

# Математический анализ. Экзамен.

14 января 2026 г.

# СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

<b>1 СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ МНОЖЕСТВА. ПОРОЖДАЮЩАЯ ПРОЦЕДУРА. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ СВОЙСТВО. ....</b>	<b>5</b>
1.1 Способы задания множества .....	5
1.2 Описание способов задания множества.....	5
<b>2 ОТОБРАЖЕНИЯ. ИНЪЕКЦИЯ, СЮРЪЕКЦИЯ, БИЕКЦИЯ. ПРЯМЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ МНОЖЕСТВ .....</b>	<b>6</b>
2.1 Отображения.....	6
2.2 Прямые произведения множеств .....	6
<b>3 КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА. ДЕЙСТВИЯ С КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ И ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФОРМЫ ЗАПИСИ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ.....</b>	<b>7</b>
3.1 Комплексные числа .....	7
3.2 Действия с комплексными числами .....	7
3.3 Тригонометрическая и показательная форма записей .....	7
<b>4 ВОЗВЕДЕНИЕ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА В СТЕПЕНЬ. ИЗВЛЕЧЕНИЕ КОРНЯ ИЗ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА. КОМПЛЕКСНЫЙ ЛОГАРИФМ. ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО АРГУМЕНТА. ....</b>	<b>8</b>
4.1 Возведение комплексного числа в степень и извлечение корня. ....	8
4.2 Комплексный логарифм .....	8
4.3 Функции комплексного аргумента .....	8
<b>5 АКСИОМЫ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ. ПРОСТЕЙШИЕ СЛЕДСТВИЯ ИЗ АКСИОМ. АКСИОМА ПОЛНОТЫ.....</b>	<b>9</b>
5.1 Аксиомы вещественных чисел .....	9
5.2 Простейшие следствия из аксиом .....	10
5.3 Аксиома полноты.....	10

<b>6</b>	<b>ТОЧНАЯ ВЕРХНЯЯ И ТОЧНАЯ НИЖНЯЯ ГРАНИ МНОЖЕСТВА. ЕДИНСТВЕННОСТЬ МИНИМАЛЬНОГО И МАКСИМАЛЬНОГО ЭЛЕМЕНТА ОГРАНИЧЕННОГО НЕПУСТОГО МНОЖЕСТВА. СУЩЕСТВОВАНИЕ ТОЧНОЙ ВЕРХНЕЙ ГРАНИ ОГРАНИЧЕННОГО НЕПУСТОГО МНОЖЕСТВА. ПРИНЦИП ВЛОЖЕННЫХ ОТРЕЗКОВ.....</b>	<b>11</b>
6.1	Супремум и инфимум множества .....	11
6.2	Единственность минимального и максимального элемента ограниченного непустого множества .....	12
6.3	Принцип вложенных отрезков .....	13
<b>7</b>	<b>ИНДУКТИВНОЕ МНОЖЕСТВО. МНОЖЕСТВО НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ. МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ. СУЩЕСТВОВАНИЕ НАИМЕНЬШЕГО ЭЛЕМЕНТА В НЕПУСТОМ ПОДМНОЖЕСТВЕ МНОЖЕСТВА НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ. ПРИНЦИП АРХИМЕДА. ....</b>	<b>15</b>
7.1	Индуктивное множество, множество натуральных чисел...	15
7.2	Метод математической индукции .....	15
7.3	Существование наименьшего элемента в непустом подмножестве множества натуральных чисел .....	16
7.4	Принцип Архимеда .....	17
<b>8</b>	<b>ПЛОТНОСТЬ МНОЖЕСТВА РАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ. СУЩЕСТВОВАНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ. ИРРАЦИОНАЛЬНОСТЬ <math>\sqrt{2}</math>.....</b>	<b>18</b>
8.1	Плотность множества рациональных чисел .....	18
8.2	Существование иррациональных чисел.....	18
8.3	Иррациональность $\sqrt{2}$ .....	19
<b>9</b>	<b>ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. МОНОТОННОСТЬ. ОГРАНИЧЕННОСТЬ. РЕКУРРЕНТНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ...</b>	<b>20</b>
9.1	Последовательности .....	20
9.2	Монотонность .....	20
9.3	Ограниченность .....	21

<b>10 ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ДЕЙСТВИЯ С ПРЕДЕЛАМИ. ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД В НЕРАВЕНСТВАХ. ПРИНЦИП СЖАТОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ.....</b>	<b>22</b>
10.1 Предел последовательности.....	22
10.2 Арифметические действия с пределами .....	22
10.3 Предельный переход в неравенствах .....	23
10.4 Предел сжатой последовательности .....	24
<b>11 ПРЕДЕЛ МОНОТОННОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. ТЕОРЕМА ВЕЙЕРШТРАССА О ПРЕДЕЛЕ МОНОТОННОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ.....</b>	<b>25</b>
<b>12 НЕОГРАНИЧЕННОСТЬ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ <math>x_n = q^n</math>, <math>q &gt; 1</math>, ОЦЕНКА <math>q^{n-1} \leq x &lt; q^n</math>. СХОДИМОСТЬ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ И СУММЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ ПРИ <math> q  &lt; 1</math>. ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ <math>\frac{n}{q^n}</math> .....</b>	<b>26</b>
12.1 Неограниченность $q^n$ .....	26
12.2 Оценка $q^{n-1} < x < q^n$ .....	26
12.3 Геометрическая прогрессия .....	27
<b>13 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧИСЛА <math>e</math>. СВОЙСТВА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ, СВЯЗАННЫХ С ЧИСЛОМ <math>e</math>. .....</b>	<b>29</b>
<b>14 ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. КРИТЕРИЙ КОШИ СХОДИМОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. ....</b>	<b>31</b>
<b>15 ПОДПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. ТЕОРЕМА БОЛЬЦАНО-КОШИ О СУЩЕСТВОВАНИИ СХОДЯЩЕЙСЯ ПОДПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. ЧАСТИЧНЫЕ ПРЕДЕЛЫ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ. НИЖНИЙ И ВЕРХНИЙ ПРЕДЕЛЫ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. ТЕОРЕМА О НИЖНЕМ И ВЕРХНЕМ ПРЕДЕЛЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. ....</b>	<b>33</b>

