Математический анализ. Экзамен.

13 января 2026 г.

СОДЕРЖАНИЕ

1 СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ МНОЖЕСТВА. ПОРОЖДАЮЩАЯ ПРОЦЕДУРА. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ СВОЙСТВО.

1.1 Способы задания множества

1. Перечисление $\{a, b, c...\}$
2. Характеристическое свойство $M \overset{\text{def}}{=} \{x : P(x)\}$, где $P(x)$ – предикат
3. Порождающая процедура $M := \{y : y = f(x), x \in E\}$, где f – функция от x

1.2 Описание способов задания множества

Определение

Характеристическое свойство – способ задания множества, при котором каждый его элемент обладает свойством $P(x)$

$$M \overset{\text{def}}{=} \{x : P(x)\}$$

Определение

Порождающая процедура – способ задания множества, при котором каждый его элемент является результатом выполнения функции f от переменной x из некоторого множества E.

$$M := \{y : y = f(x), x \in E\}$$

2 ОТОБРАЖЕНИЯ. ИНЪЕКЦИЯ, СЮРЪЕКЦИЯ, БИЕКЦИЯ. ПРЯМЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ МНОЖЕСТВ

2.1 Отображения

Определение

Отображение – способ сопоставления элементов между множествами.

Отображения бывают трех видов:

1. Инъекция
2. Сюръекция
3. Биекция

Определение

Инъекция – такое отображение $f(A) \to B$, при котором любой элемент B имеет **не более одного** прообраза в множестве A.

Определение

Сюръекция – такое отображение $f(A) \to B$, при котором любой элемент B имеет **не менее одного** прообраза в множестве A.

Определение

Биекция – это отображение, являющееся и сюръекцией, и инъекцией одновременно. То есть взаимооднозначное соответствие.

2.2 Прямые произведения множеств

Определение

Прямое (декартово) произведение множеств A и B – все такие пары чисел (a, b), где $a \in A$, $b \in B$.

$$A \times B \overset{\text{def}}{=} \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

3 КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА. ДЕЙСТВИЯ С КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ И ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФОРМЫ ЗАПИСИ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

3.1 Комплексные числа

Рассмотрим такое число i, что $i^2 = -1$. Тогда можно представить следующий вид числа: $z = a + bi$, где $a, b \in \mathbb{R}$

Определение

Комплексное число – такая пара чисел (a, b), что $a, b \in \mathbb{R}$

3.2 Действия с комплексными числами

1. Сложение поэлементно $z_1 + z_2 = (a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$
2. Умножение $z_1 z_2 = (a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)$
3. Равенство $z_1 = z_2 \overset{\text{def}}{=} (a_1 = a_2) \wedge (b_1 = b_2)$
4. Обратное

$$\exists (x, y) : (x, y)(a_2, b_2) = (a_1, b_1) \Leftrightarrow \begin{cases} x a_2 - y b_2 = a_1 \\ x b_2 + y a_2 = b_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} \\ y = \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} \end{cases}$$

5. Модуль числа $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
6. Деление $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \widetilde{z_2}}{|z_2|^2}$
7. Аргумент числа $\phi = \arg(z) = \arctan(\frac{b}{a})$

3.3 Тригонометрическая и показательная форма записей

1. Тригонометрическая запись $z = r(cos(\phi) + isin(\phi))$
2. Показательная форма $z = e^{i\phi}$

4 ВОЗВЕДЕНИЕ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА В СТЕПЕНЬ. ИЗВЛЕЧЕНИЕ КОРНЯ ИЗ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА. КОМПЛЕКСНЫЙ ЛОГАРИФМ. ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО АРГУМЕНТА.

4.1 Возведение комплексного числа в степень и извлечение корня.

1. Комплексное число $z = r(\cos(\phi) + i\sin(\phi))$ Возводиться в n-ую степень согласно формуле Муавра $z^n = r^n(\cos(n\phi) + i\sin(n\phi))$
2. Извлчения корня $\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}(\cos(\frac{\phi+2\pi k}{n}) + i\sin(\frac{\phi+2\pi k}{n})), k = 0, 1....., n-1$

4.2 Комплексный логарифм

Решим уравнение $e^\omega = c, c \in \mathbb{C}, \omega = a + ib \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow Ln(c) = \ln(e^a \cdot e^{ib}) = \ln(|z|) + \ln(e^{iarg(\omega)}) = \ln(|z|) + i(\phi + 2\pi k)$$

Тогда $Ln(z) = \ln(|z|) + i(\phi + 2\pi k)$

Важно заметить, что комплексный логарифм является многозначной функцией.

