3] On cherche α, β solution de $\begin{cases} \frac{N\alpha}{\beta} - \sum_i x_i = 0 \quad (*) \\ \circledast \end{cases}$

3] $$\frac{\partial \log \mathcal{L}}{\partial \alpha} = n \log(\beta) + n \frac{\partial (\log(\Gamma(\alpha)))}{\partial \alpha} + \sum_i \log(x_i)$$

$$\longrightarrow = \frac{\frac{\partial(\Gamma(\alpha))}{\partial \alpha}}{\Gamma(\alpha)} = ?$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \log \mathcal{L} = 0 \iff n \log(\beta) + n \frac{\frac{\partial(\Gamma(\alpha))}{\partial \alpha}}{\Gamma(\alpha)} - \sum_i x_i = 0 . \circledast$$

$\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}$ fonct° digamma Ψ

→ On ne peut pas résoudre analytiquement le système, il faut utiliser un schéma d'optimisation.

EXERCICE 6 :

$(X_1, \dots, X_n) \sim G(\alpha, \beta)$.

(Moi) 1] Vraisemblance :

$$\mathcal{L}(\alpha, \beta ; x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(x_i, \alpha, \beta)$$

$\alpha > 0 \quad \beta > 0$

$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \exp(-\beta x_i) x_i^{\alpha-1}$$

$$= \left(\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\right)^n \prod_{i=1}^{n} \exp(-\beta x_i) x_i^{\alpha-1}$$

Log vraisemblance :

$$\log \mathcal{L}(\alpha, \beta ; x_1, \dots, x_n) = n \log\left(\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\right) + \sum_{i=1}^{n} \log\left(\exp(-\beta x_i) x_i^{\alpha-1}\right)$$

$$= n \log\left(\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\right) + \sum_{i=1}^{n} \left(-\beta x_i + (\alpha-1)\log(x_i)\right)$$

$$= n \log\left(\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\right) - \beta \sum_{i=1}^{n} x_i + (\alpha-1) \sum_{i=1}^{n} \log(x_i)$$

$$= n\alpha \log(\beta) - n\log(\Gamma(\alpha)) - \beta \sum_{i=1}^{n} x_i + (\alpha-1) \sum_{i=1}^{n} \log(x_i)$$

2] $\dfrac{\partial \log \mathcal{L}\dots}{\partial \beta} = \dfrac{n\alpha}{\beta} - \sum_{i=1}^{n} x_i$ avec α connu.

$\hookrightarrow = 0 \iff \beta = \dfrac{N\alpha}{\sum_i x_i}$ d'où $\hat{\beta}_{MLE} = \dfrac{N\alpha}{\sum_i x_i}$

(c'est bien un maximum).

$$\sqrt{n}\left(\hat{\beta}_{MLE} - \beta\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{\beta^2}{\alpha}\right).$$

$$= 2\left(\mathbb{E}(X_1 \mid X_1 = t)\frac{1}{n} + \mathbb{E}(X_1 \mid X_1 < t)\frac{n-1}{n}\right)$$

$$= 2\left(\frac{t}{n} + \frac{t}{2}\,\frac{n-1}{n}\right) = 2\left(\frac{2t + tn - t}{2n}\right) = \frac{t(1+n)}{n}.$$

$$\hat{\theta}_2 = T\left(\frac{n+1}{n}\right).$$

$\uparrow$ R.B.

4] Densité de $\mathcal{U}([0,\theta])$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x,\theta) = \frac{1}{\theta}\,\mathbb{1}_{[0,\theta]}(x).$ va poser pb.

N'appartient pas à la famille exp.

$\longrightarrow$ on ne peut pas appliquer le thm.

EXERCICE 8 :

$X_1, \dots, X_n \overset{iid}{\sim} \mathcal{U}(0,\theta)$, $\theta > 0$.

$f(x;\theta) = \frac{1}{\theta} \mathbb{1}_{[0,\theta]}(x) \longrightarrow$ Densité de la loi parente.

1] Mq $\hat{\theta}_1 = 2X_1$ est non biaisé.

