Высшая алгебра. Экзамен.

13 января 2026 г.

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

1 МАТРИЦА. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СЛОЖЕНИЯ МАТРИЦ, УМНОЖЕНИЯ МАТРИЦЫ НА ЧИСЛО, СВОЙСТВА

1.1 Матрица

Определение

Матрица – прямоугольная таблица чисел $m \times n$

1.2 Действия над матрицами

Определение

Сложение матриц – операция над матрицами, при которой складываются их соответственные элементы. Для матриц разных размеров операция не определена.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Определение

Умножение матрицы на число – операция, при которой каждый элемент матрицы умножается на данное число.

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

2 ОПРЕДЕЛЕНИЕ И СВОЙСТВА ОПЕРАЦИИ УМНОЖЕНИЯ МАТРИЦ

2.1 Умножение матриц

Определение

Умножение матрицы на матрицу – это операция над двумя матрицами, при которой каждый i-й элемент n-й строки первой матрицы умножается на i-ый элемент n-го столбца второй матрицы, после чего все такие произведения суммируются

$$A \cdot B = C$$

, где

$$c_{ij} = \sum_{t=1}^{k} a_{it} b_{tj}$$

2.2 Свойства умножения матриц

1. $A(BC) = (AB)C$
2. $A(B + C) = AB + AC$
3. $(B + C)D = BD + CD$

Важно

Умножение матриц не коммутативно!

$$AB \neq BA$$

3 ТРАНСПОНИРОВАНИЕ МАТРИЦЫ. СВОЙСТВА

Определение

Транспонирование матрицы – процесс преобразование матрицы, при котором столбцы становятся строками, а строки – столбцами.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Свойства транспонирования матрицы:

1. $(A^T)^T = A$
2. $A^T + B^T = (A + B)^T$
3. $\lambda A^T = (\lambda A)^T$
4. $(AB)^T = B^T A^T$
5. $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$
6. $\det A = \det A^T$
7. $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} A^T$

4 ОТДЕЛЬНЫЕ ВИДЫ МАТРИЦ: КВАДРАТНАЯ, ТРЕУГОЛЬНАЯ, ДИАГОНАЛЬНАЯ, ЕДИНИЧНАЯ. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И СВОЙСТВА

4.1 Виды матриц

Определение

Матрица называется **квадратной**, если число ее строк равно числу ее столбцов

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Свойства квадратной матрицы:

1. Можно вычислить определитель
2. Может быть обратимой, если $\det A \neq 0$
3. Можно возводить в целую степень

Определение

Матрица называется **верхнетреугольной**, если она является квадратной, а **под** ее главной диагональю все элементы равны нулю

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Определение

Матрица называется **нижнетреугольной**, если она является квадратной, а **над** ее главной диагональю все элементы равны нулю

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Свойства треугольных матриц:

1. Определитель равен произведению диагональных элементов
2. Обратная к треугольной матрице (если существует) тоже треугольная того же типа
3. Произведение двух верхних (нижних) треугольных матриц — верхняя (нижняя) треугольная матрица

Определение

Матрица называется **диагональной**, если все ее элементы, кроме тех, что лежат на главной диагонали, равны нулю

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Свойства диагональной матрицы:

1. Определитель равен произведению диагональных элементов
2. Обратная: $D^{-1} = \operatorname{diag}\left(d_1^{-1}, d_2^{-1}, \ldots\right)$
3. Возведение в степень: $D^k = \operatorname{diag}\left(d_1^k, d_2^k, \ldots\right)$

Определение

Матрица называется **единичной**, если все элементы ее главной диагонали равны единице, а остальные – нулю

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Свойства единичной матрицы:

1. Нейтральный элемент относительно умножения
2. $\det E = 1$
3. $E^{-1} = E$

5 ОПРЕДЕЛЕНИЕ МНОГОЧЛЕНА ОТ МАТРИЦЫ.

Определение

Пусть дан полином $p(x)$ с коэффициентами из поля $\mathbb{K}$:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$$

где $a_1, a_2 ... a_n \in \mathbb{K}$

Пусть A – квадратная матрица размера $m \times m$. Тогда **многочленом от матрицы** $p(A)$ называется матрица, получаемая формальной подстановкой матрица A вместо переменной x в выражение для многочлена.

$$p(A) = a_0 E + a_1 A + a_2 A^2 + ... + a_n A^n$$

6 ОПРЕДЕЛИТЕЛИ 2-ГО И 3-ГО ПОРЯДКА. ОПРЕДЕЛЕНИЯ. ПРАВИЛА ВЫЧИСЛЕНИЯ.

6.1 Определение

Определение

Определитель — это число, которое ставится в соответствие квадратной матрице и вычисляется по определённым правилам.

6.2 Правила вычисления

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{31}a_{22}a_{11} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33}$$

7 ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ МАТРИЦЫ ПОРЯДКА N. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧЕРЕЗ РЕКУРРЕНТНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ. ВЫЧИСЛЕНИЕ С ПРИМЕНЕНИЕМ РАЗЛОЖЕНИЯ ПО СТРОКЕ (СТОЛБЦУ).

7.1 Определения

Определение

Определитель матрицы порядка n – число, которое ставится в соответствие этой матрице и вычисляется по определённым правилам.

Разложение по i-й строке:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$

где A_{ij} – алгебраическое дополнение элемента с индексом ij в матрице A.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

где M_{ij} – минор элемента ij матрицы A

Определение

Минор элемента ij **матрицы** A – определитель матрицы A, получающийся путем вычеркивания из матрицы i-й строки и j-того столбца

7.2 Пример вычисления

Вычислим определитель матрицы 4-го порядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Шаг 1: Выбор строки для разложения

Выберем вторую строку $(3, 0, 0, 4)$, так как в ней два нулевых элемента. Это упростит вычисления.

Формула разложения по i-й строке:

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3} + a_{i4}A_{i4},$$

где $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$ – алгебраическое дополнение элемента a_{ij}.

Для $i = 2$:

$$\Delta = 3 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 0 \cdot A_{23} + 4 \cdot A_{24} = 3A_{21} + 4A_{24}.$$

Шаг 2: Вычисление алгебраических дополнений

1. Вычисляем $A_{21} = (-1)^{2+1}M_{21}$:

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Вычислим этот определитель 3-го порядка разложением по первой строке:

$$\begin{aligned} M_{21} &= 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 0 \cdot (2 \cdot 0 - (-3) \cdot 1) - 1 \cdot (2 \cdot 0 - (-3) \cdot 1) - 1 \cdot (2 \cdot 1 - 2 \cdot 1) \\ &= 0 \cdot 3 - 1 \cdot 3 - 1 \cdot 0 \\ &= -3. \end{aligned}$$

Следовательно, $A_{21} = (-1)^3 \cdot (-3) = (-1) \cdot (-3) = 3$.

2. Вычисляем $A_{24} = (-1)^{2+4}M_{24}$:

$$M_{24} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Вычислим этот определитель 3-го порядка:

$$\begin{aligned} M_{24} &= 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2 \cdot (2 \cdot 1 - 2 \cdot 1) - 0 \cdot ((-1) \cdot 1 - 2 \cdot 1) + 1 \cdot ((-1) \cdot 1 - 2 \cdot 1) \\ &= 2 \cdot 0 - 0 \cdot (-3) + 1 \cdot (-3) \\ &= -3. \end{aligned}$$

Следовательно, $A_{24} = (-1)^6 \cdot (-3) = 1 \cdot (-3) = -3$.

Шаг 3: Подставляем в формулу разложения

$$\Delta = 3 \cdot A_{21} + 4 \cdot A_{24} = 3 \cdot 3 + 4 \cdot (-3) = 9 - 12 = -3.$$

Ответ:

$$\boxed{\Delta = -3}$$

8 СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ: ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ ТРАНСПОНИРОВАННОЙ МАТРИЦЫ, ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ ПРОИЗВЕДЕНИЯ МАТРИЦ

Свойства определителя:

1. Определитель транспонированной матрицы: $\det A = \det A^T$ (разложение по столбцу дает тот же результат, что и разложение по строке)
2. Определитель произведения матриц: $\det AB = \det A \det B$
3. Определитель меняет знак при перестановке двух строк (столбцов) местами
4. Определитель, у которого есть две равные строки (столбца), равен нулю
5. Определитель не изменится, если к любой строке (столбцу) прибавить другую строку (столбец)

9 СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ, СВЯЗАННЫЕ С ЛИНЕЙНОЙ КОМБИНАЦИЕЙ СТРОК (СТОЛБЦОВ).