15.1	Подпоследовательности .....	33
15.2	Частичные пределы .....	34
<b>16</b>	<b>ОПРЕДЕЛЕНИЕ И СВОЙСТВА ПРЕДЕЛА ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ ПО КОШИ И ПО ГЕЙНЕ. РАВНОСИЛЬНОСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЙ.....</b>	<b>36</b>
16.1	Определения. Равносильность определений .....	36
16.2	Свойства пределов функций .....	37
<b>17</b>	<b>ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД В НЕРАВЕНСТВАХ. ТЕОРЕМА О СЖАТОЙ ФУНКЦИИ. ....</b>	<b>38</b>
<b>18</b>	<b>ПРЕДЕЛ СУММЫ, ПРОИЗВЕДЕНИЯ, ЧАСТНОГО ФУНКЦИЙ. ПРЕДЕЛ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ. ПРЕДЕЛ ОБРАТНОЙ ФУНКЦИИ .....</b>	<b>39</b>
18.1	Алгебраические действия с пределами .....	39
18.2	Предел сложной функции .....	40
18.3	Предел обратной функции .....	41
<b>19</b>	<b>ПОНЯТИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ. ПРИМЕРЫ РАСКРЫТИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ РАЗНОГО ТИПА.....</b>	<b>42</b>
<b>20</b>	<b>ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ, РАВНЫЙ БЕСКОНЕЧНОСТИ. ТЕОРЕМЫ О ПРЕДЕЛАХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ И ЧАСТНЫХ, СОДЕРЖАЩИХ БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИЕ, БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ, ОГРАНИЧЕННЫЕ ФУНКЦИИ. ....</b>	<b>43</b>

# 1 СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ МНОЖЕСТВА. ПОРОЖДАЮЩАЯ ПРОЦЕДУРА. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ СВОЙСТВО.

## 1.1 Способы задания множества

1. Перечисление  $\{a, b, c, \dots\}$
2. Характеристическое свойство  $M \stackrel{\text{def}}{=} \{x : P(x)\}$ , где  $P(x)$  – предикат
3. Порождающая процедура  $M := \{y : y = f(x), x \in E\}$ , где  $f$  – функция от  $x$

## 1.2 Описание способов задания множества

### Определение

**Характеристическое свойство** – способ задания множества, при котором каждый его элемент обладает свойством  $P(x)$

$$M \stackrel{\text{def}}{=} \{x : P(x)\}$$

### Определение

**Порождающая процедура** – способ задания множества, при котором каждый его элемент является результатом выполнения функции  $f$  от переменной  $x$  из некоторого множества  $E$ .

$$M := \{y : y = f(x), x \in E\}$$

## 2 ОТОБРАЖЕНИЯ. ИНЪЕКЦИЯ, СЮРЪЕКЦИЯ, БИЕКЦИЯ. ПРЯМЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ МНОЖЕСТВ

### 2.1 Отображения

#### Определение

Отображение – способ сопоставления элементов между множествами.

Отображения бывают трех видов:

1. Инъекция
2. Сюръекция
3. Биекция

#### Определение

**Инъекция** – такое отображение  $f(A) \rightarrow B$ , при котором любой элемент  $B$  имеет **не более одного** прообраза в множестве  $A$ .

#### Определение

**Сюръекция** – такое отображение  $f(A) \rightarrow B$ , при котором любой элемент  $B$  имеет **не менее одного** прообраза в множестве  $A$ .

#### Определение

**Биекция** – это отображение, являющееся и сюръекцией, и инъекцией одновременно. То есть взаимнооднозначное соответствие.

### 2.2 Прямые произведения множеств

#### Определение

**Прямое (декартово) произведение множеств  $A$  и  $B$**  – все такие пары чисел  $(a, b)$ , где  $a \in A, b \in B$ .

$$A \times B \stackrel{\text{def}}{=} \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

### 3 КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА. ДЕЙСТВИЯ С КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ И ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФОРМЫ ЗАПИСИ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

#### 3.1 Комплексные числа

Рассмотрим такое число  $i$ , что  $i^2 = -1$ . Тогда можно представить следующий вид числа:  $z = a + bi$ , где  $a, b \in \mathbb{R}$

##### Определение

**Комплексное число** – такая пара чисел  $(a, b)$ , что  $a, b \in \mathbb{R}$

#### 3.2 Действия с комплексными числами

1. Сложение поэлементно  $z_1 + z_2 = (a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$
2. Умножение  $z_1 z_2 = (a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)$
3. Равенство  $z_1 = z_2 \stackrel{\text{def}}{=} (a_1 = a_2) \wedge (b_1 = b_2)$
4. Обратное

$$\exists(x, y) : (x, y)(a_2, b_2) = (a_1, b_1) \Leftrightarrow \begin{cases} xa_2 - yb_2 = a_1 \\ xb_2 + ya_2 = b_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} \\ y = \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} \end{cases}$$

5. Модуль числа  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
6. Деление  $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \tilde{z}_2}{|z_2|^2}$
7. Аргумент числа  $\phi = \arg(z) = \arctan(\frac{b}{a})$

#### 3.3 Тригонометрическая и показательная форма записей

1. Тригонометрическая запись  $z = r(\cos(\phi) + i\sin(\phi))$
2. Показательная форма  $z = e^{i\phi}$

## 4 ВОЗВЕДЕНИЕ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА В СТЕПЕНЬ. ИЗВЛЕЧЕНИЕ КОРНЯ ИЗ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА. КОМПЛЕКСНЫЙ ЛОГАРИФМ. ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО АРГУМЕНТА.

### 4.1 Возведение комплексного числа в степень и извлечение корня.

1. Комплексное число  $z = r(\cos(\phi) + i \sin(\phi))$  Возводится в n-ую степень согласно формуле Муавра  $z^n = r^n(\cos(n\phi) + i \sin(n\phi))$
2. Извлечения корня  $\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}(\cos(\frac{\phi+2\pi k}{n}) + i \sin(\frac{\phi+2\pi k}{n})), k = 0, 1, \dots, n-1$

### 4.2 Комплексный логарифм

Решим уравнение  $e^\omega = c, c \in \mathbb{C}, \omega = a + ib \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \operatorname{Ln}(c) = \ln(e^a \cdot e^{ib}) = \ln(|z|) + \ln(e^{i \arg(\omega)}) = \ln(|z|) + i(\phi + 2\pi k)$$

Тогда  $\operatorname{Ln}(z) = \ln(|z|) + i(\phi + 2\pi k)$

Важно заметить, что комплексный логарифм является многозначной функцией.

