

# Высшая алгебра. Экзамен.

11 января 2026 г.



## СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

<b>1</b>	<b>МАТРИЦА. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СЛОЖЕНИЯ МАТРИЦ, УМНОЖЕНИЯ МАТРИЦЫ НА ЧИСЛО, СВОЙСТВА .....</b>	<b>7</b>
1.1	Матрица .....	7
1.2	Действия над матрицами .....	7
<b>2</b>	<b>ОПРЕДЕЛЕНИЕ И СВОЙСТВА ОПЕРАЦИИ УМНОЖЕНИЯ МАТРИЦ .....</b>	<b>8</b>
2.1	Умножение матриц .....	8
2.2	Свойства умножения матриц .....	8
<b>3</b>	<b>ТРАНСПОНИРОВАНИЕ МАТРИЦЫ. СВОЙСТВА .....</b>	<b>9</b>
<b>4</b>	<b>ОТДЕЛЬНЫЕ ВИДЫ МАТРИЦ: КВАДРАТНАЯ, ТРЕУГОЛЬНАЯ, ДИАГОНАЛЬНАЯ, ЕДИНИЧНАЯ. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И СВОЙСТВА .....</b>	<b>10</b>
4.1	Виды матриц .....	10
<b>5</b>	<b>ОПРЕДЕЛЕНИЕ МНОГОЧЛЕНА ОТ МАТРИЦЫ. ....</b>	<b>13</b>
<b>6</b>	<b>ОПРЕДЕЛИТЕЛИ 2-ГО И 3-ГО ПОРЯДКА. ОПРЕДЕЛЕНИЯ. ПРАВИЛА ВЫЧИСЛЕНИЯ. ....</b>	<b>14</b>
6.1	Определение .....	14
6.2	Правила вычисления .....	14
<b>7</b>	<b>ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ МАТРИЦЫ ПОРЯДКА N. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧЕРЕЗ РЕКУРРЕНТНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ. ВЫЧИСЛЕНИЕ С ПРИМЕНЕНИЕМ РАЗЛОЖЕНИЯ ПО СТРОКЕ (СТОЛБЦУ)...</b>	<b>15</b>
7.1	Определения .....	15
7.2	Пример вычисления .....	15
<b>8</b>	<b>СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ: ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ ТРАНСПОНИРОВАННОЙ МАТРИЦЫ, ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ ПРОИЗВЕДЕНИЯ МАТРИЦ.....</b>	<b>18</b>



<b>9</b>	<b>СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ, СВЯЗАННЫЕ С ЛИНЕЙНОЙ КОМБИНАЦИЕЙ СТРОК (СТОЛБЦОВ).....</b>	<b>19</b>
<b>10</b>	<b>ИЗМЕНЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ ПРИ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ МАТРИЦЫ.....</b>	<b>20</b>
<b>11</b>	<b>СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ: ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ ТРЕУГОЛЬНОЙ МАТРИЦЫ, ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ ДИАГОНАЛЬНОЙ МАТРИЦЫ .....</b>	<b>21</b>
<b>12</b>	<b>ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ МЕТОДОМ ПРИВЕДЕНИЯ К ТРЕУГОЛЬНОМУ ВИДУ.....</b>	<b>22</b>
<b>13</b>	<b>АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ ДОПОЛНЕНИЕ ЭЛЕМЕНТА МАТРИЦЫ</b>	<b>25</b>
<b>14</b>	<b>МИНОР, СООТВЕТСТВУЮЩИЙ ЭЛЕМЕНТУ МАТРИЦЫ. СВЯЗЬ МЕЖДУ МИНОРОМ И АЛГЕБРАИЧЕСКИМ ДОПОЛНЕНИЕМ ЭЛЕМЕНТА МАТРИЦЫ. ....</b>	<b>26</b>
<b>15</b>	<b>ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ. СВОЙСТВА ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ.....</b>	<b>27</b>
<b>16</b>	<b>УСЛОВИЕ ОБРАТИМОСТИ МАТРИЦЫ.....</b>	<b>28</b>
<b>17</b>	<b>ПОСТРОЕНИЕ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ С ПОМОЩЬЮ ПРИСОЕДИНЕННОЙ МАТРИЦЫ.....</b>	<b>29</b>
<b>18</b>	<b>ПОСТРОЕНИЕ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ С ПОМОЩЬЮ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ. ....</b>	<b>30</b>
<b>19</b>	<b>ДВА ОПРЕДЕЛЕНИЯ РАНГА МАТРИЦЫ: МАКСИМАЛЬНОЕ ЧИСЛО ЛИНЕЙНО НЕЗАВИСИМЫХ СТРОК И РАЗМЕРНОСТЬ НАИБОЛЬШЕГО НЕНУЛЕВОГО МИНОРА.....</b>	<b>31</b>
<b>20</b>	<b>ЛИНЕЙНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ И НЕЗАВИСИМОСТЬ СТРОК (СТОЛБЦОВ) МАТРИЦЫ. ПОНЯТИЕ БАЗИСНОГО МИНОРА. ТЕОРЕМА О БАЗИСНОМ МИНОРЕ.....</b>	<b>32</b>



<b>21 ВЫЧИСЛЕНИЕ РАНГА МАТРИЦЫ С ПОМОЩЬЮ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ. ....</b>	<b>35</b>
<b>22 ВЫЧИСЛЕНИЕ РАНГА МАТРИЦЫ: МЕТОД ОКАЙМЛЯЮЩИХ МИНОРОВ. ....</b>	<b>36</b>
<b>23 ТЕОРЕМА ОБ ИНВАРИАНТНОСТИ РАНГА МАТРИЦЫ ПРИ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ. ....</b>	<b>37</b>
<b>24 ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ДВУХ ОПРЕДЕЛЕНИЙ РАНГА.....</b>	<b>38</b>
<b>25 ТЕОРЕМА КРОНЕКЕРА-КАПЕЛЛИ. УСЛОВИЕ РАЗРЕШИМОСТИ НЕОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ .....</b>	<b>39</b>
<b>26 ЧИСЛО РЕШЕНИЙ НЕОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. СВОБОДНЫЕ И ЗАВИСИМЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ.....</b>	<b>40</b>
26.1 Число решений неоднородной СЛАУ .....	40
26.1.1 Случай 1: $r < n$ .....	40
26.1.2 Случай 2: $r = n$ .....	40
26.1.3 Случай 3: $\text{rang } A \neq \text{rang } A b$ .....	40
26.2 Свободные и зависимые переменные .....	40
<b>27 РЕШЕНИЕ НЕОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ.....</b>	<b>41</b>
<b>28 РЕШЕНИЕ НЕОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ КРАМЕРА. ....</b>	<b>42</b>
<b>29 РЕШЕНИЕ НЕОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ГАУССА. СТУПЕНЧАТАЯ (ТРАПЕЦИЕВИДНАЯ) МАТРИЦА СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ. ....</b>	<b>43</b>
<b>30 РЕШЕНИЕ ОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ГАУССА .....</b>	<b>44</b>



<b>31 ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ МНОЖЕСТВО РЕШЕНИЙ ОДНО- РОДНОЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. СТРУКТУ- РА МНОЖЕСТВА РЕШЕНИЙ НЕОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. ....</b>	<b>45</b>
<b>32 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО (ВЕКТОРНОГО) ПРО- СТРАНСТВА. ....</b>	<b>46</b>
<b>33 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЛИНЕЙНОЙ КОМБИНАЦИИ ВЕКТОРОВ. ЛИНЕЙНО ЗАВИСИМЫЕ И ЛИНЕЙНО НЕЗАВИСИМЫЕ СИСТЕМЫ ВЕКТОРОВ. ....</b>	<b>47</b>
<b>34 БАЗИС ЛИНЕЙНОГО ПРОСТРАНСТВА. РАЗМЕРНОСТЬ ПРОСТРАНСТВА. ....</b>	<b>48</b>
<b>35 РАЗЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРА ПО БАЗИСУ. КООРДИНАТЫ ВЕК- ТОРА В БАЗИСЕ. ....</b>	<b>49</b>
<b>36 ПЕРЕХОД К НОВОМУ БАЗИСУ В ЛИНЕЙНОГО ПРО- СТРАНСТВЕ. МАТРИЦА ПЕРЕХОДА. ФОРМУЛЫ ПРЕОБРА- ЗОВАНИЙ КООРДИНАТ ВЕКТОРА. ....</b>	<b>50</b>
<b>37 ЛИНЕЙНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ПРО- СТРАНСТВ. ПРИМЕР: ПРОЕКТИРОВАНИЕ. ....</b>	<b>51</b>
<b>38 ИЗОМОРФИЗМ ЛИНЕЙНЫХ ПРОСТРАНСТВ. ПРОСТРАН- СТВО ВЕКТОР-СТОЛБЦОВ <math>\mathbb{R}^n</math>. БАЗИСНЫЕ ВЕКТОРЫ. ....</b>	<b>52</b>
<b>39 ТЕОРЕМА О РАВНОМОЩНОСТИ БАЗИСОВ. РАЗМЕР- НОСТЬ ЛИНЕЙНОГО ПРОСТРАНСТВА. ....</b>	<b>53</b>
<b>40 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЛИНЕЙНОЙ ОБОЛОЧКИ СИСТЕМЫ ВЕК- ТОРОВ. ....</b>	<b>55</b>
<b>41 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОДПРОСТРАНСТВА ЛИНЕЙНОГО ПРО- СТРАНСТВА. БАЗИС ПОДПРОСТРАНСТВА. ....</b>	<b>56</b>



