Высшая алгебра. Экзамен.

7 января 2026 г.

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

1 МАТРИЦА. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СЛОЖЕНИЯ МАТРИЦ, УМНОЖЕНИЯ МАТРИЦЫ НА ЧИСЛО, СВОЙСТВА

1.1 Матрица

Определение

Матрица – прямоугольная таблица чисел $m \times n$

1.2 Действия над матрицами

Определение

Сложение матриц – операция над матрицами, при которой складываются их соответственные элементы. Для матриц разных размеров операция не определена.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Определение

Умножение матрицы на число – операция, при которой каждый элемент матрицы умножается на данное число.

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

2 ОПРЕДЕЛЕНИЕ И СВОЙСТВА ОПЕРАЦИИ УМНОЖЕНИЯ МАТРИЦ

2.1 Умножение матриц

Определение

Умножение матрицы на матрицу – это операция над двумя матрицами, при которой каждый i-й элемент n-й строки первой матрицы умножается на i-ый элемент n-го столбца второй матрицы, после чего все такие произведения суммируются

$$A \cdot B = C$$

, где

$$c_{ij} = \sum_{t=1}^{k} a_{it} b_{tj}$$

2.2 Свойства умножения матриц

1. $A(BC) = (AB)C$
2. $A(B + C) = AB + AC$
3. $(B + C)D = BD + CD$

Важно

Умножение матриц не коммутативно!

$$AB \neq BA$$

3 ТРАНСПОНИРОВАНИЕ МАТРИЦЫ. СВОЙСТВА

Определение

Транспонирование матрицы – процесс преобразование матрицы, при котором столбцы становятся строками, а строки – столбцами.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Свойства транспонирования матрицы:

1. $(A^T)^T = A$
2. $A^T + B^T = (A + B)^T$
3. $\lambda A^T = (\lambda A)^T$
4. $(AB)^T = B^T A^T$
5. $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$
6. $\det A = \det A^T$
7. $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} A^T$

4 ОТДЕЛЬНЫЕ ВИДЫ МАТРИЦ: КВАДРАТНАЯ, ТРЕУГОЛЬНАЯ, ДИАГОНАЛЬНАЯ, ЕДИНИЧНАЯ. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И СВОЙСТВА

4.1 Виды матриц

Определение

Матрица называется **квадратной**, если число ее строк равно числу ее столбцов

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Свойства квадратной матрицы:

1. Можно вычислить определитель
2. Может быть обратимой, если $\det A \neq 0$
3. Можно возводить в целую степень

Определение

Матрица называется **верхнетреугольной**, если она является квадратной, а **под** ее главной диагональю все элементы равны нулю

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Определение

Матрица называется **нижнетреугольной**, если она является квадратной, а **над** ее главной диагональю все элементы равны нулю

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Свойства треугольных матриц:

1. Определитель равен произведению диагональных элементов
2. Обратная к треугольной матрице (если существует) тоже треугольная того же типа
3. Произведение двух верхних (нижних) треугольных матриц — верхняя (нижняя) треугольная матрица

Определение

Матрица называется **диагональной**, если все ее элементы, кроме тех, что лежат на главной диагонали, равны нулю

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Свойства диагональной матрицы:

1. Определитель равен произведению диагональных элементов
2. Обратная: $D^{-1} = \operatorname{diag}\left(d_1^{-1}, d_2^{-1}, \ldots\right)$
3. Возведение в степень: $D^k = \operatorname{diag}\left(d_1^k, d_2^k, \ldots\right)$

Определение

Матрица называется **единичной**, если все элементы ее главной диагонали равны единице, а остальные – нулю

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Свойства единичной матрицы:

1. Нейтральный элемент относительно умножения
2. $\det E = 1$
3. $E^{-1} = E$

5 ОПРЕДЕЛЕНИЕ МНОГОЧЛЕНА ОТ МАТРИЦЫ.

