Вопрос 1: Способы задания множества. Порождающая процедура. Характеристическое свойство.

Множество можно задать тремя способами: перечисление элементов $\{1,2,3,4\}$ или указание характеристического свойства $\{x | x \in \mathbb{N}, x < 6\}$, порождающей процедурой.

Порождающая процедура – это процедура, которая порождает объекты, являющиеся элементами определённого множества. Порождающая процедура описывает способ получения элементов множества из уже полученных элементов либо из других объектов. Правила, описанные порождающей процедурой, называются рекурсивными или индуктивными. Пример: $a_1 = 1, a_2 = 2, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.

Характеристическое свойство множества – это свойство, которым обладают все элементы этого множества и не обладает ни один элемент, не принадлежащий множеству.

Вопрос 2: Отображения. Инъекция, сюръекция, биекция. Прямые произведения множеств.

Пусть даны два множества X и Y. **Отображением** f из множества X на множество Y называется правило, которое каждому элементу $x \in X$ ставит в соответствие единственный элемент $y \in Y$. $f: X \to Y$.

Элемент $y \in Y$, соответствующий элементу $x \in X$, называется образом элемента x и обозначается $f(x)$. Элемент x называется прообразом элемента y. Множество X называется областью определения, множество Y – областью значений.

Отображение называется **инъективным**, если любой элемент y имеет не более одного прообраза x. Отображение называется **сюръективным**, если любой элемент y имеет не менее одного прообраза x. Отображение называется **биективным**, если оно является инъективным и сюръективным.

Прямым произведением множеств X и Y называется множество всех возможных упорядоченных пар (x, y), где первый элемент взят из X, а второй – из Y. $X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$.

Вопрос 3: Комплексные числа. Действия с комплексными числами. Тригонометрическая и показательная формы записи комплексных чисел.

Комплексным числом называется выражение вида $z = a + bi$, где i – мнимая единица, удовлетворяющая условию $i^2 = 1$, $a = Rez$ – действительная часть, $v = Imz$ – мнимая часть.

Действия в алгебраической форме:

- Равенство: $z_1 = z_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2, b_1 = b_2$
- Сложение/Вычитание: $z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)i$
- Умножение: $z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$
- Деление: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i$

Тригонометрическая форма записи: модуль $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, аргумент $\varphi = argz$ – угол, образованный вектором с положительной вещественной осью. $z = r(cos\varphi + isin\varphi)$. **Показательная форма:** $e^{i\varphi} = cos\varphi + isin\varphi, z = re^{i\varphi}$.

Действия в тригонометрической/показательной форме:

- Умножение: $z_1 \cdot z_2 = (r_1 r_2) e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$
- Деление: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$
- Возведение в степень: $z^n = r^n e^{in\varphi} = r^n(\cos(n\varphi) + isin(n\varphi))$
- Извлечение корня: $\sqrt[n]{z} = \left\{ \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\varphi + 2\pi k}{n}} \middle| k = 0,1, \dots, n-1 \right\}$

Вопрос 4: Возведение комплексного числа в степень. Извлечение корня из комплексного числа. Комплексный логарифм. Функции комплексного аргумент.

Возведение комплексного числа в степень:

Пусть комплексное число задано в показательной форме: $z = re^{i\varphi}$. Для целой степени $n \in \mathbb{Z}$ справедлива формула Муавра: $z^n = (re^{i\varphi})^n = r^n e^{in\varphi} = r^n(\cos(n\varphi) + isin(n\varphi))$. Для произвольной комплексной степени $w \in \mathbb{C}$ определение. Дается через экспоненту и комплексный логарифм: $z^w = e^{w\,Lnz}$, где $Ln\,z$ – комплексный логарифм.

Извлечение корня n-ой степени из комплексного числа:

$$\sqrt[n]{z} = \left\{\sqrt[n]{r}e^{i\frac{\varphi+2\pi k}{n}} \,\middle|\, k = 0,1,\dots,n-1\right\}$$

Существует ровно n различных значений корня n-й степени (при $z \neq 0$). На комплексной плоскости эти значения располагаются в вершинах правильного n-угольника с центром в точке 0 и радиусом $\sqrt[n]{r}$.

Комплексный логарифм:

Комплексный логарифм определяется как функция, обратная экспоненте: $w = Ln\,z \;\Leftrightarrow\; e^w = z$. Общая формула (если $z = re^{i\varphi}$): $Ln\,z = \ln r + i(\varphi + 2\pi k), k \in \mathbb{Z}$, где $\ln r$ – натуральный логарифм положительного числа r.

Функции комплексного аргумента:

Показательная функция: $\exp(z) = e^{x+iy} = e^x(cosy + isiny), z = x + iy$.

Тригонометрические функции: $sin\,z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$, $cos\,z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$, $tg\,z = \frac{sinz}{cosz}$.

Гиперболические функции: $sh\,z = \frac{e^z-e^{-z}}{2}$, $ch\,z = \frac{e^z+e^{-z}}{2}$, $th\,z = \frac{sh\,z}{ch\,z}$. Связь с тригонометрическими: $\sin(iz) = i\,sh(z), \cos(iz) = chz$.

Общая степенная функция: $z^\alpha = e^{\alpha\,Ln(z)}, \alpha \in \mathbb{C}$.

Вопрос 5: Аксиомы вещественных чисел. Простейшие следствия из аксиом. Аксиома полноты.

Аксиомы вещественных чисел:

1.1 $\boldsymbol{a+b=b+a}$ (коммутативность)

1.2 $\boldsymbol{a+(b+c)=(a+b)+c}$ (ассоциативность)

1.3 существует 0: для любого $\boldsymbol{a}$ $\boldsymbol{a+0=a}$

1.4 для любого $\boldsymbol{a}$ существует противоположный $\boldsymbol{\tilde{a}}$ такой, что $\boldsymbol{a+\tilde{a}=0}$

2.1 $a*b=b*a$

2.2 $a*(b*c)=(a*b)*c$

2.3 существует 1: для любого $\boldsymbol{a}$ $\boldsymbol{a*1=a, a\neq 0}$

2.4 для любого а существует обратный $\boldsymbol{\tilde{a}}$ такой, что $\boldsymbol{a*\tilde{a}=1, a\neq 0}$

3.1 $\boldsymbol{a*(b+c)=a*b+a*c}$ (дистрибутивность)

4. Для любой пары $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ выполняется $\boldsymbol{a\leq b}$ или $\boldsymbol{b\leq a}$

4.1 $a\leq a, a\geq a$

4.2 $a\leq b, b\leq c,$ то $a\leq c$

4.3 $a\leq b$ или $a\geq b$

4.4 $0\leq 1$

4.5 Если $a\leq b$ и $b\leq a$, то $a=b$

5.1 Если $\boldsymbol{a\leq b}$, то для любого $\boldsymbol{c}$ $\boldsymbol{a+c\leq b+c}$

5.2 Если $a\leq b, c\leq d$, то $a+c\leq b+d$

5.3 Если $a\leq b$, $c\geq 0$, то $a*c\leq b*c$

5.4 Если $\boldsymbol{0\leq a\leq b, 0\leq c\leq d}$, то $\boldsymbol{0\leq ac\leq bd}$

Простейшие следствия из аксиом:

1. Единственность нуля, единицы и противоположного элемента
2. $a * 0 = 0$
3. Правило знаков: $(-a) * b = -(a * b), (-a) * (-b) = a * b$
4. Из $a * b = 0$ следует $a = 0$ или $b = 0$
5. Неравенства можно складывать и умножать на положительное число
6. $0 < 1$

Аксиома полноты:

Для любых непустых множеств $A, B \in \mathbb{R}$ таких, что $\forall a \in A, \forall b \in B\ a \leq b$, существует число $c \in \mathbb{R}$, для которого $\forall a \in A, \forall b \in B\ a \leq c \leq b$.

Вопрос 6: Точная верхняя и точная нижняя грани множества. Единственность минимального и максимального элемента ограниченного непустого множества. Существование точно верхней грани ограниченного непустого множества. Принцип вложенных отрезков.

Число $S = supM$ называется **точной верхней гранью** множества M, если:

1) $\forall x \in M \;\; x \leq S$
2) $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists x' \in M: x' > S - \varepsilon$

Число $i = infM$ называется **точной нижней гранью** множества M, если:

3) $\forall x \in M \;\; x \geq i$
4) $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists x' \in M: x' < i + \varepsilon$

Теорема: Любое ограниченное сверху подмножество множества $\mathbb{R}$ имеет единственную точную верхнюю грань.

Доказательство: Пусть m_1 и m_2 – два максимальных элемента X. По определению $m_1, m_2 \in X$, и для любого $x \in X$ верно $x \leq m_1$ и $x \leq m_2$. В частности, $m_2 \leq m_1$ (так как $m_2 \in X$) и $m_1 \leq m_2$ (так как $m_1 \in X$). Из аксиомы антисимметричности следует, что $m_1 = m_2$. Аналогично для минимума.

Теорема: Всякое непустое ограниченное сверху множество $X \subset \mathbb{R}$ имеет точную верхнюю грань.

Доказательство: Пусть B – множество всех верхних граней X (непустое, так как X ограничено сверху), $A = \mathbb{R} \backslash B$. Тогда A и B непусты, и для любых $a \in A, b \in B$ выполнено $a < b$ (поскольку a не является верхней гранью, найдется $x \in X$: $a < x \leq b$). По аксиоме полноты существует $c \in \mathbb{R}$ такое, что $\forall a \in A,\; \forall b \in B$: $a \leq c \leq b$.

Докажем, что $c = supX$:

1. Покажем, что c – верхняя грань. Предположим противное: найдется $x \in X$: $x > c$. Возьмем $d = \frac{c+x}{2}$. Тогда $c < d < x$, значит, d не является верхней

гранью ($d < x \in X$), поэтому $d \in A$. Но по построению $c \geq d$ для всех $a \in A$, противоречие. Следовательно, $\forall x \in X : x \leq c$.

2. Покажем минимальность. Для любого $\varepsilon > 0$ число $c - \varepsilon$ не является верхней точной гранью (иначе оно принадлежало бы B, но $c - \varepsilon < c$, что противоречит $c \leq b$ для всех $b \in B$). Значит, $c - \varepsilon \in A$, то есть существует $x_\varepsilon \in X$: $x_\varepsilon > c - \varepsilon$.

Из 1 и 2 следует, что $c = supX$. Аналогично, любое непустое ограниченное снизу множество, имеет точную нижнюю грань.

Система отрезков называется **последовательностью вложенных отрезков**, если $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_n, b_n]$.

Теорема: Для любой последовательности вложенных отрезков существует хотя бы одна точка, принадлежащая всем отрезкам.

Доказательство:

1. Существование. Рассмотрим множества $A = \{a_n\}$ и $B = \{b_n\}$. В силу вложенности $\forall n, m$: $a_n \leq b_m$. По аксиоме полноты существует $c \in \mathbb{R}$ такое, что $a_n < c < b_m$ для всех n, m. В частности, $a_n \leq c \leq b_n$ для любого n, значит, $c \in [a_n, b_n]$ для всех n.

2. Единственность при условии $b_n - a_n \to 0$. Пусть $c_1, c_2 \in [a_n, b_n]$ для всех n. Тогда $a_n \leq c_1$, $c_2 \leq b_n$, откуда $|c_1 - c_2| \leq b_n - a_n \to 0$. Следовательно, $|c_1 - c_2| = 0$, то есть $c_1 = c_2$.

Вопрос 7: Индуктивное множество. Множество натуральных чисел. Метод математической индукции. Существование наименьшего элемента в непустом подмножестве множества натуральных чисел. Принцип Архимеда.

Подмножество $S \subset \mathbb{R}$ называется **индуктивным**, если:

1. $1 \in S$
2. Если $x \in S$, то $x + 1 \in S$

Пример: $\{1,2,3, \dots\}, \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$ индуктивны.

Множеством натуральных чисел называется пересечение всех индуктивных подмножеств прямой, содержащих 1. Обозначение: $\mathbb{N}$. Таким образом, $\mathbb{N}$ – наименьшее индуктивное множество.

Теорема: Пусть $P(n)$ – некоторое утверждение, зависящее от $n \in \mathbb{N}$. Если:

1. База индукции: $P(1)$ истинно
2. Индукционный переход: Из предположения, что $P(k)$ истинно для некоторого $k \in \mathbb{N}$ (предположение индукции), следует истинность $P(k+1)$;

тогда утверждение $P(n)$ истинно для всех натуральных чисел $n \in \mathbb{N}$

Доказательство: Рассмотрим множество $M = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n) \text{ истинно}\}$. По условию $1 \in M$, и если $k \in M$, то $k + 1 \in M$. Значит, M – индуктивное множество, содержащее 1. По определению $\mathbb{N}$ как наименьшего индуктивного множества имеем $\mathbb{N} \subset M$. Но $M \subset \mathbb{N}$, следовательно, $M = \mathbb{N}$.

Теорема: Всякое непустое подмножество множества натуральных чисел имеет наименьший элемент.

Доказательство: Пусть $A \subset \mathbb{N}, A \neq \emptyset$, и предположим, что A не имеет наименьшего элемента. Рассмотрим утверждение $P(n)$: "n не принадлежит A".

База: $1 \notin A$, иначе 1 был бы наименьшим.

Переход: Пусть для всех $m \leq k$ выполнено $P(m)$, то есть $1, \dots, k \notin A$. Тогда $k + 1 \notin A$, иначе $k + 1$ был бы наименьшим (так как все наименьшие числа не в

A). По принципу полной индукции $P(n)$ верно для всех $n \in \mathbb{N}$, значит, $A = \emptyset$, что противоречит условию.

Принцип Архимеда: Для любых вещественных чисел $a > 0$ и b существует натуральное число n такое, что $n \cdot a > b$ (множество натуральных чисел не ограничено сверху).

Доказательство: Предположим противное: пусть существует $b \in R$ такое, что для всех $n \in \mathbb{N}$ выполнено $n \leq b$. Тогда множество $\mathbb{N}$ ограничено сверху. По основному свойству вещественных чисел (существование точной верхней грани) у $\mathbb{N}$ существует точная верхняя грань $s = \sup \mathbb{N}$. По определению точной верхней грани для $\varepsilon = 1$ найдется натуральное число $m \in \mathbb{N}$ такое, что $m > s - 1$. Но тогда $m + 1 > s$, причем $m + 1 \in \mathbb{N}$, что противоречит тому, что s – точная верхняя грань $\mathbb{N}$.

