پردیس علوم
دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر

عنوان پروژه

نگارنده

نام نگارنده

استاد راهنما: عنوان و نام استاد

پایان‌نامه برای دریافت درجه کارشناسی
در رشته ریاضی محض/ریاضی کاربردی/آمار/علوم کامپیوتر

تاریخ

چکیده

چکیده پایان‌نامه باید شامل نتایج اصلی مورد مطالعه باشد. توجه نمایید که چکیده با پیشگفتار تفاوت دارد و جای طرح مبانی یا مفاهیم مقدماتی نیست. چکیده تنها باید شامل نتایج و کار اصلی انجام شده در پایان‌نامه باشد. طول چکیده معمولا بیشتر از یک یا دو پاراگراف نیست.

سپاسگزاری

سپاسگزاری

پیشگفتار

پیشگفتار، فصلی از پایان‌نامه است که معمولاً شامل بخش یا زیربخش نیست. در این بخش، مقدمه‌ای به زبان ساده و عاری از فرمول‌بندی ریاضی، از مساله مورد مطالعه در پایان‌نامه ارائه می‌شود. نیز در پیشگفتار است که می‌توان خواننده را با تاریخچه‌ای مختصر از تلاش‌هایی که برای حل مساله مورد مطالعه در پایان‌نامه شده است آشنا نمود و نیز تلاش نمود تا خواننده اهمیت کار انجام شده در پایان‌نامه را دریابد. این قسمت، گرچه در نگاه نخست به ظاهر بسیار ساده می‌نماید، اما در حقیقت یکی از مهمترین قسمت‌های پایان‌نامه است، زیر بازتاب دهنده دانسته‌ها و فهم دانشجو از کلیت مساله است. توصیه می‌کنیم که نوشتن این قسمت را به آخر موکول نمایید!

یک نکته مهم: اگر پایان‌نامه یک پایان‌نامه کارشناسی یا کارشناسی‌ارشد باشد، که معمولاً بر اساس یک یا چند مقاله نوشته می‌شوند، آنگاه از دانشجو انتظار می‌رود که مراجع اصلی خود را در پیشگفتار معرفی نماید.

معمولاً بخش آخر پیشگفتار به ارائه یک نمایه کلی از پایان‌نامه اختصاص می‌یابد و نگارنده به معرفی کوتاهی از فصل‌بندی و کار انجام شده در پایان‌نامه می‌پردازد.

فهرست مطالب

۱ مفاهیم مقدماتی ۱
۱.۱ فضا های آفین ۱
۲.۱ عنوان بخش ۲
۱.۲.۱ عنوان زیر-بخش ۲
۳.۱ عنوان بخش ۲

۲ خم های ابر بیضوی ۳
۱.۲ صفحه تصویری وزن دار ۳

۳ چندگونا های جابجایی ۴

۴ عنوان فصل ۷

۵ نتیجه گیری ۸

فصل ۱

مفاهیم مقدماتی

در این فصل به بیان مقدمات هندسه جبری می‌پردازیم.

۱.۱ فضا های آفین

تعریف ۱.۱. فضای آفین nـبعدی روی میدان k عبارت است از:

$$A^n = A^n(\bar{K}) = \{P = (a_1, \ldots, a_n) | a_i \in \bar{K}\}$$

تعریف ۲.۱. مجموعه Kـنقاط گویای A^n [۲] عبارت است از:

$$A^n(K) = \{P = (a_1, \ldots, a_n) | a_i \in K\}$$

تعریف ۳.۱ (مجموعه جبری). فرض کنید $f \in \bar{K}[x_1, \ldots, x_n]$ و $P \in A^n$، در این صورت $f(p) \in \bar{K}$ و تعریف می‌کنیم:

$$V_f := \{P =\in A^n | f(P) = 0\}$$

دقت کنید چون $\bar{K}$ بسته جبری است، اگر f غیر ثابت باشد آنگاه $V_f \neq \emptyset$.
به طریق مشابه برای $T \subset \bar{K}[x_1, \ldots, x_n]$ می‌توان تعریف کرد:

$$V(T) := \{P =\in A^n | f(P) = 0 \quad \forall a \in T\}$$

و حال می‌توان مجموعه جبری را تعریف کرد:
یک مجموعه جبری، زیرمجموعه‌ای از A^n است که به صورت $V(T)$ باشد.