<b>42 СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ПОДПРОСТРАНСТВА. ЛИНЕЙНАЯ ОБОЛОЧКА ВЕКТОРОВ И ПРОСТРАНСТВО РЕШЕНИЙ ОД- НОРОДНОЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. ....</b>	<b>57</b>
<b>43 НАХОЖДЕНИЕ БАЗИСА ПОДПРОСТРАНСТВА, ПОРОЖ- ДЕННОГО СИСТЕМОЙ ВЕКТОРОВ. ....</b>	<b>58</b>
<b>44 СУММА ПОДПРОСТРАНСТВ. ТЕОРЕМА ГРАССМАНА О РАЗМЕРНОСТИ СУММЫ ПОДПРОСТРАНСТВ .....</b>	<b>59</b>
<b>45 ПРЯМАЯ СУММА ПОДПРОСТРАНСТВ. КРИТЕРИЙ ПРЯ- МОЙ СУММЫ. ТЕОРЕМА О ЕДИНСТВЕННОСТИ РАЗЛО- ЖЕНИЯ.....</b>	<b>61</b>
45.1 Определение прямой суммы .....	61
45.2 Критерий прямой суммы .....	61
45.3 Теорема о единственности разложения .....	62
<b>46 ТЕОРЕМА О ДОПОЛНЕНИИ БАЗИСА ПОДПРОСТРАНСТВА ДО БАЗИСА ПРОСТРАНСТВА.....</b>	<b>63</b>
46.1 Формулировка теоремы.....	63
<b>47 ПРОЕКЦИЯ ВЕКТОРА НА ПОДПРОСТРАНСТВО.....</b>	<b>64</b>
47.1 Определение проекции .....	64
47.2 Ортогональная проекция .....	64
47.3 Нахождение проекции .....	65
<b>48 ОРТОГОНАЛЬНОЕ ДОПОЛНЕНИЕ ПОДПРОСТРАНСТВА В <math>R^n</math>. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И СВОЙСТВА .....</b>	<b>66</b>
48.1 Определение .....	66
48.2 Свойства.....	66
<b>49 ПОСТРОЕНИЕ БАЗИСА ОРТОГОНАЛЬНОГО ДОПОЛНЕ- НИЯ ПОДПРОСТРАНСТВА, ПОРОЖДЕННОГО СИСТЕМОЙ ВЕКТОРОВ. ....</b>	<b>68</b>
49.1 алгоритм построения .....	68



<b>50 ПОНЯТИЕ ЕВКЛИДОВОГО ПРОСТРАНСТВА. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И СВОЙСТВА СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ. ДЛИНА ВЕКТОРА. УГОЛ МЕЖДУ ВЕКТОРАМИ.....</b>	<b>69</b>
50.1 Понятие евклидового пространства .....	69
50.2 Аксиомы скалярного произведения .....	69
50.3 Длина вектора .....	69
50.4 Угол между векторами .....	70
<b>51 АЛГОРИТМ НАХОЖДЕНИЯ РАССТОЯНИЯ И УГЛА МЕЖДУ ВЕКТОРОМ И ПОДПРОСТРАНСТВОМ. ....</b>	<b>71</b>
51.1 Понятие угла и расстояния .....	71
51.2 алгоритм нахождения .....	71
<b>52 АЛГОРИТМ ГРАМА-ШМИДТА ОРТОГОНАЛИЗАЦИИ БАЗИСА. ....</b>	<b>73</b>



# 1 МАТРИЦА. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СЛОЖЕНИЯ МАТРИЦ, УМНОЖЕНИЯ МАТРИЦЫ НА ЧИСЛО, СВОЙСТВА

## 1.1 Матрица

### Определение

**Матрица** – прямоугольная таблица чисел  $m \times n$

## 1.2 Действия над матрицами

### Определение

**Сложение матриц** – операция над матрицами, при которой складываются их соответственные элементы. Для матриц разных размеров операция не определена.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

### Определение

**Умножение матрицы на число** – операция, при которой каждый элемент матрицы умножается на данное число.

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$



## 2 ОПРЕДЕЛЕНИЕ И СВОЙСТВА ОПЕРАЦИИ УМНОЖЕНИЯ МАТРИЦ

### 2.1 Умножение матриц

#### Определение

**Умножение матрицы на матрицу** – это операция над двумя матрицами, при которой каждый  $i$ -й элемент  $n$ -й строки первой матрицы умножается на  $i$ -ый элемент  $n$ -го столбца второй матрицы, после чего все такие произведения суммируются

$$A \cdot B = C$$

, где

$$c_{ij} = \sum_{t=1}^k a_{it}b_{tj}$$

### 2.2 Свойства умножения матриц

1.  $A(BC) = (AB)C$
2.  $A(B + C) = AB + AC$
3.  $(B + C)D = BD + CD$

#### Важно

Умножение матриц не коммутативно!

$$AB \neq BA$$



### 3 ТРАНСПОНИРОВАНИЕ МАТРИЦЫ. СВОЙСТВА

#### Определение

**Транспонирование матрицы** – процесс преобразование матрицы, при котором столбцы становятся строками, а строки – столбцами.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Свойства транспонирования матрицы:

1.  $(A^T)^T = A$
2.  $A^T + B^T = (A + B)^T$
3.  $\lambda A^T = (\lambda A)^T$
4.  $(AB)^T = B^T A^T$
5.  $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$
6.  $\det A = \det A^T$
7.  $\text{rang } A = \text{rang } A^T$



## 4 ОТДЕЛЬНЫЕ ВИДЫ МАТРИЦ: КВАДРАТНАЯ, ТРЕУГОЛЬНАЯ, ДИАГОНАЛЬНАЯ, ЕДИНИЧНАЯ. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И СВОЙСТВА

### 4.1 Виды матриц

#### Определение

Матрица называется **квадратной**, если число ее строк равно числу ее столбцов

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Свойства квадратной матрицы:

1. Можно вычислить определитель
2. Может быть обратной, если  $\det A \neq 0$
3. Можно возводить в целую степень



### Определение

Матрица называется **верхнетреугольной**, если она является квадратной, а **под** ее главной диагональю все элементы равны нулю

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

### Определение

Матрица называется **нижнетреугольной**, если она является квадратной, а **над** ее главной диагональю все элементы равны нулю

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Свойства треугольных матриц:

1. Определитель равен произведению диагональных элементов
2. Обратная к треугольной матрице (если существует) тоже треугольная того же типа
3. Произведение двух верхних (нижних) треугольных матриц — верхняя (нижняя) треугольная матрица



### Определение

Матрица называется **диагональной**, если все ее элементы, кроме тех, что лежат на главной диагонали, равны нулю

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Свойства диагональной матрицы:

1. Определитель равен произведению диагональных элементов
2. Обратная:  $D^{-1} = \text{diag}(d_1^{-1}, d_2^{-1}, \dots)$
3. Возведение в степень:  $D^k = \text{diag}(d_1^k, d_2^k, \dots)$

### Определение

Матрица называется **единичной**, если все элементы ее главной диагонали равны единице, а остальные – нулю

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Свойства единичной матрицы:

1. Нейтральный элемент относительно умножения
2.  $\det E = 1$
3.  $E^{-1} = E$



## 5 ОПРЕДЕЛЕНИЕ МНОГОЧЛЕНА ОТ МАТРИЦЫ.

### Определение

Пусть дан полином  $p(x)$  с коэффициентами из поля  $\mathbb{K}$ :

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

где  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{K}$

Пусть  $A$  – квадратная матрица размера  $m \times m$ . Тогда **многочленом от матрицы**  $p(A)$  называется матрица, получаемая формальной подстановкой матрица  $A$  вместо переменной  $x$  в выражение для многочлена.

$$p(A) = a_0E + a_1A + a_2A^2 + \dots + a_nA^n$$



## 6 ОПРЕДЕЛИТЕЛИ 2-ГО И 3-ГО ПОРЯДКА. ОПРЕДЕЛЕНИЯ. ПРАВИЛА ВЫЧИСЛЕНИЯ.

### 6.1 Определение

#### Определение

**Определитель** — это число, которое ставится в соответствие квадратной матрице и вычисляется по определённым правилам.

### 6.2 Правила вычисления

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} \\ - a_{31}a_{22}a_{11} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33}$$



## 7 ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ МАТРИЦЫ ПОРЯДКА $n$ . ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧЕРЕЗ РЕКУРРЕНТНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ. ВЫЧИСЛЕНИЕ С ПРИМЕНЕНИЕМ РАЗЛОЖЕНИЯ ПО СТРОКЕ (СТОЛБЦУ).

