Дискретная Математика. Экзамен.

23 января 2026 г.

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

1 СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ МНОЖЕСТВА. ПОРОЖДАЮЩАЯ ПРОЦЕДУРА. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ СВОЙСТВО.

1.1 Способы задания множества

1. Перечисление $\{a, b, c...\}$
2. Характеристическое свойство $M \overset{\text{def}}{=} \{x : P(x)\}$, где $P(x)$ – предикат
3. Порождающая процедура $M := \{y : y = f(x), x \in E\}$, где f – функция от x

1.2 Описание способов задания множества

Определение

Характеристическое свойство – способ задания множества, при котором каждый его элемент обладает свойством $P(x)$

$$M \overset{\text{def}}{=} \{x : P(x)\}$$

Определение

Порождающая процедура – способ задания множества, при котором каждый его элемент является результатом выполнения функции f от переменной x из некоторого множества E.

$$M := \{y : y = f(x), x \in E\}$$

2 ОТОБРАЖЕНИЯ. ИНЪЕКЦИЯ, СЮРЪЕКЦИЯ, БИЕКЦИЯ. ПРЯМЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ МНОЖЕСТВ

2.1 Отображения

Определение

Отображение – способ сопоставления элементов между множествами.

Отображения бывают трех видов:

1. Инъекция
2. Сюръекция
3. Биекция

Определение

Инъекция – такое отображение $f(A) \to B$, при котором любой элемент B имеет **не более одного** прообраза в множестве A.

Определение

Сюръекция – такое отображение $f(A) \to B$, при котором любой элемент B имеет **не менее одного** прообраза в множестве A.

Определение

Биекция – это отображение, являющееся и сюръекцией, и инъекцией одновременно. То есть взаимооднозначное соответствие.

2.2 Прямые произведения множеств

Определение

Прямое (декартово) произведение множеств A и B – все такие пары чисел (a, b), где $a \in A$, $b \in B$.

$$A \times B \stackrel{\text{def}}{=} \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

3 МОЩНОСТЬ МНОЖЕСТВА

Определение

Мощность множества – количество элементов в нем (для конечных множеств).

Для бесконечных:

1. Если между бесконечным множеством X и множеством натуральных чисел $\mathbb{N}$ существует биекция, то говорят, что X имеет счётную мощность. Это "наименьшая"бесконечная мощность.
2. Если между X и множеством всех вещественных чисел $\mathbb{R}$ (или отрезком $[0, 1]$) существует биекция, то говорят, что X имеет мощность континуума.

4 ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ.

4.1 Операции

1. $A \cap B$ – пересечение

$$A \cap B \stackrel{\text{def}}{=} \{x : (x \in A) \wedge (x \in B)\}$$

2. $A \cup B$ – объединение

$$A \cap B \stackrel{\text{def}}{=} \{x : (x \in A) \vee (x \in B)\}$$

3. $A \setminus B$ – разность

$$A \setminus B \stackrel{\text{def}}{=} \{x : (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$$

4. $A \triangle B$ – симметрическая разность

$$A \setminus B \stackrel{\text{def}}{=} \{x : (x \in (A \setminus B)) \vee (x \in (B \setminus A))\}$$

5. $\bar{A}$ – дополнение до универсума

$$\bar{A} \stackrel{\text{def}}{=} \{x : (x \notin A) \wedge (x \in U)\}$$

4.2 Свойства

1. $A \cap A = A$, $A \cup A = A$
2. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$,
   $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
3. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
   $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
4. $A \cup \emptyset = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$
5. $A \cup U = U$, $A \cap U = A$
6. $A \cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$

7. $A \cup B = A \cap \bar{B}$,
   $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$
8. $\bar{\bar{A}} = A$
9. $A \setminus B = A \cap \bar{B}$

5 ПРЯМОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ N МНОЖЕСТВ.

Определение

Прямое произведение n **множеств** – все возможные кортежи из элементов этих n множеств.
На примере двух множеств:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

6 ТЕОРЕМА О МОЩНОСТИ ПРЯМОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ МНОЖЕСТВ

Теорема

Если A и B конечны, $|A| = n$, $|B| = m$ то $|A \times B| = |A||B| = mn$

Доказательство

Рассмотрим кортеж. В нем на первом месте стоит элемент из A, на втором – из B. К каждому элементу из A можно приставить m элементов из B, получив тем самым множество, представляющее собой результат декартового произведения. То есть на первом месте в кортеже может стоять n элементов, на втором – m. Значит всего таких кортежей можно составить mn штук.

7 ПОНЯТИЕ ВЕКТОРА. ПРОЕКЦИЯ ВЕКТОРА НА ОСИ. ПРОЕКЦИЯ МНОЖЕСТВА ВЕКТОРОВ

Определение

Пусть задано прямое произведение $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$. **Вектором** называется упорядоченный набор $(a_1, a_2, ...a_n)$, где $a_i \in A_i$

Определение

Пусть задано прямое произведение $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$. **Проецированием** $\mathrm{Pr}_k(a_1, a_2, ...a_k...a_n)$ называется отображение $(a_1, a_2, ...a_n) \to (a_k)$

$$\mathrm{Pr}_k(a_1, a_2, ...a_k...a_n) \overset{\text{def}}{=} f((a_1, a_2, ...a_k...a_n)) \to (a_k)$$

Проецирование множества векторов:

$$\mathrm{Pr}_{i,j,...m}(\{(a_1, a_2, ...a_m), (b_1, b_2, ...b_m)...\}) =$$

$$= \{(a_i, a_j, ...a_m), (b_i, b_j, ...b_m)...\}$$

8 ПРАВИЛО СУММЫ. ПРАВИЛО ПРОИЗВЕДЕНИЯ.

Теорема

[Правило суммы]

Пусть все выборки из множества A делятся на две взаимоисключающие A_1 и A_2. Число выборок первого типа m_1, второго – m_2. Тогда число всех выборок из множества A равно $m_1 + m_2$

Доказательство

Данное правило является следствием формулы включений-исключений:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

где $A \cap B = \emptyset$

Теорема

[Правило произведения]

Пусть число способов построить выборку из множества A равно n, из множества B – m. Тогда число способов построить выборку (a, b) $(a \in A, b \in B)$ равно mn

Доказательство

Данное утверждение эквивалентно теореме о мощности прямого произведения. $|A \times B| = |A||B| = mn$

9 ЧИСЛО РАЗМЕЩЕНИЙ БЕЗ ПОВТОРЕНИЙ, ЧИСЛО РАЗМЕЩЕНИЙ С ПОВТОРЕНИЯМИ

Определение

Пусть имеется множество из n элементов. Упорядоченное подмножество из k элементов называется размещением без повторений

Теорема

Число размещений без повторений можно рассчитать по формуле:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Доказательство

Пусть есть n элементов, из которых нужно составить упорядоченные наборы из k элементов.
Тогда на первое место можно поставить n элементов, на второе – $n-1$, на третье – $n-2$ и так далее до k-го места, куда можно поставить $n-k+1$ элементов. тогда посчитаем общее количество наборов по правилу произведения:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2)...(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Определение

Пусть имеется множество A из n элементов. Набор $(m_1, m_2...m_k)$, где $\forall i \Rightarrow m_i \in A$, называется размещением с повторениями.

Теорема

Число размещений с повторениями можно рассчитать по формуле:

$$\overline{A_n^k} = n^k$$

Доказательство

Есть k позиция, на каждой тз них n элементов. Тогда по правилу произведения всего n^k наборов

10 ЧИСЛО ПЕРЕСТАНОВОК БЕЗ ПОВТОРЕНИЙ, ЧИСЛО ПЕРЕСТАНОВОК С ПОВТОРЕНИЯМИ.

