < 0$.

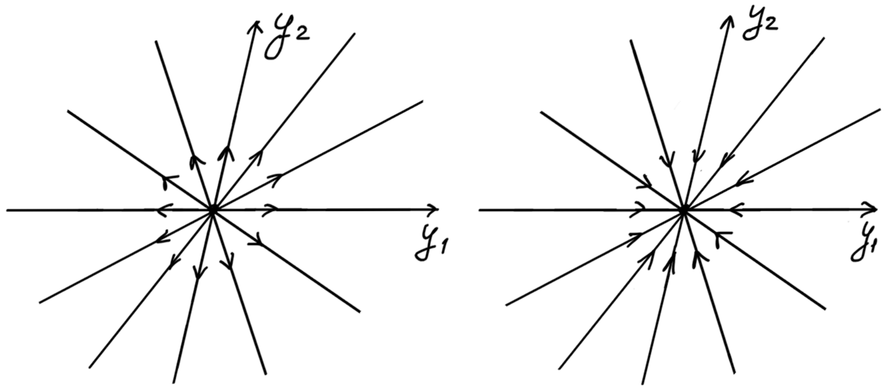

Рис. 4: Дикритический узел

Определение. Полученный портрет называется *дикритическим узлом*. При $\lambda > 0$ он называется *неустойчивым*, а при $\lambda < 0$ — *устойчивым*.

- Второй случай: h_1 — собственный вектор, h_2 — присоединённый к нему. Тогда в базисе (h_1, h_2) система будет иметь вид

$$\begin{cases} y_1' = \lambda y_1 + y_2 \\ y_2' = \lambda y_2 \end{cases}.$$

Найдём решение:

$$\begin{cases} y_1 = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t} \\ y_2 = c_2 e^{\lambda t} \end{cases}.$$

Выразим t (считаем, что $c_2 \neq 0$):

$$e^{\lambda t} = \frac{y_2}{c_2} \Rightarrow t = \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{y_2}{c_2}\right).$$

Подставим в первое уравнение:

$$y_1 = c_1 \frac{y_2}{c_2} + \frac{c_2}{\lambda} \ln\left(\frac{y_2}{c_2}\right) \frac{y_2}{c_2}.$$

На рисунке 5 слева изображён портрет для случая $\lambda > 0$, а справа для случая $\lambda < 0$.

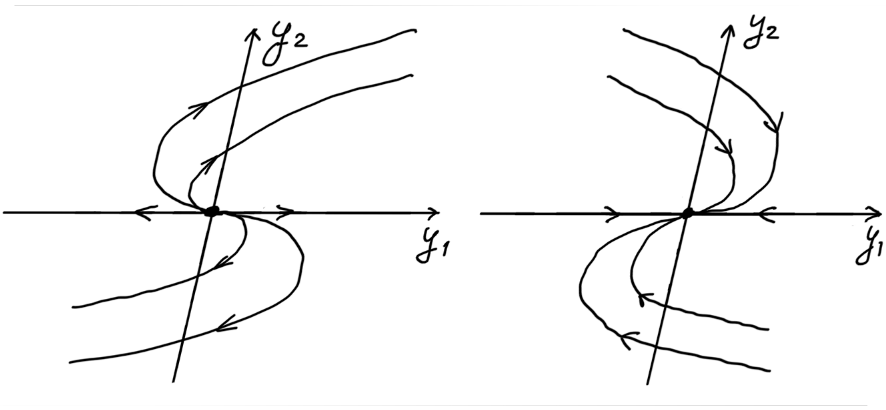

Рис. 5: Вырожденный узел

Определение. Этот портрет называется *вырожденным узлом*. При $\lambda > 0$ он называется *неустойчивым*, а при $\lambda < 0$ — *устойчивым*.

2.1.3 $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i \in \mathbb{C}$, $\beta \neq 0$

Тогда собственные векторы имеют вид $h_{1,2} = a \pm bi$, где a и b — линейно независимые векторы. Как известно, фундаментальной системой решений здесь будет

$$\begin{cases} v_1 = e^{\alpha t}(a\cos(\beta t) - b\sin(\beta t)) \\ v_2 = e^{\alpha t}(a\sin(\beta t) + b\cos(\beta t)) \end{cases}$$

В базисе (a, b) она имеет вид

$$\begin{cases} y_1 = e^{\alpha t}\begin{pmatrix} \cos(\beta t) \\ -\sin(\beta t) \end{pmatrix} \\ \\ y_2 = e^{\alpha t}\begin{pmatrix} \sin(\beta t) \\ \cos(\beta t) \end{pmatrix} \end{cases}$$

Тогда общее решение имеет вид

$$y(t) = re^{\alpha t}\begin{pmatrix} \cos(\beta(t-\theta)) \\ \sin(\beta(t-\theta)) \end{pmatrix}.$$

для всех r и θ. Чтобы получить его, нужно просто расписать $c_1y_1 + c_2y_2$ с помощью формул косинуса суммы, синуса суммы и дополнительного угла.

- При $\alpha = 0$ получается уравнение окружности. На рисунке 6 слева изображён портрет для случая $\beta > 0$, а справа для случая $\beta < 0$.

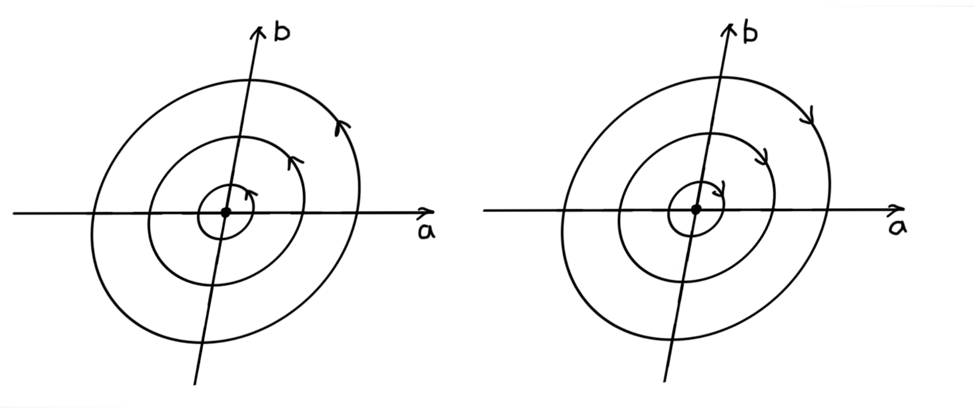

Рис. 6: Центр

Определение. Такой портрет называется *центром.*

- При $\alpha > 0$ расстояние от начала координат увеличивается при $t \to +\infty$, а ещё меняется угол, поэтому получается спираль, как на рисунке 7, вращающаяся против часовой стрелки при $\beta > 0$ (изображена слева) и по часовой при $\beta < 0$ (изображена справа). В окрестности нуля (при $t \to -\infty$) происходит бесконечное число витков, поэтому там обычно график не рисуют.

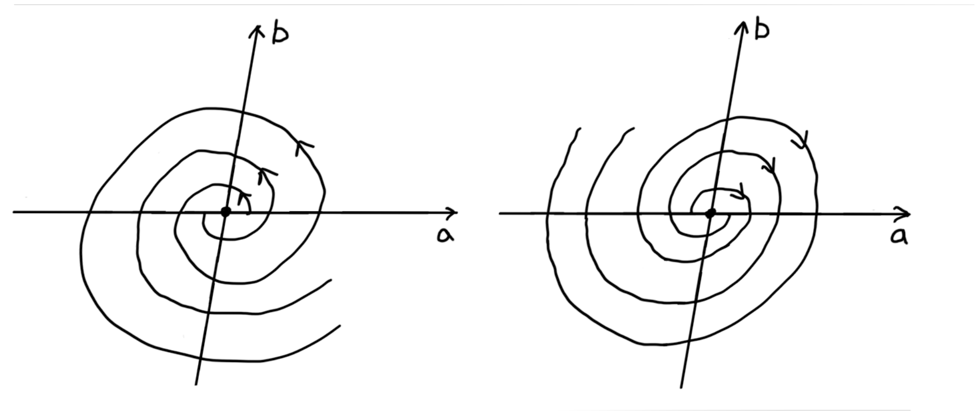

Рис. 7: Неустойчивый фокус

Определение. Полученный портрет называется *неустойчивым фокусом.*

- При $\alpha < 0$ получается всё то же самое, но теперь всё наоборот: направление к началу координат, при $\beta > 0$ спираль вращается по часовой стрелке (изображена справа), а при $\beta < 0$ — против часовой (изображена слева).

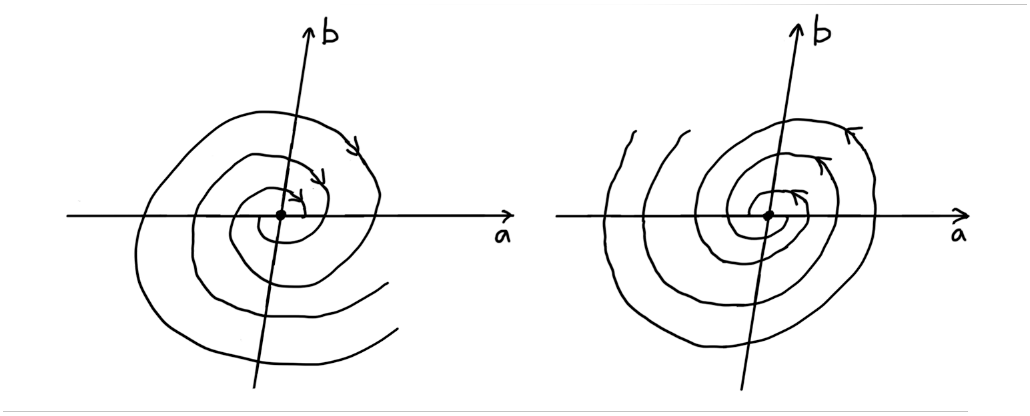

Рис. 8: Устойчивый фокус

Определение. Полученный портрет называется *устойчивым фокусом*.

Вообще говоря, есть ещё один случай: когда матрица A вырождена, но он нас интересовать не будет, так как при исследовании нелинейных систем нам будет нужна невырожденность.

2.2 Нелинейные автономные системы

Пусть нам даны открытое множество $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, отображение $f \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^2)$ и положение равновесия $\widehat{x}$, то есть $f(\widehat{x}) = 0$. Обозначим $A = \frac{\partial f}{\partial x}(\widehat{x})$, $\lambda_{1,2}$ — её собственные числа. Рассмотрим систему

$$x' = f(x). \tag{2}$$

Тогда, раскладывая по формуле Тейлора в окрестности $\widehat{x}$, получаем

$$f(x) = A(x - \widehat{x}) + r(x - \widehat{x}),$$

где $r(x-\widehat{x}) = o(|x-\widehat{x}|)$. Оказывается, что при некоторых условиях остаток $r(x-\widehat{x})$ можно отбросить и рассматривать линейную систему. Этот процесс называется *линеаризацией*.