$\mathbb{E}[\hat{\theta}_1] = 2\,\mathbb{E}[X_1] = 2 \cdot \frac{\theta}{2} = \theta.$

Donc $\hat{\theta}_1$ non biaisé.

2] Mq $T = \max_i(X_i)$ est une stat exhaustive pr θ.

$F_T(t) = \mathbb{P}(T \leq t) = \mathbb{P}(\max(X_i) \leq t)$

$f(x_1, \dots, x_n) \overset{\perp}{=} \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta) = \frac{1}{\theta^n} \prod_{i}^{n} \mathbb{1}_{[0,\theta]}(x_i)$

$= \frac{1}{\theta^n} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(\min(x_1, \dots, x_n)) \; \mathbb{1}_{]-\infty,\theta]}(\max(x_1, \dots, x_n))$

plus petit doit ê ≥ 0 ET plus gd doit ê $\leq \theta$.

+ Fisher - Neyman.

3] Soit $t > 0$.

$\mathbb{E}[\hat{\theta}_1 \mid \max_{i=1,\dots,n} X_i = t) = \mathbb{E}[2X_1 \mid \max_{i=1,\dots,n} X_i = t)$.

Thm de l'espérance totale :

Si $\{A_i\}_i$ est une partition (évènements 2 à 2 disjoints) et qui forment tout l'univers, alors

$$\mathbb{E}[X] = \sum_i \mathbb{P}(A_i)\mathbb{E}(X \mid A_i).$$

D'où suite calcul :

$= 2\mathbb{E}(X_1 \mid \max_{i=1,\dots,n} X_i = t, \max_{i=1,\dots,n} X_i = X_1) \frac{1}{n}$. $\mathbb{P}(\max_i X_i = X_1)$

$+ 2\mathbb{E}(X_1 \mid \max_{i=1,\dots,n} X_i = t, \max_{i=1,\dots,n} X_i \neq X_1) \frac{n-1}{n}$.

2] Condition par "Méthode de la fct de répartition".
Loi de $Z = \log\left(\frac{X}{2}\right)$.

Soit $t \in \mathbb{R}$,

$$F_Z(t) = \mathbb{P}(Z \leq t) = \mathbb{P}\left(\log\left(\frac{X}{2}\right) \leq t\right)$$
$$= \mathbb{P}(X \leq 2\exp(t))$$
$$= \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \int_2^{2\exp(t)} \frac{\theta 2^\theta}{x^{\theta+1}} \, dx \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 0 \\ \theta 2^\theta \int_2^{2\exp(t)} x^{-(\theta+1)} \, dx \end{cases} = \begin{cases} \\ \theta 2^\theta \left[\frac{-x^{-\theta}}{-\theta}\right]_2^{2\exp(t)} \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 0 \\ \frac{\theta}{\theta} 2^\theta \left(2^{-\theta}\exp(t)^{-\theta} - 2^{-\theta}\right) \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ (-\exp(t)^{-\theta} + 1) \end{cases}$$

On dérive / à t. $f_Z(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \theta\exp(-t\theta) & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$

On reconnait la loi $\mathcal{E}xp(\theta)$.

$$Z \sim \mathcal{E}xp(\theta).$$

3] $X_1, \dots, X_n \overset{iid}{\sim} \mathcal{E}xp(\theta)$. $\sum_{i=1}^n X_i \sim \mathcal{G}(n, \theta)$.

On utilise le m̂ trick que ds l'exo 5.

$\mathbb{E}(\hat{\theta}) = \mathbb{E}\left(\frac{n-1}{G(n,\theta)}\right) = \frac{\theta}{n-1} \cdot (n-1)$ Donc $\hat{\theta}$ non biaisé.

On a une fct de la stat exhaustive minimale $\sum_i \log(X_i)$ (famille exp) qui est sans biais pour θ.

$\Rightarrow$ $\hat{\theta}$ est le UMVUE

$\exp(\ln(x)) = x.$

(loi Pareto).

EXERCICE 1 :

x sur $[2, +\infty[$, $\quad f(x, \theta) = \theta \frac{2^\theta}{x^{\theta+1}}$.

1] Mq $\exists\, h, g, \eta, T$ tq $f(x,\theta) = h(x)g(\theta)\exp(\eta(\theta)T(x))$.