Вопрос 8: Плотность множества рациональных чисел. Существование иррациональных чисел. Иррациональность $\sqrt{2}$.

Множество $E \subset \mathbb{R}$ называется **плотным** в $\mathbb{R}$, если в любой окрестности любой точки $x \in \mathbb{R}$ содержится хотя бы один элемент из E, то есть $\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b,\ \exists e \in E\colon\ a < e < b$.

Теорема: Множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел плотно в $\mathbb{R}$.

Доказательство: Пусть $a, b \in \mathbb{R},\ a < b$. Рассмотрим число $\varepsilon = b - a > 0$. По принципу Архимеда (множество натуральных чисел не ограничено сверху) найдется натуральное n такое, что $n > \frac{1}{\varepsilon}$, то есть $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

Рассмотрим множество целых чисел m таких, что $m \cdot \frac{1}{n} > a$. Оно непусто и ограничено снизу (например, числом a). Пусть m_0 – наименьшее целое число, для которого выполняется это неравенство (существование следует из принципа полного упорядочения для целых чисел). Тогда $m_0 - 1 \leq an < m_0$, откуда $\frac{m_0-1}{n} \leq a < \frac{m_0}{n}$. При этом $\frac{m_0}{n} \leq a + \frac{1}{n} < a + \varepsilon = b$. Таким образом, $a < \frac{m_0}{n} < b$, и $\frac{m_0}{n} \in \mathbb{Q}$.

Теорема: Множество иррациональных чисел $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ непусто и плотно в $\mathbb{R}$. Более того, оно несчетно.

Доказательство: Покажем, что между любыми двумя вещественными числами $a < b$ найдется иррациональное число. По доказанной теореме о плотности $\mathbb{Q}$ найдутся рациональные числа r_1, r_2 такие, что $a < r_1 < r_2 < b$. Рассмотрим число $\xi = r_1 + \frac{r_2 - r_1}{\sqrt{2}}$. Оно иррационально (так как $\sqrt{2}$ иррационально) и удовлетворяет неравенствам $r_1 < \xi < r_2$, следовательно, $a < \xi < b$. Это доказывает плотность $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Несчетность следует из несчетности $\mathbb{R}$ и счетности $\mathbb{Q}$: если бы $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ было счетным, то $\mathbb{R}$ как объединение двух счетных множеств, было бы счетным, что неверно.

Теорема: Число $\sqrt{2}$ иррационально.

Доказательство: Предположим, что $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Тогда существуют взаимно простые натуральные числа p и q такие, что $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. Возводя в квадрат, получаем $2 = \frac{p^2}{q^2}$, откуда $p^2 = 2q^2$. Следовательно, p^2четно, а значит, и p четно. Пусть $p = 2k,\ k \in \mathbb{N}$. Подставляя в уравнение, имеем: $(2k)^2 = 2q^2 \Rightarrow 4k^2 = 2q^2 \Rightarrow q^2 = 2k^2$. Отсюда следует, что q^2 четно, а значит, и q четно. Таким образом, оба числа p и q четны, что противоречит их взаимной простоте. Следовательно, предположение неверно, и $\sqrt{2}$ иррационально.

Вопрос 9: Последовательности. Монотонность. Ограниченность. Рекуррентные последовательности.

Последовательностью вещественных чисел называется отображение $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Число $a_n = a(n)$ называется n-ым членом последовательности.

Последовательность $\{a_n\}$ называется:

- Возрастающей, если $\forall n \in \mathbb{N}\colon\ a_{n+1} > a_n$
- Неубывающей, если $\forall n \in \mathbb{N}\colon\ a_{n+1} \geq a_n$
- Убывающей, если $\forall n \in \mathbb{N}\colon\ a_{n+1} < a_n$
- Невозрастающей, если $\forall n \in \mathbb{N}\colon\ a_{n+1} \leq a_n$

Если последовательность обладает одним из этих свойств, она называется **монотонной**. В случае строгих неравенств – строго монотонной.

Последовательность $\{a_n\}$ называется:

- Ограниченной сверху, если $\exists M \in \mathbb{R}\ \ \forall n \in \mathbb{N}\colon\ a_n \leq M$
- Ограниченной снизу, если $\exists m \in \mathbb{R}\ \ \forall n \in \mathbb{N}\colon\ a_n \geq m$
- Ограниченной, если она ограничена и сверху, и снизу, то есть $\exists C > 0\ \ \forall n \in \mathbb{N}\colon\ |a_n| \leq C$

Последовательность называется **заданной рекуррентно**, если ее члены определяются по некоторому правилу через предыдущие члены. Обычно задается начальный член (или начальные члены) и рекуррентное соотношение, выражающее a_{n+1} (или a_{n+k}) через предыдущие члены.

Примеры:

1. Арифметическая прогрессия: $a_1 = a, a_{n+1} = a_n + d$, где d – разность
2. Геометрическая прогрессия: $a_1 = b, a_{n+1} = a_n \cdot q$, где q – знаменатель
3. Последовательность Фибоначчи: $a_1 = 1, a_2 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$

Вопрос 10: Предел последовательности. Арифметические действия с пределами. Предельный переход в неравенствах. Принцип сжатой последовательности.

Число a называется **пределом последовательности** $\{x_n\}$, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}$: $\forall n > N \ |x_n - a| < \varepsilon$. Обозначение: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Теорема: Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Тогда:

1. Сумма: $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b$
2. Разность: $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = a - b$
3. Произведение: $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = a \cdot b$
4. Частное: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$, если $b \neq 0$ и $y_n \neq 0$

Доказательство:

1. Для суммы. Зададим $\varepsilon > 0$. Найдем N_1: $\forall n > N_1 \ |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Найдем N_2: $\forall n > N_2 \ |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$. Положим $N = \max(N_1, N_2)$. Тогда для $n > N$: $|(x_n + y_n) - (a + b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.
2. Для произведения. Сходящаяся последовательность ограничена: $\exists M > 0$: $|x_n| \leq M$ для всех n. Оценим: $|x_n y_n - ab| = |x_n y_n - x_n b + x_n b - ab| \leq |x_n| \cdot |y_n - b| + |b| \cdot |x_n - a|$. Зададим $\varepsilon > 0$. Найдем N_1: $\forall n > N_1 \ |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2(|b|+1)}$. Найдем N_2: $\forall n > N_2 \ |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2M}$. Тогда для $n > \max(N_1, N_2)$: $|x_n y_n - ab| < M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + |b| \cdot \frac{\varepsilon}{2(|b|+1)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.
3. Для частного. Достаточно доказать, что если $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \neq 0$ и $y_n \neq 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{y_n} = \frac{1}{b}$. Выберем N_0 так, что для $n > N_0$ выполняется $|y_n| > \frac{|b|}{2}$ (это следует из сходимости $y_n \to b$). Тогда для $n > N_0$: $\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|y_n - b|}{|y_n||b|} < \frac{2|y_n - b|}{b^2}$. Зададим $\varepsilon > 0$. Найдем N_1: $\forall n > N_1 \ |y_n - b| < \frac{b^2\varepsilon}{2}$. Для $n > \max(N_0, N_1)$ имеем $\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{b}\right| < \varepsilon$. Теперь, применяя произведение (пункт 3), получаем $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$.

Теорема: Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ и существует номер N_0 такой, что для всех $n > N_0$ выполняется $x_n \le y_n$. Тогда $a \le b$.

Доказательство: Предположим, что $a > b$. Положим $\varepsilon = \frac{a-b}{2} > 0$. Найдем N_1: $\forall n > N_1\ |x_n - a| < \varepsilon$ и N_2: $\forall n > N_2\ |y_n - b| < \varepsilon$. Тогда для $n > \max(N_0, N_1, N_2)$ имеем: $x_n > a - \varepsilon = \frac{a+b}{2}$, $y_n < b + \varepsilon = \frac{a+b}{2}$, откуда $x_n > y_n$, что противоречит условию $x_n \le y_n$. Следовательно, $a \le b$.

Теорема: Пусть для последовательностей $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ выполняется:

1. Существует номер N_0 такой, что для всех $n > N_0$ верно $x_n \le y_n \le z_n$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$

Тогда последовательность $\{y_n\}$ также имеет предел, причем $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$

Доказательство: По определению предела для произвольного $\varepsilon > 0$ найдем номера:

- N_1: $\forall n > N_1\ |x_n - a| < \varepsilon$, что равносильно $a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon$
- N_2: $\forall n > N_2\ |z_n - a| < \varepsilon$, то есть $a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon$

Положим $N = \max(N_0, N_1, N_2)$. Тогда для всех $n > N$ выполняются неравенства: $a - \varepsilon < x_n \le y_n \le z_n < a + \varepsilon$, откуда $|y_n - a| < \varepsilon$. Это означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

Вопрос 11: Предел монотонной ограниченной последовательности. Теорема Вейерштрасса о пределе монотонной ограниченной последовательности.

Предел монотонной ограниченной последовательности – это число, к которому стремятся члены последовательности, если она монотонна и ограничена. Это следует из теоремы Вейерштрасса о пределе монотонной последовательности.

Теорема:

1. Если последовательность $\{x_n\}$ неубывающая и ограничена сверху, то она сходится, причем $\lim_{n\to\infty} x_n = \sup x_n, n \in \mathbb{N}$.
2. Если последовательность $\{x_n\}$ невозрастающая и ограничена снизу, то она сходится, причем $\lim_{n\to\infty} x_n = \inf x_n, n \in \mathbb{N}$.

Доказательство: Пусть $\{x_n\}$ – неубывающая $(x_1 \leq x_2 \leq \cdots)$ и ограничена сверху. Рассмотрим множество ее значений $X = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Оно непусто и ограничено сверху. По свойству полноты вещественных чисел существует точная верхняя грань $a = \sup X$. Докажем, что $\lim_{x\to\infty} x_n = a$.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. По определению точной верхней грани: a – верхняя грань, то есть $\forall n : x_n \leq a$; существует элемент множества X, больший $a - \varepsilon$, то есть $\exists N : x_N > a - \varepsilon$. В силу неубывания для всех $n > N$ имеем $x_n \geq x_N > a - \varepsilon$. Также $x_n \leq a < a + \varepsilon$. Следовательно, для всех $n > N$ выполняется $|x_n - a| < \varepsilon$, что и означает сходимость к a.

Для невозрастающей и ограниченной снизу последовательности доказательство аналогично и сводится к первому случаю рассмотрением $\{-x_n\}$. (теорема дает достаточное, но не необходимое условие)

Вопрос 12: Неограниченность последовательности $x_n = q^n, q > 1$, оценка $q^{n-1} \leq x < q^n$. Сходимость геометрической прогрессии и суммы геометрической прогрессии при $|q| < 1$. Предел последовательности $\frac{n}{q^n}$.

Утверждение: Если $q > 1$, то последовательность $x_n = q^n$ неограничена сверху.

Доказательство: Предположим противное: пусть существует $M > 0$ такое, что $q^n \leq M$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда $n \ln q \leq \ln M$, откуда $n \leq \frac{\ln M}{\ln q}$ для всех n, что противоречит неограниченности множества натуральных чисел. Более элементарно: так как $q = 1 + h, h > 0$, то по неравенству Бурнулли $q^n = (1+h)^n \geq 1 + nh$, и правая часть неограниченно растет с ростом n.

Лемма: Для любого $x > 0$ и $q > 1$ существует единственное целое число $n \in \mathbb{Z}$ такое, что $q^{n-1} \leq x < q^n$.

Доказательство: Рассмотри множество $A = \{k \in \mathbb{Z}: q^k \leq x\}$. Оно непусто, так как при $k \to -\infty$ величины q^k стремятся к 0 (поскольку $q > 1$), поэтому найдется достаточно малое целое k с $q^k \leq x$. Множество A ограничено сверху, так как из неограниченности q^k при $k \to +\infty$ следует, что для достаточно больших k будет $q^k > x$. Следовательно, существует $n = maxA$. Тогда по построению $q^n \leq x$, но $q^{n+1} > x$. Таким образом, $q^n \leq x < q^{n+1}$. Заменив n на $n-1$, получим нужные неравенства. Единственность следует из строгого возрастания функции $t \mapsto q^t$.

Теорема: Если $|q| < 1$, то $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$.

Доказательство: Случай $q = 0$ тривиален. Пусть $0 < |q| < 1$. Тогда $\frac{1}{|q|} > 1$. По доказанному в пункте 1 последовательность $(\frac{1}{|q|^n})$ неограничена, значит, для любого $\varepsilon > 0$ найдется N такое, что $\frac{1}{|q|^N} > \frac{1}{\varepsilon}$, то есть $|q|^N < \varepsilon$. В силу убывания $|q|^n$ (поскольку $q < 1$) для всех $n > N$ также $|q|^n < \varepsilon$. Это и означает сходимость к нулю.

Теорема: Если $|q| < 1$, то для любого $a \in \mathbb{R}$ сумма бесконечно геометрической прогрессии равна $a + aq + aq^2 + \cdots = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q}$, где $S_n = a \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$ – частичная сумма.

Доказательство: Известно, что $S_n = a \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$ (при $q \neq 1$). Так как $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q}$. При $a = 1$ получаем $1 + q + q^2 + \cdots = \frac{1}{1-q}$.

Теорема: Если $q > 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{q^n} = 0$.

Доказательство: Положим $q = 1 + h$, где $h > 0$. Для $n \geq 2$ по биному Ньютона: $q^n = (1+h)^n \geq \binom{n}{2} h^2 = \frac{n(n-1)}{2} h^2$. Тогда $0 \leq \frac{n}{q^n} \leq \frac{n}{\frac{n(n-1)}{2} h^2} = \frac{2}{(n-1)h^2}$. Правая часть стремится к нулю при $n \to \infty$. По принципу сжатой последовательности получаем требуемое.

Вопрос 13: Определение числа e. Свойства последовательностей, связанных с числом e.

Число e определяется как предел последовательности $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Теорема о существовании такого предела: Последовательность $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ сходится.

Доказательство: Докажем монотонность и ограниченность.

Монотонность. Покажем, что последовательность возрастает. Используем неравенство Бернулли $(1+a)^n \geq 1+na$ при $a > -1$. Рассмотрим отношение $\frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left[\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1}}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}}\right] = \left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{n-1}$. Преобразуем: $\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{n-1} = \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n-1} \geq 1-\frac{n-1}{n^2} = \frac{n^2-n+1}{n^2}$. Тогда $\frac{x_n}{x_{n-1}} \geq \left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{n^2-n+1}{n^2} = \frac{n^3+n^2-n+1}{n^3} > 1$. Следовательно, $x_n > x_{n-1}$.