Теорема. (б/д) Пусть $\mathrm{Re}(\lambda_{1,2}) \neq 0$. Тогда существуют окрестности $U(\widehat{x})$, $V(0)$ и существует диффеоморфизм $\Phi\colon U(\widehat{x}) \to V(0)$ такой, что он переводит траектории системы (2) в траектории системы (1), а Φ^{-1} переводит траектории системы (1) в траектории системы (2) с сохранением ориентации.

Покажем, что условие $\mathrm{Re}(\lambda_{1,2}) \neq 0$ существенно. Для этого рассмотрим следующую систему

$$\begin{cases} x_1' = -x_2 - x_1|x|^2 \\ x_2' = x_1 - x_2|x|^2 \end{cases}.$$

Сделаем замену

$$\begin{cases} x_1(t) = r(t)\cos(\varphi(t)) \\ x_2(t) = r(t)\sin(\varphi(t)) \end{cases}.$$

Подставляя в исходное уравнение, получаем

$$\begin{cases} r'\cos(\varphi) - r\sin(\varphi)\varphi' = -r\sin(\varphi) - r^3\cos(\varphi) \\ r'\sin(\varphi) + r\cos(\varphi)\varphi' = r\cos(\varphi) - r^3\sin(\varphi) \end{cases}.$$

Умножив первое уравнение на $\cos(\varphi)$, второе — на $\sin(\varphi)$ и сложив, получим $r' = -r^3$. Теперь умножим первое на $-\sin(\varphi)$, второе — на $\cos(\varphi)$ и сложим, получим $\varphi' = 1$. Тогда имеем систему

$$\begin{cases} r' = -r^3 \\ \varphi' = 1 \end{cases}.$$

У неё решением будет спираль, вращающаяся по часовой стрелке, направление к началу координат.

Теперь рассмотрим очень похожую систему:

$$\begin{cases} x_1' = -x_2 + x_1|x|^2 \\ x_2' = x_1 + x_2|x|^2 \end{cases}.$$

Проделав те же самые преобразования, получим систему

$$\begin{cases} r' = r^3 \\ \varphi' = 1 \end{cases}.$$

Здесь решением снова будет спираль, но теперь она вращается против часовой стрелки и направление от начала координат.

В каждой системе положение равновесия — это начало координат, у обоих систем матрица Якоби (о-малое отбрасываем) выглядит так:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Почему же решения качественно отличаются? Дело в том, что собственные числа A — это $\lambda_{1,2} = \pm i$, то есть $\mathrm{Re}(\lambda_{1,2}) = 0$. Значит, это условие действительно важно.

3 Теорема о выпрямлении траекторий

Заданы открытое множество $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ (будем считать, что $n \geqslant 2$), отображение $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$, точка $x_0 \in \Omega$ и автономная система

$$x' = f(x). \tag{1}$$

Напоминание. Открытый шар в $\mathbb{R}^n$ с центром в точке x и радиусом r мы обозначаем $O^n(x, r)$.

Теорема. Если $f(x_0) \neq 0$ (то есть x_0 не является положением равновесия), то существуют окрестности $X(x_0) \subset \Omega$, $Y(0) \coloneqq (-\varepsilon, \varepsilon) \times O^{n-1}(0, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^n$ для некоторого $\varepsilon > 0$ и существует диффеоморфизм $\Psi\colon Y(0) \to X(x_0)$ такой, что:

1. для любого решения $y\colon I \to Y(0)$ системы

$$\begin{cases} y_1' = 1 \\ \vdots \\ y_{n-1}' = 0 \\ y_n' = 0 \end{cases} \tag{2}$$

   функция $\Psi(y(t))$ является решением системы (1)

2. для любого решения $x\colon I \to X(x_0)$ системы (1) функция $\Psi^{-1}(x(t))$ является решением системы (2).

Заметим, что траектории системы (2) — это просто прямые. Тогда смысл теоремы в следующем: в окрестности точки x_0 траектории с точностью до диффеоморфизма являются кусочками прямых линий. Прежде чем перейти к доказательству, обсудим пару моментов касательно теоремы.

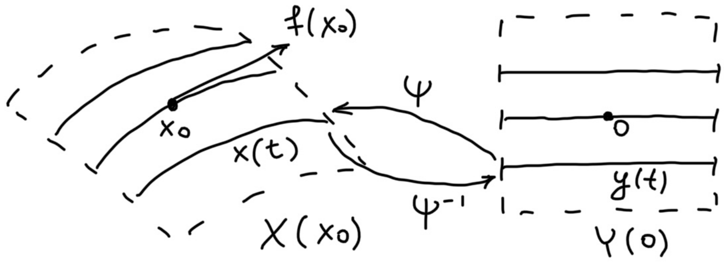

Рис. 9: Выпрямление траекторий

▷ Говорят, что Ψ выпрямляет поле направлений f, то есть выпрямляются не только траектории, но и касательные векторы к ним. Докажем следующую связь между Ψ и f, которая верна в $X(x_0)$:

$$\frac{\partial \Psi^{-1}}{\partial x}(x) f(x) \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Возьмём какое-нибудь решение $x(t)$, тогда с одной стороны

$$\frac{d\Psi^{-1}}{dt}(x(t)) \equiv \frac{\partial \Psi^{-1}}{\partial x}(x(t)) x'(t) \equiv \frac{\partial \Psi^{-1}}{\partial x}(x(t)) f(x(t)),$$

а с другой стороны верно следующее:

$$\frac{d\Psi^{-1}}{dt}(x(t)) \equiv \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} t + C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ну и поскольку для любой точки $x \in X(x_0)$ можно найти решение, траектория которого проходит через x, то можно в равенствах везде заменить $x(t)$ на x.

▷ Условие $f(x_0) \neq 0$ существенно, а именно, верно следующее: если $f(x_0) = 0$, то траектории нельзя выпрямить, то есть не существует подходящих $X(x_0), \varepsilon, \Psi$ из теоремы.

Действительно, точка x_0 является траекторией. Если бы выполнялась теорема, то в $Y(0)$ существовала бы прямая траектория, которую Ψ переводил бы в x_0. Но тогда Ψ не инъективен $\Rightarrow$ не диффеоморфизм, противоречие.

▷ Теорема носит локальный характер и обобщить её, к сожалению, нельзя. Именно, если для всех $x \in \Omega$ верно $f(x) \neq 0$, то траектории на Ω не всегда можно выпрямить. На конкретном примере примерно поймём, почему это может быть так.

Возьмём систему

$$\begin{cases} x_1' = -\cos(x_2) \\ x_2' = \sin(x_2) \end{cases}.$$

Её траектории выглядят как-то так:

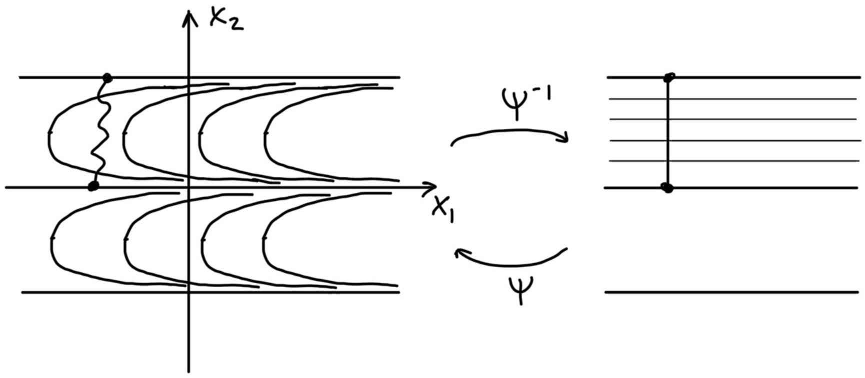

Рис. 10: Пример Арнольда

Интуитивно, если бы Ψ переводил прямые траектории в эти траектории, то он и отрезок между прямыми переводил бы в отрезок кривой между траекториями. Но этот отрезок между прямыми пересекает все прямые траектории, лежащие между его концами, которых бесконечно много, а отрезок кривой между траекториями на картинке будет пересекать лишь конечное число траекторий.

Доказательство. Разобьём доказательство теоремы на три этапа.

1. Сначала построим отображение Ψ. Так как вектор $f(x_0) \neq 0$, то мы можем дополнить его $n-1$ вектором так, чтобы получился базис $(f(x_0), e_2, \ldots, e_n)$ в $\mathbb{R}^n$. Пусть $\varphi(\cdot, \xi)$ — это непродолжаемое решение задачи Коши
$$\begin{cases} x' = f(x) \\ x(0) = \xi \in \Omega \end{cases}.$$
Область определения функции φ открыта в $\mathbb{R}^{n+1}$ (это мы доказывали в прошлом семестре) и содержит точку $(0, x_0)$. Тогда зададим отображение Ψ следующим образом: $\Psi(y) \coloneqq \varphi(y_1, x_0 + \sum_{i=2}^n y_i e_i)$. Область определения Ψ — это окрестность точки 0 в $\mathbb{R}^n$ (так как мы можем взять близкие к нулю числа $y_1, \ldots, y_n$ так, чтобы вектор $(y_1, x_0 + \sum_{i=2}^n y_i e_i)$ попал в окрестность точки $(0, x_0)$). Кроме того, φ непрерывно дифференцируема $\Rightarrow$ Ψ тоже непрерывно дифференцируема.

2. Теперь построим окрестности $X(x_0)$ и $Y(0)$ так, чтобы отображение Ψ стало диффеоморфизмом. Для начала укажем некоторые свойства, которые нам потребуются:

   ▷ так как $\varphi(\cdot, x_0)$ является решением задачи Коши, то
$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, x_0)\right|_{t=0} = f(\varphi(t, x_0))|_{t=0} = f(x_0);$$

   ▷ для всех $\xi \in \Omega$ верно $\varphi(0, \xi) \equiv \xi$.

   Теперь посчитаем частные производные Ψ. По y_1 она выглядит так:
$$\frac{\partial \Psi}{\partial y_1}(0) = \left.\frac{\partial \varphi}{\partial y_1}(y_1, x_0)\right|_{y_1=0} = f(x_0).$$
   При $j \geqslant 2$ они выглядят следующим образом:
$$\frac{\partial \Psi}{\partial y_j}(0) = \left.\frac{\partial \varphi}{\partial y_j}(0, x_0 + y_j e_j)\right|_{y_j=0} = \left.\frac{\partial}{\partial y_j}(x_0 + y_j e_j)\right|_{y_j=0} = e_j.$$
   Собираем всё вместе, и получаем следующую матрицу Якоби:
$$\frac{\partial \Psi}{\partial y}(0) = (f(x_0) \mid e_2 \mid \ \ldots \ \mid e_n).$$
   Теперь вспомним, что мы специально выбирали столбцы этой матрицы, чтобы они были базисом, поэтому $\operatorname{rk} \frac{\partial \Psi}{\partial y}(0) = n \Rightarrow$ можем в нуле применить теорему об обратной функции. Из неё получаем, что существуют окрестности $X(x_0)$ и $Y(0) = (-\varepsilon, \varepsilon) \times O^{n-1}(0, \varepsilon)$ для некоторого $\varepsilon > 0$ такие, что отображение $\Psi \colon Y(0) \to X(x_0)$ является диффеоморфизмом.