Свойства определителя:

1. Если матрица A получена из матрицы B умножением i-й строки на k: $\det A = k \det B$
2. Если i-я строка матрицы является суммой двух строк u и v, то определитель равен сумме определителей двух матриц, в которых эта строка заменена на u и v соответственно:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ u_1 + v_1 & u_2 + v_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ u_1 & u_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$$

3. Если к какой-либо строки (столбцу) прибавить другую строку (столбец), то определитель не измменится

10 ИЗМЕНЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ ПРИ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ МАТРИЦЫ

1. При перестановке любых двух строк (столбцов) определитель меняет знак на противоположный
2. При умножении любой строки (столбца) на ненулевое число определитель также умножается на это число
3. При прибавлении одной строки, умноженной на число, к другой, определитель не меняется

11 СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ: ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ ТРЕУГОЛЬНОЙ МАТРИЦЫ, ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ ДИАГОНАЛЬНОЙ МАТРИЦЫ

1. Определитель треугольной матрицы – произведение диагональных элементов
2. Определитель диагональной матрицы – произведение диагональных элементов

12 ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ МЕТОДОМ ПРИВЕДЕНИЯ К ТРЕУГОЛЬНОМУ ВИДУ.

Метод заключается в приведении матрицы к треугольному виду, отслеживая при этом изменения определителя при проведении элементарных преобразований.

Дана матрица A размера 3×3:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Найти $\det(A)$.

Решение

Применяем элементарные преобразования строк, не меняющие определитель (прибавление к одной строке другой, умноженной на число):

1. Обнулим элементы под $a_{11} = 2$:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

где:

- $R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1$
- $R_3 \leftarrow R_3 + R_1$ (так как $-2/2 = -1$, то $R_3 \leftarrow R_3 - (-1)R_1$)

2. Обнулим элемент под $a_{22} = -5$:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & 5 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

где $R_3 \leftarrow R_3 + R_2$ (так как $5/(-5) = -1$, то $R_3 \leftarrow R_3 - (-1)R_2$)

Получили верхнюю треугольную матрицу U:

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Вычисление определителя

Определитель треугольной матрицы равен произведению элементов главной диагонали:

$$\det(U) = 2 \cdot (-5) \cdot 5 = -50$$

Так как мы использовали только преобразования вида $R_i \leftarrow R_i + \lambda R_j$, определитель не изменился:

$$\boxed{\det(A) = -50}$$

Пример с перестановкой строк

Рассмотрим матрицу:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

1. $b_{11} = 0$ – нужна перестановка. Меняем $R_1 \leftrightarrow R_2$:

$$\det(B) = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

(знак определителя изменился)

2. Обнуляем первый столбец:

$$R_3 \leftarrow R_3 - 4R_1 : \quad -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -6 \end{vmatrix}$$

3. Обнуляем второй столбец:

$$R_3 \leftarrow R_3 + \frac{3}{2}R_2 : \quad -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{9}{2} \end{vmatrix}$$

Определитель треугольной матрицы:

$$1 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{9}{2}\right) = -9$$

Учитывая знак от перестановки:

$$\det(B) = -(-9) = \boxed{9}$$

13 АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ ДОПОЛНЕНИЕ ЭЛЕМЕНТА МАТРИЦЫ

Определение

Алгебраическое дополнение элемента матрицы – это число, вычисляемое как определитель матрицы, получающейся вычеркиванием строки и столбца, в которых лежит элемент, из исходной матрицы, взятый с положительным знаком, если индекс строки элемента в сумме с его столбцом дает четное число, иначе – с отрицательным.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

14 МИНОР, СООТВЕТСТВУЮЩИЙ ЭЛЕМЕНТУ МАТРИЦЫ. СВЯЗЬ МЕЖДУ МИНОРОМ И АЛГЕБРАИЧЕСКИМ ДОПОЛНЕНИЕМ ЭЛЕМЕНТА МАТРИЦЫ.

Определение

Минор элемента a_{ij} **матрицы** A – это определитель матрицы, получающийся вычеркиванием из матрицы i-й строки и j-го столбца

Связь между алгебраическим дополнением и минором состоит в том, что алгебраическое дополнение элемента a_{ij} и есть минор, взятый со знаком, определяющемся как $(-1)^{i+j}$

15 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ. СВОЙСТВА ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ.

Определение

Обратная матрица к матрице A – такая матрица A^{-1}, которая при умножении на исходную матрицу A дает единичную матрицу E

Свойства:

1. $AA^{-1} = A^{-1}A = E$
2. $(A^{-1})^{-1} = A$
3. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
4. $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$
5. $\det A = \frac{1}{\det A^{-1}}$

16 УСЛОВИЕ ОБРАТИМОСТИ МАТРИЦЫ.

Теорема

Матрица обратима тогда и только тогда, когда ее определитель не равен нулю.

$$\exists A^{-1} \Leftrightarrow \det A \neq 0$$

Доказательство

[Необходимое условие]

$$AA^{-1} = E \Leftrightarrow \det AA^{-1} = \det E \Leftrightarrow \det A \det A^{-1} = \det E$$

Если $\det A = 0$, то $0 \cdot \det A^{-1} = 1$ – противоречие.

[Достаточное условие]

Пусть есть A^{-1}, $\det A \neq 0$. Проверим, что $AA^{-1} = E$, для этого построим обратную матрицу с помощью присоединений.

Находим A_{ij} ко всем элементам матрицы A, получаем союзную матрицу.

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \dots & A_{ij} & \dots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Транспонируем ее, получаем присоединенную: $\hat{A} = \widetilde{A}^T$.

Умножим исходную матрицу на присоединенную:

$$A\hat{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & a_{ij} & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1} \\ \dots & A_{ij} & \dots \\ A_{1n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \det A & \dots & 0 \\ \dots & \det A & \dots \\ 0 & \dots & \det A \end{pmatrix}$$

Чтобы получить единичную матрицу, осталось поделить полученное произведение на $\det A$.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\hat{A}$$

17 ПОСТРОЕНИЕ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ С ПОМОЩЬЮ ПРИСОЕДИНЕННОЙ МАТРИЦЫ.

Алгоритм построения обратной матрицы:

1. Получение союзной матрицы (матрицы алгебраических дополнений)
2. Транспонирование союзной матрицы и получение присоединенной
3. Деление каждого элементаприсоединенной матрицы на определитель исходной

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\hat{A}$$

18 ПОСТРОЕНИЕ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ С ПОМОЩЬЮ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ.

Метод состоит в присоединении единичной матрицы к исходной справа и дальнейшем ее приведении к единичной. После этих операций справа появится обратная матрица.

19 ДВА ОПРЕДЕЛЕНИЯ РАНГА МАТРИЦЫ: МАКСИМАЛЬНОЕ ЧИСЛО ЛИНЕЙНО НЕЗАВИСИМЫХ СТРОК И РАЗМЕРНОСТЬ НАИБОЛЬШЕГО НЕНУЛЕВОГО МИНОРА.

Определение

Ранг матрицы – количество ее ненулевых строк, полученных после приведения к ступенчатому виду.

Определение

Ранг матрицы – это наибольший порядок минора, отличного от нуля (теорема о базисном миноре)

20 ЛИНЕЙНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ И НЕЗАВИСИМОСТЬ СТРОК (СТОЛБЦОВ) МАТРИЦЫ. ПОНЯТИЕ БАЗИСНОГО МИНОРА. ТЕОРЕМА О БАЗИСНОМ МИНОРЕ.