Определение

Пусть дан полином $p(x)$ с коэффициентами из поля $\mathbb{K}$:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$$

где $a_1, a_2...a_n \in \mathbb{K}$

Пусть A – квадратная матрица размера $m \times m$. Тогда **многочленом от матрицы** $p(A)$ называется матрица, получаемая формальной подстановкой матрица A вместо переменной x в выражение для многочлена.

$$p(A) = a_0E + a_1A + a_2A^2 + ... + a_nA^n$$

6 ОПРЕДЕЛИТЕЛИ 2-ГО И 3-ГО ПОРЯДКА. ОПРЕДЕЛЕНИЯ. ПРАВИЛА ВЫЧИСЛЕНИЯ.

6.1 Определение

Определение

Определитель — это число, которое ставится в соответствие квадратной матрице и вычисляется по определённым правилам.

6.2 Правила вычисления

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{31}a_{22}a_{11} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33}$$

7 ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ МАТРИЦЫ ПОРЯДКА N. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧЕРЕЗ РЕКУРРЕНТНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ. ВЫЧИСЛЕНИЕ С ПРИМЕНЕНИЕМ РАЗЛОЖЕНИЯ ПО СТРОКЕ (СТОЛБЦУ).

7.1 Определения

Определение

Определитель матрицы порядка n – число, которое ставится в соответствие этой матрице и вычисляется по определённым правилам.

Разложение по i-й строке:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$

где A_{ij} – алгебраическое дополнение элемента с индексом ij в матрице A.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

где M_{ij} – минор элемента ij матрицы A

Определение

Минор элемента ij **матрицы** A – определитель матрицы A, получающийся путем вычеркивания из матрицы i-й строки и j-того столбца

7.2 Пример вычисления

Вычислим определитель матрицы 4-го порядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Шаг 1: Выбор строки для разложения

Выберем вторую строку $(3, 0, 0, 4)$, так как в ней два нулевых элемента. Это упростит вычисления.

Формула разложения по i-й строке:

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3} + a_{i4}A_{i4},$$

где $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$ – алгебраическое дополнение элемента a_{ij}.

Для $i = 2$:

$$\Delta = 3 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 0 \cdot A_{23} + 4 \cdot A_{24} = 3A_{21} + 4A_{24}.$$

Шаг 2: Вычисление алгебраических дополнений

1. Вычисляем $A_{21} = (-1)^{2+1}M_{21}$:

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Вычислим этот определитель 3-го порядка разложением по первой строке:

$$\begin{aligned} M_{21} &= 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 0 \cdot (2 \cdot 0 - (-3) \cdot 1) - 1 \cdot (2 \cdot 0 - (-3) \cdot 1) - 1 \cdot (2 \cdot 1 - 2 \cdot 1) \\ &= 0 \cdot 3 - 1 \cdot 3 - 1 \cdot 0 \\ &= -3. \end{aligned}$$

Следовательно, $A_{21} = (-1)^3 \cdot (-3) = (-1) \cdot (-3) = 3$.

2. Вычисляем $A_{24} = (-1)^{2+4}M_{24}$:

$$M_{24} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Вычислим этот определитель 3-го порядка:

$$\begin{aligned} M_{24} &= 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2 \cdot (2 \cdot 1 - 2 \cdot 1) - 0 \cdot ((-1) \cdot 1 - 2 \cdot 1) + 1 \cdot ((-1) \cdot 1 - 2 \cdot 1) \\ &= 2 \cdot 0 - 0 \cdot (-3) + 1 \cdot (-3) \\ &= -3. \end{aligned}$$

Следовательно, $A_{24} = (-1)^6 \cdot (-3) = 1 \cdot (-3) = -3$.