Ограниченность сверху. Покажем, что $x_n < 3$. Используем биноминальное разложение: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\cdot\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k} \leq \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$. Так как $k! \geq 2^{k-1}$ при $k \geq 1$, то $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} \leq 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}} < 1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3$.

Таким образом, последовательность возрастает и ограничена сверху, значит, имеет предел.

Число e также может быть определено как сумма сходящегося ряда: $e = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$. Это следует из того, что частичные суммы ряда совпадают с $y_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$, и можно показать, что $\lim x_n = \lim y_n$.

Свойства последовательностей, связанных с числом e:

1. Обобщение: Для любого вещественного a $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^a$.
2. Связанные пределы: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = e$.

3. Монотонность: Последовательность $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ убывает и сходится к e.
4. Иррациональность: Число e иррационально (доказательство обычно использует представление в виде ряда)

Вопрос 14: Фундаментальные последовательности. Критерий Коши сходимости последовательности.

Определение: Последовательность $\{x_n\}$ вещественных чисел называется фундаментальной (последовательностью Коши), если $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\colon \forall m, n > N\ \ |x_n - x_m| < \varepsilon$.

Теорема: Последовательность вещественных чисел сходится тогда и только тогда, когда она является фундаментальной.

Доказательство:

- *Необходимость.* Пусть $\lim x_n = a$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. По определению предела найдется номер N такой, что для всех $n > N$ выполняется $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда для любых $m, n > N$: $|x_n - x_m| < |x_n - a| + |a - x_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Следовательно, $\{x_n\}$ – фундаментальная.
- *Достаточность.* Пусть $\{x_n\}$ – фундаментальная последовательность.

1. Покажем, что она ограничена. Возьмем $\varepsilon = 1$. Найдем N_1 такое, что для всех $m, n > N_1$ верно $|x_n - x_m| < 1$. Зафиксируем $m = N_1 + 1$. Тогда при $n > N_1$: $|x_n| \leq |x_n - x_m| + |x_m| < 1 + |x_m|$. Числа $|x_1|, |x_2|, \dots, |x_N|, 1 + |x_m|$ ограничивают последовательность.
2. По теореме Больцано-Вейерштрасса из ограниченной последовательность можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$. Пусть $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$.
3. Докажем, что вся последовательность сходится к a. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Из фундаментальности найдем N такое, что для всех $m, n > N$: $|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}$. Из сходимости подпоследовательности выберем номер $n_k > N$ такой, что $\left|x_{n_k} - a\right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда для любого $n > N$: $|x_n - a| \leq \left|x_n - x_{n_k}\right| + \left|x_{n_k} - a\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Значит, $\lim x_n = a$.

Вопрос 15: Подпоследовательности. Теорема Больцано-Коши о существовании сходящейся подпоследовательности. Частичные пределы последовательностей. Нижний и верхний пределы последовательности. Теорема о нижнем и верхнем пределе последовательности.

Пусть $\{x_n\}$ – последовательность, и пусть задана строго возрастающая последовательность натуральных чисел $n_1 < n_2 < \cdots$. Тогда последовательность $\{x_{n_k}\}$ с $k = 1,2, \dots, \infty$ называется **подпоследовательностью** последовательности $\{x_n\}$.

Теорема: Из всякой ограниченной последовательности вещественных чисел можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство: Пусть $\{x_n\}$ ограничена, то есть существует отрезок $[a_1, b_1]$ такой, что $x_n \in [a_1, b_1]$ для всех n. Разделим отрезок пополам. Хотя бы одна из половин содержит бесконечно много членов последовательности (возможно, обе). Выберем ту половину, которая содержит бесконечно много членов, и обозначим ее $[a_2, b_2]$. На этом отрезке снова выберем бесконечно много членов последовательности. Продолжая процесс, получим систему вложенных отрезков $[a_k, b_k]$, где длина $b_k - a_k = \frac{b_1 - a_1}{2^{k-1}} \to 0$, и каждый отрезок $[a_k, b_k]$ содержит бесконечно много членов последовательности.

Выберем подпоследовательность следующим образом:

- Возьмем n_1 такое, что $x_{n_1} \in [a_1, b_1]$ (любой член)
- Далее, так как в $[a_2, b_2]$ бесконечно много членов, выберем $n_2 > n_1$ такое, что $x_{n_2} \in [a_2, b_2]$
- Продолжая, на шаге k выберем $n_k > n_{k-1}$ такое, что $x_{n_k} \in [a_k, b_k]$

По принципу вложенных отрезков существует единственная точка c, принадлежащая всем отрезкам, причем $a_k \to c, b_k \to c$. Так как $a_k \le x_{n_k} \le b_k$, то по теореме о сжатой последовательности $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = c$.

Число $a \in \mathbb{R}$ (или символы $+\infty, -\infty$) называется **частичным пределом** последовательности $\{x_n\}$, если существует ее подпоследовательность, сходящаяся к a.

Верхним пределом последовательности $\{x_n\}$ называется наибольший из ее частичных пределов. Обозначение: $\overline{\lim\limits_{n \leftarrow \infty}}\, x_n$ или $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n$. **Нижним пределом** называется наименьший из ее частичных пределов. Обозначение: $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$ или $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n$.

Теорема: Для любой ограниченной последовательности существует как верхний, так и нижний пределы, причем они являются соответственно наибольшими и наименьшими частичными пределами этой последовательности.

Доказательство: Рассмотрим последовательность $y_n = \sup\limits_{k\geq n} x_k$ (последовательность верхних граней). Она является невозрастающей и ограниченной (так как $\{x_n\}$ ограничена), следовательно, имеет предел $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = L \in \mathbb{R}$. Докажем, что L – наибольший частичный предел.

Покажем, что L – частичный предел. По определению точной верхней грани для каждого n найдется индекс $m_n \geq n$ такой, что $y_n - \frac{1}{n} \leq x_{m_n} \leq y_n$. Выбирая подходящую последовательность индексов, можно добиться, чтобы $\{x_{m_n}\}$ сходилась к L.

Пусть a – произвольный частичный предел, то есть существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящаяся к a. Тогда для каждого фиксированного n при достаточно больших k выполняется $n_k \geq n$, значит, $x_{n_k} \leq y_n$. Переходя к пределу по k, получаем $a \leq y_n$ для всех n. Затем переходя к пределу по n, получаем $a \leq L$. Следовательно, L – наибольший частичный предел.

Аналогично доказывается существование и свойства нижнего предела.

Следствие: Последовательность сходится тогда и только тогда, когда ее верхний и нижний пределы совпадают (и конечны).

Вопрос 16: Определение и свойства предела функции в точке. Предел функции по Коши и по Гейне. Равносильность определений.

По Коши: Число a называется пределом функции $f(x)$ в точке x_0, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что $0 < |x - x_0| < \delta$ выполняется $|f(x) - a| < \varepsilon$.

По Гейне: Число a называется пределом функции $f(x)$ в точке x_0, если для любой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к x_0, и члены которой не равны x_0, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = a$. $\lim\limits_{n\to\infty} f(x) = a \overset{\text{def}}{=} \forall \{x_n\}\colon \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0,\ \forall n\ x_n \neq x_0, \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = a$.

Теорема: Определения по Коши и по Гейне эквивалентны.

Доказательство:

Коши ⇒ Гейне

Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ по Коши. Возьмем произвольную последовательность $\{x_n\} \subset X \setminus \{a\}$, такую что $x_n \to a$. Покажем, что $f(x_n) \to A$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. По определению Коши найдется $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in X, 0 < |x - a| < \delta$, выполняется $|f(x) - A| < \varepsilon$. Поскольку $x_n \to a$, для данного δ сущетвует номер N такой, что при $n > N$ выполняется $0 < |x - a| < \delta$. Тогда для тех же n будет $|f(x_n) - A| < \varepsilon$. Это означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

Гейне ⇒ Коши

Предположим, что условие Коши не выполнено. Тогда $\exists \varepsilon_0 > 0\colon \forall \delta > 0\ \exists x_\delta \in X\colon\ 0 < |x_\delta - a| < \delta$ и $|f(x_0) - A| \geq \varepsilon_0$. Возьмем $\delta_n = \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$. Для каждого n найдется точка $x_n \in X$ такая, что $0 < |x_n - a| < \frac{1}{n}$ и $|f(x_0) - A| \geq \varepsilon_0$. Последовательность $\{x_n\}$ удовлетворяет условиям: $x_n \in X \setminus \{a\},\ x_n \to a$. Тогда по определению Гейне должно выполняться $f(x_n) \to A$, что противоречит неравенству $|f(x_0) - A| \geq \varepsilon_0$. Следовательно, условие Коши выполнено.

Свойства предела функции:

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на множестве X, a – предельная точка X, и существуют пределы $\lim_{x\to a} f(x) = A, \lim_{x\to a} g(x) = B$.

1. Единственность предела. Функция не может иметь двух различных пределов в точке a.
2. Локальная ограниченность. Существует проколотая окрестность точки a, в которой функция $f(x)$ ограничена.
3. Арифметические действия:
   - $\lim\big(f(x) \pm g(x)\big) = A \pm B$;
   - $\lim\big(f(x) \cdot g(x)\big) = A \cdot B$;
   - если $B \neq 0$, то $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$.
4. Предельный переход в неравенствах:
   - если $f(x) \leq g(x)$ в некоторой проколотой окрестности точки a, то $A \leq B$;
   - если $A > 0$, то $f(x) > 0$ в некоторой проколотой окрестности точки a.
5. Теорема о сжатой функции. Если в некоторой проколотой окрестности точки a выполнено $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ и $\lim f(x) = \lim g(x) = C$, то $\lim h(x) = C$.
6. Предел сложной функции. Пусть $\lim_{x\to a} g(x) = b,, \lim_{y\to b} f(y) = A$, и в некоторой проколотой окрестности точки a выполненяется $g(x) \neq b$. Тогда $\lim_{x\to a} f(g(x)) = A$.

Вопрос 17: Предельный переход в неравенствах. Теорема о сжатой функции.

Теорема: Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в некоторой проколотой окрестности точки a, и для всех x из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) \leq g(x)$. Если существуют пределы $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A,\ \lim\limits_{x \to a} g(x) = B$, то $A \leq B$.

Доказательство: Предположим, что $A > B$. Тогда существует число $\varepsilon = \frac{A-B}{2} > 0$. По определению предела функции существуют такие $\delta_1 > 0$ и $\delta_2 > 0$, что при $0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon, \quad 0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - B| < \varepsilon$. Положим $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Тогда при $0 < |x - x_0| < \delta$ выполняются неравенства $f(x) > A - \varepsilon = \frac{A+B}{2}$, $g(x) < B + \varepsilon = \frac{A+B}{2}$. Отсюда следует, что $f(x) > g(x)$, что противоречит условию $f(x) \leq g(x)$ в проколотой окрестности точки x_0. Полученное противоречие означает, что предположение неверно, и потому $A \leq B$.

Теорема: Пусть функции $f(x), g(x), h(x)$ определены в некоторой проколотой окрестности точки x_0, и для всех x из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. Если при этом $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = A$, то существует предел функции $g(x)$ в точке x_0, и $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = A$.

Доказательство: Так как $\lim\limits_{x \to a} f(x) = C$, то по определению предела функции для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta_1 > 0$ такое, что при $0 < |x - x_0| < \delta_1$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$, то есть $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$. Аналогично, из условия $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = A$ следует существование $\delta_2 > 0$ такого, что при $0 < |x - x_0| < \delta_2$ выполняется $|h(x) - A| < \varepsilon$, то есть $A - \varepsilon < h(x) < A + \varepsilon$. Положим $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Тогда при $0 < |x - x_0| < \delta$ имеем $A - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < A + \varepsilon$. Следовательно, $|g(x) - A| < \varepsilon$. По определению предела функции это означает, что $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = A$.

Вопрос 18: Предел суммы, произведения, частного функций. Предел сложной функции. Предел обратной функции.

Теорема: Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в некоторой проколотой окрестности точки a и существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A, \lim\limits_{x\to a} g(x) = B$. Тогда:

1. Предел суммы/разности: $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = A \pm B$.
2. Предел произведения: $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B$.
3. Предел частного: Если $B \neq 0$, то $\lim\limits_{x\to a}(\frac{f(x)}{g(x)}) = \frac{A}{B}$.

Доказательство суммы. Так как $\lim f(x) = A$, для $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ найдется $\delta_1 > 0$ такое, что $0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$. Так как $\lim g(x) = B$, для $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ найдется $\delta_2 > 0$ такое, что $0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2}$. Возьмем $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тогда при $0 < |x - a| < \delta$ выполняются оба неравенства, и $\left|\big(f(x) + g(x)\big) - (A + B)\right| \leq |f(x) - A| + |g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Следовательно, $\lim\big(f(x) + g(x)\big) = A + B$.

Доказательство произведения. Оценим разность: $|f(x)g(x) - AB| = |f(x)g(x) - f(x)B + f(x)B - AB| \leq |f(x)||g(x) - B| + |B||f(x) - A|$. Сходящаяся функция локально ограничена: существует $M > 0$ и $\delta_0 > 0$ такие, что $0 < |x - a| < \delta_0 \Rightarrow |f(x)| \leq M$. Можно взять $M = |A| + 1$, так как для $\varepsilon = 1$ найдется окрестность, где $|f(x) - A| < 1$, откуда $|f(x)| < |A| + 1$. Для $\varepsilon > 0$ выберем δ_1, δ_2 так: $|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2(|B|+1)}$ при $0 < |x - a| < \delta_1$, $|g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2M}$ при $0 < |x - a| < \delta_2$. Положим $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1, \delta_2\}$. Тогда при $0 < |x - a| < \delta$: $|f(x)g(x) - AB| \leq M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + |B| \cdot \frac{\varepsilon}{2(|B|+1)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Таким образом, $\lim f(x)g(x) = AB$.

Доказательство частного. Найдем окрестность, где $|g(x)|$ отделен от нуля. Так как $\lim g(x) = B \neq 0$, для $\varepsilon_0 = \frac{|B|}{2} > 0$ существует $\delta_0 > 0$ такое, что $0 < |x - a| < \delta_0 \Rightarrow |g(x) - B| < \frac{|B|}{2}$. Тогда при таких x: $|g(x)| \geq |B| - |g(x) - B| >$

$|B| - \frac{|B|}{2} = \frac{|B|}{2}$. Теперь оценим $\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B}\right| = \frac{|g(x)-B|}{|g(x)||B|}$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ выберем $\delta_1 > 0$ так, что $0 < |x-a| < \delta_1 \Rightarrow |g(x) - B| < \frac{|B|^2\varepsilon}{2}$. Положим $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1\}$. Тогда при $0 < |x-a| < \delta$: $\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B}\right| < \frac{\frac{|B|^2\varepsilon}{2}}{\frac{|B|}{2}} \cdot |B| = \varepsilon$. Следовательно, $\lim \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{B}$.