Определение

Набор элементов называется **линейно зависисым**, если равенство нулю их линейной комбинации возможно хотя бы при одном коэффициенте, не равном нулю.

$$\exists i : \alpha_i \neq 0 \Rightarrow \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + ... + \alpha_i a_i + ...\alpha_n a_n = 0$$

Если один из векторов a_i нулевой, то набор линейно зависим.

Определение

Базисный минор – это любой ненулевой минор наибольшего порядка

Теорема

[Теорема о базисном миноре]

Строки (столбцы) матрицы, содержащие строки (столбцы) базисного минора линейно независимы. Любая строка (столбец) является линейной комбинацией базисных строк

Доказательство

[Линейная независимость базисных строк (столбцов)]

Пусть базисный минор $M_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_r} = M_r$ (располагается в $i_1 ... i_r$ строках и $j_1 ... j_r$ столбцах). Если столбцы матрицы, содержащие столбца базисного минора, линейно зависимы, то $\exists \lambda_1 ... \lambda_r : \forall i \Rightarrow \lambda_i \neq 0$:

$$\lambda_1 a_{i1} + ... + \lambda_r a_{ir} = 0$$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} a_{1j1} \\ ... \\ a_{mj1} \end{pmatrix} + \cdots + \lambda_r \begin{pmatrix} a_{1jr} \\ ... \\ a_{mjr} \end{pmatrix} = 0$$

Тогда выберем из полученной суммы строки базисного минора и получим противоречие:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} a_{i1j1} \\ ... \\ a_{irj1} \end{pmatrix} + \cdots + \lambda_r \begin{pmatrix} a_{i1jr} \\ ... \\ a_{i1jr} \end{pmatrix} = 0$$

Это означает, что строки базисного минора линейно зависимы. Получаем противоречие изначальному предположению ($\det M = 0$).

[Строка (столбец) как линейная комбинация базисных]

Рассмотрим $a_k \notin \{a_j 1, a_j 2 ... a_j r\}$ (к минору допишем столбец и строку из исходной матрицы)

$$\Delta_p = \begin{pmatrix} a_{i1j1} & ... & a_{i1jr} & a_{i1k} \\ ... & & & \\ a_{irj1} & ... & a_{irjr} & a_{irk} \\ a_{pj1} & ... & a_{pjr} & a_{pk} \end{pmatrix}$$

Если $p \in \{i_1, i_2 ... i_r\}$, то в матрице две строки одинаковые, и $\det \Delta_p = 0$
Иначе Δ_p – минор $r+1$ порядка $\Rightarrow \det \Delta_p = 0$
Разложим по строке p:

$$\det \Delta_p = a_{pj1} A_{pj1} + ... + a_{pjr} A_{pjr} + a_{pk} A_{pk} = 0$$

$$A_{pk} = (-1)^{r+1+r+1} M_r = M_r \neq 0$$

$$a_{pk} = -\frac{A_{r+1,1}}{M_r} - ... - \frac{A_{r+1,r}}{M_r} a_{pjr}$$

Но $\Delta_{r+1,r}$ не зависит от p. Тогда $\forall p - \frac{A_{r+1,i}}{M_r} = \lambda_i$. Распишем полученное для разных p:

$a_{1k} = \lambda_1 a_{1j1} + ... + \lambda_r a_{1jr}$

$a_{2k} = \lambda_1 a_{2j1} + ... + \lambda_r a_{2jr}$

...

$a_{mk} = \lambda_1 a_{mj1} + ... + \lambda_r a_{mjr}$

То есть получили разложение k- го столбца по остальным. То есть разложение существует

21 ВЫЧИСЛЕНИЕ РАНГА МАТРИЦЫ С ПОМОЩЬЮ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ.

Суть метода заключается в приведении матрицы к ступенчатому виду, после чего просто останется посчитать количество ненулевых строк

22 ВЫЧИСЛЕНИЕ РАНГА МАТРИЦЫ: МЕТОД ОКАЙМЛЯЮЩИХ МИНОРОВ.

Суть метода заключается в последовательном поиске ненулевых миноров, окаймляющих данный ненулевой минор.

Алгоритм:

1. Находим любой ненулевой элемент матрицы (минор 1-го порядка).
2. Находим ненулевой минор 2-го порядка, который содержит (окаймляет) наш ненулевой минор 1-го порядка.
3. Далее находим ненулевой минор 3-го порядка, который содержит (окаймляет) найденный ненулевой минор 2-го порядка. Если он есть, $\operatorname{rang} A \geq 3$.
4. Продолжаем процесс, пока на каком-то шаге $(k+1)$ все окаймляющие миноры для ненулевого минора k-го порядка не окажутся равными нулю. Тогда ранг матрицы равен k.

23 ТЕОРЕМА ОБ ИНВАРИАНТНОСТИ РАНГА МАТРИЦЫ ПРИ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ.

Теорема

Ранг матрицы не меняется при элементарных преобразованиях её строк (или столбцов).

Доказательство

При умножении строки на число $\lambda \neq 0$ базисный минор умножится на λ. Ни один минор, равный нулю, не сделается отличным от нуля, и ни один минор, неравный нулю, не сделается нулевым.
Теперь рассмотрим перестановку двух строк местами. Ранг матрицы будет равен размерности линейной оболочки ее строк:

$$\operatorname{rang} A = \dim L(a_1, a_2 ... a_n)$$

где a_i – строки матрицы.
Если переставить любые две строки матрицы местами, то размерность линейной оболочки не изменится, ведь не изменится ее базис. А поскольку не изменится размерность линейной оболочки, то не поменяется и ранг.

24 ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ДВУХ ОПРЕДЕЛЕНИЙ РАНГА.

Теорема

Определение ранга матрицы через ненулевые строки (столбцы) эквивалентно определению через максимальный ненулевой минор

Доказательство

Пусть r_r – ранг по строкам, r_m – ранг по минорам.

Докажем, что $r_r \leq r_m$ и $r_r \geq r_m$

Пусть существует ненулевой минор порядка k. Тогда строки этого минора линейно независимы, а значит линейно независимы и строки исходной матрицы, содержащей эти строки. Поэтому $k \leq r_r$, а значит $r_m \leq r_r$.

Если в матрице можно выбрать k линейно независимых строк, то существует как минимум ненулевой минор порядка k. Значит $r_m \geq k$, и поэтому $r_m \geq r_r$

$$\begin{cases} r_m \geq r_r \\ r_m \leq r_r \end{cases} \Leftrightarrow r_m = r_r$$

25 ТЕОРЕМА КРОНЕКЕРА-КАПЕЛЛИ. УСЛОВИЕ РАЗРЕШИМОСТИ НЕОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Теорема

[Теорема Кронекера-Капелли]

Система линейных уравнений имеет решения тогда и только тогда, когда когда ранг матрицы равен рангу расширенной матрицы системы

Доказательство

[Совместна $\Rightarrow \operatorname{rang} A = \operatorname{rang} A|b$]

Пусть $\exists x_0 \in \mathbb{R} : Ax_0 = b$. Тогда столбец b – линейная комбинация столбцов A. Следовательно, при добавлении к матрице A столбца b размерность пространства столбцов не изменится. То есть:

$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} A|b$$

[$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} A|b \Rightarrow$ Совместна]

Если $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} A|b$, то это означает, что не изменяется размерность пространства столбцов, то есть b есть линейная комбинация столбцов матрицы A. То есть:

$$\exists x_0 \in \mathbb{R} : Ax_0 = b$$

26 ЧИСЛО РЕШЕНИЙ НЕОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. СВОБОДНЫЕ И ЗАВИСИМЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ.

26.1 Число решений неоднородной СЛАУ

26.1.1 Случай 1: $r < n$

- Существуют свободные переменные
- Система имеет бесконечность решений, зависящих от $n - r$ базисных переменных

26.1.2 Случай 2: $r = n$

Система имеет единственное решение

26.1.3 Случай 3: $\operatorname{rang} A \neq \operatorname{rang} A|b$

Система не имеет решений

26.2 Свободные и зависимые переменные

Определение

Свободные переменные – это переменные, которые выбираются в качестве параметров, от которых зависят другие переменные.