Шаг 3: Подставляем в формулу разложения

$$\Delta = 3 \cdot A_{21} + 4 \cdot A_{24} = 3 \cdot 3 + 4 \cdot (-3) = 9 - 12 = -3.$$

Ответ:

$$\boxed{\Delta = -3}$$

8 СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ: ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ ТРАНСПОНИРОВАННОЙ МАТРИЦЫ, ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ ПРОИЗВЕДЕНИЯ МАТРИЦ

Свойства определителя:

1. Определитель транспонированной матрицы: $\det A = \det A^T$ (разложение по столбцу дает тот же результат, что и разложение по строке)
2. Определитель произведения матриц: $\det AB = \det A \det B$
3. Определитель меняет знак при перестановке двух строк (столбцов) местами
4. Определитель, у которого есть две равные строки (столбца), равен нулю
5. Определитель не изменится, если к любой строке (столбцу) прибавить другую строку (столбец)

9 СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ, СВЯЗАННЫЕ С ЛИНЕЙНОЙ КОМБИНАЦИЕЙ СТРОК (СТОЛБЦОВ).

Свойства определителя:

1. Если матрица A получена из матрицы B умножением i-й строки на k: $\det A = k \det B$
2. Если i-я строка матрицы является суммой двух строк u и v, то определитель равен сумме определителей двух матриц, в которых эта строка заменена на u и v соответственно:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ u_1 + v_1 & u_2 + v_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ u_1 & u_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$$

3. Если к какой-либо строки (столбцу) прибавить другую строку (столбец), то определитель не изммените

10 ИЗМЕНЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ ПРИ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ МАТРИЦЫ

1. При перестановке любых двух строк (столбцов) определитель меняет знак на противоположный
2. При умножении любой строки (столбца) на ненулевое число определитель также умножается на это число
3. При прибавлении одной строки, умноженной на число, к другой, определитель не меняется

11 СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ: ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ ТРЕУГОЛЬНОЙ МАТРИЦЫ, ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ ДИАГОНАЛЬНОЙ МАТРИЦЫ

1. Определитель треугольной матрицы – произведение диагональных элементов
2. Определитель диагональной матрицы – произведение диагональных элементов

12 ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ МЕТОДОМ ПРИВЕДЕНИЯ К ТРЕУГОЛЬНОМУ ВИДУ.

Метод заключается в приведении матрицы к треугольному виду, отслеживая при этом изменения определителя при проведении элементарных преобразований.

Дана матрица A размера 3×3:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Найти $\det(A)$.

Решение

Применяем элементарные преобразования строк, не меняющие определитель (прибавление к одной строке другой, умноженной на число):

1. Обнулим элементы под $a_{11} = 2$:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

где:

- $R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1$
- $R_3 \leftarrow R_3 + R_1$ (так как $-2/2 = -1$, то $R_3 \leftarrow R_3 - (-1)R_1$)

2. Обнулим элемент под $a_{22} = -5$:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & 5 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

где $R_3 \leftarrow R_3 + R_2$ (так как $5/(-5) = -1$, то $R_3 \leftarrow R_3 - (-1)R_2$)

Получили верхнюю треугольную матрицу U:

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Вычисление определителя

Определитель треугольной матрицы равен произведению элементов главной диагонали:

$$\det(U) = 2 \cdot (-5) \cdot 5 = -50$$

Так как мы использовали только преобразования вида $R_i \leftarrow R_i + \lambda R_j$, определитель не изменился:

$$\boxed{\det(A) = -50}$$

Пример с перестановкой строк

Рассмотрим матрицу:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

1. $b_{11} = 0$ – нужна перестановка. Меняем $R_1 \leftrightarrow R_2$:

$$\det(B) = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

(знак определителя изменился)

2. Обнуляем первый столбец:

$$R_3 \leftarrow R_3 - 4R_1: \quad -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -6 \end{vmatrix}$$

3. Обнуляем второй столбец:

$$R_3 \leftarrow R_3 + \frac{3}{2}R_2: \quad -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{9}{2} \end{vmatrix}$$

Определитель треугольной матрицы:

$$1 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{9}{2}\right) = -9$$

Учитывая знак от перестановки:

$$\det(B) = -(-9) = \boxed{9}$$

13 АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ ДОПОЛНЕНИЕ ЭЛЕМЕНТА МАТРИЦЫ