$g(\theta) = \theta 2^\theta \qquad h(x) = 1$

$\eta(\theta) = -(\theta+1) \qquad T(x) = \ln(x)$.

car $f(x,\theta) = 1 \times \theta 2^\theta \times \exp(-\ln(x^{\theta+1}))$

$= 1 \times \theta 2^\theta \times \exp(-\ln(x) \times (\theta+1))$.

Donc $T : x \mapsto \ln(x)$ est une statistique exhaustive.

2] $X \sim$ Pareto. $\quad$ Loi $Z = \log\left(\frac{X}{2}\right)$?

Méthode fct muette par cas.

$E[\varphi(Z)] = \int_\Omega \varphi(Z)\, dP = \int_2^{+\infty} \varphi\left(\log\left(\frac{X}{2}\right)\right) dP$

$= \cancel{\int_2^{+\infty} \varphi\left(\ln\left(\frac{\theta 2^\theta}{2x^{\theta+1}}\right)\right) dP}$

$= \int_2^{+\infty} \varphi(x)\, f(x,\theta)\, dx = \int_2^{+\infty} \varphi\left(\frac{x}{2}\right) \theta \frac{2^\theta}{x^{\theta+1}}\, dx$

$u \to \frac{x}{2}$

$= \int_2^{+\infty}$

Suite exo 5 -

$\mapsto$ Reparamétrisation $\longrightarrow f(x;\theta) = \frac{1}{\theta} \exp\left(-\frac{x}{\theta}\right)$.

2] $\theta = \lambda^{-1}$. $\quad \hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$

$\mathbb{E}(\hat{\theta}) = \frac{1}{n} \cdot n \cdot \theta = \theta$ Non biaisé.

$var(\hat{\theta}) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} var(X_i) = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot \theta^2 = \frac{\theta^2}{n}$.

⚠ On doit recalculer l'info de Fisher ds la nvelle paramétrisation.

$\log f(X,\theta) = -\log(\theta) - \frac{X}{\theta}$.

$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \longrightarrow \frac{1}{\theta^2} - \frac{2X}{\theta^3}$.

$I_X(\theta) = -\mathbb{E}\left[\frac{1}{\theta^2} - \frac{2X}{\theta^3}\right] = -\left[\frac{1}{\theta^2} - \frac{2\theta}{\theta^3}\right] = \frac{1}{\theta^2} \swarrow$ info apportée par 1 échantillon.

$I_n(\theta) = \frac{n}{\theta^2} \longleftarrow$ info apportée par n éch.

Donc $BCR = \frac{\theta^2}{n}$. Donc efficace.

$$= \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} \frac{\Gamma(n-1)}{\lambda^{n-1}} \quad \text{cf Exo 2.}$$

$$= \lambda \frac{\Gamma(n-1)}{(n-1)\Gamma(n-1)} = \frac{\lambda}{n-1}.$$

Donc $\mathbb{E}(\hat{\lambda}) = \lambda$ donc $\hat{\lambda}$ non biaisé.

2] $\theta = \lambda^{-1}$. $\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

$$\mathbb{E}(\hat{\theta}) = \frac{1}{n} \times n \times \mathbb{E}(X_i) \quad \text{(indépdce)}$$

$$= \frac{1}{n} n \lambda = \lambda. \quad \text{Donc } \hat{\theta} \text{ non biaisé.}$$

$$\text{var}(\hat{\lambda}) = (n-1)^2 \text{var}\left(\frac{1}{Y}\right).$$

$$\mathbb{E}\left(\left(\frac{1}{Y}\right)^2\right) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} \exp(-\lambda x) x^{n-1} dx.$$

$$= \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda x) x^{n-3} dx.$$

En supposant $n > 2$

$$= \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} \frac{\Gamma(n-2)}{\lambda^{n-2}} = \frac{\lambda^2}{(n-1)(n-2)}.$$

$$\text{Donc var}\left(\frac{1}{Y}\right) = \frac{\lambda^2}{(n-1)(n-2)} - \left(\frac{\lambda}{n-1}\right)^2$$

$$= \frac{\lambda^2(n-1) - \lambda^2(n-2)}{(n-1)^2(n-2)} = \frac{\lambda^2}{(n-1)^2(n-2)}$$

$$\text{donc var}(\hat{\lambda}) = \frac{\lambda^2}{n-2}.$$

On a montré en cours que la BCR valait $\frac{\lambda^2}{n}$.
$\hat{\lambda}$ n'est pas efficace.