### 7.1 Определения

#### Определение

**Определитель матрицы порядка  $n$**  – число, которое ставится в соответствие этой матрице и вычисляется по определённым правилам.

Разложение по  $i$ -й строке:

$$\det A = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij}$$

где  $A_{ij}$  – алгебраическое дополнение элемента с индексом  $ij$  в матрице  $A$ .

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

где  $M_{ij}$  – минор элемента  $ij$  матрицы  $A$

#### Определение

**Минор элемента  $ij$  матрицы  $A$**  – определитель матрицы  $A$ , получающийся путем вычеркивания из матрицы  $i$ -й строки и  $j$ -того столбца

### 7.2 Пример вычисления

Вычислим определитель матрицы 4-го порядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$



## Шаг 1: Выбор строки для разложения

Выберем вторую строку  $(3, 0, 0, 4)$ , так как в ней два нулевых элемента. Это упростит вычисления.

Формула разложения по  $i$ -й строке:

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3} + a_{i4}A_{i4},$$

где  $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$  – алгебраическое дополнение элемента  $a_{ij}$ .

Для  $i = 2$ :

$$\Delta = 3 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 0 \cdot A_{23} + 4 \cdot A_{24} = 3A_{21} + 4A_{24}.$$

## Шаг 2: Вычисление алгебраических дополнений

**1. Вычисляем  $A_{21} = (-1)^{2+1}M_{21}$ :**

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Вычислим этот определитель 3-го порядка разложением по первой строке:

$$\begin{aligned} M_{21} &= 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 0 \cdot (2 \cdot 0 - (-3) \cdot 1) - 1 \cdot (2 \cdot 0 - (-3) \cdot 1) - 1 \cdot (2 \cdot 1 - 2 \cdot 1) \\ &= 0 \cdot 3 - 1 \cdot 3 - 1 \cdot 0 \\ &= -3. \end{aligned}$$

Следовательно,  $A_{21} = (-1)^3 \cdot (-3) = (-1) \cdot (-3) = 3$ .

**2. Вычисляем  $A_{24} = (-1)^{2+4}M_{24}$ :**



$$M_{24} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Вычислим этот определитель 3-го порядка:

$$\begin{aligned} M_{24} &= 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2 \cdot (2 \cdot 1 - 2 \cdot 1) - 0 \cdot ((-1) \cdot 1 - 2 \cdot 1) + 1 \cdot ((-1) \cdot 1 - 2 \cdot 1) \\ &= 2 \cdot 0 - 0 \cdot (-3) + 1 \cdot (-3) \\ &= -3. \end{aligned}$$

Следовательно,  $A_{24} = (-1)^6 \cdot (-3) = 1 \cdot (-3) = -3$ .

**Шаг 3: Подставляем в формулу разложения**

$$\Delta = 3 \cdot A_{21} + 4 \cdot A_{24} = 3 \cdot 3 + 4 \cdot (-3) = 9 - 12 = -3.$$

**Ответ:**

$$\boxed{\Delta = -3}$$



## **8 СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ: ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ ТРАНСПОНИРОВАННОЙ МАТРИЦЫ, ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ ПРОИЗВЕДЕНИЯ МАТРИЦ**

Свойства определителя:

1. Определитель транспонированной матрицы:  $\det A = \det A^T$  (разложение по столбцу дает тот же результат, что и разложение по строке)
2. Определитель произведения матриц:  $\det AB = \det A \det B$
3. Определитель меняет знак при перестановке двух строк (столбцов) местами
4. Определитель, у которого есть две равные строки (столбца), равен нулю
5. Определитель не изменится, если к любой строке (столбцу) прибавить другую строку (столбец)



## 9 СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ, СВЯЗАННЫЕ С ЛИНЕЙНОЙ КОМБИНАЦИЕЙ СТРОК (СТОЛБЦОВ).

Свойства определителя:

1. Если матрица  $A$  получена из матрицы  $B$  умножением  $i$ -й строки на  $k$ :  
 $\det A = k \det B$
2. Если  $i$ -я строка матрицы является суммой двух строк  $u$  и  $v$ , то определитель равен сумме определителей двух матриц, в которых эта строка заменена на  $u$  и  $v$  соответственно:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ u_1 + v_1 & u_2 + v_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ u_1 & u_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$$

3. Если к какой-либо строки (столбцу) прибавить другую строку (столбец), то определитель не изменится



## **10 ИЗМЕНЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ ПРИ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ МАТРИЦЫ**

1. При перестановке любых двух строк (столбцов) определитель меняет знак на противоположный
2. При умножении любой строки (столбца) на ненулевое число определитель также умножается на это число
3. При прибавлении одной строки, умноженной на число, к другой, определитель не меняется



## **11 СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ: ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ ТРЕУГОЛЬНОЙ МАТРИЦЫ, ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ ДИАГОНАЛЬНОЙ МАТРИЦЫ**

1. Определитель треугольной матрицы – произведение диагональных элементов
2. Определитель диагональной матрицы – произведение диагональных элементов



## 12 ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ МЕТОДОМ ПРИВЕДЕНИЯ К ТРЕУГОЛЬНОМУ ВИДУ.

Метод заключается в приведении матрицы к треугольному виду, отслеживая при этом изменения определителя при проведении элементарных преобразований.

Дана матрица  $A$  размера  $3 \times 3$ :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Найти  $\det(A)$ .

### Решение

Применяем элементарные преобразования строк, не меняющие определитель (прибавление к одной строке другой, умноженной на число):

1. Обнулим элементы под  $a_{11} = 2$ :

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

где:

- $R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1$
- $R_3 \leftarrow R_3 + R_1$  (так как  $-2/2 = -1$ , то  $R_3 \leftarrow R_3 - (-1)R_1$ )

2. Обнулим элемент под  $a_{22} = -5$ :

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & 5 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

где  $R_3 \leftarrow R_3 + R_2$  (так как  $5/(-5) = -1$ , то  $R_3 \leftarrow R_3 - (-1)R_2$ )



Получили верхнюю треугольную матрицу  $U$ :

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

### Вычисление определителя

Определитель треугольной матрицы равен произведению элементов главной диагонали:

$$\det(U) = 2 \cdot (-5) \cdot 5 = -50$$

Так как мы использовали только преобразования вида  $R_i \leftarrow R_i + \lambda R_j$ , определитель не изменился:

$$\boxed{\det(A) = -50}$$

### Пример с перестановкой строк

Рассмотрим матрицу:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

1.  $b_{11} = 0$  – нужна перестановка. Меняем  $R_1 \leftrightarrow R_2$ :

$$\det(B) = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

(знак определителя изменился)



2. Обнуляем первый столбец:

$$R_3 \leftarrow R_3 - 4R_1 : \quad - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -6 \end{vmatrix}$$

3. Обнуляем второй столбец:

$$R_3 \leftarrow R_3 + \frac{3}{2}R_2 : \quad - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{9}{2} \end{vmatrix}$$

Определитель треугольной матрицы:

$$1 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{9}{2}\right) = -9$$

Учитывая знак от перестановки:

$$\det(B) = -(-9) = \boxed{9}$$



### 13 АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ ДОПОЛНЕНИЕ ЭЛЕМЕНТА МАТРИЦЫ

#### Определение

**Алгебраическое дополнение элемента матрицы** – это число, вычисляемое как определитель матрицы, получающейся вычеркиванием строки и столбца, в которых лежит элемент, из исходной матрицы, взятый с положительным знаком, если индекс строки элемента в сумме с его столбцом дает четное число, иначе – с отрицательным.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$



## 14 МИНОР, СООТВЕТСТВУЮЩИЙ ЭЛЕМЕНТУ МАТРИЦЫ. СВЯЗЬ МЕЖДУ МИНОРОМ И АЛГЕБРАИЧЕСКИМ ДОПОЛ- НЕНИЕМ ЭЛЕМЕНТА МАТРИЦЫ.

### Определение

**Минор** элемента  $a_{ij}$  матрицы  $A$  – это определитель матрицы, получающийся вычеркиванием из матрицы  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца

Связь между алгебраическим дополнением и минором состоит в том, что алгебраическое дополнение элемента  $a_{ij}$  и есть минор, взятый со знаком, определяющемся как  $(-1)^{i+j}$



## 15 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ. СВОЙСТВА ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ.