Теорема: Пусть $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$, $\lim\limits_{y\to b} f(y) = A$, существует проколотая окрестность точки a, в которой $g(x) \neq b$ (это условие можно опустить, если f определена в b и $f(b) = A$, то есть f непрерывна b). Тогда $\lim\limits_{x\to a} f(g(x)) = A$.

Доказательство: Зафиксируем $\varepsilon > 0$. По определению предела f в точке b найдется $\delta_1 > 0$ такое, что для всех y, удовлетворяющих $0 < |y - b| < \delta_1$, выполняется $|f(y) - A| < \varepsilon$. По определению предела g в точке a для числа $\delta_1 > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих $0 < |x - a| < \delta$, выполняется $|g(x) - b| < \delta_1$. По условию в проколотой окрестности точки a имеем $g(x) \neq b$, поэтому для указанных x выполнено $0 < |g(x) - b| < \delta_1$. Тогда по выбору δ_1 получаем $|f\big(g(x)\big) - A| < \varepsilon$.

Теорема: Пусть функция $y = f(x)$ строго монотонна на интервале (a, b) и непрерывна. Тогда обратная функция $x = f^{-1}(y)$ определена на интервале (A, B), где $A = \inf f$, $B = \sup f$, и также строго монотонна и непрерывна. В частности, если $x_0 \in (a, b)$ и $y_0 = f(x_0)$, то $\lim\limits_{y\to y_0} f^{-1}(y) = x_0$. Аналогичные утверждения верны для пределов в граничных точках.

Доказательство: Пусть f строго возрастает. Возьмем произвольную последовательность $\{y_n\}, y_n \to y_0, y_n \in (A, B)$. Обозначим $x_n = f^{-1}(y_n)$. Нужно доказать, что $x_n \to x_0$.

Предположим противное: существует $\varepsilon_0 > 0$ и подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ такая, что $\left|x_{n_k} - x_0\right| \geq \varepsilon_0$. Так как f строго возрастает, из ограниченности $\{x_{n_k}\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $x_{m_j} \to \tilde{x} \neq x_0$. Тогда по непрерывности f имеем $f(x_{m_j}) \to f(\tilde{x})$. Но $f\left(x_{m_j}\right) = y_{m_j} \to y_0$, поэтому $f(\tilde{x}) = y_0 = f(x_0)$. В силу строгой монотонности $\tilde{x} = x_0$, противоречие. Значит, $x_n \to x_0$, что и означает непрерывность (существование предела) обратной функции.

Следствие: Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ (конечный или бесконечный) и f строго монотонна, то для обратной функции $\lim\limits_{y\to L} f^{-1}(y) = a$ (при соответствующем направлении стремления y).

Вопрос 19: Понятие неопределенности. Вычисление пределов. Примеры раскрытия неопределенностей разного типа.

При вычислении предела $\lim f(x)$ часто возникает ситуация, когда непосредственная подстановка предельного значения аргумента приводит к выражению, не имеющему определенного смысла. Такие выражения называются **неопределенностями**. Их наличие означает, что предел может существовать, но для его нахождения требуются специальные преобразования функции.

Основные типы неопределенностей:

1. $\frac{0}{0}$
2. $\frac{\infty}{\infty}$
3. $0 \cdot \infty$
4. $\infty - \infty$
5. 1^{∞}
6. 0^{0}
7. ∞^{0}

Примеры раскрытия неопределенностей:

1. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = 1$ (первый замечательный предел). Использование известного предела, эквивалентных бесконечно малых или правило Лопиталя.
2. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x^2+2x+1}{5x^2+4x+2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{3+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{5+\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}} = \frac{3}{5}$. Деление числителя и знаменателя на старшую степень x.
3. $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x = [0 \cdot \infty] = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Преобразование к виду $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ или $\left[\frac{0}{0}\right]$. Затем применение правила Лопиталя или использование замены $x = e^{-t}$, получаем предел, равный 0.

4. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=[\infty-\infty]=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x-(x-1)}{(x-1)\ln x}=\left[\frac{0}{0}\right]$. Приведение к общему знаменателю. Затем использование правила Лопиталя или разложения в ряд Тейлора.
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=[1^\infty]=e$. Сведение ко второму замечательному пределу или использование равенства $\lim f(x)^{g(x)}=e^{\lim(f(x)-1)g(x)}$ при $f(x)\to 1, g(x)\to\infty$.
6. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x=[0^0]$ (или ∞^0) $=\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\ln(x^x)}=\lim\limits_{x\to 0^+} e^0=1$.
Логарифмирование.

Вопрос 20: Предел функции в точке, равный бесконечности. Теоремы о пределах произведений и частных, содержащих бесконечно большие, бесконечно малые, ограниченные функции.

Пусть функция $f(x)$ определена в проколотой окрестности точки a. Говорят, что предел функции $f(x)$ в точке a:

- равен бесконечности, если $\forall E > 0\ \exists \delta > 0$: $\forall x\ (0 < |x - a| < \delta) \Rightarrow |f(x)| > E$.
- равен плюс бесконечности, если $\forall E > 0\ \exists \delta > 0$: $\forall x\ (0 < |x - a| < \delta) \Rightarrow f(x) > E$
- равен минус бесконечности, если $\forall E > 0\ \exists \delta > 0$: $\forall x\ (0 < |x - a| < \delta) \Rightarrow f(x) < -E$

Аналогичные определения формулируются для односторонних пределов и пределов при $x \to \infty$.

Функция $\alpha(x)$ называется **бесконечно малой** при $x \to a$, если $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$.

Функция $f(x)$ называется **бесконечно большой** при $x \to a$, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ (или $+\infty$, или $-\infty$).

Теорема 1: Если $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \to a$, а функция $g(x)$ ограничена в некоторой проколотой окрестности точки a, то произведение $\alpha(x)g(x)$ является бесконечно малой при $x \to a$.

Доказательство: По условию, существует $M > 0$ и $\delta_1 > 0$ такие, что при $0 < |x - a| < \delta_1$ выполнено $|g(x)| \leq M$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ в силу бесконечной малости $\alpha(x)$ найдется $\delta_2 > 0$ такое, что при $0 < |x - a| < \delta_2$ выполнено $|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{M}$. Положим $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тогда при $0 < |x - a| < \delta$ имеем $|\alpha(x)g(x)| = |\alpha(x)| \cdot |g(x)| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon$. Следовательно, $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x)g(x) = 0$.

Теорема 2: Если функция $f(x)$ является бесконечно большой при $x \to a$ и в некоторой проколотой окрестности точки a выполнено $f(x) \neq 0$, то функция $\frac{1}{f(x)}$ является бесконечно малой при $x \to a$.

Доказательство: Пусть $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. По определению бесконечно большой для $E = \frac{1}{\varepsilon}$ найдется $\delta > 0$ такое, что $0 < |x - a| < \delta$ выполняется $|f(x)| > \frac{1}{\varepsilon}$. Тогда $\left|\frac{1}{f(x)}\right| < \varepsilon$, что и означает $\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = 0$. Обратное утверждение доказывается аналогично.

Терема 3: Если $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ и $\lim_{x \to a} g(x) = \infty$ (или оба равны $+\infty$ или $-\infty$), то $\lim_{x \to a}(f(x) \cdot g(x)) = +\infty$. Если один предел равен $+\infty$, а другой – $-\infty$, то произведение стремится к $-\infty$.

Доказательство: Зафиксируем $E > 0$. Найдем δ_1 такое, что при $0 < |x - a| < \delta_1$ выполняется $f(x) > \sqrt{E}$. Найдем δ_2 такое, что при $0 < |x - a| < \delta_2$ выполняется $g(x) > \sqrt{E}$. Тогда при $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ имеем $f(x) \cdot g(x) > \sqrt{E} \cdot \sqrt{E} = E$. Следовательно, предел произведения равен $+\infty$.

Теорема 4: Если $\lim_{x \to a} \alpha(x) = 0$, а $\lim_{x \to a} g(x) = \infty$, и в проколотой окрестности точки a выполнено $g(x) \neq 0$, то $\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{g(x)} = 0$.

Доказательство: Функция $\frac{1}{g(x)}$ является бесконечно малой по теореме 2. Тогда $\frac{\alpha(x)}{g(x)} = \alpha(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$ – произведение двух бесконечно малых, следовательно, бесконечно малая.

Теорема 5: Если $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ и $\lim_{x \to a} g(x) = \infty$, то о пределе частного $\frac{f(x)}{g(x)}$ в общем случае ничего определенного сказать нельзя (возникает неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$).

Аналогичные теоремы справедливы для пределов при $x \to \infty$ и для односторонних пределов.

Вопрос 21: Пределы функции на бесконечности. Раскрытие неопределенности на бесконечности. Асимптоты графиков.

Определение предела при $\boldsymbol{x} \to +\infty$:

Число $A \in \mathbb{R}$ называется пределом функции $f(x)$ при $x \to +\infty$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists M > 0\colon\ \forall x > M \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$. Обозначение: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$.

Аналогично определяется предел при $x \to -\infty$.

Определение предела при $\boldsymbol{x} \to \infty$:

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N > 0\colon\ \forall |x| > N \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$

Основные типы неопределенностей:

1. $\frac{0}{0}$
2. $\frac{\infty}{\infty}$
3. $0 \cdot \infty$
4. $\infty - \infty$
5. 1^{∞}
6. 0^{0}
7. ∞^{0}

Методы раскрытия:

- Для рациональных функций – деление числителя и знаменателя на старшую степень x
- Для иррациональностей – умножение и деление на сопряженное, выделение главной части
- Использование замечательных пределов
- Правило Лопиталя
- Выделение наибольшего роста

Прямая $y = kx + b$ называется **наклонной асимптотой** графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$, если $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (kx + b)] = 0$. Аналогично определяются асимптоты при $x \to -\infty$.

Вычисление коэффициентов наклонной асимптоты:

$k = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x},\ b = \lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - kx].$

Если оба предела существуют и конечны, то асимптота существует.

Частные случаи:

- Если $k = 0$ и b конечно, то прямая $y = b$ называется горизонтальной асимптотой
- Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, то прямая $x = a$ называется вертикальной асимптотой.

Вопрос 22: Непрерывность функций. Примеры непрерывных и разрывных функций. Функция Дирихле.

Определение непрерывности функции в точке

По Коши: Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$: $\forall x \; (|x - x_0| < \delta) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

По Гейне: Функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, если для любой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к x_0, соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к $f(x_0)$.

Функция называется непрерывной на множестве, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Примеры непрерывных функций:

- Постоянная функция $f(x) = C$ непрерывна всюду.
- Линейная функция $f(x) = kx + b$ непрерывна на $\mathbb{R}$.
- Степенная функция $f(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{N})$ непрерывна на $\mathbb{R}$.
- Многочлены и рациональные функции непрерывны на своих областях определения.
- Показательная, логарифмическая, тригонометрическая функции непрерывна на своих областях определения.

Примеры разрывных функций:

- Устранимый разрыв: существуют конечные односторонние пределы, равные между собой, но не равные значению функции в точке (или функция не определена). Пример: $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ при $x \neq 0$, если доопределить $f(0) = 1$, то в нуле будет устранимый разрыв.
- Разрыв первого рода (скачок): существуют конечные, но не равные односторонние пределы. Пример: $f(x) = sign(x)$ в точке $x = 0$: $\lim_{x \to 0^+} 1$, $\lim_{x \to 0^-} -1$.

- Разрыв второго порядка: хотя бы один односторонний предел бесконечен или не существует. Пример: $f(x) = \frac{1}{x}$ в точке $x = 0$.

Функция Дирихле: $D(x) = \begin{cases} 1, \text{если } x \in \mathbb{Q} \\ 0, \text{если } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$.

Свойства:

1. Функция Дирихле разрывна в каждой точке вещественной прямой. Доказательство: Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$. В любой окрестности точки x_0 существуют как рациональные, так и иррациональные числа. Выберем последовательности: $\{r_n\}$ рациональных чисел, $r_n \to x_0$, тогда $D(r_n) = 1$; $\{i_n\}$ иррациональных чисел, $i_n \to x_0$, тогда $D(i_n) = 0$. Если бы существовал предел $\lim\limits_{x \to x_0} D(x)$, то по Гейне он должен был бы равняться 0, и 1 – противоречие.
2. Функция Дирихле нигде не непрерывна, но определена на всей числовой прямой.

Вопрос 23: Эквивалентные функции. Таблица эквивалентных функций. Первый замечательный предел. Применение второго замечательного предела. Непрерывность элементарных функций.

Функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$, определенные в проколотой окрестности точки a, называются **эквивалентными** при $x \to a$, если $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$. Обозначение: $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

Свойства:

1. Если $\alpha \sim \beta$, то $\beta \sim \alpha$.
2. Если $\alpha \sim \beta$ и $\beta \sim \gamma$, то $\alpha \sim \gamma$.
3. В произведении и частном эквивалентные функции можно заменять на эквивалентные.
4. В сумме заменять на эквивалентные функции нельзя.

Таблица эквивалентных функций.

Пусть $\alpha(x) \to 0$ при $x \to 0$. Тогда:

1. $\sin\alpha(x) \sim \alpha(x)$
2. $tg\ \alpha(x) \sim \alpha(x)$
3. $\arcsin\alpha(x) \sim \alpha(x)$
4. $arctg\ \alpha(x) \sim \alpha(x)$
5. $1 - \cos\alpha(x) \sim \frac{\alpha(x)^2}{2}$
6. $\ln(1 + \alpha(x)) \sim \alpha(x)$
7. $e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$
8. $\left(1 + \alpha(x)\right)^p - 1 \sim p\alpha(x),\ p \in \mathbb{R}$

Первый замечательный предел.

Теорема: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$.

Доказательство: Рассмотрим единичную окружность. Пусть $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ – угол в радианах. Тогда длина дуги: x, длина отрезка касательной: $tg\ x$, длина хорды: $\sin x$. Из геометрических построений (площадь сектора, треугольников) получаем неравенства: $\sin x < x < tg\, x$. Разделив на $\sin x$, имеем $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \Rightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$. Так как $\cos x \to 1$ при $x \to 0$, по теореме о сжатой функции получаем требуемое. Для отрицательных x доказательство аналогично (функция четная).

