

Математический анализ. Экзамен.

4 января 2026 г.

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

1	СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ МНОЖЕСТВА. ПОРОЖДАЮЩАЯ ПРОЦЕДУРА. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ СВОЙСТВО.	3
1.1	Способы задания множества	3
1.2	Описание способов задания множества.....	3
2	ОТОБРАЖЕНИЯ. ИНЪЕКЦИЯ, СЮРЪЕКЦИЯ, БИЕКЦИЯ. ПРЯМЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ МНОЖЕСТВ	4
2.1	Отображения.....	4
2.2	Прямые произведения множеств	4
3	МОЩНОСТЬ МНОЖЕСТВА	5
4	ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ.	6
4.1	Операции	6
4.2	Свойства.....	6
5	ПРЯМОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ N МНОЖЕСТВ.	8
6	ТЕОРЕМА О МОЩНОСТИ ПРЯМОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ МНОЖЕСТВ	9
7	ПОНЯТИЕ ВЕКТОРА. ПРОЕКЦИЯ ВЕКТОРА НА ОСИ. ПРОЕКЦИЯ МНОЖЕСТВА ВЕКТОРОВ	10
8	ПРАВИЛО СУММЫ. ПРАВИЛО ПРОИЗВЕДЕНИЯ.	11
9	ЧИСЛО РАЗМЕЩЕНИЙ БЕЗ ПОВТОРЕНИЙ, ЧИСЛО РАЗМЕЩЕНИЙ С ПОВТОРЕНИЯМИ.....	12
10	ЧИСЛО ПЕРЕСТАНОВОК БЕЗ ПОВТОРЕНИЙ, ЧИСЛО ПЕРЕСТАНОВОК С ПОВТОРЕНИЯМИ.	14
11	ЧИСЛО СОЧЕТАНИЙ БЕЗ ПОВТОРЕНИЙ, ЧИСЛО СОЧЕТАНИЙ С ПОВТОРЕНИЯМИ.....	16

11.1 Сочетания без повторений	16
11.2 Сочетания с повторениями.....	16

1 СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ МНОЖЕСТВА. ПОРОЖДАЮЩАЯ ПРОЦЕДУРА. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ СВОЙСТВО.

1.1 Способы задания множества

1. Перечисление $\{a, b, c, \dots\}$
2. Характеристическое свойство $M \stackrel{\text{def}}{=} \{x : P(x)\}$, где $P(x)$ – предикат
3. Порождающая процедура $M := \{y : y = f(x), x \in E\}$, где f – функция от x

1.2 Описание способов задания множества

Определение

Характеристическое свойство – способ задания множества, при котором каждый его элемент обладает свойством $P(x)$

$$M \stackrel{\text{def}}{=} \{x : P(x)\}$$

Определение

Порождающая процедура – способ задания множества, при котором каждый его элемент является результатом выполнения функции f от переменной x из некоторого множества E .

$$M := \{y : y = f(x), x \in E\}$$

2 ОТОБРАЖЕНИЯ. ИНЪЕКЦИЯ, СЮРЪЕКЦИЯ, БИЕКЦИЯ. ПРЯМЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ МНОЖЕСТВ

2.1 Отображения

Определение

Отображение – способ сопоставления элементов между множествами.

Отображения бывают трех видов:

1. Инъекция
2. Сюръекция
3. Биекция

Определение

Инъекция – такое отображение $f(A) \rightarrow B$, при котором любой элемент B имеет **не более одного** прообраза в множестве A .

Определение

Сюръекция – такое отображение $f(A) \rightarrow B$, при котором любой элемент B имеет **не менее одного** прообраза в множестве A .

Определение

Биекция – это отображение, являющееся и сюръекцией, и инъекцией одновременно. То есть взаимнооднозначное соответствие.

2.2 Прямые произведения множеств

Определение

Прямое (декартово) произведение множеств A и B – все такие пары чисел (a, b) , где $a \in A, b \in B$.

$$A \times B \stackrel{\text{def}}{=} \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

3 МОЩНОСТЬ МНОЖЕСТВА

Определение

Мощность множества – количество элементов в нем (для конечных множеств).

Для бесконечных:

1. Если между бесконечным множеством X и множеством натуральных чисел \mathbb{N} существует биекция, то говорят, что X имеет счётную мощность. Это "наименьшая" бесконечная мощность.
2. Если между X и множеством всех вещественных чисел \mathbb{R} (или отрезком $[0, 1]$) существует биекция, то говорят, что X имеет мощность континуума.