Определение

Пусть имеется множество из n элементов. **Перестановкой с повторениями** называется упорядоченная последовательность его элементов

Теорема

Перестановки без повторений можно посчитать по формуле:

$$P_n = n!$$

Доказательство

Данная формула является следствием правила произведения. Есть n позиций, на каждой следующей на 1 элемент меньше, чем на предыдущей. Значит формула:

$$P_k = n!$$

Определение

Пусть имеется множество из n элементов, среди которых:

- k_1 неразличимых элементов 1-го типа
- k_2 неразличимых элементов 2-го типа

  $\ldots$
- k_s неразличимых элементов s-го типа

Перестановкой с повторениями называется упорядоченная последовательность элементов этого множества

Теорема

Число перестановок с повторениями можно рассчитать по формуле:

$$\overline{P_n} = \frac{(k_1 + k_2 + ... + k_s)!}{k_1!k_2!...k_s!}$$

где $k_1 + k_2 + ... + k_s = n$

Доказательство

Для начала сосчитаем количество перестановок без повторений (представим, что в исходном множестве разные элементы): $n!$. Теперь сосчитаем перестановки для каждой группы: $k_i!$. Поскольку в исходном множестве есть группы одинаковых элементов, то их перестановки для нас неразличимы, а значит необходимо убрать все перестановки, в которых одинаковые наборы элементов одного типа, а их, как мы сосчитали, для каждого типа $k_i!$. Итого формула:

$$\overline{P_n} = \frac{n!}{k_1!k_2!...k_s!}$$

11 ЧИСЛО СОЧЕТАНИЙ БЕЗ ПОВТОРЕНИЙ, ЧИСЛО СОЧЕТАНИЙ С ПОВТОРЕНИЯМИ.

11.1 Сочетания без повторений

Определение

Пусть имеется множество из n элементов. Неупорядоченное подмножество из k его элементов называется **сочетанием без повторений**

Теорема

Число сочетаний без повторений рассчитывается по формуле:

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Доказательство

Посмотрим на формулу размещений без повторений: $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$. Чтобы рассчитать сочетания, небходимо убрать из размещений все те наборы, в которых совпадают элементы. Для каждого набора элементов таких повторяющихся наборов $k!$, ведь это просто перестановки. Тогда итоговая формула:

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

11.2 Сочетания с повторениями

Определение

Пусть имеется k классов элементов множества A. Сочетанием с повторениями называется неупорядоченная выборка n элементов из множества A.

Теорема

Число сочетаний с повторениями можно рассчитать по формуле:

$$\overline{C_n^k} = C_{n+k-1}^{k-1} = \frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!}$$

Доказательство

Используем метод "звезд и перегородок": будем рассматривать k звезд и $n-1$ перегородок для n типов звезд. Любая такая последовательность однозначно задаёт одно сочетание с повторениями, и наоборот – любому сочетанию соответствует такая последовательность.

Общее число символов в последовательности: $n+k-1$. Из них выберем k позиций для звезд (или $n-1$ для перегородок). Тогда таких последовательностей:

$$\overline{C_n^k} = \frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!}$$

11.3 Бином Ньютона. $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$

1. База индукции (проверка для $n=1$): Подставим $n=1$ в формулу:

$$(a+b)^1 = \sum_{k=0}^{1} C_1^k a^{1-k} b^k$$

$$a+b = C_1^0 a^1 b^0 + C_1^1 a^0 b^1$$

Так как $C_1^0 = 1$ и $C_1^1 = 1$, получаем:

$$a+b = 1 \cdot a + 1 \cdot b$$

2. Индуктивное предположение:Допустим, формула верна для некоторого n. То есть мы считаем истинным, что:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$$

3. Индуктивный переход (доказательство для $n+1$): Нам нужно доказать, что $(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k a^{(n+1)-k} b^k$.

$$(a+b)^{n+1} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k+1} b^k}_{\text{Сумма №1}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^{k+1}}_{\text{Сумма №2}}$$

   - Из Суммы №1 заберем первое слагаемое (при $k=0$):

$$k = 0 \Rightarrow C_n^0 a^{n+1} b^0 = a^{n+1}$$

     Оставшаяся сумма теперь идет от $k=1$.

   - Из Суммы №2 заберем последнее слагаемое (при $k=n$):

$$k = n \Rightarrow C_n^n a^0 b^{n+1} = b^{n+1}$$

     Оставшаяся сумма теперь идет до $k = n-1$.

   Теперь наше выражение выглядит так:

$$a^{n+1} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} C_n^k a^{n-k+1} b^k}_{\text{Остаток Суммы 1}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k a^{n-k} b^{k+1}}_{\text{Остаток Суммы 2}} + b^{n+1}$$

4. Сделаем замену переменной в индексе Остатка Суммы 2:Пусть $j = k+1$.
   - Тогда $k = j - 1$.
   - Если старый k начинался с 0, то новый j начинается с 1.
   - Если старый k заканчивался на $n-1$, то новый j заканчивается на n.

Перепишем Остаток Суммы 2 через j:

$$\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k a^{n-k} b^{k+1} = \sum_{j=1}^{n} C_n^{j-1} a^{n-(j-1)} b^j = \sum_{j=1}^{n} C_n^{j-1} a^{n-j+1} b^j$$

Так как j — это просто буква («немой» индекс), мы можем переименовать её обратно в k для удобства:

$$\sum_{k=1}^{n} C_n^{k-1} a^{n-k+1} b^k$$

5. Объединение двух сумм Теперь у нас две суммы с абсолютно одинаковыми пределами (от 1 до n) и одинаковыми степенями a и b.
   - Остаток Суммы 1: $\sum_{k=1}^{n} C_n^k \cdot a^{n-k+1} b^k$
   - Остаток Суммы 2 (преобразованный): $\sum_{k=1}^{n} C_n^{k-1} \cdot a^{n-k+1} b^k$

   Сложим их:
$$\sum_{k=1}^{n} \left(C_n^k + C_n^{k-1}\right) a^{n-k+1} b^k$$

6. Применяем свойство Паскаля

$$C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$$

   Заменяем скобку в сумме:

$$\sum_{k=1}^{n} C_{n+1}^k a^{(n+1)-k} b^k$$

7. Собираем все вместе

$$a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} C_{n+1}^k a^{(n+1)-k} b^k + b^{n+1}$$

   - a^{n+1} — это то же самое, что член суммы при $k = 0$ (так как $C_{n+1}^0 = 1$).

- b^{n+1} — это то же самое, что член суммы при $k = n + 1$ (так как $C_{n+1}^{n+1} = 1$).

Вносим эти крайние члены внутрь знака суммы, расширяя границы k от 0 до $n + 1$:

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^{k} a^{(n+1)-k} b^{k}$$

12 СООТВЕТСТВИЯ И ФУНКЦИИ

12.1 Соответствия

Определение

Пусть даны два множества A и B. **Соответствием** называется подмножество $A \times B$.

Определение

Областью определения G называется $\mathrm{Pr}_A\, G$

Определение

Областью значений G называется $\mathrm{Pr}_B\, G$

Определение

Образом элемента a называется множество всех тех элементов b, которые входят в пары $(a, b) \in G$

$$G(a) = \{b : (a, b) \in G\}$$

Определение

Прообразом элемента b называется множество всех тех элементов a, которые входят в пары $(a, b) \in G$

$$G^{-1}(b) = \{a : (a, b) \in G\}$$

Определение

Соответствие называется **полностью определенным**, если его областью определения является множество A.

Определение

Соответствие называется **сюръективным**, если его областью значений является множество B

Определение

Соответствие называется **инъективным**, если каждый элемент в области значений имеет ровно один прообраз

Определение

Соответствие называется **функциональным**, если каждый элемент в его области определения имеет не более одного образа

Определение

Соответствие называется **биективным**, если:

1. Является полностью определенным
2. Функциональным
3. инъективным
4. Сюръективным

Важно

Отображение **"в если оно не является сюръективным**, и **"на"в противоположном случае**.