Второй замечательный предел.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e, \qquad \lim_{t\to 0}(1+t)^{1/t} = e$$

Применения:

- Вычисление пределов типа 1^∞. Если $\alpha(x) \to 0, \beta(x) \to \infty$ и $\alpha(x)\beta(x) \to A$, то $\lim\bigl(1+\alpha(x)\bigr)^{\beta(x)} = e^A$.
- Вывод эквивалентностей. Из второго предела следуют эквивалентности при $t \to 0$: $\ln(1+t) \sim t,\ e^t - 1 \sim t,\ a^t - 1 \sim t\ln a\ \ (a > 0)$.
- Пределы вида $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)^{h(x)}$. Пример: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3}}$.

Определение: Функции, получающиеся из основных элементарных функций (степенных, показательных, логарифмических, тригонометрических, обратных тригонометрических) с помощью конечного числа арифметических операций и композиций, называются элементарными.

Теорема: Все элементарные функции непрерывны на своей области определения.

Доказательство: Базовые функции непрерывны. Операции над непрерывными функциями сохраняют непрерывность. Композиция непрерывных функций непрерывна. Элементарная функция получается конечным числом таких операций. Следовательно, она непрерывна во всех точках, где определена.

Вопрос 24: Односторонние пределы. Односторонние бесконечные пределы. Классификация разрывов. Непрерывность кусочно-заданных функций.

Число A называется **правым пределом** функции $f(x)$ в точке a, если $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$: $\forall x\ (a < x < a + \delta) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$. Обозначение: $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = A$.

Левосторонний предел определяется аналогично для $a - \delta < x < a$. Обозначение: $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = A$.

Предел $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ существует тогда и только тогда, когда существуют оба односторонних предела и они равны.

Функция $f(x)$ **имеет правый предел**, равный $+\infty$ при $x \to a^+$, если $\forall E > 0\ \exists\delta > 0$: $\forall x\ (a < x < a + \delta) \Rightarrow f(x) > E$. Обозначение: $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$.

Аналогично определяются случаи $-\infty$ и левосторонние бесконечные пределы.

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки a, но либо не определена в a, либо определена, но не является непрерывной.

Типы разрывов:

- Устранимый разрыв. Существует конечный двусторонний предел $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, но либо $f(a) \neq A$, либо функция не определена в a. Пример: $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $f(0)$ не определено.
- Разрыв первого рода (скачок). Существуют конечные односторонние пределы $f(a - 0)$ и $f(a + 0)$, но они не равны друг другу. Величина $|f(a + 0) - f(a - 0)|$ называется скачком функции. Пример: $f(x) = sign\ x = \begin{cases} 1, x > 0 \\ 0, x = 0 \\ -1, x < 0 \end{cases}$, в точке $x = 0$: $f(0 - 0) = -1, f(0 + 0) = 1$, скачок равен 2.

- Разрыв второго рода. Хотя бы один из односторонних пределов не существует или бесконечен. Пример: $f(x) = \sin\frac{1}{x}$, в точке $x = 0$: предела нет.

Функция называется **кусочно-заданной**, если ее область определения разбита на интервалы, на каждом из которых функция задана своей аналитической формулой.

Проверка непрерывности в точках стыка формул:

Пусть задана функция $f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x < a \\ c, & x = a \\ f_2(x), & x > a \end{cases}$. Функция $f(x)$ непрерывна в точке a тогда и только тогда, когда существуют односторонние пределы, эти пределы равны между собой и равны значению функции в точке: $\lim\limits_{x\to a^-} f_1(x) = L_1$, $\lim\limits_{x\to a^+} f_2(x) = L_2$, $L_1 = L_2 = c$. Если $L_1 = L_2 \neq c$, то в точке a устранимый разрыв. Если $L_1 \neq L_2$, то разрыв первого рода. Если хотя бы один из пределов не существует или бесконечен, то разрыв второго рода.

Вопрос 25: Графики элементарных функций. Асимптоты графиков функций. Примеры графиков с асимптотами. Построение эскизов графиков с учетом асимптот и разрывов.

Основные элементарные функции и их графики:

1. Степенная функция $y = x^a$
   - $a = 1$: прямая $y = x$
   - $a = 2$: парабола $y = x^2$
   - $a = -1$: гипербола $y = \frac{1}{x}$ (асимптоты $x = 0, y = 0$)
2. Показательная функция $y = a^x$
   - $a > 1$: возрастает, проходит через $(0,1)$, асимптота $y = 0$ при $x \to -\infty$
   - $0 < a < 1$: убывает, асимптота $y = 0$ при $x \to +\infty$
3. Логарифмическая функция $y = \log_a x$
   - Область определения: $x > 0$, проходит через $(1,0)$, асимптота $x = 0$
4. Тригонометрические функции
   - $y = \sin x$, $y = \cos x$: периодические, ограниченные, без асимптот
   - $y = tg\ x$: разрывы в $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, асимптоты в этих точках
   - $y = ctg\ x$: разрывы в $x = \pi k$, асимптоты
5. Обратные тригонометрические функции
   - $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$: определены на $[-1,1]$, ограничены
   - $y = arctg\ x$, $y = arcctg\ x$: имеют горизонтальные асимптоты

Асимптота – прямая, к которой неограниченно приближается график функции при удалении точки в бесконечность или при приближении к точке разрыва.

Виды асимптоты:

- Вертикальная $x = a$: $\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$ или $\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$. Пример: $f(x) = \frac{1}{x}$, асимптота $x = 0$.

- Горизонтальная $y = b$: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$ или $\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$. Пример: $f(x) = arctg\ x$, асимптоты $y = \frac{\pi}{2}$ при $x \to +\infty$ и $y = -\frac{\pi}{2}$ при $x \to -\infty$.
- Наклонная $y = kx + b$: Условия существования при $x \to +\infty$ (аналогично для $x \to -\infty$) $k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - kx]$. Если оба предела существуют и конечны, то асимптота существует.

Примеры графиков с асимптотами:

1. Гипербола $y = \frac{1}{x}$
   - Вертикальная асимптота: $x = 0$
   - Горизонтальная асимптота: $y = 0$
2. Тангенс $y = tg\ x$
   - Вертикальные асимптоты: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$
3. Дробно-рациональная функция $y = \frac{x^2+1}{x-1}$
   - Вертикальная асимптота: $x = 1$
   - Наклонная асимптота: $y = x + 1$
4. Показательная функция $y = e^x$
   - Горизонтальная асимптота: $y = 0$ при $x \to -\infty$
5. Логарифмическая функция $y = \ln x$
   - Вертикальная асимптота: $x = 0$

Алгоритм построение эскиза графика:

1. Область определения
2. Точки разрыва и их тип
3. Асимптоты
4. Монотонность и экстремумы
5. Эскиз

Вопрос 26: Функция Римана. Разрывы в рациональных точках. Непрерывность в иррациональных точках.

Функция Римана $R\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ определяется следующим образом: $R(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, \text{ если } x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}, \text{где дробь несократима}, n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z} \\ 0, \text{ если } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$.

Теорема: Функция Римана разрывна во всех рациональных точках.

Доказательство: Пусть $x_0 = \frac{p}{q}$ – рациональное число (несократимая дробь, $q > 0$). Тогда $R(x_0) = \frac{1}{q} > 0$. Рассмотрим последовательность иррациональных чисел $\{x_n\}$, сходящуюся к x_0 (такая существует в силу плотности иррациональных чисел). Для каждого x_n имеем $R(x_n) = 0$. Тогда $\lim_{n\to\infty} R(x_n) = 0 \neq R(x_0) = \frac{1}{q}$. По определению предела по Гейне функция не является непрерывной в точке x_0.

Теорема: Функция Римана непрерывна во всех иррациональных точках.

Доказательство: Пусть $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, тогда $R(x_0) = 0$. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Нужно найти $\delta > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих $|x - x_0| < \delta$, выполняется $|R(x)| < \varepsilon$.

Построение δ. Рассмотрим множество тех рациональных чисел, значение функции в которых «велико», то есть $\geq \varepsilon$. Таких рациональных чисел конечное число, поскольку условие $\frac{1}{n} \geq \varepsilon$ равносильно $n \leq \frac{1}{\varepsilon}$. Значит, существует лишь конечное число несократимых дробей $\frac{m}{n}$ с $n \leq \frac{1}{\varepsilon}$, и для каждой такой дроби $R\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{1}{n} \geq \varepsilon$. Обозначим это конечное множество рациональных чисел через $A = \{r_1, r_2, \dots, r_k\}$. Так как x_0 иррационально, то $x_0 \notin A$. Выберем $\delta = \min\{|x_0 - r_i|\colon\ i = 1, \dots, k\} > 0$.

Проверка условия. Пусть $|x - x_0| < \delta$. Возможны два случая:

Если x иррационально, то $R(x) = 0$, и тогда $|R(x)| = 0 < \varepsilon$.

Если x рационально, то по выбору δ число x не может принадлежать множеству A, так как все точки из A удалены от x_0 не меньше чем на δ. Следовательно, если $x = \frac{m}{n}$ (несократимо), то $\frac{1}{n} < \varepsilon$, то есть $|R(x)| = \frac{1}{n} < \varepsilon$.

В обоих случаях $|R(x)| < \varepsilon$. Это и означает непрерывность в точке x_0.

Вопрос 27: Непрерывность функций на отрезке. Теорема Вейерштрасса об ограниченности непрерывной функции на отрезке. Теорема Вейерштрасса о достижении точной верхней грани непрерывной функции на отрезке. Теорема о промежуточном значении функции на отрезке.

Функция $f(x)$ называется **непрерывной на отрезке** $[a,b]$, если она:

1. Непрерывна в каждой точке интервала (a,b)
2. Непрерывна справа в точке a: $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$
3. Непрерывна слева в точке b: $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = f(b)$

Теорема Вейерштрасса об ограниченности: Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она ограничена на этом отрезке, то есть $\exists M > 0$: $\forall x \in [a,b]$ $|f(x)| \le M$.

Доказательство: Предположим, что f не ограничена на $[a,b]$. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ найдется точка $x_n \in [a,b]$ такая, что $|f(x_n)| > n$. Последовательность $\{x_n\}$ ограничена, так как все ее элементы лежат в $[a,b]$. По теореме Больцано-Вейерштрасса из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$. Пусть $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = c$. Поскольку $[a,b]$ – замкнутое множество, то $c \in [a,b]$. В силу непрерывности f в точке c имеем: $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(c)$. Но по построению $\left|f\left(x_{n_k}\right)\right| > n_k \to +\infty$, что противоречит конечности предела $f(c)$. Следовательно, предположение неверно, и функция ограничена.

Теорема Вейерштрасса о достижении точных граней: Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она достигает на этом отрезке своих точной верхней и точно нижней граней, то есть существуют точки $x_1, x_2 \in [a,b]$ такие, что $f(x_1) = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x) = M,\ f(x_2) = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x) = m$.

Доказательство: По теореме 1 множество значений f на $[a,b]$ ограничено, поэтому существует конечная точная верхняя грань $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. По определению точной верхней грани для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдется точка $x_n \in [a,b]$

такая, что $M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq M$. Последовательность $\{x_n\}$ ограничена, значит, содержит сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$. Пусть $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_1$. Так как $[a, b]$ замкнут, то $x_1 \in [a, b]$. В силу непрерывности f: $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_1)$. Но из неравенств $M - \frac{1}{n_k} < f\left(x_{n_k}\right) \leq M$ следует, что $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = M$. Следовательно, $f(x_1) = M$. Аналогично доказывается достижение точной нижней грани.

Теорема о промежуточном значении: Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $f(a) \neq f(b)$. Тогда для любого числа C, лежащего между $f(a)$ и $f(b)$, существует точка $\xi \in (a, b)$ такая, что $f(\xi) = C$.

Доказательство: Не умаляя общности, предположим $f(a) < C < f(b)$. Рассмотрим отрезок $[a, b]$ и его середину $c = \frac{a+b}{2}$. Возможны три случая:

1) Если $f(c) = C$, то $\xi = c$ – искомая точка.
2) Если $f(c) > C$, то на левом конце отрезка $[a, c]$ имеем $f(a) < C$, на правом – $f(c) > C$.
3) Если $f(c) < C$, то на левом конце отрезка $[c, b]$ имеем $f(c) < C$, на правом – $f(b) > C$.

Выбираем тот из отрезков $[a, c]$ или $[c, b]$, на концах которого функция принимает значения меньшие и большие C. Обозначим этот отрезок $[a_1, b_1]$. Тогда $f(a_1) < c < f(b_1)$ и длина $b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$. Повторяя процесс, получим последовательность вложенных отрезков $[a_n, b_n]$ таких, что $f(a_n) < C < f(b_n)$ и $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \to 0$. По принципу вложенных отрезков существует единственная точка ξ, принадлежащая всем отрезкам, причем $a_n \to \xi, b_n \to \xi$. В силу непрерывности f имеем: $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\xi)$, $\lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(\xi)$. Но так как $f(a_n) < C < f(b_n)$ для всех n, то по теореме о предельном переходе в неравенствах получаем $f(\xi) \leq C$ и $f(\xi) \geq C$, откуда $f(\xi) = C$.

Следствие: Если непрерывная на отрезке функция принимает на его концах значения разных знаков, то внутри отрезка существует хотя бы один корень уравнения $f(x) = 0$.

Вопрос 28: База. Предел по базе, Примеры баз на множестве вещественных чисел.

Пусть X – некоторое множество. **Базой $\boldsymbol{\mathcal{B}}$** называется совокупность подмножеств $B \subset X$, удовлетворяющих условиям:

1) $\forall B \in \mathcal{B}\colon\ B \neq \emptyset$
2) $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}\ \ \exists B_3 \in \mathcal{B}\colon\ B_3 \subset B_1 \cap B_2$

База задает направление стремления аргумента.

Пусть функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ определена на X, $\mathcal{B}$ – база в X. Число $A \in \mathbb{R}$ называется **предeлом функции $\boldsymbol{f}$ по базе $\boldsymbol{\mathcal{B}}$**, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists B \in \mathcal{B}\colon \forall x \in B\ \ |f(x) - A| < \varepsilon$. Обозначение: $\lim\limits_{\mathcal{B}} f(x) = A$.

Если $A = +\infty$ (или $-\infty$), то определение следующее: $\forall E > 0\ \ \exists B \in \mathcal{B}\colon\ \forall x \in B\ \ f(x) > E$ (соответственно $f(x) < -E$).

