

Математический анализ. Экзамен.

13 января 2026 г.

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

1 СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ МНОЖЕСТВА. ПОРОЖДАЮЩАЯ ПРОЦЕДУРА. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ СВОЙСТВО.	5
1.1 Способы задания множества	5
1.2 Описание способов задания множества.....	5
2 ОТОБРАЖЕНИЯ. ИНЪЕКЦИЯ, СЮРЪЕКЦИЯ, БИЕКЦИЯ. ПРЯМЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ МНОЖЕСТВ	6
2.1 Отображения.....	6
2.2 Прямые произведения множеств	6
3 КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА. ДЕЙСТВИЯ С КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ И ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФОРМЫ ЗАПИСИ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ.....	7
3.1 Комплексные числа	7
3.2 Действия с комплексными числами	7
3.3 Тригонометрическая и показательная форма записей	7
4 ВОЗВЕДЕНИЕ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА В СТЕПЕНЬ. ИЗВЛЕЧЕНИЕ КОРНЯ ИЗ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА. КОМПЛЕКСНЫЙ ЛОГАРИФМ. ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО АРГУМЕНТА.	8
4.1 Возведение комплексного числа в степень и извлечение корня.	8
4.2 Комплексный логарифм	8
4.3 Функции комплексного аргумента	8
5 АКСИОМЫ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ. ПРОСТЕЙШИЕ СЛЕДСТВИЯ ИЗ АКСИОМ. АКСИОМА ПОЛНОТЫ.....	9
5.1 Аксиомы вещественных чисел	9
5.2 Простейшие следствия из аксиом	10
5.3 Аксиома полноты.....	10

6 ТОЧНАЯ ВЕРХНЯЯ И ТОЧНАЯ НИЖНЯЯ ГРАНИ МНОЖЕСТВА. ЕДИНСТВЕННОСТЬ МИНИМАЛЬНОГО И МАКСИМАЛЬНОГО ЭЛЕМЕНТА ОГРАНИЧЕННОГО НЕПУСТОГО МНОЖЕСТВА. СУЩЕСТВОВАНИЕ ТОЧНОЙ ВЕРХНЕЙ ГРАНИ ОГРАНИЧЕННОГО НЕПУСТОГО МНОЖЕСТВА. ПРИНЦИП ВЛОЖЕННЫХ ОТРЕЗКОВ.	11
6.1 Супремум и инфимум множества	11
6.2 Единственность минимального и максимального элемента ограниченного непустого множества	12
6.3 Принцип вложенных отрезков	13
7 ИНДУКТИВНОЕ МНОЖЕСТВО. МНОЖЕСТВО НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ. МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ. СУЩЕСТВОВАНИЕ НАИМЕНЬШЕГО ЭЛЕМЕНТА В НЕПУСТОМ ПОДМНОЖЕСТВЕ МНОЖЕСТВА НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ. ПРИНЦИП АРХИМЕДА.	15
7.1 Индуктивное множество, множество натуральных чисел...	15
7.2 Метод математической индукции	15
7.3 Существование наименьшего элемента в непустом подмножестве множества натуральных чисел	16
7.4 Принцип Архимеда	17
8 ПЛОТНОСТЬ МНОЖЕСТВА РАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ. СУЩЕСТВОВАНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ. ИРРАЦИОНАЛЬНОСТЬ $\sqrt{2}$	18
8.1 Плотность множества рациональных чисел	18
8.2 Существование иррациональных чисел	18
8.3 Иррациональность $\sqrt{2}$	19
9 ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. МОНОТОННОСТЬ. ОГРАНИЧЕННОСТЬ. РЕКУРРЕНТНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ...	20
9.1 Последовательности	20
9.2 Монотонность	20
9.3 Ограниченность	21