3. Теперь осталось показать, что выполняются пункты 1 и 2 из теоремы. Берём решение

$y\colon I \to Y(0)$ системы (2), тогда

$$y(t) \equiv \begin{pmatrix} t + C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix}.$$

Применим к нему отображение Ψ:

$$x(t) \coloneqq \Psi(y(t)) \equiv \varphi(t + C_1, x_0 + \sum_{j=2}^{n} C_j e_j).$$

Так как в автономных системах сдвиг по t не влияет на свойство «быть решением», то $x(t)$ является решением системы (1) $\Rightarrow$ первый пункт выполняется.

Теперь покажем, что второй пункт тоже верен. К сожалению, технически это будет довольно неприятно. Берём решение $x\colon I \to X(x_0)$ системы (1). Хотим показать, что функция $\Psi^{-1}(x(t))$ является решением системы (2). Пусть $t^* \in I$ и

$$y^* \coloneqq \Psi^{-1}(x(t^*)) = \begin{pmatrix} y_1^* \\ \vdots \\ y_n^* \end{pmatrix}.$$

Через точку y^* проходит траектория какого-то решения $y(t)$, тогда оно должно выглядеть как-то так:

$$y(t) \coloneqq \begin{pmatrix} t + y_1^* - t^* \\ y_2^* \\ \vdots \\ y_n^* \end{pmatrix}.$$

Первая координата так странно выглядит, так как мы хотим, чтобы она попадала в ε-окрестность нуля. Это будет так, если $t \in I^* := (-\varepsilon + t^* - y_1^*, \varepsilon + t^* - y_1^*)$. Подействуем теперь на эту траекторию отображением Ψ, тогда по уже доказанному первому пункту она перейдёт в какую-то траекторию решения системы (1). Нам нужно, чтобы эта траектория совпала с траекторией решения $x(t)$.

Распишем, куда переходит при действии Ψ точка $y(t^*)$:

$$\Psi(y(t^*)) = \Psi(y^*) = \Psi(\Psi^{-1}(x(t^*))) = x(t^*).$$

Получили, что в точке t^* решения $x(t)$ и $\Psi(y(t))$ совпадают, но тогда по теореме о существовании и единственности решения получаем, что $\Psi(y(t)) \equiv x(t) \Leftrightarrow y(t) \equiv \Psi^{-1}(x(t))$ при $t \in I \cap I^*$. Это почти то, что нам нужно, только мы хотим, чтобы это тождество выполнялось на всём I. Докажем, что на самом деле $I \subset I^*$.

Пусть $I \not\subseteq I^*$. Тогда либо $\sup I^* \in I$, либо $\inf I^* \in I$. Без ограничения общности рассмотрим первый случай. Возьмём последовательность $\{t_n\} \subset I^*$, сходящуюся к $\sup I^*$. Поймём, куда сходится $y(t_n)$. Первая координата этого вектора, согласно тому, как мы задавали функцию y, равна $t_n + y_1^* - t^* \to \sup I^* + y_1^* - t^*$. По построению интервала I^* следует, что $\sup I^* = \varepsilon + t^* - y_1^*$. Тогда первая координата сходится к $\varepsilon \Rightarrow$

$\lim_{n\to\infty} y(t_n) \notin Y(0)$, так первая координата попала на границу окрестности $(-\varepsilon, \varepsilon)$. С другой стороны $y(t_n) = \Psi^{-1}(x(t_n))$. Так как композиция непрерывных функций непрерывна, получаем, что $y(t_n) \to \Psi^{-1}(x(\sup I^*)) \in Y(0)$. Получили противоречие.

□

4 Устойчивость по Ляпунову и асимптотическая устойчивость

4.1 Определение и примеры

Снова заданы открытое множество $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, отображение $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$, положение равновесия $\widehat{x} \in \Omega$ и автономная система

$$x' = f(x). \tag{1}$$

Пусть $\varphi(\cdot, \xi)$ — непродолжаемое решение задачи Коши

$$\begin{cases} x' = f(x) \\ x(0) = \xi \end{cases}.$$

Определение. Положение равновесия $\widehat{x}$ называется *устойчивым по Ляпунову*, если:

1. существует $r > 0$ такое, что для любого $\xi \in O(\widehat{x}, r)$ отображение $\varphi(\cdot, \xi)$ определено на $[0, +\infty)$;
2. для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех $\xi \in O(\widehat{x}, \delta)$ и для всех $t \in [0, +\infty)$ верно $\varphi(t, \xi) \in O(\widehat{x}, \varepsilon)$.

Определение. Положение равновесия $\widehat{x}$ называется *асимптотически устойчивым*, если:

1. оно устойчиво по Ляпунову;
2. существует $d > 0$ такое, что для всех $\xi \in O(\widehat{x}, d)$ функция $\varphi(t, \xi) \to \widehat{x}$ при $t \to +\infty$.

Примеры.

▷ Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}$ и $\widehat{x}$ — изолированное положение равновесия, то есть существует окрестность $\widehat{x}$ такая, что в ней нет других положений равновесия. Тогда один из возможных случаев: это когда в этой окрестности функция $f \geqslant 0$ и равна нулю только в точке $\widehat{x}$.

Посмотрим на интегральные кривые. Есть горизонтальная прямая, соответствующая решению $x(t) \equiv \widehat{x}$. Если берём начальное условие $\xi < \widehat{x}$, то соответствующее решение будет монотонно возрастать в силу положительности производной, тогда из теоремы о существовании и единственности следует, что горизонтальная прямая будет его асимптотой. Если же берём начальное условие выше $\widehat{x}$, то решение снова будет возрастать. Тогда здесь нет даже устойчивости по Ляпунову. А вот если рассмотреть случай, когда функция $f(x) > 0$ при $x < \widehat{x}$ и $f(x) < 0$ при $x > \widehat{x}$, то аналогичным образом можно показать, что там будет асимптотическая устойчивость, а тогда и устойчивость по Ляпунову.

▷ Пусть теперь $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $f(x) = Ax$ и $\widehat{x} = 0$. Возвращаясь к случаям из предыдущего параграфа, устойчивость по Ляпунову будет на всех устойчивых портретах, а ещё для центра. Они же, но уже за исключением центра, будут и асимптотически устойчивы.

4.2 Достаточные условия устойчивости

4.2.1 Устойчивость линейных систем

Пусть даны матрица $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ и система

$$x' = Ax. \tag{2}$$

Пусть в ЖНФ матрицы A есть жордановы клетки $K_1, \ldots, K_m$, причём для каждой клетки K_j её размер равен k_j и ей соответствует собственное число $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$. Без ограничения общности будем считать, что $\lambda_1, \ldots, \lambda_s \in \mathbb{C}$, при этом им соответствуют сопряжённые числа $\lambda_{s+1} = \overline{\lambda_1}, \ldots, \lambda_{2s} = \overline{\lambda_s}$, а $\lambda_{2s+1}, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$.

Теорема.

1. Если все $\mathrm{Re}(\lambda_j) < 0$, то $\widehat{x} = 0$ — асимптотически устойчивое положение равновесия.
2. Если все $\mathrm{Re}(\lambda_j) \leqslant 0$, а для j таких, что $\mathrm{Re}(\lambda_j) = 0$, выполнено $k_j = 1$, то $\widehat{x} = 0$ устойчиво по Ляпунову, но не асимптотически устойчиво.
3. В остальных случаях $\widehat{x} = 0$ не устойчиво по Ляпунову.

Доказательство. Из прошлого семестра мы знаем, что любое решение $x(t)$ системы (2) представимо в виде

$$x(t) = \sum_{j=1}^{s} P_j(t)e^{\alpha_j t}\cos(\beta_j t) + \sum_{j=s+1}^{2s} P_j(t)e^{\alpha_{j-s} t}\sin(\beta_{j-s} t) + \sum_{j=2s+1}^{m} P_j(t)e^{\lambda_j t},$$

причём $\deg P_j \leqslant k_j - 1$.

1. Из условия $\mathrm{Re}\,\lambda_j < 0$ следует, что $|x(t)| \to 0$ при $t \to +\infty$. Пусть $X(t)$ — ФМР системы (2) такая, что $X(0) = E$. Она существует, так как можно рассмотреть n задач Коши $x' = Ax$ и $x(0) = e_i$, где e_i — i-ый базисный вектор стандартного базиса $\mathbb{R}^n$. Так как столбцы $X(t)$ являются решениями, $\|X(t)\| \to 0$ при $t \to +\infty$. Тогда $\|X(t)\|$ равномерно ограничена некоторым числом $c > 0$. Кроме того, имеем следующее неравенство:
$$|\varphi(t, \xi)| = |X(t)\xi| \leqslant \|X(t)\| \cdot |\xi|.$$
Заметим, что $\varphi(\cdot, \xi)$ при любом ξ определено на $[0, +\infty)$, так как (2) является линейной системой с постоянными коэффициентами. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Чтобы выполнялся

второй пункт из определения устойчивости по Ляпунову, можно взять $\delta = \frac{\varepsilon}{2c}$, тогда при $\xi \in O(0, \delta)$ из неравенства выше получаем, что

$$|\varphi(t, \xi)| \leqslant c \cdot \frac{\varepsilon}{2c} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Асимптотическая устойчивость следует из того, что $\|X(t)\| \to 0$, а $|\xi|$ ограничен.

2. Если $\mathrm{Re}(\lambda_j) < 0$, то соответствующее слагаемое стремится к нулю $\Rightarrow$ ограничено на $[0, +\infty)$. Остаётся случай $\mathrm{Re}(\lambda_j) = 0 \Rightarrow k_j = 1$. Тут мы пользуемся тем, что $\deg P_j(t) \leqslant 1 - 1 = 0 \Rightarrow$ многочлен P_j — это просто константа. Тогда и всё соответствующее слагаемое будет ограничено. Значит, каждое решение $x(t)$ на $[0, +\infty)$ ограничено, тогда существует такое число $c > 0$, что $\|X(t)\| \leqslant c$ для всех $t \in [0, +\infty)$. Далее работает такое же рассуждение, как в первой части, поэтому получаем устойчивость по Ляпунову. Вывод об асимптотической устойчивости мы так сразу сделать не можем, так как не все решения стремятся к нулю. Покажем, что здесь её просто не может быть, предъявив явное решение.

