Математический анализ. Экзамен.

3 января 2026 г.

СОДЕРЖАНИЕ

1 СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ МНОЖЕСТВА. ПОРОЖДАЮЩАЯ ПРОЦЕДУРА. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ СВОЙСТВО.

1.1 Способы задания множества

1. Перечисление $\{a, b, c...\}$
2. Характеристическое свойство $M \overset{\text{def}}{=} \{x : P(x)\}$, где $P(x)$ – предикат
3. Порождающая процедура $M := \{y : y = f(x), x \in E\}$, где f – функция от x

1.2 Описание способов задания множества

Определение

Характеристическое свойство – способ задания множества, при котором каждый его элемент обладает свойством $P(x)$

$$M \overset{\text{def}}{=} \{x : P(x)\}$$

Определение

Порождающая процедура – способ задания множества, при котором каждый его элемент является результатом выполнения функции f от переменной x из некоторого множества E.

$$M := \{y : y = f(x), x \in E\}$$

2 ОТОБРАЖЕНИЯ. ИНЪЕКЦИЯ, СЮРЪЕКЦИЯ, БИЕКЦИЯ. ПРЯМЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ МНОЖЕСТВ

2.1 Отображения

Определение

Отображение – способ сопоставления элементов между множествами.

Отображения бывают трех видов:

1. Инъекция
2. Сюръекция
3. Биекция

Определение

Инъекция – такое отображение $f(A) \to B$, при котором любой элемент B имеет **не более одного** прообраза в множестве A.

Определение

Сюръекция – такое отображение $f(A) \to B$, при котором любой элемент B имеет **не менее одного** прообраза в множестве A.

Определение

Биекция – это отображение, являющееся и сюръекцией, и инъекцией одновременно. То есть взаимооднозначное соответствие.

2.2 Прямые произведения множеств

Определение

Прямое (декартово) произведение множеств A и B – все такие пары чисел (a, b), где $a \in A$, $b \in B$.

$$A \times B \stackrel{\text{def}}{=} \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

3 МОЩНОСТЬ МНОЖЕСТВА

Определение

Мощность множества – количество элементов в нем (для конечных множеств).

Для бесконечных:

1. Если между бесконечным множеством X и множеством натуральных чисел $\mathbb{N}$ существует биекция, то говорят, что X имеет счётную мощность. Это "наименьшая"бесконечная мощность.
2. Если между X и множеством всех вещественных чисел $\mathbb{R}$ (или отрезком $[0, 1]$) существует биекция, то говорят, что X имеет мощность континуума.

4 ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ.

4.1 Операции

1. $A \cap B$ – пересечение

$$A \cap B \stackrel{\text{def}}{=} \{x : (x \in A) \wedge (x \in B)\}$$

2. $A \cup B$ – объединение

$$A \cap B \stackrel{\text{def}}{=} \{x : (x \in A) \vee (x \in B)\}$$

3. $A \setminus B$ – разность

$$A \setminus B \stackrel{\text{def}}{=} \{x : (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$$

4. $A \triangle B$ – симметрическая разность

$$A \setminus B \stackrel{\text{def}}{=} \{x : (x \in (A \setminus B)) \vee (x \in (B \setminus A))\}$$

5. $\bar{A}$ – дополнение до универсума

$$\bar{A} \stackrel{\text{def}}{=} \{x : (x \notin A) \wedge (x \in U)\}$$

4.2 Свойства

1. $A \cap A = A$, $A \cup A = A$
2. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$,
   $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
3. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
   $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
4. $A \cup \emptyset = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$
5. $A \cup U = U$, $A \cap U = A$
6. $A \cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$

7. $A \cup B = A \cap \bar{B}$,
   $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$
8. $\bar{\bar{A}} = A$
9. $A \setminus B = A \cap \bar{B}$

5 ПРЯМОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ N МНОЖЕСТВ.

Определение

Прямое произведение n множеств – все возможные кортежи из элементов этих n множеств.
На примере двух множеств:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

6 ТЕОРЕМА О МОЩНОСТИ ПРЯМОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ МНОЖЕСТВ

Теорема

Если A и B конечны, $|A| = n$, $|B| = m$ то $|A \times B| = |A||B| = mn$

Доказательство

Рассмотрим кортеж. В нем на первом месте стоит элемент из A, на втором – из B. К каждому элементу из A можно приставить m элементов из B, получив тем самым множество, представляющее собой результат декартового произведения. То есть на первом месте в кортеже может стоять n элементов, на втором – m. Значит всего таких кортежей можно составить mn штук.