12.2 Функции

Определение

Функция – это всюду определенное и функциональное соответствие

Определение

Функция называется **инъективной**, если разным аргументам соответствуют разные значения

Определение

Функция называется **сюръективной**, если все элементы множества значений "покрыты"

Определение

Функция называется **биективной**, если она является сюръективной и инъективной.

Определение

Для любого соответствия $R \subseteq A \times B$ можно определить **обратное соответствие** $R^{-1} \subseteq B \times A$

Важно

Обратное соответствие будет функцией тогда и только тогда, когда функция биективна

13 ВЗАИМНО ОДНОЗНАЧНЫЕ СООТВЕТСТВИЯ И МОЩНОСТЬ МНОЖЕСТВ

Определение

Соответствие называется **взаимно-однозначным**, если оно сюръективно и инъективно (каждому элементу A сопоставляется ровно один элемент B)

13.1 Установление взаимно-однозначного соответствия между множествами чисел

Теорема

Множество $\mathbb{Z}$ счетно

Доказательство

Попробуем установить биекцию между $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}$. Действительно, если установить соответствие следующим образом ($f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$):

$$f(2n) = n$$

$$f(2n+1) = -n$$

$$f(1) = 0$$

То окажется, что каждому элементу $\mathbb{N}$ сопоставлен ровно один элемент $\mathbb{Z}$ и наоборот, а значит получена биекция.
Множество $\mathbb{Z}$ счетно.

Теорема

Множество $\mathbb{Q}$ счетно

Доказательство

Составим таблицу:

0	1	-1	2	-2
$\frac{0}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{-2}{2}$
$\frac{0}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{-1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{-2}{3}$
...				

В этой таблице представлены все рациональные числа. Теперь можно пойти "змейкой"и сосчитать все эти числа.

Значит $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$

14 ТЕОРЕМА О ЧИСЛЕ ПОДМНОЖЕСТВ КОНЕЧНОГО МНОЖЕСТВА.

Теорема

Число всех подмножеств конечного множества, состоящего из n элементов, равно 2^n

Доказательство

Каждое подмножество исходного множество можно задать, установив "флаг"каждому его элементу: включать его в подмножество или нет. Всего два варианта, а значит по правилу произведения всего вариантов подмножеств:

$$2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^n$$

15 ЧИСЛО ПОДМНОЖЕСТВ СЧЕТНОГО МНОЖЕСТВА.

Теорема

Множество всех подмножеств счетного множества несчетно

Доказательство

Предположим, что все подмножества данного счетного множества можно пронумеровать: $A_1, A_2, ...A_n$ и построим множество D, противоречащее допущению, по следующему правилу:
Число n входит в D тогда и только тогда, когда оно не входит в A_n

$$D = \{n \in \mathbb{N} : n \notin A_n\}$$

Но тогда получим противоречие: D – корректно построенное множество натуральных чисел, а значит оно должно являться подмножеством $\mathbb{N}$
Значит $|\mathbb{N}| \neq |2^{\mathbb{N}}|$

16 ТЕОРЕМА КАНТОРА

Теорема

[Теорема Кантора]

Мощность множества всегда меньше мощности множества всех его подмножеств

$$|A| < |2^A|$$

Доказательство

Очевидно, что $|A| \leq |2^A|$, поскольку 2^A содержит в качестве подмножеств все элементы A, а также другие подмножества, сочетающие эти элементы, и пустое множество.

Докажем, что $|A| \neq |2^A|$

Зададим множество B следующим образом:

$$B = \{x \in A : x \notin f(x)\}$$

То есть это множество всех тех x из A, не принадлежащих своим прообразам при биективном отображении f.

Понятно, что $B \in 2^A$, ведь B состоит из элементов A. Попробуем найти прообраз B в множестве A.

Если существует $x_0 \in A$ такое, что $f(x_0) = B$, то получаем противоречие, ведь B составлено из элементов множества A, которых нет в их образе в 2^A. Значит такого x_0 не существует. Но это означает, что у B не существует прообраза в A, а значит не существует и биекции между A и 2^A.

17 ГРАФЫ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГРАФА. ОРИЕНТИРОВАННЫЕ И НЕОРИЕНТИРОВАННЫЕ ГРАФЫ.

Определение

Граф – это отношения инцидентности, заданные на множестве вершин и ребер

$$\Gamma : e \to (u; v)$$

Определение

Вершина и ребро называются **инцидентными**, если вершина является концом ребра.

Определение

Граф называется **ориентированным**, если в нем упорядочены вершины

18 МАТРИЦА ИНЦИДЕНТНОСТИ.

Определение

Матрица инцидентности – это матрица, в которой по горизонтали расположены вершины, по вертикали – ребра.
В неориентированном графе:

$$e_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если ребро инцидентно вершине} \\ 2, \text{иначе} \end{cases}$$

В ориентированном графе:

$$e_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если вершина } j \text{ – конец ребра } i \\ 0, \text{если неинцидентны} \\ -1, \text{если вершина } j \text{ – начало ребра } i \end{cases}$$

19 МАТРИЦА СМЕЖНОСТИ.

Определение

Матрица смежности – матрица, в которой по горизонтали и вертикали – вершины

$$e_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если вершины смежны} \\ -, \text{иначе} \end{cases}$$

20 ЛОКАЛЬНАЯ СТЕПЕНЬ ВЕРШИНЫ. ВЕКТОР ЛОКАЛЬНЫХ СТЕПЕНЕЙ.

Определение

Степень вершины – это количество ребер, инцидентных вершине

Определение

Вектор степеней – вектор, составленный из степеней всех вершин графа, расположенных по убыванию

21 МАРШРУТ ОБЩЕГО ВИДА. ПРОСТОЙ ПУТЬ И НЕ ПРОСТОЙ ПУТЬ.

21.1 Маршрут общего вида

Определение

Маршрут — это самая общая последовательность вершин и ребер, в которой каждое ребро соединяет две соседние вершины в последовательности.

21.2 путь

Определение

Простой путь - Это маршрут, в котором все вершины (и, соответственно, ребра) различны.

Определение

Непростой путь - Это маршрут, в котором ребра не повторяются, но вершины могут повторяться.

21.3 Замкнутые цепи

- Цикл: Замкнутая цепь (ребра не повторяются).
- Простой цикл: Замкнутый простой путь (вершины не повторяются, кроме начальной и конечной).

22 ЦИКЛИЧЕСКИЙ МАРШРУТ ОБЩЕГО ВИДА

Определение

Циклический маршрут — это маршрут $v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_n, v_n$, у которого начальная и конечная вершины совпадают ($v_0 = v_n$). Главная особенность маршрута общего вида заключается в отсутствии жестких ограничений:

- В нем могут многократно повторяться ребра.
- В нем могут многократно повторяться вершины.
- Он может содержать внутри себя другие циклы

22.1 Критерий эйлеровости графа (теорема Эйлера).

Доказательство

Необходимость (Слева направо: $\Longrightarrow$)

Дано: Граф G содержит эйлеров цикл. Доказать: Степени всех вершин четны.

Рассмотрим эйлеров цикл как процесс обхода графа. Когда мы идем по циклу, мы «входим» в вершину v по одному ребру и «выходим» из неё по другому. Каждый такой проход через вершину добавляет 2 к её степени. Поскольку цикл эйлеров, он проходит через каждое ребро ровно один раз и возвращается в начало.

- Для любой промежуточной вершины: каждое вхождение компенсируется выходом.
- Для начальной (она же конечная) вершины: первый выход компенсируется последним входом. Таким образом, степень каждой вершины v должна быть четной (суммой двоек за каждый проход).

Достаточность (Справа налево: $\Longleftarrow$)

Дано: Все вершины связного графа G имеют четную степень. Доказать: В графе существует эйлеров цикл.