### Определение

**Обратная матрица к матрице  $A$**  – такая матрица  $A^{-1}$ , которая при умножении на исходную матрицу  $A$  дает единичную матрицу  $E$

Свойства:

1.  $AA^{-1} = A^{-1}A = E$
2.  $(A^{-1})^{-1} = A$
3.  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
4.  $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$
5.  $\det A = \frac{1}{\det A^{-1}}$



## 16 УСЛОВИЕ ОБРАТИМОСТИ МАТРИЦЫ.

### Теорема

Матрица обратима тогда и только тогда, когда ее определитель не равен нулю.

$$\exists A^{-1} \Leftrightarrow \det A \neq 0$$

### Доказательство

[Необходимое условие]

$$AA^{-1} = E \Leftrightarrow \det AA^{-1} = \det E \Leftrightarrow \det A \det A^{-1} = \det E$$

Если  $\det A = 0$ , то  $0 \cdot \det A^{-1} = 1$  – противоречие.

[Достаточное условие]

Пусть есть  $A^{-1}$ ,  $\det A \neq 0$ . Проверим, что  $AA^{-1} = E$ , для этого построим обратную матрицу с помощью присоединений.

Находим  $A_{ij}$  ко всем элементам матрицы  $A$ , получаем союзную матрицу.

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \dots & A_{ij} & \dots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Транспонируем ее, получаем присоединенную:  $\hat{A} = \tilde{A}^T$ .

Умножим исходную матрицу на присоединенную:

$$A\hat{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & a_{ij} & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1} \\ \dots & A_{ij} & \dots \\ A_{1n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \det A & \dots & 0 \\ \dots & \det A & \dots \\ 0 & \dots & \det A \end{pmatrix}$$

Чтобы получить единичную матрицу, осталось поделить полученное произведение на  $\det A$ .

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \hat{A}$$



## 17 ПОСТРОЕНИЕ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ С ПОМОЩЬЮ ПРИСОЕДИНЕННОЙ МАТРИЦЫ.

Алгоритм построения обратной матрицы:

1. Получение союзной матрицы (матрицы алгебраических дополнений)
2. Транспонирование союзной матрицы и получение присоединенной
3. Деление каждого элемента присоединенной матрицы на определитель исходной

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \hat{A}$$



## **18 ПОСТРОЕНИЕ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ С ПОМОЩЬЮ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ.**

Метод состоит в присоединении единичной матрицы к исходной справа и дальнейшем ее приведении к единичной. После этих операций справа появится обратная матрица.



## 19 ДВА ОПРЕДЕЛЕНИЯ РАНГА МАТРИЦЫ: МАКСИМАЛЬНОЕ ЧИСЛО ЛИНЕЙНО НЕЗАВИСИМЫХ СТРОК И РАЗМЕРНОСТЬ НАИБОЛЬШЕГО НЕНУЛЕВОГО МИНОРА.

### Определение

**Ранг матрицы** – количество ее ненулевых строк, полученных после приведения к ступенчатому виду.

### Определение

**Ранг матрицы** – это наибольший порядок минора, отличного от нуля (теорема о базисном миноре)



## 20 ЛИНЕЙНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ И НЕЗАВИСИМОСТЬ СТРОК (СТОЛБЦОВ) МАТРИЦЫ. ПОНЯТИЕ БАЗИСНОГО МИНОРА. ТЕОРЕМА О БАЗИСНОМ МИНОРЕ.

### Определение

Набор элементов называется **линейно зависым**, если равенство нулю их линейной комбинации возможно хотя бы при одном коэффициенте, не равном нулю.

$$\exists i : \alpha_i \neq 0 \Rightarrow \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_i a_i + \dots \alpha_n a_n = 0$$

Если один из векторов  $a_i$  нулевой, то набор линейно зависим.

### Определение

**Базисный минор** – это любой ненулевой минор наибольшего порядка



## Теорема

[Теорема о базисном миноре]

Строки (столбцы) матрицы, содержащие строки (столбцы) базисного минора линейно независимы. Любая строка (столбец) является линейной комбинацией базисных строк

## Доказательство

[Линейная независимость базисных строк (столбцов)]

Пусть базисный минор  $M_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_r} = M_r$  (располагается в  $i_1 \dots i_r$  строках и  $j_1 \dots j_r$  столбцах). Если столбцы матрицы, содержащие столбца базисного минора, линейно зависимы, то  $\exists \lambda_1 \dots \lambda_r : \forall i \Rightarrow \lambda_i \neq 0$ :

$$\lambda_1 a_{i_1 1} + \dots + \lambda_r a_{i_r 1} = 0$$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} a_{1j_1} \\ \dots \\ a_{mj_1} \end{pmatrix} + \dots + \lambda_r \begin{pmatrix} a_{1j_r} \\ \dots \\ a_{mj_r} \end{pmatrix} = 0$$

Тогда выберем из полученной суммы строки базисного минора и получим противоречие:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} a_{i_1 j_1} \\ \dots \\ a_{i_r j_1} \end{pmatrix} + \dots + \lambda_r \begin{pmatrix} a_{i_1 j_r} \\ \dots \\ a_{i_r j_r} \end{pmatrix} = 0$$

Это означает, что строки базисного минора линейно зависимы. Получаем противоречие изначальному предположению ( $\det M \neq 0$ ).

[Строка (столбец) как линейная комбинация базисных]



Рассмотрим  $a_k \notin \{a_{j1}, a_{j2} \dots a_{jr}\}$  (к минору допишем столбец и строку из исходной матрицы)

$$\Delta_p = \begin{pmatrix} a_{i_1 j_1} & \dots & a_{i_1 j_r} & a_{i_1 k} \\ \dots & & & \\ a_{i_r j_1} & \dots & a_{i_r j_r} & a_{i_r k} \\ a_{p j_1} & \dots & a_{p j_r} & a_{p k} \end{pmatrix}$$

Если  $p \in \{i_1, i_2 \dots i_r\}$ , то в матрице две строки одинаковые, и  $\det \Delta_p = 0$

Иначе  $\Delta_p$  – минор  $r + 1$  порядка  $\Rightarrow \det \Delta_p = 0$

Разложим по строке  $p$ :

$$\det \Delta_p = a_{p j_1} A_{p j_1} + \dots + a_{p j_r} A_{p j_r} + a_{p k} A_{p k} = 0$$

$$A_{p k} = (-1)^{r+1+r+1} M_r = M_r \neq 0$$

$$a_{p k} = -\frac{A_{r+1,1}}{M_r} - \dots - \frac{A_{r+1,r}}{M_r} a_{p j_r}$$

Но  $\Delta_{r+1,r}$  не зависит от  $p$ . Тогда  $\forall p - \frac{A_{r+1,i}}{M_r} = \lambda_i$ . Распишем полученное для разных  $p$ :

$$a_{1k} = \lambda_1 a_{1j_1} + \dots + \lambda_r a_{1j_r}$$

$$a_{2k} = \lambda_1 a_{2j_1} + \dots + \lambda_r a_{2j_r}$$

...

$$a_{mk} = \lambda_1 a_{mj_1} + \dots + \lambda_r a_{mj_r}$$

То есть получили разложение  $k$ -го столбца по остальным. То есть разложение существует



## **21 ВЫЧИСЛЕНИЕ РАНГА МАТРИЦЫ С ПОМОЩЬЮ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ.**

Суть метода заключается в приведении матрицы к ступенчатому виду, после чего просто останется посчитать количество ненулевых строк



## 22 ВЫЧИСЛЕНИЕ РАНГА МАТРИЦЫ: МЕТОД ОКАЙМЛЯЮЩИХ МИНОРОВ.

Суть метода заключается в последовательном поиске ненулевых миноров, окаймляющих данный ненулевой минор.

Алгоритм:

1. Находим любой ненулевой элемент матрицы (минор 1-го порядка).
2. Находим ненулевой минор 2-го порядка, который содержит (окаймляет) наш ненулевой минор 1-го порядка.
3. Далее находим ненулевой минор 3-го порядка, который содержит (окаймляет) найденный ненулевой минор 2-го порядка. Если он есть,  $\text{rang } A \geq 3$ .
4. Продолжаем процесс, пока на каком-то шаге  $(k + 1)$  все окаймляющие миноры для ненулевого минора  $k$ -го порядка не окажутся равными нулю. Тогда ранг матрицы равен  $k$ .



## 23 ТЕОРЕМА ОБ ИНВАРИАНТНОСТИ РАНГА МАТРИЦЫ ПРИ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ.

### Теорема

Ранг матрицы не меняется при элементарных преобразованиях её строк (или столбцов).

