**Московский физико-технический институт**
**Физтех-школа прикладной математики и информатики**

# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

IV СЕМЕСТР

Лектор: *Жуковский Сергей Евгеньевич*

h\nu

Авторы: *Дмитрий Лизюра*,
*Яков Даниличев*

весна 2025

# Содержание

# 1 Автономные системы

## 1.1 Основные понятия

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ открыто, а функция $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ непрерывно дифференцируема. Рассмотрим систему

$$x' = f(x). \tag{1}$$

**Определение.** Такая система называется *автономной*, а $\Omega$ — это её *фазовое пространство*.

Основная идея такой системы в том, что в правой части нет зависимости от $t$.

**Определение.** Пусть $x\colon I \to \mathbb{R}^n$ — непродолжаемое решение системы (1). Множество $\{x(t) : t \in I\}$ называется *фазовой траекторией*.

**Определение.** Пусть есть $\widehat{x} \in \Omega$ такой, что $x(t) \equiv \widehat{x}$ является решением (1) $\Leftrightarrow f(\widehat{x}) = 0$. Тогда вектор $\widehat{x}$ называется *положением равновесия*.

Рассмотрим несколько примеров.

1. Пусть $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, а также существует единственная точка $\widehat{x} \in \mathbb{R} : f(\widehat{x}) = 0$. Тогда решение $\widehat{x}$ даёт нам одну фазовую траекторию — это будет просто одна точка в фазовом пространстве. Кроме того, будут ещё два решения: одно будет лежать выше $\widehat{x}$, а другое — ниже. Можно показать, что их фазовых траектории: это два открытых луча, расходящихся из положения равновесия в разные стороны.

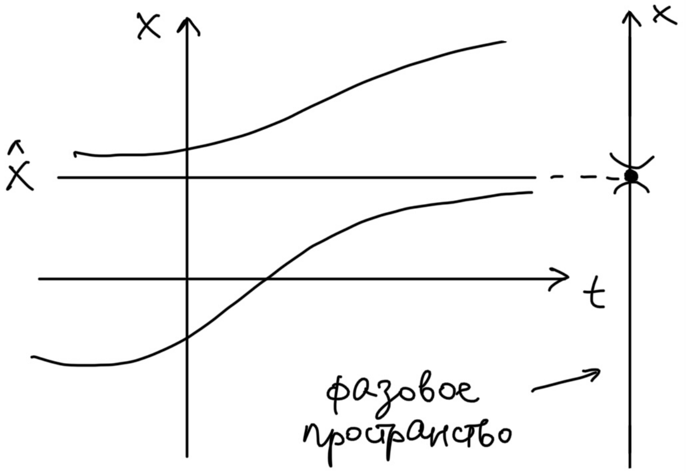


Рис. 1: Фазовые траектории

2. Рассмотрим теперь двумерный случай: $x_1' = x_2$ и $x_2' = -x_1$. Это линейная система, её общее решение: $x_1 = r\cos(t+\alpha)$, $x_2 = r\sin(t+\alpha)$, где $r \geqslant 0, \alpha \in [0, 2\pi)$. В этом случае фазовыми траекториями будут начало координат (положение равновесия) и всевозможные концентрические окружности с центром в начале координат.

## 1.2 Свойства автономных систем

1. Если $x\colon (a,b) \to \mathbb{R}^n$ является непродолжаемым решением системы (1), то для любого $c \in \mathbb{R}$ функция $y(t) := x(t+c)$, где $t \in (a-c, b-c)$ тоже является непродолжаемым решением.

   **Доказательство.** Для начала покажем, что $y(t)$ является решением (1). Действительно, для $t \in t \in (a-c, b-c)$ имеем:

   $$y'(t) \equiv \frac{d}{dt}x(t+c) \equiv f(x(t+c)) \equiv f(y(t)).$$

   Теперь докажем, что оно непродолжаемое. Предположим противное: пусть $z\colon (d,e) \to \mathbb{R}^n$ является решением (1), причём $(a-c, b-c) \subsetneq (d,e)$, при этом $z(t) \equiv y(t)$ для $t \in (a-c, b-c)$. Тогда функция $z(t-c)$, где $t \in (d+c, e+c)$, является решением (1), $(a,b) \subsetneq (d+c, e+c)$, а также $z(t-c) \equiv y(t-c) \equiv x(t) \Rightarrow x$ не является непродолжаемым решением, противоречие.

   □

2. Любые две фазовые траектории $X, Y \in \Omega$ либо не пересекаются, либо совпадают.

   **Доказательство.** Пусть $X \cap Y \neq \varnothing$. Пусть $x_0 \in X \cap Y$. Переведём на язык решений: для $X$ и $Y$ соответственно существуют непродолжаемые решения $x\colon (a,b) \to \mathbb{R}^n, y\colon (c,d) \to \mathbb{R}^n$, а также точки $t_1 \in (a,b)$ и $t_2 \in (c,d) : x(t_1) = x_0 = y(t_2)$. Возьмём функцию $z(t) := y(t + t_2 - t_1)$, $t \in (c - t_2 + t_1, d - t_2 + t_1)$, тогда по первому свойству она является непродолжаемым решением (1). При $t = t_1$ получаем $y(t + t_2 - t_1) = x_0$. Значит, $z(t)$ является решением задачи Коши

   $$\begin{cases} x' = f(x) \\ x(t_1) = x_0 \end{cases}.$$

   Заметим, что $x$ тоже является непродолжаемым решением этой задачи, а тогда по теореме о существовании и единственности

   $$x(t) \equiv z(t) \Rightarrow X = \{z(t) : t \in (c - t_2 + t_1, d - t_2 + t_1)\} = Y.$$

   □

   **Следствие.** Решение автономной системы не достигает положения равновесия за конечное время.

   Понимать это можно следующим образом. Вспомним картинку из примера 1. Возьмём один из получившихся лучей в фазовом пространстве. Ему соответствует какое-то решение $x(t)$. Начнём подставлять в $x(t)$ разные $t$. Если для какого-то $t_0$ мы попадём в положение равновесия, то у нас пересекутся две фазовые траектории: выбранный луч и сама точка положения равновесия. Тогда они должны совпадать, но это невозможно. Поэтому ни для какого конечного $t$ мы не попадём в положение равновесия.

3. Пусть $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ — непродолжаемое решение (1). Предположим, что нашлись $t_1 < t_2 :$ $x(t_1) = x(t_2)$, причём $x(t) \not\equiv \mathrm{const}$. Тогда функция $x$ — это периодическая функция с

положительным наименьшим периодом, а её фазовая траектория является замкнутой кривой без самопересечений.

**Доказательство.** Возьмём функцию $y(t) \coloneqq x(t + t_2 - t_1), t \in \mathbb{R}$, она является непродолжаемым решением (1). Более того, $y(t_1) = x(t_2) = x(t_1)$, а тогда функции $x$ и $y$ являются решениями одной и той же задачи Коши $\Rightarrow$ по теореме о существовании и единственности $y(t) \equiv x(t)$. Положим $d = t_2 - t_1$, тогда это тождество переписывается в виде $x(t) \equiv x(t+d)$. Пусть $P$ — это множество всех периодов функции $x$. Мы знаем, что оно непусто, так как $d \in P$.

Так как $x(t) \not\equiv \text{const}$, то существует $\tau \in \mathbb{R} : x(\tau) \neq x(t_1)$. Пусть $\varepsilon = \frac{1}{2}|x(\tau) - x(t_1)|$. В силу непрерывности функции $x$ существует $\delta > 0 : x(t) \in (x(\tau) - \varepsilon, x(\tau) + \varepsilon)$ для любого $t \in (\tau - \delta, \tau + \delta)$. В силу выбора $\varepsilon$ получаем, что $x(t) \neq x(t_1)$ для любого $t \in (\tau - \delta, \tau + \delta) \Rightarrow$ для любого $p \in P$ имеем $p > \delta$, а тогда $\widehat{p} \coloneqq \inf P \geqslant \delta > 0$. Докажем теперь, что $\widehat{p} \in P$. Для этого рассмотрим последовательность $\{p_j\} \subset P$ такую, что $p_j \to \widehat{p}$ при $j \to \infty$. Тогда для любого $j$ имеем $x(t+p_j) \equiv x(t)$. Переходя к пределу по $j$ и пользуясь непрерывностью функции $x$, получаем, что $x(t+\widehat{p}) \equiv x(t)$, то есть $\widehat{p} \in P$. Таким образом, мы показали, что существует положительный наименьший период.

Осталось доказать, что фазовая траектория $X$ функции $x$ не имеет самопересечений, то есть для любых $\widehat{t_1}, \widehat{t_2} \in \mathbb{R} : |\widehat{t_1} - \widehat{t_2}| < \widehat{p}$ выполняется $x(\widehat{t_1}) \neq x(\widehat{t_2})$. Предположим противное: пусть существуют $\widehat{t_1}, \widehat{t_2} \in \mathbb{R} : \widehat{t_1} < \widehat{t_2}, \widehat{t_2} - \widehat{t_1} < \widehat{p}$, при этом $x(\widehat{t_1}) = x(\widehat{t_2})$. Тогда из начала доказательства получаем, что $\widehat{t_2} - \widehat{t_1} \in P$. Но тогда получаем противоречие с минимальностью $\widehat{p}$.

$\square$

4. Вывод: траектория — это либо точка, либо замкнутая кривая без самопересечений, либо незамкнутая кривая без самопересечений.

5. (групповое свойство автономной системы) Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} x' = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases} . \tag{2}$$

Обозначим через $\varphi(t, x_0)$ непродолжаемое решение (2), $x_0 \in \Omega$, $t \in \mathbb{R}$. Тогда справедливо тождество $\varphi(t, \varphi(\tau, x_0)) \equiv \varphi(t + \tau, x_0)$.

**Доказательство.** Зафиксируем $\tau$. Тогда по свойству 1 функция $\varphi(t+\tau, x_0)$ является решением системы (1). В то же время по определению $\varphi(t, \varphi(\tau, \xi))$ тоже является решением (1). Рассмотрим $t = 0$: тогда в левой части имеем $\varphi(0, \varphi(\tau, x_0)) = \varphi(\tau, x_0)$, в правой — $\varphi(0 + \tau, x_0) = \varphi(\tau, x_0)$. То есть в $t = 0$ решения совпадают, а тогда по теореме о существовании и единственности для любого $\tau$ выполняется $\varphi(t + \tau, x_0) \equiv \varphi(t, \varphi(\tau, x_0))$.

$\square$

6. Функция $\varphi$ непрерывна.

Это верно в силу теоремы о непрерывной зависимости непродолжаемого решения задачи Коши от начального условия и параметра, которая доказывалась в прошлом семестре.

7. Рассмотрим множество отображений $\Phi \coloneqq \{\varphi(t,\cdot)\colon \Omega \to \Omega \mid t \in \mathbb{R}\}$. Зададим операцию композиции: $\varphi(t,\cdot) \circ \varphi(s,\cdot) = \varphi(t, \varphi(s,\cdot))$. Тогда $(\Phi, \circ)$ — это абелева группа.

   **Доказательство.** Здесь нам помогает групповое свойство, которое мы только что доказали. Запишем следующее равенство:

   $$\varphi(t, \varphi(s,\cdot)) \equiv \varphi(t+s,\cdot) \equiv \varphi(s, \varphi(t,\cdot)).$$

   Из него получаем, что $\Phi$ замкнуто относительно композиции и операция коммутативна. Это же равенство показывает, что нейтральным элементом будет $\varphi(0,\cdot)$, а обратным к $\varphi(t,\cdot)$ будет $\varphi(-t,\cdot)$.

   □

# 2 Автономные системы на плоскости

## 2.1 Линейные автономные системы

Нам дана невырожденная матрица $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Рассмотрим автономную систему $x' = Ax$:

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases}. \tag{1}$$

У неё гарантированно есть положение равновесия $x = 0$. Чтобы понять, как система ведёт себя в окрестности нулевого положения равновесия, посмотрим на собственные значения $\lambda_1, \lambda_2$ матрицы $A$.

**Примечание.** Для удобства все фазовые портреты будем строить в системе координат для базиса $(h_1, h_2)$. Направление движения можно определить, устремив $t \to +\infty$. Кроме того, помним, что фазовые траектории не пересекаются.

### 2.1.1 $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$

Пусть $h_1$ и $h_2$ — соответствующие собственные векторы. Тогда в базисе $(h_1, h_2)$ система будет иметь вид

$$\begin{cases} y_1' = \lambda_1 y_1 \\ y_2' = \lambda_2 y_2 \end{cases}$$

и её решением будет

$$\begin{cases} y_1 = c_1 e^{\lambda_1 t} \\ y_2 = c_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases}.$$

Напишем уравнение её траектории, исключив параметр $t$:

$$e^{\lambda_1 t} = \frac{y_1}{c_1} \Rightarrow y_2 = c_2 (e^{\lambda_1 t})^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} = c_2 \left(\frac{y_1}{c_1}\right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$$

при $c_1 \neq 0$, а при $c_1 = 0$ получится уравнение $y_1 = 0$.

▷ Первый случай: $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$. На рисунке 2 слева изображён портрет для случая $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$, а справа для случая $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$.

