

# Математический анализ. Экзамен.

4 января 2026 г.

# СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

<b>1 СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ МНОЖЕСТВА. ПОРОЖДАЮЩАЯ ПРОЦЕДУРА. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ СВОЙСТВО. ....</b>	<b>3</b>
1.1 Способы задания множества .....	3
1.2 Описание способов задания множества.....	3
<b>2 ОТОБРАЖЕНИЯ. ИНЪЕКЦИЯ, СЮРЪЕКЦИЯ, БИЕКЦИЯ. ПРЯМЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ МНОЖЕСТВ .....</b>	<b>4</b>
2.1 Отображения.....	4
2.2 Прямые произведения множеств .....	4
<b>3 МОЩНОСТЬ МНОЖЕСТВА .....</b>	<b>5</b>
<b>4 ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ. ....</b>	<b>6</b>
4.1 Операции .....	6
4.2 Свойства.....	6
<b>5 ПРЯМОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ <math>N</math> МНОЖЕСТВ. ....</b>	<b>8</b>
<b>6 ТЕОРЕМА О МОЩНОСТИ ПРЯМОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ МНОЖЕСТВ .....</b>	<b>9</b>
<b>7 ПОНЯТИЕ ВЕКТОРА. ПРОЕКЦИЯ ВЕКТОРА НА ОСИ. ПРОЕКЦИЯ МНОЖЕСТВА ВЕКТОРОВ .....</b>	<b>10</b>
<b>8 ПРАВИЛО СУММЫ. ПРАВИЛО ПРОИЗВЕДЕНИЯ. ....</b>	<b>11</b>
<b>9 ЧИСЛО РАЗМЕЩЕНИЙ БЕЗ ПОВТОРЕНИЙ, ЧИСЛО РАЗМЕЩЕНИЙ С ПОВТОРЕНИЯМИ.....</b>	<b>12</b>
<b>10 ЧИСЛО ПЕРЕСТАНОВОК БЕЗ ПОВТОРЕНИЙ, ЧИСЛО ПЕРЕСТАНОВОК С ПОВТОРЕНИЯМИ. ....</b>	<b>14</b>
<b>11 ЧИСЛО СОЧЕТАНИЙ БЕЗ ПОВТОРЕНИЙ, ЧИСЛО СОЧЕТАНИЙ С ПОВТОРЕНИЯМИ.....</b>	<b>16</b>

11.1 Сочетания без повторений .....	16
11.2 Сочетания с повторениями.....	16

# 1 СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ МНОЖЕСТВА. ПОРОЖДАЮЩАЯ ПРОЦЕДУРА. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ СВОЙСТВО.

## 1.1 Способы задания множества

1. Перечисление  $\{a, b, c, \dots\}$
2. Характеристическое свойство  $M \stackrel{\text{def}}{=} \{x : P(x)\}$ , где  $P(x)$  – предикат
3. Порождающая процедура  $M := \{y : y = f(x), x \in E\}$ , где  $f$  – функция от  $x$

## 1.2 Описание способов задания множества

### Определение

**Характеристическое свойство** – способ задания множества, при котором каждый его элемент обладает свойством  $P(x)$

$$M \stackrel{\text{def}}{=} \{x : P(x)\}$$

### Определение

**Порождающая процедура** – способ задания множества, при котором каждый его элемент является результатом выполнения функции  $f$  от переменной  $x$  из некоторого множества  $E$ .

$$M := \{y : y = f(x), x \in E\}$$

## 2 ОТОБРАЖЕНИЯ. ИНЬЕКЦИЯ, СЮРЬЕКЦИЯ, БИЕКЦИЯ. ПРЯМЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ МНОЖЕСТВ

### 2.1 Отображения

#### Определение

Отображение – способ сопоставления элементов между множествами.

Отображения бывают трех видов:

1. Инъекция
2. Сюръекция
3. Биекция

#### Определение

**Инъекция** – такое отображение  $f(A) \rightarrow B$ , при котором любой элемент  $B$  имеет **не более одного** прообраза в множестве  $A$ .

#### Определение

**Сюръекция** – такое отображение  $f(A) \rightarrow B$ , при котором любой элемент  $B$  имеет **не менее одного** прообраза в множестве  $A$ .

#### Определение

**Биекция** – это отображение, являющееся и сюръекцией, и инъекцией одновременно. То есть взаимооднозначное соответствие.

### 2.2 Прямые произведения множеств

#### Определение

**Прямое (декартово) произведение множеств**  $A$  и  $B$  – все такие пары чисел  $(a, b)$ , где  $a \in A, b \in B$ .

$$A \times B \stackrel{\text{def}}{=} \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

### 3 МОЩНОСТЬ МНОЖЕСТВА

#### Определение

**Мощность множества** – количество элементов в нем (для конечных множеств).

Для бесконечных:

1. Если между бесконечным множеством  $X$  и множеством натуральных чисел  $\mathbb{N}$  существует биекция, то говорят, что  $X$  имеет счётную мощность. Это "наименьшая" бесконечная мощность.
2. Если между  $X$  и множеством всех вещественных чисел  $\mathbb{R}$  (или отрезком  $[0, 1]$ ) существует биекция, то говорят, что  $X$  имеет мощность континуума.