### 4.3 Функции комплексного аргумента

## 5 АКСИОМЫ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ. ПРОСТЕЙШИЕ СЛЕДСТВИЯ ИЗ АКСИОМ. АКСИОМА ПОЛНОТЫ.

### 5.1 Аксиомы вещественных чисел

#### Определение

**Множество действительных чисел**  $\mathbb{R}$  – это множество, на котором заданы операции сложения, умножения и сравнения, удовлетворяющие следующим аксиомам.

#### 1. Группа I

- (a)  $a + b = b + a$
- (b)  $a + (b + c) = (a + b) + c$
- (c)  $\exists 0 : \forall a \in \mathbb{R} \Rightarrow a + 0 = a$
- (d)  $\forall a \exists \tilde{a} : a + \tilde{a} = 0$

#### 2. Группа II

- (a)  $ab = ba$
- (b)  $(ab)c = a(bc)$
- (c)  $\exists 1 : \forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow 1 \cdot a = a$
- (d)  $\forall a \in \mathbb{R} \exists a^{-1} : aa^{-1} = 1$

#### 3. Группа III

- (a)  $a(b + c) = ab + ac$  – дистрибутивность

#### 4. Группа IV

- (a)  $\forall a, b \in \mathbb{R} : (a \leq b) \vee (b \leq a)$

#### 5. Группа V

- (a)  $a \leq a, a \geq a$
- (b)

$$\begin{cases} a \leq b \\ b \leq c \end{cases} \Rightarrow a \leq c$$

- (c)  $(a \leq b) \vee (b \leq a)$
- (d)  $0 \leq 1$

(e)

$$\begin{cases} a \leq b \\ b \leq a \end{cases} \Rightarrow a = b$$

## 6. Группа VI

(a)  $a \leq b \Rightarrow \forall c : a + c \leq b + c$

(b)

$$\begin{cases} a \leq b \\ c \leq d \end{cases} \Rightarrow a + c \leq b + d$$

(c)  $a \leq b, c > 0 \Rightarrow ac \leq bc$

(d)

$$\begin{cases} 0 \leq a \leq b \\ 0 \leq c \leq d \end{cases} \Rightarrow 0 \leq ac \leq bd$$

## 7. Аксиома полноты

$$\begin{aligned} & ((\forall x \in X) \wedge (\forall y \in Y) : x \leq y) \Rightarrow \\ & \Rightarrow (\exists c \in \mathbb{R} : (\forall x \in X) \wedge (\forall y \in Y) : x \leq c \leq y) \end{aligned}$$

### 5.2 Простейшие следствия из аксиом

1. **Единственность нуля:** Если  $a + x = a$  для некоторого  $a \in \mathbb{R}$ , то  $x = 0$ .
2. **Единственность противоположного:** Для любого  $a \in \mathbb{R}$  существует единственный  $-a$  такой, что  $a + (-a) = 0$ .
3. **Расположение чисел относительно друг друга:** Для любых  $x, y \in \mathbb{R}$  верно ровно одно из трех утверждений:  $x < y$ ,  $x > y$ ,  $x = y$

### 5.3 Аксиома полноты

Аксиома полноты говорит о том, что для любых двух различных чисел из множества  $\mathbb{R}$  найдется третье, находящееся между ними.

**6 ТОЧНАЯ ВЕРХНЯЯ И ТОЧНАЯ НИЖНЯЯ ГРАНИ МНОЖЕСТВА. ЕДИНСТВЕННОСТЬ МИНИМАЛЬНОГО И МАКСИМАЛЬНОГО ЭЛЕМЕНТА ОГРАНИЧЕННОГО НЕПУСТОГО МНОЖЕСТВА. СУЩЕСТВОВАНИЕ ТОЧНОЙ ВЕРХНЕЙ ГРАНИ ОГРАНИЧЕННОГО НЕПУСТОГО МНОЖЕСТВА. ПРИНЦИП ВЛОЖЕННЫХ ОТРЕЗКОВ.**

**6.1 Супремум и инфимум множества**

**Определение**

**Точная верхняя грань (супремум)** множества  $M$  – такое число  $s = \sup M$ , которое удовлетворяет условиям:

1.  $\forall x \in M \Rightarrow x \leq s$
2.  $\forall \varepsilon > 0 \exists x' \in M : x' > s - \varepsilon$

**Определение**

**Точная нижняя грань (инфимум)** множества  $M$  – такое число  $i = \inf M$ , которое удовлетворяет условиям:

1.  $\forall x \in M \Rightarrow x \geq s$
2.  $\forall \varepsilon > 0 \exists x' \in M : x' < i + \varepsilon$

## 6.2 Единственность минимального и максимального элемента ограниченного непустого множества

### Теорема

Любое ограниченное сверху подмножество множества  $\mathbb{R}$  имеет единственную точную верхнюю грань.

### Доказательство

#### [Существование]

Рассмотрим два множества:  $X$  – исходное множество,  $Y$  – множество всех верхних граней множества  $X$ .  $X$  ограничено сверху числом  $y$ , если  $\forall x \in X \Rightarrow x \leq y$ . По аксиоме полноты  $\exists c : \forall x \in X, \forall y \in Y \Rightarrow x \leq c \leq y$ . Проверим, что  $c = \sup X$ .  $\forall x \in X \Rightarrow x \leq c$ .

Пусть  $\varepsilon > 0$ , рассмотрим  $c - \varepsilon$ . Если  $c$  – неточная верхняя грань, то не найдется ни одного  $x' \in X$  такого, что  $x' > c - \varepsilon$ , а значит  $\forall x \in X \Rightarrow x \leq c - \varepsilon$ , а значит  $c - \varepsilon$  можно выбрать как новую верхнюю грань.

#### [Единственность]

Пусть есть  $c_1$  и  $c_2$ ,  $c_2 > c_1$ . Возьмем  $\varepsilon = \frac{c_2 - c_1}{2}$ .  $\exists x' : x' > c_2 - \frac{c_2 - c_1}{2} > c_1$ . Тогда  $c_1$  – не граница  $X$ ,  $c_1 \notin Y$ .

### Определение

**Минимальный элемент множества  $M$**  – такой элемент  $a \in M$ , что выполняется  $\forall m \in M \Rightarrow a \leq m$

### Определение

**Максимальный элемент множества  $M$**  – такой элемент  $a \in M$ , что выполняется  $\forall m \in M \Rightarrow a \geq m$

### Теорема

Если в множестве  $A$  существует минимальный (максимальный) элемент, то он единственный.

### Доказательство

Пусть  $m_1, m_2$  – два минимальных элемента множества  $A$ .