Определение

Зависимые переменные – это переменные, значения которых зависят от свободных переменных

27 РЕШЕНИЕ НЕОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ.

Пусть есть СЛАУ:

$$Ax = b$$

Для ее решения умножим слева обе части равенства на матрицу A^{-1}:

$$x = A^{-1}b$$

Получим в соответствующих строках значения переменных.

28 РЕШЕНИЕ НЕОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ КРАМЕРА.

Теорема

[Метод Крамера]

Пусть есть СЛАУ:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Решение СЛАУ можно получить следующим образом:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & & & \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\det A}, x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\det A}, x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}}{\det A}$$

Доказательство

Посмотрим на $A^{-1}b$:

$$\frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ \dots & & & \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \dots + A_{n1}b_n \\ \dots \\ A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \dots + A_{nn}b_n \end{pmatrix}$$

Отсюда видно, что строки последней матрицы представляют собой определители матриц A, в которых на место одного ее столбца подставлен столбец b.

29 РЕШЕНИЕ НЕОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ГАУССА. СТУПЕНЧАТАЯ (ТРАПЕЦИЕВИДНАЯ) МАТРИЦА СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ.

Метод заключается в приведении расширенной матрицы к ступенчатому виду путем элементарных преобразований (они не меняют решения исходной системы) с последующим обратным ходом, либо продолжением элементарных преобразований до приведения матрицы к диагональному виду.

Определение

Матрица называется **ступенчатой**, если:

1. Все нулевые строки стоят ниже нулевых
2. Номера столбцов ведущих элементов строк образуют возрастающую последовательность

30 РЕШЕНИЕ ОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ГАУССА

Метод заключается в приведении матрицы к ступенчатому виду путем элементарных преобразований (они не меняют решения исходной системы) с последующим обратным ходом, либо продолжением элементарных преобразований до приведения матрицы к диагональному виду.

31 ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ МНОЖЕСТВО РЕШЕНИЙ ОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. СТРУКТУРА МНОЖЕСТВА РЕШЕНИЙ НЕОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ.

Определение

Фундаментальной системой решений (ФСР) однородной системы $Ax = 0$ называется базис её пространства решений, то есть набор из $n - r$ линейно независимых решений, через которые любое решение системы выражается как их линейная комбинация.

Структура решений неоднородной СЛАУ задается следующим образом:

$$x_{\text{общ}} = x_{\text{част}} + x_{\text{одн}}$$

Где:

1. $x_{\text{част}}$ – любое частное решение системы
2. $x_{\text{одн}}$ – все решения соответствующей однородной системы $Ax = 0$, которые выражаются через ФСР

32 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО (ВЕКТОРНОГО) ПРОСТРАНСТВА.

Определение

Векторным пространством называется множество, над элементами которого определены две операции: сложение и умножение на действительное число, удовлетворяющее следующим аксиомам:

1. $a + b = b + a$
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$
3. $\exists 0 : \forall a \Rightarrow a + 0 = a$
4. $\exists 1 : \forall a \Rightarrow a \cdot 1 = a$
5. $\forall a \exists \widetilde{a} : a + \widetilde{a} = 0$
6. $\alpha(\beta\gamma) = \alpha\beta\gamma$
7. $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$
8. $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$

33 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЛИНЕЙНОЙ КОМБИНАЦИИ ВЕКТОРОВ. ЛИНЕЙНО ЗАВИСИМЫЕ И ЛИНЕЙНО НЕЗАВИСИМЫЕ СИСТЕМЫ ВЕКТОРОВ.

Определение

Пусть $a_1, ...a_n$ – элементы линейного пространства. **Линейной комбинацией** называетсявыражение вида:

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + ... + \alpha_n a_n$$

Где $\alpha_i \in \mathbb{R}$

Определение

Набор элементов называется **линейно зависимым**, если равенство нулю их линейной комбинации возможно хотя бы при одном коэффициенте, не равном нулю

$$\exists \alpha_i \neq 0 : \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + ... + \alpha_n a_n = 0$$

Если один из векторов a_i нулевой, то набор линейно зависим

34 БАЗИС ЛИНЕЙНОГО ПРОСТРАНСТВА. РАЗМЕРНОСТЬ ПРОСТРАНСТВА.

Определение

[Определение №1]

Базисом называется такой набор ненулевых линейно независимых векторов, что любой вектор линейного пространства может быть разложен по этому набору

[Определение №2]

Базисом называется линейно независимый набор векторов такой, что добавление к этому набору любого вектора пространства делает расширенный набор линейно зависимым

[Определение №3]

Базисом линейного пространства называется максимально возможный по числу векторов линейно независимый набор векторов пространства

Определение

Размерностью линейного пространства называется количество векторов в базисе

35 РАЗЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРА ПО БАЗИСУ. КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА В БАЗИСЕ.

Теорема

Разложение по базису единственно.

Доказательство

Пусть это не так и есть два разложения вектора x в базисе $e_1, e_2 ... e_n$:

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + ... + x_n e_n = y_1 e_1 + y_2 e_2 + ... + y_n e_n$$

Найдется $i : x_i \neq y_i$

$$(x_1 - y_1)e_1 + (x_2 - y_2)e_2 + ... + (x_n - y_n)e_n = 0$$

Но тогда выходит, что линейная комбинация базисных векторов равна нулю, а значит базисные векторы линейно зависимы. Противоречие.

Определение

Координаты вектора в базисе – это набор коэффициентов, на которые нужно умножить базисные векторы для получение исходного вектора

36 ПЕРЕХОД К НОВОМУ БАЗИСУ В ЛИНЕЙНОГО ПРОСТРАНСТВЕ. МАТРИЦА ПЕРЕХОДА. ФОРМУЛЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ КООРДИНАТ ВЕКТОРА.

Пусть есть старый базис: $e_1, ...e_n$. Разложим новый базис $e'_1, ...e'_n$ по старому базису:

$$\begin{cases} e'_1 = c_{11}e_1 + c_{12}e_2 + ... + c_{1n}e_n \\ e'_2 = c_{21}e_1 + c_{22}e_2 + ... + c_{2n}e_n \\ \dots \\ e'_n = c_{n1}e_1 + c_{n2}e_2 + ... + c_{nn}e_n \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ \dots \\ e'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & & & \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \dots \\ e_n \end{pmatrix} = C^T \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \dots \\ e_n \end{pmatrix}$$

Где C^T – матрица координат, записанных столбцами, нового базиса в старом

Определение

Матрица перехода – матрица, в которой столбцами записаны координаты нового базиса в старом. При ее умножении на столбец старого базиса получается новый базис

Таким образом можно легко переходить между базисами. C^T обратима, поскольку новый базис, как и старый, линейно независим. Значит матрица перехода может также использоваться для перехода в обратную сторону: от нового базиса к старому:

$$\begin{pmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ \dots \\ e'_n \end{pmatrix} = C^T \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \dots \\ e_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow (C^{-1})^T \begin{pmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ \dots \\ e'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \dots \\ e_n \end{pmatrix}$$

37 ЛИНЕЙНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ПРОСТРАНСТВ. ПРИМЕР: ПРОЕКТИРОВАНИЕ.

Определение

Пусть V и W – линейные пространства над одним и тем же полем $\mathbb{R}$. Отображение $f : V \to W$ называется **линейным**, если $\forall u, v \in V, \alpha \in \mathbb{R}$ выполняются условия:

1. $f(u+v) = f(u) + f(v)$
2. $f(\alpha u) = \alpha f(u)$

Проверим такое отображение $\mathrm{Pr}_x : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, которое каждому вектору в $\mathbb{R}^2$ ставит в соответствие его проекцию на ось Ox. То есть вектор $\mathrm{Pr}_x((x, y)) = (x, 0)$

1. Возьмем $u = (x_1, y_1)$ и $v = (x_2, y_2)$.

$$\mathrm{Pr}_x(u+v) = \mathrm{Pr}_x((x_1 + x_2, y_1 + y_2)) = (x_1 + x_2, 0)$$

$$\mathrm{Pr}_x(u) + \mathrm{Pr}_x(v) = (x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0)$$

   Линейность сохраняется

2. Возьмем скаляр α и вектор $u = (x, y)$

$$\mathrm{Pr}_x(\alpha u) = \mathrm{Pr}_x(\alpha x, \alpha y) = (\alpha x, 0)$$

$$\alpha \, \mathrm{Pr}_x(u) = \alpha(x, 0) = (\alpha x, 0)$$

   Умножение на скаляр сохраняется

38 ИЗОМОРФИЗМ ЛИНЕЙНЫХ ПРОСТРАНСТВ. ПРОСТРАНСТВО ВЕКТОР-СТОЛБЦОВ $\mathbb{R}^n$. БАЗИСНЫЕ ВЕКТОРЫ.