4.3 Функции комплексного аргумента

5 АКСИОМЫ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ. ПРОСТЕЙШИЕ СЛЕДСТВИЯ ИЗ АКСИОМ. АКСИОМА ПОЛНОТЫ.

5.1 Аксиомы вещественных чисел

Определение

Множество действительных чисел $\mathbb{R}$ – это множество, на котором заданы операции сложения, умножения и сравнения, удовлетворяющие следующим аксиомам.

1. Группа I
   (a) $a + b = b + a$
   (b) $a + (b + c) = (a + b) + c$
   (c) $\exists 0 : \forall a \in \mathbb{R} \Rightarrow a + 0 = a$
   (d) $\forall a \exists \widetilde{a} : a + \widetilde{a} = 0$
2. Группа II
   (a) $ab = ba$
   (b) $(ab)c = a(bc)$
   (c) $\exists 1 : \forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow 1 \cdot a = a$
   (d) $\forall a \in \mathbb{R} \exists a^{-1} : aa^{-1} = 1$
3. Группа III
   (a) $a(b + c) = ab + ac$ – дистрибутивность
4. Группа IV
   (a) $\forall a, b \in \mathbb{R} : (a \leq b) \vee (b \leq a)$
5. Группа V
   (a) $a \leq a$, $a \geq a$
   (b)
   $$\begin{cases} a \leq b \\ b \leq c \end{cases} \Rightarrow a \leq c$$
   (c) $(a \leq b) \vee (b \leq a)$
   (d) $0 \leq 1$

(e)

$$\begin{cases} a \le b \\ b \le a \end{cases} \Rightarrow a = b$$

6. Группа VI
   (a) $a \le b \Rightarrow \forall c : a + c \le b + c$
   (b)
   $$\begin{cases} a \le b \\ c \le d \end{cases} \Rightarrow a + c = b + d$$
   (c) $a \le b, c > 0 \Rightarrow ac \le bc$
   (d)
   $$\begin{cases} 0 \le a \le b \\ 0 \le c \le d \end{cases} \Rightarrow 0 \le ac \le bd$$
7. Аксиома полноты

$$((\forall x \in X) \wedge (\forall y \in Y) : x \le y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\exists c \in \mathbb{R} : (\forall x \in X) \wedge (\forall y \in Y) : x \le c \le y)$$

5.2 Простейшие следствия из аксиом

1. **Единственность нуля:** Если $a + x = a$ для некоторого $a \in \mathbb{R}$, то $x = 0$.
2. **Единственность противоположного:** Для любого $a \in \mathbb{R}$ существует единственный $-a$ такой, что $a + (-a) = 0$.
3. **Расположение чисел относительно друг друга:** Для любых $x, y \in \mathbb{R}$ верно ровно одно из трех утверждений: $x < y$, $x > y$, $x = y$

5.3 Аксиома полноты

Аксиома полноты говорит о том, что для любых двух различных чисел из множества $\mathbb{R}$ найдется третье, находящееся между ними.

6 ТОЧНАЯ ВЕРХНЯЯ И ТОЧНАЯ НИЖНЯЯ ГРАНИ МНОЖЕСТВА. ЕДИНСТВЕННОСТЬ МИНИМАЛЬНОГО И МАКСИМАЛЬНОГО ЭЛЕМЕНТА ОГРАНИЧЕННОГО НЕПУСТОГО МНОЖЕСТВА. СУЩЕСТВОВАНИЕ ТОЧНОЙ ВЕРХНЕЙ ГРАНИ ОГРАНИЧЕННОГО НЕПУСТОГО МНОЖЕСТВА. ПРИНЦИП ВЛОЖЕННЫХ ОТРЕЗКОВ.

6.1 Супремум и инфимум множества

Определение

Точная верхняя грань (супремум) множества M – такое число $s = \sup M$, которое удовлетворяет условиям:

1. $\forall x \in M \Rightarrow x \leq s$
2. $\forall \varepsilon > 0 \exists x' \in M : x' > s - \varepsilon$

Определение

Точная нижняя грань (инфимум) множества M – такое число $i = \inf M$, которое удовлетворяет условиям:

1. $\forall x \in M \Rightarrow x \geq s$
2. $\forall \varepsilon > 0 \exists x' \in M : x' < i + \varepsilon$

6.2 Единственность минимального и максимального элемента ограниченного непустого множества

Теорема

Любое ограниченное сверху подмножество множества $\mathbb{R}$ имеет единственную точную верхнюю грань.