   Пусть j таково, что $\mathrm{Re}\,\lambda_j = 0, k_j = 1$. Тогда если $\lambda_j \in \mathbb{C}$, то берём решение $x(t) \coloneqq r(v_j \cos(\beta_j t) + u_j \sin(\beta_j t))$, где $r > 0$, $u_j, v_j \in \mathbb{R}^n$. Уменьшая r, мы можем попасть в сколь угодно малую окрестность нуля, но при этом $x(t) \nrightarrow 0$. Если же $\lambda_j \in \mathbb{R}$, то возьмём решение $x(t) \coloneqq r v_j$. Оно опять же не стремится к нулю.

3. Пусть существует j такое, что $Re(\lambda_j) > 0$. Если $\lambda_j \in \mathbb{C}$, то берём решение $x(t) \coloneqq r e^{\alpha_j t}(P_j(t)\cos(\beta_j t) + P_{j+s}(t)\sin(\beta_j t))$. Для любого $r > 0$ оно не ограничено $\Rightarrow$ нет устойчивости по Ляпунову. Если же $\lambda_j \in \mathbb{R}$, то подойдёт решение $x(t) \coloneqq r e^{\lambda_j t} v_j$, $r > 0$, $v_j \in \mathbb{R}^n$.

   Остался случай, когда все $\mathrm{Re}\,\lambda_j \leqslant 0$ и существует j такое, что $\mathrm{Re}\,\lambda_j = 0$, но при этом $k_j \geqslant 2$. Тогда если $\lambda_j \in \mathbb{C}$, то есть неограниченное комплексное решение $x(t) \coloneqq r(a + bt)e^{\lambda_j t}$, $r > 0$, $b \neq 0$. Тогда либо $\mathrm{Re}\,x(t)$, либо $\mathrm{Im}\,x(t)$ не ограничено $\Rightarrow$ нет устойчивости по Ляпунову. Если же $\lambda_j \in \mathbb{R}$, то возьмём решение $x(t) \coloneqq r(at + b)$, $a, b \in \mathbb{R}^n$, $a \neq 0$, $r > 0$. Снова $x(t)$ не ограничено $\Rightarrow$ нулевое положение равновесия не устойчиво по Ляпунову.

$\square$

4.2.2 Устойчивость нелинейных систем

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ открыто, $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $\widehat{x} \in \Omega$ — положение равновесия. Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} x' = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}.$$

Пусть $\varphi(\cdot, x_0)$ — её непродолжаемое решение. Обозначим матрицу Якоби $A \coloneqq \frac{\partial f}{\partial x}(\widehat{x})$. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ — собственные числа матрицы A.

Теорема. (Ляпунова) Если все $\mathrm{Re}\,\lambda_j < 0$, то положение равновесия $\widehat{x}$ асимптотически устойчиво.

Рассмотрим систему
$$x' = f(x). \tag{1}$$

Определение. Пусть $\Pi \subset \Omega$ открыто, а функция $v \in C^1(\Pi, \mathbb{R})$. Тогда *производной в силу системы (1)* называется функция

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(1)}(x) := \left\langle \frac{\partial v}{\partial x}(x), f(x) \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_j}(x) f_j(x).$$

Пусть $x(t)$ — решение системы (1). Тогда

$$\frac{dv}{dt}(x(t)) \equiv \left\langle \frac{\partial v}{\partial x}(x(t)), x'(t) \right\rangle \equiv \left\langle \frac{\partial v}{\partial x}(x(t)), f(x(t)) \right\rangle \equiv \left.\frac{dv}{dt}\right|_{(1)}(x(t)).$$

Определение. Функция v в следующих двух теоремах называется *функцией Ляпунова.*

Теорема. (Ляпунова об устойчивости) Пусть существуют $\varepsilon > 0$ и функция $v \in C^1(O(\widehat{x}, \varepsilon), \mathbb{R})$ такие, что:

1. $v(\widehat{x}) = 0$
2. $v(x) > 0$ при $x \neq \widehat{x}$
3. для всех x выполнено $\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(1)}(x) \leqslant 0.$

Тогда $\widehat{x}$ устойчиво по Ляпунову.

Теорема. (Ляпунова об асимптотической устойчивости) Пусть существуют $\varepsilon > 0$ и функция $v \in C^1(O(\widehat{x}, \varepsilon), \mathbb{R})$ такие, что:

1. выполнены условия 1 и 2 из предыдущей теоремы
2. для всех $x \neq \widehat{x}$ выполнено $\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(1)}(x) < 0.$

Тогда $\widehat{x}$ асимптотически устойчиво.

Примеры.

- ▷ Рассмотрим уравнение $x' = -x^3$, $\widehat{x} = 0$. Тогда в качестве функции Ляпунова можно взять $v(x) = x^2$. Тогда для $x \neq 0$ верно следующее:

  $$\left.\frac{dv}{dv}\right|_{(1)}(x) = 2x \cdot (-x^3) = -2x^4 < 0.$$

  Получаем, что выполнены все три условия теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости $\Rightarrow \widehat{x} = 0$ асимптотически устойчиво.

- ▷ Рассмотрим систему
  $$\begin{cases} x_1' = -x_2 \\ x_2' = x_1 \end{cases}$$

и $\widehat{x} = (0,0)^T$. Положим $v(x) = x_1^2 + x_2^2$. Тогда $v(0) = 0$ и $v(x) > 0$ при $x \neq 0$. Найдём производную:

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(1)}(x) = \left\langle (2x_1, 2x_2)^T, (-x_2, x_1)^T \right\rangle \equiv 0.$$

Следовательно, по теореме Ляпунова об устойчивости $\widehat{x}$ устойчиво. Но асимптотической устойчивости нет, так как фазовым портретом этой системы является центр.

5 Первые интегралы

5.1 Первые интегралы автономных систем

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ открыто и $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Снова рассматриваем автономную систему

$$x' = f(x). \tag{1}$$

Определение. Если $D \subset \Omega$ открыто, то *первым интегралом* системы (1) называется непрерывно дифференцируемая функция $u\colon D \to \mathbb{R}$ такая, что $u(x(t)) \equiv \mathrm{const}$ для любого такого решения $x\colon I \to \mathbb{R}$ системы (1), что $x(I) \subset D$.

Замечание. Первый интеграл всегда существует, например, $u \equiv \mathrm{const}$.

Утверждение. (критерий первого интеграла) Пусть $D \subset \Omega$ открыто и функция $u\colon D \to \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируема. Тогда $u(\cdot)$ — первый интеграл системы (1) $\Leftrightarrow$ $\left.\frac{du}{dt}\right|_{(1)}(x) \equiv 0$.

Доказательство. $\Rightarrow$: Берём $x_0 \in D$. Тогда существует решение $x\colon I \to \mathbb{R}^n$ задачи Коши

$$\begin{cases} x' = f(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

для некоторого $t_0 \in I$. При этом при необходимости можно сузить область определения I так, чтобы $x(I) \subset D$. Так как функция $u(x(t)) \equiv \mathrm{const}$, то по свойству производной в силу системы

$$\left.\frac{du}{dt}\right|_{(1)}(x(t)) \equiv \frac{du}{dt}(x(t)) \equiv 0.$$

Подставляем $t = t_0$, получаем: $\left.\frac{du}{dt}\right|_{(1)}(x_0) = 0$. В силу произвольности выбора x_0 получили требуемое.

$\Leftarrow$: Берём произвольное решение $x\colon I \to \mathbb{R}$ системы (1) такое, что $x(I) \subset D$. Тогда

$$\frac{du}{dt}(x(t)) \equiv \left.\frac{du}{dt}\right|_{(1)}(x(t)) \equiv 0,$$

отсюда получаем, что $u(x(t)) \equiv \mathrm{const} \Rightarrow$ по определению $u(\cdot)$ — первый интеграл системы (1).

$\square$

Примеры.

- ▷ Пусть $\Omega = \mathbb{R}^2$, $D = \mathbb{R}^2$. Рассмотрим систему $x' = x$. Её решение — это $x_1 = c_1e^t$, $x_2 = c_2e^t$. На фазовом портрете траекториями будут все открытые лучи, выходящие из начала координат. Пусть $u(\cdot)$ — первый интеграл. Возьмём конкретный луч, на нём $u \equiv c$ для какой-то константы c. По непрерывности $u(0) \equiv c$. Но тогда на всех лучах $u \equiv c$, значит, $u \equiv c$ на всём D и других первых интегралов быть не может.

- ▷ Рассмотрим ту же самую систему, только теперь $D = \{(x_1, x_2)^T : x_1 > 0\}$. Покажем, что функция $u(x) = \frac{x_2}{x_1}$ является первым интегралом. Действительно,

$$u(x(t)) \equiv \frac{c_2e^t}{c_1e^t} \equiv \frac{c_2}{c_1}.$$

- ▷ Рассмотрим систему

$$\begin{cases} x_1' = -x_2 \\ x_2' = x_1 \end{cases}.$$

Её решение выглядит так:

$$\begin{cases} x_1 = r\cos(\varphi + t) \\ x_2 = r\sin(\varphi + t) \end{cases}.$$

Тогда на фазовом портрете траекториями будут концентрические окружности. Так как при движении точки по окружности радиус не зависит от t, то в качестве первого интеграла можно взять $u(x) = x_1^2 + x_2^2$.

Замечание. Зачем нужны первые интегралы? Оказывается, с помощью них можно сводить автономные системы к алгебраическим уравнениям. Нестрого поясним, как это можно делать. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Возьмём два первых интеграла u_1, u_2, константы c_1, c_2 и рассмотрим следующую систему:

$$\begin{cases} u_1(x) = c_1 \\ u_2(x) = c_2 \end{cases}.$$

Оба уравнения задают поверхности, а решения системы составляют кривую, по которой пересекаются эти поверхности. Можно показать, что кусочки этой кривой будут являться траекториями автономной системы.

Определение. Пусть $D \subset \Omega$ открыто и функции $v_1, \ldots, v_k \in C^1(D, \mathbb{R}), k < n$. Тогда они называются *функционально независимыми* на D, если ранг матрицы Якоби $\operatorname{rk} \frac{\partial(v_1,\ldots,v_k)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)} \equiv k$.

Замечание. Из функциональной независимости следует линейная независимость, а вот обратное следствие неверно. Например, пусть $D = \mathbb{R}^2$. Возьмём $u(x_1, x_2) = x_1^2$. Заметим, что при $x_1 = 0$ ранг матрицы Якоби равен $0 < 1$, значит, нет функциональной независимости.

5.2 Множество всех первых интегралов автономной системы

Утверждение. Если у нас есть k первых интегралов $u_1(x), \ldots, u_k(x)$ системы (1), то функция $F(u_1(x), \ldots, u_k(x))$, где F непрерывно дифференцируема, также является первым интегралом системы (1).