Определение

Пусть есть пространства L_1, L_2. **Изоморфизмом** этих пространств называется биекция, отображающая L_1 в L_2 такая, что:

1. $\forall (x, y) \Rightarrow f(u+v) = f(u) + f(v)$
2. $\forall \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow f(\alpha u) = \alpha f(u)$

Определение

$\mathbb{R}^n$ — это множество всех упорядоченных наборов из n вещественных чисел, записанных в виде столбца:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}$$

где $a_i \in \mathbb{R}$

Определение

Базисом линейного пространства называется максимально возможный по числу векторов линейно независимый набор векторов пространства

39 ТЕОРЕМА О РАВНОМОЩНОСТИ БАЗИСОВ. РАЗМЕРНОСТЬ ЛИНЕЙНОГО ПРОСТРАНСТВА.

Теорема

Любые два базиса линейного пространства состоят из одного и того же количества векторов

Доказательство

Допустим, это не так и в линейном пространстве L есть два неравномощных базиса: $e_1, ...e_n$ и $f_1, ...f_{n+1}$

Выразим базис f через базис e:

$$\begin{cases} f_1 = c_{11}e_1 + c_{12}e_2 + ... + c_{1n}e_n \\ f_2 = c_{21}e_1 + c_{22}e_2 + ... + c_{2n}e_n \\ \dots \\ f_n = c_{n1}e_1 + c_{n2}e_2 + ... + c_{nn}e_n \\ f_{n+1} = c_{n+1,1}e_1 + c_{n+1,2}e_2 + ... + c_{n+1,n}e_n \end{cases}$$

Рассмотрим линейную комбинацию:

$$x_1 f_1 + x_2 f_2 + ... + x_{n+1} f_{n+1} = 0$$

Если окажется, что такая система имеет решение при $x_i \neq 0$, то докажем противоречие

$$x_1(c_{11}e_1 + c_{12}e_2 + ... + c_{1n}e_n)+$$

$$+x_2(c_{21}e_1 + c_{22}e_2 + ... + c_{2n}e_n)+$$

$$+... + x_{n+1}(c_{n+1,1}e_1 + c_{n+1,2}e_2 + ... + c_{n+1,n}e_n) = 0$$

$$e_1(x_1c_{11} + x_2c_{21} + ... + x_{n+1}c_{n+1,1})+$$

$$+e_2(x_1c_{12}+x_2c_{22}+...+x_{n+1}c_{n+1,2})+$$

$$+...+e_n(x_1c_{1n}+x_2c_{2n}+...+x_{n+1}c_{n+1,n})=0$$

Поскольку $e_1...e_n$ – базис, то коэффициенты в линейной комбинации равны нулю:

$$\begin{cases} x_1c_{11}+x_2c_{21}+...+x_{n+1}c_{n+1,1}=0 \\ x_1c_{12}+x_2c_{22}+...+x_{n+1}c_{n+1,2}=0 \\ \dots \\ x_1c_{1n}+x_2c_{2n}+...+x_{n+1}c_{n+1,n}=0 \end{cases}$$

Эта система имеет n уравнений и $n+1$ переменных, а значит она имеет бесконечное множество решений, то есть существуют такие $x_1,...x_{n+1}$, что $x_1f_1+x_2f_2+...+x_{n+1}f_{n+1}=0$, а значит $f_1,...f_{n+1}$ – не базис!

40 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЛИНЕЙНОЙ ОБОЛОЧКИ СИСТЕМЫ ВЕКТОРОВ.

Определение

Пусть есть набор $u_1, ...u_n$ векторов в L.

Линейная оболочка системы векторов – это множество всех линейных комбинация этих векторов

$$L < u_1 \dots u_n >= \{\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n : \alpha_1, \dots \alpha_n \in \mathbb{R}\}$$

41 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОДПРОСТРАНСТВА ЛИНЕЙНОГО ПРОСТРАНСТВА. БАЗИС ПОДПРОСТРАНСТВА.

Определение

Пусть L – линейное пространство над некоторым полем.

Пусть L_1 – подмножество векторов (элементов) L такое, что выполняются:

1. $x \in L_1 \wedge y \in L_1 \Leftrightarrow x + y \in L_1$
2. $x \in L_1 \Leftrightarrow \forall \alpha \Rightarrow \alpha x \in L_1$

Тогда L_1 называется **подпространством** L

Теорема

Если L_1 – собственное подпространство L, то $\dim L > \dim L_1$

Доказательство

Пусть $\dim L = \dim L_1$. Базис L_1: $e_1, \dots e_n$

Разложим некоторый вектор $x \in L_1$ бо базису L_1:

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$$

Но $\dim L = n$, при этом по аксиоме $x \in L$. Значит $e_1, \dots e_n$ – базис L. То есть любой вектор из L_1 содержится и в L, а значит $L = L_1$. Противоречие

42 СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ПОДПРОСТРАНСТВА. ЛИНЕЙНАЯ ОБОЛОЧКА ВЕКТОРОВ И ПРОСТРАНСТВО РЕШЕНИЙ ОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ.

Подпространство можно задать двумя способами: линейной оболочкой системы векторов и множеством решений однородной системы уравнений

$$L =< u_1, ...u_n >$$

или

$$Ax = 0$$

Рассмотрим подробнее способ задания подпространства через однородную СЛАУ:

1. $n = r$: решение единственное, $x = \{0\}$, нулевое подпространство
2. $n > r$: бесконечное множество решений

43 НАХОЖДЕНИЕ БАЗИСА ПОДПРОСТРАНСТВА, ПОРОЖДЕННОГО СИСТЕМОЙ ВЕКТОРОВ.

Пусть задана система векторов: $u_1, \ldots u_n$. Их линейная оболочка: $L =< u_1, \ldots u_n >$. Чтобы найти базис такого подпространства, необходимо проверить систему векторов на линейную зависимость, после чего взять из них только линейно независимые. Это и будет базис.

44 СУММА ПОДПРОСТРАНСТВ. ТЕОРЕМА ГРАССМАНА О РАЗМЕРНОСТИ СУММЫ ПОДПРОСТРАНСТВ

Определение

Пусть U и V – подпространства в L. **Суммой** подпространств называется множество тех тех элементов L, которые удовлетворяют условию:

$$z \in L \Rightarrow z = x + y$$

Где $x \in U$, $y \in V$

Теорема

[Теорема Грассмана]

Сумма размерностей подпространств равна сумме размерностей их пересечения и суммы

$$\dim U_1 + \dim U_2 = \dim U_1 + U_2 - \dim U_1 \cap U_2$$

Доказательство

Базис пересечения: $h_1, \dots h_k$

Векторы базиса U_1, не входящие в пересечение: $f_1, \dots f_l$

Векторы базиса U_2, не входящие в пересечение: $g_1, \dots g_m$

Базис U_1: $h_1, \dots h_k, f_1, \dots f_l$

Базис U_2: $h_1, \dots h_k, g_1, \dots g_m$

Докажем, что $h_1, \dots h_k, f_1, \dots f_l, g_1, \dots g_m$ – базис (пусть нет).

$$\lambda_1 h_1 + \dots + \lambda_k h_k + \mu_1 f_1 + \dots + \mu_l f_l + \nu_1 g_1 + \dots + \nu_m g_m = 0$$

$$\lambda_1 h_1 + \dots + \lambda_k h_k + \mu_1 f_1 + \dots + \mu_l f_l = -\nu_1 g_1 - \dots - \nu_m g_m$$

Причем правая часть лежит в $U_1 \cap U_2$, а значит правая тоже. Это означает, что $\lambda_1 = \dots \lambda_k = 0$, но тогда $f_1, \dots f_l$ входит в пересечение. Противоречие

Посчитаем размерность:

$$\dim U_1 + \dim U_2 = k + l + k + m = 2k + l + m$$

$$\dim U_1 + U_2 = k + l + m$$

Значит разность: $k = \dim U_1 \cap U_2$

Итого:

$$\boxed{\dim U_1 + \dim U_2 = \dim U_1 + U_2 - \dim U_1 \cap U_2}$$

45 ПРЯМАЯ СУММА ПОДПРОСТРАНСТВ. КРИТЕРИЙ ПРЯМОЙ СУММЫ. ТЕОРЕМА О ЕДИНСТВЕННОСТИ РАЗЛОЖЕНИЯ.