### Доказательство

При умножении строки на число  $\lambda \neq 0$  базисный минор умножится на  $\lambda$ . Ни один минор, равный нулю, не делается отличным от нуля, и ни один минор, неравный нулю, не делается нулевым.

Теперь рассмотрим перестановку двух строк местами. Ранг матрицы будет равен размерности линейной оболочки ее строк:

$$\text{rang } A = \dim L(a_1, a_2 \dots a_n)$$

где  $a_i$  – строки матрицы.

Если переставить любые две строки матрицы местами, то размерность линейной оболочки не изменится, ведь не изменится ее базис. А поскольку не изменится размерность линейной оболочки, то не поменяется и ранг.



## 24 ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ДВУХ ОПРЕДЕЛЕНИЙ РАНГА.

### Теорема

Определение ранга матрицы через ненулевые строки (столбцы) эквивалентно определению через максимальный ненулевой минор

### Доказательство

Пусть  $r_r$  – ранг по строкам,  $r_m$  – ранг по минорам.

Докажем, что  $r_r \leq r_m$  и  $r_r \geq r_m$

Пусть существует ненулевой минор порядка  $k$ . Тогда строки этого минора линейно независимы, а значит линейно независимы и строки исходной матрицы, содержащей эти строки. Поэтому  $k \leq r_r$ , а значит  $r_m \leq r_r$ .

Если в матрице можно выбрать  $k$  линейно независимых строк, то существует как минимум ненулевой минор порядка  $k$ . Значит  $r_m \geq k$ , и поэтому  $r_m \geq r_r$

$$\begin{cases} r_m \geq r_r \\ r_m \leq r_r \end{cases} \Leftrightarrow r_m = r_r$$



## 25 ТЕОРЕМА КРОНЕКЕРА-КАПЕЛЛИ. УСЛОВИЕ РАЗРЕШИМОСТИ НЕОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

### Теорема

[Теорема Кронекера-Капелли]

Система линейных уравнений имеет решения тогда и только тогда, когда ранг матрицы равен рангу расширенной матрицы системы

### Доказательство

[Совместна  $\Rightarrow \text{rang } A = \text{rang } A|b$ ]

Пусть  $\exists x_0 \in \mathbb{R} : Ax_0 = b$ . Тогда столбец  $b$  – линейная комбинация столбцов  $A$ . Следовательно, при добавлении к матрице  $A$  столбца  $b$  размерность пространства столбцов не изменится. То есть:

$$\text{rang } A = \text{rang } A|b$$

[ $\text{rang } A = \text{rang } A|b \Rightarrow$  Совместна]

Если  $\text{rang } A = \text{rang } A|b$ , то это означает, что не изменяется размерность пространства столбцов, то есть  $b$  есть линейная комбинация столбцов матрицы  $A$ . То есть:

$$\exists x_0 \in \mathbb{R} : Ax_0 = b$$



## 26 ЧИСЛО РЕШЕНИЙ НЕОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. СВОБОДНЫЕ И ЗАВИСИМЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ.

### 26.1 Число решений неоднородной СЛАУ

#### 26.1.1 Случай 1: $r < n$

- Существуют свободные переменные
- Система имеет бесконечность решений, зависящих от  $n - r$  базисных переменных

#### 26.1.2 Случай 2: $r = n$

Система имеет единственное решение

#### 26.1.3 Случай 3: $\text{rang } A \neq \text{rang } A|b$

Система не имеет решений

### 26.2 Свободные и зависимые переменные

#### Определение

**Свободные переменные** – это переменные, которые выбираются в качестве параметров, от которых зависят другие переменные.

#### Определение

**Зависимые переменные** – это переменные, значения которых зависят от свободных переменных



## **27 РЕШЕНИЕ НЕОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ.**

Пусть есть СЛАУ:

$$Ax = b$$

Для ее решения умножим слева обе части равенства на матрицу  $A^{-1}$ :

$$x = A^{-1}b$$

Получим в соответствующих строках значения переменных.



## 28 РЕШЕНИЕ НЕОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ КРАМЕРА.

### Теорема

[Метод Крамера]

Пусть есть СЛАУ:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Решение СЛАУ можно получить следующим образом:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & & & \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\det A}, x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\det A}, x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}}{\det A}$$

### Доказательство

Посмотрим на  $A^{-1}b$ :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ \dots & & & \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} = \\ & = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \dots + A_{n1}b_n \\ \dots \\ A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \dots + A_{nn}b_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Отсюда видно, что строки последней матрицы представляют собой определители матриц  $A$ , в которых на место одного ее столбца подставлен столбец  $b$ .



## 29 РЕШЕНИЕ НЕОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ГАУССА. СТУПЕНЧАТАЯ (ТРАПЕЦИЕВИДНАЯ) МАТРИЦА СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ.

Метод заключается в приведении расширенной матрицы к ступенчатому виду путем элементарных преобразований (они не меняют решения исходной системы) с последующим обратным ходом, либо продолжением элементарных преобразований до приведения матрицы к диагональному виду.

### Определение

Матрица называется **ступенчатой**, если:

1. Все нулевые строки стоят ниже нулевых
2. Номера столбцов ведущих элементов строк образуют возрастающую последовательность



### **30 РЕШЕНИЕ ОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ГАУССА**

Метод заключается в приведении матрицы к ступенчатому виду путем элементарных преобразований (они не меняют решения исходной системы) с последующим обратным ходом, либо продолжением элементарных преобразований до приведения матрицы к диагональному виду.



### 31 ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ МНОЖЕСТВО РЕШЕНИЙ ОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. СТРУКТУРА МНОЖЕСТВА РЕШЕНИЙ НЕОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ.

#### Определение

**Фундаментальной системой решений (ФСР)** однородной системы  $Ax = 0$  называется базис её пространства решений, то есть набор из  $n - r$  линейно независимых решений, через которые любое решение системы выражается как их линейная комбинация.

Структура решений неоднородной СЛАУ задается следующим образом:

$$x_{\text{общ}} = x_{\text{част}} + x_{\text{одн}}$$

Где:

1.  $x_{\text{част}}$  – любое частное решение системы
2.  $x_{\text{одн}}$  – все решения соответствующей однородной системы  $Ax = 0$ , которые выражаются через ФСР



## 32 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО (ВЕКТОРНОГО) ПРОСТРАНСТВА.

### Определение

**Векторным пространством** называется множество, над элементами которого определены две операции: сложение и умножение на действительное число, удовлетворяющее следующим аксиомам:

1.  $a + b = b + a$
2.  $(a + b) + c = a + (b + c)$
3.  $\exists 0 : \forall a \Rightarrow a + 0 = a$
4.  $\exists 1 : \forall a \Rightarrow a \cdot 1 = a$
5.  $\forall a \exists \tilde{a} : a + \tilde{a} = 0$
6.  $\alpha(\beta\gamma) = \alpha\beta\gamma$
7.  $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$
8.  $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$



### 33 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЛИНЕЙНОЙ КОМБИНАЦИИ ВЕКТОРОВ. ЛИНЕЙНО ЗАВИСИМЫЕ И ЛИНЕЙНО НЕЗАВИСИМЫЕ СИ- СТЕМЫ ВЕКТОРОВ.

#### Определение

Пусть  $a_1, \dots, a_n$  – элементы линейного пространства. **Линейной комбинацией** называется выражение вида:

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n$$

Где  $\alpha_i \in \mathbb{R}$

#### Определение

Набор элементов называется **линейно зависимым**, если равенство нулю их линейной комбинации возможно хотя бы при одном коэффициенте, не равном нулю

$$\exists \alpha_i \neq 0 : \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n = 0$$

Если один из векторов  $a_i$  нулевой, то набор линейно зависим



## 34 БАЗИС ЛИНЕЙНОГО ПРОСТРАНСТВА. РАЗМЕРНОСТЬ ПРОСТРАНСТВА.

### Определение

[Определение №1]

**Базисом** называется такой набор ненулевых линейно независимых векторов, что любой вектор линейного пространства может быть разложен по этому набору

[Определение №2]

**Базисом** называется линейно независимый набор векторов такой, что добавление к этому набору любого вектора пространства делает расширенный набор линейно зависимым

[Определение №3]

**Базисом** линейного пространства называется максимально возможный по числу векторов линейно независимый набор векторов пространства

### Определение

**Размерностью** линейного пространства называется количество векторов в базисе



### 35 РАЗЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРА ПО БАЗИСУ. КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА В БАЗИСЕ.

#### Теорема

Разложение по базису единственно.