Доказательство

[Существование]

Рассмотрим два множества: X – исходное множество, Y – множество всех верхних граней множества X. X ограничено сверху числом y, если $\forall x \in X \Rightarrow x \leq y$. По аксиоме полноты $\exists c : \forall x \in X, \forall y \in Y \Rightarrow x \leq c \leq y$. Проверим, что $c = \sup X$. $\forall x \in X \Rightarrow x \leq c$.

Пусть $\varepsilon > 0$, рассмотрим $c - \varepsilon$. Если c – неточная верхняя грань, то не найдется ни одного $x' \in X$ такого, что $x' > c - \varepsilon$, а значит $\forall x \in X \Rightarrow x \leq c - \varepsilon$, а значит $c - \varepsilon$ можно выбрать как новую верхнюю грань.

[Единственность]

Пусть есть c_1 и c_2, $c_2 > c_1$. Возьмем $\varepsilon = \frac{c_2 - c_1}{2}$. $\exists x' : x' > c_2 - \frac{c_2 - c_1}{2} > c_1$. Тогда c_1 – не граница X, $c_1 \notin Y$

Определение

Минимальный элемент множества M – такой элемент $a \in M$, что выполняется $\forall m \in M \Rightarrow a \leq m$

Определение

Максимальный элемент множества M – такой элемент $a \in M$, что выполняется $\forall m \in M \Rightarrow a \geq m$

Теорема

Если в множестве A существует минимальный (максимальный) элемент, то он единственный.

Доказательство

Пусть m_1, m_2 – два минимальный элемента множества A.

1. Так как m_1 – минимальный элемент множества A, то выполняется $\forall x \in A \Rightarrow m_1 \leq x$, в том числе это выполнено и для $x = m_2$, ведь $m_2 \in A$. Значит $m_1 \leq m_2$.
2. Так как m_2 – минимальный элемент множества A, то выполняется $\forall x \in A \Rightarrow m_2 \leq x$, в том числе это выполнено и для $x = m_1$, ведь $m_1 \in A$. Значит $m_2 \leq m_1$.
3. $$\begin{cases} m_1 \leq m_2 \\ m_2 \leq m_1 \end{cases} \Leftrightarrow m_1 = m_2$$

6.3 Принцип вложенных отрезков

Определение

Система вложенных отрезков – это последовательность числовых отрезков, где каждый последующий отрезок содержится в предыдущем.

Теорема

Пусть существует такая последовательность отрезков $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \ldots$, $[a_n, b_n] \subset [a_{n+1}, b_{n+1}]$, таких, что $\lim\limits_{x\to\infty}(b_n - a_n) = 0$. Тогда существует единственная точка c, принадлежащая всем отрезкам системы, причем $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_b = c$.

Доказательство

[Существование]

Пусть $X = \{a_i\}_{i=1}^{\infty}$, $Y = \{b_i\}_{i=1}^{\infty}$. X и Y непустые, $\forall i, j : a_i < b_j$. Пусть $i < j$. Тогда $a_i \leq a_j < b_i$, $a_j < b_j < b_i$. $a_i < b_j$, $a_j < b_i$.

По аксиоме $\exists c : \forall k \Rightarrow c \in [a_k; b_k]$

[Единственность]

Пусть имеется другая точка c', которая, как и c, принадлежит каждому отрезку системы. Тогда $\forall n \Rightarrow |c' - c| \leq b_n - a_n$, но если c и c' не совпадают, то расстояние между ними ненулевое, а значит $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) \neq 0$, противоречие условию.

7 ИНДУКТИВНОЕ МНОЖЕСТВО. МНОЖЕСТВО НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ. МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ. СУЩЕСТВОВАНИЕ НАИМЕНЬШЕГО ЭЛЕМЕНТА В НЕПУСТОМ ПОДМНОЖЕСТВЕ МНОЖЕСТВА НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ. ПРИНЦИП АРХИМЕДА.

7.1 Индуктивное множество, множество натуральных чисел

Определение

Индуктивное множество X – множество, удовлетворяющее следующим условиям:

1. $1 \in X$
2. $x \in X \Rightarrow x + 1 \in X$

Определение

Множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ – наименьшее индуктивное множество.

$$\mathbb{N} = \bigcap_{i=1}^{\infty} X_i$$

где X_i – индуктивное множество

7.2 Метод математической индукции

Определение

Метод математической индукции гласит, что если $A(n)$ верно, и из этого следует, что $A(n+1)$ тоже верно, а также верно $A(1)$, то $A(x)$ верно на $\mathbb{N}$.

