# Математический анализ. Экзамен.

4 января 2026 г.

## СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

# 1 СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ МНОЖЕСТВА. ПОРОЖДАЮЩАЯ ПРОЦЕДУРА. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ СВОЙСТВО.

## 1.1 Способы задания множества

1. Перечисление $\{a, b, c...\}$
2. Характеристическое свойство $M \stackrel{\text{def}}{=} \{x : P(x)\}$, где $P(x)$ – предикат
3. Порождающая процедура $M := \{y : y = f(x), x \in E\}$, где $f$ – функция от $x$

## 1.2 Описание способов задания множества

**Определение**

**Характеристическое свойство** – способ задания множества, при котором каждый его элемент обладает свойством $P(x)$

$$M \stackrel{\text{def}}{=} \{x : P(x)\}$$

**Определение**

**Порождающая процедура** – способ задания множества, при котором каждый его элемент является результатом выполнения функции $f$ от переменной $x$ из некоторого множества $E$.

$$M := \{y : y = f(x), x \in E\}$$

# 2 ОТОБРАЖЕНИЯ. ИНЪЕКЦИЯ, СЮРЪЕКЦИЯ, БИЕКЦИЯ. ПРЯМЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ МНОЖЕСТВ

## 2.1 Отображения

**Определение**

Отображение – способ сопоставления элементов между множествами.

Отображения бывают трех видов:

1. Инъекция
2. Сюръекция
3. Биекция

**Определение**

**Инъекция** – такое отображение $f(A) \to B$, при котором любой элемент $B$ имеет **не более одного** прообраза в множестве $A$.

**Определение**

**Сюръекция** – такое отображение $f(A) \to B$, при котором любой элемент $B$ имеет **не менее одного** прообраза в множестве $A$.

**Определение**

**Биекция** – это отображение, являющееся и сюръекцией, и инъекцией одновременно. То есть взаимооднозначное соответствие.

## 2.2 Прямые произведения множеств

**Определение**

**Прямое (декартово) произведение множеств** $A$ и $B$ – все такие пары чисел $(a, b)$, где $a \in A$, $b \in B$.

$$A \times B \stackrel{\text{def}}{=} \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

# 3 МОЩНОСТЬ МНОЖЕСТВА

Определение

**Мощность множества** – количество элементов в нем (для конечных множеств).

Для бесконечных:

1. Если между бесконечным множеством $X$ и множеством натуральных чисел $\mathbb{N}$ существует биекция, то говорят, что $X$ имеет счётную мощность. Это "наименьшая"бесконечная мощность.
2. Если между $X$ и множеством всех вещественных чисел $\mathbb{R}$ (или отрезком $[0, 1]$) существует биекция, то говорят, что $X$ имеет мощность континуума.

# 4 ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ.

## 4.1 Операции

1. $A \cap B$ – пересечение

$$A \cap B \overset{\text{def}}{=} \{x : (x \in A) \wedge (x \in B)\}$$

2. $A \cup B$ – объединение

$$A \cap B \overset{\text{def}}{=} \{x : (x \in A) \vee (x \in B)\}$$

3. $A \setminus B$ – разность

$$A \setminus B \overset{\text{def}}{=} \{x : (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$$

4. $A \triangle B$ – симметрическая разность

$$A \setminus B \overset{\text{def}}{=} \{x : (x \in (A \setminus B)) \vee (x \in (B \setminus A))\}$$

5. $\bar{A}$ – дополнение до универсума

$$\bar{A} \overset{\text{def}}{=} \{x : (x \notin A) \wedge (x \in U)\}$$

## 4.2 Свойства

1. $A \cap A = A$, $A \cup A = A$
2. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$,
   $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
3. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
   $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
4. $A \cup \emptyset = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$
5. $A \cup U = U$, $A \cap U = A$
6. $A \cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$

7. $A \cup B = A \cap \bar{B}$,
   $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$
8. $\bar{\bar{A}} = A$
9. $A \setminus B = A \cap \bar{B}$