1. Начнем путь из произвольной вершины v и будем идти по ребрам, не используя одно и то же ребро дважды.
2. Так как степени всех вершин четны, мы не можем «застрять» ни в какой вершине, кроме стартовой. Если мы вошли в вершину, то всегда есть свободное ребро, чтобы выйти. В итоге мы вернемся в v, получив цикл C_1.
3. Если этот цикл прошел через все ребра — мы закончили.
4. Если остались неиспользованные ребра, то из-за связности графа найдется вершина u, принадлежащая циклу C_1, у которой есть инцидентные неиспользованные ребра.
5. Начнем из u новый цикл C_2 по оставшимся ребрам.
6. «Вклеим» цикл C_2 в цикл C_1. Повторяя этот процесс, мы покроем все ребра графа одним замкнутым циклом.

22.2 Доказательство для эйлерова пути

Доказательство

Утверждение: Связный граф имеет эйлеров путь (не замкнутый) $\iff$ ровно 2 вершины имеют нечетную степень.

1. Сведем задачу к предыдущему случаю. Пусть в графе G ровно две вершины u и v имеют нечетную степень.
2. Добавим в граф фиктивное ребро $e = (u, v)$.
3. Теперь степени вершин u и v стали четными (были нечетными, добавили 1). Остальные вершины и так имели четные степени.
4. Согласно первой части теоремы, в этом новом графе существует эйлеров цикл.
5. Если мы теперь удалим наше фиктивное ребро e из этого цикла, цикл «разорвется» и превратится в эйлеров путь, который начинается в одной из этих вершин (u) и заканчивается в другой (v).

23 ПРОСТОЙ И НЕ ПРОСТОЙ ЦИКЛ.

23.1 Простой цикл

Определение

Простой цикл — это замкнутый путь, в котором все вершины и все ребра различны

23.2 Не простой цикл

Определение

Не простой цикл — это замкнутый маршрут, в котором ребра не повторяются, но вершины могут повторяться.

24 МАТРИЦА РАССТОЯНИЙ. ЭКСЦЕНТРИСИТЕТ ВЕРШИНЫ. ДИАМЕТР ГРАФА. РАДИУС ГРАФА. ЦЕНТР ГРАФА.

24.1 Матрица расстояний

Определение

Матрица расстояний D — это квадратная таблица размера $n \times n$ (где n — число вершин), в которой элемент d_{ij} равен кратчайшему расстоянию (количеству ребер) между вершинами v_i и v_j.

- Если пути между вершинами нет, расстояние считается бесконечным (∞).
- На главной диагонали всегда стоят нули ($d_{ii} = 0$).

24.2 Эксцентриситет вершины

Определение

Эксцентриситет вершины v — это максимальное расстояние от этой вершины до любой другой вершины графа.

$$\epsilon(v) = \max_{u \in V} d(v, u)$$

24.3 Диаметр, Радиус и Центр

Определение

- Диаметр ($diam(G)$)Это максимальный из всех эксцентриситетов.
- Радиус ($rad(G)$)Это минимальный из всех эксцентриситетов.
- Центр графа Это множество вершин, у которых эксцентриситет равен радиусу.

24.4 Лемма о рукопожатиях

Доказательство

Доказательство леммы о рукопожатиях

Нам нужно доказать, что:

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$$

где V — множество вершин, E — множество ребер, а $\deg(v)$ — степень вершины (количество выходящих из неё ребер).

1. Рассмотрим произвольное ребро e, соединяющее две вершины u и v.
2. При подсчете степени вершины u, ребро e учитывается один раз.
3. При подсчете степени вершины v, то же самое ребро e снова учитывается один раз.
4. Поскольку каждое ребро в графе имеет ровно два конца, оно вносит вклад, равный 2, в общую сумму степеней всех вершин (по единице для каждой из двух вершин, которые оно соединяет).
5. Следовательно, если мы просуммируем степени всех вершин, мы посчитаем каждое ребро ровно дважды.

Доказательство

Доказательство следствия

Утверждение: Число вершин с нечетной степенью всегда четно.

Доказательство: Разделим все вершины графа V на два непересекающихся подмножества:

- V_{even} — вершины с четной степенью.
- V_{odd} — вершины с нечетной степенью.

Тогда общую сумму степеней из леммы можно записать так:

$$\sum_{v \in V_{even}} \deg(v) + \sum_{v \in V_{odd}} \deg(v) = 2|E|$$

Проанализируем каждое слагаемое:

- $2|E|$ — это всегда четное число (по определению).
- $\sum_{v \in V_{even}} \deg(v)$ — это сумма четных чисел, следовательно, она тоже четна.

Чтобы равенство соблюдалось, оставшаяся часть суммы тоже обязана быть четной:

$$\underbrace{\sum_{v \in V_{odd}} \deg(v)}_{\text{должно быть четным}} = \underbrace{2|E|}_{\text{четное}} - \underbrace{\sum_{v \in V_{even}} \deg(v)}_{\text{четное}}$$

Сумма нечетных чисел будет четной тогда и только тогда, когда количество этих чисел четно.

25 ДИАМЕТРАЛЬНЫЙ ПУТЬ. РАДИАЛЬНЫЙ ПУТЬ.

25.1 Диаметральный путь

Определение

Диаметральный путь — это кратчайший путь между двумя вершинами графа, расстояние между которыми равно диаметру ($diam(G)$).

25.2 Радиальный путь

Определение

Радиальный путь — это кратчайший путь, соединяющий центральную вершину с любой вершиной, расстояние до которой равно эксцентриситету этой центральной вершины

26 ЦИКЛОМАТИЧЕСКОЕ ЧИСЛО.

26.1 Формула вычисления

Цикломатическое число обозначается греческой буквой ν (ню) или μ (мю) и вычисляется по формуле:

$$\nu(G) = m - n + p$$

Где:

- m — количество ребер графа;
- n — количество вершин графа;
- p — количество компонент связности (для связного графа $p = 1$).

26.2 Физический и геометрический смысл

1. Фундаментальная система циклов: Цикломатическое число равно размерности пространства циклов графа. Это значит, что из всех возможных циклов в графе можно выбрать ровно $\nu(G)$ «базисных», через которые можно выразить любой другой цикл.
2. Связь с деревьями: Если $\nu(G) = 0$, то граф является лесом (не содержит циклов). Если он при этом связный, то это дерево.
3. Удаление ребер: Это минимальное количество ребер, после удаления которых граф становится ациклическим (деревом), но при этом сохраняет все свои вершины и компоненты связности.

27 ЧИСЛО ВНУТРЕННЕЙ УСТОЙЧИВОСТИ. ЧИСЛО ВНЕШНЕЙ УСТОЙЧИВОСТИ.

27.1 Число внутренней устойчивости ($\alpha(G)$)

Определение

Внутренне устойчивое множество (или независимое множество) — это такой набор вершин графа, в котором никакие две вершины не соединены ребром.

27.2 Число внешней устойчивости ($\beta(G)$ или $\gamma(G)$)

Определение

Внешне устойчивое множество (или доминирующее множество) — это такой наименьший возможный набор вершин S, что любая вершина графа либо входит в S, либо соединена хотя бы с одной вершиной из S.

28 ХРОМАТИЧЕСКОЕ ЧИСЛО. ХРОМАТИЧЕСКИЙ ИНДЕКС.

28.1 Хроматическое число ($\chi(G)$)

Определение

Хроматическое число — это минимальное количество цветов, необходимое для раскраски вершин графа так, чтобы любые две соседние вершины (соединенные ребром) имели разные цвета.

28.2 Хроматический индекс ($\chi'(G)$)

Определение

Хроматический индекс — это минимальное количество цветов, необходимое для раскраски ребер графа так, чтобы любые два ребра, имеющие общую вершину, были окрашены в разные цвета.

29 ДЕРЕВЬЯ. ТЕОРЕМА О ВИСЯЧЕЙ ВЕРШИНЕ. ЧИСЛО РЕБЕР В ДЕРЕВЕ.