#### Доказательство

Пусть это не так и есть два разложения вектора  $x$  в базисе  $e_1, e_2 \dots e_n$ :

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n = y_1 e_1 + y_2 e_2 + \dots + y_n e_n$$

Найдется  $i : x_i \neq y_i$

$$(x_1 - y_1)e_1 + (x_2 - y_2)e_2 + \dots + (x_n - y_n)e_n = 0$$

Но тогда выходит, что линейная комбинация базисных векторов равна нулю, а значит базисные векторы линейно зависимы. Противоречие.

#### Определение

**Координаты вектора в базисе** – это набор коэффициентов, на которые нужно умножить базисные векторы для получения исходного вектора



### 36 ПЕРЕХОД К НОВОМУ БАЗИСУ В ЛИНЕЙНОГО ПРОСТРАНСТВЕ. МАТРИЦА ПЕРЕХОДА. ФОРМУЛЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ КООРДИНАТ ВЕКТОРА.

Пусть есть старый базис:  $e_1, \dots, e_n$ . Разложим новый базис  $e'_1, \dots, e'_n$  по старому базису:

$$\begin{cases} e'_1 = c_{11}e_1 + c_{12}e_2 + \dots + c_{1n}e_n \\ e'_2 = c_{21}e_1 + c_{22}e_2 + \dots + c_{2n}e_n \\ \dots \\ e'_n = c_{n1}e_1 + c_{n2}e_2 + \dots + c_{nn}e_n \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ \dots \\ e'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & & & \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \dots \\ e_n \end{pmatrix} = C^T \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \dots \\ e_n \end{pmatrix}$$

Где  $C^T$  – матрица координат, записанных столбцами, нового базиса в старом

#### Определение

**Матрица перехода** – матрица, в которой столбцами записаны координаты нового базиса в старом. При ее умножении на столбец старого базиса получается новый базис

Таким образом можно легко переходить между базисами.  $C^T$  обратима, поскольку новый базис, как и старый, линейно независим. Значит матрица перехода может также использоваться для перехода в обратную сторону: от нового базиса к старому:

$$\begin{pmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ \dots \\ e'_n \end{pmatrix} = C^T \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \dots \\ e_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow (C^{-1})^T \begin{pmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ \dots \\ e'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \dots \\ e_n \end{pmatrix}$$



### 37 ЛИНЕЙНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ПРОСТРАНСТВ. ПРИМЕР: ПРОЕКТИРОВАНИЕ.

#### Определение

Пусть  $V$  и  $W$  – линейные пространства над одним и тем же полем  $\mathbb{R}$ . Отображение  $f : V \rightarrow W$  называется **линейным**, если  $\forall u, v \in V, \alpha \in \mathbb{R}$  выполняются условия:

1.  $f(u + v) = f(u) + f(v)$
2.  $f(\alpha u) = \alpha f(u)$

Проверим такое отображение  $\text{Pr}_x : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , которое каждому вектору в  $\mathbb{R}^2$  ставит в соответствие его проекцию на ось  $Ox$ . То есть вектор  $\text{Pr}_x((x, y)) = (x, 0)$

1. Возьмем  $u = (x_1, y_1)$  и  $v = (x_2, y_2)$ .

$$\text{Pr}_x(u + v) = \text{Pr}_x((x_1 + x_2, y_1 + y_2)) = (x_1 + x_2, 0)$$

$$\text{Pr}_x(u) + \text{Pr}_x(v) = (x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0)$$

Линейность сохраняется

2. Возьмем скаляр  $\alpha$  и вектор  $u = (x, y)$

$$\text{Pr}_x(\alpha u) = \text{Pr}_x(\alpha x, \alpha y) = (\alpha x, 0)$$

$$\alpha \text{Pr}_x(u) = \alpha(x, 0) = (\alpha x, 0)$$

Умножение на скаляр сохраняется



### 38 ИЗОМОРФИЗМ ЛИНЕЙНЫХ ПРОСТРАНСТВ. ПРОСТРАНСТВО ВЕКТОР-СТОЛБЦОВ $\mathbb{R}^n$ . БАЗИСНЫЕ ВЕКТОРЫ.

#### Определение

Пусть есть пространства  $L_1, L_2$ . **Изоморфизмом** этих пространств называется биекция, отображающая  $L_1$  в  $L_2$  такая, что:

1.  $\forall(x, y) \Rightarrow f(u + v) = f(u) + f(v)$
2.  $\forall \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow f(\alpha u) = \alpha f(u)$

#### Определение

$\mathbb{R}^n$  — это множество всех упорядоченных наборов из  $n$  вещественных чисел, записанных в виде столбца:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}$$

где  $a_i \in \mathbb{R}$

#### Определение

**Базисом** линейного пространства называется максимально возможный по числу векторов линейно независимый набор векторов пространства



### 39 ТЕОРЕМА О РАВНОМОЩНОСТИ БАЗИСОВ. РАЗМЕРНОСТЬ ЛИНЕЙНОГО ПРОСТРАНСТВА.

#### Теорема

Любые два базиса линейного пространства состоят из одного и того же количества векторов

#### Доказательство

Допустим, это не так и в линейном пространстве  $L$  есть два неравно-  
мощных базиса:  $e_1, \dots, e_n$  и  $f_1, \dots, f_{n+1}$

Выразим базис  $f$  через базис  $e$ :

$$\begin{cases} f_1 = c_{11}e_1 + c_{12}e_2 + \dots + c_{1n}e_n \\ f_2 = c_{21}e_1 + c_{22}e_2 + \dots + c_{2n}e_n \\ \dots \\ f_n = c_{n1}e_1 + c_{n2}e_2 + \dots + c_{nn}e_n \\ f_{n+1} = c_{n+1,1}e_1 + c_{n+1,2}e_2 + \dots + c_{n+1,n}e_n \end{cases}$$

Рассмотрим линейную комбинацию:

$$x_1f_1 + x_2f_2 + \dots + x_{n+1}f_{n+1} = 0$$

Если окажется, что такая система имеет решение при  $x_i \neq 0$ , то докажем противоречие

$$\begin{aligned} & x_1(c_{11}e_1 + c_{12}e_2 + \dots + c_{1n}e_n) + \\ & + x_2(c_{21}e_1 + c_{22}e_2 + \dots + c_{2n}e_n) + \\ & + \dots + x_{n+1}(c_{n+1,1}e_1 + c_{n+1,2}e_2 + \dots + c_{n+1,n}e_n) = 0 \\ & e_1(x_1c_{11} + x_2c_{21} + \dots + x_{n+1}c_{n+1,1}) + \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + e_2(x_1 c_{12} + x_2 c_{22} + \dots + x_{n+1} c_{n+1,2}) + \\
& + \dots + e_n(x_1 c_{1n} + x_2 c_{2n} + \dots + x_{n+1} c_{n+1,n}) = 0
\end{aligned}$$

Поскольку  $e_1 \dots e_n$  – базис, то коэффициенты в линейной комбинации равны нулю:

$$\begin{cases}
x_1 c_{11} + x_2 c_{21} + \dots + x_{n+1} c_{n+1,1} = 0 \\
x_1 c_{12} + x_2 c_{22} + \dots + x_{n+1} c_{n+1,2} = 0 \\
\dots \\
x_1 c_{1n} + x_2 c_{2n} + \dots + x_{n+1} c_{n+1,n} = 0
\end{cases}$$

Эта система имеет  $n$  уравнений и  $n + 1$  переменных, а значит она имеет бесконечное множество решений, то есть существуют такие  $x_1, \dots, x_{n+1}$ , что  $x_1 f_1 + x_2 f_2 + \dots + x_{n+1} f_{n+1} = 0$ , а значит  $f_1, \dots, f_{n+1}$  – не базис!



## 40 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЛИНЕЙНОЙ ОБОЛОЧКИ СИСТЕМЫ ВЕКТОРОВ.

### Определение

Пусть есть набор  $u_1, \dots, u_n$  векторов в  $L$ .

**Линейная оболочка** системы векторов – это множество всех линейных комбинация этих векторов

$$L \langle u_1 \dots u_n \rangle = \{ \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n : \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \}$$



## 41 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОДПРОСТРАНСТВА ЛИНЕЙНОГО ПРОСТРАНСТВА. БАЗИС ПОДПРОСТРАНСТВА.

### Определение

Пусть  $L$  – линейное пространство над некоторым полем.