گزاره ۴.۱. فرض کنید $T \subset \bar{K}[x_1, \ldots, x_n]$ و قرار دهید $I :=< T >$، در این صورت:

$$V(I) = V(T)$$

[2] K-rtional points

بنابراین به هر ایده‌آل $I \lhd K[X]$ می‌توان زیرمجموعه‌ای از A^n نسبت داد:

$$V(I) := \{P =\in A^n | f(P) = 0 \quad \forall f \in I\}$$

حال نشان می‌دهیم که به هر مجموعه جبری نیز می توان یک ایده‌آل حلقه $\bar{K}[X]$ نسبت داد.
فرض کنید V یک مجموعه جبری باشد. تعریف می‌کنیم:

$$I(V) := \{f \in \bar{K}[X] | f(P) = 0 \quad \forall P \in V\}$$

توجه کنید که چون $0 \in I(V)$ بنابراین $I(V) \neq \emptyset$.

گزاره ۵.۱.
- $I(V) \in \bar{K}[X]$
- $I(V)$ ایده‌آل رادیکال است.

یادآوری ۶.۱. فرض کنید R یک حلقه و I ایده آل آن باشد. در اینصورت رادیکال ایده آل I را با $\sqrt{I}$ نمایش می دهیم و برابر است با:

$$\sqrt{I} = \{a \in I | \exists n \in \mathbb{N} \quad s.t. \quad a^n \in I\}$$

ایده آل J از حلقه R را ایده آل رادیکال گوییم هرگاه:

$$\sqrt{J} = J$$

تعریف ۷.۱. گوییم یک مجموعه جبری V "روی K تعریف شده است" اگر ایده آل $I(V) \lhd \bar{K}[X]$ مجموعه مولدی از اعضای $K[X]$ داشته باشد و در اینصورت آن را با V/K نمایش می دهیم.

۲.۱ عنوان بخش

۱.۲.۱ عنوان زیر-بخش

۳.۱ عنوان بخش

فصل ۲

خم های ابر بیضوی

۱.۲ صفحه تصویری وزن دار

در این بخش قصد داریم به تعریف یک فضای محیطی [۳] مناسب برای خم های ابر بیضوی بپردازیم.

تعریف ۱.۲. $g \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ را دلخواه در نظر بگیرید. صفحه تصویری وزن دار [۴] $\mathbb{P}^2_g = \mathbb{P}^2_{(1,g+1,1)}$ یک شی هندسی است که نقاط آن عبارتند از:

$$\frac{(a,b,c) \in \bar{K}^3 - (0,0,0)}{\sim} \quad s.t. \quad (a,b,c) \sim (a',b',c') \Leftrightarrow (\exists \lambda \in K^* \quad s.t. \quad (a',b',c') = (\lambda a, \lambda^{g+1} b, \lambda c))$$

نقطه متناظر (a,b,c) را در $\mathbb{P}^2_g$ با $(a:b:c)$ نمایش می دهیم.

[3] ambient space
[4] Weighted Projective Space

فصل ۳

چندگونا های جابجایی

[۴]

تعریف ۱.۳. یک چند گونای گروهی [۴] روی میدان K یک واریته جبری V روی K با نگاشت‌های منظم

$$m : V \times_K V \to V$$
$$inv : V \to V$$

و یک عضو $e \in V(K)$ است؛ به گونه ای که ساختار تعریف شده روی $V(\overline{K})$ توسط نگاشت های m و inv، گروه بوده و عضو همانی(خنثی) این گروه e می باشد.

جنین چهار تایی (V, m, inv, e) در کتگوری چندگونا های روی K یک گروه است. بدین معنی که:

- نگاشت های زیر هر دو نگاشت همانی بوده و لذا e عضو خنثی گروه است.

$$G \xrightarrow{(id,e)} G \times_K G \xrightarrow{m} G \qquad G \xrightarrow{(e,id)} G \times_K G \xrightarrow{m} G$$

- نگاشت های

$$G \xrightarrow{\triangle} G \times_k G \underset{inv\times id}{\overset{id\times inv}{\rightrightarrows}} G \times_k G \xrightarrow{m} G$$

هر دو برابر با ترکیب

$$G \to Spec(K) \to G$$

هستند و بنابراین نگاشت inv هر عضو را به وارون آن می برد.

[4] Abelian Varieteis
[4] Group Variety

- نمودار زیر جابجایی بوده و لذا خاصیت شرکت پذیری هم برقرار است.

$$\begin{tikzcd} G \times_K G \times_K G \arrow[r, "1\times m"] \arrow[d, "m\times 1"'] & G \times_K G \arrow[d, "m"] \\ G \times_K G \arrow[r, "m"] & G \end{tikzcd}$$

تعریف ۲.۳. فرض کنید V یک چندگونای گروهی روی K باشد. برای یک نقطه $a \in V(K)$ انتقال راست توسط a را با $t_a : V \to V$ نمایش می دهیم و برابر با ترکیب زیر تعریف می کنیم:

$$\begin{array}{ccccc} V \to & V \times V \to & V \\ x \mapsto & (x, a) \mapsto & xa \end{array}$$

لم ۳.۳. $t_a : V \to V$ یکریختی بوده و وارون آن $t_{inv(a)}$ است.