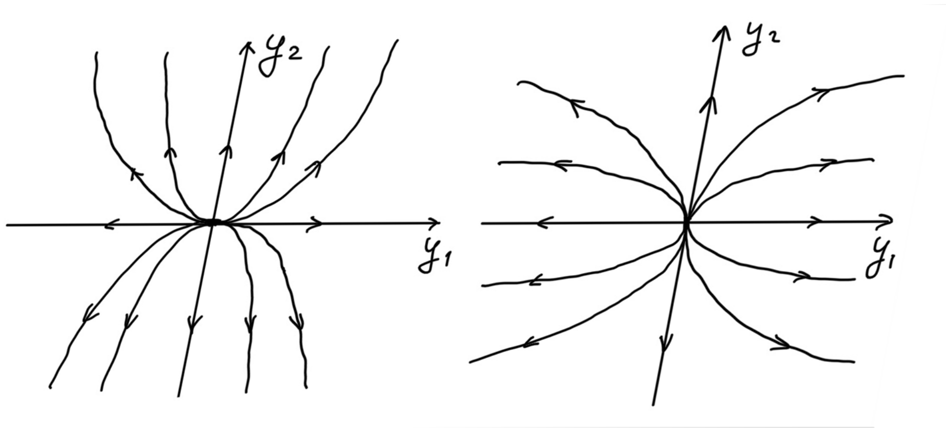


Рис. 2: Неустойчивый узел

**Определение.** Полученный портрет называется *неустойчивым узлом.*

Если $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ или $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, то получатся аналогичные портреты, но с направлением к началу координат.

**Определение.** Тогда портрет называется *устойчивым узлом.*

Устойчивость означает, что при $t \to +\infty$ точка движется к положению равновесия.

▷ Второй случай: $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$. На рисунке 3 слева изображён портрет для случая $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$, а справа для случая $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$.

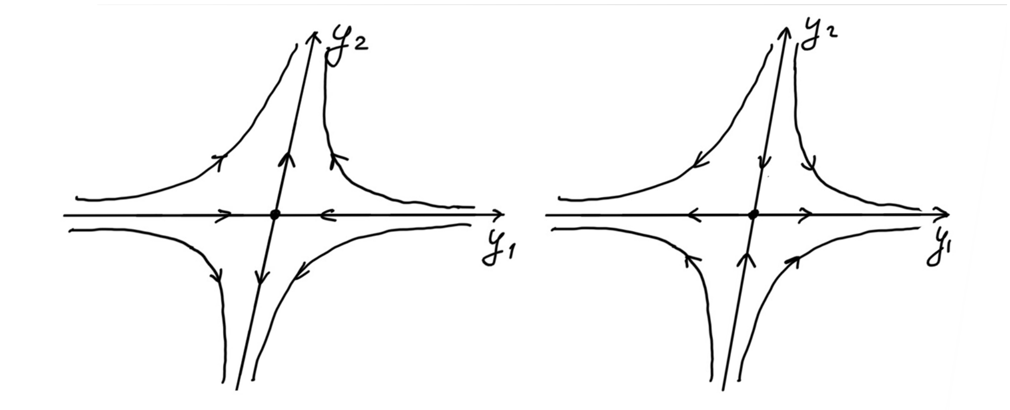


Рис. 3: Седло

**Определение.** Полученный портрет называется *седлом.*

### 2.1.2 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}$

- Первый случай: $A$ имеет два линейно независимых собственных вектора $h_1$ и $h_2$. Тогда аналогично прошлым рассуждениям получаем, что кривая имеет вид

$$\begin{cases} y_2 = \frac{c_2}{c_1} y_1, & c_1 \neq 0 \\ y_1 = 0, & c_1 = 0 \end{cases}.$$

На рисунке 4 слева изображён портрет для случая $\lambda > 0$, а справа для случая $\lambda < 0$.

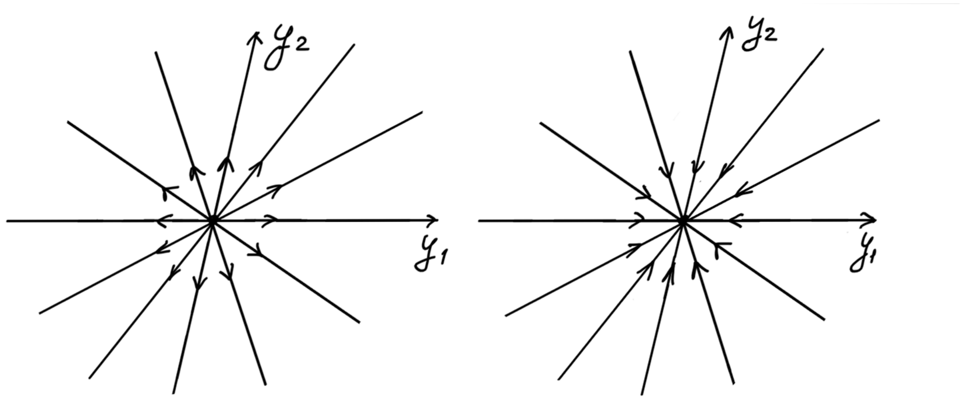


Рис. 4: Дикритический узел

**Определение.** Полученный портрет называется *дикритическим узлом*. При $\lambda > 0$ он называется *неустойчивым*, а при $\lambda < 0$ — *устойчивым*.

- Второй случай: $h_1$ — собственный вектор, $h_2$ — присоединённый к нему. Тогда в базисе $(h_1, h_2)$ система будет иметь вид

$$\begin{cases} y_1' = \lambda y_1 + y_2 \\ y_2' = \lambda y_2 \end{cases}.$$

Найдём решение:

$$\begin{cases} y_1 = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t} \\ y_2 = c_1 e^{\lambda t} \end{cases}.$$

Выразим $t$ (считаем, что $c_2 \neq 0$):

$$e^{\lambda t} = \frac{y_2}{c_2} \Rightarrow t = \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{y_2}{c_2}\right).$$

Подставим в первое уравнение:

$$y_1 = c_1 \frac{y_2}{c_2} + \frac{c_2}{\lambda} \ln\left(\frac{y_2}{c_2}\right) \frac{y_2}{c_2}.$$

На рисунке 5 слева изображён портрет для случая $\lambda > 0$, а справа для случая $\lambda < 0$.

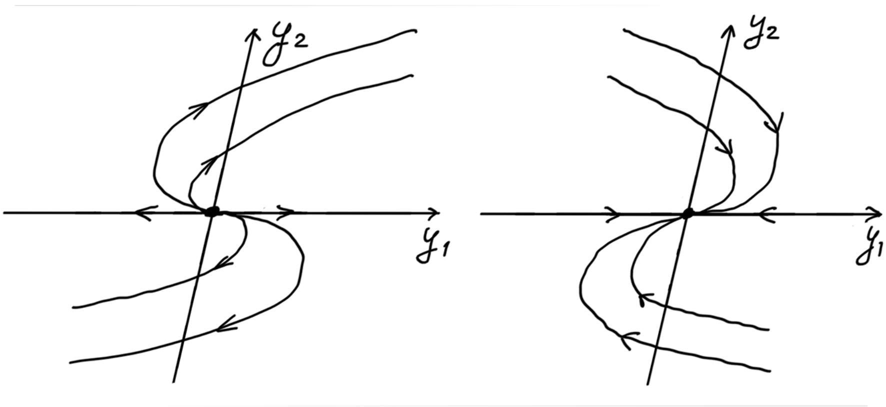


Рис. 5: Вырожденный узел

**Определение.** Этот портрет называется *вырожденным узлом*. При $\lambda > 0$ он называется *неустойчивым*, а при $\lambda < 0$ — *устойчивым*.

### 2.1.3 $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i \in \mathbb{C}$, $\beta \neq 0$

Тогда собственные векторы имеют вид $h_{1,2} = a \pm bi$, где $a$ и $b$ — линейно независимые векторы. Как известно, фундаментальной системой решений здесь будет

$$\begin{cases} x_1 = e^{\alpha t}(a\cos(\beta t) - b\sin(\beta t)) \\ x_2 = e^{\alpha t}(a\sin(\beta t) + b\cos(\beta t)) \end{cases}.$$

В базисе $(a, b)$ она имеет вид

$$\begin{cases} y_1 = e^{\alpha t}\begin{pmatrix} \cos(\beta t) \\ -\sin(\beta t) \end{pmatrix} \\ \\ y_2 = e^{\alpha t}\begin{pmatrix} \sin(\beta t) \\ \cos(\beta t) \end{pmatrix} \end{cases}$$

Тогда общее решение имеет вид

$$y(t) = re^{\alpha t}\begin{pmatrix} \cos(\beta(t-\theta)) \\ \sin(\beta(t-\theta)) \end{pmatrix}.$$

для всех $r$ и $\theta$. Чтобы получить его, нужно просто расписать $c_1y_1 + c_2y_2$ с помощью формул косинуса суммы, синуса суммы и дополнительного угла.

▷ При $\alpha = 0$ получается уравнение окружности. На рисунке 6 слева изображён портрет для случая $\beta > 0$, а справа для случая $\beta < 0$.

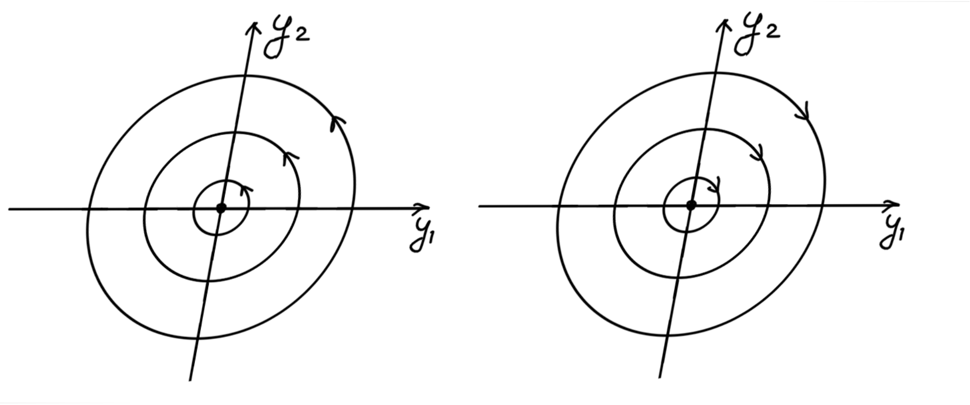


Рис. 6: Центр

**Определение.** Такой портрет называется *центром.*

- При $\alpha > 0$ расстояние от начала координат увеличивается при $t \to +\infty$, а ещё меняется угол, поэтому получается спираль, как на рисунке 7, вращающаяся против часовой стрелки при $\beta > 0$ (изображена слева) и по часовой при $\beta < 0$ (изображена справа). В окрестности нуля (при $t \to -\infty$) происходит бесконечное число витков, поэтому там обычно график не рисуют.

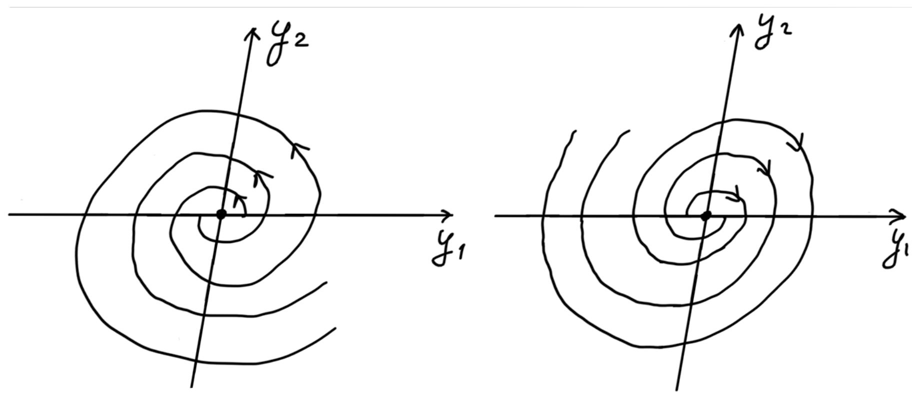


Рис. 7: Неустойчивый фокус

**Определение.** Полученный портрет называется *неустойчивым фокусом.*

- При $\alpha < 0$ получается всё то же самое, но теперь всё наоборот: направление к началу координат, при $\beta > 0$ спираль вращается по часовой стрелке (изображена справа), а при $\beta < 0$ — против часовой (изображена слева).

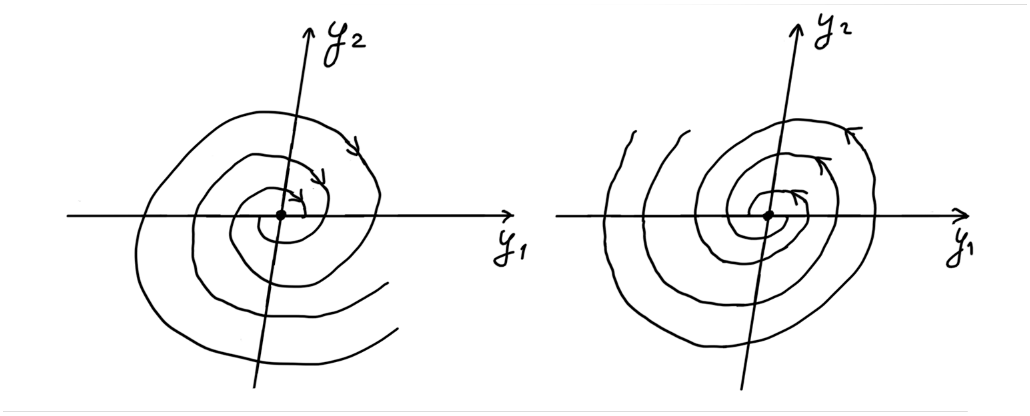


Рис. 8: Устойчивый фокус

**Определение.** Полученный портрет называется *устойчивым фокусом.*

Вообще говоря, есть ещё один случай: когда матрица $A$ вырождена, но он нас интересовать не будет, так как при исследовании нелинейных систем нам будет нужна невырожденность.