Пусть  $L_1$  – подмножество векторов (элементов)  $L$  такое, что выполняются:

1.  $x \in L_1 \wedge y \in L_1 \Leftrightarrow x + y \in L_1$
2.  $x \in L_1 \Leftrightarrow \forall \alpha \Rightarrow \alpha x \in L_1$

Тогда  $L_1$  называется **подпространством**  $L$

### Теорема

Если  $L_1$  – собственное подпространство  $L$ , то  $\dim L > \dim L_1$

### Доказательство

Пусть  $\dim L = \dim L_1$ . Базис  $L_1$ :  $e_1, \dots, e_n$

Разложим некоторый вектор  $x \in L_1$  по базису  $L_1$ :

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$$

Но  $\dim L = n$ , при этом по аксиоме  $x \in L$ . Значит  $e_1, \dots, e_n$  – базис  $L$ . То есть любой вектор из  $L_1$  содержится и в  $L$ , а значит  $L = L_1$ .  
Противоречие



## 42 СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ПОДПРОСТРАНСТВА. ЛИНЕЙНАЯ ОБОЛОЧКА ВЕКТОРОВ И ПРОСТРАНСТВО РЕШЕНИЙ ОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ.

Подпространство можно задать двумя способами: линейной оболочкой системы векторов и множеством решений однородной системы уравнений

$$L = \langle u_1, \dots, u_n \rangle$$

или

$$Ax = 0$$

Рассмотрим подробнее способ задания подпространства через однородную СЛАУ:

1.  $n = r$ : решение единственное,  $x = \{0\}$ , нулевое подпространство
2.  $n > r$ : бесконечное множество решений



### **43 НАХОЖДЕНИЕ БАЗИСА ПОДПРОСТРАНСТВА, ПОРОЖ- ДЕННОГО СИСТЕМОЙ ВЕКТОРОВ.**

Пусть задана система векторов:  $u_1, \dots, u_n$ . Их линейная оболочка:  $L = \langle u_1, \dots, u_n \rangle$ . Чтобы найти базис такого подпространства, необходимо проверить систему векторов на линейную зависимость, после чего взять из них только линейно независимые. Это и будет базис.



## 44 СУММА ПОДПРОСТРАНСТВ. ТЕОРЕМА ГРАССМАНА О РАЗМЕРНОСТИ СУММЫ ПОДПРОСТРАНСТВ

### Определение

Пусть  $U$  и  $V$  – подпространства в  $L$ . **Суммой** подпространств называется множество тех элементов  $L$ , которые удовлетворяют условию:

$$z \in L \Rightarrow z = x + y$$

Где  $x \in U, y \in V$

### Теорема

[Теорема Грассмана]

Сумма размерностей подпространств равна сумме размерностей их пересечения и суммы

$$\dim U_1 + \dim U_2 = \dim U_1 + U_2 - \dim U_1 \cap U_2$$

### Доказательство

Базис пересечения:  $h_1, \dots, h_k$

Векторы базиса  $U_1$ , не входящие в пересечение:  $f_1, \dots, f_l$

Векторы базиса  $U_2$ , не входящие в пересечение:  $g_1, \dots, g_m$

Базис  $U_1$ :  $h_1, \dots, h_k, f_1, \dots, f_l$

Базис  $U_2$ :  $h_1, \dots, h_k, g_1, \dots, g_m$

Докажем, что  $h_1, \dots, h_k, f_1, \dots, f_l, g_1, \dots, g_m$  – базис (пусть нет).

$$\lambda_1 h_1 + \dots + \lambda_k h_k + \mu_1 f_1 + \dots + \mu_l f_l + \nu_1 g_1 + \dots + \nu_m g_m = 0$$

$$\lambda_1 h_1 + \dots + \lambda_k h_k + \mu_1 f_1 + \dots + \mu_l f_l = -\nu_1 g_1 - \dots - \nu_m g_m$$

Причем правая часть лежит в  $U_1 \cap U_2$ , а значит правая тоже. Это означает, что  $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$ , но тогда  $f_1, \dots, f_l$  входит в пересечение. Противоречие



Посчитаем размерность:

$$\dim U_1 + \dim U_2 = k + l + k + m = 2k + l + m$$

$$\dim U_1 + U_2 = k + l + m$$

Значит разность:  $k = \dim U_1 \cap U_2$

Итого:

$$\dim U_1 + \dim U_2 = \dim U_1 + U_2 - \dim U_1 \cap U_2$$



## 45 ПРЯМАЯ СУММА ПОДПРОСТРАНСТВ. КРИТЕРИЙ ПРЯМОЙ СУММЫ. ТЕОРЕМА О ЕДИНСТВЕННОСТИ РАЗЛОЖЕНИЯ.

### 45.1 Определение прямой суммы

#### Определение

Пусть  $V$  — линейное пространство, а  $L_1, L_2, \dots, L_n$  — его подпространства. Сумма подпространств  $L = L_1 + L_2 + \dots + L_n$  называется прямой суммой, если любой вектор  $x \in L$  можно представить в виде:

$$x = x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

где  $x_i \in L_i$ , и такое представление является единственным.

### 45.2 Критерий прямой суммы

Существует несколько эквивалентных условий, позволяющих проверить, является ли сумма прямой. Для двух подпространств ( $n = 2$ ): Сумма  $L_1 + L_2$  является прямой тогда и только тогда, когда их пересечение содержит только нулевой вектор:

$$L_1 \cap L_2 = \{0\}$$

Для произвольного количества подпространств: Сумма  $L_1 + \dots + L_n$  является прямой тогда и только тогда, когда пересечение каждого  $i$ -го подпространства с суммой всех остальных подпространств тривиально:

$$L_i \cap \left( \sum_{j \neq i} L_j \right) = \{0\} \quad \text{для всех } i = 1, \dots, n$$



### 45.3 Теорема о единственности разложения

#### Теорема

Сумма подпространств  $L = L_1 + \dots + L_n$  является прямой тогда и только тогда, когда равенство

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0 \quad (x_i \in L_i)$$

возможно только при условии, что все  $x_i = 0$ .

#### Доказательство

##### Доказательство

1. Необходимость: Если сумма прямая, то по определению представление вектора 0 единственно. Так как  $0 + 0 + \dots + 0 = 0$ , то любое другое представление невозможно.
2. Достаточность: Если  $x = x_1 + \dots + x_n$  и  $x = y_1 + \dots + y_n$ , то вычитая одно из другого, получим  $(x_1 - y_1) + \dots + (x_n - y_n) = 0$ . Так как  $x_i - y_i \in L_i$ , то по условию теоремы  $x_i - y_i = 0$ , следовательно,  $x_i = y_i$ .



## 46 ТЕОРЕМА О ДОПОЛНЕНИИ БАЗИСА ПОДПРОСТРАНСТВА ДО БАЗИСА ПРОСТРАНСТВА

### 46.1 Формулировка теоремы

#### Теорема

Пусть  $V$  — конечномерное линейное пространство размерности  $n$ , и пусть  $L$  — его подпространство. Если  $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$  — базис подпространства  $L$  (где  $k \leq n$ ), то существуют такие векторы  $e_{k+1}, \dots, e_n$  из пространства  $V$ , что полная система векторов

$$\{e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n\}$$

является базисом всего пространства  $V$ .

#### Доказательство

- Проверка на полноту: Если  $(e_1, \dots, e_k) = V$ , то имеющийся набор уже является базисом  $V$ , и дополнение не требуется ( $k = n$ ).
- Шаг расширения: Если  $(e_1, \dots, e_k) \neq V$ , это означает, что существует хотя бы один вектор  $e_{k+1} \in V$ , который не принадлежит подпространству  $L$ .
- Линейная независимость: По свойству линейной независимости, если мы добавим к линейно независимой системе вектор, который не является их линейной комбинацией, новая система  $\{e_1, \dots, e_k, e_{k+1}\}$  также останется линейно независимой.
- Итерация: Повторяем процесс, пока количество векторов не станет равным размерности пространства  $n$ . Поскольку пространство конечномерно, процесс обязательно завершится.



## 47 ПРОЕКЦИЯ ВЕКТОРА НА ПОДПРОСТРАНСТВО.

### 47.1 Определение проекции

#### Определение

Пусть  $V$  — конечномерное линейное пространство, представленное в виде прямой суммы двух подпространств:

$$V = L \oplus M$$

Это означает, что любой вектор  $x \in V$  однозначно представим в виде:

$$x = x_L + x_M, \quad \text{где } x_L \in L, x_M \in M$$

- Вектор  $x_L$  называется проекцией вектора  $x$  на подпространство  $L$  параллельно  $M$
- Вектор  $x_M$  называется составляющей вектора  $x$  по подпространству  $M$ .

