

Математический анализ. Экзамен.

3 января 2026 г.

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

1 СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ МНОЖЕСТВА. ПОРОЖДАЮЩАЯ ПРОЦЕДУРА. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ СВОЙСТВО.	2
1.1 Способы задания множества	2
1.2 Описание способов задания множества.....	2
2 ОТОБРАЖЕНИЯ. ИНЪЕКЦИЯ, СЮРЪЕКЦИЯ, БИЕКЦИЯ. ПРЯМЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ МНОЖЕСТВ	3
2.1 Отображения.....	3
2.2 Прямые произведения множеств	3
3 МОЩНОСТЬ МНОЖЕСТВА	4
4 ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ.	5
4.1 Операции	5
4.2 Свойства.....	5
5 ПРЯМОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ N МНОЖЕСТВ.	7
6 ТЕОРЕМА О МОЩНОСТИ ПРЯМОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ МНОЖЕСТВ	8
7 ПОНЯТИЕ ВЕКТОРА. ПРОЕКЦИЯ ВЕКТОРА НА ОСИ. ПРОЕКЦИЯ МНОЖЕСТВА ВЕКТОРОВ	9
8 ПРАВИЛО СУММЫ. ПРАВИЛО ПРОИЗВЕДЕНИЯ.	10
9 ЧИСЛО РАЗМЕЩЕНИЙ БЕЗ ПОВТОРЕНИЙ, ЧИСЛО РАЗМЕЩЕНИЙ С ПОВТОРЕНИЯМИ.....	11

1 СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ МНОЖЕСТВА. ПОРОЖДАЮЩАЯ ПРОЦЕДУРА. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ СВОЙСТВО.

1.1 Способы задания множества

1. Перечисление $\{a, b, c, \dots\}$
2. Характеристическое свойство $M \stackrel{\text{def}}{=} \{x : P(x)\}$, где $P(x)$ – предикат
3. Порождающая процедура $M := \{y : y = f(x), x \in E\}$, где f – функция от x

1.2 Описание способов задания множества

Определение

Характеристическое свойство – способ задания множества, при котором каждый его элемент обладает свойством $P(x)$

$$M \stackrel{\text{def}}{=} \{x : P(x)\}$$

Определение

Порождающая процедура – способ задания множества, при котором каждый его элемент является результатом выполнения функции f от переменной x из некоторого множества E .

$$M := \{y : y = f(x), x \in E\}$$

2 ОТОБРАЖЕНИЯ. ИНЪЕКЦИЯ, СЮРЪЕКЦИЯ, БИЕКЦИЯ. ПРЯМЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ МНОЖЕСТВ

2.1 Отображения

Определение

Отображение – способ сопоставления элементов между множествами.

Отображения бывают трех видов:

1. Инъекция
2. Сюръекция
3. Биекция

Определение

Инъекция – такое отображение $f(A) \rightarrow B$, при котором любой элемент B имеет **не более одного** прообраза в множестве A .

Определение

Сюръекция – такое отображение $f(A) \rightarrow B$, при котором любой элемент B имеет **не менее одного** прообраза в множестве A .

Определение

Биекция – это отображение, являющееся и сюръекцией, и инъекцией одновременно. То есть взаимнооднозначное соответствие.

2.2 Прямые произведения множеств

Определение

Прямое (декартово) произведение множеств A и B – все такие пары чисел (a, b) , где $a \in A, b \in B$.

$$A \times B \stackrel{\text{def}}{=} \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

3 МОЩНОСТЬ МНОЖЕСТВА

Определение

Мощность множества – количество элементов в нем (для конечных множеств).

Для бесконечных:

1. Если между бесконечным множеством X и множеством натуральных чисел \mathbb{N} существует биекция, то говорят, что X имеет счётную мощность. Это "наименьшая" бесконечная мощность.
2. Если между X и множеством всех вещественных чисел \mathbb{R} (или отрезком $[0, 1]$) существует биекция, то говорят, что X имеет мощность континуума.

4 ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ.