7.3 Существование наименьшего элемента в непустом подмножестве множества натуральных чисел

Теорема

Любое ограниченное снизу непустое подмножество X множества $\mathbb{N}$ имеет минимальный элемент.

Доказательство

[Случай 1]
Если $1 \in X$, то X автоматически имеет наименьший элемент, поскольку $1 = \min \mathbb{N}$

[Случай 2]
Пусть $1 \notin X$. Тогда рассмотрим такое множество B, которое состоит из всех элементов множества $\mathbb{N}$, которые меньше элементов A:

$$B = \{n \in \mathbb{N} : \forall k \leq n \Rightarrow k \notin A\}$$

Докажем по индукции, что если A не имеет минимального элемента, то $B = \mathbb{N}$, а это противоречие с непустым A.
База индукции: $1 \in B$
Индукционное предположение: $n \in B$
Индукционный переход: $n + 1 \in B$
Если бы $n + 1 \in A$, то $\min A = n + 1$ (поскольку мы взяли все такие элементы $n \in \mathbb{N}$, для которых выполняется $\forall k \leq n \Rightarrow k \notin A$, то есть все те числа, до которых нет чисел в A), но мы предположили, что минимального элемента нет. Поэтому $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow n \in B \Rightarrow A = \emptyset$

7.4 Принцип Архимеда

Теорема

Пусть задано $h > 0$. $\forall x \exists n : (n-1)h \leq x < nh$

Доказательство

Рассмотрим $\frac{x}{h}$. Найдется $n \in \mathbb{N}$ такое, что $n > \frac{x}{h}$, поскольку $\mathbb{N}$ неограничено сверху, найдем минимальный такой элемент.

$$n - 1 \leq \frac{x}{h} < n$$

$$(n-1)h \leq x < nh$$

8 ПЛОТНОСТЬ МНОЖЕСТВА РАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ. СУЩЕСТВОВАНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ. ИРРАЦИОНАЛЬНОСТЬ $\sqrt{2}$

Определение

Множество A называется **всюду плотным** на числовой прямой $\mathbb{R}$, если между любыми двумя числами из $\mathbb{R}$ найдется число из A.

8.1 Плотность множества рациональных чисел

Теорема

Множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ всяду плотно на множестве действительных чисел $\mathbb{R}$.

Доказательство

Возьмем два числа $a, b \in \mathbb{R}$. Пусть $a > b$. Воспользуемся принципом Архимеда и получим, что для любого положительного числа $a - b$ найдется натуральное n такое, что $\frac{1}{n} < a - b$.
Рассмотрим числа вида $\frac{m}{n}$. Расстояние между соседними такими числами равно $\frac{1}{n}$, что меньше интервала (a, b), а значит хотя бы одно такое число войдет в этот интервал.

8.2 Существование иррациональных чисел

Первое число, иррациональность которого была доказана, – $\sqrt{2}$. Существование такого числа геометрически очевидно: это диагональ единичного квадрата. Однако можно доказать, что такое число невозможно представить в виде соотношения целых чисел.

8.3 Иррациональность $\sqrt{2}$

Теорема

$\sqrt{2}$ – иррациональное число, то есть непредставимое в виде $\frac{m}{n}$, где $m, n \in \mathbb{Z}$, а также $\frac{m}{n}$ – несократимая дробь.

Доказательство

Пойдем от обратного. Пусть $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n} \Leftrightarrow 2 = \frac{m^2}{n^2} \Leftrightarrow m^2 = 2n^2$$

Но тогда $m^2 \equiv 0 \pmod 2 \Leftrightarrow m \equiv 0 \pmod 2 \Leftrightarrow m = 2k$. $4k^2 = 2n^2$. Но отсюда видно, что m и n имеют общий делитель, что противоречит изначальному условию.

9 ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. МОНОТОННОСТЬ. ОГРАНИЧЕННОСТЬ. РЕКУРРЕНТНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

9.1 Последовательности

Определение

Последовательность – это упорядоченный набор из элементов некоторого множества A.

$$\{a_n\} \stackrel{\text{def}}{=} \{a_i : \forall i \Rightarrow a_i \in A\}$$

Способы задания последовательности:

1. Формула n-го члена $a_n = f(n)$
2. Рекуррентный $a_{n+1} = f(a_n)$
3. Описание x_n - n-я цифра десятичной записи числа π

9.2 Монотонность

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **строго возрастающей**, если $\forall n \Rightarrow x_{n+1} > x_n$

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **неубывающей (нестрого возрастающей)**, если $\forall n \Rightarrow x_{n+1} \geq x_n$