Определение

Алгебраическое дополнение элемента матрицы – это число, вычисляемое как определитель матрицы, получающейся вычеркиванием строки и столбца, в которых лежит элемент, из исходной матрицы, взятый с положительным знаком, если индекс строки элемента в сумме с его столбцом дает четное число, иначе – с отрицательным.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

14 МИНОР, СООТВЕТСТВУЮЩИЙ ЭЛЕМЕНТУ МАТРИЦЫ. СВЯЗЬ МЕЖДУ МИНОРОМ И АЛГЕБРАИЧЕСКИМ ДОПОЛНЕНИЕМ ЭЛЕМЕНТА МАТРИЦЫ.

Определение

Минор элемента a_{ij} **матрицы** A – это определитель матрицы, получающийся вычеркиванием из матрицы i-й строки и j-го столбца

Связь между алгебраическим дополнением и минором состоит в том, что алгебраическое дополнение элемента a_{ij} и есть минор, взятый со знаком, определяющемся как $(-1)^{i+j}$

15 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ. СВОЙСТВА ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ.

Определение

Обратная матрица к матрице A – такая матрица A^{-1}, которая при умножении на исходную матрицу A дает единичную матрицу E

Свойства:

1. $AA^{-1} = A^{-1}A = E$
2. $(A^{-1})^{-1} = A$
3. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
4. $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$
5. $\det A = \frac{1}{\det A^{-1}}$

16 УСЛОВИЕ ОБРАТИМОСТИ МАТРИЦЫ.

Теорема

Матрица обратима тогда и только тогда, когда ее определитель не равен нулю.

$$\exists A^{-1} \Leftrightarrow \det A \neq 0$$

Доказательство

[Необходимое условие]

$$AA^{-1} = E \Leftrightarrow \det AA^{-1} = \det E \Leftrightarrow \det A \det A^{-1} = \det E$$

Если $\det A = 0$, то $0 \cdot \det A^{-1} = 1$ – противоречие.

[Достаточное условие]

Пусть есть A^{-1}, $\det A \neq 0$. Проверим, что $AA^{-1} = E$, для этого построим обратную матрицу с помощью присоединений.

Находим A_{ij} ко всем элементам матрицы A, получаем союзную матрицу.

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \dots & A_{ij} & \dots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Транспонируем ее, получаем присоединенную: $\hat{A} = \widetilde{A}^T$.

Умножим исходную матрицу на присоединенную:

$$A\hat{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & a_{ij} & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1} \\ \dots & A_{ij} & \dots \\ A_{1n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \det A & \dots & 0 \\ \dots & \det A & \dots \\ 0 & \dots & \det A \end{pmatrix}$$

Чтобы получить единичную матрицу, осталось поделить полученное произведение на $\det A$.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\hat{A}$$

17 ПОСТРОЕНИЕ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ С ПОМОЩЬЮ ПРИСОЕДИНЕННОЙ МАТРИЦЫ.

Алгоритм построения обратной матрицы:

1. Получение союзной матрицы (матрицы алгебраических дополнений)
2. Транспонирование союзной матрицы и получение присоединенной
3. Деление каждого элементаприсоединенной матрицы на определитель исходной

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\hat{A}$$

18 ПОСТРОЕНИЕ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ С ПОМОЩЬЮ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ.

Метод состоит в присоединении единичной матрицы к исходной справа и дальнейшем ее приведении к единичной. После этих операций справа появится обратная матрица.

19 ДВА ОПРЕДЕЛЕНИЯ РАНГА МАТРИЦЫ: МАКСИМАЛЬНОЕ ЧИСЛО ЛИНЕЙНО НЕЗАВИСИМЫХ СТРОК И РАЗМЕРНОСТЬ НАИБОЛЬШЕГО НЕНУЛЕВОГО МИНОРА.

Определение

Ранг матрицы – количество ее ненулевых строк, полученных после приведения к ступенчатому виду.