### 47.2 Ортогональная проекция

Она возникает, когда подпространство  $M$  является ортогональным дополнением к  $L$  ( $M = L^\perp$ ). Определение: Вектор  $x_L$  называется ортогональной проекцией  $x$  на  $L$ , если:

1.  $(x - x_L) \perp L$ , то есть  $\forall y \in L : (x - x_L, y) = 0$ .
2.  $x_L \in L$



### 47.3 Нахождение проекции

#### Теорема

Если  $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$  — базис подпространства  $L$ , то коэффициенты разложения проекции  $x_L = \sum_{j=1}^k \lambda_j a_j$  являются решением системы линейных уравнений:

$$\sum_{j=1}^k (a_i, a_j) \lambda_j = (a_i, x), \quad i = 1, \dots, k$$



## 48 ОРТОГОНАЛЬНОЕ ДОПОЛНЕНИЕ ПОДПРОСТРАНСТВА В $\mathbb{R}^n$ . ОПРЕДЕЛЕНИЕ И СВОЙСТВА

### 48.1 Определение

#### Определение

Пусть  $V$  — евклидово пространство (например,  $\mathbb{R}^n$  со стандартным скалярным произведением), и  $L$  — его подпространство. Ортогональным дополнением подпространства  $L$  называется множество всех векторов  $x \in V$ , которые ортогональны любому вектору из  $L$ . Обозначение:  $L^\perp$

$$L^\perp = \{x \in V \mid \forall y \in L : (x, y) = 0\}$$

### 48.2 Свойства

1. **Линейность:** Ортогональное дополнение  $L^\perp$  само является подпространством в  $V$
2. **Тривиальность пересечения:** Пересечение подпространства и его ортогонального дополнения состоит только из нулевого вектора:

$$L \cap L^\perp = \{0\}$$

3. **Теорема о прямой сумме:** Евклидово пространство  $V$  всегда разлагается в прямую сумму подпространства и его ортогонального дополнения:

$$V = L \oplus L^\perp$$

4. **Размерность:** Сумма размерностей подпространства и его ортогонального дополнения равна размерности всего пространства:

$$\dim L + \dim L^\perp = \dim V$$



5. Если взять ортогональное дополнение от дополнения, мы вернемся к исходному подпространству:

$$(L^\perp)^\perp = L$$



## 49 ПОСТРОЕНИЕ БАЗИСА ОРТОГОНАЛЬНОГО ДОПОЛНЕНИЯ ПОДПРОСТРАНСТВА, ПОРОЖДЕННОГО СИСТЕМОЙ ВЕКТОРОВ.

Условие ортогональности вектора  $x$  вектору  $a_i$  записывается как скалярное произведение:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = 0$$

Если мы запишем такие уравнения для каждого вектора  $a_i$ , мы получим однородную систему линейных уравнений (СЛАУ):

$$Ax = 0$$

где матрица  $A$  составлена из векторов  $a_i$  (записанных по строкам). Ключевой вывод: Базис ортогонального дополнения  $L^\perp$  — это фундаментальная система решений (ФСР) данной однородной системы.

### 49.1 алгоритм построения

1. Формирование матрицы: Записать данные векторы  $a_1, \dots, a_k$  в строки матрицы  $A$ .
  2. Приведение к ступенчатому виду: С помощью элементарных преобразований строк (метод Гаусса)
  3. Определение размерности дополнения: Согласно теореме о размерности,  $\dim L^\perp = n - r$
  4. Нахождение ФСР: \* Выразить главные переменные через свободные.
- Полученные векторы  $\{f_1, f_2, \dots, f_{n-r}\}$  образуют базис  $L^\perp$ .



## 50 ПОНЯТИЕ ЕВКЛИДОВОГО ПРОСТРАНСТВА. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И СВОЙСТВА СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ. ДЛИНА ВЕКТОРА. УГОЛ МЕЖДУ ВЕКТОРАМИ.

### 50.1 Понятие евклидова пространства

#### Определение

Линейное пространство  $V$  над полем вещественных чисел  $\mathbb{R}$  называется евклидовым, если каждой паре векторов  $x, y \in V$  поставлено в соответствие вещественное число, называемое скалярным произведением (обозначается  $(x, y)$ ), и при этом выполняются четыре аксиомы.

### 50.2 Аксиомы скалярного произведения

Для любых векторов  $x, y, z \in V$  и любого числа  $\alpha \in \mathbb{R}$ :

1. Линейность по первому аргументу:  $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$  и  $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$ .
2. Симметричность (коммутативность):  $(x, y) = (y, x)$ .
3. Положительная определенность:  $(x, x) \geq 0$ , причем  $(x, x) = 0$  тогда и только тогда, когда  $x = 0$ .

### 50.3 Длина вектора

В евклидовом пространстве длина вектора определяется через скалярное произведение самого вектора на себя.

#### Определение

Длиной (нормой) вектора  $x$  называется число:

$$|x| = \sqrt{(x, x)}$$



## 50.4 Угол между векторами

### Определение

Углом  $\varphi$  между ненулевыми векторами  $x$  и  $y$  называется число из отрезка  $[0, \pi]$ , косинус которого равен:

$$\cos \varphi = \frac{(x, y)}{|x| \cdot |y|}$$



## 51 АЛГОРИТМ НАХОЖДЕНИЯ РАССТОЯНИЯ И УГЛА МЕЖДУ ВЕКТОРОМ И ПОДПРОСТРАНСТВОМ.

### 51.1 Понятие угла и расстояния

Пусть  $V$  — евклидово пространство,  $L$  — его подпространство, и  $x \in V$  — произвольный вектор.

#### Определение

1. Расстояние  $\rho(x, L)$  — это длина перпендикуляра, опущенного из конца вектора на подпространство. Это минимальное расстояние от  $x$  до любой точки подпространства:

$$\rho(x, L) = \min_{y \in L} \|x - y\| = \|x - x_L\|$$

2. Угол  $\varphi$  между вектором и подпространством — это угол между вектором  $x$  и его проекцией  $x_L$ . По определению  $\varphi \in [0, \pi/2]$ .

### 51.2 алгоритм нахождения

Пусть подпространство  $L$  задано базисом  $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ .

1. Нахождение ортогональной проекции  $x_L$

Этот вопрос объединяет в себе теорию ортогонального проектирования и метрические свойства евклидова пространства. По сути, задача сводится к разложению вектора на проекцию и ортогональную составляющую. 1. Понятие угла и расстояния Пусть  $V$  — евклидово пространство,  $L$  — его подпространство, и  $x \in V$  — произвольный вектор. Расстояние  $\rho(x, L)$  — это длина перпендикуляра, опущенного из конца вектора на подпространство. Это минимальное расстояние от  $x$  до любой точки подпространства:

$$\rho(x, L) = \min_{y \in L} \|x - y\| = \|x - x_L\|$$



где  $x_L$  — ортогональная проекция  $x$  на  $L$ . Угол  $\varphi$  между вектором и подпространством — это угол между вектором  $x$  и его проекцией  $x_L$ . По определению  $\varphi \in [0, \pi/2]$ .

2. Алгоритм нахождения

Пусть подпространство  $L$  задано базисом  $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ .

Шаг 1. Нахождение ортогональной проекции  $x_L$

Ищем проекцию в виде  $x_L = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k$ . Для этого решаем систему нормальных уравнений (через матрицу Грама):

$$\begin{pmatrix} (a_1, a_1) & \dots & (a_1, a_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_k, a_1) & \dots & (a_k, a_k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x, a_1) \\ \vdots \\ (x, a_k) \end{pmatrix}$$

После нахождения  $\lambda_i$  вычисляем вектор  $x_L$ .

2. Нахождение ортогональной составляющей  $x_M$  Вычисляем вектор  $x_M = x - x_L$ . Этот вектор перпендикулярен подпространству  $L$ .

3. Вычисление расстояния.

Расстояние — это норма (длина) вектора  $x_M$ :

$$\rho(x, L) = \|x_M\| = \sqrt{(x_M, x_M)}$$

4. Вычисление угла

Угол находится через косинус угла между  $x$  и его проекцией  $x_L$ :

$$\cos \varphi = \frac{\|x_L\|}{\|x\|}$$



## 52 АЛГОРИТМ ГРАМА-ШМИДТА ОРТОГОНАЛИЗАЦИИ БАЗИСА.

Пусть дан базис  $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ . Мы строим новый базис  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  следующим образом:

1. Берем первый вектор без изменений:

$$e_1 = f_1$$

2. Ищем второй вектор как разность  $f_2$  и его проекции на  $e_1$ :

$$e_2 = f_2 - \text{proj}_{e_1} f_2 = f_2 - \frac{(f_2, e_1)}{(e_1, e_1)} e_1$$

3. Ищем третий вектор, вычитая проекции  $f_3$  на  $e_1$  и  $e_2$ :

$$e_3 = f_3 - \frac{(f_3, e_1)}{(e_1, e_1)} e_1 - \frac{(f_3, e_2)}{(e_2, e_2)} e_2$$

4. Шаг  $k$  (общая формула):

$$e_k = f_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(f_k, e_i)}{(e_i, e_i)} e_i$$