## **4 ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ.**

### **4.1 Операции**

1.  $A \cap B$  – пересечение

$$A \cap B \stackrel{\text{def}}{=} \{x : (x \in A) \wedge (x \in B)\}$$

2.  $A \cup B$  – объединение

$$A \cup B \stackrel{\text{def}}{=} \{x : (x \in A) \vee (x \in B)\}$$

3.  $A \setminus B$  – разность

$$A \setminus B \stackrel{\text{def}}{=} \{x : (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$$

4.  $A \triangle B$  – симметрическая разность

$$A \setminus B \stackrel{\text{def}}{=} \{x : (x \in (A \setminus B)) \vee (x \in (B \setminus A))\}$$

5.  $\bar{A}$  – дополнение до универсума

$$\bar{A} \stackrel{\text{def}}{=} \{x : (x \notin A) \wedge (x \in U)\}$$

### **4.2 Свойства**

1.  $A \cap A = A, A \cup A = A$

2.  $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C,$

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

3.  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

4.  $A \cup \emptyset = A, A \cap \emptyset = \emptyset$

5.  $A \cup U = U, A \cap U = A$

6.  $A \cap B = B \cap A, A \cup B = B \cup A$

$$7. A \cup B = A \cap \bar{B},$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

$$8. \bar{\bar{A}} = A$$

$$9. A \setminus B = A \cap \bar{B}$$

## 5 ПРЯМОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ $N$ МНОЖЕСТВ.

Определение

**Прямое произведение  $n$  множеств** – все возможные кортежи из элементов этих  $n$  множеств.

На примере двух множеств:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

## 6 ТЕОРЕМА О МОЩНОСТИ ПРЯМОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ МНОЖЕСТВ

### Теорема

Если  $A$  и  $B$  конечны,  $|A| = n$ ,  $|B| = m$  то  $|A \times B| = |A||B| = mn$

### Доказательство

Рассмотрим кортеж. В нем на первом месте стоит элемент из  $A$ , на втором – из  $B$ . К каждому элементу из  $A$  можно приставить  $m$  элементов из  $B$ , получив тем самым множество, представляющее собой результат декартового произведения. То есть на первом месте в кортеже может стоять  $n$  элементов, на втором –  $m$ . Значит всего таких кортежей можно составить  $mn$  штук.

## 7 ПОНЯТИЕ ВЕКТОРА. ПРОЕКЦИЯ ВЕКТОРА НА ОСИ. ПРОЕКЦИЯ МНОЖЕСТВА ВЕКТОРОВ

### Определение

Пусть задано прямое произведение  $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ . **Вектором** называется упорядоченный набор  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ , где  $a_i \in A_i$

### Определение

Пусть задано прямое произведение  $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ . **Проектированием**  $\text{Pr}_k(a_1, a_2, \dots, a_k \dots, a_n)$  называется отображение  $(a_1, a_2, \dots, a_n) \rightarrow (a_k)$

$$\text{Pr}_k(a_1, a_2, \dots, a_k \dots, a_n) \stackrel{\text{def}}{=} f((a_1, a_2, \dots, a_k \dots, a_n)) \rightarrow (a_k)$$

Проектирование множества векторов:

$$\text{Pr}_{i,j,\dots,m}(\{(a_1, a_2, \dots, a_m), (b_1, b_2, \dots, b_m), \dots\}) =$$

$$= \{(a_i, a_j, \dots, a_m), (b_i, b_j, \dots, b_m), \dots\}$$

## 8 ПРАВИЛО СУММЫ. ПРАВИЛО ПРОИЗВЕДЕНИЯ.

### Теорема

[Правило суммы]

Пусть все выборки из множества  $A$  делятся на две взаимоисключающие  $A_1$  и  $A_2$ . Число выборок первого типа  $m_1$ , второго –  $m_2$ . Тогда число всех выборок из множества  $A$  равно  $m_1 + m_2$

### Доказательство

Данное правило является следствием формулы включений-исключений:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

где  $A \cap B = \emptyset$

### Теорема

[Правило произведения]

Пусть число способов построить выборку из множества  $A$  равно  $n$ , из множества  $B$  –  $m$ . Тогда число способов построить выборку  $(a, b)$  ( $a \in A, b \in B$ ) равно  $mn$

### Доказательство

Данное утверждение эквивалентно теореме о мощности прямого произведения.  $|A \times B| = |A||B| = mn$

## 9 ЧИСЛО РАЗМЕЩЕНИЙ БЕЗ ПОВТОРЕНИЙ, ЧИСЛО РАЗМЕЩЕНИЙ С ПОВТОРЕНИЯМИ

### Определение

Пусть имеется множество из  $n$  элементов. Упорядоченное подмножество из  $k$  элементов называется размещением без повторений

### Теорема

Число размещений без повторений можно рассчитать по формуле:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n - k)!}$$

### Доказательство

Пусть есть  $n$  элементов, из которых нужно составить упорядоченные наборы из  $k$  элементов.