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **строго убывающей**, если $\forall n \Rightarrow x_{n+1} < x_n$

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **невозрастающей (нестрого убывающей)**, если $\forall n \Rightarrow x_{n+1} \leq x_n$

9.3 Ограниченность

Определение

Последовательность называется **ограниченной**, если $\exists M > 0 : \forall x_n : |x_n| < M$

Примеры ограниченных последовательностей:

1. $x_n = (-1)^n$
2. $x_n = \sin n$
3. $x_n = \frac{1}{n^2}$

Примеры неограниченных последовательностей:

1. $x_n = n^2$
2. $x_n = (-1)^n n^2$

10 ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ДЕЙСТВИЯ С ПРЕДЕЛАМИ. ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД В НЕРАВЕНСТВАХ. ПРИНЦИП СЖАТОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ.

10.1 Предел последовательности

Определение

Число a называется пределом последовательности $\{a_n\}$, если $\forall \varepsilon > 0$ найдется номер, начиная с которого все члены последовательности входят в ε-окрестность a.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$$

10.2 Арифметические действия с пределами

Теорема

Если последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ имеют конечные пределы, то сумма этих последовательностей также имеет конечный предел.

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \end{cases} \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$$

Доказательство

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Докажем по определению, что $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a+b$.

$|(a_n - a) + (b_n - b)| < \varepsilon$

$|(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b|$

Возьмем $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда $\exists N_1 : \forall n > N_1 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon_1$

Возьмем $\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда $\exists N_2 : \forall n > N_2 \Rightarrow |b_n - b| < \varepsilon_2$

Тогда при $n = \max(N_1, N_2)$ $|a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \boxed{a + b}$

Теорема

Если последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ имеют конечные пределы, то произведение этих последовательностей также имеет конечный предел.

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \end{cases} \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab$$

Теорема

Если последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ имеют конечные пределыб а также $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$ и $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow b_n \neq 0$, то отношение этих последовательностей также имеет конечный предел.

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \end{cases} \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a_n}{b_n}$$

10.3 Предельный переход в неравенствах

Теорема

Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, и начиная с какого-то номера $a_n \leq b_n$, то $a \leq b$

Доказательство

$$a_n \leq b_n \Leftrightarrow b_n - a_n \geq 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\lim_{n\to\infty} b_n \geq \lim_{n\to\infty} a_n}$$

10.4 Предел сжатой последовательности

Теорема

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = c$, и, начиная с некоторого номера, справедливо неравенство $a_n \le x_n \le b_n$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$

Доказательство

$$\lim_{n\to\infty} a_n = c \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \exists N_1 : \forall n > N_1 \Rightarrow |a_n - c| < \varepsilon$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = c \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \exists N_2 : \forall n > N_2 \Rightarrow |b_n - c| < \varepsilon$$

Тогда при $N = \max(N_2, N_2)$ выполняются обы неравенства.

Рассмотрим $a_n \le x_n \le b_n$ при выбранном N.

$$c - \varepsilon \le x_n \le c + \varepsilon$$

Значит x_n входит в ε-окрестность точки c начиная с некоторого N, а значит c также является ее пределом.

11 ПРЕДЕЛ МОНОТОННОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. ТЕОРЕМА ВЕЙЕРШТРАССА О ПРЕДЕЛЕ МОНОТОННОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Теорема

[Теорема Вейерштрасса]

Всякая монотонно возрастающая (убывающая) и ограниченная сверху (снизу) последовательность имеет конечный предел

Доказательство

Докажем теорему для неубывающей последовательности. Для остальных доказывается аналогично.

Поскольку последовательность неубывающая, то $\forall n \Rightarrow x_n \leq x_{n+1}$. Поскольку еще и она ограничена, то $\exists a = \sup\{x_n\}$. Это значит, что $\forall n \Rightarrow x_n \leq a$. Так как a – супремум, то $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) : x_N > a - \varepsilon$. Последовательность неубывающая, а значит при $n > N$: $x_n \geq x_N > a - \varepsilon$. Значит $a - \varepsilon < x_n \leq a$, откуда следует, что $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \Leftrightarrow |x_n - a| < \varepsilon$ при $n > N$. Значит последовательность имеет предел.