## 5 ПРЯМОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ $N$ МНОЖЕСТВ.

Определение

**Прямое произведение $n$ множеств** – все возможные кортежи из элементов этих $n$ множеств.
На примере двух множеств:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

## 6 ТЕОРЕМА О МОЩНОСТИ ПРЯМОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ МНОЖЕСТВ

**Теорема**

Если $A$ и $B$ конечны, $|A| = n$, $|B| = m$ то $|A \times B| = |A||B| = mn$

**Доказательство**

Рассмотрим кортеж. В нем на первом месте стоит элемент из $A$, на втором – из $B$. К каждому элементу из $A$ можно приставить $m$ элементов из $B$, получив тем самым множество, представляющее собой результат декартового произведения. То есть на первом месте в кортеже может стоять $n$ элементов, на втором – $m$. Значит всего таких кортежей можно составить $mn$ штук.

## 7 ПОНЯТИЕ ВЕКТОРА. ПРОЕКЦИЯ ВЕКТОРА НА ОСИ. ПРОЕКЦИЯ МНОЖЕСТВА ВЕКТОРОВ

**Определение**

Пусть задано прямое произведение $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$. **Вектором** называется упорядоченный набор $(a_1, a_2, ...a_n)$, где $a_i \in A_i$

**Определение**

Пусть задано прямое произведение $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$. **Проецированием** $\mathrm{Pr}_k(a_1, a_2, ...a_k...a_n)$ называется отображение $(a_1, a_2, ...a_n) \to (a_k)$

$$\mathrm{Pr}_k(a_1, a_2, ...a_k...a_n) \overset{\text{def}}{=} f((a_1, a_2, ...a_k...a_n)) \to (a_k)$$

Проецирование множества векторов:

$$\mathrm{Pr}_{i,j,...m}(\{(a_1, a_2, ...a_m), (b_1, b_2, ...b_m)...\}) =$$

$$= \{(a_i, a_j, ...a_m), (b_i, b_j, ...b_m)...\}$$

## 8 ПРАВИЛО СУММЫ. ПРАВИЛО ПРОИЗВЕДЕНИЯ.

Теорема

[Правило суммы]

Пусть все выборки из множества $A$ делятся на две взаимоисключающие $A_1$ и $A_2$. Число выборок первого типа $m_1$, второго – $m_2$. Тогда число всех выборок из множества $A$ равно $m_1 + m_2$

Доказательство

Данное правило является следствием формулы включений-исключений:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

где $A \cap B = \emptyset$

Теорема

[Правило произведения]

Пусть число способов построить выборку из множества $A$ равно $n$, из множества $B$ – $m$. Тогда число способов построить выборку $(a, b)$ $(a \in A, b \in B)$ равно $mn$

Доказательство

Данное утверждение эквивалентно теореме о мощности прямого произведения. $|A \times B| = |A||B| = mn$

## 9 ЧИСЛО РАЗМЕЩЕНИЙ БЕЗ ПОВТОРЕНИЙ, ЧИСЛО РАЗМЕЩЕНИЙ С ПОВТОРЕНИЯМИ

**Определение**

Пусть имеется множество из $n$ элементов. Упорядоченное подмножество из $k$ элементов называется размещением без повторений

**Теорема**

Число размещений без повторений можно рассчитать по формуле:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

**Доказательство**

Пусть есть $n$ элементов, из которых нужно составить упорядоченные наборы из $k$ элементов.

Тогда на первое место можно поставить $n$ элементов, на второе – $n-1$, на третье – $n-2$ и так далее до $k$-го места, куда можно поставить $n-k+1$ элементов. тогда посчитаем общее количество наборов по правилу произведения:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

**Определение**

Пусть имеется множество $A$ из $n$ элементов. Набор $(m_1, m_2 \ldots m_k)$, где $\forall i \Rightarrow m_i \in A$, называется размещением с повторениями.