4.1 Операции

1. $A \cap B$ – пересечение

$$A \cap B \stackrel{\text{def}}{=} \{x : (x \in A) \wedge (x \in B)\}$$

2. $A \cup B$ – объединение

$$A \cup B \stackrel{\text{def}}{=} \{x : (x \in A) \vee (x \in B)\}$$

3. $A \setminus B$ – разность

$$A \setminus B \stackrel{\text{def}}{=} \{x : (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$$

4. $A \triangle B$ – симметрическая разность

$$A \triangle B \stackrel{\text{def}}{=} \{x : (x \in (A \setminus B)) \vee (x \in (B \setminus A))\}$$

5. \bar{A} – дополнение до универсума

$$\bar{A} \stackrel{\text{def}}{=} \{x : (x \notin A) \wedge (x \in U)\}$$

4.2 Свойства

1. $A \cap A = A, A \cup A = A$
2. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C,$
 $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
3. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$
 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
4. $A \cup \emptyset = A, A \cap \emptyset = \emptyset$
5. $A \cup U = U, A \cap U = A$
6. $A \cap B = B \cap A, A \cup B = B \cup A$

$$7. A \cup B = A \cap \bar{B},$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

$$8. \bar{\bar{A}} = A$$

$$9. A \setminus B = A \cap \bar{B}$$

5 ПРЯМОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ N МНОЖЕСТВ.

Определение

Прямое произведение n множеств – все возможные кортежи из элементов этих n множеств.

На примере двух множеств:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

6 ТЕОРЕМА О МОЩНОСТИ ПРЯМОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ МНОЖЕСТВ

Теорема

Если A и B конечны, $|A| = n$, $|B| = m$ то $|A \times B| = |A||B| = mn$

Доказательство

Рассмотрим кортеж. В нем на первом месте стоит элемент из A , на втором – из B . К каждому элементу из A можно приставить m элементов из B , получив тем самым множество, представляющее собой результат декартового произведения. То есть на первом месте в кортеже может стоять n элементов, на втором – m . Значит всего таких кортежей можно составить mn штук.

7 ПОНЯТИЕ ВЕКТОРА. ПРОЕКЦИЯ ВЕКТОРА НА ОСИ. ПРОЕКЦИЯ МНОЖЕСТВА ВЕКТОРОВ

Определение

Пусть задано прямое произведение $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$. **Вектором** называется упорядоченный набор (a_1, a_2, \dots, a_n) , где $a_i \in A_i$

Определение

Пусть задано прямое произведение $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$. **Проецированием** $\text{Pr}_k(a_1, a_2, \dots, a_k, \dots, a_n)$ называется отображение $(a_1, a_2, \dots, a_n) \rightarrow (a_k)$

$$\text{Pr}_k(a_1, a_2, \dots, a_k, \dots, a_n) \stackrel{\text{def}}{=} f((a_1, a_2, \dots, a_k, \dots, a_n)) \rightarrow (a_k)$$

Проецирование множества векторов:

$$\begin{aligned} \text{Pr}_{i,j,\dots,m}(\{(a_1, a_2, \dots, a_m), (b_1, b_2, \dots, b_m), \dots\}) = \\ = \{(a_i, a_j, \dots, a_m), (b_i, b_j, \dots, b_m), \dots\} \end{aligned}$$

8 ПРАВИЛО СУММЫ. ПРАВИЛО ПРОИЗВЕДЕНИЯ.

Теорема

[Правило суммы]

Пусть все выборки из множества A делятся на две взаимоисключающие A_1 и A_2 . Число выборок первого типа m_1 , второго – m_2 . Тогда число всех выборок из множества A равно $m_1 + m_2$

Доказательство

Данное правило является следствием формулы включений-исключений:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

где $A \cap B = \emptyset$

Теорема

[Правило произведения]

Пусть число способов построить выборку из множества A равно n , из множества B – m . Тогда число способов построить выборку (a, b) ($a \in A, b \in B$) равно mn

Доказательство

9 ЧИСЛО РАЗМЕЩЕНИЙ БЕЗ ПОВТОРЕНИЙ, ЧИСЛО РАЗМЕЩЕНИЙ С ПОВТОРЕНИЯМИ

Теорема