1. Так как  $m_1$  – минимальный элемент множества  $A$ , то выполняется  $\forall x \in A \Rightarrow m_1 \leq x$ , в том числе это выполнено и для  $x = m_2$ , ведь  $m_2 \in A$ . Значит  $m_1 \leq m_2$ .
2. Так как  $m_2$  – минимальный элемент множества  $A$ , то выполняется  $\forall x \in A \Rightarrow m_2 \leq x$ , в том числе это выполнено и для  $x = m_1$ , ведь  $m_1 \in A$ . Значит  $m_2 \leq m_1$ .

3.

$$\begin{cases} m_1 \leq m_2 \\ m_2 \leq m_1 \end{cases} \Leftrightarrow m_1 = m_2$$

## 6.3 Принцип вложенных отрезков

### Определение

**Система вложенных отрезков** – это последовательность числовых отрезков, где каждый последующий отрезок содержится в предыдущем.

### Теорема

Пусть существует такая последовательность отрезков  $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_n, b_n] \subset [a_{n+1}, b_{n+1}]$ , таких, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$ . Тогда существует единственная точка  $c$ , принадлежащая всем отрезкам системы, причем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = c.$$

## Доказательство

### [Существование]

Пусть  $X = \{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ ,  $Y = \{b_i\}_{i=1}^{\infty}$ .  $X$  и  $Y$  непустые,  $\forall i, j : a_i < b_j$ . Пусть  $i < j$ . Тогда  $a_i \leq a_j < b_i$ ,  $a_j < b_j < b_i$ .  $a_i < b_j$ ,  $a_j < b_i$ .

По аксиоме  $\exists c : \forall k \Rightarrow c \in [a_k; b_k]$

### [Единственность]

Пусть имеется другая точка  $c'$ , которая, как и  $c$ , принадлежит каждому отрезку системы. Тогда  $\forall n \Rightarrow |c' - c| \leq b_n - a_n$ , но если  $c$  и  $c'$  не совпадают, то расстояние между ними ненулевое, а значит  $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) \neq 0$ , противоречие условию.

## 7 ИНДУКТИВНОЕ МНОЖЕСТВО. МНОЖЕСТВО НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ. МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ. СУЩЕСТВОВАНИЕ НАИМЕНЬШЕГО ЭЛЕМЕНТА В НЕПУСТОМ ПОДМНОЖЕСТВЕ МНОЖЕСТВА НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ. ПРИНЦИП АРХИМЕДА.

### 7.1 Индуктивное множество, множество натуральных чисел

#### Определение

**Индуктивное множество**  $X$  – множество, удовлетворяющее следующим условиям:

1.  $1 \in X$
2.  $x \in X \Rightarrow x + 1 \in X$

#### Определение

**Множество натуральных чисел**  $\mathbb{N}$  – наименьшее индуктивное множество.

$$\mathbb{N} = \bigcap_{i=1}^{\infty} X_i$$

где  $X_i$  – индуктивное множество

### 7.2 Метод математической индукции

#### Определение

**Метод математической индукции** гласит, что если  $A(n)$  верно, и из этого следует, что  $A(n + 1)$  тоже верно, а также верно  $A(1)$ , то  $A(x)$  верно на  $\mathbb{N}$ .

### 7.3 Существование наименьшего элемента в непустом подмножестве множества натуральных чисел

#### Теорема

Любое ограниченное снизу непустое подмножество  $X$  множества  $\mathbb{N}$  имеет минимальный элемент.

#### Доказательство

[Случай 1]

Если  $1 \in X$ , то  $X$  автоматически имеет наименьший элемент, поскольку  $1 = \min \mathbb{N}$

[Случай 2]

Пусть  $1 \notin X$ . Тогда рассмотрим такое множество  $B$ , которое состоит из всех элементов множества  $\mathbb{N}$ , которые меньше элементов  $A$ :

$$B = \{n \in \mathbb{N} : \forall k \leq n \Rightarrow k \notin A\}$$

Докажем по индукции, что если  $A$  не имеет минимального элемента, то  $B = \mathbb{N}$ , а это противоречие с непустым  $A$ .

**База индукции:**  $1 \in B$

**Индукционное предположение:**  $n \in B$

**Индукционный переход:**  $n + 1 \in B$

Если бы  $n + 1 \in A$ , то  $\min A = n + 1$  (поскольку мы взяли все такие элементы  $n \in \mathbb{N}$ , для которых выполняется  $\forall k \leq n \Rightarrow k \notin A$ , то есть все те числа, до которых нет чисел в  $A$ ), но мы предположили, что минимального элемента нет. Поэтому  $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow n \in B \Rightarrow A = \emptyset$

## 7.4 Принцип Архимеда

### Теорема

Пусть задано  $h > 0$ .  $\forall x \exists n : (n - 1)h \leq x < nh$

### Доказательство

Рассмотрим  $\frac{x}{h}$ . Найдется  $n \in \mathbb{N}$  такое, что  $n > \frac{x}{h}$ , поскольку  $\mathbb{N}$  неограничено сверху, найдем минимальный такой элемент.

$$\begin{aligned} n - 1 &\leq \frac{x}{h} < n \\ (n - 1)h &\leq x < nh \end{aligned}$$

## 8 ПЛОТНОСТЬ МНОЖЕСТВА РАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ. СУЩЕСТВОВАНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ. ИРРАЦИОНАЛЬНОСТЬ $\sqrt{2}$

### Определение

Множество  $A$  называется **всюду плотным** на числовой прямой  $\mathbb{R}$ , если между любыми двумя числами из  $\mathbb{R}$  найдется число из  $A$ .

### 8.1 Плотность множества рациональных чисел

#### Теорема

Множество рациональных чисел  $\mathbb{Q}$  всюду плотно на множестве действительных чисел  $\mathbb{R}$ .

#### Доказательство

Возьмем два числа  $a, b \in \mathbb{R}$ . Пусть  $a > b$ . Воспользуемся принципом Архимеда и получим, что для любого положительного числа  $a - b$  найдется натуральное  $n$  такое, что  $\frac{1}{n} < a - b$ .

Рассмотрим числа вида  $\frac{m}{n}$ . Расстояние между соседними такими числами равно  $\frac{1}{n}$ , что меньше интервала  $(a, b)$ , а значит хотя бы одно такое число войдет в этот интервал.

### 8.2 Существование иррациональных чисел

Первое число, иррациональность которого была доказана, —  $\sqrt{2}$ . Существование такого числа геометрически очевидно: это диагональ единичного квадрата. Однако можно доказать, что такое число невозможно представить в виде соотношения целых чисел.