Тогда на первое место можно поставить  $n$  элементов, на второе –  $n - 1$ , на третье –  $n - 2$  и так далее до  $k$ -го места, куда можно поставить  $n - k + 1$  элементов. тогда посчитаем общее количество наборов по правилу произведения:

$$n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \dots (n - k + 1) = \frac{n!}{(n - k)!}$$

### Определение

Пусть имеется множество  $A$  из  $n$  элементов. Набор  $(m_1, m_2 \dots m_k)$ , где  $\forall i \Rightarrow m_i \in A$ , называется размещением с повторениями.

### Теорема

Число размещений с повторениями можно рассчитать по формуле:

$$\overline{A_n^k} = n^k$$

## Доказательство

Есть  $k$  позиций, на каждой из них  $n$  элементов. Тогда по правилу произведения всего  $n^k$  наборов

## 10 ЧИСЛО ПЕРЕСТАНОВОК БЕЗ ПОВТОРЕНИЙ, ЧИСЛО ПЕРЕСТАНОВОК С ПОВТОРЕНИЯМИ.

### Определение

Пусть имеется множество из  $n$  элементов. **Перестановкой с повторениями** называется упорядоченная последовательность его элементов

### Теорема

Перестановки без повторений можно посчитать по формуле:

$$P_n = n!$$

### Доказательство

Данная формула является следствием правила произведения. Есть  $n$  позиций, на каждой следующей на 1 элемент меньше, чем на предыдущей. Значит формула:

$$P_k = n!$$

### Определение

Пусть имеется множество из  $n$  элементов, среди которых:

- $k_1$  неразличимых элементов 1-го типа
- $k_2$  неразличимых элементов 2-го типа
- ...
- $k_s$  неразличимых элементов  $s$ -го типа

**Перестановкой с повторениями** называется упорядоченная последовательность элементов этого множества

### Теорема

Число перестановок с повторениями можно рассчитать по формуле:

$$\overline{P}_n = \frac{(k_1 + k_2 + \dots + k_s)!}{k_1!k_2!\dots k_s!}$$

где  $k_1 + k_2 + \dots + k_s = n$

### Доказательство

Для начала сосчитаем количество перестановок без повторений (представим, что в исходном множестве разные элементы):  $n!$ . Теперь считаем перестановки для каждой группы:  $k_i!$ . Поскольку в исходном множестве есть группы одинаковых элементов, то их перестановки для нас неразличимы, а значит необходимо убрать все перестановки, в которых одинаковые наборы элементов одного типа, а их, как мы сосчитали, для каждого типа  $k_i!$ . Итого формула:

$$\overline{P}_n = \frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_s!}$$

# 11 ЧИСЛО СОЧЕТАНИЙ БЕЗ ПОВТОРЕНИЙ, ЧИСЛО СОЧЕТАНИЙ С ПОВТОРЕНИЯМИ.

## 11.1 Сочетания без повторений

### Определение

Пусть имеется множество из  $n$  элементов. Неупорядоченное подмножество из  $k$  его элементов называется **сочетанием без повторений**

### Теорема

Число сочетаний без повторений рассчитывается по формуле:

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

### Доказательство

Посмотрим на формулу размещений без повторений:  $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ . Чтобы рассчитать сочетания, необходимо убрать из размещений все те наборы, в которых совпадают элементы. Для каждого набора элементов таких повторяющихся наборов  $k!$ , ведь это просто перестановки. Тогда итоговая формула:

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

## 11.2 Сочетания с повторениями

### Определение

Пусть имеется  $k$  классов элементов множества  $A$ . Сочетанием с повторениями называется неупорядоченная выборка  $n$  элементов из множества  $A$ .

## Теорема

Число сочетаний с повторениями можно рассчитать по формуле:

$$\overline{C_n^k} = C_{n+k-1}^{k-1} = \frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!}$$

## Доказательство

Используем метод "звезд и перегородок": будем рассматривать  $k$  звезд и  $n - 1$  перегородок для  $n$  типов звезд. Любая такая последовательность однозначно задаёт одно сочетание с повторениями, и наоборот – любому сочетанию соответствует такая последовательность.

Общее число символов в последовательности:  $n + k - 1$ . Из них выберем  $k$  позиций для звезд (или  $n - 1$  для перегородок). Тогда таких последовательностей:

$$\overline{C_n^k} = \frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!}$$