Примеры баз на множестве вещественных чисел:

1. База $x \to a$ (двусторонний предел). $\mathcal{B}_a = \{\dot{V}_\delta(a) = \{x\colon 0 < |x - a| < \delta\}, \delta > 0\}$. Предел по этой базе: $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.
2. База $x \to a^+$ (правый предел). $\mathcal{B}_{a^+} = \{(a, a + \delta), \delta > 0\}$. Предел: $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$.
3. База $x \to a^-$ (левый предел). $\mathcal{B}_{a^-} = \{(a - \delta, a), \delta > 0\}$. Предел: $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$.
4. База $x \to +\infty$. $\mathcal{B}_{+\infty} = \{(N, +\infty), N > 0\}$. Предел: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
5. База $x \to -\infty$. $\mathcal{B}_{-\infty} = \{(-\infty, N), N > 0\}$. Предел: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.
6. База $x \to a, x \in E$ (предел по множеству). Пусть $E \subset \mathbb{R}$, a – предельная точка E. Тогда $\mathcal{B}_{a,E} = \{\dot{V}_\delta(a) \cap E, \delta > 0\}$. Предел: $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in E}} f(x)$.
7. База $n \to \infty, n \in \mathbb{N}$ (предел последовательности). Здесь $X = \mathbb{N}, \mathcal{B} = \{\{n \in \mathbb{N}\colon n > N\}, N \in \mathbb{N}\}$. Предел по этой базе – обычный предел последовательности $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$.

Вопрос 29: Определение функции $f(x) = e^x$. Свойства функции: монотонность, непрерывность, асимптотика. Второй замечательный предел и его следствия. Предел функций $f(x) = \frac{x}{e^x}$ и $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.

Функция e^x может быть определена одним из следующих эквивалентных способов:

- Через предел: $e^x = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n,\ x \in \mathbb{R}$.
- Как сумма степенного ряда: $e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\ x \in \mathbb{R}$.

Свойства функции e^x:

1. Область определения: $\mathbb{R}$.
2. Область значений: $(0, +\infty)$.
3. Монотонность: Строго возрастает на всей числовой прямой
4. Непрерывность: Непрерывна на $\mathbb{R}$
5. Асимптотика:
   - При $x \to +\infty$: $e^x \to +\infty$
   - При $x \to -\infty$: $e^x \to 0$; прямая $y = 0$ – горизонтальная асимптота.

Второй замечательный предел: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$. Эквивалентная форма: $\lim\limits_{t\to 0}(1 + t)^{1/t} = e$.

Следствия:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1$ (отсюда $e^x - 1 \sim x$ при $x \to 0$)
2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ (отсюда $\ln(1 + x) \sim x$ при $x \to 0$)
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1 + \frac{a}{x}\right)^{bx} = e^{ab}$
4. Для любого $a > 0, a \neq 1$: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} = \ln a$

$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = 0.$

Доказательство: Поскольку $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} > \frac{x^2}{2}$ при $x > 0$, то $0 < \frac{x}{e^x} < \frac{x}{\frac{x^2}{2}} = \frac{2}{x} \to 0$. По теореме о сжатой функции предел равен 0. Также можно применить правило Лопиталя.

$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$

Доказательство:

Монотонность. Рассмотрим вспомогательную последовательность $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Покажем, что $\{y_n\}$ убывает. $\frac{y_{n-1}}{y_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \frac{n^{2n+1}}{(n-1)^n(n+1)^{n+1}} = \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n \cdot \frac{n}{n+1}$. По неравенству Бернулли $(1 + a)^n \geq 1 + na$ при $a > -1,\ n \in \mathbb{N}$: $\left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n \geq 1 + \frac{n}{n^2-1} > 1 + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n}$. Следовательно, $\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n > \frac{n+1}{n}$, откуда $\frac{y_{n-1}}{y_n} > 1$, то есть последовательность убывает. Так ка к$x_n = \frac{y_n}{1+\frac{1}{n}}$, а $\{y_n\}$ убывает и знаменатель $1 + \frac{1}{n}$ убывает, то $\{x_n\}$ возрастает.

Ограниченность сверху. Используем биноминальное разложение: $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k} \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$. Оценим сумму: $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n!} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} < 2 + 1 = 3$. Итак, $x_n < 3$ для всех n.

Таким образом, $\{x_n\}$ – возрастающая ограниченная сверху последовательность, значит, она имеет предел. Этот предел обозначается $e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Вопрос 30: Равномерная непрерывность. Теорема Кантора о функции, непрерывной на отрезке. Примеры функций, являющихся и не являющихся равномерно непрерывными.

Функция $f: X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется **равномерно непрерывной** на множестве X, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$: $\forall x_1, x_2 \in X$ $(|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2) < \varepsilon)$.

Теорема Кантора: Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она равномерно непрерывна на этом отрезке.

Доказательство: Предположим, что f не является равномерно непрерывной на $[a, b]$. Тогда $\exists \varepsilon_0 > 0$: $\forall \delta > 0\ \exists x, y \in [a, b]$: $|x - y| < \delta$ и $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon_0$. Возьмем $\delta_n = \frac{1}{n}$. Для каждого n найдутся $x_n, y_n \in [a, b]$ такие, что $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$, $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0$. Последовательность $\{x_n\}$ ограничена, поэтому по теореме Больцано-Вейерштрасса из нее можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$. Пусть $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = c$. Так как $[a, b]$ замкнут, то $c \in [a, b]$. Из условия $\left|x_{n_k} - y_{n_k}\right| < \frac{1}{n_k}$ следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k} = c$. Функция f непрерывна в точке c, поэтому $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(c)$, $\lim\limits_{k\to\infty} f(y_{n_k}) = f(c)$. Тогда $\lim\limits_{k\to\infty} (f\left(x_{n_k}\right) - f(y_{n_k})) = 0$, что противоречит неравенству $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0$. Значит, предположение неверно, и f равномерно непрерывна на $[a, b]$.

Примеры функций:

1. Являющиеся равномерно непрерывными
   - $f(x) = x^2$ на отрезке $[0,1]$
   - $f(x) = \sin x$ на всей прямой $\mathbb{R}$
   - $f(x) = \sqrt{x}$ на $[0, +\infty)$
2. Не являющиеся равномерно непрерывными
   - $f(x) = \frac{1}{x}$ на интервале $(0,1)$. Пусть $\varepsilon = 1$, для любого $\delta > 0$ возьмем $x = \min\left(\delta, \frac{1}{2}\right)$, $y = \frac{x}{2}$. Тогда $|x - y| = \frac{x}{2} < \delta$, но $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \frac{1}{x} \geq 1 = \varepsilon$.
   - $f(x) = x^2$ на всей прямой $\mathbb{R}$. Рассмотрим точки $x_n = n + \frac{1}{n}$, $y_n = n$. Тогда $|x_n - y_n| = \frac{1}{n} \to 0$, но $|f(x_n) - f(y_n)| = \left|\left(n + \frac{1}{n}\right)^n - n^2\right| = 2 + \frac{1}{n^2} \geq 2$. Следовательно, для $\varepsilon = 2$ нельзя подобрать требуемое δ.

Вопрос 31: Бесконечно малые функции. O-символика. Эквивалентные функции. Применение O-символики и эквивалентных функций при вычислении пределов.

Функция $\alpha(x)$ называется **бесконечно малой** при $x \to a$ (где a может быть конечным или бесконечным), если $\lim_{x\to a} \alpha(x) = 0$.

Свойства:

1. Сумма и разность бесконечно малых есть бесконечно малая.
2. Произведение бесконечно малой на ограниченную функцию есть бесконечно малая.
3. Произведение конечного числа бесконечно малых есть бесконечно малая.

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ определены в проколотой окрестности точки a, и $g(x) \neq 0$ в этой окрестности.

- **«O большое»:** $f(x) = O(g(x))$ при $x \to a$, если существует постоянная $C > 0$ и проколотая окрестность точки a, в которых $|f(x)| \leq C|g(x)|$. Это означает, что f не растет быстрее g. Пример: $\sin x = O(x)$.
- **«o малое»:** $f(x) = o(g(x))$ при $x \to a$, если $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$. Это означает, что f растет медленнее g (или убывает быстрее) вблизи точки a. Пример: $x^2 = o(x)$.

Функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$, определенные в проколотой окрестности точки a, называются **эквивалентными** при $x \to a$, если $\lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$. Обозначение: $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

Свойства:

1. Если $\alpha \sim \beta$, то $\beta \sim \alpha$.
2. Если $\alpha \sim \beta$ и $\beta \sim \gamma$, то $\alpha \sim \gamma$.
3. В произведении и частном эквивалентные функции можно заменять на эквивалентные.
4. В сумме заменять на эквивалентные функции нельзя.

Таблица эквивалентных функций.

Пусть $\alpha(x) \to 0$ при $x \to 0$. Тогда:

1. $\sin \alpha(x) \sim \alpha(x)$
2. $tg\ \alpha(x) \sim \alpha(x)$
3. $\arcsin \alpha(x) \sim \alpha(x)$
4. $arctg\ \alpha(x) \sim \alpha(x)$
5. $1 - \cos \alpha(x) \sim \frac{\alpha(x)^2}{2}$
6. $\ln(1 + \alpha(x)) \sim \alpha(x)$
7. $e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$
8. $\left(1 + \alpha(x)\right)^p - 1 \sim p\alpha(x),\ p \in \mathbb{R}$

Применение при вычислении пределов.

Принцип замены на эквивалентные: Если при вычислении предела отношения, произведения или степенной функции можно заменить сомножитель на эквивалентные, то предел не изменится.

Пример 1: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 5x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{3x}{5x} = \frac{3}{5}$.

Пример 2: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x)}{e^{3x}-1} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}$.

Пример 3: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^3} \neq \lim\limits_{x\to 0} \frac{x-x}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x-\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)}{x^3} = \frac{1}{6} + o(1) \to \frac{1}{6}$.

Использование O-символики: При вычислении сложных пределов часто полезно выделять главные члены, отбрасывая слагаемые более высокого порядка малости.

Пример: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1-x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\left(1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)-1-x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x^2} = \frac{1}{2}$.

Вопрос 32: Производная. Дифференцируемость функций. Существование производной и непрерывность.

Производной функции $f(x)$ в точке x_0 называется предел разностного отношения (если он существует и конечен): $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$, где $\Delta x = x - x_0$.

Геометрический смысл: $f'(x_0)$ – угловой коэффициент касательной к графику функции в точке $(x_0, f(x_0))$.

Функция $f(x)$ называется **дифференцируемой в точке** x_0, если она представима в виде $f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(x - x_0)$, где $A - const$.

Теорема: Функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 тогда и только тогда, когда в этой точке существует конечная производная $f'(x_0)$. При этом $A = f'(x_0)$.

Доказательство: Если существует $f'(x_0)$, то $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0) \Rightarrow \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x)$, где $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Тогда $\Delta f = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$. Обратно, если $\Delta f = A\Delta x + o(\Delta x)$, то $\frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0) + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} \to f'(x_0)$ при $\Delta x \to 0$, следовательно, $f'(x_0) = A$.

Теорема: Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.

Доказательство: Из дифференцируемости: $\Delta f = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$. Тогда при $\Delta x \to 0$ имеем $\Delta f \to 0$, что и означает непрерывность: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Правая производная: $f'_+(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

Левая производная: $f'_-(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

Критерий существования производной: Функция $f(x)$ имеет производную в точке x_0 тогда и только тогда, когда существуют равные односторонние производные $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$.

Вопрос 33: Производные элементарных функций. Таблица производных.

Производной функции $f(x)$ в точке x называется предел разностного отношения (если он существует): $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

Таблица производных элементарных функций:

1. Константа: $(c)' = 0,\ c \in \mathbb{R}$
2. Степенная функция: $(x^a)' = ax^{a-1},\ a \in \mathbb{R}$
3. Показательная функция:

- $(a^x)' = a^x \ln a,\ (a > 0, a \neq 1)$.
- $(e^x)' = e^x$.

4. Логарифмическая функция:

- $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a},\ (a > 0, a \neq 1, x > 0)$.
- $(\ln x)' = \frac{1}{x}, (x > 0)$.

5. Тригонометрическая функции:

- $(\sin x)' = \cos x$.
- $(\cos x)' = -\sin x$.
- $(tg\ x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, (x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k)$.
- $(ctg\ x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, (x \neq \pi k)$.

6. Обратные тригонометрические функции:

  - $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, (|x| < 1)$.
  - $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, (|x| < 1)$.
  - $(arctg\ x)' = \frac{1}{1+x^2}$.
  - $(arcctg\ x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

Примеры доказательств для некоторых функций:

- Производная синуса: $(\sin x)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x+\frac{\Delta x}{2})}{\Delta x} = \cos x$. (Используется формула разности синусов и первый замечательный предел).
- Производная экспоненты: $(e^x)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x+\Delta x}-e^x}{\Delta x} = e^x \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x} = e^x$. (Используется второй замечательный предел или определение через e).
- Производная степенной функции для натурального показателя: $(x^n)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{x^n + nx^{n-1}\Delta x + \binom{n}{2}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \dots - x^n}{\Delta x} = nx^{n-1}$. (Используется бином Ньютона).
- Производная натурального логарифма: $(\ln x)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(x+\Delta x)-\ln x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$. Замена $t = \frac{\Delta x}{x}$: $(\ln x)' = \lim\limits_{t \to 0} \frac{1}{xt}\ln(1+t) = \frac{1}{x}\lim\limits_{t \to 0}\frac{\ln(1+t)}{t} = \frac{1}{x} \cdot 1$.
- Производная обратной функции: $y = \arccos x$ – обратная функция к $x = \cos y$. Используем формулу производной обратной функции: $y'_x = \frac{1}{x'_y}$. $x'_y = (\cos y)'_y = -\sin y$, тогда $y'_x = -\frac{1}{\sin y}$. Из основного тригонометрического тождества $\sin y = \sqrt{1-x^2}$. Значит, $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Вопрос 34: Производная суммы, произведения, частного. Производная сложной функции. Производная обратной функции.

Теорема: Если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы в точке x, то их сумма также дифференцируема в этой точке, и $(u+v)' = u' + v'$.

Доказательство: $(u+v)' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{[u(x+\Delta x)+v(x+\Delta x)]-[u(x)+v(x)]}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x} + \frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}\right) = u' + v'$.

Теорема: Если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы в точке x, то их произведение также дифференцируема в этой точке, и $(u\cdot v)' = u'v + uv'$.