45.1 Определение прямой суммы

Определение

Пусть V — линейное пространство, а $L_1, L_2, \dots, L_n$ — его подпространства.Сумма подпространств $L = L_1 + L_2 + \dots + L_n$ называется прямой суммой, если любой вектор $x \in L$ можно представить в виде:

$$x = x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

где $x_i \in L_i$, и такое представление является единственным.

45.2 Критерий прямой суммы

Существует несколько эквивалентных условий, позволяющих проверить, является ли сумма прямой.Для двух подпространств ($n = 2$):Сумма $L_1 + L_2$ является прямой тогда и только тогда, когда их пересечение содержит только нулевой вектор:

$$L_1 \cap L_2 = \{0\}$$

Для произвольного количества подпространств:Сумма $L_1 + \dots + L_n$ является прямой тогда и только тогда, когда пересечение каждого i-го подпространства с суммой всех остальных подпространств тривиально:

$$L_i \cap \left(\sum_{j \neq i} L_j \right) = \{0\} \quad \text{для всех } i = 1, \dots, n$$

45.3 Теорема о единственности разложения

Теорема

Сумма подпространств $L = L_1 + \dots + L_n$ является прямой тогда и только тогда, когда равенство

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0 \quad (x_i \in L_i)$$

возможно только при условии, что все $x_i = 0$.

Доказательство

Доказательство

1. Необходимость: Если сумма прямая, то по определению представление вектора 0 единственно. Так как $0 + 0 + \dots + 0 = 0$, то любое другое представление невозможно.
2. Достаточность: Если $x = x_1 + \dots + x_n$ и $x = y_1 + \dots + y_n$, то вычитая одно из другого, получим $(x_1 - y_1) + \dots + (x_n - y_n) = 0$. Так как $x_i - y_i \in L_i$, то по условию теоремы $x_i - y_i = 0$, следовательно, $x_i = y_i$.

46 ТЕОРЕМА О ДОПОЛНЕНИИ БАЗИСА ПОДПРОСТРАНСТВА ДО БАЗИСА ПРОСТРАНСТВА

46.1 Формулировка теоремы

Теорема

Пусть V — конечномерное линейное пространство размерности n, и пусть L — его подпространство.Если $\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$ — базис подпространства L (где $k \leq n$), то существуют такие векторы $e_{k+1}, \ldots, e_n$ из пространства V, что полная система векторов

$$\{e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n\}$$

является базисом всего пространства V.

Доказательство

- Проверка на полноту: Если $(e_1, \ldots, e_k) = V$, то имеющийся набор уже является базисом V, и дополнение не требуется ($k = n$).
- Шаг расширения: Если $(e_1, \ldots, e_k) \neq V$, это означает, что существует хотя бы один вектор $e_{k+1} \in V$, который не принадлежит подпространству L.
- Линейная независимость: По свойству линейной независимости, если мы добавим к линейно независимой системе вектор, который не является их линейной комбинацией, новая система $\{e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}\}$ также останется линейно независимой.
- Итерация: Повторяем процесс, пока количество векторов не станет равным размерности пространства n. Поскольку пространство конечномерно, процесс обязательно завершится.

47 ПРОЕКЦИЯ ВЕКТОРА НА ПОДПРОСТРАНСТВО.

47.1 Определение проекции

Определение

Пусть V — конечномерное линейное пространство, представленное в виде прямой суммы двух подпространств:

$$V = L \oplus M$$

Это означает, что любой вектор $x \in V$ однозначно представим в виде:

$$x = x_L + x_M, \quad \text{где } x_L \in L,\ x_M \in M$$

- Вектор x_L называется проекцией вектора x на подпространство L параллельно M
- Вектор x_M называется составляющей вектора x по подпространству M.

47.2 Ортогональная проекция

Она возникает, когда подпространство M является ортогональным дополнением к L ($M = L^{\perp}$). Определение: Вектор x_L называется ортогональной проекцией x на L, если:

1. $(x - x_L) \perp L$, то есть $\forall y \in L : (x - x_L, y) = 0$.
2. $x_L \in L$

47.3 Нахождение проекции

Теорема

Если $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ — базис подпространства L, то коэффициенты разложения проекции $x_L = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j a_j$ являются решением системы линейных уравнений:

$$\sum_{j=1}^{k} (a_i, a_j)\lambda_j = (a_i, x), \quad i = 1, \ldots, k$$

48 ОРТОГОНАЛЬНОЕ ДОПОЛНЕНИЕ ПОДПРОСТРАНСТВА В R^n. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И СВОЙСТВА

48.1 Определение

Определение

Пусть V — евклидово пространство (например, $\mathbb{R}^n$ со стандартным скалярным произведением), и L — его подпространство.Ортогональным дополнением подпространства L называется множество всех векторов $x \in V$, которые ортогональны любому вектору из L.Обозначение: $L^\perp$

$$L^\perp = \{x \in V \mid \forall y \in L : (x, y) = 0\}$$

48.2 Свойства

1. Линейность: Ортогональное дополнение $L^\perp$ само является подпространством в V
2. Тривиальность пересечения: Пересечение подпространства и его ортогонального дополнения состоит только из нулевого вектора:

$$L \cap L^\perp = \{0\}$$

3. Теорема о прямой сумме: Евклидово пространство V всегда разлагается в прямую сумму подпространства и его ортогонального дополнения:

$$V = L \oplus L^\perp$$

4. Размерность: Сумма размерностей подпространства и его ортогонального дополнения равна размерности всего пространства:

$$\dim L + \dim L^\perp = \dim V$$

5. Если взять ортогональное дополнение от дополнения, мы вернемся к исходному подпространству:

$$(L^{\perp})^{\perp} = L$$

49 ПОСТРОЕНИЕ БАЗИСА ОРТОГОНАЛЬНОГО ДОПОЛНЕНИЯ ПОДПРОСТРАНСТВА, ПОРОЖДЕННОГО СИСТЕМОЙ ВЕКТОРОВ.

Условие ортогональности вектора x вектору a_i записывается как скалярное произведение:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = 0$$

Если мы запишем такие уравнения для каждого вектора a_i, мы получим однородную систему линейных уравнений (СЛАУ):

$$Ax = 0$$

где матрица A составлена из векторов a_i (записанных по строкам).Ключевой вывод: Базис ортогонального дополнения $L^\perp$ — это фундаментальная система решений (ФСР) данной однородной системы.

49.1 алгоритм построения

1. Формирование матрицы: Записать данные векторы $a_1, \ldots, a_k$ в строки матрицы A.
2. Приведение к ступенчатому виду: С помощью элементарных преобразований строк (метод Гаусса)
3. Определение размерности дополнения: Согласно теореме о размерности, $\dim L^\perp = n - r$
4. Нахождение ФСР: * Выразить главные переменные через свободные.

Полученные векторы $\{f_1, f_2, \ldots, f_{n-r}\}$ образуют базис $L^\perp$.

50 ПОНЯТИЕ ЕВКЛИДОВОГО ПРОСТРАНСТВА. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И СВОЙСТВА СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ. ДЛИНА ВЕКТОРА. УГОЛ МЕЖДУ ВЕКТОРАМИ.