12 НЕОГРАНИЧЕННОСТЬ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ $x_n = q^n$, $q > 1$, ОЦЕНКА $q^{n-1} \le x < q^n$. СХОДИМОСТЬ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ И СУММЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ ПРИ $|q| < 1$. ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ $\frac{n}{q^n}$

12.1 Неограниченность q^n

Теорема

Последовательность q^n, где $q > 1$, неограничена

Доказательство

Предположим, что это не так. Тогда $\exists \sup\{q^n\} = s$. $\forall n \Rightarrow q^n \le s$, то есть у этой последовательности есть предел по теореме Вейерштрасса. Тогда начиная с некоторого N будет выполняться $|s - q^N| < \varepsilon$. $\frac{s}{q} < s \Rightarrow \exists q^n : \frac{s}{q} < q^n \le s \Leftrightarrow s < q^{n+1} \le sq$, но тогда s – не супремум, ведь мы получили, что $s < q^{n+1}$. Противоречие.

12.2 Оценка $q^{n-1} < x < q^n$

Теорема

Для любого $x > 0$ и $q > 1$ существует единственное целое число $n \in \mathbb{Z}$ такое, что $q^{n-1} \le x < q^n$

Доказательство

Рассмотрим множество $A = \{k \in \mathbb{Z} : q^k \le x\}$. Оно непусто, поскольку $k \to -\infty \Leftrightarrow q^k \to 0$. Это множество ограничено сверху, поскольку $\forall x > 0 \exists k : q^k > x$. Значит $\exists n = \max A$. По построению $q^n \le x$, но также по построению $q^{n+1} > x$. Таким образом $q^n \le x < q^{n+1}$. Заменив n на $n - 1$ получим $q^{n-1} \le x < q^n$.

12.3 Геометрическая прогресия

Теорема

Если $|q| < 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$

Доказательство

$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \frac{1}{q^N} > \frac{1}{\varepsilon}$ (теорема выше) $\Rightarrow q^N < \varepsilon$. Значит, $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$

Теорема

Если $|q| < 1$, то геометрическая прогрессия $\lim\limits_{n\to\infty} aq^n$ стремится к 0

Доказательство

$$\lim_{n\to\infty} aq^n = a \lim_{n\to\infty} q^n = 0$$

Теорема

[Сумма геометрической прогрессии]

При $b_1 = 1$, $|q| < 1$:

$$S_n = \frac{1}{1-q}$$

Доказательство

$$S_n = b_1 + b_2 + ... + b_n = b_1 + q(b_1 + b_2 + ... + b_{n-1}) =$$
$$= b_1 + q(S_n - b_n) = b_1 + qS_n + qb_n$$
$$S_n(1-q) = b_1 - qb_n$$
$$S_n = \frac{b_1 - qb_n}{1-q}$$

При $b_1 = 1$ и $|q| < 1$: $\boxed{S_n = \frac{1}{1-q}}$

Теорема

Если $|q| > 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{q^n} = 0$

Доказательство

$\exists n > N : x_{n+1} < x_n \Rightarrow$ последовательность убывает, при этом неотрицательна. Тогда $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{q^n} = a$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{q}$$

$$x_{n+1} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{q} x_n$$

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = 1 \cdot \frac{1}{q} a$$

$$a = \frac{a}{q}$$

$$a = 0$$

13 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧИСЛА e. СВОЙСТВА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ, СВЯЗАННЫХ С ЧИСЛОМ e.

Определение

Число e определяется как предел последовательности $(1+\frac{1}{n})^n$

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Теорема

Предел последовательности $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ существует

Доказательство

Докажем по теореме Вейерштрасса

[Монотонность]

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}}{(1+\frac{1}{n})^n} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left(\frac{1+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n}}\right)^n =$$

$$= \left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left(\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^n \geq$$

Воспользуемся неравенством Бернулли $(1+a)^n \geq 1+an$ при $a \geq -1$:

$$\geq \left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{n}{(n+1)^2}\right) = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)\left(\frac{n^2+n+1}{(n+1)^2}\right) =$$

$$= \frac{n^3+3n^2+3n+2}{n^3+3n^2+3n+1} > 1$$

Последовательность возрастает

[Ограниченность]

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!n^k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{n^k k!} \leq$$

Поскольку $\frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{n^k} < 1$, то:

$$\leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots < 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} < 3$$

Связанные последовательности:

- $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$
- $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$
- $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = e^x$

14 ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. КРИТЕРИЙ КОШИ СХОДИМОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ.