Доказательство: Рассмотрим приращение: $\Delta(uv) = u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x) = u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x+\Delta x) + u(x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x) = \big(u(x+\Delta x)-u(x)\big)v(x+\Delta x) + u(x)\big(v(x+\Delta x)-v(x)\big)$. Тогда $\frac{\Delta(uv)}{\Delta x} = \frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}\cdot v(x+\Delta x) + u(x)\cdot\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}$. При $\Delta x\to 0$ имеем: $\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}\to u'(x),\ v(x+\Delta x)\to v(x)$ (непрерывность), $\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}\to v'(x)$. Следовательно, $(uv)' = u'v + uv'$.

Теорема: Если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы в точке x, то их частное также дифференцируема в этой точке, и $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv\prime}{v^2}$.

Доказательство: Представим функцию как произведение: $f = u\cdot\frac{1}{v}$. По теореме о производной произведения: $f' = u'\cdot\frac{1}{v} + u\cdot\left(\frac{1}{v}\right)'$. Найдем $\left(\frac{1}{v}\right)'$ по определению: $\left(\frac{1}{v}\right)' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{v(x+\Delta x)}-\frac{1}{v(x)}}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{v(x)-v(x+\Delta x)}{\Delta x\cdot v(x)v(x+\Delta x)} = -\frac{v\prime(x)}{v^2(x)}$. Подставляя, получаем: $f' = \frac{u'}{v} - \frac{uv'}{v^2} = \frac{u'v-uv\prime}{v^2}$.

Теорема: Пусть функция $y=f(u)$ дифференцируема в точке u_0, а функция $u=g(x)$ дифференцируема в точке x_0. Тогда сложная функция $y=f\big(g(x)\big)$ дифференцируема в точке x_0, и ее производная равна $y'_x = f'\big(g(x_0)\big)\cdot g'(x_0)$.

Доказательство: Рассмотрим приращение функции: $\Delta y = f\big(g(x_0 + \Delta x)\big) - f\big(g(x_0)\big)$. Обозначим $\Delta u = g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)$, тогда $\Delta y = f(u_0 + \Delta u) - f(u_0)$. Так как функция f дифференцируема в точке u_0, по определению производной: $\Delta y = f'(u_0)\Delta u + \varepsilon_1 \Delta u$, где $\varepsilon_1 \to 0$ при $\Delta u \to 0$. Аналогично, так как функция g дифференцируема в точке x_0, имеем: $\Delta u = g'(x_0)\Delta x + \varepsilon_2 \Delta x$, где $\varepsilon_2 \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Подставим Δu в выражение для Δy: $\Delta y = f'(u_0)(g'(x_0)\Delta x + \varepsilon_2 \Delta x) + \varepsilon_1(g'(x_0)\Delta x + \varepsilon_2 \Delta x) = [f'(u_0)g'(x_0) + f'(u_0)\varepsilon_2 + \varepsilon_1 g'(x_0) + \varepsilon_1\varepsilon_2]\Delta x \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u_0)g'(x_0) + f'(u_0)\varepsilon_2 + \varepsilon_1 g'(x_0) + \varepsilon_1\varepsilon_2$. При $\Delta x \to 0$: $\varepsilon_1 \to 0,\ \varepsilon_2 \to 0$. Следовательно, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u_0)g'(x_0)$.

Теорема: Пусть функция $y = f(x)$ строго монотонна и непрерывна на интервале (a, b). Дифференцируема в точке $x_0 \in (a, b)$, причем $f'(x_0) \neq 0$. Тогда обратная функция $x = g(y)$ дифференцируема в точке $y_0 = f(x_0)$, и $g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

Доказательство: Рассмотрим приращение $\Delta y = y - y_0$. Поскольку g – обратная к f, имеем $x = g(y)$, $x_0 = g(y_0)$. Приращению Δy соответствует приращение $\Delta x = g(y_0 + \Delta y) - g(y_0)$. В силу строгой монотонности и непрерывности f (а значит, и g) при $\Delta y \to 0$ также $\Delta x \to 0$, причем $\Delta x \neq 0$, если $\Delta y \neq 0$. Запишем разностное отношение для функции g: $\frac{g(y_0+\Delta y) - g(y_0)}{\Delta y} = \frac{\Delta x}{\Delta y}$. Так как $y = f(x)$, то $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Подставим: $\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{\Delta x}{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}}$. Устремим $\Delta y \to 0$, тогда и $\Delta x \to 0$. По условию существует предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) \neq 0$. Следовательно, $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{g(y_0+\Delta y) - g(y_0)}{\Delta y} = \frac{1}{f'(x_0)}$. Это означает, что $g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

Вопрос 35: Дифференциал. Теорема об инвариантной форме дифференциала. Представление приращения функции в дифференциальной форме. Остаточный член приращения.

Функция $y = f(x)$ называется **дифференцируемой в точке** x_0, если ее приращение $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ можно представить в виде $\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$ $(\Delta x \to 0)$, где A не зависит от Δx, а $o(\Delta x)$ – бесконечно малая более высокого порядка, чем Δx.

Дифференциалом функции $f(x)$ в точке x_0 называется линейная часть приращения функции в точке x_0. $d_{x_0}f(x) = f'(x_0)(x - x_0)$ из $f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + o(\Delta x)$.

Теорема: Форма записи дифференциала первого порядка $dy = f'(x)dx$ сохраняется независимо от того, является ли x независимой переменной или дифференцируемой функцией другого аргумента.

Доказательство: Пусть x – независимая переменная. Тогда $dx = \Delta x$, и по определению $dy = f'(x)dx$. Пусть $x = \varphi(t)$, где t – независимая переменная, и φ дифференцируема. Рассмотрим сложную функцию $y = f\big(\varphi(t)\big)$. По правилу дифференцирования сложной функции: $y'_t = f'(x)\varphi'(t)$. По определению дифференциала для независимой переменной t имеем $dy = y'_t dt$. Подставляя: $dy = f'(x)\varphi'(t)dt$. Но так как $dx = \varphi'(t)dt$, получаем: $dy = f'(x)dx$. Таким образом, форма $dy = f'(x)dx$ остается той же самой.

Из определения дифференцируемости непосредственно следует: $\Delta y = dy + o(\Delta x) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$. Это и есть представление **приращения функции в дифференциальной форме**: приращение функции равно ее дифференциалу плюс остаточный член более высокого порядка малости.

Разность между приращением функции и ее дифференциалом называется **остаточным членом**: $r(\Delta x) = \Delta y - dy = \Delta y - f'(x_0)\Delta x$.

Из определения дифференцируемости следует, что $r(\Delta x) = o(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$.

Геометрический смысл: Дифференциал dy – это приращение ординаты касательной к графику функции в точке x_0. Остаточный член $r(\Delta x)$ – это отклонение графика функции от касательной при переходе от x_0 к $x_0 + \Delta x$. Условие $r(\Delta x) = o(\Delta x)$ означает, что это отклонение стремится к нулю быстрее, чем Δx, что и обеспечивает возможность локальной линейной аппроксимации функции с помощью дифференциала.

Вопрос 36: Касательная. Уравнение касательной. Угол между графиками функций в точке пересечения.

Касательная – предельное значение секущей к графику функции.

Прямая, задаваемая уравнением $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, называется **касательной** к графику функции $f(x)$ в точке x_0.

Пусть две кривые $y = f(x)$ и $y = g(x)$ пересекаются в точке (x_0, y_0), причем обе функции дифференцируемы в x_0. Обозначим угловые коэффициенты их касательных: $k_1 = f'(x_0)$, $k_2 = g'(x_0)$. **Углом между кривыми в точке пересечения** называется угол между их касательными в этой точке. Если φ – искомый угол $(0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2})$, то $tg\,\varphi = \left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}\right|$, при условии $1 + k_1 k_2 \neq 0$ (касательные не перпендикулярны). Тогда $\varphi = arctg\,\left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}\right|$.

Примечание:

Пусть функция $y = f(x)$ определена в окрестности точки x_0. Рассмотрим секущую, проходящую через точки $\big(x_0, f(x_0)\big)$ и $\big(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x)\big)$. Ее угловой коэффициент: $k_{\text{сек}} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$. Если существует предел $k = \lim\limits_{\Delta x \to 0} k_{\text{сек}} = f'(x_0)$, то прямая с угловым коэффициентом k, проходящая через точку $\big(x_0, f(x_0)\big)$, называется **касательной к графику функции в этой точке**.

Вопрос 37: Необходимое условие экстремума дифференцируемой функции. Теоремы Ролля, Лагранжа, Коши.

Теорема Ферма: Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности точки x_0 и дифференцируема в этой точке. Если x_0 является точкой локального экстремума функции $f(x)$, то $f'(x_0) = 0$.

Доказательство: Вычислим производную в точку x_0 (при x_0 – макс). Слева: $\lim\limits_{x \to x_0 - \varepsilon} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \begin{bmatrix} x - x_0 < 0 \\ f(x) - f(x_0) \leq 0 \\ \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0 \end{bmatrix} = f'(x_0) \geq 0$ существует по условию. Справа: $\lim\limits_{x \to x_0 + \varepsilon} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \begin{bmatrix} x - x_0 > 0 \\ f(x) - f(x_0) \leq 0 \\ \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0 \end{bmatrix} = f'(x_0) \leq 0$ существует. Тогда $f'(x_0) \geq 0$ и $f'(x_0) \leq 0$, значит, $f'(x_0) = 0$.

При x_0 – мин доказательство аналогичное.

Теорема Ролля: Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема на интервале (a, b), имеет на этом интервале конечную или бесконечную определенного знака производную, и $f(a) = f(b)$. Тогда на интервале (a, b) существует точка c такая, что $f'(c) = 0$.

Доказательство: По теореме Вейерштрасса на отрезке $[a, b]$ существует точка c такая, что функция непрерывная на $[a, b]$ достигает в этой точке наибольшее (наименьшее) значение на отрезке.

1) Пусть на $[a, b]$ не существует точке x, в которых $f(a) \neq f(b)$, то есть $\forall x \in [a, b]$ $f(a) = f(b) \Rightarrow f(x) = const, f'(x) = 0$ во всех точках (a, b).
2) Пусть на $[a, b]$ существует точка x такая, что $f(x) \neq f(a)$. Для определенности $f(x) > f(a)$. То есть наибольшее значение достигается внутри отрезка. То есть существует точка c, в которой достигается наибольшее значение. Выполнены все условия теоремы Ферма: $\forall x$ $f(c) \geq f(x), x \in (a, b)$; существует производная в точке c. Тогда по теореме Ферма $f'(c) = 0$.

Теорема Лагранжа: Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, дифференцируема на интервале (a,b). Тогда на интервале (a,b) существует точка c такая, что $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Доказательство: Рассмотрим вспомогательную функцию $g(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$.

$\begin{cases} g(a)=f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot 0=f(a) \\ g(b)=f(b)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(b-a)=f(a) \end{cases} \Rightarrow g(a)=g(b)$. Функция $g(x)$ непрерывна на $[a,b]$, дифференцируема на (a,b), так как $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ – линейная функция, то есть $g(x)$ попадает под условие теоремы Ролля, тогда существует точка $c\in(a,b)$, $g'(c)=0$. $g(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\Rightarrow g'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$. $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Теорема Коши: Пусть $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$, дифференцируемы на интервале (a,b) и $g'(x)\neq 0$ на (a,b), $g(a)\neq g(b)$. Тогда на интервале (a,b) существует точка c такая, что $\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

Доказательство: Рассмотрим вспомогательную функцию $h(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\big(g(x)-g(a)\big)$.

$\begin{cases} h(a)=f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot 0=f(a) \\ h(b)=f(b)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot\big(g(b)-g(a)\big)=f(a) \end{cases} \Rightarrow h(a)=h(b)$. Так как оба слагаемых $h(x)$ непрерывны на $[a,b]$, дифференцируемы на (a,b), то есть существует точка $c\in(a,b)$, $h'(c)=0$. $h'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot g'(x)$, $h'(c)=0\Rightarrow f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot g'(c)=0$. Значит, $\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

Вопрос 38: Достаточные условия экстремума. Необходимые и достаточные условия монотонности дифференцируемой функции.

Точка x_0 называется **точкой максимума (минимума)**, если существует окрестность точки x_0 такая, что для всех x из этой окрестности выполняется $f(x) \leq f(x_0)$ $\big(f(x) \geq f(x_0)\big)$.

Необходимое условие экстремума: Пусть $f(x)$ непрерывна в окрестности точки x_0 и дифференцируема в точке x_0. Пусть точка x_0 – max (min). Тогда $f'(x_0) = 0$.

Доказательство: Пусть x_0 – max. Рассмотрим $V(x_0) = (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$. Пусть $x \in V(x_0)$ и $x < x_0$, тогда $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) \geq 0$ $(f(x) - f(x_0) \leq 0, x - x_0 < 0$. Пусть $x \in V(x_0)$ и $x > x_0$, тогда $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) \leq 0$ $(f(x) - f(x_0) \leq 0, x - x_0 > 0$. То есть $f'(x_0) \leq 0$ и $f'(x_0) \geq 0$, значит, $f'(x_0) = 0$.

Достаточное условие экстремума: Пусть $f(x)$ непрерывна в окрестности точки x_0 и дифференцируема в этой окрестности, кроме, быть может, точки x_0. Пусть $f'(x_0) \geq 0$ $(f'(x_0) \leq 0)$ при $x < x_0$ и $f'(x_0) \leq 0$ $(f'(x_0) \geq 0)$ при $x > x_0$ для всех из этой окрестности. Тогда x_0 – точка максимума (минимума) функции. Причем, если неравенство $f'(x_0) > 0$ $(f'(x_0) < 0)$ и $f'(x_0) < 0$ $(f'(x_0) > 0)$ строгие, то x_0 – точка строгого максимума (минимума).

Доказательство: Пусть x_1 и x_2 – точки такие, что $x_0 - \delta < x_1 < x_0 < x_2 < x_0 + \delta$. Тогда $f(x)$ непрерывна на $[x_1, x_0]$, дифференцируема на (x_1, x_0). К $f(x)$ можно применить теорему Лагранжа. $\exists c_1$: $\frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1} = f'(c_1) \geq 0$, так как $x_0 > x_1$, то $f(x_0) - f(x_1) \geq 0$ для всех $x_1 < x_0$. $\exists c_2$: $\frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0} = f'(c_2) \leq 0$, так как $x_2 > x_0$, то $f(x_2) - f(x_0) \leq 0$ для всех $x_2 > x_0$. Значит, x_2 – точка максимума (для строгих неравенств получится строгий максимум).