## 2.2 Нелинейные автономные системы

Пусть нам даны открытое множество $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, отображение $f \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^2)$ и положение равновесия $\widehat{x}$, то есть $f(\widehat{x}) = 0$. Обозначим $A = \frac{\partial f}{\partial x}(\widehat{x})$, $\lambda_{1,2}$ — её собственные числа. Рассмотрим систему

$$x' = f(x). \tag{2}$$

Тогда, раскладывая по формуле Тейлора в окрестности $\widehat{x}$, получаем

$$f(x) = A(x - x_*) + o(x - \widehat{x}).$$

Оказывается, что при некоторых условиях остаток $o(x - \widehat{x})$ можно отбросить и рассматривать линейную систему. Этот процесс называется *линеаризацией.*

**Теорема.** (б/д) Пусть $\mathrm{Re}(\lambda_{1,2}) \neq 0$. Тогда существуют окрестности $U(\widehat{x})$, $V(0)$ и существует диффеоморфизм $\Phi\colon U(\widehat{x}) \to V(0)$ такой, что он переводит траектории системы (2) в траектории системы (1), а $\Phi^{-1}$ переводит траектории системы (1) в траектории системы (2) с сохранением ориентации.

Покажем, что условие $\mathrm{Re}(\lambda_{1,2}) \neq 0$ существенно. Для этого рассмотрим следующую систему

$$\begin{cases} x_1' = -x_2 - x_1|x|^2 \\ x_2' = x_1 - x_2|x|^2 \end{cases}.$$

Сделаем замену

$$\begin{cases} x_1(t) = r(t)\cos(\varphi(t)) \\ x_2(t) = r(t)\sin(\varphi(t)) \end{cases}.$$

Подставляя в исходное уравнение, получаем

$$\begin{cases} r'\cos(\varphi) - r\sin(\varphi)\varphi' = -r\sin(\varphi) - r^3\cos(\varphi) \\ r'\sin(\varphi) + r\cos(\varphi)\varphi' = r\cos(\varphi) - r^3\sin(\varphi) \end{cases}.$$

Умножив первое уравнение на $\cos(\varphi)$, второе — на $\sin(\varphi)$ и сложив, получим $r' = -r^3$. Теперь умножим первое на $-\sin(\varphi)$, второе — на $\cos(\varphi)$ и сложим, получим $\varphi' = 1$. Тогда имеем систему

$$\begin{cases} r' = -r^3 \\ \varphi' = 1 \end{cases}.$$

У неё решением будет спираль, вращающаяся по часовой стрелке, направление к началу координат.

Теперь рассмотрим очень похожую систему:

$$\begin{cases} x_1' = -x_2 + x_1|x|^2 \\ x_2' = x_1 + x_2|x|^2 \end{cases}.$$

Проделав те же самые преобразования, получим систему

$$\begin{cases} r' = r^3 \\ \varphi' = 1 \end{cases}.$$

Здесь решением снова будет спираль, но теперь она вращается против часовой стрелки и направление от начала координат.

В каждой системе положение равновесия — это начало координат, у обоих систем матрица Якоби (о-малое отбрасываем) выглядит так:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Почему же решения качественно отличаются? Дело в том, что собственные числа $A$ — это $\lambda_{1,2} = \pm i$, то есть $\mathrm{Re}(\lambda_{1,2}) = 0$. Значит, это условие действительно важно.

# 3 Теорема о выпрямлении траекторий

Заданы открытое множество $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ (будем считать, что $n \geqslant 2$), отображение $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$, точка $x_0 \in \Omega$ и автономная система

$$x' = f(x). \tag{1}$$

**Напоминание.** Открытый шар в $\mathbb{R}^n$ с центром в точке $x$ и радиусом $r$ мы обозначаем $O^n(x, r)$.

**Теорема.** Если $f(x_0) \neq 0$ (то есть $x_0$ не является положением равновесия), то существуют окрестности $X(x_0) \subset \Omega$, $Y(0) \coloneqq (-\varepsilon, \varepsilon) \times O^{n-1}(0, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^n$ для некоторого $\varepsilon > 0$ и существует диффеоморфизм $\Psi\colon Y(0) \to X(x_0)$ такой, что:

1. для любого решения $y\colon I \to Y(0)$ системы

$$\begin{cases} y_1' = 1 \\ \vdots \\ y_{n-1}' = 0 \\ y_n' = 0 \end{cases} \tag{2}$$

функция $\Psi(y(t))$ является решением системы (1)

2. для любого решения $x\colon I \to X(x_0)$ системы (1) функция $\Psi^{-1}(x(t))$ является решением системы (2).

Заметим, что траектории системы (2) — это просто прямые. Тогда смысл теоремы в следующем: в окрестности точки $x_0$ траектории с точностью до диффеоморфизма являются кусочками прямых линий. Прежде чем перейти к доказательству, обсудим пару моментов касательно теоремы.

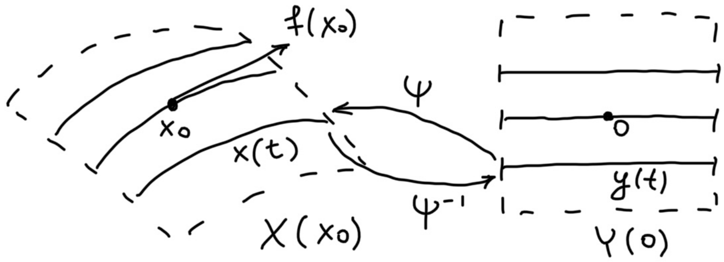


Рис. 9: Выпрямление траекторий

▷ Говорят, что $\Psi$ выпрямляет поле направлений $f$, то есть выпрямляются не только траектории, но и касательные векторы к ним. Докажем следующую связь между $\Psi$ и $f$, которая верна в $X(x_0)$:

$$\frac{\partial \Psi^{-1}}{\partial x}(x) f(x) \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Возьмём какое-нибудь решение $x(t)$, тогда с одной стороны

$$\frac{d\Psi^{-1}}{dt}(x(t)) \equiv \frac{\partial \Psi^{-1}}{\partial x}(x(t)) x'(t) \equiv \frac{\partial \Psi^{-1}}{\partial x}(x(t)) f(x(t)),$$

а с другой стороны верно следующее:

$$\frac{d\Psi^{-1}}{dt}(x(t)) \equiv \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} t + C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ну и поскольку для любой точки $x \in X(x_0)$ можно найти решение, траектория которого проходит через $x$, то можно в равенствах везде заменить $x(t)$ на $x$.

- Условие $f(x_0) \neq 0$ существенно, а именно, верно следующее: если $f(x_0) = 0$, то траектории нельзя выпрямить, то есть не существует подходящих $X(x_0), \varepsilon, \Psi$ из теоремы.

  Действительно, точка $x_0$ является траекторией. Если бы выполнялась теорема, то в $Y(0)$ существовала бы прямая траектория, которую $\Psi$ переводил бы в $x_0$. Но тогда $\Psi$ не инъективен $\Rightarrow$ не диффеоморфизм, противоречие.

- Теорема носит локальный характер и обобщить её, к сожалению, нельзя. Именно, если для всех $x \in \Omega$ верно $f(x) \neq 0$, то траектории на $\Omega$ не всегда можно выпрямить. На конкретном примере примерно поймём, почему это может быть так.

  Возьмём систему

$$\begin{cases} x_1' = -\cos(x_2) \\ x_2' = \sin(x_2) \end{cases}.$$

  Её траектории выглядят как-то так:

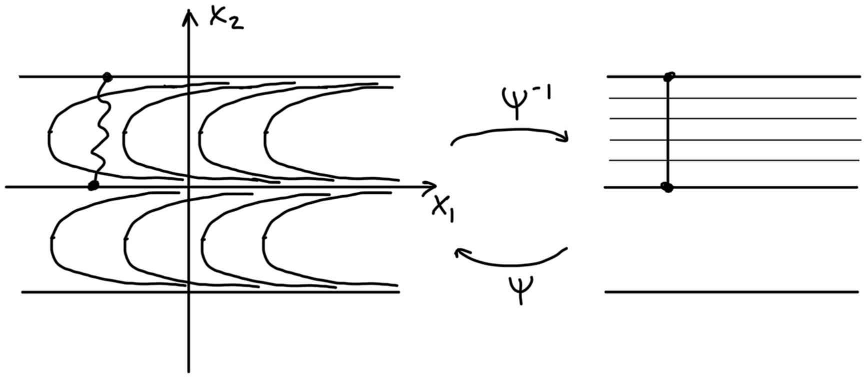


Рис. 10: Пример Арнольда

  Интуитивно, если бы $\Psi$ переводил прямые траектории в эти траектории, то он и отрезок между прямыми переводил бы в отрезок кривой между траекториями. Но этот отрезок между прямыми пересекает все прямые траектории, лежащие между его концами, которых бесконечно много, а отрезок кривой между траекториями на картинке будет пересекать лишь конечное число траекторий.

**Доказательство.** Разобьём доказательство теоремы на три этапа.

1. Сначала построим отображение $\Psi$. Так как вектор $f(x_0) \neq 0$, то мы можем дополнить его $n-1$ вектором так, чтобы получился базис $(f(x_0), e_2, \ldots, e_n)$ в $\mathbb{R}^n$. Пусть $\varphi(\cdot, \xi)$ — это непродолжаемое решение задачи Коши

$$\begin{cases} x' = f(x) \\ x(0) = \xi \in \Omega \end{cases}.$$

   Область определения функции $\varphi$ открыта в $\mathbb{R}^{n+1}$ (это мы доказывали в прошлом семестре) и содержит точку $(0, x_0)$. Тогда зададим отображение $\Psi$ следующим образом: $\Psi(y) \coloneqq \varphi(y_1, x_0 + \sum_{i=2}^n y_i e_i)$. Область определения $\Psi$ — это окрестность точки $0$ в $\mathbb{R}^n$ (так как мы можем взять близкие к нулю числа $y_1, \ldots, y_n$ так, чтобы вектор $(y_1, x_0 + \sum_{i=2}^n y_i e_i)$ попал в окрестность точки $(0, x_0)$). Кроме того, $\varphi$ непрерывно дифференцируема $\Rightarrow$ $\Psi$ тоже непрерывно дифференцируема.

2. Теперь построим окрестности $X(x_0)$ и $Y(0)$ так, чтобы отображение $\Psi$ стало диффеоморфизмом. Для начала укажем некоторые свойства, которые нам потребуются:

   ▷ так как $\varphi(\cdot, x_0)$ является решением задачи Коши, то

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, x_0)\bigg|_{t=0} = f(\varphi(t, x_0))|_{t=0} = f(x_0);$$

   ▷ для всех $\xi \in \Omega$ верно $\varphi(0, \xi) \equiv \xi$.

   Теперь посчитаем частные производные $\Psi$. По $y_1$ она выглядит так:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y_1}(0) = \frac{\partial \varphi}{\partial y_1}(y_1, x_0)\bigg|_{y_1=0} = f(x_0).$$

   При $j \geqslant 2$ они выглядят следующим образом:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y_j}(0) = \frac{\partial \varphi}{\partial y_j}(0, x_0 + y_j e_j)\bigg|_{y_j=0} = \frac{\partial}{\partial y_j}(x_0 + y_j e_j)\bigg|_{y_j=0} = e_j.$$

   Собираем всё вместе, и получаем следующую матрицу Якоби:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y}(0) = (f(x_0) \mid e_2 \mid \ \ldots \ \mid e_n).$$

   Теперь вспомним, что мы специально выбирали столбцы этой матрицы, чтобы они были базисом, поэтому $\operatorname{rk} \frac{\partial \Psi}{\partial y}(0) = n \Rightarrow$ можем в нуле применить теорему об обратной функции. Из неё получаем, что существуют окрестности $X(x_0)$ и $Y(0) = (-\varepsilon, \varepsilon) \times O^{n-1}(0, \varepsilon)$ для некоторого $\varepsilon > 0$ такие, что отображение $\Psi\colon Y(0) \to X(x_0)$ является диффеоморфизмом.

3. Теперь осталось показать, что выполняются пункты 1 и 2 из теоремы. Берём решение

$y\colon I \to Y(0)$ системы (2), тогда

$$y(t) \equiv \begin{pmatrix} t + C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix}.$$

Применим к нему отображение $\Psi$:

$$x(t) \coloneqq \Psi(y(t)) \equiv \varphi(t + C_1, x_0 + \sum_{j=2}^{n} C_j e_j).$$

Так как в автономных системах сдвиг по $t$ не влияет на свойство «быть решением», то $x(t)$ является решением системы (1) $\Rightarrow$ первый пункт выполняется.

Теперь покажем, что второй пункт тоже верен. К сожалению, технически это будет довольно неприятно. Берём решение $x\colon I \to X(x_0)$ системы (1). Хотим показать, что функция $\Psi^{-1}(x(t))$ является решением системы (2). Пусть $t^* \in I$ и

$$y^* \coloneqq \Psi^{-1}(x(t^*)) = \begin{pmatrix} y_1^* \\ \vdots \\ y_n^* \end{pmatrix}.$$

Через точку $y^*$ проходит траектория какого-то решения $y(t)$, тогда оно должно выглядеть как-то так:

$$y(t) \coloneqq \begin{pmatrix} t + y_1^* - t^* \\ y_2^* \\ \vdots \\ y_n^* \end{pmatrix}.$$

Первая координата так странно выглядит, так как мы хотим, чтобы она попадала в $\varepsilon$-окрестность нуля. Это будет так, если $t \in I^* \coloneqq (-\varepsilon + t^* - y_1^*, \varepsilon + t^* - y_1^*)$. Подействуем теперь на эту траекторию отображением $\Psi$, тогда по уже доказанному первому пункту она перейдёт в какую-то траекторию решения системы (1). Нам нужно, чтобы эта траектория совпала с траекторией решения $x(t)$.