10 ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ДЕЙСТВИЯ С ПРЕДЕЛАМИ. ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД В НЕРАВЕНСТВАХ. ПРИНЦИП СЖАТОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ.....	22
10.1 Предел последовательности.....	22
10.2 Арифметические действия с пределами	22
10.3 Предельный переход в неравенствах	23
10.4 Предел сжатой последовательности	24
11 ПРЕДЕЛ МОНОТОННОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. ТЕОРЕМА ВЕЙЕРШТРАССА О ПРЕДЕЛЕ МОНОТОННОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ.....	25
12 НЕОГРАНИЧЕННОСТЬ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ $x_n = q^n$, $q > 1$, ОЦЕНКА $q^{n-1} \leq x < q^n$. СХОДИМОСТЬ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ И СУММЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ ПРИ $q < 1$. ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ $\frac{n}{q^n}$	26
12.1 Неограниченность q^n	26
12.2 Оценка $q^{n-1} < x < q^n$	26
12.3 Геометрическая прогрессия	27
13 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧИСЛА e. СВОЙСТВА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ, СВЯЗАННЫХ С ЧИСЛОМ e	29
14 ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. КРИТЕРИЙ КОШИ СХОДИМОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ.....	31
15 ПОДПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. ТЕОРЕМА БОЛЬЦАНО-КОШИ О СУЩЕСТВОВАНИИ СХОДЯЩЕЙСЯ ПОДПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. ЧАСТИЧНЫЕ ПРЕДЕЛЫ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ. НИЖНИЙ И ВЕРХНИЙ ПРЕДЕЛЫ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. ТЕОРЕМА О НИЖНЕМ И ВЕРХНЕМ ПРЕДЕЛЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ.	33

15.1 Подпоследовательности	33
15.2 Частичные пределы	34

1 СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ МНОЖЕСТВА. ПОРОЖДАЮЩАЯ ПРОЦЕДУРА. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ СВОЙСТВО.

1.1 Способы задания множества

1. Перечисление $\{a, b, c, \dots\}$
2. Характеристическое свойство $M \stackrel{\text{def}}{=} \{x : P(x)\}$, где $P(x)$ – предикат
3. Порождающая процедура $M := \{y : y = f(x), x \in E\}$, где f – функция от x

1.2 Описание способов задания множества

Определение

Характеристическое свойство – способ задания множества, при котором каждый его элемент обладает свойством $P(x)$

$$M \stackrel{\text{def}}{=} \{x : P(x)\}$$

Определение

Порождающая процедура – способ задания множества, при котором каждый его элемент является результатом выполнения функции f от переменной x из некоторого множества E .

$$M := \{y : y = f(x), x \in E\}$$

2 ОТОБРАЖЕНИЯ. ИНЬЕКЦИЯ, СЮРЬЕКЦИЯ, БИЕКЦИЯ. ПРЯМЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ МНОЖЕСТВ

2.1 Отображения

Определение

Отображение – способ сопоставления элементов между множествами.

Отображения бывают трех видов:

1. Инъекция
2. Сюръекция
3. Биекция

Определение

Инъекция – такое отображение $f(A) \rightarrow B$, при котором любой элемент B имеет **не более одного** прообраза в множестве A .

Определение

Сюръекция – такое отображение $f(A) \rightarrow B$, при котором любой элемент B имеет **не менее одного** прообраза в множестве A .

Определение

Биекция – это отображение, являющееся и сюръекцией, и инъекцией одновременно. То есть взаимооднозначное соответствие.

2.2 Прямые произведения множеств

Определение

Прямое (декартово) произведение множеств A и B – все такие пары чисел (a, b) , где $a \in A, b \in B$.

$$A \times B \stackrel{\text{def}}{=} \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

3 КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА. ДЕЙСТВИЯ С КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ И ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФОРМЫ ЗАПИСИ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

3.1 Комплексные числа

Рассмотрим такое число i , что $i^2 = -1$. Тогда можно представить следующий вид числа: $z = a + bi$, где $a, b \in \mathbb{R}$

Определение

Комплексное число – такая пара чисел (a, b) , что $a, b \in \mathbb{R}$

3.2 Действия с комплексными числами

1. Сложение поэлементно $z_1 + z_2 = (a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$
2. Умножение $z_1 z_2 = (a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)$
3. Равенство $z_1 = z_2 \stackrel{\text{def}}{=} (a_1 = a_2) \wedge (b_1 = b_2)$
4. Обратное

$$\exists(x, y) : (x, y)(a_2, b_2) = (a_1, b_1) \Leftrightarrow \begin{cases} xa_2 - yb_2 = a_1 \\ xb_2 + ya_2 = b_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} \\ y = \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} \end{cases}$$