Определение

Дерево — это связный граф, который не содержит циклов.

29.1 Теорема о висячей вершине

Вершина графа называется висячей (или листом), если её степень равна 1 (то есть из неё выходит только одно ребро).

Теорема

В любом конечном дереве, содержащем более одной вершины (при $n \geq 2$), найдутся как минимум две висячие вершины.

Доказательство

Если мы начнем путь из любой вершины и будем идти по ребрам, не возвращаясь назад, то из-за отсутствия циклов и конечности числа вершин мы неизбежно зайдем в «тупик». Этот тупик и будет висячей вершиной. Поскольку путь имеет два конца, таких вершин минимум две.

29.2 Число ребер в дереве

Теорема

Если дерево содержит n вершин и m ребер, то справедливо равенство:

$$m = n - 1$$

- Если в связном графе ребер больше, чем $n - 1$, в нем обязательно есть хотя бы один цикл.
- Если в связном графе ребер меньше, чем $n - 1$, такой граф не может быть связным

29.3 Теорема о центрах дерева

Теорема

Идея заключается в том, что если мы удалим все листья (вершины степени 1) дерева одновременно, то эксцентриситет каждой оставшейся вершины уменьшится ровно на 1, а центр графа не изменится.

1. Операция удаления листьев Пусть T — исходное дерево, а T' — дерево, полученное из T путем удаления всех его листьев. Для любой «внутренней» вершины v
2. Изменение эксцентриситета Пусть $e_T(v)$ — эксцентриситет вершины v в дереве T, а $e_{T'}(v)$ — в новом дереве T'. Поскольку путь до самой далекой вершины в T обязательно заканчивался листом, а в T' мы этот лист убрали

$$e_{T'}(v) = e_T(v) - 1$$

Сведение к тривиальному случаю Будем повторять процедуру удаления листьев. На каждом шаге количество вершин уменьшается. Поскольку дерево конечно, этот процесс должен остановиться. В итоге мы придем к одной из двух финальных ситуаций:

1. Останется одна вершина. Она и будет единственным центром.
2. Останутся две вершины, соединенные ребром (диграф K_2). При удалении листьев в таком графе он исчезнет совсем, поэтому мы останавливаемся на этом шаге. У обеих вершин эксцентриситет равен 1, то есть обе они являются центрами.

30 КОРЕНЬ ДЕРЕВА. МНОЖЕСТВО ЛИСТЬЕВ ДЕРЕВА. ВЫСОТА ДЕРЕВА.

30.1 Корень дерева

Определение

Корень — это выделенная вершина дерева, от которой отсчитывается направление ко всем остальным вершинам.

30.2 Множества листьев

Определение

Листья (или висячие вершины) — это вершины корневого дерева, у которых нет потомков.

30.3 Уровни и высота дерева

Определение

Высота — это мера «глубины» или вертикального размера дерева. Чтобы её определить, нужно сначала понять уровни. У ровень вершины - это расстояние от корня до вершины. Корень находится на 0 уровне. Дальше остается посчитать расстояние до конечной вершины.

30.4 Теорема о существовании остовного дерева в связном графе. В любом связном графе можно построить остовное дерево.

Доказательство

Пусть дан связный граф $G = (V, E)$.

1. Проверка на наличие циклов Если в графе G нет циклов, то по определению (связный граф без циклов) он уже является дере-

вом. В этом случае остовное дерево совпадает с самим графом. Доказательство завершено.

2. Удаление ребра из цикла Если в графе G есть хотя бы один цикл, выберем в этом цикле произвольное ребро e. Рассмотрим новый граф G_1, полученный удалением этого ребра: $G_1 = G - \{e\}$.
3. Сохранение связности (Ключевой момент) Докажем, что граф G_1 остается связным.
4. Итерация Если в полученном графе G_1 все еще есть циклы, повторяем Шаг 2 и Шаг 3. Поскольку количество ребер в исходном графе конечно, процесс удаления не может продолжаться бесконечно.
5. Завершение Мы остановимся тогда, когда в графе не останется ни одного цикла.

Формально это можно записать через количество рёбер. В связном графе с n вершинами и m рёбрами всегда $m \geq n - 1$.

- Если $m = n - 1$, это дерево.
- Если $m > n - 1$, в графе обязательно есть циклы. Удаляя по одному ребру из циклов, мы ровно через $m - (n - 1)$ шагов придем к структуре, где осталось $n - 1$ ребро, обеспечивающее связность, что и будет остовным деревом.

31 ЦЕНТРЫ ДЕРЕВА. ДЛИНА ДИАМЕТРАЛЬНОЙ ЦЕПИ. МАКСИМАЛЬНЫЙ ТИП ВЕРШИН. ДИАМЕТРАЛЬНЫЙ ПУТЬ ДЕРЕВА.

31.1 Центры дерева

Определение

Центром дерева называется подмножество вершин с минимальным значением эксцентриситета

31.2 Диаметральный путь дерева

Определение

Диаметральным путем дерева называется простейшая цепь между двумя вершинами, имеющая максимально возможную длину.

31.3 Длина диаметральной цепи

Определение

Диаметром дерева $d(G)$ называется длина (количество ребер) его диаметрального пути.

31.4 Максимальный тип вершин

Определение

Максимальный тип вершин дерева — это значение максимальной степени среди всех его узлов, обозначаемое как $\Delta(G)$.

$$\Delta(G) = \max_{v \in V} \deg(v)$$

»»»> local

32 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЛОГИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ. ТАБЛИЦА ИСТИННОСТИ. МОЩНОСТЬ МНОЖЕСТВ ЛОГИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ(32)

32.1 Определение логической функции

Определение

Логическая функция – это функция $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, где и аргументы, и сама функция принимают значения из множества 0,1.

- Область определения: Множества всех наборов длины n из нулей и единиц. Всего 2^n таких наборов.
- Область значений: 0,1.

32.2 Таблица истинности

Таблица истинности является самым простым способом здания функции. Для этого необходимо выписать все возможные комбинации входных переменных и результат функции каждой из них.
Количество строк в таблице всегда равно 2^n, где n – число переменных.
Пример для $n = 2$:

x	y	$x \wedge y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

32.3 Мощность множества логической функции

Теорема

1. У нас есть n переменных
2. Количество наборов вариантов переменных равно 2^n
3. Для каждой строки в столбце значений функции мы можем выбрать либо 0, либо 1.
4. Следовательно, общее количество функций вычисляется как 2 в степени, равной количеству строк.

Таким образом получаем следующую формулу: $N = 2^{2^n}$

33 ТАБЛИЦА ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. ФУНКЦИИ С ФИКТИВНЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ.(33)

33.1 Таблица функций одной переменной

Исходя из формулы $N = 2^{2^n}$ существует всего 4 функции от одной переменной. Пусть есть переменная x. Далее в таблице представлены все возможные варианты того, что функция может выдать на выходе.

x	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

1. $f_0(x) = 0$ — Константа «ноль». Что бы мы ни подали на вход, на выходе всегда 0.
2. $f_1(x) = x$ — Тождественная функция (повторитель). Выдает то же самое, что пришло на вход.
3. $f_2(x) = \bar{x}$ — Отрицание (инверсия). Меняет 0 на 1 и наоборот.
4. $f_3(x) = 1$ — Константа «единица».

33.2 Функции с фиктивными переменными

Определение

Переменная x_i называется фиктивной для функции $f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$, если значение функции не зависит от того, чему равно x_i (при неизменных остальных переменных).

$$f(x_1, \ldots, 0, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, 1, \ldots, x_n)$$

Если переменная не фиктивная, она называется существенной. Пример:Представим функцию $f(x, y) = x \wedge (y \vee \bar{y})$.Мы знаем, что $(y \vee \bar{y})$ всегда равно 1. Значит, $f(x, y) = x \wedge 1 = x$. Здесь переменная y — фиктивная. Мы можем её «выкинуть», и суть функции не изменится.