50.1 Понятие евклидового пространства

Определение

Линейное пространство V над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$ называется евклидовым, если каждой паре векторов $x, y \in V$ поставлено в соответствие вещественное число, называемое скалярным произведением (обозначается (x, y)), и при этом выполняются четыре аксиомы.

50.2 Аксиомы мкалярного произведения

Для любых векторов $x, y, z \in V$ и любого числа $\alpha \in \mathbb{R}$:

1. Линейность по первому аргументу: $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$ и $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$.
2. Симметричность (коммутативность): $(x, y) = (y, x)$.
3. Положительная определенность: $(x, x) \geq 0$, причем $(x, x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$.

50.3 Длина вектора

В евклидовом пространстве длина вектора определяется через скалярное произведение самого вектора на себя.

Определение

Длиной (нормой) вектора x называется число:

$$|x| = \sqrt{(x, x)}$$

50.4 Угол между векторами

Определение

Углом φ между ненулевыми векторами x и y называется число из отрезка $[0, \pi]$, косинус которого равен:

$$\cos \varphi = \frac{(x, y)}{|x| \cdot |y|}$$

51 АЛГОРИТМ НАХОЖДЕНИЯ РАССТОЯНИЯ И УГЛА МЕЖДУ ВЕКТОРОМ И ПОДПРОСТРАНСТВОМ.

51.1 Понятие угла и расстояния

Пусть V — евклидово пространство, L — его подпространство, и $x \in V$ — произвольный вектор.

Определение

1. Расстояние $\rho(x, L)$ — это длина перпендикуляра, опущенного из конца вектора на подпространство. Это минимальное расстояние от x до любой точки подпространства:

$$\rho(x, L) = \min_{y \in L} \|x - y\| = \|x - x_L\|$$

2. Угол φ между вектором и подпространством — это угол между вектором x и его проекцией x_L. По определению $\varphi \in [0, \pi/2]$.

51.2 алгоритм нахождения

Пусть подпространство L задано базисом $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$.

1. Нахождение ортогональной проекции x_L
   Этот вопрос объединяет в себе теорию ортогонального проектирования и метрические свойства евклидова пространства. По сути, задача сводится к разложению вектора на проекцию и ортогональную составляющую.1. Понятие угла и расстоянияПусть V — евклидово пространство, L — его подпространство, и $x \in V$ — произвольный вектор.Расстояние $\rho(x, L)$ — это длина перпендикуляра, опущенного из конца вектора на подпространство. Это минимальное расстояние от x до любой точки подпространства:

$$\rho(x, L) = \min_{y \in L} \|x - y\| = \|x - x_L\|$$

где x_L — ортогональная проекция x на L.Угол φ между вектором и подпространством — это угол между вектором x и его проекцией x_L. По определению $\varphi \in [0, \pi/2]$.2. Алгоритм нахожденияПусть подпространство L задано базисом $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$.Шаг 1. Нахождение ортогональной проекции x_LИщем проекцию в виде $x_L = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k$. Для этого решаем систему нормальных уравнений (через матрицу Грама):

$$\begin{pmatrix} (a_1, a_1) & \dots & (a_1, a_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_k, a_1) & \dots & (a_k, a_k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x, a_1) \\ \vdots \\ (x, a_k) \end{pmatrix}$$

После нахождения λ_i вычисляем вектор x_L.

2. Нахождение ортогональной составляющей x_M Вычисляем вектор $x_M = x - x_L$. Этот вектор перпендикулярен подпространству L.
3. Вычисление расстояния.

   Расстояние — это норма (длина) вектора x_M:

$$\rho(x, L) = \|x_M\| = \sqrt{(x_M, x_M)}$$

4. Вычисление угла

   Угол находится через косинус угла между x и его проекцией x_L:

$$\cos \varphi = \frac{\|x_L\|}{\|x\|}$$

52 АЛГОРИТМ ГРАМА-ШМИДТА ОРТОГОНАЛИЗАЦИИ БАЗИСА.

Пусть дан базис $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$. Мы строим новый базис $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ следующим образом:

1. Берем первый вектор без изменений:

$$e_1 = f_1$$

2. Ищем второй вектор как разность f_2 и его проекции на e_1:

$$e_2 = f_2 - \text{proj}_{e_1} f_2 = f_2 - \frac{(f_2, e_1)}{(e_1, e_1)} e_1$$

3. Ищем третий вектор, вычитая проекции f_3 на e_1 и e_2:

$$e_3 = f_3 - \frac{(f_3, e_1)}{(e_1, e_1)} e_1 - \frac{(f_3, e_2)}{(e_2, e_2)} e_2$$

4. Шаг k (общая формула):

$$e_k = f_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(f_k, e_i)}{(e_i, e_i)} e_i$$

53 ВЕКТОРНОЕ ПРОСТРАНСТВО СВОБОДНЫХ ВЕКТОРОВ R^2иR^3. ВЫПОЛНЕНИЕ АКСИОМАТИКИ ЛИНЕЙНОГО ПРОСТРАНСТВА.

53.1 Определение операций

Для свободных векторов операции определяются геометрически:

- Сложение: выполняется по правилу параллелограмма или правилу треугольника.
- Умножение на скаляр (λ): вектор растягивается в $|\lambda|$ раз, сохраняя направление (если $\lambda > 0$) или меняя его на противоположное (если $\lambda < 0$).

53.2 Проверка аксиом линейного пространства

Пусть $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — произвольные векторы, а α, β — произвольные действительные числа.

Аксиомы сложения

1. Коммутативность: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.
2. Ассоциативность: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.
3. Существование нулевого вектора: существует такой вектор $\vec{0}$ (точка), что $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ для любого $\vec{a}$.
4. Существование противоположного вектора: для каждого вектора $\vec{a}$ существует вектор $-\vec{a}$ (такой же длины, но противоположного направления), что $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.

Акиомы умножения

1. Умножение на единицу: $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$.
2. Ассоциативность умножения: $\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$.
3. Дистрибутивность относительно сложения векторов: $\alpha(\vec{a}+\vec{b}) = \alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$.
4. Дистрибутивность относительно сложения чисел: $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$.

54 БАЗИСЫ. РАЗЛОЖЕНИЕ ПО БАЗИСУ. УСЛОВИЕ КОЛЛИНЕАРНОСТИ И КОМПЛАНАРНОСТИ ВЕКТОРОВ.

54.1 Базис и размерность

Определение

Базис — это минимальный набор векторов, через которые можно однозначно выразить любой другой вектор данного пространства.
Чтобы набор векторов $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ являлся базисом, он должен отвечать двум условиям:

1. Линейная независимость: ни один из векторов набора не выражается через другие.
2. Полнота: любой вектор пространства можно представить как линейную комбинацию этих векторов.

54.2 Разложение вектора по базису

Если у нас есть базис $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, то любой вектор $\vec{a}$ можно представить в виде:

$$\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$$

Если базис является ортонормированным (векторы перпендикулярны друг другу и их длина равна 1, обозначаются $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$), то координаты находятся проще всего — через проекции на оси.

54.3 Условие коллинеарности векторов

Определение

Коллинеарные векторы — это векторы, которые лежат на одной прямой или на параллельных прямых.
Условия коллинеарности векторов a и b:

1. Геометрическое: $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

2. Алгебраическое: Векторы линейно зависимы, то есть существует такое число λ, что:

$$\vec{a} = \lambda \vec{b}$$

3. В координатах: Координаты коллинеарных векторов пропорциональны:

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} = \lambda$$

4. Через векторное произведение: $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ (их площадь параллелограмма равна нулю).

54.4 Условие коплонарности векторов

Определение

Компланарные векторы — это векторы, которые лежат в одной плоскости или параллельны одной и той же плоскости. (Для двух векторов это понятие тривиально — они всегда компланарны, поэтому говорят о трех и более векторах).