Распишем, куда переходит при действии $\Psi$ точка $y(t^*)$:

$$\Psi(y(t^*)) = \Psi(y^*) = \Psi(\Psi^{-1}(x(t^*))) = x(t^*).$$

Получили, что в точке $t^*$ решения $x(t)$ и $\Psi(y(t))$ совпадают, но тогда по теореме о существовании и единственности решения получаем, что $\Psi(y(t)) \equiv x(t) \Leftrightarrow y(t) \equiv \Psi^{-1}(x(t))$ при $t \in I \cap I^*$. Это почти то, что нам нужно, только мы хотим, чтобы это тождество выполнялось на всём $I$. Докажем, что на самом деле $I \subset I^*$.

Пусть $I \not\subseteq I^*$. Тогда либо $\sup I^* \in I$, либо $\inf I^* \in I$. Без ограничения общности рассмотрим первый случай. Возьмём последовательность $\{t_n\} \subset I^*$, сходящуюся к $\sup I^*$. Поймём, куда сходится $y(t_n)$. Первая координата этого вектора, согласно тому, как мы задавали функцию $y$, равна $t_n + y_1^* - t^* \to \sup I^* + y_1^* - t^*$. По построению интервала $I^*$ следует, что $\sup I^* = \varepsilon + t^* - y_1^*$. Тогда первая координата сходится к $\varepsilon \Rightarrow$

$\lim_{n\to\infty} y(t_n) \notin Y(0)$, так первая координата попала на границу окрестности $(-\varepsilon, \varepsilon)$. С другой стороны $y(t_n) = \Psi^{-1}(x(t_n))$. Так как композиция непрерывных функций непрерывна, получаем, что $y(t_n) \to \Psi^{-1}(x(\sup I^*)) \in Y(0)$. Получили противоречие.

□

# 4 Устойчивость по Ляпунову и асимптотическая устойчивость

## 4.1 Определение и примеры

Снова заданы открытое множество $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, отображение $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$, положение равновесия $\widehat{x} \in \Omega$ и автономная система

$$x' = f(x). \tag{1}$$

Пусть $\varphi(\cdot, \xi)$ — непродолжаемое решение задачи Коши

$$\begin{cases} x' = f(x) \\ x(0) = \xi \end{cases}.$$

**Определение.** Положение равновесия $\widehat{x}$ называется *устойчивым по Ляпунову*, если:

1. существует $r > 0$ такое, что для любого $\xi \in O(\widehat{x}, r)$ отображение $\varphi(\cdot, \xi)$ определено на $[0, +\infty)$;
2. для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех $\xi \in O(\widehat{x}, \delta)$ и для всех $t \in [0, +\infty)$ верно $\varphi(t, \xi) \in O(\widehat{x}, \varepsilon)$.

**Определение.** Положение равновесия $\widehat{x}$ называется *асимптотически устойчивым*, если:

1. оно устойчиво по Ляпунову;
2. существует $d > 0$ такое, что для всех $\xi \in O(\widehat{x}, d)$ функция $\varphi(t, \xi) \to \widehat{x}$ при $t \to +\infty$.

**Примеры.**

▷ Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}$ и $\widehat{x}$ — изолированное положение равновесия, то есть существует окрестность $\widehat{x}$ такая, что в ней нет других положений равновесия. Тогда один из возможных случаев: это когда в этой окрестности функция $f \geqslant 0$ и равна нулю только в точке $\widehat{x}$.

Посмотрим на интегральные кривые. Есть горизонтальная прямая, соответствующая решению $x(t) \equiv \widehat{x}$. Если берём начальное условие $\xi < \widehat{x}$, то соответствующее решение будет монотонно возрастать в силу положительности производной, тогда из теоремы о существовании и единственности следует, что горизонтальная прямая будет его асимптотой. Если же берём начальное условие выше $\widehat{x}$, то решение снова будет возрастать. Тогда здесь нет даже устойчивости по Ляпунову. А вот если рассмотреть случай, когда функция $f(x) > 0$ при $x < \widehat{x}$ и $f(x) < 0$ при $x > \widehat{x}$, то аналогичным образом можно показать, что там будет асимптотическая устойчивость, а тогда и устойчивость по Ляпунову.

▷ Пусть теперь $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $f(x) = Ax$ и $\widehat{x} = 0$. Возвращаясь к случаям из предыдущего параграфа, устойчивость по Ляпунову будет на всех устойчивых портретах, а ещё для центра. Они же, но уже за исключением центра, будут и асимптотически устойчивы.

## 4.2 Устойчивость линейных систем

Пусть даны матрица $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ и система

$$x' = Ax. \tag{2}$$

Пусть в ЖНФ матрицы $A$ есть жордановы клетки $K_1, \dots, K_m$, причём для каждой клетки $K_j$ её размер равен $k_j$ и ей соответствует собственное число $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$. Без ограничения общности будем считать, что $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in \mathbb{C}$, при этом им соответствуют сопряжённые числа $\lambda_{s+1} = \overline{\lambda_1}, \dots, \lambda_{2s} = \overline{\lambda_s}$, а $\lambda_{2s+1}, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$.

**Теорема.**

1. Если все $\mathrm{Re}(\lambda_j) < 0$, то $\widehat{x} = 0$ — асимптотически устойчивое положение равновесия.
2. Если все $\mathrm{Re}(\lambda_j) \leqslant 0$, а для $j$ таких, что $\mathrm{Re}(\lambda_j) = 0$, выполнено $k_j = 1$, то $\widehat{x} = 0$ устойчиво по Ляпунову, но не асимптотически устойчиво.
3. В остальных случаях $\widehat{x} = 0$ не устойчиво по Ляпунову.

**Доказательство.** Из прошлого семестра мы знаем, что любое решение $x(t)$ системы (2) представимо в виде

$$x(t) = \sum_{j=1}^{s} P_j(t)e^{\alpha_j t}\cos(\beta_j t) + \sum_{j=s+1}^{2s} P_j(t)e^{\alpha_{j-s} t}\sin(\beta_{j-s} t) + \sum_{j=2s+1}^{m} P_j(t)e^{\lambda_j t},$$

причём $\deg P_j \leqslant k_j - 1$.

1. Из условия $\mathrm{Re}\,\lambda_j < 0$ следует, что $|x(t)| \to 0$ при $t \to +\infty$. Пусть $X(t)$ — ФМР. Так как столбцы $X(t)$ являются решениями, $\|X(t)\| \to 0$ при $t \to +\infty$. Тогда $\|X(t)\|$ равномерно ограничена некоторым числом $c > 0$. Кроме того, имеем следующее неравенство:

$$|\varphi(t, \xi)| = |X(t)\xi| \leqslant \|X(t)\| \cdot |\xi|.$$

   Заметим, что $\varphi(\cdot, \xi)$ при любом $\xi$ определено на $[0, +\infty)$, так как (2) является линейной системой с постоянными коэффициентами. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Чтобы выполнялся второй пункт из определения устойчивости по Ляпунову, можно взять $\delta = \frac{\varepsilon}{2c}$, тогда при $\xi \in O(0, \delta)$ из неравенства выше получаем, что

$$|\varphi(t, \xi)| \leqslant c \cdot \frac{\varepsilon}{2c} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

   Асимптотическая устойчивость следует из того, что $\|X(t)\| \to 0$, а $|\xi|$ ограничен.

2. Если $\operatorname{Re}(\lambda_j) < 0$, то соответствующее слагаемое стремится к нулю $\Rightarrow$ ограничено на $[0, +\infty)$. Остаётся случай $\operatorname{Re}(\lambda_j) = 0 \Rightarrow k_j = 1$. Тут мы пользуемся тем, что $\deg P_j(t) \leqslant 1 - 1 = 0 \Rightarrow$ многочлен $P_j$ — это просто константа. Тогда и всё соответствующее слагаемое будет константой $\Rightarrow$ ограничено. Значит, каждое решение $x(t)$ на $[0, +\infty)$ ограничено, тогда существует такое число $c > 0$, что $\|X(t)\| \leqslant c$ для всех $t \in [0, +\infty)$. Далее работает такое же рассуждение, как в первой части, поэтому получаем устойчивость по Ляпунову. Вывод об асимптотической устойчивости мы так сразу сделать не можем, так как не все решения стремятся к нулю. Покажем, что здесь её просто не может быть, предъявив явное решение.

   Пусть $j$ таково, что $\operatorname{Re}\lambda_j = 0, k_j = 1$. Тогда если $\lambda_j \in \mathbb{C}$, то берём решение $x(t) \coloneqq r(v_j \cos(\beta_j t) + u_j \sin(\beta_j t))$, где $r > 0$, $u_j, v_j \in \mathbb{R}^n$. Уменьшая $r$, мы можем попасть в сколь угодно малую окрестность нуля, но при этом $x(t) \nrightarrow 0$. Если же $\lambda_j \in \mathbb{R}$, то возьмём решение $x(t) \coloneqq r v_j$. Оно опять же не стремится к нулю.

3. Пусть существует $j$ такое, что $Re(\lambda_j) > 0$. Если $\lambda_j \in \mathbb{C}$, то берём решение $x(t) \coloneqq r e^{\alpha_j t}(P_j(t)\cos(\beta_j t) + P_{j+s}(t)\sin(\beta_j t))$. Для любого $r > 0$ оно не ограничено $\Rightarrow$ нет устойчивости по Ляпунову. Если же $\lambda_j \in \mathbb{R}$, то подойдёт решение $x(t) \coloneqq r e^{\lambda_j t} v_j$, $r > 0$, $v_j \in \mathbb{R}^n$.

   Остался случай, когда все $\operatorname{Re}\lambda_j \leqslant 0$ и существует $j$ такое, что $\operatorname{Re}\lambda_j = 0$, но при этом $k_j \geqslant 2$. Тогда если $\lambda_j \in \mathbb{C}$, то есть неограниченное комплексное решение $x(t) \coloneqq r(a + bt)e^{\lambda_j t}$, $r > 0$, $b \neq 0$. Тогда либо $\operatorname{Re} x(t)$, либо $\operatorname{Im} x(t)$ не ограничено $\Rightarrow$ нет устойчивости по Ляпунову. Если же $\lambda_j \in \mathbb{R}$, то возьмём решение $x(t) \coloneqq r(at + b)$, $a, b \in \mathbb{R}^n$, $a \neq 0$, $r > 0$. Снова $x(t)$ не ограничено $\Rightarrow$ нулевое положение равновесия не устойчиво по Ляпунову.

$\square$

# 5 Условия устойчивости

Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x^* \in \mathbb{R}^n$ — положение равновесия, то есть $f(x^*) = 0$. Рассмотрим систему

$$x' = f(x), \tag{1}$$

для которой $\varphi(\cdot, \xi)$ является непродолжаемым решением задачи Коши

$$\begin{cases} x' = f(x) \\ x(0) = \xi. \end{cases}$$

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ открыто, $v : \Omega \to \mathbb{R} \in C^1$.

**Определение.** *Производной в силу системы (1)* называется

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(1)}(x) \coloneqq \langle v'(x), f(x) \rangle,$$

где $x \in \Omega$. Пусть $x(\cdot)$ — решение системы (1). Тогда

$$\frac{d}{dt}v(x(t)) \equiv \langle v'(x(t)), x'(t)\rangle \equiv \langle v'(x(t)), f(x(t))\rangle \equiv \left.\frac{dv}{dt}\right|_{(1)}(x(t)).$$

**Теорема.** (Ляпунова об устойчивости) Пусть существует $\rho > 0$, и $v \in C^1(B_\rho(x^*), \mathbb{R})$, такие что $v(x^*) = 0$, $v(x) > 0$ при $x \neq x^*$ и для всех $x$ выполнено $\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(1)}(x) \leqslant 0$. Тогда $x^*$ устойчиво по Ляпунову.

Геометрическая интуиция: если взять достаточно маленький $\varepsilon$, то множество $\{x : v(x) = \varepsilon\}$ (линия уровня) образует замкнутую кривую вокруг $x^*$. А условие на производную говорит, что при попадании на границу решение будет двигаться внутрь, то есть не выйдет за кривую.

**Доказательство.** Зафиксируем $\varepsilon > 0$, будем считать, что $\varepsilon < \rho$. Положим $m := \min_{|x-x^*|=\varepsilon}(v(x))$. По условию $m > 0$. В частности, найдётся $\delta > 0$, такое что для всех $x \in B_\delta(x^*)$ верно $v(x) < m$.

Зафиксируем $\xi \in B_\delta(x^*)$. Допустим, что $\varphi(\cdot, \xi)$ не определено на $[0, +\infty)$ или $\varphi(\cdot, \xi)$ не содержится в шаре $B_\varepsilon(x^*)$ — отрицание устойчивости по Ляпунову. Вспомним теорему о продолжении решения до границы компакта: если рассмотреть цилиндр $\{(t, x) : |x - x^*| \leqslant \varepsilon\}$, то в первом случае решение должно выйти из него в какой-то точке $t_1$, то есть $|\varphi(t_1, \xi) - x^*| = \varepsilon$. Во втором случае допускается то же самое, поэтому существование такой точки мы и хотим опровергнуть.