### 8.3 Иррациональность $\sqrt{2}$

#### Теорема

$\sqrt{2}$  – иррациональное число, то есть непредставимое в виде  $\frac{m}{n}$ , где  $m, n \in \mathbb{Z}$ , а также  $\frac{m}{n}$  – несократимая дробь.

#### Доказательство

Пойдем от обратного. Пусть  $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n} \Leftrightarrow 2 = \frac{m^2}{n^2} \Leftrightarrow m^2 = 2n^2$$

Но тогда  $m^2 \equiv 0 \pmod{2} \Leftrightarrow m \equiv 0 \pmod{2} \Leftrightarrow m = 2k$ .  $4k^2 = 2n^2$ .  
Но отсюда видно, что  $m$  и  $n$  имеют общий делитель, что противоречит изначальному условию.

## 9 ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. МОНОТОННОСТЬ. ОГРАНИЧЕННОСТЬ. РЕКУРРЕНТНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

### 9.1 Последовательности

#### Определение

**Последовательность** – это упорядоченный набор из элементов некоторого множества  $A$ .

$$\{a_n\} \stackrel{\text{def}}{=} \{a_i : \forall i \Rightarrow a_i \in A\}$$

Способы задания последовательности:

1. Формула  $n$ -го члена  $a_n = f(n)$
2. Рекуррентный  $a_{n+1} = f(a_n)$
3. Описание  $x_n$  -  $n$ -я цифра десятичной записи числа  $\pi$

### 9.2 Монотонность

#### Определение

Последовательность  $\{x_n\}$  называется **строго возрастающей**, если  $\forall n \Rightarrow x_{n+1} > x_n$

#### Определение

Последовательность  $\{x_n\}$  называется **неубывающей (нестрого возрастающей)**, если  $\forall n \Rightarrow x_{n+1} \geq x_n$

#### Определение

Последовательность  $\{x_n\}$  называется **строго убывающей**, если  $\forall n \Rightarrow x_{n+1} < x_n$

### Определение

Последовательность  $\{x_n\}$  называется **невозрастающей** (нестрого убывающей), если  $\forall n \Rightarrow x_{n+1} \leq x_n$

## 9.3 Ограниченность

### Определение

Последовательность называется **ограниченной**, если  $\exists M > 0 : \forall x_n : |x_n| < M$

Примеры ограниченных последовательностей:

1.  $x_n = (-1)^n$
2.  $x_n = \sin n$
3.  $x_n = \frac{1}{n^2}$

Примеры неограниченных последовательностей:

1.  $x_n = n^2$
2.  $x_n = (-1)^n n^2$

## 10 ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ДЕЙСТВИЯ С ПРЕДЕЛАМИ. ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД В НЕРАВЕНСТВАХ. ПРИНЦИП СЖАТОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ.

### 10.1 Предел последовательности

#### Определение

Число  $a$  называется пределом последовательности  $\{a_n\}$ , если  $\forall \varepsilon > 0$  найдется номер, начиная с которого все члены последовательности входят в  $\varepsilon$ -окрестность  $a$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$$

### 10.2 Арифметические действия с пределами

#### Теорема

Если последовательности  $\{a_n\}$  и  $\{b_n\}$  имеют конечные пределы, то сумма этих последовательностей также имеет конечный предел.

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \\ \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \end{cases} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$$

#### Доказательство

Пусть задано  $\varepsilon > 0$ . Докажем по определению, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$ .

$$|(a_n - a) + (b_n - b)| < \varepsilon$$

$$|(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b|$$

Возьмем  $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}$ . Тогда  $\exists N_1 : \forall n > N_1 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon_1$

Возьмем  $\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2}$ . Тогда  $\exists N_2 : \forall n > N_2 \Rightarrow |b_n - b| < \varepsilon_2$

Тогда при  $n = \max(N_1, N_2)$   $|a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \boxed{a + b}$

### Теорема

Если последовательности  $\{a_n\}$  и  $\{b_n\}$  имеют конечные пределы, то произведение этих последовательностей также имеет конечный предел.

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \\ \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \end{cases} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = ab$$

### Теорема

Если последовательности  $\{a_n\}$  и  $\{b_n\}$  имеют конечные пределы  $a$  и  $b$  и также  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$  и  $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow b_n \neq 0$ , то отношение этих последовательностей также имеет конечный предел.

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \\ \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \end{cases} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$$

## 10.3 Предельный переход в неравенствах

### Теорема

Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ , и начиная с какого-то номера  $a_n \leq b_n$ , то  $a \leq b$

### Доказательство

$$\begin{aligned} a_n \leq b_n &\Leftrightarrow b_n - a_n \geq 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} b_n - \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \geq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n} \end{aligned}$$

## 10.4 Предел сжатой последовательности

### Теорема

Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = c$ , и, начиная с некоторого номера, справедливо неравенство  $a_n \leq x_n \leq b_n$ . Тогда  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$

### Доказательство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N_1 : \forall n > N_1 \Rightarrow |a_n - c| < \varepsilon$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = c \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N_2 : \forall n > N_2 \Rightarrow |b_n - c| < \varepsilon$$

Тогда при  $N = \max(N_1, N_2)$  выполняются оба неравенства.

Рассмотрим  $a_n \leq x_n \leq b_n$  при выбранном  $N$ .

$$c - \varepsilon \leq x_n \leq c + \varepsilon$$

Значит  $x_n$  входит в  $\varepsilon$ -окрестность точки  $c$  начиная с некоторого  $N$ , а значит  $c$  также является ее пределом.

## 11 ПРЕДЕЛ МОНОТОННОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. ТЕОРЕМА ВЕЙЕРШТРАССА О ПРЕДЕЛЕ МОНОТОННОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

### Теорема

[Теорема Вейерштрасса]

Всякая монотонно возрастающая (убывающая) и ограниченная сверху (снизу) последовательность имеет конечный предел

### Доказательство

Докажем теорему для неубывающей последовательности. Для остальных доказывается аналогично.

Поскольку последовательность неубывающая, то  $\forall n \Rightarrow x_n \leq x_{n+1}$ . Поскольку еще и она ограничена, то  $\exists a = \sup\{x_n\}$ . Это значит, что  $\forall n \Rightarrow x_n \leq a$ . Так как  $a$  – супремум, то  $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) : x_N > a - \varepsilon$ . Последовательность неубывающая, а значит при  $n > N : x_n \geq x_N > a - \varepsilon$ . Значит  $a - \varepsilon < x_n \leq a$ , откуда следует, что  $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \Leftrightarrow |x_n - a| < \varepsilon$  при  $n > N$ . Значит последовательность имеет предел.