5. Модуль числа $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
6. Деление $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \tilde{z}_2}{|z_2|^2}$
7. Аргумент числа $\phi = \arg(z) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$

3.3 Тригонометрическая и показательная форма записей

1. Тригонометрическая запись $z = r(\cos(\phi) + i \sin(\phi))$
2. Показательная форма $z = e^{i\phi}$

4 ВОЗВЕДЕНИЕ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА В СТЕПЕНЬ. ИЗВЛЕЧЕНИЕ КОРНЯ ИЗ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА. КОМПЛЕКСНЫЙ ЛОГАРИФМ. ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО АРГУМЕНТА.

4.1 Возвведение комплексного числа в степень и извлечение корня.

1. Комплексное число $z = r(\cos(\phi) + i \sin(\phi))$ Возводиться в n-ую степень согласно формуле Муавра $z^n = r^n(\cos(n\phi) + i \sin(n\phi))$
2. Извлчения корня $\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}(\cos(\frac{\phi+2\pi k}{n}) + i \sin(\frac{\phi+2\pi k}{n})), k = 0, 1, \dots, n - 1$

4.2 Комплексный логарифм

Решим уравнение $e^\omega = c, c \in \mathbb{C}, \omega = a + ib \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \ln(c) = \ln(e^a \cdot e^{ib}) = \ln(|z|) + \ln(e^{i\arg(\omega)}) = \ln(|z|) + i(\phi + 2\pi k)$$

Тогда $\ln(z) = \ln(|z|) + i(\phi + 2\pi k)$

Важно заметить, что комплексный логарифм является многозначной функцией.

4.3 Функции комплексного аргумента

5 АКСИОМЫ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ. ПРОСТЕЙШИЕ СЛЕДСТВИЯ ИЗ АКСИОМ. АКСИОМА ПОЛНОТЫ.

5.1 Аксиомы вещественных чисел

Определение

Множество действительных чисел \mathbb{R} – это множество, на котором заданы операции сложения, умножения и сравнения, удовлетворяющие следующим аксиомам.

1. Группа I

- (a) $a + b = b + a$
- (b) $a + (b + c) = (a + b) + c$
- (c) $\exists 0 : \forall a \in \mathbb{R} \Rightarrow a + 0 = a$
- (d) $\forall a \exists \tilde{a} : a + \tilde{a} = 0$

2. Группа II

- (a) $ab = ba$
- (b) $(ab)c = a(bc)$
- (c) $\exists 1 : \forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow 1 \cdot a = a$
- (d) $\forall a \in \mathbb{R} \exists a^{-1} : aa^{-1} = 1$

3. Группа III

- (a) $a(b + c) = ab + ac$ – дистрибутивность

4. Группа IV

- (a) $\forall a, b \in \mathbb{R} : (a \leq b) \vee (b \leq a)$

5. Группа V

- (a) $a \leq a, a \geq a$
- (b)

$$\begin{cases} a \leq b \\ b \leq c \end{cases} \Rightarrow a \leq c$$

- (c) $(a \leq b) \vee (b \leq a)$
- (d) $0 \leq 1$

(e)

$$\begin{cases} a \leq b \\ b \leq a \end{cases} \Rightarrow a = b$$

6. Группа VI

(a) $a \leq b \Rightarrow \forall c : a + c \leq b + c$

(b)

$$\begin{cases} a \leq b \\ c \leq d \end{cases} \Rightarrow a + c \leq b + d$$

(c) $a \leq b, c > 0 \Rightarrow ac \leq bc$

(d)

$$\begin{cases} 0 \leq a \leq b \\ 0 \leq c \leq d \end{cases} \Rightarrow 0 \leq ac \leq bd$$

7. Аксиома полноты

$$((\forall x \in X) \wedge (\forall y \in Y) : x \leq y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\exists c \in \mathbb{R} : (\forall x \in X) \wedge (\forall y \in Y) : x \leq c \leq y)$$

5.2 Простейшие следствия из аксиом

1. **Единственность нуля:** Если $a + x = a$ для некоторого $a \in \mathbb{R}$, то $x = 0$.
2. **Единственность противоположного:** Для любого $a \in \mathbb{R}$ существует единственный $-a$ такой, что $a + (-a) = 0$.
3. **Расположение чисел относительно друг друга:** Для любых $x, y \in \mathbb{R}$ верно ровно одно из трех утверждений: $x < y, x > y, x = y$

5.3 Аксиома полноты

Аксиома полноты говорит о том, что для любых двух различных чисел из множества \mathbb{R} найдется третье, находящееся между ними.