**Теорема**

Число размещений с повторениями можно рассчитать по формуле:

$$\overline{A_n^k} = n^k$$

**Доказательство**

Есть $k$ позиция, на каждой тз них $n$ элементов. Тогда по правилу произведения всего $n^k$ наборов

## 10 ЧИСЛО ПЕРЕСТАНОВОК БЕЗ ПОВТОРЕНИЙ, ЧИСЛО ПЕРЕСТАНОВОК С ПОВТОРЕНИЯМИ.

**Определение**

Пусть имеется множество из $n$ элементов. **Перестановкой с повторениями** называется упорядоченная последовательность его элементов

**Теорема**

Перестановки без повторений можно посчитать по формуле:

$$P_n = n!$$

**Доказательство**

Данная формула является следствием правила произведения. Есть $n$ позиций, на каждой следующей на 1 элемент меньше, чем на предыдущей. Значит формула:

$$P_k = n!$$

**Определение**

Пусть имеется множество из $n$ элементов, среди которых:

- $k_1$ неразличимых элементов 1-го типа
- $k_2$ неразличимых элементов 2-го типа

  $\ldots$
- $k_s$ неразличимых элементов s-го типа

**Перестановкой с повторениями** называется упорядоченная последовательность элементов этого множества

**Теорема**

Число перестановок с повторениями можно рассчитать по формуле:

$$\overline{P_n} = \frac{(k_1 + k_2 + ... + k_s)!}{k_1!k_2!...k_s!}$$

где $k_1 + k_2 + ... + k_s = n$

Доказательство

Для начала сосчитаем количество перестановок без повторений (представим, что в исходном множестве разные элементы): $n!$. Теперь сосчитаем перестановки для каждой группы: $k_i!$. Поскольку в исходном множестве есть группы одинаковых элементов, то их перестановки для нас неразличимы, а значит необходимо убрать все перестановки, в которых одинаковые наборы элементов одного типа, а их, как мы сосчитали, для каждого типа $k_i!$. Итого формула:

$$\overline{P_n} = \frac{n!}{k_1!k_2!...k_s!}$$

# 11 ЧИСЛО СОЧЕТАНИЙ БЕЗ ПОВТОРЕНИЙ, ЧИСЛО СОЧЕТАНИЙ С ПОВТОРЕНИЯМИ.

## 11.1 Сочетания без повторений

Определение

Пусть имеется множество из $n$ элементов. Неупорядоченное подмножество из $k$ его элементов называется **сочетанием без повторений**

Теорема

Число сочетаний без повторений рассчитывается по формуле:

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Доказательство

Посмотрим на формулу размещений без повторений: $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$. Чтобы рассчитать сочетания, небходимо убрать из размещений все те наборы, в которых совпадают элементы. Для каждого набора элементов таких повторяющихся наборов $k!$, ведь это просто перестановки. Тогда итоговая формула:

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

## 11.2 Сочетания с повторениями

Определение

Пусть имеется $k$ классов элементов множества $A$. Сочетанием с повторениями называется неупорядоченная выборка $n$ элементов из множества $A$.

**Теорема**

Число сочетаний с повторениями можно рассчитать по формуле:

$$\overline{C_n^k} = C_{n+k-1}^{k-1} = \frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!}$$

**Доказательство**

Используем метод "звезд и перегородок": будем рассматривать $k$ звезд и $n-1$ перегородок для $n$ типов звезд. Любая такая последовательность однозначно задаёт одно сочетание с повторениями, и наоборот – любому сочетанию соответствует такая последовательность.

Общее число символов в последовательности: $n+k-1$. Из них выберем $k$ позиций для звезд (или $n-1$ для перегородок). Тогда таких последовательностей:

$$\overline{C_n^k} = \frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!}$$

# 12 СООТВЕТСТВИЯ И ФУНКЦИИ

## 12.1 Соответствия

Определение

Пусть даны два множества $A$ и $B$. **Соответствием** называется подмножество $A \times B$.

Определение

**Областью определения** $G$ называется $\mathrm{Pr}_A\, G$

Определение

**Областью значений** $G$ называется $\mathrm{Pr}_B\, G$

Определение

**Образом элемента** $a$ называется множество всех тех элементов $b$, которые входят в пары $(a, b) \in G$

$$G(a) = \{b : (a, b) \in G\}$$

Определение

**Прообразом элемента** $b$ называется множество всех тех элементов $a$, которые входят в пары $(a, b) \in G$

$$G^{-1}(b) = \{a : (a, b) \in G\}$$

Определение

Соответствие называется **полностью определенным**, если его областью определения является множество $A$.