Доказательство. Действительно, пусть $x(t)$ — это решение системы (1), тогда

$$F(u_1(x(t)), \ldots, u_k(x(t))) \equiv F(\text{const}, \ldots, \text{const}) \equiv \text{const}.$$

$\square$

Поскольку первых интегралов бесконечное количество (хотя бы потому, что все константы ими являются), то возникает вопрос: можно ли взять несколько первых интегралов и, используя утверждение выше, получить все возможные первые интегралы? Оказывается, что при определённых условиях так правда можно сделать.

Теорема. Пусть $x_0 \in \Omega$ и $f(x_0) \neq 0$. Тогда существуют окрестность $X(x_0)$ и $n-1$ функционально независимых первых интегралов $u_2, \ldots, u_n \colon X(x_0) \to \mathbb{R}$ системы (1).

Доказательство. Докажем теорему для случая, когда у нас фазовые траектории являются прямыми, а потом сведём общий случай к этому с помощью теоремы о выпрямлении траекторий. Давайте всё формализуем.

1. Так как $f(x_0) \neq 0$, то мы можем использовать теорему о выпрямлении траекторий. Значит, существует окрестности $X(x_0)$, $Y(0)$ и диффеоморфизм $\Psi \colon Y(0) \to X(x_0)$. Зададим для $i = \overline{2, n}$ функции $v_i \colon Y(0) \to \mathbb{R}$ по формуле $v_i(y) \coloneqq y_i$. Тогда все v_i — это первые интегралы системы
$$\begin{cases} y_1' = 1 \\ y_2' = 0 \\ \vdots \\ y_n' = 0 \end{cases}, \tag{2}$$
так как любое решение этой системы имеет вид
$$y(t) = \begin{pmatrix} t + C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix},$$
а тогда $v_i(y(t)) \equiv c_i$. При этом все v_i функционально независимы в окрестности $Y(0)$, так как $\operatorname{grad} v_i(y(t)) = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)^T$, где 1 стоит на месте i, тогда у матрицы Якоби как раз будет ранг $n-1$.

2. Теперь введём функции $u_2, \ldots, u_n \colon X(x_0) \to \mathbb{R}$ по формуле $u_i(x) \coloneqq v_i(\Psi^{-1}(x))$. Тогда все u_i — это первые интегралы системы (1), так как для любого решения $x(t)$ системы (1) $\Psi^{-1}(x(t))$ будет решением системы (2), а тогда
$$u_i(x(t)) \equiv v_i(\Psi^{-1}(x(t))) \equiv \text{const}.$$
Ну и все u_i функционально независимы на $X(x_0)$, так как v_i функционально независимы, а Ψ — это диффеоморфизм $\Rightarrow$ его матрица Якоби невырожденная и при домножении на невырожденную матрицу ранг не меняется.

$\square$

Теорема. Пусть $x_0 \in \Omega$ и $f(x_0) \neq 0$. Тогда для любых функционально независимых первых интегралов $u_1, \ldots, u_{n-1} \colon X(x_0) \to \mathbb{R}$ системы (1) существуют окрестности $X'(x_0) \subset X(x_0)$ и $W((u_1(x_0), \ldots, u_{n-1}(x_0)))$ такие, что для любого первого интеграла $u \colon X'(x_0) \to \mathbb{R}$ системы (1) существует функция $F \in C^1(W, \mathbb{R})$: $u(x) \equiv F(u_1(x), \ldots, u_{n-1}(x))$.

Доказательство. Здесь мы снова докажем теорему сначала для системы (2), а потом перенесём всё на систему (1) с помощью теоремы о выпрямлении траектории (обозначения из её формулировки снова в силе).

1. Сначала поймём, что любой первый интеграл $v \colon Y(0) \to \mathbb{R}$ системы (2) не зависят от y_1, так как для любого решения $y(t)$ получаем, что $v(t, y_2, \ldots, y_n) \equiv \text{const}$ для любого $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, при этом $y_2, \ldots, y_n \in O^{n-1}(0, \varepsilon)$.

   Пусть $v_1, \ldots, v_{n-1} \colon Y(0) \to \mathbb{R}$ — функционально независимые первые интегралы системы (2). Определим отображение $\Phi \colon O^{n-1}(0, \varepsilon) \to \mathbb{R}^{n-1}$ следующим образом:

$$\Phi(y_2, \ldots, y_n) \coloneqq \begin{pmatrix} v_1(y_1, \ldots, y_n) \\ \vdots \\ v_{n-1}(y_1, \ldots, y_n) \end{pmatrix}.$$

   Тогда в силу независимости v_i на $Y(0)$ матрица Якоби отображения Φ имеет максимальный ранг $n-1 \Rightarrow$ по теореме об обратной функции существуют окрестности $V(0) \subset O^{n-1}(0, \varepsilon)$ и $W((v_1(0), \ldots, v_{n-1}(0)))$ такие, что Φ — диффеоморфизм между V и W.

   Пусть $v \colon (-\varepsilon, \varepsilon) \times V \to \mathbb{R}$ — первый интеграл системы (2). Тогда определим отображение

$$g(y) \coloneqq v(y_1, \Phi^{-1}(\Phi(y_2, \ldots, y_n))) \equiv v(y_1, \Phi^{-1}(v_1(y), \ldots, v_{n-1}(y))).$$

   Теперь, если $z_2, \ldots, z_n \in W$, то можем построить искомую функцию F:

$$F(z_2, \ldots, z_n) \coloneqq v(y_1, \Phi^{-1}(z_2, \ldots, z_n)).$$

   Тогда как раз получаем, что $v(y) \equiv F(v_1(y), \ldots, v_{n-1}(y))$, значит, для системы (2) мы теорему доказали.

2. Докажем для общего случая. Пусть у нас есть функционально независимые первые интегралы $u_1, \ldots, u_{n-1} \colon X(x_0) \to \mathbb{R}$. Тогда функции $v_1, \ldots, v_{n-1}$, определённые как $v_i(y) \coloneqq u_i(\Psi(y))$, где $y \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times V$, — это функционально независимые первые интегралы системы (2). Положим $X'(x_0) \coloneqq \Psi((-\varepsilon, \varepsilon) \times V)$. Возьмём какой-нибудь первый интеграл $u \colon X'(x_0) \to \mathbb{R}$ и определим первый интеграл $v(y) \coloneqq u(\Psi(y))$. Тогда из первого пункта доказательства существуют окрестность $W((v_1(0), \ldots, v_{n-1}(0)))$ и $F \in C^1(W, \mathbb{R})$: $v(y) \equiv F(v_1(y), \ldots, v_{n-1}(y))$. Перепишем согласно определению v и v_i:

$$u(\Psi(y)) \equiv F(u_1(\Psi(y)), \ldots, u_{n-1}(\Psi(y))).$$

   Тогда $u(x) \equiv F(u_1(x), \ldots, u_{n-1}(x))$, где $x = \Psi(y), y \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times V$, что и требовалось.

$\square$

6 Линейные однородные уравнения в частных производных

6.1 Основные понятия

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ открыто, $a \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Рассмотрим уравнение

$$a_1(x)\frac{\partial u}{\partial x_1}(x) + \dots + a_n(x)\frac{\partial u}{\partial x_n}(x) = 0. \tag{1}$$

Его решением является функция $u \in C^1(D, \mathbb{R})$, где $D \subset \Omega$ открыто, при подстановке которой получается тождественный ноль. В сокращённой записи:

$$\left\langle a(x), \frac{\partial u}{\partial x}(x) \right\rangle \equiv 0.$$

Определение. Такое уравнение называется *линейным однородным уравнением в частных производных первого порядка.*

Определение. Система

$$x' = a(x) \tag{2}$$

называется *характеристической системой* уравнения.

Найдём связь между решениями уравнения (1) и его характеристической системы (2).

Предложение. Функция $u\colon D \to \mathbb{R}$ является решением уравнения (1) $\Leftrightarrow$ $u\colon D \to \mathbb{R}$ является первым интегралом системы (2).

Доказательство. Пусть $u(\cdot)$ — первый интеграл (2) $\Leftrightarrow$ $\left\langle a(x), \frac{\partial u}{\partial x}(x) \right\rangle \equiv 0$ по критерию первого интеграла $\Leftrightarrow$ $u(\cdot)$ — решение уравнения (1).

□

Поскольку мы свели задачу к первым интегралам, то для решений уравнения (1) выполняются все те же свойства, что и для первых интегралов (доказываются тривиально).

Предложение. Пусть $u_1, \dots, u_k\colon D \to \mathbb{R}$ — решения уравнения (1), $(u_1(x), \dots, u_k(x)) \in Y$ для всех $x \in D$, где Y открыто. Тогда для любой функции $F \in C^1(Y, \mathbb{R})$ функция $u(x) \coloneqq F(u_1(x), \dots, u_k(x))$ тоже является решением уравнения (1).

Предложение Пусть $x_0 \in \Omega : a(x_0) \neq 0$. Тогда существуют окрестность $X(x_0)$ и $n-1$ функционально независимых решений $u_1, \dots, u_{n-1}\colon X(x_0) \to \mathbb{R}$ уравнения (1).

Предложение. Пусть $x_0 \in \Omega : a(x_0) \neq 0$, $D \subset \Omega$ открыто, $u_1, \dots, u_{n-1}\colon D \to \mathbb{R}$ — функционально независимые решения уравнения (1). Тогда существуют окрестности $X(x_0)$ и $Y((u_1(x_0), \dots, u_{n-1}(x_0)))$ такие, что для любого решения $u\colon X(x_0) \to \mathbb{R}$ уравнения (1) существует функция $F \in C^1(Y, \mathbb{R}) : u(x) \equiv F(u_1(x), \dots, u_{n-1}(x))$.

6.2 Задача Коши для ЛДУ в частных производных

Пусть заданы гладкие функции $g, \varphi\colon \Omega \to \mathbb{R}$, причём $\frac{\partial g}{\partial x}(x) \neq 0$ на Ω. Зададим множество $\gamma := \{x : g(x) = 0\}$ и будем предполагать, что оно непусто, более того, это $(n-1)$–мерная поверхность. Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} \left\langle a(x), \frac{\partial u}{\partial x}(x) \right\rangle = 0 \\ u(x) = \varphi(x) \text{ при } x \in \gamma \end{cases} . \tag{3}$$

В задаче Коши для ОДУ мы искали решение, которое только в одной точке удовлетворяло начальному условию. Здесь же мы ищем решение уравнения в частных производных, которое на поверхности γ совпадает с заданной функцией $\varphi(x)$.

Определение. Функция φ называется *начальным значением* функции u на γ.

Определение. Поверхность γ называется *начальной поверхностью*.