По выбору $m$ мы знаем, что $v(x(t_1)) \geqslant m$ и $v(x(0)) = v(\xi) < m$. Теперь вспомним, что у нас было условие на производную:

$$\frac{d}{dt}v(x(t)) \equiv \left.\frac{dv}{dt}\right|_{(1)}(x(t)) \leqslant 0.$$

То есть $v$ не возрастает, но при этом в $\xi$ она меньше $m$, а в $t_1 > \xi$ — больше, противоречие.

□

**Пример.**

$$\begin{cases} x_1' = -x_2 \\ x_2' = x_1 \end{cases}, x^* = (0, 0)^T.$$

Положим $v(x) = x_1^2 + x_2^2$. Тогда $v(0) = 0$ и $v(x) > 0$ при $x \neq 0$. Найдём производную:

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(1)}(x) = \left\langle (2x_1, 2x_2)^T, (-x_2, x_1)^T \right\rangle \equiv 0.$$

Следовательно, по теореме Ляпунова ноль устойчив. Но асимптотической устойчивости нет: портретом является центр.

**Теорема.** (Ляпунова об асимптотической устойчивости) Пусть существует $\rho > 0$, и $v \in C^1(B_\rho(x^*), \mathbb{R})$, такие что $v(x^*) = 0$, $v(x) > 0$ при $x \neq x^*$ и для всех $x \neq x^*$ выполнено $\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(1)}(x) < 0$. Тогда $x^*$ асимптотически устойчиво. От предыдущей теоремы отличается только последним условием.

**Доказательство.** По предыдущей теореме $x^*$ устойчиво по Ляпунову. Положим $\varepsilon = \frac{\rho}{2}$, $\delta$ возьмём из определения устойчивости. Вновь будем доказывать от противного: допустим, что существует $\xi \in B_\delta(x^*)$, $r > 0$ и возрастающая $t_j \to +\infty$, такая что $|\varphi(t_j, \xi) - x^*| \geqslant r$. Будем считать, что $r < \varepsilon$, также будем обозначать $x(t) = \varphi(t, \xi)$. По условию существует $\mu > 0$, такое что для всех $x$, таких что $r \leqslant |x - x^*| \leqslant \varepsilon$, выполнено $v(x) \geqslant \mu$. Из условия на производную мы знаем, что $v(x(t))$ строго убывает на $[0, +\infty)$.

Отсюда следует, что $v(x(t)) \geqslant \mu$ для всех $t \in [0, +\infty)$. Обосновывается это тем, что для любого $t$ найдётся $t_j > t$ из допущения, такая что $|\varphi(t_j, \xi) - x^*| \geqslant r$, а это значит, что $v(x(t_j)) \geqslant \mu$. В силу убывания и $v(x(t)) \geqslant v(x(t_j)) \geqslant \mu$. По непрерывности $v$ существует $\delta_1 > 0$, такое что $v(x) < \mu$ при $|x - x^*| < \delta_1$. Из доказанного $|x(t) - x^*| \geqslant \delta_1$. Ещё существует $\beta > 0$, такое что $\frac{dv}{dt}\Big|_{(1)}(x) \leqslant -\beta$ для всех $x$, таких что $\delta_1 \leqslant |x - x^*| \leqslant \varepsilon$. Это следует из определения производной в силу системы: функция непрерывна. Теперь по формуле Ньютона-Лейбница

$$v(x(t)) - v(x(0)) \equiv \int_0^t \frac{d}{ds} v(x(s)) dx \equiv \int_0^t \frac{dv}{dt}\bigg|_{(1)} (x(s)) ds \leqslant -\beta t$$

в силу неравенства выше.

Следовательно, перенося $v(x(0))$ в правую часть, при $t \to +\infty$ получаем $v(x(t)) \leqslant v(x(0)) - \beta t$. Выражение справа стремится к $-\infty$, что противоречит тому, что $v(x) \geqslant 0$.

□

**Пример.** Пусть $n = 1$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x^*) = 0$, $f(x) > 0$ при $x < x^*$, $f(x) < 0$ при $x > x^*$. Положим $v(x) := (x - x^*)^2$. Найдём производную:

$$\frac{dv}{dx}\bigg|_{(1)} (x) = 2(x - x^*) f(x).$$

После разбора случаев можно заметить, что это меньше нуля при $x \neq x^*$.

**Определение.** Функция $v$ в обеих теоремах называется *функцией Ляпунова.*

**Теорема.** (Хассело-..., б/д) Теоремы Ляпунова — это не только достаточное условие, но и необходимое.

Теперь остаётся важный вопрос: как найти функцию $v$? Обычно это сложная задача, но в одном частном случае это можно сделать:

**Теорема.** (Об устойчивости по первому приближению) Пусть $f(x) = A(x - x^*) + o(x - x^*)$. Пусть все $Re(\lambda) < 0$ для собственных значений $\lambda$ матрицы $A$. Тогда $x^*$ асимптотически устойчиво.

**Доказательство.** Положим $\psi(t, \xi) = e^{tA}\xi$ для $t \geqslant 0$, $\xi \in \mathbb{R}^n$. Заметим, что это является решением задачи Коши

$$\begin{cases} y' = Ay \\ y(0) = \xi \end{cases},$$

то есть линеаризованной версии исходной системы. Тогда существуют $c, \alpha > 0$, такие что

$|\varphi(t,\xi)| \leqslant c \cdot e^{-\alpha t}|\xi|$ — следует из $Re(\lambda) < 0$. Положим

$$v(x) = \int_0^{+\infty} |\psi(\tau, x)|^2 d\tau = \int_0^{+\infty} |e^{\tau A} \cdot x|^2 d\tau =$$

В силу неравенства выше эта функция определена для всех $x$. Заметим, что это является квадратичной формой, в которую подставлен $x$:

$$= \int_0^{+\infty} \left\langle e^{\tau A}x, e^{\tau A}x \right\rangle d\tau = \int_0^{+\infty} \left\langle (e^{\tau A})^T e^{\tau A} \cdot x, x \right\rangle d\tau =$$

Тепеь можно два раза вынести $x$ из интеграла:

$$= \left\langle \int_0^{+\infty} (e^{\tau A})^T e^{\tau A} x \cdot d\tau, x \right\rangle = \left\langle \int_0^{+\infty} (e^{\tau A})^T e^{\tau A} d\tau \cdot x, x \right\rangle.$$

Положим $Q = \int_0^{+\infty} (e^{\tau A})^T e^{\tau A} d\tau$, тогда это всё равно $\langle Qx, x\rangle$. Более того, $Q$ положительно определена, так как это интеграл квадрата.

Подставим $\psi$ в функцию $v$:

$$v(\psi(t,\xi)) = \int_0^{+\infty} |e^{\tau A} e^{tA} \xi|^2 d\tau = \int_t^{+\infty} |e^{sA}\xi|^2 ds$$

— в конце сделали замену $s = t + \tau$.

Теперь найдём производную от этого:

$$\frac{d}{dt} v(\psi(t,\xi))|_{t=0} = -|e^{tA}\xi|^2|_{t=0} = -|\xi|^2.$$

И производную в силу системы (2) (линеаризованной):

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(2)} = \frac{d}{dt} v(\psi(t,\xi))|_{t=0} = -|\xi|^2.$$

Тогда

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(1)} = \langle v'(\xi), f(\xi)\rangle = \langle v'(\xi), A\xi + o(\xi)\rangle =$$

$$= \langle v'(\xi), A\xi\rangle + \langle v'(\xi), o(\xi)\rangle = \left.\frac{dv}{dt}\right|_{(2)} (\xi) + \langle 2Q\xi, o(\xi)\rangle =$$

$$= -|\xi|^2 + \langle 2Q\xi, o(\xi)\rangle.$$

Так как второе слагаемое — o-малое, в некоторой окрестности это всё не превосходит $-\frac{1}{2}|\xi|^2$. Следовательно, $x^*$ асимптотически устойчиво.

$\square$

**Замечание.** (б/д) Если существует собственное число $\lambda$ матрицы $A$, такое что $Re(\lambda) > 0$, то $x^*$ не устойчиво по Ляпунову.

**Замечание 2.** Таким образом, мы охарактеризовали все системы, кроме тех, у которых все собственные значения мнимые, но они встечаются редко.

# 6 Первые интегралы

## 6.1 Первые интегралы нормальных ОДУ

Пусть нам даны $n \in \mathbb{N}$, открытое $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ и отображение $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $f \in C^1$. Рассмотрим систему

$$x' = f(t, x). \tag{1}$$

**Определение.** *Первым интегралом в области* $D \subset \Omega$ уравнения (1) называется функция $v : D \to \mathbb{R}$, такая что $v \in C^1$ и для любого решения $\varphi(\cdot)$ системы (1), для которого $\forall t\ (t, \varphi(t)) \in D$, $v(t, \varphi(t))$ является константой.

**Замечание.** Первый интеграл всегда существует, например, $v = C$.

**Определение.** Производная в силу системы для функции $v$ в этом случае определяется, как

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(1)}(t, x) := \frac{\partial v}{\partial t}(t, x) + \left\langle \frac{\partial v}{\partial x}(t, x), f(t, x) \right\rangle.$$

**Утверждение.** Функция $v : D \to \mathbb{R}$, $v \in C^1$ является первым интегралом системы (1) тогда и только тогда $\frac{dv}{dt}\big|_{(1)}(t, x) = 0$ для всех $(t, x) \in D$.

**Доказательство.** $\Rightarrow$. Зафиксируем $(\tau, \xi) \in D$. Как известно, существует решение $\varphi(\cdot)$ задачи Коши

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(\tau) = \xi \end{cases}.$$

Сужая при необходимости область определения $\varphi(\cdot)$, будем считать, что все $(t, \varphi(t)) \in D$. Так как функция $t \mapsto v(t, \varphi(t))$ — константа, $\frac{d}{dt}(v(t, \varphi(t))) \equiv 0$. Тогда

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t, \varphi(t)) + \left\langle \frac{\partial v}{\partial x}(t, \varphi(t)), f(t, \varphi(t)) \right\rangle \equiv 0$$

по производной композиции, также воспользовались тем, что $\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t) = f(t, \varphi(t))$. Подставляя $t = \tau$ и $\xi = \varphi(t)$, получаем требуемое.

$\Leftarrow$. Аналогично, но в обратную сторону.

$\square$

**Определение.** Пусть $v_1, \ldots, v_k$ — первые интегралы системы (1). Они называются *независимыми* в области $D$, если $\operatorname{rk}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}(t, x)\right) = k$.

**Замечание.** Зачем это всё нужно? Пусть $n = 2$, и $(t_0, x_0)$ — какая-то точка в $\mathbb{R}^3$. Возьмём два первых интеграла, проходящих через неё, $v_1, v_2$. Тогда $A = \{(t, x) : v_1(t, x) = v_1(t_0, x_0)\}$ и $B = \{(t, x) : v_2(t, x) = v_2(t_0, x_0)\}$ — это какие-то поверхности, и *их пересечение является решением системы.* Это утверждение является теоремой, которая не будет доказываться.

**Теорема.** Для любой точки $(t_0, x_0) \in \Omega$ существует окрестность $D \subset \Omega$, а в ней — независимые в $D$ первые интегралы $v_1, \dots, v_n$.

**Доказательство.** Для любого $(t_0, \xi) \in D$ существует единственное непродолжаемое решение $\varphi(\cdot, \xi)$ задачи Коши, ещё и непрерывно дифференцируемое:

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = \xi \end{cases}.$$

Решим уравнение $x - \varphi(t, \xi) = 0$ относительно $\xi$ с параметрами $(t, x)$ в окрестности $(t_0, x_0)$, соответствующей решению $x = x_0$, $t = t_0$, $\xi = x_0$. Тогда $\varphi(t_0, \xi) \equiv \xi$ по определению $\varphi$. Теперь

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(x - \varphi(t, \xi))\bigg|_{\substack{t=t_0 \\ x=x_0}}(x_0) = -E.$$

($x_0$ встречается дважды, так как сначала мы подставили параметр $x = x_0$, а потом неизвестную $\xi = x_0$)

Следовательно, применима теорема о неявной функции: существует окрестность $D_1 \subset \Omega$ точки $(t_0, x_0)$ и отображение $V = (v_1, \dots, v_n) : D_1 \to \mathbb{R}^n$, такое что:

- ▷ $V \in C^1$.
- ▷ Для всех $(t, x) \in D_1$ выполнено $x - \varphi(t, V(t, x)) \equiv 0$.
- ▷ $V(t_0, x_0) = x_0$.
- ▷ Так как количество уравнений совпадает с количеством неизвестных, существует окрестность $\Delta$ точки $x_0$, такая что если $u \in \Delta$ и $x - \varphi(t, u) = 0$, то $u = V(t, x)$.

Продифференцируем по $x$ второе свойство:

$$E \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}(t, V(t, x)) \cdot \frac{\partial V}{\partial x}(t, x).$$

Подставим $(t_0, x_0)$: заметим, что $V(t_0, x_0) = x_0$, откуда это будет равно

$$E = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}(t_0, x_0) \cdot \frac{\partial V}{\partial x}(t_0, x_0).$$

Первый множитель равен $E$, поэтому

$$E = \frac{\partial V}{\partial x}(t_0, x_0).$$

Отсюда ранг этой матрицы равен $n$, а значит, существует окрестность $D \subset D_1$, такая что в ней $\operatorname{rk}\left(\frac{\partial V}{\partial x}(t, x)\right) = n$.