6 ТОЧНАЯ ВЕРХНЯЯ И ТОЧНАЯ НИЖНЯЯ ГРАНИ МНОЖЕСТВА. ЕДИНСТВЕННОСТЬ МИНИМАЛЬНОГО И МАКСИМАЛЬНОГО ЭЛЕМЕНТА ОГРАНИЧЕННОГО НЕПУСТОГО МНОЖЕСТВА. СУЩЕСТВОВАНИЕ ТОЧНОЙ ВЕРХНЕЙ ГРАНИ ОГРАНИЧЕННОГО НЕПУСТОГО МНОЖЕСТВА. ПРИНЦИП ВЛОЖЕННЫХ ОТРЕЗКОВ.

6.1 Супремум и инфимум множества

Определение

Точная верхняя грань (супремум) множества M – такое число $s = \sup M$, которое удовлетворяет условиям:

1. $\forall x \in M \Rightarrow x \leq s$
2. $\forall \varepsilon > 0 \exists x' \in M : x' > s - \varepsilon$

Определение

Точная нижняя грань (инфимум) множества M – такое число $i = \inf M$, которое удовлетворяет условиям:

1. $\forall x \in M \Rightarrow x \geq i$
2. $\forall \varepsilon > 0 \exists x' \in M : x' < i + \varepsilon$

6.2 Единственность минимального и максимального элемента ограниченного непустого множества

Теорема

Любое ограниченное сверху подмножество множества \mathbb{R} имеет единственную точную верхнюю грань.

Доказательство

[Существование]

Рассмотрим два множества: X – исходное множество, Y – множество всех верхних граней множества X . X ограничено сверху числом y , если $\forall x \in X \Rightarrow x \leq y$. По аксиоме полноты $\exists c : \forall x \in X, \forall y \in Y \Rightarrow x \leq c \leq y$. Проверим, что $c = \sup X$. $\forall x \in X \Rightarrow x \leq c$.

Пусть $\varepsilon > 0$, рассмотрим $c - \varepsilon$. Если $c - \varepsilon$ – неточная верхняя грань, то не найдется ни одного $x' \in X$ такого, что $x' > c - \varepsilon$, а значит $\forall x \in X \Rightarrow x \leq c - \varepsilon$, а значит $c - \varepsilon$ можно выбрать как новую верхнюю грань.

[Единственность]

Пусть есть c_1 и c_2 , $c_2 > c_1$. Возьмем $\varepsilon = \frac{c_2 - c_1}{2}$. $\exists x' : x' > c_2 - \frac{c_2 - c_1}{2} > c_1$.

Тогда c_1 – не граница X , $c_1 \notin Y$

Определение

Минимальный элемент множества M – такой элемент $a \in M$, что выполняется $\forall m \in M \Rightarrow a \leq m$

Определение

Максимальный элемент множества M – такой элемент $a \in M$, что выполняется $\forall m \in M \Rightarrow a \geq m$

Теорема

Если в множестве A существует минимальный (максимальный) элемент, то он единственный.

Доказательство

Пусть m_1, m_2 – два минимальных элемента множества A .

1. Так как m_1 – минимальный элемент множества A , то выполняется
$$\forall x \in A \Rightarrow m_1 \leq x,$$
 в том числе это выполнено и для $x = m_2$, ведь $m_2 \in A$. Значит $m_1 \leq m_2$.
2. Так как m_2 – минимальный элемент множества A , то выполняется
$$\forall x \in A \Rightarrow m_2 \leq x,$$
 в том числе это выполнено и для $x = m_1$, ведь $m_1 \in A$. Значит $m_2 \leq m_1$.
- 3.

$$\begin{cases} m_1 \leq m_2 \\ m_2 \leq m_1 \end{cases} \Leftrightarrow m_1 = m_2$$

6.3 Принцип вложенных отрезков

Определение

Система вложенных отрезков – это последовательность числовых отрезков, где каждый последующий отрезок содержится в предыдущем.