7 ПОНЯТИЕ ВЕКТОРА. ПРОЕКЦИЯ ВЕКТОРА НА ОСИ. ПРОЕКЦИЯ МНОЖЕСТВА ВЕКТОРОВ

Определение

Пусть задано прямое произведение $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$. **Вектором** называется упорядоченный набор $(a_1, a_2, ...a_n)$, где $a_i \in A_i$

Определение

Пусть задано прямое произведение $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$. **Проецированием** $\mathrm{Pr}_k(a_1, a_2, ...a_k...a_n)$ называется отображение $(a_1, a_2, ...a_n) \to (a_k)$

$$\mathrm{Pr}_k(a_1, a_2, ...a_k...a_n) \overset{\text{def}}{=} f((a_1, a_2, ...a_k...a_n)) \to (a_k)$$

Проецирование множества векторов:

$$\mathrm{Pr}_{i,j,...m}(\{(a_1, a_2, ...a_m), (b_1, b_2, ...b_m)...\}) =$$

$$= \{(a_i, a_j, ...a_m), (b_i, b_j, ...b_m)...\}$$

8 ПРАВИЛО СУММЫ. ПРАВИЛО ПРОИЗВЕДЕНИЯ.

Теорема

[Правило суммы]

Пусть все выборки из множества A делятся на две взаимоисключающие A_1 и A_2. Число выборок первого типа m_1, второго – m_2. Тогда число всех выборок из множества A равно $m_1 + m_2$

Доказательство

Данное правило является следствием формулы включений-исключений:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

где $A \cap B = \emptyset$

Теорема

[Правило произведения]

Пусть число способов построить выборку из множества A равно n, из множества B – m. Тогда число способов построить выборку (a, b) $(a \in A, b \in B)$ равно mn

Доказательство

Данное утверждение эквивалентно теореме о мощности прямого произведения. $|A \times B| = |A||B| = mn$

9 ЧИСЛО РАЗМЕЩЕНИЙ БЕЗ ПОВТОРЕНИЙ, ЧИСЛО РАЗМЕЩЕНИЙ С ПОВТОРЕНИЯМИ

Определение

Пусть имеется множество из n элементов. Упорядоченное подмножество из k элементов называется размещением без повторений

Теорема

Число размещений без повторений можно рассчитать по формуле:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Доказательство

Пусть есть n элементов, из которых нужно составить упорядоченные наборы из k элементов.
Тогда на первое место можно поставить n элементов, на второе – $n-1$, на третье – $n-2$ и так далее до k-го места, куда можно поставить $n-k+1$ элементов. тогда посчитаем общее количество наборов по правилу произведения:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) ... (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Определение

Пусть имеется множество A из n элементов. Набор $(m_1, m_2 ... m_k)$, где $\forall i \Rightarrow m_i \in A$, называется размещением с повторениями.

Теорема

Число размещений с повторениями можно рассчитать по формуле:

$$\bar{A}_n^k = n^k$$

Доказательство

Есть k позиция, на каждой тз них n элементов. Тогда по правилу произведения всего n^k наборов

10 ЧИСЛО ПЕРЕСТАНОВОК БЕЗ ПОВТОРЕНИЙ, ЧИСЛО ПЕРЕСТАНОВОК С ПОВТОРЕНИЯМИ.

Определение

Пусть имеется множество из n элементов. **Перестановкой с повторениями** называется упорядоченная последовательность его элементов

Теорема

Перестановки без повторений можно посчитать по формуле:

$$P_n = n!$$

Доказательство

Данная формула является следствием правила произведения. Есть n позиций, на каждой следующей на 1 элемент меньше, чем на предыдущей. Значит формула:

$$P_k = n!$$

Определение

Пусть имеется множество из n элементов, среди которых:

- k_1 неразличимых элементов 1-го типа
- k_2 неразличимых элементов 2-го типа

  $\ldots$
- k_s неразличимых элементов s-го типа

Перестановкой с повторениями называется упорядоченная последовательность элементов этого множества

Теорема

Число перестановок с повторениями можно рассчитать по формуле:

$$\bar{P}_n = \frac{(k_1 + k_2 + ... + k_s)!}{k_1!k_2!...k_s!}$$

где $k_1 + k_2 + ... + k_s = n$

Доказательство

Для начала сосчитаем количество перестановок без повторений (представим, что в исходном множестве разные элементы): $n!$. Теперь сосчитаем перестановки для каждой группы: $k_i!$. Поскольку в исходном множестве есть группы одинаковых элементов, то их перестановки для нас неразличимы, а значит необходимо убрать все перестановки, в которых одинаковые наборы элементов одного типа, а их, как мы сосчитали, для каждого типа $k_i!$. Итого формула:

$$\bar{P}_n = \frac{n!}{k_1!k_2!...k_s!}$$