Условия компланарности трех векторов a, b и c:

1. Алгебраическое (Линейная зависимость): Один из векторов можно выразить через два других:

$$\vec{c} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}$$

2. Через смешанное произведение: Смешанное произведение векторов равно нулю:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$$

3. Через определитель: Определитель, составленный из координат этих векторов, равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0$$

55 СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ В ПРОСТРАНСТВАХ R^2иR^3

Определение

Скалярное произведение — это операция над двумя векторами, результатом которой является число (скаляр).

55.1 Два определения скалярного произведения

Геометрическое

Скалярное произведение равно произведению длин векторов на косинус угла α между ними:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$$

Алгебраическое

Если векторы заданы своими координатами в ортонормированном базисе, то скалярное произведение равно сумме произведений соответствующих координат.

$$a \cdot b = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \cdot (b_1, b_2, \ldots, b_n)^T$$

55.2 Свойства скалярного произведения

Для любых векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и числа λ справедливы следующие свойства:

1. Коммутативность: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
2. Дистрибутивность: $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$.
3. Сочетательность относительно числа: $(\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$.
4. Скалярный квадрат: $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$.

56 ДЛИНА ВЕКТОРА В R^2 И R^3. ФОРМУЛА ДЛИНЫ. НЕРАВЕНСТВО КОШИ-БУНЯКОВСКОГО В R^3

Определение

Длина вектора (или его модуль) — это расстояние между его началом и концом. В прямоугольной системе координат расчет длины опирается на теорему Пифагора.

56.1 Формула длины вектора

Если вектор задан своими координатами в ортонормированном базисе, его длина вычисляется как корень квадратный из суммы квадратов его координат.
В пространстве $\mathbb{R}^2$ (на плоскости)Для вектора $\vec{a} = (x, y)$:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

В пространстве $\mathbb{R}^3$ (в пространстве)Для вектора $\vec{a} = (x, y, z)$:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

56.2 неравенство Коши-Буняковского

Это одно из фундаментальных неравенств в математике, которое связывает скалярное произведение векторов и их длины. Для любых двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ справедливо:

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$$

57 УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ В R^2 И ПЛОСКОСТИ В R^3. РАЗЛИЧНЫЕ ВИДЫ УРАВНЕНИЙ И ИХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ.

57.1 Прямая в $\mathbb{R}^2$ (на плоскости)

- Общее уравнение

$$Ax + By + C = 0$$

- Уравнение с угловым коэффициентом

$$y = kx + b$$

Параметр $k = \tan\alpha$ определяет наклон прямой к оси Ox, а b — ординату точки пересечения с осью Oy.

- Каноническое уравнение

$$\frac{x - x_0}{p_1} = \frac{y - y_0}{p_2}$$

Задается через фиксированную точку $M_0(x_0, y_0)$ и направляющий вектор $\vec{s} = (p_1, p_2)$.

- Параметрические уравнения

$$\begin{cases} x = x_0 + p_1 t \\ y = y_0 + p_2 t \end{cases}$$

- Уравнение в отрезках

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

57.2 Плоскость в R^3

Для задания плоскости в трехмерном пространстве необходимо знать ее ориентацию (нормаль) и хотя бы одну принадлежащую ей точку.Общее уравнение

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Здесь вектор $\vec{n} = (A, B, C)$ является нормалью к плоскости. Если $D = 0$, плоскость проходит через начало координат.Уравнение по точке и нормалиЕсли задана точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и вектор $\vec{n} = (A, B, C)$, то любая точка $M(x, y, z)$ плоскости удовлетворяет условию:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Уравнение через три точкиПлоскость, проходящую через точки M_1, M_2, M_3, можно найти через условие компланарности векторов $\vec{M_1M}$, $\vec{M_1M_2}$ и $\vec{M_1M_3}$:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

57.3 Прямая в R^3

В пространстве прямая не может быть описана одним линейным уравнением (оно всегда описывает плоскость). Прямая — это либо пересечение плоскостей, либо траектория точки.Канонический видЗадается через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и направляющий вектор $\vec{s} = (p_1, p_2, p_3)$:

$$\frac{x - x_0}{p_1} = \frac{y - y_0}{p_2} = \frac{z - z_0}{p_3}$$

Общий видПрямая рассматривается как линия пересечения двух непараллельных плоскостей:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Чтобы найти направляющий вектор такой прямой, нужно вычислить векторное произведение нормалей этих плоскостей: $\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$.

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$$

58 ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ. СВОЙСТВА. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ. ФОРМУЛА ВЕКТОРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ В КООРДИНАТАХ.

58.1 Определение и геометрический смысл

Определение

Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$ (или $\vec{a} \times \vec{b}$), который удовлетворяет трем условиям:

1. Длина: Модуль вектора $\vec{c}$ равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi$$

2. Направление: Вектор $\vec{c}$ перпендикулярен обоим векторам-множителям ($\vec{c} \perp \vec{a}$ и $\vec{c} \perp \vec{b}$).
3. Ориентация: Векторы $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ образуют правую тройку. Это значит, что если смотреть с конца вектора $\vec{c}$, кратчайший поворот от $\vec{a}$ к $\vec{b}$ виден против часовой стрелки.

58.2 Свойства векторного произведения

Пусть $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — векторы, λ — число.

- Антикоммутативность: $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$. (При перемене мест меняется направление).
- Сочетательность (ассоциативность) со скаляром: $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$.
- Дистрибутивность: $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$.
- Условие коллинеарности: $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \iff \vec{a} \parallel \vec{b}$ (так как $\sin 0^\circ = 0$).
- Векторный квадрат: $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$.

58.3 Формула в координатах

Если векторы заданы в ортонормированном базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ координатами:

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z), \quad \vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$$

То векторное произведение удобно вычислять через определитель матрицы:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

При раскрытии определителя по первой строке получаем координаты результирующего вектора:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \right)$$

59 СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ. СВОЙСТВА. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ. ФОРМУЛА СМЕШАННОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ В КООРДИНАТАХ.

59.1 Определение

Определение

Смешанным произведением трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется скалярное произведение вектора $\vec{a}$ на векторное произведение векторов $\vec{b}$ и $\vec{c}$.Обозначение: $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ или $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.Математически это записывается так:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

59.2 Геометрический смысл

- Абсолютная величина: Модуль смешанного произведения $|(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|$ равен объему параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ как на ребрах.
- Если $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) > 0$, то тройка векторов — правая.
- Если $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) < 0$, то тройка векторов — левая.
- Объем пирамиды: Объем треугольной пирамиды (тетраэдра), построенной на этих же векторах, вычисляется по формуле:

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{6}|(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|$$

59.3 Свойства смешанного произведения

- Циклическая перестановка: Смешанное произведение не меняется при циклической перестановке векторов:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})$$

- Антикоммутативность: При перестановке любых двух соседних векторов знак произведения меняется на противоположный:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c})$$

- Линейность: Смешанное произведение линейно по каждому аргументу. Например, для суммы векторов:

$$(\vec{a}_1 + \vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}_1, \vec{b}, \vec{c}) + (\vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c})$$

- Условие компланарности: Векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны (лежат в одной плоскости или параллельны ей) тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$$

59.4 Формула в координатах

Если векторы заданы своими координатами в декартовой системе координат:$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, $\vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$,то смешанное произведение равно определителю матрицы, составленной из координат этих векторов:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

60 РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ПЛОСКОСТИ. РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПЛОСКОСТЯМИ.

60.1 Расстояние от точки до плоскости

Пусть задана плоскость π своим общим уравнением и точка M_0, не лежащая на этой плоскости:

- Плоскость π: $Ax + By + Cz + D = 0$

- Точка M_0: (x_0, y_0, z_0)

Формула расстояния d:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

60.2 Расстояние между параллельными плоскостями

Две плоскости параллельны, если их нормальные векторы коллинеарны. Для удобства расчетов их уравнения приводят к виду, где коэффициенты A, B, C совпадают:

- Плоскость π_1: $Ax + By + Cz + D_1 = 0$

- Плоскость π_2: $Ax + By + Cz + D_2 = 0$

Формула расстояния d:

$$d = \frac{|D_2 - D_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$