4 ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ.

4.1 Операции

1. $A \cap B$ – пересечение

$$A \cap B \stackrel{\text{def}}{=} \{x : (x \in A) \wedge (x \in B)\}$$

2. $A \cup B$ – объединение

$$A \cup B \stackrel{\text{def}}{=} \{x : (x \in A) \vee (x \in B)\}$$

3. $A \setminus B$ – разность

$$A \setminus B \stackrel{\text{def}}{=} \{x : (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$$

4. $A \triangle B$ – симметрическая разность

$$A \triangle B \stackrel{\text{def}}{=} \{x : (x \in (A \setminus B)) \vee (x \in (B \setminus A))\}$$

5. \bar{A} – дополнение до универсума

$$\bar{A} \stackrel{\text{def}}{=} \{x : (x \notin A) \wedge (x \in U)\}$$

4.2 Свойства

1. $A \cap A = A, A \cup A = A$
2. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C,$
 $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
3. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$
 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
4. $A \cup \emptyset = A, A \cap \emptyset = \emptyset$
5. $A \cup U = U, A \cap U = A$
6. $A \cap B = B \cap A, A \cup B = B \cup A$

$$7. A \cup B = A \cap \bar{B},$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

$$8. \bar{\bar{A}} = A$$

$$9. A \setminus B = A \cap \bar{B}$$

5 ПРЯМОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ n МНОЖЕСТВ.

Определение

Прямое произведение n множеств – все возможные кортежи из элементов этих n множеств.

На примере двух множеств:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

6 ТЕОРЕМА О МОЩНОСТИ ПРЯМОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ МНОЖЕСТВ

Теорема

Если A и B конечны, $|A| = n$, $|B| = m$ то $|A \times B| = |A||B| = mn$

Доказательство

Рассмотрим кортеж. В нем на первом месте стоит элемент из A , на втором – из B . К каждому элементу из A можно приставить m элементов из B , получив тем самым множество, представляющее собой результат декартового произведения. То есть на первом месте в кортеже может стоять n элементов, на втором – m . Значит всего таких кортежей можно составить mn штук.

7 ПОНЯТИЕ ВЕКТОРА. ПРОЕКЦИЯ ВЕКТОРА НА ОСИ. ПРОЕКЦИЯ МНОЖЕСТВА ВЕКТОРОВ

Определение

Пусть задано прямое произведение $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$. **Вектором** называется упорядоченный набор (a_1, a_2, \dots, a_n) , где $a_i \in A_i$

Определение

Пусть задано прямое произведение $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$. **Проецированием** $\text{Pr}_k(a_1, a_2, \dots, a_n)$ называется отображение $(a_1, a_2, \dots, a_n) \rightarrow (a_k)$

$$\text{Pr}_k(a_1, a_2, \dots, a_n) \stackrel{\text{def}}{=} f((a_1, a_2, \dots, a_n)) \rightarrow (a_k)$$

Проецирование множества векторов:

$$\begin{aligned} \text{Pr}_{i,j,\dots,m}(\{(a_1, a_2, \dots, a_m), (b_1, b_2, \dots, b_m) \dots\}) = \\ = \{(a_i, a_j, \dots, a_m), (b_i, b_j, \dots, b_m) \dots\} \end{aligned}$$

8 ПРАВИЛО СУММЫ. ПРАВИЛО ПРОИЗВЕДЕНИЯ.

Теорема

[Правило суммы]

Пусть все выборки из множества A делятся на две взаимоисключающие A_1 и A_2 . Число выборок первого типа m_1 , второго – m_2 . Тогда число всех выборок из множества A равно $m_1 + m_2$

Доказательство

Данное правило является следствием формулы включений-исключений:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

где $A \cap B = \emptyset$

Теорема

[Правило произведения]

Пусть число способов построить выборку из множества A равно n , из множества B – m . Тогда число способов построить выборку (a, b) ($a \in A, b \in B$) равно mn

Доказательство

Данное утверждение эквивалентно теореме о мощности прямого произведения. $|A \times B| = |A||B| = mn$

9 ЧИСЛО РАЗМЕЩЕНИЙ БЕЗ ПОВТОРЕНИЙ, ЧИСЛО РАЗМЕЩЕНИЙ С ПОВТОРЕНИЯМИ

Определение

Пусть имеется множество из n элементов. Упорядоченное подмножество из k элементов называется размещением без повторений

Теорема

Число размещений без повторений можно рассчитать по формуле:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Доказательство

Пусть есть n элементов, из которых нужно составить упорядоченные наборы из k элементов.