Теорема

Пусть существует такая последовательность отрезков $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_n, b_n] \subset [a_{n+1}, b_{n+1}]$, таких, что $\lim_{x \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$. Тогда существует единственная точка c , принадлежащая всем отрезкам системы, причем $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = c$.

Доказательство

[Существование]

Пусть $X = \{a_i\}_{i=1}^{\infty}$, $Y = \{b_i\}_{i=1}^{\infty}$. X и Y непустые, $\forall i, j : a_i < b_j$. Пусть $i < j$. Тогда $a_i \leq a_j < b_i$, $a_j < b_j < b_i$. $a_i < b_j$, $a_j < b_i$.

По аксиоме $\exists c : \forall k \Rightarrow c \in [a_k; b_k]$

[Единственность]

Пусть имеется другая точка c' , которая, как и c , принадлежит каждому отрезку системы. Тогда $\forall n \Rightarrow |c' - c| \leq b_n - a_n$, но если c и c' не совпадают, то расстояние между ними ненулевое, а значит $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) \neq 0$, противоречие условию.

7 ИНДУКТИВНОЕ МНОЖЕСТВО. МНОЖЕСТВО НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ. МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ. СУЩЕСТВОВАНИЕ НАИМЕНЬШЕГО ЭЛЕМЕНТА В НЕПУСТОМ ПОДМНОЖЕСТВЕ МНОЖЕСТВА НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ. ПРИНЦИП АРХИМЕДА.

7.1 Индуктивное множество, множество натуральных чисел

Определение

Индуктивное множество X – множество, удовлетворяющее следующим условиям:

1. $1 \in X$
2. $x \in X \Rightarrow x + 1 \in X$

Определение

Множество натуральных чисел \mathbb{N} – наименьшее индуктивное множество.

$$\mathbb{N} = \bigcap_{i=1}^{\infty} X_i$$

где X_i – индуктивное множество

7.2 Метод математической индукции

Определение

Метод математической индукции гласит, что если $A(n)$ верно, и из этого следует, что $A(n + 1)$ тоже верно, а также верно $A(1)$, то $A(x)$ верно на \mathbb{N} .

7.3 Существование наименьшего элемента в непустом подмножестве множества натуральных чисел

Теорема

Любое ограниченное снизу непустое подмножество X множества \mathbb{N} имеет минимальный элемент.

Доказательство

[Случай 1]

Если $1 \in X$, то X автоматически имеет наименьший элемент, поскольку $1 = \min \mathbb{N}$

[Случай 2]

Пусть $1 \notin X$. Тогда рассмотрим такое множество B , которое состоит из всех элементов множества \mathbb{N} , которые меньше элементов A :

$$B = \{n \in \mathbb{N} : \forall k \leq n \Rightarrow k \notin A\}$$

Докажем по индукции, что если A не имеет минимального элемента, то $B = \mathbb{N}$, а это противоречие с непустым A .

База индукции: $1 \in B$

Индукционное предположение: $n \in B$

Индукционный переход: $n + 1 \in B$

Если бы $n + 1 \in A$, то $\min A = n + 1$ (поскольку мы взяли все такие элементы $n \in \mathbb{N}$, для которых выполняется $\forall k \leq n \Rightarrow k \notin A$, то есть все те числа, до которых нет чисел в A), но мы предположили, что минимального элемента нет. Поэтому $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow n \in B \Rightarrow A = \emptyset$

7.4 Принцип Архимеда

Теорема

Пусть задано $h > 0$. $\forall x \exists n : (n - 1)h \leq x < nh$

Доказательство

Рассмотрим $\frac{x}{h}$. Найдется $n \in \mathbb{N}$ такое, что $n > \frac{x}{h}$, поскольку \mathbb{N} неограничено сверху, найдем минимальный такой элемент.

$$n - 1 \leq \frac{x}{h} < n$$

$$(n - 1)h \leq x < nh$$

8 ПЛОТНОСТЬ МНОЖЕСТВА РАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ. СУЩЕСТВОВАНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ. ИРРАЦИОНАЛЬНОСТЬ $\sqrt{2}$

Определение

Множество A называется **всюду плотным** на числовой прямой \mathbb{R} , если между любыми двумя числами из \mathbb{R} найдется число из A .