Определение

Соответствие называется **сюръективным**, если его областью значений является множество $B$

Определение

Соответствие называется **инъективным**, если каждый элемент в области значений имеет ровно один прообраз

Определение

Соответствие называется **функциональным**, если каждый элемент в его области определения имеет не более одного образа

Определение

Соответствие называется **биективным**, если:

1. Является полностью определенным
2. Функциональным
3. инъективным
4. Сюръективным

Важно

Отображение **"в если оно не является сюръективным**, и **"на"в противоположном случае**.

### 12.2 Функции

Определение

**Функция** – это всюду определенное и функциональное соответствие

Определение

Функция называется **инъективной**, если разным аргументам соответствуют разные значения

Определение

Функция называется **сюръективной**, если все элементы множества значений "покрыты"

**Определение**

Функция называется **биективной**, если она является сюръективной и инъективной.

**Определение**

Для любого соответствия $R \subseteq A \times B$ можно определить **обратное соответствие** $R^{-1} \subseteq B \times A$

**Важно**

Обратное соответствие будет функцией тогда и только тогда, когда функция биективна

# 13 ВЗАИМНО ОДНОЗНАЧНЫЕ СООТВЕТСТВИЯ И МОЩНОСТЬ МНОЖЕСТВ

Определение

Соответствие называется **взаимно-однозначным**, если оно сюръективно и инъективно (каждому элементу $A$ сопоставляется ровно один элемент $B$)

## 13.1 Установление взаимно-однозначного соответствия между множествами чисел

Теорема

Множество $\mathbb{Z}$ счетно

Доказательство

Попробуем установить биекцию между $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}$. Действительно, если установить соответствие следующим образом ($f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$):

$$f(2n) = n$$

$$f(2n+1) = -n$$

$$f(1) = 0$$

То окажется, что каждому элементу $\mathbb{N}$ сопоставлен ровно один элемент $\mathbb{Z}$ и наоборот, а значит получена биекция.
Множество $\mathbb{Z}$ счетно.

Теорема

Множество $\mathbb{Q}$ счетно

Доказательство

Составим таблицу:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | -1 | 2 | -2 |
| $\frac{0}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{-1}{2}$ | $\frac{2}{2}$ | $\frac{-2}{2}$ |
| $\frac{0}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{-1}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{-2}{3}$ |
| ... | | | | |

В этой таблице представлены все рациональные числа. Теперь можно пойти "змейкой"и сосчитать все эти числа.

Значит $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$

## 14 ТЕОРЕМА О ЧИСЛЕ ПОДМНОЖЕСТВ КОНЕЧНОГО МНОЖЕСТВА.

Теорема

Число всех подмножеств конечного множества, состоящего из $n$ элементов, равно $2^n$

Доказательство

Каждое подмножество исходного множество можно задать, установив "флаг"каждому его элементу: включать его в подмножество или нет. Всего два варианта, а значит по правилу произведения всего вариантов подмножеств:

$$2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^n$$

## 15 ЧИСЛО ПОДМНОЖЕСТВ СЧЕТНОГО МНОЖЕСТВА.

**Теорема**

Множество всех подмножеств счетного множества несчетно

**Доказательство**

Предположим, что все подмножества данного счетного множества можно пронумеровать: $A_1, A_2, ...A_n$ и построим множество $D$, противоречащее допущению, по следующему правилу:
*Число $n$ входит в $D$ тогда и только тогда, когда оно не входит в $A_n$*

$$D = \{n \in \mathbb{N} : n \notin A_n\}$$

Но тогда получим противоречие: $D$ – корректно построенное множество натуральных чисел, а значит оно должно являться подмножеством $\mathbb{N}$
Значит $|\mathbb{N}| \neq |2^{\mathbb{N}}|$