34 ТАБЛИЦА ФУНКЦИЙ С 2-МЯ ПЕРЕМЕННЫМИ. КОНЪЮНКЦИЯ. ДИЗЪЮНКЦИЯ. ШТРИХ ШЕФФЕРА, СТРЕЛКА ПИРСА. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ, СЛОЖЕНИЕ ПО МОДУЛЮ 2, ИМПЛИКАЦИЯ. ФУНКЦИИ С ФИКТИВНЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ.(34)

34.1 Общая таблица функций 2-х переменных

Для двух переменных существует 4 набора возможных значений переменных и 16 возможных функций.

x	y	Конъюн ($x \wedge y$)	Дизъюн ($x \vee y$)	XOR ($\oplus$)	Стрелка Пирса ($x \downarrow y$)
0	0	0	0	0	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	1	0
1	1	1	1	0	0

x	y	Эквивалентность ($\leftrightarrow$)	Импликация ($x \to y$)	Штрих Шеффера ($x \mid y$)
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	0

34.2 все функции

- Конъюнкция ($x \wedge y$): Логическое «И». Истинна только когда оба аргумента — единицы. Похожа на обычное умножение.
- Дизъюнкция ($x \vee y$): Логическое «ИЛИ». Истинна, если есть хотя бы одна единица.
- Сложение по модулю 2 ($x \oplus y$): Оно же XOR или «исключающее ИЛИ». Истинна, только когда аргументы разные. (Важно: $1 \oplus 1 = 0$).
- Эквивалентность ($x \leftrightarrow y$): Наоборот, истинна, когда аргументы одинаковые. Это отрицание XOR.

- Импликация ($x \to y$): Логическое следование. Единственный случай, когда она ложна: из истины следует ложь ($1 \to 0 = 0$). В остальных случаях — 1. Запомни: «из лжи может следовать что угодно».
- Штрих Шеффера ($x \mid y$): Это «И-НЕ» ($\neg(x \wedge y)$). Ложен только на наборе $(1, 1)$.
- Стрелка Пирса ($x \downarrow y$): Это «ИЛИ-НЕ» ($\neg(x \vee y)$). Истинна только на наборе $(0, 0)$.

34.3 Функции с фиктивными переменными

Пусть дана функция $f(x, y)$, где столбец значений выглядит так: 0, 0, 1, 1.

1. Сравниваем строки $f(0, 0)$ и $f(0, 1)$. Оба раза результат 0.
2. Сравниваем строки $f(1, 0)$ и $f(1, 1)$. Оба раза результат 1. Вывод: Изменение y ни на что не повлияло. Значит, y — фиктивная, а $f(x, y) = x$.

Пример с формулой: $f(x, y) = (x \wedge y) \vee (x \wedge \bar{y})$ Выносим x за скобки: $x \wedge (y \vee \bar{y})$. Так как $(y \vee \bar{y}) = 1$, то $f = x \wedge 1 = x$. Переменная y исчезла — она фиктивная.

35 ТЕОРЕМА О РАЗЛОЖЕНИИ ФУНКЦИИ ПО ПЕРЕМЕННЫМ (РАЗЛОЖЕНИЕ ПО ОДНОЙ И ПО ВСЕМ ПЕРЕМЕННЫМ).(35)

Теорема

Любую функцию $f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ можно представить в виде:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = (\bar{x}_i \wedge f(x_1, \ldots, 0, \ldots, x_n)) \vee (x_i \wedge f(x_1, \ldots, 1, \ldots, x_n))$$

Доказательство

Доказательство теоремы о разложении по одной переменной

Тезис: Нужно доказать, что для любой булевой функции справедливо равенство:

$$f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = \bar{x}_i \cdot f(x_1, \ldots, 0, \ldots, x_n) \vee x_i \cdot f(x_1, \ldots, 1, \ldots, x_n)$$

Доказательство:Пусть $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ — произвольный набор значений переменных. Рассмотрим два возможных случая для значения переменной a_i:Случай 1: $a_i = 0$Подставим это значение в правую часть равенства:

$$\bar{0} \cdot f(a_1, \ldots, 0, \ldots, a_n) \vee 0 \cdot f(a_1, \ldots, 1, \ldots, a_n)$$

Поскольку $\bar{0} = 1$, а $0 \cdot (\text{любое значение}) = 0$, получаем:

$$1 \cdot f(a_1, \ldots, 0, \ldots, a_n) \vee 0 = f(a_1, \ldots, 0, \ldots, a_n)$$

Это совпадает со значением левой части функции на данном наборе.Случай 2: $a_i = 1$Подставим это значение в правую часть равенства:

$$\bar{1} \cdot f(a_1, \ldots, 0, \ldots, a_n) \vee 1 \cdot f(a_1, \ldots, 1, \ldots, a_n)$$

Поскольку $\bar{1} = 0$, получаем:

$$0 \vee 1 \cdot f(a_1, \ldots, 1, \ldots, a_n) = f(a_1, \ldots, 1, \ldots, a_n)$$

Это также совпадает со значением левой части. Вывод: Поскольку равенство справедливо для любого набора значений переменных, теорема доказана.

Если мы продолжим раскладывать функцию по каждой переменной одну за другой, мы придем к Совершенной Дизъюнктивной Нормальной Форме (СДНФ).

36 ДНФ И КНФ. СДНФ И СКНФ. ПРАВИЛО ПОЛУЧЕНИЯ СДНФ И СКНФ ИЗ ВЕКТОР-СТОЛБЦА.(36)

36.1 Определения ДНФ и КНФ

Определение

- ДНФ (Дизъюнктивная нормальная форма) — это дизъюнкция («ИЛИ») элементарных конъюнкций («И»). Пример: $(x \wedge \bar{y}) \vee (y \wedge z)$.
- КНФ (Конъюнктивная нормальная форма) — это конъюнкция («И») элементарных дизъюнкций («ИЛИ»). Пример: $(x \vee \bar{y}) \wedge (y \vee z)$.

36.2 СДНФ и СКНФ (Совершенные формы)

Определение

Форма называется Совершенной, если каждая элементарная конъюнкция (или дизъюнкция) содержит в себе все переменные, от которых зависит функция.

- СДНФ: Каждое слагаемое содержит все переменные. Каждому набору, где функция равна 1, соответствует ровно одна конъюнкция.
- СКНФ: Каждый множитель содержит все переменные. Каждому набору, где функция равна 0, соответствует ровно одна дизъюнкция.

36.3 Правило получения из вектор-столбца значений

Определение

Вектор-столбец — это просто значения функции из таблицы истинности, записанные в столбик снизу вверх или сверху вниз.

Алгоритм получения СДНФ:

- Выделяем в вектор-столбце все единицы.
- Для каждой единицы смотрим на соответствующий ей набор значений переменных $(x_1, x_2, \dots, x_n)$.
- Записываем конъюнкцию: если переменная в наборе равна 1, пишем её без отрицания, если 0 — с отрицанием.
- Соединяем все полученные конъюнкции знаком дизъюнкции ($\vee$).

Алгоритм получения СКНФ:

- Выделяем в вектор-столбце все нули.
- Для каждого нуля смотрим на набор значений переменных.
- Записываем дизъюнкцию: если переменная в наборе равна 0, пишем её без отрицания, если 1 — с отрицанием (это интуитивно «наоборот» по сравнению с СДНФ).
- Соединяем все полученные дизъюнкции знаком конъюнкции ($\wedge$).