## 12 НЕОГРАНИЧЕННОСТЬ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ $x_n = q^n$ , $q > 1$ , ОЦЕНКА $q^{n-1} \leq x < q^n$ . СХОДИМОСТЬ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ И СУММЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ ПРИ $|q| < 1$ . ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ $\frac{n}{q^n}$

### 12.1 Неограниченность $q^n$

#### Теорема

Последовательность  $q^n$ , где  $q > 1$ , неограничена

#### Доказательство

Предположим, что это не так. Тогда  $\exists \sup\{q^n\} = s$ .  $\forall n \Rightarrow q^n \leq s$ , то есть у этой последовательности есть предел по теореме Вейерштрасса. Тогда начиная с некоторого  $N$  будет выполняться  $|s - q^N| < \varepsilon$ .  $\frac{s}{q} < s \Rightarrow \exists q^n : \frac{s}{q} < q^n \leq s \Leftrightarrow s < q^{n+1} \leq sq$ , но тогда  $s$  – не супремум, ведь мы получили, что  $s < q^{n+1}$ . Противоречие.

### 12.2 Оценка $q^{n-1} < x < q^n$

#### Теорема

Для любого  $x > 0$  и  $q > 1$  существует единственное целое число  $n \in \mathbb{Z}$  такое, что  $q^{n-1} \leq x < q^n$

#### Доказательство

Рассмотрим множество  $A = \{k \in \mathbb{Z} : q^k \leq x\}$ . Оно непусто, поскольку  $k \rightarrow -\infty \Leftrightarrow q^k \rightarrow 0$ . Это множество ограничено сверху, поскольку  $\forall x > 0 \exists k : q^k > x$ . Значит  $\exists n = \max A$ . По построению  $q^n \leq x$ , но также по построению  $q^{n+1} > x$ . Таким образом  $q^n \leq x < q^{n+1}$ . Заменяя  $n$  на  $n - 1$  получим  $q^{n-1} \leq x < q^n$ .

## 12.3 Геометрическая прогрессия

### Теорема

Если  $|q| < 1$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$

### Доказательство

$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \frac{1}{q^N} > \frac{1}{\varepsilon}$  (теорема выше)  $\Rightarrow q^N < \varepsilon$ . Значит,  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$

### Теорема

Если  $|q| < 1$ , то геометрическая прогрессия  $\lim_{n \rightarrow \infty} aq^n$  стремится к 0

### Доказательство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} aq^n = a \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$$

### Теорема

[Сумма геометрической прогрессии]

При  $b_1 = 1, |q| < 1$ :

$$S_n = \frac{1}{1 - q}$$

### Доказательство

$$\begin{aligned} S_n &= b_1 + b_2 + \dots + b_n = b_1 + q(b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1}) = \\ &= b_1 + q(S_n - b_n) = b_1 + qS_n + qb_n \end{aligned}$$

$$S_n(1 - q) = b_1 - qb_n$$

$$S_n = \frac{b_1 - qb_n}{1 - q}$$

При  $b_1 = 1$  и  $|q| < 1$ :  $\boxed{S_n = \frac{1}{1 - q}}$

### Теорема

Если  $|q| > 1$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{q^n} = 0$

### Доказательство

$\exists n > N : x_{n+1} < x_n \Rightarrow$  последовательность убывает, при этом неотрицательна. Тогда  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{q^n} = a$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{q}$$

$$x_{n+1} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{q} x_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = 1 \cdot \frac{1}{q} a$$

$$a = \frac{a}{q}$$

$$a = 0$$

### 13 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧИСЛА $e$ . СВОЙСТВА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ, СВЯЗАННЫХ С ЧИСЛОМ $e$ .

#### Определение

**Число  $e$**  определяется как предел последовательности  $(1 + \frac{1}{n})^n$

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

#### Теорема

Предел последовательности  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$  существует

#### Доказательство

Докажем по теореме Вейерштрасса

[Монотонность]

$$\begin{aligned} \frac{x_{n+1}}{x_n} &= \frac{(1 + \frac{1}{n+1})^{n+1}}{(1 + \frac{1}{n})^n} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \left(\frac{1 + \frac{1}{n+1}}{1 + \frac{1}{n}}\right)^n = \\ &= \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \left(\frac{n^2 + 2n}{(n+1)^2}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n \geq \end{aligned}$$

Воспользуемся неравенством Бернулли  $(1 + a)^n \geq 1 + an$  при  $a \geq -1$ :

$$\begin{aligned} &\geq \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{n}{(n+1)^2}\right) = \left(\frac{n+2}{n+1}\right) \left(\frac{n^2 + n + 1}{(n+1)^2}\right) = \\ &= \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 2}{n^3 + 3n^2 + 3n + 1} > 1 \end{aligned}$$

Последовательность возрастает

[Ограниченность]

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!n^k} =$$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{n^k k!} \leq$$

Поскольку  $\frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{n^k} < 1$ , то:

$$\leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots < 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} < 3$$

Связанные последовательности:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = e^x$

## 14 ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. КРИТЕРИЙ КОШИ СХОДИМОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ.

### Определение

Последовательность  $\{x_n\}$  называется **фундаментальной**, если:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall m > N, n > N \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon$$

### Теорема

[Критерий сходимости Коши]

Последовательность имеет предел тогда и только тогда, когда она фундаментальна

### Доказательство

[Имеет предел  $\Rightarrow$  фундаментальна]

Пусть  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ . Докажем, что последовательность фундаментальна.

Пусть задано  $\varepsilon$ . Возьмем  $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}$

$$\exists N_1 : \forall n > N_1 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon_1$$

$$\exists N_2 : \forall m > N_2 \Rightarrow |x_m - a| < \varepsilon_1$$

$$|x_n - x_m| = |(x_n - a) - (x_m - a)| \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_1 < \varepsilon$$

[Фундаментальна  $\Rightarrow$  имеет предел]

Зафиксируем  $m > N(\varepsilon)$ . Тогда все члены следующие члену  $x_m$  последовательности лежат в этой  $\varepsilon$ -окрестности члена  $x_m$ . Значит последовательность ограничена, а тогда из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность  $x_{n_k} \rightarrow a$ . Докажем, что это и будет предел последовательности.