Пусть $x(\cdot)$ — решение задачи Коши $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = \xi$. По второму свойству $x(t) - \varphi(t, V(t, x(t))) \equiv 0$. Более того, из обозначений $x(t) - \varphi(t, \xi) \equiv 0$. Уменьшая область определения $x(\cdot)$, можно добиться того, чтобы $x(t)$ всегда попадал в $\Delta$, откуда по четвёртому свойству решение единственно и должно совпадать, поэтому $V(t, x(t)) \equiv \xi$, то есть $v_i(t, x(t)) \equiv \xi_i$ — константы.

□

## 6.2 Первые интегралы автономных систем

Пусть нам даны $n \in \mathbb{N}$, открытое $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ и отображение $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $f \in C^1$. Рассмотрим систему

$$x' = f(x). \tag{2}$$

**Теорема.** Для любого $x_0 \in \Omega$, такого что $f(x_0) \neq 0$ существует окрестность $D \subset \Omega$ точки $x_0$ и $n-1$ независимых первых интегралов $v_i : D \to \mathbb{R}$. От предыдущего случая отличается тем, что $v_i$ не зависит от $t$.

**Доказательство.** Так как $f(x_0) \neq 0$, у него существует ненулевая координата. Без ограничения общности это $n$-ая: $f_n(x_0) \neq 0$. Из непрерывности $f_n$ получаем, что $f_n(x) \neq 0$ в некоторой окрестности $x_0$. Рассмотрим неавтономную систему

$$\frac{dx_i}{dx_n} = \frac{f_i(x)}{f_n(x)}. \tag{3}$$

Здесь $(n-1)$ уравнение, откуда по теореме из предыдущего пункта существует окрестность $D$ точки $x_0$ и независимые первые интегралы системы (3) $v_1, \ldots, v_{n-1} : D \to \mathbb{R}$.

Пусть $\varphi(\cdot) = (\varphi_1(\cdot), \ldots, \varphi_n(\cdot))$ — какое-то решение системы (2), такое что для всех $t$ $\varphi(t) \in D$, то есть $\varphi_n'(t) = f_n(\varphi(t)) \neq 0$ Итак, мы получили строго монотонную функцию $\varphi_n(t)$ на интервале — по первому семестру матанализа существует обратная к ней функция $t(\varphi_n)$. Обозначим $x_i(x_n) = \varphi_i(t(x_n))$. Тогда

$$\frac{dx_i}{dx_n}(x_n) \equiv \frac{d\varphi_i}{dt}(t(x_n)) \cdot \frac{dt}{dx_n}(x_n) \equiv f_i(\varphi(t(x_n))) \cdot \frac{1}{\varphi_n'(t(x_n))} \equiv$$

$$\equiv \frac{f_i(\varphi(t(x_n)))}{f_n(\varphi(t(x_n)))} \equiv \frac{f_i(x)}{f_n(x)}.$$

Вернёмся к первым интегралам: по определению для всех $i$

$$v_i(\varphi_1(t(x_n)), \ldots, \varphi_{n-1}(t(x_n)), x_n) \equiv const.$$

Обозначая $\tau = t(x_n)$, получаем

$$v_i(\varphi_1(\tau), \ldots, \varphi_n(\tau)) \equiv const.$$

Значит, $v_i$ являются первыми интегралами системы (2). Проверим их независимость. Мы знаем, что они независимы в системе (3), тогда векторы

$$\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial v_i}{\partial x_{n-1}}(x)\right)$$

линейно независимы. Нам нужны $n$-мерные векторы, поэтому добавим к ним ещё одну координату:

$$\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial v_i}{\partial x_{n-1}}(x), \frac{\partial v_i}{\partial x_n}(x)\right).$$

При добавлении новой координаты линейная независимость не ломается, поэтому они подходят в систему (2). Таким образом, ранг матрицы

$$\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)_{\substack{i=\overline{1,n-1}\\ j=\overline{1,n}}}$$

равен $n-1$, то есть $v_1, \ldots, v_{n-1}$ — искомые первые интегралы.

□

**Замечание.** Зачем: возьмём $n = 2$ и первый интеграл $v_1$. Тогда кривая $v_1(x) = v_1(x_0)$ является фазовой траекторией. Аналогично в трёхмерном случае, но тогда будет пересечение поверхностей.

**Пример.** Рассмотрим систему

$$\begin{cases} x_1' = -x_2 \\ x_2' = x_1 \end{cases}$$

и её положение равновесия $x_0 = (0, 0)$. Так как $f(x_0) = (0, 0)$, предположение теоремы нарушается. Проверим, что следствие теоремы тоже нарушится: от противного, пусть существует первый интеграл $v(x_1, x_2)$ в окрестности $x_0$. Мы ещё требуем невырожденность, поэтому

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x_1}(0,0), \frac{\partial v}{\partial x_2}(0,0)\right) \neq (0,0).$$

Без ограничения общности $\frac{\partial v}{\partial x_1}(0,0) > 0$, тогда это верно и в некоторой окрестности нуля. По определению первого интеграла производная в силу системы должна быть тождественным нулём:

$$-x_2\frac{\partial v}{\partial x_1}(x_1, x_2) + x_1\frac{\partial v}{\partial x_2}(x_1, x_2) \equiv 0.$$

Возьмём $x_1 = 0$ и $x_2 = \frac{1}{N}$, где $N$ — какое-то достаточно большое число. Тогда из доказанного выше $\frac{\partial v}{\partial x_1}(x_1, x_2) > 0$. Вернёмся к тождеству выше:

$$-x_2\frac{\partial v}{\partial x_1}(x_1, x_2) \equiv 0.$$

Но мы взяли $x_1$, $x_2$ так, что оба множителя не равны нулю — противоречие.

□

## 6.3 Множество всех первых интегралов

**Утверждение.** Если у нас есть $n$ первых интегралов $v_1(t, x), \ldots, v_n(t, x)$, то любая функция вида $F(v_1(t, x), \ldots, v_n(t, x))$ является первым интегралом для $F \in C^1$.

**Доказательство.** Действительно, пусть $x(\cdot)$ — это решение системы (1), тогда

$$F(v_1(x_1(t)), \ldots, v_k(x_n(t))) \equiv F(const_1, \ldots, const_n) \equiv const.$$

□

Возникает логичный вопрос: все ли первые интегралы представимы в таком виде, если $v_1, \dots, v_n$ независимы? Ответ положительный.

**Теорема.** Пусть $D$ — окрестность точки $(t_0, x_0)$, $v_1, \dots, v_n : D \to \mathbb{R}$ — независимые первые интегралы системы (1). Обозначим $v := (v_1, \dots, v_n) : D \to \mathbb{R}^n$ и $c_0 = v(t_0, x_0)$. Тогда

- ▷ Если $x(\cdot)$ — решение задачи Коши $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$, то $x(\cdot)$ является решением алгебраической системы $v(t_0, x) = c_0$.
- ▷ Если $\varphi(\cdot, c)$ — это решение алгебраической системы $v(t, x) = c$ и $c$ достаточно близко к $c_0$, то $\varphi(\cdot, c)$ — это решение системы (1).

В каком-то смысле дифференциальная система и алгебраическая система на первых интегралах эквивалентны.

**Доказательство.** Первая часть: для любого $t$

$$v(t, x(t)) \equiv (v_i(t, x(t)))_{i=\overline{1,n}} \equiv const = v(t_0, x(t_0)) = c_0,$$

что и требовалось.

Вторая часть: пусть $v_1, \dots, v_n$ — независимые первые интегралы, тогда ранг матрицы

$$\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}(t_0, x_0)\right)_{i,j=\overline{1,n}}$$

равен $n$. Пусть $x(\cdot)$ — решение системы (1). По первому пункту $x$ является решением системы $v(t, x) = v(t_0, x_0)$. Тогда по теореме о неявной функции $\varphi(\cdot, c)$, как второе решение этой системы, совпадает с $x(t)$. Следовательно, $\varphi(t, v(t_0, x(t_0)))$ — решение системы (1).

(Что здесь происходит...)

$\square$

**Утверждение.** Пусть $D$ — окрестность $(t_0, x_0)$, $v_1, \dots, v_n : D \to \mathbb{R}$ — независимые первые интегралы системы (1), $v$ и $c_0$ из теоремы. Тогда существует окрестность $D' \subset D$ точки $(t_0, x_0)$, такая что любой первый интеграл $\omega : D' \to \mathbb{R}$ системы (1) представим в виде $\omega(t, x) = F(v(t, x))$.

**Доказательство.** Пусть $\varphi(t, c)$ — решение системы $v(t, x) = c$, тогда $\varphi(\cdot, c)$ по теореме является решением системы (1). Пусть $\varphi(t, v(t, \xi))$ — решение системы $v(t, x) = v(t, \xi)$. Тогда по теореме о неявной функции существует окрестность $D' \subset D$, такая что $x = \xi$ — единственное решение для всех $x$, достаточно близких к $x_0$, такое что для всех $(t, \xi) \in D'$ выполняется $\varphi(t, v(t, \xi)) \equiv \xi$.

Положим $F(c) := \omega(t_0, \varphi(t_0, c))$. По определению первого интеграла $\omega(t, \varphi(t, c))$ — константа по $t$. Подставим $t_0$: $\omega(t_0, \varphi(t_0, c)) = F(c)$. Теперь подставим $c = v(t, \xi)$: $\omega(t, \xi) \equiv F(v(t, \xi))$ — ровно искомое тождество.

$\square$

Смысл доказательств — переход от дифференциальных уравнений к алгебраическим и последующее применение теоремы о неявной функции.

## 6.4 Множество первых интегралов автономных систем

Будем доказывать те же теоремы для автономных систем. Преамбула такая же, как и в пункте 2.

**Лемма.** Пусть $f_n(x_0) \neq 0$, где $x_0 \in \Omega$, функции $v_1, \ldots, v_{n-1} : \Omega \to \mathbb{R}$ — независимые первые интегралы системы (2). Тогда $v_1, \ldots, v_{n-1}$ — независимые первые интегралы системы $\frac{dx_i}{dx_n} = \frac{f_i(x)}{f_n(x)}$. Это аналог теоремы из пункта 2, но теперь в роли времени выступает $x_n$.

**Доказательство.** Из определения первого интеграла для любого $j$ выполняется

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_j}{\partial x_i}(x) f_i(x) \equiv 0.$$

Тогда можно разделить на $f_n(x)$:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial v_j}{\partial x_i}(x) \frac{f_i(x)}{f_n(x)} + \frac{\partial v_j}{\partial x_n}(x) \equiv 0.$$

По признаку для неавтономных систем получаем, что $v_j$ являются первыми интегралами системы $\frac{dx_i}{dx_n}$. Докажем их независимость. Рассмотрим матрицу

$$\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i}(x)\right)_{\substack{i=\overline{1,n} \\ j=\overline{1,n-1}}}.$$

Её ранг равен $n-1$ для всех $x$, причём её последняя строка, из доказанного, выражается через первые $n-1$. Следовательно, ранг матрицы

$$\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i}(x)\right)_{\substack{i=\overline{1,n-1} \\ j=\overline{1,n-1}}}$$

равен $n-1$, что доказывает независимость первых интегралов.

$\square$

**Теорема.** (О множестве первых интегралов) Пусть $v_1, \ldots, v_{n-1} : D \to \mathbb{R}$ — независимые первые интегралы автономной системы (2), $x_0 \in D$, $f(x_0) \neq 0$. Тогда существует окрестность $D' \subset D$ точки $x_0$, такая что для любого первого интеграла системы (2) $\omega : D' \to \mathbb{R}$ существует функция $F \in C^1$, такая что $\omega(x) \equiv F(v_1(x), \ldots, v_{n-1}(x))$.

**Доказательство.** Без ограничения общности $f_n(x_0) \neq 0$, причём, уменьшая, при необходимости, $D$, это верно на всём $D$. По лемме $v_1, \ldots, v_{n-1}$ является первыми интегралами системы $\frac{dx_i}{dx_n}$, откуда из утверждения для неавтономных систем существует окрестность $D'$ точки $x_0$, такая что выполняется всё, что нужно.

$\square$

# 7 Линейные однородные уравнения в частных производных

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — область, $a : \Omega \to \mathbb{R}^n$ — вектор-функция, $a \in C^1$. Рассмотрим уравнение

$$a_1(x) \cdot \frac{\partial u}{\partial x_1}(x) + \cdots + a_n(x) \cdot \frac{\partial u}{\partial x_n}(x) = 0. \tag{1}$$

Его решением является функция $u : D \to \mathbb{R}$, где $D \subset \Omega$ — область и $u \in C^1$, при подстановке которой получается тождественный ноль. В сокращённой записи

$$\left\langle a(x), \frac{\partial u}{\partial x}(x) \right\rangle = 0.$$

**Определение.** Такое уравнение называется *линейным однородным уравнением в частных производных первого порядка.*

**Определение.** Система

$$x' = a(x) \tag{2}$$

называется *характеристической системой* уравнения.

Найдём связь между решениями уравнения (1) и его характеристической системы (2). Пусть $\overline{x} \in \Omega$ — какая-то точка, причём $a(\overline{x}) \neq 0$.

**Теорема.** 1) Любой первый интеграл системы (2) является решением системы (1).

2) Пусть $v_1, \ldots, v_{n-1} : \Omega \to \mathbb{R}$ — независимые первые интегралы системы (2). Тогда существует окрестность $D$ точки $\overline{x}$, такая что для любого решения $u : D \to \mathbb{R}$ уравнения (1) существует гладкая функция $F$, такая что $u(x) \equiv F(v_1(x), \ldots, v_{n-1}(x))$.