Определение. Точка $\widehat{x} \in \Omega$ называется *характеристической точкой* задачи (3), если $\widehat{x} \in \gamma$ и $\left\langle a(\widehat{x}), \frac{\partial g}{\partial x}(\widehat{x}) \right\rangle = 0$.

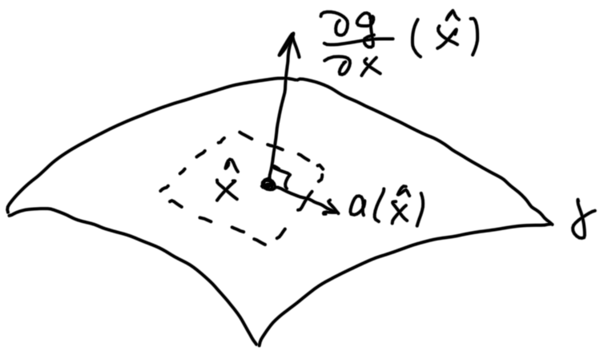

Рис. 11: Визуализация характеристической точки

Теорема. Пусть точка $\widehat{x} \in \gamma$ не является характеристической. Тогда существуют окрестность $V(\widehat{x})$ и функция $u\colon V(\widehat{x}) \to \mathbb{R}$ такая, что она является единственным решением задачи (3) в этой окрестности.

Доказательство. Мы знаем, что $a(\widehat{x}) \neq 0$. Тогда можно применить одно из предложений выше: существуют окрестность $X(\widehat{x})$ и функции $u_2, \ldots, u_n\colon X(\widehat{x}) \to \mathbb{R}$ такие, что $u_2, \ldots, u_n$ – функционально независимые решения задачи (1).

Зададим отображение $\Phi\colon X(\widehat{x}) \to \mathbb{R}^n$ следующим образом:

$$\Phi(x) := \begin{pmatrix} g(x) \\ u_2(x) \\ \vdots \\ u_n(x) \end{pmatrix}.$$

Хотим применить теорему об обратной функции, проверим, что матрица Якоби

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}(\widehat{x}) \\ \frac{\partial u_2}{\partial x}(\widehat{x}) \\ \vdots \\ \frac{\partial u_n}{\partial x}(\widehat{x}) \end{pmatrix}$$

невырождена. Докажем от противного: пусть

$$\frac{\partial g}{\partial x}(\widehat{x}) = \sum_{j=2}^{n} \lambda_j \frac{\partial u_j}{\partial x}(\widehat{x}).$$

Это рассматривать достаточно, так как первые $n-1$ строк точно линейно независимы. Умножим скалярно на $a(\widehat{x})$:

$$\left\langle a(\widehat{x}), \frac{\partial g}{\partial x}(\widehat{x}) \right\rangle = \sum_{j=2}^{n} \lambda_j \left\langle a(\widehat{x}), \frac{\partial u_j}{\partial x}(\widehat{x}) \right\rangle = 0,$$

так как u_j — решения уравнения (1). Противоречие с тем, что $\widehat{x}$ не является характеристической точкой.

Теперь по теореме об обратном отображении найдутся окрестности $V(\widehat{x}) \subset X(\widehat{x})$, $W((u_2(\widehat{x}), \ldots, u_n(\widehat{x}))) \subset \mathbb{R}^{n-1}$ и $\varepsilon > 0$ такие, что $\Phi\colon V \to (-\varepsilon, \varepsilon) \times W$ является диффеоморфизмом. Построим решение задачи Коши. Возьмём функцию

$$u(x) := \varphi(\Phi^{-1}(0, u_2(x), \ldots, u_n(x)))$$

для всех $x \in V(\widehat{x})$. Заметим, что u – решение уравнения (1). Покажем, что u также является решением задачи Коши. Берём $x \in \gamma \Rightarrow g(x) = 0$:

$$u(x) = \varphi(\Phi^{-1}(0, u_2(x), \ldots, u_n(x))) = \varphi(\Phi^{-1}(g(x), u_2(x), \ldots, u_n(x))) = \varphi(\Phi^{-1}(\Phi(x))) = \varphi(x).$$

Таким образом, мы доказали существование решения. Докажем теперь единственность.

Для этого уменьшим окрестности V, W и ε так, чтобы для любого решения $v\colon V \to \mathbb{R}$ уравнения (1) существовала функция $F \in C^1(W, \mathbb{R}) : v(x) \equiv F(u_2(x), \ldots, u_n(x))$. Возьмём на меньшей окрестности решение $v\colon V \to \mathbb{R}$ задачи Коши (3) и покажем, что оно совпадает с уже найденным решением u.

Во-первых, для него выполняется $v(x) \equiv F(u_2(x), \ldots u_n(x))$. Возьмём $x \in \gamma \Rightarrow v(x) = \varphi(x) = u(x)$, так как и u, v являются решениями задачи Коши. Значит, $F(u_2(x), \ldots u_n(x)) \equiv \varphi(\Phi^{-1}(0, u_2(x), \ldots, u_n(x)))$. Поскольку Φ — это диффеоморфизм, то для любой точки $(y_1, \ldots, y_n) \in W$ верно: $F(y_2, \ldots, y_n) \equiv \varphi(\Phi^{-1}(0, y_2, \ldots, y_n))$. Тогда

$$v(x) \equiv F(u_2(x), \ldots, u_n(x)) \equiv \varphi(\Phi^{-1}(0, u_2(x), \ldots, u_n(x))) \equiv u(x).$$

□

Пример. Рассмотрим уравнение $u_x + u_y = 0$ и начальное условие

$$\begin{cases} u(x,y) = 1 \\ x - y = 0 \end{cases}.$$

Перейдем к характеристической системе

$$\begin{cases} x' = 1 \\ y' = 1 \end{cases}.$$

Тогда $x - y = C$ — это первый интеграл. Рассмотрим произвольную функцию F: $F(0) = 1$. Отсюда $u(x,y) = F(x-y)$ является решением задачи Коши, то есть решений бесконечно много.

Рассмотрим теперь то же уравнение, но с другим начальным условием:

$$\begin{cases} u(x,y) = x^2 + y^2 \\ x - y = 0 \end{cases}.$$

Знаем, что $u(x,y) = F(x-y)$ — это общее решение. При $x - y = 0$ получаем $u(x,y) = F(0)$. Значит, для всех решений задачи Коши $F(0) = x^2 + y^2$ на прямой $x - y = 0$. Такого быть не может, потому что $F(0)$ — константа. То есть у этой задачи Коши нет решений.

В этих примерах не выполняется условие теоремы, потому что все точки на кривой γ являются характеристическими.

Действительно,

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \frac{\partial g}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

а их скалярное произведение равно нулю во всех точках.

7 Вариационное исчисление

7.1 Простейшая задача вариационного исчисления

Даны функция $F \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, числа $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ и числа $A, B \in \mathbb{R}$.

Рассмотрим функционал $I\colon C^1([a,b], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, определённый следующим образом:

$$I(x) := \int_a^b F(t, x(t), x'(t))dt.$$

Также определим множество M:

$$M \coloneqq \{x \in C^1([a,b], \mathbb{R}) : x(a) = A,\ x(b) = B\}.$$

Будем рассматривать пространство функций $C^1([a,b], \mathbb{R})$, как нормированное пространство. Зададим на нём нормы $\|x\|_0 = \max_{t\in[a,b]} |x(t)|$ и $\|x\|_1 = \|x\|_0 + \|x'\|_0$.

Определение. Точка $\widehat{x} \in M$ называется *слабым локальным минимумом* функционала I, если $\exists\, \varepsilon > 0 : \forall x \in M,\ \|x - \widehat{x}\|_1 < \varepsilon \Rightarrow I(\widehat{x}) \leqslant I(x)$.

Определение. Точка $\widehat{x} \in M$ называется *сильным локальным минимумом*, если вместо $\|x\|_1$ используется $\|x\|_0$.

Определение. *Простейшей задачей вариационного исчисления* называется задача нахождения слабых локальных экстремумов функционала I.

Для максимумов всё определяется аналогично. Мы будем рассматривать задачи на минимизацию.

Утверждение. Если $\widehat{x}$ — сильный локальный минимум, то он также является слабым. Доказывается тривиально.

Положим

$$\mathring{C}^1[a, b] := \{x \in C^1[a, b] : x(a) = x(b) = 0\}.$$

Тогда множество M замкнуто относительно прибавления функций из $\mathring{C}^1[a, b]$.

Положим для $\widehat{x} \in M$, $\widehat{x} \in C^2$, $\eta \in \mathring{C}^1[a, b]$ функцию

$$\varphi(\mu) := I(\widehat{x} + \mu\eta) = \int_a^b F(t, \widehat{x}(t) + \mu\eta(t), \widehat{x}'(t) + \mu\eta'(t))dt.$$

Продифференцируем её:

$$\varphi'(\mu)|_{\mu=0} = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial x}(t, \widehat{x}(t), \widehat{x}'(t))\eta(t) + \frac{\partial F}{\partial x'}(t, \widehat{x}(t), \widehat{x}'(t))\eta'(t)\right) dt =$$

Проинтегрируем по частям:

$$= \int_a^b \frac{\partial F}{\partial x}(t, \widehat{x}(t), \widehat{x}'(t))\eta(t)dt + \frac{\partial F}{\partial x'}(\dots)\eta(t)\Big|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial x'}(\dots)\eta(t)dt =$$

Второе слагаемое рано нулю, так как $\eta(a) = \eta(b) = 0$

$$= \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial x}(\dots) - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial x'}(\dots)\right)\eta(t)dt.$$

Таким образом, если $\widehat{x}$ является слабым локальным минимумом, то 0 — стационарная точка функции φ.

Определение. $\delta I[\widehat{x}, \eta] := \varphi'(0)$ — первая вариация функционала I на $\widehat{x}$.

Утверждение. Если $\widehat{x} \in M$ — слабый локальный экстремум, то для любого $\eta \in \mathring{C}^1[a, b]$ точка 0 является локальным экстремумом функции φ.

Доказательство. Будем считать, что мы работаем с точкой минимума. По определению существует $\varepsilon > 0$, такое что для любого $x \in M$, удовлетворяющему $\|x - \widehat{x}\|_1 < \varepsilon$ верно $I(x) \geqslant I(\widehat{x})$.

Тогда для любого $\eta \in \mathring{C}^1[a, b]$, не равного тождественному нулю, положим $\delta = \frac{\varepsilon}{\|\eta\|_1}$. Возьмём произвольный $\mu \in (-\delta, \delta)$. Имеем

$$\|\widehat{x} + \mu\eta - \widehat{x}\|_1 = \max_{t\in[a,b]} |\mu\eta(t)| + \max_{t\in[a,b]} |\mu\eta'(t)| =$$

$$= |\mu| \left(\max_{t\in[a,b]} |\eta(t)| + \max_{t\in[a,b]} |\eta'(t)| \right) = |\mu| \cdot \|\eta\|_1 < \varepsilon.$$

Таким образом, мы попали в ε-окрестность функции $\widehat{x}$, то есть $\varphi(\mu) = I(\widehat{x} + \mu\eta) \geqslant I(\widehat{x}) = \varphi(0)$.