Все члены подпоследовательности  $\{x_{n_k}\}$  начиная с некоторого номера  $m$  лежат в  $\varepsilon$ -окрестности точки  $a$ , но при этом сами лежат в  $\varepsilon$ -окрестности точки  $x_m$ . Значит  $|a - x_n| < 2\varepsilon$

## 15 ПОДПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. ТЕОРЕМА БОЛЬЦАНО-КОШИ О СУЩЕСТВОВАНИИ СХОДЯЩЕЙСЯ ПОДПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. ЧАСТИЧНЫЕ ПРЕДЕЛЫ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ. НИЖНИЙ И ВЕРХНИЙ ПРЕДЕЛЫ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. ТЕОРЕМА О НИЖНЕМ И ВЕРХНЕМ ПРЕДЕЛЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ.

### 15.1 Подпоследовательности

#### Определение

Пусть задана последовательность  $\{x_n\}$ , также пусть  $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ . Тогда последовательность  $\{x_{n_k}\}$  называется **подпоследовательностью** последовательности  $\{x_n\}$ .

#### Теорема

[Теорема Больцано-Коши]

Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность

#### Доказательство

Пусть  $\{x_n\}$  ограничена, то есть  $\exists[a_1, b_1] : \forall n \Rightarrow x_n \in [a_1, b_1]$ . Поделим отрезок пополам. Тогда хотя бы одна половина содержит бесконечное множество членов, выберем ее и снова поделим пополам. Снова хотя бы одна половина содержит бесконечное множество членов и т.д.

Получаем систему вложенных отрезков  $b_k - a_k \rightarrow 0$ , при этом у них существует единственная общая точка.

Тогда выберем подпоследовательность так, чтобы каждый ее член лежал в разных отрезках. Получим последовательность, сходящуюся к общей точке всех отрезков.

## 15.2 Частичные пределы

### Определение

Число  $a$  называется **частичным** пределом последовательности  $\{x_n\}$ , если существует такая подпоследовательность  $\{x_{n_k}\}$ , что  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$

### Определение

**Верхним** пределом последовательности называется наибольший из ее частичных пределов

### Определение

**Нижним** пределом последовательности называется наименьший из ее частичных пределов

### Теорема

Последовательность имеет предел тогда и только тогда, когда все ее частичные пределы конечны и совпадают

### Доказательство

[Предел существует  $\Rightarrow$  все частичные пределы конечны и совпадают]

Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} \{x_n\} = a$ . Но тогда любая ее подпоследовательность сходится к  $a$ , ведь начиная с некоторого номера все члены последовательности входят в  $\varepsilon$ -окрестность точки  $a$

[Частичные пределы конечны и совпадают  $\Rightarrow$  существует предел]

[Случай 1: последовательность ограничена]

Если последовательность  $\{x_n\}$  ограничена, то из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность  $\{x_{n_k}\}$ . Пусть  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$ . Но известно, что все частичные пределы совпадают, но если предположить,

что  $a$  не является пределом, то  $\exists \{x_{n_{k_m}}\} : |x_{n_{k_m}} - a| \geq \varepsilon$ , что противоречит единственности частичного предела.

[Случай 2: последовательность неограничена]

Тогда из такой последовательности можно выделить неограниченную подпоследовательность, то есть ее предел равен бесконечности. То есть тогда все частичные пределы равны бесконечности, а это противоречит условию.

## 16 ОПРЕДЕЛЕНИЕ И СВОЙСТВА ПРЕДЕЛА ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ ПО КОШИ И ПО ГЕЙНЕ. РАВНОСИЛЬНОСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЙ.

### 16.1 Определения. Равносильность определений

#### Определение

[Определение по Коши]

Число  $a$  называется **пределом** функции  $f$  в точке  $x_0$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$  такая, что если  $|x - x_0| < \delta$ , то выполняется  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$

#### Определение

[Определение по Гейне]

Число  $a$  называется пределом функции  $f$  в точке  $x_0$ , если для любой последовательности  $\{x_n\}$ , сходящейся к  $x_0$ , и члены которой не равны  $x_0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \forall \{x_n\} : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a$$

#### Теорема

Определения пределов по Коши и по Гейне эквивалентны

#### Доказательство

[Коши  $\Rightarrow$  Гейне]

Известно, что  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$ . Возьмем последовательность  $\{x_n\}$  такую, что  $\forall n \Rightarrow \{x_n\} \subset X \setminus \{a\}$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ . По определению Коши найдется  $\delta > 0$  такое, что при нахождении

$x$  в этой  $\delta$ -окрестности точки  $x_0$  выполняется  $|f(x) - a| < \varepsilon$ . Но ведь последовательность  $x_n \rightarrow x_0$ , значит начиная с некоторого номера члены этой последовательности также находятся в  $\delta$ -окрестности, и поэтому для них также выполняется  $|f(x) - a| < \varepsilon$

[Гейне  $\Rightarrow$  Коши]

Предположим, что определение Коши не выполняется. Тогда выполняется:

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 \Rightarrow 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| \geq \varepsilon$$

При этом выполняется Гейне, то есть:

$$\forall \{x_n\} : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a$$

Возьмем  $\delta_n = \frac{1}{n}$ . Тогда из отрицания Коши выполнено:

$$0 < |x_n - x_0| < \frac{1}{n}$$

Значит  $\{x_n\} \rightarrow x_0$ , но из Гейне известно, что тогда  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a$ , однако из отрицания Коши следует обратное. Противоречие.

## 16.2 Свойства пределов функций

1.  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$
2.  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$
3.  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$ , где  $g(x) \neq 0$
4.  $\lim_{x \rightarrow x_0} (\lambda f(x)) = \lambda \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

## 17 ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД В НЕРАВЕНСТВАХ. ТЕОРЕМА О СЖАТОЙ ФУНКЦИИ.

### Теорема

Пусть функции  $f$  и  $g$  определены в некоторой проколотой окрестности точки  $x_0$  и для всех  $x$  из этой окрестности выполняется  $f(x) \leq g(x)$ . Тогда если в точке  $x_0$  существуют пределы этих функций  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$ , то  $A \leq B$

### Доказательство

Пусть  $A > B$ . Тогда возьмем  $\varepsilon = \frac{A-B}{2}$ . Взяв достаточно малую  $\delta$ -окрестность можно утверждать, что  $f(x) > A - \varepsilon = \frac{A+B}{2}$ , а также  $g(x) < B + \varepsilon = \frac{A+B}{2}$ . Но отсюда следует, что  $f(x) > g(x)$