**Доказательство.** 1) Пусть $u(\cdot)$ — первый интеграл (2). По критерию первого интеграла $\left\langle a(x), \frac{\partial u}{\partial x}(x) \right\rangle \equiv 0$, что мы и хотели.

2) По теореме о первом интеграле существует окрестность $D$, такая что любой первый интеграл в ней представим в виде $F(v_1(x), \ldots, v_{n-1}(x))$. Рассмотрим произвольное решение $u : D \to \mathbb{R}$ уравнения (1). Раз решение, то $\left\langle a(x), \frac{\partial u}{\partial x}(x) \right\rangle \equiv 0$, а значит, $u(\cdot)$ — первый интеграл системы (2), то есть имеет искомое представление в окрестности $D$.

□

Пусть заданы гладкие функции $g, \varphi : \Omega \to \mathbb{R}$, причём $\frac{\partial g}{\partial x}(x) \neq 0$ на $\Omega$, и $g(\overline{x}) = 0$. Тогда существует непустое множество $\gamma := \{x : g(x) = 0\}$, более того, это $(n-1)$–мерная поверхность. Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} \left\langle a(x), \frac{\partial u}{\partial x}(x) \right\rangle \equiv 0 \\ u(x) = \varphi(x) \text{ при } x \in \gamma \end{cases}. \tag{3}$$

Как и у любой уважающей себя задачи Коши, для неё есть теорема о существовании и единственности решения, но это чуть позже.

**Определение.** $\overline{x}$ называется *характеристической точкой* задачи (3), если $\left\langle a(\overline{x}), \frac{\partial u}{\partial x}(\overline{x}) \right\rangle = 0$.

**Теорема.** Пусть точка $\overline{x}$ не является характеристической. Тогда существует окрестность $D$ точки $\overline{x}$ и функция $u : D \to \mathbb{R}$, такая что $u$ является единственным решением (3) в этой окрестности.

**Доказательство.** Мы знаем, что $a(\overline{x}) \neq 0$. Поэтому можно применить теорему о первых интегралах: существует область $\widetilde{D}$ точки $\overline{x}$, в которой есть независимые первые интегралы $v_1, \ldots, v_{n-1} : \widetilde{D} \to \mathbb{R}$ системы (2). Рассмотрим систему

$$\begin{cases} v_1(x) = u_1 \\ \vdots \\ v_{n-1}(x) = u_{n-1} \\ g(x) = \Theta \end{cases}.$$

(здесь все значения в правых частях — это параметры) Хотим применить теорему об обратной функции, проверим, что условия выполнены. Для этого рассмотрим матрицу Якоби:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x}(\overline{x}) \\ \vdots \\ \frac{\partial v_{n-1}}{\partial x}(\overline{x}) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(\overline{x}) \end{pmatrix}$$

Докажем от противного, что она невырождена: пусть

$$\frac{\partial g}{\partial x}(\overline{x}) = \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j \frac{\partial v_j}{\partial x}(\overline{x}).$$

Это рассматривать достаточно, так как первые $n-1$ строк точно линейно независимы. Тогда

$$\left\langle a(\overline{x}), \frac{\partial g}{\partial x}(\overline{x}) \right\rangle = \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j \left\langle a(\overline{x}), \frac{\partial v_j}{\partial x}(\overline{x}) \right\rangle = 0,$$

так как это первые интегралы. Противоречие с тем, что $\overline{x}$ не является характеристической точкой.

Теперь по теореме об обратной функции найдётся окрестность $\Gamma$ точки $(v_1(\overline{x}), \ldots, v_{n-1}(\overline{x}), 0)$ (в конце ноль, так как $g(\overline{x}) = 0$) и $\chi : \Gamma \to \mathbb{R}^n$, $\chi \in C^1$, такие что

$$\begin{cases} v_1(\chi(u_1, \ldots, u_{n-1}, \Theta)) = u_1 \\ \vdots \\ v_{n-1}(\chi(u_1, \ldots, u_{n-1}, \Theta)) = u_{n-1} \\ g(\chi(u_1, \ldots, u_{n-1}, \Theta)) = \Theta \end{cases}$$

и

$$\chi(v_1(x), \ldots, v_{n-1}(x), g(x)) \equiv x.$$

Тогда $\chi(u_1, \ldots, u_{n-1}, \Theta)$ является единственным решением построенной системы, причём $\chi(v_1(\overline{x}), \ldots, v_{n-1}(\overline{x}), 0) = \overline{x}$.

Теперь восстановим единственное решение задачи Коши. Положим $u(x) := \varphi(\chi(v_1(x), \ldots, v_{n-1}(x), 0))$.

Возьмём достаточно малую окрестность $D$ точки $\overline{x}$, такую что для всех $x \in D$ выполнено $(v_1(x), \dots, v_{n-1}(x), 0) \in \Gamma$.

Почему это решение уравнения в частных производных? Потому что взяли гладкую функцию от первых интегралов. Почему это решение задачи Коши? При $x \in \gamma$ выполнено $g(x) = 0$, то есть $u(x) = \varphi(\chi(v_1(x), \dots, v_{n-1}(x), g(x))) = \varphi(x)$, так как обратная функция.

Единственность остаётся в качестве упражнения. Доказательство от автора конспекта: рассмотрим произвольное решение $F(v_1, \dots, v_{n-1})$ и точку $x_1 \in D$. Положим $x_2 = \chi(v_1(x_1), \dots, v_{n-1}(x_1), 0) \in \gamma$. Заметим, что $v_i(x_2) = v_i(x_1)$ для всех $i$, так как $\chi$ — обратная к отображению $x \mapsto (v_1(x), \dots, v_{n-1}(x), g(x))$. Следовательно, $F(v_1(x_1), \dots, v_{n-1}(x_1)) = F(v_2(x_2), \dots, v_{n-1}(x_2)) = \varphi(x_2)$, то есть $F(v_1, \dots, v_{n-1})$ однозначно определено в $x_1$.

□

# 8 Вариационное исчисление

## 8.1 Простейшая задача вариационного исчисления

Рассмотрим пространство функций $C^1[a,b]$, как нормированное пространство, и его подмножество $M$. Зададим на нём метрику $\rho(x_1, x_2) = \max_{t \in [a,b]} |x_1(t) - x_2(t)|$ и $\rho_1(x_1, x_2) = \rho(x_1, x_2) + \rho(x_1', x_2')$. Пусть у нас есть функционал $I : M \to \mathbb{R}$.

**Определение.** Точка $\widehat{x} \in M$ называется *слабым локальным минимумом* функционала $I$, если $\exists \varepsilon > 0 : \forall x \in M \ (\rho_1(x, \widehat{x}) < \varepsilon \Rightarrow I(\widehat{x}) \leqslant I(x))$ Аналогично для максимума.

**Определение.** Точка $\widehat{x} \in M$ называется *сильным локальным минимумом*, если вместо $\rho_1$ используется $\rho$.

**Утверждение.** Если $\widehat{x}$ — сильный локальный минимум, то он также является слабым. Очевидно.

Рассмотрим дважды гладко дифференцируемую (в $C^2$) функцию $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ и числа $A, B \in \mathbb{R}$. Положим

$$M = \{x \in C^1[a,b] : x(a) = A, x(b) = B\}$$

и

$$I(x) := \int_a^b F(t, x(t), x'(t))dt, x \in M.$$

**Определение.** *Простейшей задачей вариационного исчисления* называется задача нахождения слабых локальных экстремумов функционала $I$.

Положим

$$\mathring{C}^1[a,b] := \{x \in C^1[a,b] : x(a) = x(b) = 0\}.$$

Тогда множество $M$ замкнуто относительно прибавления функций из $\mathring{C}^1[a,b]$.

Положим для $\widehat{x} \in M$, $\widehat{x} \in C^2$, $\eta \in \mathring{C}^1[a,b]$ функцию

$$\varphi(\mu) := I(\widehat{x} + \mu\eta) = \int_a^b F(t, \widehat{x}(t) + \mu\eta(t), \widehat{x}'(t) + \mu\eta'(t))dt.$$

Продифференцируем её:

$$\varphi'(\mu)|_{\mu=0} = \int_a^b \left( \frac{\partial F}{\partial x}(t, \widehat{x}(t), \widehat{x}'(t))\eta(t) + \frac{\partial F}{\partial x'}(t, \widehat{x}(t), \widehat{x}'(t))\eta'(t) \right) dt =$$

Проинтегрируем по частям:

$$= \int_a^b \frac{\partial F}{\partial x}(t, \widehat{x}(t), \widehat{x}'(t))\eta(t)dt + \frac{\partial F}{\partial x'}(\dots)\eta(t)\Big|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial x'}(\dots)\eta(t)dt =$$

Второе слагаемое рано нулю, так как $\eta(a) = \eta(b) = 0$

$$= \int_a^b \left( \frac{\partial F}{\partial x}(\dots) - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial x'}(\dots) \right) \eta(t)dt.$$

Таким образом, если $\widehat{x}$ является слабым локальным минимумом, то 0 — стационарная точка функции $\varphi$.

**Определение.** $\delta I[\widehat{x}, \eta] := \varphi'(0)$ — первая вариация функционала $I$ на $\widehat{x}$.

**Утверждение.** Если $\widehat{x} \in M$ — слабый локальный экстремум, то для любого $\eta \in \mathring{C}^1[a, b]$ точка 0 является локальным экстремумом функции $\varphi$.

**Доказательство.** Будем считать, что мы работаем с точкой минимума. По определению существует $\varepsilon > 0$, такое что для любого $x \in M$, удовлетворяющему $\rho_1(x, \widehat{x}) < \varepsilon$ верно $I(x) \geqslant I(\widehat{x})$.

Тогда для любого $\eta \in \mathring{C}^1[a, b]$, не равного тождественному нулю, положим $\delta = \frac{\varepsilon}{\rho_1(\eta, 0)}$. Возьмём произвольный $\mu \in (-\delta, \delta)$. Имеем

$$\rho_1(\widehat{x} + \mu\eta, \widehat{x}) = \max_{t \in [a,b]} |\mu\eta(t)| + \max_{t \in [a,b]} |\mu\eta'(t)| =$$

$$= |\mu| \left( \max_{t \in [a,b]} |\eta(t)| + \max_{t \in [a,b]} |\eta'(t)| \right) = |\mu| \cdot \rho_1(\eta, 0) < \varepsilon.$$

Таким образом, мы попали в $\varepsilon$-окрестность функции $\widehat{x}$, то есть $\varphi(\mu) = I(\widehat{x} + \mu\eta) \geqslant I(\widehat{x}) = \varphi(0)$.

□

**Утверждение.** (Лемма Лагранжа) Пусть $v \in C[a, b]$, такая что $\forall \eta \in \mathring{C}^1[a, b]$ выполнено

$$\int_a^b v(t)\eta(t)dt = 0.$$

Тогда $v(t) \equiv 0$.

**Доказательство.** От противного: допустим, что существует $\tilde{\tau} \in [a, b]$, такое что $v(\tilde{\tau}) > 0$. Тогда существует $\tau \in (a, b)$, такое что $v(\tau) > 0$ из непрерывности. Отсюда существует $\varepsilon > 0$, такой что $(\tau - \varepsilon, \tau + \varepsilon) \subset [a, b]$ и $v(t) > \frac{v(\tau)}{2}$ для $t \in (\tau - \varepsilon, \tau + \varepsilon)$.

Теперь построим гладкую функцию, принимающую положительные значения на $T :=$

$(\tau - \varepsilon, \tau + \varepsilon)$ и ноль вне этого интервала. В частности,

$$\eta(t) := \begin{cases} (t - (\tau - \varepsilon))^2 (t - (\tau + \varepsilon))^2, & t \in T \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}.$$

Отсюда по условию

$$0 = \int_a^b v(t)\eta(t)dt = \int_T v(t)\eta(t)dt.$$

Противоречие, так как мы взяли интеграл по непустому интервалу произведения двух положительных функций.

□

**Теорема.** Пусть $F \in C^2$, $\widehat{x} \in M$, $\widehat{x} \in C^2$ — слабый локальный экстремум. Тогда $\widehat{x}$ является решением уравнения Эйлера

$$\frac{\partial F}{\partial x}(t, x, x') - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial x'}(t, x, x') = 0.$$

**Доказательство.** Поскольку $\widehat{x}$ является слабым локальным экстремумом, по утверждению для любой $\eta \in \mathring{C}^1[a, b]$ точка 0 является локальным экстремумом функции $\varphi$, то есть $\varphi'(0) = 0$. Выражение для $\varphi'(0)$ мы уже писали выше — теперь заметим, что по утверждению про локальный экстремум $\varphi$ получаем $\varphi'(0) = 0$, а по лемме Лагранжа —

$$\frac{\partial F}{\partial x}(t, \widehat{x}, \widehat{x}'(t)) - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial x'}(t, \widehat{x}, \widehat{x}'(t)) \equiv 0.$$

Следовательно, $\widehat{x}$ является решением уравнения Эйлера.

□

**Замечание.** Повсюду мы говорили, что $\widehat{x} \in C^2$. Но теоретически экстремумом может являться и функция из $C^1$. Пусть $F, \widehat{x} \in C^1$. Если $\widehat{x}$ — слабый локальный экстремум, то функция

$$t \mapsto \frac{\partial F}{\partial x'}(t, \widehat{x}(t), \widehat{x}'(t))$$

непрерывно дифференцируема, и $\widehat{x}$ является решением уравнения Эйлера. Иными словами, прошлая теорема верна и в этом случае, но доказывать мы это не будем.