$\square$

Утверждение. (Лемма Лагранжа) Пусть $v \in C[a,b]$, такая что $\forall \eta \in \mathring{C}^1[a,b]$ выполнено

$$\int_a^b v(t)\eta(t)dt = 0.$$

Тогда $v(t) \equiv 0$.

Доказательство. От противного: допустим, что существует $\tilde{\tau} \in [a,b]$, такое что $v(\tilde{\tau}) > 0$. Тогда существует $\tau \in (a,b)$, такое что $v(\tau) > 0$ из непрерывности. Отсюда существует $\varepsilon > 0$, такой что $(\tau - \varepsilon, \tau + \varepsilon) \subset [a,b]$ и $v(t) > \frac{v(\tau)}{2}$ для $t \in (\tau - \varepsilon, \tau + \varepsilon)$.

Теперь построим гладкую функцию, принимающую положительные значения на $T := (\tau - \varepsilon, \tau + \varepsilon)$ и ноль вне этого интервала. В частности,

$$\eta(t) := \begin{cases} (t - (\tau - \varepsilon))^2 (t - (\tau + \varepsilon))^2, & t \in T \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}.$$

Отсюда по условию

$$0 = \int_a^b v(t)\eta(t)dt = \int_T v(t)\eta(t)dt.$$

Противоречие, так как мы взяли интеграл по непустому интервалу произведения двух положительных функций.

$\square$

Теорема. Пусть $F \in C^2$, $\widehat{x} \in M$, $\widehat{x} \in C^2$ — слабый локальный экстремум. Тогда $\widehat{x}$ является решением уравнения Эйлера

$$\frac{\partial F}{\partial x}(t, x, x') - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial x'}(t, x, x') = 0.$$

Доказательство. Поскольку $\widehat{x}$ является слабым локальным экстремумом, по утверждению для любой $\eta \in \mathring{C}^1[a,b]$ точка 0 является локальным экстремумом функции φ, то есть $\varphi'(0) = 0$. Выражение для $\varphi'(0)$ мы уже писали выше — теперь заметим, что по утверждению про локальный экстремум φ получаем $\varphi'(0) = 0$, а по лемме Лагранжа —

$$\frac{\partial F}{\partial x}(t, \widehat{x}, \widehat{x}'(t)) - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial x'}(t, \widehat{x}, \widehat{x}'(t)) \equiv 0.$$

Следовательно, $\widehat{x}$ является решением уравнения Эйлера.

$\square$

Замечание. Повсюду мы говорили, что $\widehat{x} \in C^2$. Но теоретически экстремумом может являться и функция из C^1. Пусть $F, \widehat{x} \in C^1$. Если $\widehat{x}$ — слабый локальный экстремум, то функция

$$t \mapsto \frac{\partial F}{\partial x'}(t, \widehat{x}(t), \widehat{x}'(t))$$

непрерывно дифференцируема, и $\widehat{x}$ является решением уравнения Эйлера. Иными словами, прошлая теорема верна и в этом случае, но доказывать мы это не будем.

Определение. Решение уравнения Эйлера называется *экстремальным*. Тогда прошлую теорему можно переформулировать, как "слабый локальный экстремум является экстремальным".

7.2 Задача со свободным концом

Пусть $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \in C^2$, числа $a, b, A \in \mathbb{R}$ фиксированы. Рассмотрим функционал

$$I(x) = \int_a^b F(t, x(t), x'(t))dt \tag{1}$$

при условии $x(a) = A$.

Мы хотим найти экстремумы $I : M \to \mathbb{R}$, где $M = \{x \in C^1[a, b] : x(a) = A\}$.

Теорема. Пусть $\widehat{x} \in M$, $\widehat{x} \in C^2$ — решение (1), то есть слабый локальный экстремум I. Тогда $\widehat{x}$ является решением уравнения Эйлера

$$\frac{\partial F}{\partial x}(t, x, x') - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial x'}(t, x, x') = 0,$$

а также

$$\frac{\partial F}{\partial x'}(b, \widehat{x}(b), \widehat{x}'(b)) = 0. \tag{2}$$

Доказательство. Зафиксируем допустимое приращение $\eta \in C^1[a, b]$, $\eta(a) = 0$. Положим

$$\Phi(\alpha) := I(\widehat{x} + \alpha\eta) = \int_a^b F(t, \widehat{x}(t) + \alpha\eta(t), \widehat{x}'(t) + \alpha\eta'(t))dt.$$

Найдём производную в нуле:

$$\Phi'(0) = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial x}(t, \widehat{x}(t), \widehat{x}'(t))\eta(t) + \frac{\partial F}{\partial x'}(t, \widehat{x}(t), \widehat{x}'(t))\eta'(t) \right) dt =$$

Проинтегрируем по частям

$$= \int_a^b \frac{\partial F}{\partial x}(\dots)\eta(t)dt + \frac{\partial F}{\partial x'}(t, \widehat{x}(t), \widehat{x}'(t))\eta(t)\Big|_{t=a}^{t=b} - \int_a^b \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial x'}(\dots)\eta(t)dt =$$

$$= \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial x}(\dots) - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial x'}(\dots) \right) \eta(t)dt + \frac{\partial F}{\partial x'}(b, \widehat{x}(b), \widehat{x}'(b))\eta(b),$$

так как $\eta(a) = 0$.

Как доказывалось в простейшей задаче вариационного исчисления, 0 является локальным экстремумом функции Φ, то есть $\Phi'(0) = 0$. Таким образом, выражение выше равно нулю.

Подставим в выражение выше функцию η с $\eta(b) = 0$, тогда останется только

$$\int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial x}(t, \widehat{x}(t), \widehat{x}'(t)) - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial x'}(t, \widehat{x}(t), \widehat{x}'(t))\right)\eta(t)dt = 0.$$

По лемме Лагранжа получаем уравнение Эйлера. Теперь остаётся только

$$\frac{\partial F}{\partial x'}(b, \widehat{x}(b), \widehat{x}'(b))\eta(b) = 0$$

для всех функций η, то есть

$$\frac{\partial F}{\partial x'}(b, \widehat{x}(b), \widehat{x}'(b)) \equiv 0.$$

□

Замечание. Опять же если $F, \widehat{x} \in C^1$, то функция

$$\frac{\partial F}{\partial x'}(t, \widehat{x}(t), \widehat{x}'(t))$$

непрерывно дифференцируема по t, $\widehat{x}$ является решением уравнения Эйлера и выполняется (2).

Замечание 2. Можно рассматривать и задачу с другим свободным концом, тогда (2) будет иметь вид

$$\frac{\partial F}{\partial x'}(a, \widehat{x}(a), \widehat{x}'(a)) = 0.$$

А если оба конца свободны, то условие выше и условие (2) выполняются одновременно.

7.3 Изопериметрическая задача

Даны функции $F, G \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ и числа a,b, A, B, l, причём $a < b$.

Изопериметрическая задача:

$$\begin{cases} I(x) = \int_a^b F(t, x', x')dt \to \min \\ K(x) = \int_a^b G(t, x, x')dt = l \end{cases}$$

$M = \{x \in C^1([a,b], \mathbb{R}) : x(a) = A, x(b) = B, K(x) = l\}$

Определение. $\widehat{x}$ называется *слабым минимумом*, если $\widehat{x} \in M$ и $\exists \varepsilon > 0 : \forall x \in M : \|x - \widehat{x}\|_1 < \varepsilon\ I(x) \geqslant I(\widehat{x})$ (аналогично определяется слабый максимум).

Определение. $L(t,x,x', \lambda) := F(t,x,x') + \lambda G(t,x,x')$ называется *интегрантом.*

Теорема. (Необходимое условие слабого минимума) $\widehat{x} \in C^2([a,b], \mathbb{R})$, $\widehat{x}$ – слабый минимум(максимум), $\exists \widehat{\eta} \in C^1([a,b], \mathbb{R}) : \delta K[\widehat{x}, \widehat{\eta}] \neq 0$. Тогда $\exists \lambda \in \mathbb{R} : \widehat{x}$ является решением уравнения Эйлера:

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial x'} = 0$$

Доказательство.

Выберем $\eta \in \mathring{C}^1[a,b]$ и зададим функции $\varphi(\alpha,\beta) = I(\widehat{x} + \alpha\eta + \beta\widehat{\eta}), \psi(\alpha,\beta) = K(\widehat{x} + \alpha\eta + \beta\widehat{\eta}), \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Посчитаем частные производные в нуле, это пригодится нам позже:

$$\begin{gathered}\varphi(0{,}0) = I(\widehat{x})\\ \tfrac{\partial\varphi}{\partial\alpha}(0{,}0) = \delta I[\widehat{x},\eta]\\ \tfrac{\partial\varphi}{\partial\beta}(0{,}0) = \delta I[\widehat{x},\widehat{\eta}]\\ \psi(0{,}0) = K(\widehat{x}) = l\\ \tfrac{\partial\psi}{\partial\alpha}(0{,}0) = \delta K[\widehat{x},\eta]\\ \tfrac{\partial\psi}{\partial\alpha}(0{,}0) = \delta K[\widehat{x},\widehat{\eta}]\end{gathered}$$

Рассмотрим $\det \frac{\partial(\varphi,\psi)}{(\alpha,\beta)}(0{,}0)$ и докажем, что он равен нулю. Для этого предположим противное: пусть $\det \frac{\partial(\varphi,\psi)}{(\alpha,\beta)}(0{,}0) \neq 0$. Тогда можем воспользоваться теоремой об обратном отображении и получить, что $\exists \gamma \in \mathbb{R}, \exists \tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \colon (J(\widehat{x}) - \gamma, J(\widehat{x}) + \gamma) \to \mathbb{R}^2$:

$$\begin{gathered}\varphi(\tilde{\alpha}(s), \tilde{\beta}(s)) \equiv s, s \in (J(\widehat{x}) - \gamma, J(\widehat{x}) + \gamma)\\ \psi(\tilde{\alpha}(s), \tilde{\beta}(s)) \equiv l\\ \tilde{\alpha}(I(\widehat{x})) = \tilde{\beta}(J(\widehat{x})) = 0\end{gathered}$$

Теперь вспомним, что $\widehat{x}$ – слабый минимум, т.е. $\exists \varepsilon > 0 : \forall x \in M : \|x - \widehat{x}\|_1 < \varepsilon \; I(\widehat{x}) \leqslant I(x)$
Зададим функцию $x_s = \widehat{x} + \tilde{\alpha}\eta + \tilde{\beta}\widehat{\eta}$ (при каждом s это функция от t, определенная на $[a{,}b]$).