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **фундаментальной**, если:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall m > N, n > N \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon$$

Теорема

[Критерий сходимости Коши]

Последовательность имеет предел тогда и только тогда, когда она фундаментальна

Доказательство

[Имеет предел $\Rightarrow$ фундаментальна]

Пусть $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Докажем, что последовательность фундаментальна. Пусть задано ε. Возьмем $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}$

$$\exists N_1 : \forall n > N_1 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon_1$$

$$\exists N_2 : \forall m > N_2 \Rightarrow |x_2 - a| < \varepsilon_1$$

$$|x_n - x_m| = |(x_n - a) - (x_m - a)| \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_1 < \varepsilon$$

[Фундаментальна $\Rightarrow$ имеет предел]

Зафиксируем $m > N(\varepsilon)$. Тогда все члены следующие члены последовательности лежат в этой ε-окрестности члена x_m. Значит последовательность ограничена, а тогда из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $x_{n_k} \to a$. Докажем, что это и будет предел последовательности.

Все члены подпоследовательности $\{x_{n_k}\}$ начиная с некоторого номера m лежат в ε-окрестности точки a, но при этом сами лежат в ε-окрестности точки x_m. Значит $|a - x_n| < 2\varepsilon$

15 ПОДПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. ТЕОРЕМА БОЛЬЦАНО-КОШИ О СУЩЕСТВОВАНИИ СХОДЯЩЕЙСЯ ПОДПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. ЧАСТИЧНЫЕ ПРЕДЕЛЫ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ. НИЖНИЙ И ВЕРХНИЙ ПРЕДЕЛЫ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. ТЕОРЕМА О НИЖНЕМ И ВЕРХНЕМ ПРЕДЕЛЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ.

15.1 Подпоследовательности

Определение

Пусть задана последовательность $\{x_n\}$, также пусть $n_1 < n_2 < ... < n_k < ....$ Тогда последовательность $\{x_{n_k}\}$ называется **подпоследовательностью** последовательности $\{x_n\}$.

Теорема

[Теорема Больцано-Коши]

Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность

Доказательство

Пусть $\{x_n\}$ ограничена, то есть $\exists[a_1, b_1] : \forall n \Rightarrow x_n \in [a_1, b_1]$. Поделим отрезок пополам. Тогда хотя бы одна половина содержит бесконечное множество членов, выберем ее и снова поделим пополам. Снова хотя бы одна половина содержит бесконечное множество членов и т.д.

Получаем систему вложенных отрезков $b_k - a_k \to 0$, при этом у них существует единственная общая точка.

Тогда выберем подпоследовательность так, чтобы каждый ее член лежал в разных отрезках. Получим последовательность, сходящуюся к общей точке всех отрезков.

15.2 Частичные пределы

Определение

Число a называется **частичным** пределом последовательности $\{x_n\}$, если существует такая подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, что $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$

Определение

Верхним пределом последовательности называется наибольший из ее частичных пределов

Определение

Нижним пределом последовательности называется наименьший из ее частичных пределов

Теорема

Последовательость имеет предел тогда и только тогда, когда все ее частичные пределы конечны и совпадают

Доказательство

[Предел существует $\Rightarrow$ все частичные пределы конечны и совпадают]
Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} \{x_n\} = a$. Но тогда любая ее подпоследовательность сходится к a, ведь начиная с некоторого номера все члены последовательности входят в ε-окрестность точки a

[Частичные пределы конечны и совпадают $\Rightarrow$ существует предел]
[Случай 1: последовательность ограничена]
Если последовательность $\{x_n\}$ ограничена, то из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$. Пусть $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$. Но известно, что все частичные пределы совпадают, но если предположить,

что a не является пределом, то $\exists\{x_{n_{km}}\} : |x_{n_{km}} - a| \geq \varepsilon$, что противоречит единственности частичного предела.

[Случай 2: последовательность неограничена]

Тогда из такой последовательности можно выделить неограниченную подпоследовательность, то есть ее предел равен бесконечности. То есть тогда все частичные пределы равны бесконечности, а это противоречит условию.

16 ОПРЕДЕЛЕНИЕ И СВОЙСТВА ПРЕДЕЛА ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ ПО КОШИ И ПО ГЕЙНЕ. РАВНОСИЛЬНОСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЙ.