Определение

Ранг матрицы – это наибольший порядок минора, отличного от нуля (теорема о базисном миноре)

20 ЛИНЕЙНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ И НЕЗАВИСИМОСТЬ СТРОК (СТОЛБЦОВ) МАТРИЦЫ. ПОНЯТИЕ БАЗИСНОГО МИНОРА. ТЕОРЕМА О БАЗИСНОМ МИНОРЕ.

Определение

Набор элементов называется **линейно зависисым**, если равенство нулю их линейной комбинации возможно хотя бы при одном коэффициенте, не равном нулю.

$$\exists i : \alpha_i \neq 0 \Rightarrow \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + ... + \alpha_i a_i + ... \alpha_n a_n = 0$$

Если один из векторов a_i нулевой, то набор линейно зависим.

Определение

Базисный минор – это любой ненулевой минор наибольшего порядка

Теорема

[Теорема о базисном миноре]

Строки (столбцы) матрицы, содержащие строки (столбцы) базисного минора линейно независимы. Любая строка (столбец) является линейной комбинацией базисных строк

Доказательство

[Линейная независимость базисных строк (столбцов)]

Пусть базисный минор $M_{j_1...j_r}^{i_1...i_r} = M_r$ (располагается в $i_1...i_r$ строках и $j_1...j_r$ столбцах). Если столбцы матрицы, содержащие столбца базисного минора, линейно зависимы, то $\exists \lambda_1 ... \lambda_r : \forall i \Rightarrow \lambda_i \neq 0$:

$$\lambda_1 a_{i1} + ... + \lambda_r a_{ir} = 0$$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} a_{1j1} \\ ... \\ a_{mj1} \end{pmatrix} + \dots + \lambda_r \begin{pmatrix} a_{1jr} \\ ... \\ a_{mjr} \end{pmatrix} = 0$$

Тогда выберем из полученной суммы строки базисного минора и получим противоречие:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} a_{i1j1} \\ ... \\ a_{irj1} \end{pmatrix} + \dots + \lambda_r \begin{pmatrix} a_{i1jr} \\ ... \\ a_{i1jr} \end{pmatrix} = 0$$

Это означает, что строки базисного минора линейно зависимы. Получаем противоречие изначальному предположению ($\det M = 0$).

[Строка (столбец) как линейная комбинация базисных]

Рассмотрим $a_k \notin \{a_j1, a_j2...a_jr\}$ (к минору допишем столбец и строку из исходной матрицы)

$$\Delta_p = \begin{pmatrix} a_{i1j1} & ... & a_{i1jr} & a_{i1k} \\ ... & & & \\ a_{irj1} & ... & a_{irjr} & a_{irk} \\ a_{pj1} & ... & a_{pjr} & a_{pk} \end{pmatrix}$$

Если $p \in \{i_1, i_2...i_r\}$, то в матрице две строки одинаковые, и $\det \Delta_p = 0$
Иначе Δ_p – минор $r + 1$ порядка $\Rightarrow \det \Delta_p = 0$
Разложим по строке p:

$$\det \Delta_p = a_{pj1}A_{pj1} + ... + a_{pjr}A_{pjr} + a_{pk}A_{pk} = 0$$

$$A_{pk} = (-1)^{r+1+r+1}M_r = M_r \neq 0$$

$$a_{pk} = -\frac{A_{r+1,1}}{M_r} - ... - \frac{A_{r+1,r}}{M_r}a_{pjr}$$

Но $\Delta_{r+1,r}$ не зависит от p. Тогда $\forall p - \frac{A_{r+1,i}}{M_r} = \lambda_i$. Распишем полученное для разных p:
$a_{1k} = \lambda_1 a_{1j1} + ... + \lambda_r a_{1jr}$
$a_{2k} = \lambda_1 a_{2j1} + ... + \lambda_r a_{2jr}$
...
$a_{mk} = \lambda_1 a_{mj1} + ... + \lambda_r a_{mjr}$
То есть получили разложение k- го столбца по остальным. То есть разложение существует