گزاره ۴.۳. یک چندگونای گروهی هموار است.

پیش از اثبات گزاره به بیان یک قضیه می پردازیم:

قضیه ۵.۳. مجموعه نقاط ناهموار یک چندگونا باز و چگال است.

برهان ۶.۳. فرض کنید U مجموعه نقاط ناهمواری V باشد که بنا بر قضیه قبل می دانیم باز و چگال است. اگر $U = \emptyset$ که حکم برقرار است؛ بنابراین فرض کنید $U \neq \emptyset$ و $b \in U$ وجود داشته باشد.
برای هر $a \in V$ تعریف کنید $U_a = \{xa | x \in U\}$. در این صورت $V = \bigcup U_a$ زیرا:
شمول $\bigcup U_a \subset V$ که واضح است؛ برای طرف عکس توجه کنید که برای هر $x \in V$ داریم:

$$x = ex = bb^{-1}x \in U_{b^{-1}x} \Rightarrow x \in U_{b_{-1}x}$$

بنابراین $V \subset \bigcup U_a$ و لذا تساوی مذکور ثابت می شود.
بنا بر تعریف فقط یک مولفه تحویل ناپذیر از یک چندگونا می تواند شامل

یک چندگونای گروهی همبند، همبند هندسی [5] است؛ یعنی با توسیع ضرایب اسکالر به بستار جبری، همچنان همبند باقی می ماند. برای مشاهده این گزاره باید نشان دهیم K در $K(V)$ جبری_بسته است.

تعریف ۷.۳. تعریف کامل بودن

[5] Geometrically Connected

تعریف ۸.۳. یک چندگونای گروهی همبند کامل را یک چندگونای آبلی گوییم.

هدف ما این است که نشان دهیم چندگوناهای آبلی تصویری و جابجایی هستند.

قرارداد ۹.۳. زین پس عمل گروه این چندگوناها را با جمع(+) نمایش خواهیم داد. بنابراین نگاشت انتقال t_a را به صورت $x \mapsto x + a$ و عضو همانی e را با ۰ نمایش خواهیم داد.

قضیه ۱۰.۳. **قضیه صلبی** [۶]
فرض کنید V و W و U چندگونا های تصویری باشند به گونه ای که $V \times W$ تحویل ناپذیر هندسی [۷] و V کامل باشد. یک نگاشت منظم $\alpha : V \times W \to U$ را در نظر بگیرید. اگر نقاط $u_0 \in U(K)$، $v_0 \in V(K)$ و $w_0 \in W(K)$ وجود داشته باشند به طوری که:

$$\alpha(V \times \{w_0\}) = \{u_0\} = \alpha(\{v_0\} \times W)$$

آنگاه:

$$\alpha(V \times W) = \{u_0\}$$

به عبارت دیگر اگر دو محور مختصات به یک نقطه واحد تصویر شوند، این کل فضا را وادار می کند که به همان نقطه تصویر شود و این یکی از نتایج شگفت انگیز قلت تعداد نگاشت های بین چندگوناهای تصویری است.

نتیجه ۱۱.۳. هر نگاشت منظم $\alpha : A \to B$ از چندگوناهای آبلی ترکیب یک همریختی با یک انتقال است.

تذکر ۱۲.۳. نتیجه قبل نشان می دهد که ساختار گروهی روی چندگوناهای آبلی با انتخاب عنصر صفر به طور یکتا تعیین می شود.

نتیجه ۱۳.۳. عمل گروه یک چندگونای آبلی، جابجایی است.

نتیجه ۱۴.۳. فرض کنید V و W چندگوناهای کاملی روی K باشند و v_0 و w_0 به ترتیب نقط Kـ گویایی از آنها باشند. همچنین فرض کنید

$$p : V \times W \to V$$
$$q : V \times W \to W$$

به ترتیب نگاشت های تصویر روی مولفه اول و دوم باشند.

فرض کنید A یک چندگونای آبلی باشد. آنگاه مورفیسم $h : V \times W \to A$ را که $h(v_0, w_0) = 0$ می توان به طور یکتا به صورت $h = f \circ p + g \circ q$ نوشت که $f : V \to A$ و $g : W \to A$ مورفیسم هایی هستند که: $f(v_0) = g(w_0) = 0$

[6] Rigidity Theorem
[7] Geometrically Irreducible

فصل ۴

عنوان فصل

فصل ۵

نتیجه گیری

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

کتاب‌نامه

[۱]

Abstract

Abstract goes here...

College of Science
School of Mathematics, Statistics, and Computer Science

Title of the Project

Author name

Supervisor:

A thesis submitted in partial fulfillment of the requirements for the degree of B.Sc. in Pure Mathematics/ Applied Mathematics/ Statistics/ Computer Science

yyyy