EXERCICE 5 :

$(X_1, \dots, X_n)$ n-échantillon de loi $\mathcal{E}(\lambda)$.

1] $\hat{\lambda} = \dfrac{N-1}{\sum_{i=1}^{n} X_i}$.

Rappel : si $X_1, \dots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} \mathcal{E}(\lambda)$.
Alors $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim G(n, \lambda)$.
↑ loi Gamma (cf exo 2).

$E[\hat{\lambda}] = ?$

Loi de Gamma : $f(x; \alpha, \beta) = x^{\alpha-1} \dfrac{\beta^\alpha e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)}$ pour $x > 0$.

Ma part

On pose $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable positive.
$x \longmapsto \frac{1}{x}$.

$E\left[\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\right] = \int_0^{+\infty} \varphi(x) f(x; \alpha, \beta)\, dx$

$= \int_0^{+\infty} x^{n-2} \dfrac{\lambda^n e^{-\lambda x}}{\Gamma(n)}\, dx =$

Correction :

On pose $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$. $Y \sim G(n, \lambda)$.

$E\left(\frac{1}{Y}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x} \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} \exp(-\lambda x)\, x^{n-1}\, dx$.

$= \dfrac{\lambda^n}{\Gamma(n)} \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda x)\, x^{n-1-1}\, dx$

(avec $n > 1$).

$$v(\hat{\theta}_{MM}) = var\left(\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \left(\frac{2}{n}\right)^2 var\left(\sum_i X_i\right)$$

$$= \frac{4}{n^2}\sum_i var(X_i)$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_0^\theta \frac{t^2}{\theta} = \frac{1}{\theta}\,\frac{\theta^3}{3} = \frac{\theta^2}{3}.$$

Donc $var(X) = \frac{\theta^2}{3} - \left(\frac{\theta}{2}\right)^2 = \frac{\theta^2}{12}$

D'où $v(\hat{\theta}_{MM}) = \frac{4}{n^2} \times n \times \frac{\theta^2}{12} = \frac{3\theta^2}{n}$

3] Comparons $MSE(\hat{\theta}_1)$ vs $MSE(\hat{\theta}_2)$ à n fixé.

Si $n = 1$, ou $n = 2$: $MSE(\hat{\theta}_1) = MSE(\hat{\theta}_2)$.
Si $n \geq 3$, $\hat{\theta}_1$ domine $\hat{\theta}_2$.

$$E(\hat{\theta}_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx = \int_0^{\theta} \frac{n x^n}{\theta^n}\, dx$$

$$= \frac{n}{(n+1)\theta^n}\left[x^{n+1}\right]_0^{\theta} = \frac{n \times \theta^{n+1}}{(n+1)\times\theta^n} = \frac{n\times\theta}{n+1}$$

Donc $b(\hat{\theta}_1) = \frac{n\theta}{n+1} - \theta = \frac{n\theta - (n+1)\theta}{n+1} = \frac{-\theta}{n+1}$.

$\cancel{var(\hat{\theta}_1) = E((X - E(X))^2)}$

$$E(\hat{\theta}_1^2) = \int_0^{\theta} t^2 \frac{n t^{n-1}}{\theta^n}\, dt = \dots = \theta^2 \frac{n}{n+2}.$$

Avec Formule de König-Huygens :

$$var(\hat{\theta}_1) = \theta^2 \frac{n}{n+2} - \left(\frac{\theta n}{n+1}\right)^2 = \dots = \theta^2\left(\frac{n}{(n+2)(n+1)^2}\right)$$

2] $\cancel{E(X) = \int_0^{\theta} \frac{t}{\theta} \times t\, dt = \frac{1}{\theta}\int t^2\, dt = \frac{1}{\theta}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\theta} = \frac{\theta^2}{3}}$.