Тогда на первое место можно поставить n элементов, на второе – $n - 1$, на третье – $n - 2$ и так далее до k -го места, куда можно поставить $n - k + 1$ элементов. тогда посчитаем общее количество наборов по правилу произведения:

$$n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \dots (n - k + 1) = \frac{n!}{(n - k)!}$$

Определение

Пусть имеется множество A из n элементов. Набор $(m_1, m_2 \dots m_k)$, где $\forall i \Rightarrow m_i \in A$, называется размещением с повторениями.

Теорема

Число размещений с повторениями можно рассчитать по формуле:

$$\overline{A}_n^k = n^k$$

Доказательство

Есть k позиция, на каждой из них n элементов. Тогда по правилу произведения всего n^k наборов

10 ЧИСЛО ПЕРЕСТАНОВОК БЕЗ ПОВТОРЕНИЙ, ЧИСЛО ПЕРЕСТАНОВОК С ПОВТОРЕНИЯМИ.

Определение

Пусть имеется множество из n элементов. **Перестановкой с повторениями** называется упорядоченная последовательность его элементов

Теорема

Перестановки без повторений можно посчитать по формуле:

$$P_n = n!$$

Доказательство

Данная формула является следствием правила произведения. Есть n позиций, на каждой следующей на 1 элемент меньше, чем на предыдущей. Значит формула:

$$P_k = n!$$

Определение

Пусть имеется множество из n элементов, среди которых:

- k_1 неразличимых элементов 1-го типа
- k_2 неразличимых элементов 2-го типа
- ...
- k_s неразличимых элементов s -го типа

Перестановкой с повторениями называется упорядоченная последовательность элементов этого множества

Теорема

Число перестановок с повторениями можно рассчитать по формуле:

$$\overline{P}_n = \frac{(k_1 + k_2 + \dots + k_s)!}{k_1!k_2!\dots k_s!}$$

где $k_1 + k_2 + \dots + k_s = n$

Доказательство

Для начала сосчитаем количество перестановок без повторений (представим, что в исходном множестве разные элементы): $n!$. Теперь сосчитаем перестановки для каждой группы: $k_i!$. Поскольку в исходном множестве есть группы одинаковых элементов, то их перестановки для нас неразличимы, а значит необходимо убрать все перестановки, в которых одинаковые наборы элементов одного типа, а их, как мы сосчитали, для каждого типа $k_i!$. Итого формула:

$$\overline{P}_n = \frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_s!}$$

11 ЧИСЛО СОЧЕТАНИЙ БЕЗ ПОВТОРЕНИЙ, ЧИСЛО СОЧЕТАНИЙ С ПОВТОРЕНИЯМИ.

11.1 Сочетания без повторений

Определение

Пусть имеется множество из n элементов. Неупорядоченное подмножество из k его элементов называется **сочетанием без повторений**

Теорема

Число сочетаний без повторений рассчитывается по формуле:

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Доказательство

Посмотрим на формулу размещений без повторений: $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$. Чтобы рассчитать сочетания, необходимо убрать из размещений все те наборы, в которых совпадают элементы. Для каждого набора элементов таких повторяющихся наборов $k!$, ведь это просто перестановки. Тогда итоговая формула:

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

11.2 Сочетания с повторениями

Определение

Пусть имеется k классов элементов множества A . Сочетанием с повторениями называется неупорядоченная выборка n элементов из множества A .

Теорема

Число сочетаний с повторениями можно рассчитать по формуле:

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^{k-1} = \frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!}$$

Доказательство

Используем метод "звезд и перегородок": будем рассматривать k звезд и $n - 1$ перегородок для n типов звезд. Любая такая последовательность однозначно задаёт одно сочетание с повторениями, и наоборот – любому сочетанию соответствует такая последовательность.

Общее число символов в последовательности: $n + k - 1$. Из них выберем k позиций для звезд (или $n - 1$ для перегородок). Тогда таких последовательностей:

$$\overline{C}_n^k = \frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!}$$