16.1 Определения. Равносильность определений

Определение

[Определение по Коши]

Число a называется **пределом** функции f в точке x_0, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такая, что если $|x - x_0| < \delta$, то выполняется $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$

Определение

[Определение по Гейне]

Число a называется пределом функции f в точке x_0, если для любой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к x_0, и члены которой не равны x_0, $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = a$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \forall \{x_n\} : \lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(x_n) = a$$

Теорема

Определения пределов по Коши и по Гейне эквивалентны

Доказательство

[Коши $\Rightarrow$ Гейне]

Известно, что $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$. Возьмем последовательность $\{x_n\}$ такую, что $\forall n \Rightarrow \{x_n\} \subset X \setminus \{a\}$ и $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$. По определению Коши найдется $\delta > 0$ такое, что при нахождении

x в этой δ-окрестности точки x_0 выполняется $|f(x) - a| < \varepsilon$. Но ведь последовательность $x_n \to x_0$, значит начиная с некоторого номера члены этой последовательности также находятся в δ-окрестности, и поэтому для них также выполняется $|f(x) - a| < \varepsilon$

[Гейне $\Rightarrow$ Коши]
Предположим, что определение Коши не выполняется. Тогда выполняется:

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 \Rightarrow 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| \geq \varepsilon$$

При этом выполняется Гейне, то есть:

$$\forall \{x_n\} : \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = a$$

Возьмем $\delta_n = \frac{1}{n}$. Тогда из отрицания Коши выполнено:

$$0 < |x_n - x_0| < \frac{1}{n}$$

Значит $\{x_n\} \to x_0$, но из Гейне известно, что тогда $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = a$, однако из отрицания Коши следует обратное. Противоречие.

16.2 Свойства пределов функций

1. $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$
2. $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$
3. $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$, где $g(x) \neq 0$
4. $\lim\limits_{x\to x_0} (\lambda f(x)) = \lambda \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$

17 ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД В НЕРАВЕНСТВАХ. ТЕОРЕМА О СЖАТОЙ ФУНКЦИИ.

Теорема

Пусть функции f и g определены в некоторой проколотой окрестности точки x_0 и для всех x из этой окрестности выполняется $f(x) \leq g(x)$. Тогда если в точке x_0 существуют пределы этих функций $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$, то $A \leq B$

Доказательство

Пусть $A > B$. Тогда возьмем $\varepsilon = \frac{A-B}{2}$. Взяв достаточно малую δ-окрестность можно утверждать, что $f(x) > A - \varepsilon = \frac{A+B}{2}$, а также $g(x) < B + \varepsilon = \frac{A+B}{2}$ Но отсюда следует, что $f(x) > g(x)$

Теорема

Если функции f, g, h определены в некоторой проколотой окрестности точки x_0, а также выполнено $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, и при этом $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = a$, то $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = a$

Доказательство

Если взять достаточно малую δ-окрестность точки a, то можно утверждать, что $|f(x) - a| < \varepsilon$ и $|h(x) - a| < \varepsilon$. Тогда:

$$a - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < a + \varepsilon$$

Но тогда $g(x)$ также входит в ε-окрестность точки a при достаточно малой δ-окрестности

18 ПРЕДЕЛ СУММЫ, ПРОИЗВЕДЕНИЯ, ЧАСТНОГО ФУНКЦИЙ. ПРЕДЕЛ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ. ПРЕДЕЛ ОБРАТНОЙ ФУНКЦИИ

Теорема

Если функции определены в некоторой проколотой окрестности точки x_0 и имеют конечные пределы в ней, то предел суммы есть сумма пределов

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \pm g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x) = a \pm b$$

Доказательство

$$\forall\varepsilon > 0 \exists\delta_1 : 0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$

$$\forall\varepsilon > 0 \exists\delta_2 : 0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - a| < \varepsilon$$

Возьмем $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тогда обе функции фхудят в заданную ε-окрестность своего предела.

$$|f(x) \pm g(x) - (a \pm b)| \leq |f(x) - a| + |g(x) - b| < (a + b) < 2\varepsilon$$

Теорема

Если функции определены в некоторой проколотой окрестности точки x_0 и имеют конечные пределы в ней, то предел произведения есть произведение пределов

Доказательство

$$|f(x)g(x) - ab| = |f(x)g(x) - bf(x) + bf(x) - ab| =$$

$$= |f(x)(g(x) - b) + b(f(x) - a)| \leq |f(x)||g(x) - b| + |b||f(x) - a|$$

Сходящаяся функция локально ограничена. $\exists M > f(x)$

$$|f(x)||g(x)-b| + |b||f(x)-a| \le M|g(x)-b| + |b||f(x)-a|$$

Начиная с какой-то достаточно малой δ-окрестности выполняется: $|g(x)-b| < \frac{\varepsilon}{2M}$, $|f(x)-a| < \frac{\varepsilon}{2|b|}$

$$M|g(x)-b| + |b||f(x)-a| \le M\frac{\varepsilon}{2M} + |b|\frac{\varepsilon}{2|b|} < \varepsilon$$

Теорема

Если функции определены в некоторой проколотой окрестности точки x_0 и имеют конечные пределы в ней, то предел частного есть частное пределов