1 seul paramètre. $\cancel{E(X^2) = \int_0^{\theta} \frac{t^3}{\theta}\, dt = \frac{1}{\theta}\left[\frac{t^4}{4}\right]_0^{\theta} = \frac{\theta^4}{4\theta} = \frac{\theta^3}{4}}$.

$\cancel{\text{D'où } E(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \text{ d'où } \frac{\theta^2}{3} = \overline{X}}$

$X \sim U(0, \theta) \Rightarrow E(X) = \frac{\theta}{2}$.

Donc $\hat{\theta}_{MM}$ est tq $\frac{\hat{\theta}_{MM}}{2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

D'où $\hat{\theta}_{MM} = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

$$E(\hat{\theta}_{MM}) = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\theta}{2} = \frac{2}{n}\times n\frac{\theta}{2} = \theta.$$

Donc $b(\hat{\theta}_{MM}) = 0$.

EXERCICE 3 :

Ici, support dépend du paramètre.

1] $b(\hat{\theta}_n) = \mathbb{E}(\hat{\theta}_n) - \theta = ?$

$\hat{\theta}_n = \max\limits_{i=1,\dots,n} X_i$.

Méthode de la fonction de répartition.

Soit $t \in \mathbb{R}$.

fct de répartit. $\longleftarrow$ $F(t) = \mathbb{P}(\hat{\theta}_n \leq t) = \mathbb{P}(\max\limits_i X_i \leq t)$

$\cancel{= \mathbb{P}(\prod_i X_i \leq t)}$

$\cancel{= \mathbb{P}(X_i \leq t) = \sum_i t}$

par indep

$= \mathbb{P}(X_1 \leq t, \dots, X_n \leq t) = \prod\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \leq t)$

$= \prod\limits_{i=1}^{n} \begin{cases} 0 \text{ si } t<0 \\ \int_0^t \frac{1}{\theta}\,dx \text{ si } t \in [0,\theta] \\ 1 \text{ si } t>\theta \end{cases} = \begin{cases} 0 \text{ si } t<0 \\ \frac{t^n}{\theta^n} \text{ si } t \in [0,\theta] \\ 1 \text{ si } t>\theta \end{cases}$

Il reste à dériver F et on vérifie que ça intègre à 1.
(Pas tjs le cas, mais le prof ne nous piègera pas).

$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = \begin{cases} 0 \text{ si } t<0 \\ \frac{nt^{n-1}}{\theta^n} \text{ si } t \in [0,\theta] \\ 0 \text{ si } t>\theta \end{cases}$ d'où $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \int_0^\theta \frac{nt^{n-1}}{\theta^n}\,dt$

$\downarrow$

densité de $\hat{\theta}_1$

$= \frac{1}{\theta^n}\left[t^n\right]_0^\theta = \frac{\theta^n}{\theta^n} = 1$

2] $E(X^2) = \int_0^{+\infty} x^2 \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \exp(-\beta x) x^{\alpha-1} dx$

$= \int_0^{+\infty} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \exp(-\beta x) x^{\alpha+1} dx = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} \exp(-\beta x) x^{\alpha+1} dx$

$= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} \exp(-\beta x) x^{\alpha+2-1} dx$

$= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \times \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\beta^{\alpha+2}} = \frac{1}{\beta^2} \frac{\overset{(\alpha+1)}{\cancel{\alpha}} \times \Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2}$

$\boxed{⚠ \text{ Rappel : } E(\varphi(X)) = \int \varphi(x) f(x) dx}$

3] $m_1 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2} X_i^1 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2} g(\alpha, \beta)$ (1)

$m_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2} X_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2} g(\alpha, \beta)^2$ (2).

Donc $\hat{\alpha}_{MM}$ et $\hat{\beta}_{MM}$ st tq $\begin{cases} \frac{\hat{\alpha}_{MM}}{\hat{\beta}_{MM}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \\ \frac{\hat{\alpha}_{MM}(\hat{\alpha}_{MM}+1)}{\hat{\beta}_{MM}^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \end{cases}$

Après calcul : $\hat{\alpha}_{MM} = \frac{\overline{X}^2}{S^2}$ et $\hat{\beta}_{MM} = \frac{\overline{X}}{S^2}$ (notations exo 1).