**Определение.** Решение уравнения Эйлера называется *экстремальным.* Тогда прошлую теорему можно переформулировать, как “слабый локальный экстремум является экстремальным“.

## 8.2 Задача о брахистохроне

Людям с острой непереносимостью физики рекомендуется пропустить. Остальным: для понимания достаточно школьных знаний.

Пусть у нас есть две материальные точки $A$ и $B$, причём $A$ выше $B$. Мы хотим провести между ними кривую, такую что материальная точка, двигаясь по ней исключительно под силой тяжести, достигнет точку $B$ за минимальное время. Эта кривая называется *брахистрохоной.*

Запишем закон сохранения энергии:

$$mg \cdot y(x) = \frac{mv^2(x)}{2}.$$

Тогда

$$v(x) = \sqrt{2g \cdot y(x)}.$$

Запишем скорость, как производную от пройденного пути $s$:

$$v(x) = \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dx}\int_0^x \sqrt{1+(y'(\xi))^2}d\xi \cdot \frac{dx}{dt} = \sqrt{1+(y'(x))^2} \cdot \frac{dx}{dt}.$$

Выразим $dt$:

$$dt = \frac{\sqrt{1+(y'(x))^2}}{\sqrt{2g \cdot y(x)}}dx,$$

то есть

$$t = \int_0^b \sqrt{\frac{1+(y'(x))^2}{2g \cdot y(x)}} \cdot dx.$$

Итак, итак, простейшая вариационная задача. Выкинем лишние константы:

$$t(y) = \int_0^b \sqrt{\frac{1+(y')^2}{y}}dx \to \min.$$

Здесь $y(0) = 0$, $y(b) = B$. Уравнением Эйлера будем

$$\sqrt{1+(y')^2}\left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(\sqrt{y})^3}\right) - \frac{d}{dx} \cdot \frac{2y'}{\sqrt{y} \cdot 2 \cdot \sqrt{1+(y')^2}} = 0.$$

Заметим, что это то же самое, что

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{\frac{1+(y')^2}{y}} - \frac{(y')^2}{\sqrt{y(1+(y')^2)}}\right) = 0.$$

То есть $y(y+(y')^2) = c_1$ — константа. Сделаем замену: $y'(x(\tau)) = \operatorname{ctg}(\tau)$. Тогда

$$y(x(\tau)) = c_1 \sin^2(\tau) = \frac{1}{2}c_1(1-\cos(2\tau)).$$

Теперь

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{2c_1 \sin(\tau)\cos(\tau)}{\operatorname{ctg}(\tau)}d\tau = c_1(1-\cos(2\tau))d\tau.$$

Значит,

$$x(\tau) = c_2 + \frac{c_1}{2}(2\tau - \sin(2\tau)).$$

Теперь остаётся проверить, какие из них являются экстремумами, делается напрямую.

## 8.3 Задача со свободным концом

Пусть $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \in C^2$, числа $a, b, A \in \mathbb{R}$ фиксированы. Рассмотрим функционал

$$I(x) = \int_a^b F(t, x(t), x'(t))dt \tag{1}$$

при условии $x(a) = A$.

Мы хотим найти экстремумы $I : M \to \mathbb{R}$, где $M = \{x \in C^1[a, b] : x(a) = A\}$.

**Теорема.** Пусть $\widehat{x} \in M$, $\widehat{x} \in C^2$ — решение (1), то есть слабый локальный экстремум $I$. Тогда $\widehat{x}$ является решением уравнения Эйлера

$$\frac{\partial F}{\partial x}(t, x, x') - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial x'}(t, x, x') = 0,$$

а также

$$\frac{\partial F}{\partial x'}(b, \widehat{x}(b), \widehat{x}'(b)) = 0. \tag{2}$$

**Доказательство.** Зафиксируем допустимое приращение $\eta \in C^1[a, b]$, $\eta(a) = 0$. Положим

$$\Phi(\alpha) := I(\widehat{x} + \alpha\eta) = \int_a^b F(t, \widehat{x}(t) + \alpha\eta(t), \widehat{x}'(t) + \alpha\eta'(t))dt.$$

Найдём производную в нуле:

$$\Phi'(0) = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial x}(t, \widehat{x}(t), \widehat{x}'(t))\eta(t) + \frac{\partial F}{\partial x'}(t, \widehat{x}(t), \widehat{x}'(t))\eta'(t)\right) dt =$$

Проинтегрируем по частям

$$= \int_a^b \frac{\partial F}{\partial x}(\ldots)\eta(t)dt + \frac{\partial F}{\partial x'}(t, \widehat{x}(t), \widehat{x}'(t))\eta(t)\Big|_{t=a}^{t=b} - \int_a^b \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial x'}(\ldots)\eta(t)dt =$$

$$= \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial x}(\ldots) - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial x'}(\ldots)\right)\eta(t)dt + \frac{\partial F}{\partial x'}(b, \widehat{x}(b), \widehat{x}'(b))\eta(b),$$

так как $\eta(a) = 0$.

Как доказывалось в простейшей задаче вариационного исчисления, 0 является локальным экстремумом функции $\Phi$, то есть $\Phi'(0) = 0$. Таким образом, выражение выше равно нулю.

Подставим в выражение выше функцию $\eta$ с $\eta(b) = 0$, тогда останется только

$$\int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial x}(t, \widehat{x}(t), \widehat{x}'(t)) - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial x'}(t, \widehat{x}(t), \widehat{x}'(t))\right)\eta(t)dt = 0.$$

По лемме Лагранжа получаем уравнение Эйлера. Теперь остаётся только

$$\frac{\partial F}{\partial x'}(b, \widehat{x}(b), \widehat{x}'(b))\eta(b) = 0$$

для всех функций $\eta$, то есть
$$\frac{\partial F}{\partial x'}(b, \widehat{x}(b), \widehat{x}'(b)) \equiv 0.$$

$\square$

**Замечание.** Опять же если $F, \widehat{x} \in C^1$, то функция
$$\frac{\partial F}{\partial x'}(t, \widehat{x}(t), \widehat{x}'(t))$$
непрерывно дифференцируема по $t$, $\widehat{x}$ является решением уравнения Эйлера и выполняется (2).

**Замечание 2.** Можно рассматривать и задачу с другим свободным концом, тогда (2) будет иметь вид
$$\frac{\partial F}{\partial x'}(a, \widehat{x}(a), \widehat{x}'(a)) = 0.$$
А если оба конца свободны, то условие выше и условие (2) выполняются одновременно.

## 8.4 Задача для функционалов, зависящих от нескольких функций

Пусть у нас есть функция $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \in C^2$, заданы числа $a, b \in \mathbb{R}$ и $A, B \in \mathbb{R}^n$, где $A = (A_i)_{i=\overline{1,n}}$ и $B = (B_i)_{i=\overline{1,n}}$.

Рассмотрим задачу нахождения экстремумов функционала
$$I(x) = \int_a^b F(t, x(t), x'(t))dt, \tag{3}$$
где $I : M \to \mathbb{R}$ для $M = \{x \in C^1([a, b], \mathbb{R}^n) \mid x(a) = A, x(b) = B\}$. Мы будем искать слабый локальный минимум/максимум по метрике
$$\rho_1(x, u) = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t) - u(t)| + \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x'(t) - u'(t)|.$$

**Теорема.** Пусть $\widehat{x} \in M$, $\widehat{x} \in C^2$ — решение (3), то есть слабый локальный экстремум $I$. Тогда $\widehat{x}$ является решением уравнения Эйлера
$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(t, x, x') - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial x_i'}(t, x, x') = 0$$
для всех $i = \overline{1, n}$.

**Доказательство.** Можно сделать те же самые рассуждения с леммой Лагранжа, как и в двух предыдущих случаях, но можно доказать проще с использованием уже полученных результатов.

Положим
$$M_1 := \{x_1 \in C^1[a, b] : x_a(a) = A_1, x_1(b) = B_1\}.$$

и

$$I_1(x_1) = \int_a^b F(t, x_1(t), \widehat{x}_2(t), \dots, \widehat{x}_n(t), x_1'(t), \widehat{x}_2'(t), \dots, \widehat{x}_n'(t))dt.$$

Так как $\widehat{x}$ является решением (3), $\widehat{x}_1$ является решением задачи нахождения экстремума $I_1(x_1)$, так как нужно внимательно посмотреть на то, что получается при подстановке.

Следовательно, по теореме для простейшей задачи вариационного исчисления

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}(t, \widehat{x}_1(t), \dots, \widehat{x}_n(t), \widehat{x}_1'(t), \dots, \widehat{x}_n'(t)) -$$

$$-\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial x_1'}(t, \widehat{x}_1(t), \dots, \widehat{x}_n(t), \widehat{x}_1'(t), \dots, \widehat{x}_n'(t)) \equiv 0.$$

Теперь аналогично доказываем для $x_2, \dots, x_n$.

□

## 8.5 Функционалы, содержащие производные высших порядков

Пусть у нас есть $F : \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$, $F \in C^{n+1}$, а также числа $a, b, A_i, B_i \in \mathbb{R}$ для $i = \overline{0, n-1}$. Рассмотрим функционал

$$I(x) = \int_a^b F(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n)}(t))dt. \tag{4}$$

при условиях $x^{(i)}(a) = A_i$ и $x^{(i)}(b) = B_i$ для всех $i$. Как обычно, положим

$$M = \{x \in C^n[a,b] : x^{(i)}(a) = A_i, x^{(i)}(b) = B_i \text{ для всех } i\}.$$

Положим метрику

$$\rho_n(x, u) = \sum_{i=0}^{n} \rho(x^{(i)}, u^{(i)}).$$

Опять же хотим найти слабый локальный минимум.

Введём множество допустимых вариаций:

$$\mathring{C}^n[a,b] = \{\eta \in C^n[a,b] : \eta^{(i)}(a) = \eta^{(i)}(b) = 0 \text{ для всех } i\}.$$

Возьмём произвольную допустимую вариацию $\eta \in \mathring{C}^n[a,b]$, $\widehat{x} \in C^{2n}$ и положим

$$\Phi(\alpha) = I(\widehat{x} + \alpha\eta) = \int_a^b F(t, \widehat{x}(t) + \alpha\eta(t), \dots, \widehat{x}^{(n)}(t) + \alpha\eta^{(n)}(t))dt.$$

Дифференцируем по параметру в нуле:

$$\Phi'(0) = \int_a^b \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial F}{\partial x^{(i)}}(t, \widehat{x}(t), \dots, \widehat{x}^{(n)}(t))\eta^{(i)}(t)dt =$$

Интегрируем, как обычно, по частям всё, кроме первого слагаемого, и сразу, как и раньше, сокращаем нули

$$= \int_a^b \frac{\partial F}{\partial x}(\dots)\eta(t)dt - \int_a^b \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial x^{(i)}}(\dots)\eta^{(i-1)}(t)dt =$$

Отправим первое слагаемое суммы в первое слагаемое всего выражения, а остаток проинтегрируем по частям

$$= \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial x}(\dots) - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial x^{(1)}}(\dots)\right)\eta(t)dt + \sum_{i=2}^n \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial F}{\partial x^{(i)}}(\dots)\eta^{i-2}(t)dt =$$

Делаем то же самое:

$$= \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial x}(\dots) - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial x^{(1)}}(\dots) + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial F}{\partial x^{(2)}}(\dots)\right)\eta(t)dt + \dots =$$

По методу неполной индукции получаем, что это всё равняется

$$\int_a^b \left(\sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{d^i}{dt^i}\frac{\partial F}{\partial x^{(i)}}(\dots)\right)\eta(t)dt.$$

**Замечание.** Если посмотреть на $n$-ое слагаемое полученной суммы, то можно увидеть, почему условия на непрерывную дифференцируемость функций именно такие.

**Лемма.** (Лагранжа) Пусть $f \in C[a,b]$ и $\int_a^b f(t)\eta(t)dt = 0$ для всех $\eta \in \mathring{C}^n[a,b]$. Тогда $f(t) \equiv 0$.

**Доказательство.** Всё так же, как и в одномерном случае. Точная формула для функции:

$$\eta(t) = \begin{cases} (t-(\tau+\varepsilon))^{2n}(t-(\tau-(\tau-\varepsilon))^{2n}, & t \in (\tau-\varepsilon, \tau+\varepsilon) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}.$$

Как альтернатива, можно использовать функцию пенёк из 3 семестра.

$\square$

**Теорема.** Пусть $F \in C^{n+1}$, $\widehat{x} \in M$ — слабый локальный экстремум, причём $\widehat{x} \in C^{2n}$. Тогда $\widehat{x}$ является решением уравнения Эйлера, которое в этом случае имеет вид

$$\frac{\partial F}{\partial x}(t, x, x', \dots, x^{(n)}) - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial x'}(t, x, x', \dots, x^{(n)}) + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial F}{\partial x''}(\dots) + \dots +$$

$$+(-1)^n \frac{d^n}{dt^n}\frac{\partial F}{\partial x^{(n)}}(\dots) \equiv 0.$$

**Доказательство.** Ничего не меняется. Если $\widehat{x}$ — слабый локальный экстремум, то 0 — локальный экстремум функции $\Phi$, то есть $\Phi'(0)$, откуда по равенству, полученному выше, и лемме Лагранжа получаем искомое.

$\square$

**Замечание.** И то же самое замечание: достаточно $C^n$ для всех функций.