Необходимое условие монотонности: Пусть $f(x)$ возрастает на (a,b), непрерывна и дифференцируема на (a,b). Тогда $f'(x) \geq 0$ на (a,b) (убывает, тогда $f'(x) \leq 0$).

Доказательство: Возьмем произвольную точку $x_0 \in (a,b)$. По определению производной: $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$. Рассмотрим приращение $\Delta x \neq 0$ такое, что $x_0 + \Delta x \in (a,b)$. Если $\Delta x > 0$, то из неубывания f следует $f(x_0 + \Delta x) \geq f(x_0)$, следовательно, $\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \geq 0$. Если $\Delta x < 0$, то $x_0 + \Delta x < x_0$, и снова из неубывания $f(x_0 + \Delta x) \leq f(x_0)$ получаем $\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \geq 0$. Таким образом, для любого допустимого $\Delta x \neq 0$ разностное отношение неотрицательно. Поскольку предел неотрицательной функции (если он существует) также неотрицателен, заключаем: $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \geq 0$. Так как x_0 выбрана произвольно, неравенство выполняется для всех точек интервала.

Аналогично проводится доказательство для случая невозрастания,

Достаточное условие монотонности:

Пусть $f(x)$ непрерывна на (a,b), дифференцируема на (a,b), $f'(x) \geq 0$ на (a,b). Тогда $f(x)$ неубывает на (a,b). **Доказательство:** Пусть $x_1, x_2 \in (a,b),\ x_1 < x_2$. $\exists c$: $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(c)$, так как $f'(c) \geq 0$ и $x_2 - x_1 > 0$, то $f(x_2) - f(x_1) \geq 0 \Rightarrow f(x)$ неубывает.

Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, дифференцируема на (a,b), $f'(x) > 0$ на (a,b). Тогда $f(x)$ строго возрастает на $[a,b]$. **Доказательство:** Пусть x_1, x_2: $a \leq x_1 \leq x_2 \leq b$. Тогда на $[x_1, x_2]$ выполняется теорема Лагранжа. $\exists c \in [x_1, x_2]$: $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(c) > 0 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$.

Вопрос 39: Выпуклость функции. Точки перегиба. Вторая производная. Необходимое и достаточное условия выпуклости функции на промежутке. Необходимое и достаточное условия точки перегиба.

Функция называется **выпуклой вверх** на $[a, b]$, если для любых $x_1, x_2 \in [a, b]$ выполняется неравенство $f(x) \geq \frac{f(x_2)(x-x_1)+f(x_1)(x_2-x)}{x_2-x_1}$ (выпуклой вниз, если знак $\leq$).

Если для любой пары x_1, x_2 неравенство строгое, то $f(x)$ называется строго выпуклой.

Пусть функция $f(x)$ имеет производную в точке x_0. Точка x_0 называется **точкой перегиба**, если разность $f(x) - y_k(x)$ меняет знак в точке x_0.

Второй производной функции $f(x)$ называется производная ее производной (если она существует). $f''(x) = \left(f'(x)\right)'$.

Необходимое условие выпуклости: Если функция $f(x)$ дважды дифференцируема и выпукла вниз на интервале (a, b), то $f''(x) \geq 0$ для всех $x \in (a, b)$. если выпукла вверх, то $f''(x) \leq 0$.

Доказательство: Возьмем случай с выпуклостью вниз. Из определения выпуклости: $f(x) \leq \frac{f(x_2)(x-x_1)+f(x_1)(x_2-x)}{x_2-x_1}$. Умножим на $x_2 - x_1$: $f(x)(x_2 - x_1) \leq f(x_2)(x - x_1) + f(x_1)(x_2 - x)$. Раскроем левую часть: $f(x)(x_2 - x) - f(x)(x - x_1) \leq f(x_2)(x - x_1) + f(x_1)(x_2 - x)$. Переносим слагаемые, выносим общие множители и делим на $(x - x_1)(x_2 - x)$: $\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leq \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$.

Зафиксируем точку $x \in (a, b)$. Устремим $x_1 \to x^-$. Поскольку f дифференцируема, левая часть стремится к $f'(x)$. Получаем для любого $x_2 > x$: $f'(x) \leq \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$. Теперь устремим $x_2 \to x^+$. Правая часть стремится к $f'(x)$. Для любого $x_1 < x$ имеем: $\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leq f'(x)$.

Возьмем произвольные точки $u < v$ из (a, b). $\frac{f(v)-f(u)}{v-u} \le f'(v)$. $f'(u) \le \frac{f(v)-f(u)}{v-u}$. Тогда $f'(u) \le \frac{f(v)-f(u)}{v-u} \le f'(v)$. Таким образом, $f'(u) \le f'(v)$ при $u < v$. Это означает, что $f'(x)$ – неубывающая функция на (a, b).

По условию функция дважды дифференцируема. Производная неубывающей функции неотрицательна: $f''(x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f'(x+h)-f'(x)}{h} \ge 0$ для всех $x \in (a, b)$.

Достаточное условие выпуклости: Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, имеет непрерывную производную на $[a, b]$ и дважды дифференцируема на (a, b), причем $f''(x) < 0$ на (a, b). Тогда $f(x)$ выпукла вверх на $[a, b]$.

Доказательство: Напишем $h(x) = f(x) - l(x) = f(x) - \frac{f(x_1)(x_2-x)+f(x_2)(x-x_1)}{x_2-x_1}$, $x_1 < x < x_2$.

$$h(x) = \frac{f(x)x_2 - f(x)x_1(x_2 - x) - f(x_2)(x - x_1)}{x_2 - x_1}$$
$$= \frac{f(x)x_2 - f(x)x_1 - f(x_1)x_2 + f(x_1)x - f(x_2)x + f(x_2)x_1}{x_2 - x_1}$$
$$= \frac{\big(f(x) - f(x_1)\big)x_2 + \big(f(x_2) - f(x)\big)x_1 + \big(f(x_1) - f(x_2)\big)x}{x_2 - x_1}$$
$$= \frac{\big(f(x) - f(x_1)\big)x_2 - \big(f(x) - f(x_1)\big)x + \big(f(x_2) - f(x)\big)x_1 - \big(f(x_2) - f(x)\big)x}{x_2 - x_1}$$
$$= \frac{\big(f(x) - f(x_1)\big)(x_2 - x) + \big(f(x_2) - f(x)\big)(x_1 - x)}{x_2 - x_1}$$
$$= \frac{\big(f(x) - f(x_1)\big)(x_2 - x) - \big(f(x_2) - f(x)\big)(x - x_1)}{x_2 - x_1}$$

Пусть $\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} = f'(\alpha)$, $\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} = f'(\beta)$. $h(x) = \frac{f'(\alpha)(x-x_1)(x_2-x)-f'(\beta)(x_2-x)(x-x_1)}{x_2-x_1} = \frac{(x-x_1)(x_2-x)\big(f'(\alpha)-f'(\beta)\big)}{x_2-x_1}$. Пусть $\alpha < \gamma < \beta$. $h(x) = \frac{f''(\gamma)(\alpha-\beta)(x-x_1)(x_2-x)}{x_2-x_1}$.

$f''(\gamma) < 0$ по условию, $\alpha - \beta < 0$, $x - x_1 > 0$, $x_2 - x > 0$, $x_2 - x_1 > 0$. Тогда $f(x)$ выше хорды $l(x)$, значит, $f(x)$ выпукла вверх.

Необходимое условие точки перегиба: Пусть $f(x)$ имеет вторую производную в точке x_0, $\exists f''(x_0)$, и x_0 – точка перегиба $f(x)$. Тогда $f''(x_0) = 0$.

Доказательство: Если $f''(x_0) \neq 0$, то по достаточному условию выпуклости в некоторой окрестности x_0 функция имеет постоянный знак второй производной, а значит, сохраняет направление выпуклости. Это противоречит смене выпуклости в точке x_0.

Достаточное условие точки перегиба: Пусть $f(x)$ имеет вторую производную в некоторой окрестности точки x_0, $f''(x_0) = 0$, и $f''(x_0) < 0$ при $x < x_0$, $f''(x_0) > 0$ при $x > x_0$, в точке x_0 вторая производная меняет знак. Тогда x_0 – точка перегиба $f(x)$.

Доказательство: Рассмотрим разность $f(x) - y_k(x)$.

При $x < x_0$. $f(x) - y_k(x) = f(x) - f'(x_0)(x - x_0) - f(x_0) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$. По теореме Лагранжа $c_1 < x_0$: $f'(c_1)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = \left(f'(c_1) - f'(x_0)\right)(x - x_0)$. По теореме Лагранжа к $f'(x)$ на $[c_1, x_0]$: $f''(\alpha)(c_1 - x_0)(x - x_0) < 0$.

При $x > x_0$. $f(x) - y_k(x) = f(x) - f'(x_0)(x - x_0) - f(x_0) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = \left(f'(c_2) - f'(x_0)\right)(x - x_0) = f''(\beta)(c_2 - x_0)(x - x_0) > 0$.

По определению x_0 – точка перегиба.

Вопрос 40: Правило Лопиталя вычисления пределов.

Правило Лопиталя: Пусть $f(x)$ и $g(x)$ определены на (a,b), дифференцируемы на этом интервале, $g(x) \neq 0$ на (a,b) и существует $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$. Тогда существует предел $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Доказательство:

Неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Поскольку $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны (a,b), то можно доопределить $f(x)$ и $g(x)$, положим $f(a) = g(a) = 0$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$. $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}$. По теореме Лагранжа $\exists c \in (a,b)$: $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim\limits_{c\to a}\frac{f'(c)}{g'(c)}$ (по условию этот предел существует). $a < c < x$, так как $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на (a,b).

Неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Из существования предела $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ (конечного) найдем $\delta > 0$ такое, что для всех ξ, удовлетворяющих $0 < |\xi - a| < \delta$, выполняется $\left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - L\right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Возьмем произвольные x, y из проколотой δ-окрестности точки a. По теореме Коши на отрезке между x и y существует точка ξ между ними такая, что $\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$. Тогда $\left|\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} - L\right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Зафиксируем y и устремим x к a. Так как $|g(x)| \to \infty$, имеем $\frac{g(y)}{g(x)} \to 0$ и $\frac{f(y)}{f(x)} \to 0$.

Преобразуем: $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} \cdot \frac{1-\frac{g(y)}{g(x)}}{1-\frac{f(y)}{f(x)}} + \frac{f(y)}{g(x)}$. При достаточно малых $|x - a|$ множитель $\frac{1-\frac{g(y)}{g(x)}}{1-\frac{f(y)}{f(x)}}$ близок к 1, а $\frac{f(y)}{g(x)}$ близко к 0. Поэтому $\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Объединяя неравенства, получаем: $\left|\frac{f(x)}{g(x)} - L\right| \le \left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}\right| + \left|\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} - L\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Следовательно, $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = L$.

Вопрос 41: Производные высших порядков. Формула Тейлора.

n-ой производной функции $f(x)$ является производная ее производной n-1-го порядка. $f'(x), f''(x), \dots, f^{IV}(x), \dots, f^{(n)}(x)$.

Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано: Если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 производные до порядка n включительно, то при $x \to x_0$ справедливо представление: $f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$.

Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа: Если функция $f(x)$ имеет в окрестности точки x_0 непрерывные производные до порядка n включительно, а в самой точке x_0 существует производная порядка $n + 1$, то для любого x из этой окрестности найдется точка ξ, лежащая между x_0 и x, такая что: $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$.

Частный случай при $x_0 = 0$ называется **формулой Маклорена**.

Разложение основных элементарных функций при $x \to 0$:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + o(x^{2k})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2k+1})$$

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha - 1)\dots(\alpha - n + 1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

Вопрос 42: Производная неявной функции. Производная функции, заданной параметрически.

Неявной функцией называется выражение $F(x, y) = 0$, где $F(x, y)$ – функция двух аргументов.

Формула вычисления производной неявной функции: $dF(x, y) = F_x'(x, y)dx + F_y'(x, y)dy$.

Пример:

$$F(x, y) = x^3 + y^3 + 2x^2y^4$$
$$dF(x, y) = (3x^2 + 4xy^4)dx + (3y^2 + 8y^3x^2)dy$$
$$y'(x) = -\frac{3x^2 + 4xy^4}{3y^2 + 8x^2y^3}$$

Пусть функции $y(t)$ и $x(t)$ определены и непрерывны в некоторой окрестности $V(t_0)$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Пусть существует обратная функция $t = x^{-1}(t)$, непрерывная в некоторой окрестности $U(x_0)$, $x_0 = x(t_0)$. Тогда функция $y(x) = y\left(t^{-1}(x)\right)$ называется **функцией, заданной параметрически**.

Пусть функции $y(t)$ и $x(t)$ дифференцируемы в некоторой окрестности $V(t_0)$, $\forall t \in \mathbb{R}$. При этом $x(t_0) \neq 0$. Тогда существует производная $y'(x)$ в x_0, причем $y'(x) = \frac{y_t'(t_0}{x_t'(t_0)}$.

Доказательство: $y'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, $\Delta y = y(x_0 + \Delta x) - y(x_0)$, $\Delta x = x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)$. $x = x(t), y = y(t)$, рассмотрим приращение Δt такое, что $\Delta x = x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)$, $\Delta y = y(t_0 + \Delta t) - y(t_0)$, тогда $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y / \Delta t}{\Delta x / \Delta t}$. Из дифференцируемости $x(t)$ в t_0 следует ее непрерывность. Так как $x'(t_0) \neq 0$, то $\exists V(t_0)$: $x'(t) \neq 0 \Rightarrow$ функция $x(t)$ строго монотонна в этой окрестности. Для малых $\Delta t \neq 0$ имеем $\Delta x \neq 0$, тогда $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ определено. $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = y_t'(t_0)$, $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = x_t'(t_0)$. $x_t'(t_0) \neq 0$: $y'(x_0) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\frac{\Delta y}{\Delta t}}{\frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{y_t'(t_0)}{x_t'(t_0)}$.

Примечание: Условие $x'(t_0) \neq 0$ гарантирует существование обратной функции $t = t^{-1}(x)$ в окрестности x_0, $t'(x_0) = \frac{1}{x_t'(t_0)}$. Тогда $y(x) = y\big(t(x)\big)$ – сложная. Отсюда $y'(x_0) = y_t'(t_0) \cdot t'(x_0) = \frac{y_t'(t_0)}{x_t'(t_0)}$.

Общий пример: $\begin{cases} y = \varphi(t) \\ x = \psi(t) \end{cases}$, $y'(x) = \frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)} \Rightarrow$ убрать $t = \psi'(x)$.