↱ À Refaire -

EXERCICE II :

$G(\alpha, \beta) \longrightarrow$ loi Gamma.

$\forall x \geq 0,\quad f(x, \alpha, \beta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \exp(-\beta x)\, x^{\alpha-1}$ avec $\begin{cases} \alpha > 0 \\ \beta > 0 \end{cases}$

densité

1] Deux param α et β, donc on calcule $E(X)$ et $E(X^2)$.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \exp(-\beta x)\, x^{\alpha-1}\, dx$$

$$= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{+\infty} x^\alpha \exp(-\beta x)\, dx = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} x^\alpha \exp(-\beta x)\, dx.$$

Comme f est une densité, $\forall \alpha > 0, \forall \beta > 0$, $\int_0^{+\infty} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \exp(-\beta x)\, x^{\alpha-1}\, dx = 1$

donc $\int_0^{+\infty} \exp(-\beta x)\, x^{\alpha-1}\, dx = \frac{\Gamma(\alpha)}{\beta^\alpha}$ $(*)$

$u(x) = x^\alpha$

$v(x) = \exp(-\beta x)$

$$\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} x^\alpha \exp(-\beta x)\, dx = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} -\beta \times x^\alpha \frac{\exp(-\beta x)}{-\beta}$$ $u \times v'$

$$= -\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \times \frac{1}{-\beta} \int_0^{+\infty} \alpha x^{\alpha-1} \exp(-\beta x)\, dx$$

$$+ \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \times \frac{1}{-\beta} \left[x^\alpha \exp(-\beta x) \right]_0^{+\infty}$$

On prend $\alpha' = \alpha + 1$ et $\beta' = \beta$.

Donc $E(X) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} \exp(-\beta x)\, x^\alpha\, dx$

$$= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} \exp(-\beta x)\, x^{\alpha+1-1}\, dx$$

Avec $(*)$ $= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\beta^{\alpha+1}} = \frac{1}{\beta} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)} = \frac{1}{\beta} \frac{\alpha \Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} = \frac{\alpha}{\beta}$

Comparaison des MSE :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\frac{\sigma^4(2n-1)}{n^2} - \frac{2\sigma^4}{n-1} = \frac{\sigma^4(2n-1)(n-1)}{n^2(n-1)} - \frac{2n^2\sigma^4}{n^2(n-1)}$$

$$= \frac{\sigma^4(\cancel{2n^2} - 2n - n + 1 - \cancel{2n^2})}{n^2(n-1)} = \frac{\sigma^4(-3n+1)}{n^2(n-1)} < 0.$$

Donc S^2 domine S'^2.

Donc ê non biaisé ça ne fait pas tt.

correction, je ne savais pas faire.

$$b(S^2) = 2\mu^2 + \frac{\sigma^2}{n} - \frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i \sum_{j=1}^{n} X_j)$$

$$= 2\mu^2 + \frac{\sigma^2}{n} - \frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\left[(n-1)\mathbb{E}(X_i)^2 + \mathbb{E}(X_i^2)\right]$$

$$= 2\mu^2 + \frac{\sigma^2}{n} - \frac{2}{n}\left((n-1)\mu^2 + \mu^2 + \sigma^2\right)$$

$$= \frac{\sigma^2}{n} - \frac{2}{n}\sigma^2 = -\frac{\sigma^2}{n}.$$

les X_i st indpdts donc $X_i \perp X_j \to \mathbb{E}(X_iX_j) = \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_j) = \mathbb{E}(X_i)^2$

$$\mathbb{E}(S^2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2.$$

$\Rightarrow$ biaisé, sous estime la variance.

$$S'^2 = \frac{n}{n-1} S^2 = \frac{n}{n-1}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$ sera non biaisé !