### Теорема

Если функции  $f, g, h$  определены в некоторой проколотой окрестности точки  $x_0$ , а также выполнено  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ , и при этом  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = a$ , то  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a$

### Доказательство

Если взять достаточно малую  $\delta$ -окрестность точки  $a$ , то можно утверждать, что  $|f(x) - a| < \varepsilon$  и  $|h(x) - a| < \varepsilon$ . Тогда:

$$a - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < a + \varepsilon$$

Но тогда  $g(x)$  также входит в  $\varepsilon$ -окрестность точки  $a$  при достаточно малой  $\delta$ -окрестности

## 18 ПРЕДЕЛ СУММЫ, ПРОИЗВЕДЕНИЯ, ЧАСТНОГО ФУНКЦИЙ. ПРЕДЕЛ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ. ПРЕДЕЛ ОБРАТНОЙ ФУНКЦИИ

### 18.1 Алгебраические действия с пределами

#### Теорема

Если функции определены в некоторой проколотой окрестности точки  $x_0$  и имеют конечные пределы в ней, то предел суммы есть сумма пределов

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a \pm b$$

#### Доказательство

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 : 0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_2 : 0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - b| < \varepsilon$$

Возьмем  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ . Тогда обе функции фхудят в заданную  $\varepsilon$ -окрестность своего предела.

$$|f(x) \pm g(x) - (a \pm b)| \leq |f(x) - a| + |g(x) - b| < (a + b) < 2\varepsilon$$

#### Теорема

Если функции определены в некоторой проколотой окрестности точки  $x_0$  и имеют конечные пределы в ней, то предел произведения есть произведение пределов

#### Доказательство

$$|f(x)g(x) - ab| = |f(x)g(x) - bf(x) + bf(x) - ab| =$$

$$= |f(x)(g(x) - b) + b(f(x) - a)| \leq |f(x)||g(x) - b| + |b||f(x) - a|$$

Сходящаяся функция локально ограничена.  $\exists M > f(x)$

$$|f(x)||g(x) - b| + |b||f(x) - a| \leq M|g(x) - b| + |b||f(x) - a|$$

Начиная с какой-то достаточно малой  $\delta$ -окрестности выполняется:

$$|g(x) - b| < \frac{\varepsilon}{2M}, |f(x) - a| < \frac{\varepsilon}{2|b|}$$

$$M|g(x) - b| + |b||f(x) - a| \leq M \frac{\varepsilon}{2M} + |b| \frac{\varepsilon}{2|b|} < \varepsilon$$

### Теорема

Если функции определены в некоторой проколотой окрестности точки  $x_0$  и имеют конечные пределы в ней, то предел частного есть частное пределов

### Доказательство

Доказательство аналогичное

## 18.2 Предел сложной функции

### Теорема

Пусть  $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = a$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$ . Тогда  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = a$

### Доказательство

$$\lim_{x \rightarrow b} f(x) = a \Leftrightarrow 0 < |x - b| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b \Leftrightarrow 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |g(x) - b| < \varepsilon$$

То есть существует  $\delta$ -окрестность точки  $x_0$ , в которой  $g(x)$  входит в  $\varepsilon$ -окрестность точки  $b$ . Но также известно, что если  $x$  входит в  $\varepsilon$ -окрестность точки  $b$ , то  $f(x)$  входит в  $\varepsilon$ -окрестность точки  $a$ . Но тогда выходит, что должно выполняться:

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |g(x) - b| < \varepsilon \Rightarrow |f(g(x)) - a| < \varepsilon$$

Это и означает, что  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = a$

### 18.3 Предел обратной функции

#### Теорема

Пусть функция  $f$  строго монотонна и непрерывна на интервале  $(a, b)$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$ . Тогда предел обратной функции в точке  $x_0$  равен  $\lim_{y \rightarrow y_0} f^{-1}(y) = x_0$

#### Доказательство

Рассмотрим обратную функцию  $f^{-1}(y)$ . Она непрерывна на интервале  $(a, b)$ , поскольку исходная функция непрерывна на этом же интервале, при этом из непрерывности также следует, что  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ . Но тогда  $\lim_{y \rightarrow y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0) = x_0$ .

## 19 ПОНЯТИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ. ПРИМЕРЫ РАСКРЫТИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ РАЗНОГО ТИПА.

### Определение

**Неопределенность** – это ситуация, при которой в ходе вычисления предела подстановка предельного значения приводит к выражению, не имеющему смысла.

Типы неопределенностей:

1.  $\frac{0}{0}$
2.  $0 \cdot \infty$
3.  $\frac{\infty}{\infty}$
4.  $\infty - \infty$
5.  $1^\infty$
6.  $0^0$
7.  $\infty^0$

Примеры раскрытия:

1. Неопределенности при делении удобно раскрывать правилом Лопиталья
- 2.

## 20 ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ, РАВНЫЙ БЕСКОНЕЧНОСТИ. ТЕОРЕМЫ О ПРЕДЕЛАХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ И ЧАСТНЫХ, СОДЕРЖАЩИХ БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИЕ, БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ, ОГРАНИЧЕННЫЕ ФУНКЦИИ.

### Определение

Предел функции в точке  $x_0$  называется **равным бесконечности**, если  $\forall M < 0 \exists \delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| > M$

### Определение

Функция  $\alpha(x)$  называется **бесконечно большой**, если  $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = \infty$

### Определение

Функция  $\beta(x)$  называется **бесконечно малой**, если  $\lim_{x \rightarrow x_0} \beta(x) = 0$

### Теорема

Пусть функция  $\alpha(x)$  – бесконечно малая при  $x \rightarrow x_0$ , а  $g(x)$  ограничена в окрестности  $x_0$ . Тогда произведение таких функций – бесконечно малая.

### Доказательство

$g(x)$  огр.  $\Leftrightarrow \exists M > 0, \delta_1 > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - M| < M$

$\alpha(x)$  – б.м.  $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_2 : 0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{M}$

Оценим  $|\alpha(x)g(x)|$ :

$$|\alpha(x)g(x)| = |\alpha(x)| \cdot |g(x)| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon$$

### Теорема

Если  $\beta(x)$  – бесконечно большая при  $x \rightarrow x_0$ , то  $\frac{1}{\beta(x)}$  – бесконечно малая при  $x \rightarrow x_0$

### Доказательство

$$\forall M > 0 \exists \delta_1 > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |\beta(x)| > M = \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{|\beta(x)|} < \varepsilon$$

Это и означает, что  $\frac{1}{\beta}$  – бесконечно малая в  $x_0$