37 БУЛЕВЫ ОПЕРАЦИИ. БУЛЕВА АЛГЕБРА. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА БУЛЕВЫХ ОПЕРАЦИЙ.(36)

37.1 Определение Булевой алгебры

Определение

Булева алгебра — это алгебраическая структура $\langle B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1\rangle$, состоящая из множества B (элементы которого называются логическими значениями), двух бинарных операций — дизъюнкции ($\vee$) и конъюнкции ($\wedge$), одной унарной операции — отрицания ($\neg$), и двух выделенных констант: 0 (логический ноль) и 1 (логическая единица).
В контексте двузначной логики множество $B = \{0, 1\}$. Операции определяются следующими правилами:

- Конъюнкция ($x \wedge y$): принимает значение 1 тогда и только тогда, когда оба аргумента равны 1.
- Дизъюнкция ($x \vee y$): принимает значение 1, если хотя бы один из аргументов равен 1.
- Отрицание ($\neg x$): меняет значение аргумента на противоположное ($\neg 0 = 1, \neg 1 = 0$).

37.2 Аксиоматика и свойства булевых операций

Для любых элементов $x, y, z \in B$ справедливы следующие тождества:

Группа 1: Коммутативность, ассоциативность и дистрибутивность

Коммутативность:

$$x \vee y = y \vee x$$
$$x \wedge y = y \wedge x$$

Ассоциативность:

$$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$$
$$(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$$

Дистрибутивность (распределительный закон):

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \quad \text{(конъюнкции относительно дизъюнкции)}$$
$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) \quad \text{(дизъюнкции относительно конъюнкции)}$$

Группа 2: Законы идемпотентности и поглощения

Идемпотентность:

$$x \vee x = x$$
$$x \wedge x = x$$

Поглощение:

$$x \vee (x \wedge y) = x$$
$$x \wedge (x \vee y) = x$$

Группа 3: Свойства констант и инверсии

Операции с константами (0 и 1):

$$x \vee 0 = x, \qquad x \vee 1 = 1$$
$$x \wedge 1 = x, \qquad x \wedge 0 = 0$$

Законы исключенного третьего и противоречия:

$$x \vee \neg x = 1$$
$$x \wedge \neg x = 0$$

Закон двойного отрицания:

$$\neg(\neg x) = x$$

Группа 4: Законы де Моргана

Отрицание сложных выражений:

$$\neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y$$
$$\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y$$

37.3 Принцип двойственности

Для любого верного логического тождества справедливо двойственное ему тождество, полученное путем взаимной замены операций дизъюнкции ($\vee$) на конъюнкцию ($\wedge$) и констант 0 на 1 (и наоборот). Это свойство симметрии подчеркивает равноправие операций в структуре булевой алгебры.

38 ЗАКОНЫ: ДЕ МОРГАНА, ПОГЛОЩЕНИЯ, СКЛЕИВАНИЯ, РАСЩЕПЛЕНИЯ.(38)

38.1 Законы де Моргана

Законы де Моргана устанавливают связь между отрицанием, конъюнкцией и дизъюнкцией. Они позволяют переходить от отрицания всей логической операции к отрицанию отдельных переменных.

- Для конъюнкции: Отрицание конъюнкции равно дизъюнкции отрицаний.

$$\overline{x \cdot y} = \bar{x} \vee \bar{y}$$

- Для дизъюнкции: Отрицание дизъюнкции равно конъюнкции отрицаний.

$$\overline{x \vee y} = \bar{x} \cdot \bar{y}$$

38.2 Законы поглащения

Определение

Законы поглощения позволяют упрощать выражения, в которых одна переменная (или подвыражение) входит как в качестве отдельного операнда, так и в состав другого операнда.

- Первый закон поглощения:

$$x \vee (x \cdot y) = x$$

- Второй закон поглощения:

$$x \cdot (x \vee y) = x$$

38.3 Законы склеивания

Определение

Законы склеивания являются фундаментальными для минимизации булевых функций. Они позволяют исключать переменную, если она входит в две конъюнкции (или дизъюнкции) в прямом и инверсном виде при неизменности остальных частей.

- Для СДНФ (склеивание по конъюнкциям):

$$(x \cdot K) \vee (\bar{x} \cdot K) = K$$

(Где K — любая элементарная конъюнкция)

- Для СКНФ (склеивание по дизъюнкциям):

$$(x \vee D) \cdot (\bar{x} \vee D) = D$$

(Где D — любая элементарная дизъюнкция)

38.4 Законы расщепления (Обобщенная дистрибутивность)

- Расщепление по переменной (прямое):

$$x = (x \cdot y) \vee (x \cdot \bar{y})$$

- Расщепление (двойственное):

$$x = (x \vee y) \cdot (x \vee \bar{y})$$

39 ИМПЛИЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ. ИМПЛИКАНТ, ПРОСТОЙ ИМПЛИКАНТ, СОКРАЩЕННАЯ ДНФ. ПРОВЕРКА ИМПЛИКАНТ НА ПРОСТОТУ.(39)

39.1 Понятие импликанта

Определение

Элементарная конъюнкция K называется импликантом функции f, если из истинности K следует истинность f. Математически это записывается как: $K \to f \equiv 1$ (или $K \leq f$).

39.2 Простой импликант

Определение

Импликант K функции f называется простым, если после удаления из него любой переменной (любого литерала) полученная конъюнкция перестает быть импликантом этой функции.

39.3 Сокращенная ДНФ

Определение

Сокращенная ДНФ — это дизъюнкция всех простых импликантов данной функции.

39.4 Проверка импликанта на простоту

Для проверки того, является ли импликант K простым, используется метод вычеркивания переменных:

1. Пусть $K = x_1^{\sigma_1} \cdot x_2^{\sigma_2} \dots x_m^{\sigma_m}$.
2. Поочередно удаляем по одной переменной из конъюнкции K.

3. Для каждой полученной укороченной конъюнкции K' проверяем условие $K' \leq f$.
4. Результат:
   - Если хотя бы для одной K' условие $K' \leq f$ выполняется, то исходный импликант K не является простым (его можно сократить).
   - Если ни одна сокращенная конъюнкция не является импликантом функции f, то K — простой импликант.

40 ПОЛУЧЕНИЕ СОКРАЩЕННОЙ ДНФ МЕТОДОМ БЛЕЙКА-ПОРЕЦКОГО. (40)

40.1 Теоретическая основа метода

Метод базируется на использовании двух основных операций: обобщенного склеивания и поглощения.

- Операция обобщенного склеивания:Если функция представлена в виде $f = Ax \vee B\bar{x} \vee \Phi$, то к ней можно добавить конъюнкцию $(A \cdot B)$, называемую консенсусом (или логическим следствием) двух исходных конъюнкций.

$$Ax \vee B\bar{x} = Ax \vee B\bar{x} \vee AB$$

- Операция поглощения:Если в выражении присутствуют конъюнкции K_1 и K_2 такие, что $K_1 \subseteq K_2$ (все литералы K_1 входят в K_2), то K_2 удаляется:

$$K_1 \vee K_1K_2 = K_1$$

40.2 Алгоритм Блейка-Порецкого

Процесс получения сокращенной ДНФ состоит из двух этапов:

Этап I: Применение правила обобщенного склеивания К исходной ДНФ последовательно применяются все возможные операции обобщенного склеивания до тех пор, пока это возможно.

Этап II: Применение правила поглощения После того как новые консенсусы перестают порождаться, из полученной ДНФ удаляются все поглощаемые конъюнкции.

41 ДВОЙСТВЕННАЯ ФУНКЦИЯ. САМОДОВОЙСТВЕННАЯ ФУНКЦИЯ. ПРИНЦИП ДВОЙСТВЕННОСТИ.(41)

41.1 Двойственная функция

Определение

Функция $f^*(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется двойственной к функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, если она получается путем инвертирования всех аргументов и самого значения функции:

$$f^*(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \neg f(\neg x_1, \neg x_2, \ldots, \neg x_n)$$

Свойства двойственности:

- Если заменить в выражении функции все операции $\vee$ на $\wedge$, $\wedge$ на $\vee$, а константы 0 на 1 и 1 на 0, получится двойственная функция.
- Пример: Для функции конъюнкции $f = x \wedge y$ двойственной будет дизъюнкция $f^* = x \vee y$.
- Справедливо соотношение: $(f^*)^* = f$ (принцип взаимности).