3] $X_1, \dots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

$$MSE(S'^2) = b(S'^2) + var(S'^2)$$
$$= 0^2 + \frac{2\sigma^4}{n-1} = \frac{2\sigma^4}{n-1}.$$

$$MSE(S^2) = b(S^2) + var(S^2) = \mathbb{E}(S^2) - \sigma^2 + var(S^2)$$

$$= \left(-\frac{\sigma^2}{n}\right)^2 + var(S^2).$$

$$= \left(-\frac{\sigma^2}{n}\right)^2 + var\left(\frac{n-1}{n}S'^2\right)$$

$$= \left(-\frac{\sigma^2}{n}\right)^2 + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 var(S'^2) = \left(-\frac{\sigma^2}{n}\right)^2 + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \times \frac{2\sigma^4}{n-1}$$

$$= \frac{\sigma^4}{n^2}(2n-1).$$

Correction fin question n°1 :

$$var(\overline{X}) = var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2} var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} var(X_i) = \frac{1}{n^2} \times n\,\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}.$$

possible uniquement grâce à l'indépdce de X_i

$\overline{X}$ est non biaisé car $var(\overline{X}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc il est convergent.

La loi forte des grands nombres (LFGN) assure la cvgce presque sûre de $\overline{X}$ vers μ.
Donc $\overline{X}$ est fortement convergent.

2] $b(S^2) = \mathbb{E}(S^2) - \sigma^2$

$$= \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right) - \sigma^2$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left((X_i-\overline{X})^2\right) - \sigma^2$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\mathbb{E}(X_i^2) - 2\mathbb{E}(X_i\overline{X}) + \mathbb{E}(\overline{X}^2)\right] - \sigma^2$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[var(X_i) + \mathbb{E}(X_i)^2 - 2\mathbb{E}(X_i\overline{X}) + var(\overline{X}) + \mathbb{E}(\overline{X})^2\right] - \sigma^2$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\sigma^2+\mu^2) - \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(X_i\overline{X}) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2\right) - \sigma^2$$

$$= \cancel{\sigma^2} + \mu^2 - \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(X_i\overline{X}) + \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2 - \cancel{\sigma^2}$$

$$= 2\mu^2 + \frac{\sigma^2}{n} - \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(X_i\overline{X}).$$

Chapitre 1 - Estimateurs -

P. 13/18 : Preuve :

$$\mathbb{E}((\hat{\theta}-\theta)^2) = \mathbb{E}\left((\hat{\theta}-\mathbb{E}(\hat{\theta}) + \mathbb{E}(\hat{\theta})-\theta)^2\right)$$

$$= \mathbb{E}\left[(\hat{\theta}-\mathbb{E}(\hat{\theta}))^2 + 2(\hat{\theta}-\mathbb{E}(\hat{\theta}))(\mathbb{E}(\hat{\theta})-\theta) + (\mathbb{E}(\hat{\theta})-\theta)^2\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[(\hat{\theta}-\mathbb{E}(\hat{\theta}))^2\right] + 2\mathbb{E}\left[(\hat{\theta}-\mathbb{E}(\hat{\theta}))(\mathbb{E}(\hat{\theta})-\theta)\right] + \mathbb{E}\left[(\mathbb{E}(\hat{\theta})-\theta)^2\right].$$

$$= \mathrm{var}(\hat{\theta}) + \underbrace{2\left[\mathbb{E}(\hat{\theta})-\theta\right]\mathbb{E}(\hat{\theta}-\mathbb{E}(\hat{\theta}))}_{0} + \mathrm{biais}^2(\hat{\theta})$$

Ex 1 (Moi) :

1] $b(\bar{X}) = \mathbb{E}(\bar{X}) - \mu = \mu - \mu = 0$.

Donc $\bar{X}$ est un estimateur sans biais de μ.

Calcul de $\mathbb{E}(\bar{X})$:

$$\mathbb{E}(\bar{X}) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \overset{\text{linéarité}}{=} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(X_i)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu = \frac{1}{n}\times n \times \mu = \mu.$$

Calcul variance :

$$\mathrm{var}(\bar{X}) = \mathbb{E}\left[(\bar{X}-\mathbb{E}(\bar{X}))^2\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[(\bar{X}-\mu)^2\right]$$

$$= \mathbb{E}(\bar{X}^2) - 2\mu\mathbb{E}(\bar{X}) + \mathbb{E}(\mu^2)$$

$$= \mathbb{E}(\bar{X}^2) - 2\mu\times\mu + \mu^2$$

$$= \mathbb{E}(\bar{X}^2) - \mu^2.$$