Уменьшим ε так, что $\|\eta\|_1 |\tilde{\alpha}(s)| + \|\widehat{\eta}\|_1 |\tilde{\beta}(s)| < \varepsilon \; \forall s \in (I(\widehat{x}) - \gamma, I(\widehat{x}) + \gamma)$. По непрерывности $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ это можно сделать, причем равенства, которые мы получили из теоремы об обратной функции, будут сохраняться.

$$\begin{gathered}\|x_s - \widehat{x}\|_1 = \left\|\tilde{\alpha}(s)\eta + \tilde{\beta}(s)\tilde{\eta}\right\| \leqslant |\tilde{\alpha}(s)|\,\|\eta\|_1 + |\tilde{\beta}(s)|\,\|\tilde{\eta}\|_1 < \varepsilon\\ I(x_s) = I(\widehat{x} + \tilde{\alpha}\eta + \tilde{\beta}\widehat{\eta}) = \varphi(\tilde{\alpha}(s), \tilde{\beta}(s)) = s\end{gathered}$$

Но $s \in (I(\widehat{x}) - \gamma, I(\widehat{x}) + \gamma)$, а значит, может оказаться меньше $I(\widehat{x})$ при $x \in (I(\widehat{x}) - \gamma, I(\widehat{x}))$. То есть $I(x_s) < I(\widehat{x})$. Получаем противоречие с минимальностью $I(\widehat{x})$.

Значит, $\det \frac{\partial(\varphi,\psi)}{(\alpha,\beta)}(0{,}0) = 0$. Распишем его по определению:

$$\tfrac{\partial\varphi}{\partial\alpha}(0{,}0)\tfrac{\partial\psi}{\partial\alpha}(0{,}0) - \tfrac{\partial\varphi}{\partial\beta}(0{,}0)\tfrac{\partial\psi}{\partial\alpha}(0{,}0) = 0$$

Воспользуемся тем, что выше мы вычислили частные производные в нуле:

$$\delta I[\widehat{x},\eta]\delta K[\widehat{x},\widehat{\eta}] - \delta I[\widehat{x},\widehat{\eta}]\delta K[\widehat{x},\eta] = 0 \Rightarrow \delta I[\widehat{x},\eta] + \lambda\delta K[\widehat{x},\eta] = 0,$$

где $\lambda = -\frac{\delta I[\widehat{x},\widehat{\eta}]}{\delta K[\widehat{x},\widehat{\eta}]}$ (здесь пользуемся тем, что в условии теоремы мы требовали $\delta K[\widehat{x},\widehat{\eta}] \neq 0$). Перепишем теперь это равенство:

$$\int_a^b \left(\widehat{\frac{\partial F}{\partial x}}(t) - \frac{d}{dt}\widehat{\frac{\partial F}{\partial x'}}(t)\right)\eta(t)dt + \lambda\int_a^b \left(\widehat{\frac{\partial G}{\partial x}}(t) - \frac{d}{dt}\widehat{\frac{\partial G}{\partial x'}}(t)\right)\eta(t)dx = 0.$$

Здесь $\widehat{\frac{\partial F}{\partial x}}(t) := \frac{\partial F}{\partial x}(t, \widehat{x}(t), \widehat{x}'(t))$, для G аналогично. Тогда по лемме Лагранжа получаем следующее:

$$\widehat{\frac{\partial F}{\partial x}}(t) + \lambda\widehat{\frac{\partial G}{\partial x}}(t) - \frac{d}{dt}\left(\widehat{\frac{\partial F}{\partial x'}}(t) + \lambda\widehat{\frac{\partial G}{\partial x'}}(t)\right) \equiv 0.$$

Если расписать это по определению функции L, то получим ровно то, что нужно.

$\square$

7.4 Задача для функционалов, зависящих от нескольких функций

Пусть у нас есть функция $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \in C^2$, заданы числа $a, b \in \mathbb{R}$ и $A, B \in \mathbb{R}^n$, где $A = (A_i)_{i=\overline{1,n}}$ и $B = (B_i)_{i=\overline{1,n}}$.

Рассмотрим задачу нахождения экстремумов функционала

$$I(x) = \int_a^b F(t, x(t), x'(t))dt, \tag{3}$$

где $I : M \to \mathbb{R}$ для $M = \{x \in C^1([a,b], \mathbb{R}^n) \mid x(a) = A, x(b) = B\}$. Мы будем искать слабый локальный минимум/максимум по метрике

$$\rho_1(x, u) = \max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t) - u(t)| + \max_{a\leqslant t\leqslant b}|x'(t) - u'(t)|.$$

Теорема. Пусть $\widehat{x} \in M$, $\widehat{x} \in C^2$ — решение (3), то есть слабый локальный экстремум I. Тогда $\widehat{x}$ является решением уравнения Эйлера

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(t, x, x') - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial x_i'}(t, x, x') = 0$$

для всех $i = \overline{1, n}$.

Доказательство. Можно сделать те же самые рассуждения с леммой Лагранжа, как и в двух предыдущих случаях, но можно доказать проще с использованием уже полученных результатов.

Положим

$$M_1 := \{x_1 \in C^1[a,b] : x_a(a) = A_1, x_1(b) = B_1\}.$$

и

$$I_1(x_1) = \int_a^b F(t, x_1(t), \widehat{x}_2(t), \ldots, \widehat{x}_n(t), x_1'(t), \widehat{x}_2'(t), \ldots, \widehat{x}_n'(t))dt.$$

Так как $\widehat{x}$ является решением (3), $\widehat{x}_1$ является решением задачи нахождения экстремума

$I_1(x_1)$, так как нужно внимательно посмотреть на то, что получается при подстановке.

Следовательно, по теореме для простейшей задачи вариационного исчисления

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}(t, \widehat{x}_1(t), \ldots, \widehat{x}_n(t), \widehat{x}'_1(t), \ldots, \widehat{x}'_n(t)) -$$

$$- \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial x'_1}(t, \widehat{x}_1(t), \ldots, \widehat{x}_n(t), \widehat{x}'_1(t), \ldots, \widehat{x}'_n(t)) \equiv 0.$$

Теперь аналогично доказываем для $x_2, \ldots, x_n$.

$\square$

7.5 Функционалы, содержащие производные высших порядков

Пусть у нас есть $F : \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$, $F \in C^{n+1}$, а также числа $a, b, A_i, B_i \in \mathbb{R}$ для $i = \overline{0, n-1}$. Рассмотрим функционал

$$I(x) = \int_a^b F(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(n)}(t))dt. \tag{4}$$

при условиях $x^{(i)}(a) = A_i$ и $x^{(i)}(b) = B_i$ для всех i. Как обычно, положим

$$M = \{x \in C^n[a,b] : x^{(i)}(a) = A_i, x^{(i)}(b) = B_i \text{ для всех } i\}.$$

Положим метрику

$$\rho_n(x, u) = \sum_{i=0}^{n} \rho(x^{(i)}, u^{(i)}).$$

Опять же хотим найти слабый локальный минимум.

Введём множество допустимых вариаций:

$$\mathring{C}^n[a,b] = \{\eta \in C^n[a,b] : \eta^{(i)}(a) = \eta^{(i)}(b) = 0 \text{ для всех } i\}.$$

Возьмём произвольную допустимую вариацию $\eta \in \mathring{C}^n[a,b]$, $\widehat{x} \in C^{2n}$ и положим

$$\Phi(\alpha) = I(\widehat{x} + \alpha\eta) = \int_a^b F(t, \widehat{x}(t) + \alpha\eta(t), \ldots, \widehat{x}^{(n)}(t) + \alpha\eta^{(n)}(t))dt.$$

Дифференцируем по параметру в нуле:

$$\Phi'(0) = \int_a^b \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial F}{\partial x^{(i)}}(t, \widehat{x}(t), \ldots, \widehat{x}^{(n)}(t))\eta^{(i)}(t)dt =$$

Интегрируем, как обычно, по частям всё, кроме первого слагаемого, и сразу, как и раньше, сокращаем нули

$$= \int_a^b \frac{\partial F}{\partial x}(\ldots)\eta(t)dt - \int_a^b \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial x^{(i)}}(\ldots)\eta^{(i-1)}(t)dt =$$

Отправим первое слагаемое суммы в первое слагаемое всего выражения, а остаток проинтегрируем по частям

$$= \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial x}(\dots) - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial x^{(1)}}(\dots) \right) \eta(t)dt + \sum_{i=2}^{n} \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial F}{\partial x^{(i)}}(\dots)\eta^{i-2}(t)dt =$$

Делаем то же самое:

$$= \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial x}(\dots) - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial x^{(1)}}(\dots) + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial F}{\partial x^{(2)}}(\dots) \right) \eta(t)dt + \dots =$$

По методу неполной индукции получаем, что это всё равняется

$$\int_a^b \left(\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{d^i}{dt^i}\frac{\partial F}{\partial x^{(i)}}(\dots) \right) \eta(t)dt.$$

Замечание. Если посмотреть на n-ое слагаемое полученной суммы, то можно увидеть, почему условия на непрерывную дифференцируемость функций именно такие.

Лемма. (Лагранжа) Пусть $f \in C[a,b]$ и $\int_a^b f(t)\eta(t)dt = 0$ для всех $\eta \in \mathring{C}^n[a,b]$. Тогда $f(t) \equiv 0$.

Доказательство. Всё так же, как и в одномерном случае. Точная формула для функции:

$$\eta(t) = \begin{cases} (t-(\tau+\varepsilon))^{2n}(t-(\tau-(\tau-\varepsilon))^{2n}, & t \in (\tau-\varepsilon, \tau+\varepsilon) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}.$$

Как альтернатива, можно использовать функцию пенёк из 3 семестра.

□

Теорема. Пусть $F \in C^{n+1}$, $\widehat{x} \in M$ — слабый локальный экстремум, причём $\widehat{x} \in C^{2n}$. Тогда $\widehat{x}$ является решением уравнения Эйлера, которое в этом случае имеет вид

$$\frac{\partial F}{\partial x}(t, x, x', \dots, x^{(n)}) - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial x'}(t, x, x', \dots, x^{(n)}) + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial F}{\partial x''}(\dots) + \dots +$$

$$+(-1)^n \frac{d^n}{dt^n}\frac{\partial F}{\partial x^{(n)}}(\dots) \equiv 0.$$

Доказательство. Ничего не меняется. Если $\widehat{x}$ — слабый локальный экстремум, то 0 — локальный экстремум функции Φ, то есть $\Phi'(0)$, откуда по равенству, полученному выше, и лемме Лагранжа получаем искомое.

□

Замечание. И то же самое замечание: достаточно C^n для всех функций.