41.2 Самодвойственная функция

Определение

Функция называется самодвойственной, если она равна своей двойственной функции:

$$f = f^*$$

То есть: $f(x_1, \ldots, x_n) = \neg f(\neg x_1, \ldots, \neg x_n)$.

41.3 Принцип двойственности

Этот принцип утверждает: если в логическом тождестве заменить каждую функцию на двойственную ей, то полученное равенство также будет верным.

Это означает:

1. Замените все $\vee$ на $\wedge$.
2. Замените все $\wedge$ на $\vee$.
3. Замените все 0 на 1, а 1 на 0.

42 ПОЛУЧЕНИЕ ДВОЙСТВЕННОЙ ФУНКЦИИ ПО ОПРЕДЕЛЕНИИ. ПРИВЕДЕНИЕ ЕЕ К ДНФ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ САМОДОВОЙСТВЕННОСТИ.(42)

42.1 Получение двойственной функции по определению

тобы получить f^*, нужно взять отрицание от функции, где все аргументы также инвертированы:

$$f^*(x_1, \ldots, x_n) = \neg f(\neg x_1, \ldots, \neg x_n)$$

42.2 Приведение к ДНФ

Для этого используем законы алгебры логики, чтобы выражение имело вил конечной дизъюнктивной формы, где каждая из элементырных конъюнкций входит не более одного раза, а все элементарные конъюнкции связаны дизъюнкциями.

42.3 Определение самодвойственности

Определение

Функция называется самодвойственной, если $f = f^*$. Проверить это можно двумя способами:

1. Сравнение выражений
2. Таблица истинности

43 АЛГЕБРА ЖЕГАЛКИНА. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ФОРМУЛЫ АЛГЕБРЫ ЖЕГАЛКИНА. ФОРМУЛЫ ПЕРЕХОДА ОТ БУЛЕВОЙ ФОРМУЛЫ К ПОЛИНОМУ ЖЕГАЛКИНА.(43)

43.1 Основы алгебры Жегалкина

Определение

В этой системе базис состоит из набора функций $\{\wedge, \oplus, 1\}$, где:

- Конъюнкция (умножение): $x \wedge y$
- Сложение по модулю 2 (XOR): $x \oplus y$

Свойства операций:

1. Коммутативность и ассоциативность для обеих операций.
2. Дистрибутивность: $x(y \oplus z) = xy \oplus xz$.
3. Идемпотентность умножения: $x \cdot x = x$.
4. Свойство нуля: $x \oplus x = 0$ и $x \oplus 0 = x$.

43.2 Полином Жегалкина

Любую булеву функцию можно представить в виде суммы (по модулю 2) различных конъюнкций переменных. Это представление единственно (с точностью до порядка слагаемых).

$$P = a_0 \oplus a_1x_1 \oplus a_2x_2 \oplus \cdots \oplus a_{12}x_1x_2 \oplus \cdots \oplus a_{1\ldots n}x_1 \ldots x_n$$

Где коэффициенты a_i принимают значения 0 или 1.

43.3 Формулы перехода от булевой формулы к полиному

Правила замены:

- Отрицание: $\neg x = x \oplus 1$
- Конъюнкция: $x \wedge y = xy$
- Дизъюнкция: $x \vee y = x \oplus y \oplus xy$
- Импликация: $x \to y = 1 \oplus x \oplus xy$
- Эквивалентность: $x \leftrightarrow y = 1 \oplus x \oplus y$

43.4 Методы построения полинома

1. Метод равносильных преобразований
2. Метод неопределенных коэффициентов Вы записываете общий вид полинома и подставляете в него значения функции из таблицы истинности, решая систему уравнений. (То что разбирали на лекции и практике)
3. Метод преобразования треугольником (Метод Паскаля) Это графический способ, где коэффициенты полинома находятся путем последовательного сложения значений таблицы истинности.

44 ПОЛУЧЕНИЕ ПОЛИНОМА ЖЕГАЛКИНА. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЛИНЕЙНОСТИ ФУНКЦИИ.(44)

44.1 Получение полинома Жегалкина

1. Аналитические подстановки Используются следующие формулы:
   - $x \wedge y \to xy$
   - $\neg x \to x \oplus 1$
   - $x \vee y \to x \oplus y \oplus xy$
   - $x \to y \to x \oplus 1 \oplus xy$
2. Составление общего выида через таблицу истинности и решение уравнений
3. Метод треугольника
   (a) Выписываете столбец значений функции f.
   (b) Рядом рисуете новый столбец, где каждый элемент — это сумма по модулю 2 двух соседних элементов из предыдущего столбца.
   (c) Повторяете, пока не останется один элемент.
   (d) Коэффициенты полинома — это самые верхние числа в каждом столбце.

44.2 Определение линейности функции

Определение

Функция называется линейной, если в её полиноме Жегалкина отсутствуют произведения переменных. То есть переменные встречаются только в первой степени и соединяются операцией $\oplus$.Общий вид линейной функции:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_0 \oplus a_1x_1 \oplus a_2x_2 \oplus \cdots \oplus a_nx_n$$

где $a_i \in \{0, 1\}$.

Как проверить функцию на линейность?

1. Построить полином Жегалкина. Если в нем есть слагаемые типа xy, xyz или любые другие произведения двух и более переменных — функция нелинейная.
2. По таблице истинности. Для линейных функций (кроме констант) количество наборов, на которых функция равна 1, всегда равно 2^{n-1} (ровно половина таблицы). Однако это необходимое, но не достаточное условие.

45 ТЕОРЕМА ШЕННОНА

Теорема

[Теорема Шеннона]

Любую логическую функцию можно разложить по одной или нескольким переменным:

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_i f_{x_i=1} \oplus \neg x_i f_{x_i=0}$$

Доказательство

Проверим разложение. Подставим $x_i = 1$, $x_i = 0$:

$$x_i f_{x_i=1} \oplus \neg x_i f_{x_i=0} = 1 \cdot f_{x_i=1} \oplus 0 \cdot f_{x_i=0} = f_{x_i=1}$$

$$x_i f_{x_i=1} \oplus \neg x_i f_{x_i=0} = 0 \cdot f_{x_i=1} \oplus 1 \cdot f_{x_i=0} = f_{x_i=0}$$

46 ТЕОРЕМА О ПРЕДСТАВЛЕНИИ БУЛЕВОЙ ФУНКЦИИ В СДНФ И СКНФ

Теорема

Любая булева функция, не равная тождественно нулю, может быть однозначно представлена в виде совершенной дизъюнктивной нормальной формы (СДНФ), а любая функция, не равная тождественно единице, — в виде совершенной конъюнктивной нормальной формы (СКНФ).

Доказательство

Рассмотрим таблицу истинности функции f.

Для СДНФ:

Выберем все стоки, где $f = 1$. Для каждой такой строки построим конъюнкцию всех переменных: если переменная равна 1, то берем без отрицания. Иначе – с ним.

Для СКНФ:

Выберем все строки, где $f = 0$. Для каждой такой строки построим дихъюнкцию всех переменных: если переменная равна 0, то берем без отрицания. Иначе – с ним.

Единственность следует из того, что таблица истинности однозначно задает функцию

47 ПРИНЦИП ДВОЙСТВЕННОСТИ В БУЛЕВОЙ АЛГЕБРЕ

Теорема

Если в верном тождестве булевой алгебры заменить все операции на двойственные, 0 на 1 и 1 на 0, то получится также верное тождество.

Доказательство

Если $f = g$, то их двойственные также равны: $f* = g*$. Но при замене из формулировки теоремы от функций f и g происходит переход к их двойственным, которые также равны.