8.1 Плотность множества рациональных чисел

Теорема

Множество рациональных чисел \mathbb{Q} всюду плотно на множестве действительных чисел \mathbb{R} .

Доказательство

Возьмем два числа $a, b \in \mathbb{R}$. Пусть $a > b$. Воспользуемся принципом Архимеда и получим, что для любого положительного числа $a - b$ найдется натуральное n такое, что $\frac{1}{n} < a - b$.

Рассмотрим числа вида $\frac{m}{n}$. Расстояние между соседними такими числами равно $\frac{1}{n}$, что меньше интервала (a, b) , а значит хотя бы одно такое число войдет в этот интервал.

8.2 Существование иррациональных чисел

Первое число, иррациональность которого была доказана, – $\sqrt{2}$. Существование такого числа геометрически очевидно: это диагональ единичного квадрата. Однако можно доказать, что такое число невозможно представить в виде соотношения целых чисел.

8.3 Иррациональность $\sqrt{2}$

Теорема

$\sqrt{2}$ – иррациональное число, то есть непредставимое в виде $\frac{m}{n}$, где $m, n \in \mathbb{Z}$, а также $\frac{m}{n}$ – несократимая дробь.

Доказательство

Пойдем от обратного. Пусть $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n} \Leftrightarrow 2 = \frac{m^2}{n^2} \Leftrightarrow m^2 = 2n^2$$

Но тогда $m^2 \equiv 0 \pmod{2} \Leftrightarrow m \equiv 0 \pmod{2} \Leftrightarrow m = 2k$. $4k^2 = 2n^2$.

Но отсюда видно, что m и n имеют общий делитель, что противоречит изначальному условию.

9 ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. МОНОТОННОСТЬ. ОГРАНИЧЕННОСТЬ. РЕКУРРЕНТНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

9.1 Последовательности

Определение

Последовательность – это упорядоченный набор из элементов некоторого множества A .

$$\{a_n\} \stackrel{\text{def}}{=} \{a_i : \forall i \Rightarrow a_i \in A\}$$

Способы задания последовательности:

1. Формула n -го члена $a_n = f(n)$
2. Рекуррентный $a_{n+1} = f(a_n)$
3. Описание x_n - n -я цифра десятичной записи числа π

9.2 Монотонность

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **строго возрастающей**, если $\forall n \Rightarrow x_{n+1} > x_n$

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **неубывающей (нестрого возрастающей)**, если $\forall n \Rightarrow x_{n+1} \geq x_n$

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **строго убывающей**, если $\forall n \Rightarrow x_{n+1} < x_n$

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **невозрастающей (нестрого убывающей)**, если $\forall n \Rightarrow x_{n+1} \leq x_n$

9.3 Ограничность

Определение

Последовательность называется **ограниченной**, если $\exists M > 0 : \forall x_n : |x_n| < M$

Примеры ограниченных последовательностей:

1. $x_n = (-1)^n$
2. $x_n = \sin n$
3. $x_n = \frac{1}{n^2}$

Примеры неограниченных последовательностей:

1. $x_n = n^2$
2. $x_n = (-1)^n n^2$

10 ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ДЕЙСТВИЯ С ПРЕДЕЛАМИ. ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД В НЕРАВЕНСТВАХ. ПРИНЦИП СЖАТОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ.

10.1 Предел последовательности

Определение

Число a называется пределом последовательности $\{a_n\}$, если $\forall \varepsilon > 0$ найдется номер, начиная с которого все члены последовательности входят в ε -окрестность a .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$$

10.2 Арифметические действия с пределами

Теорема

Если последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ имеют конечные пределы, то сумма этих последовательностей также имеет конечный предел.

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \\ \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \end{cases} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$$

Доказательство

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Докажем по определению, что $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$.

$$|(a_n - a) + (b_n - b)| < \varepsilon$$

$$|(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b|$$

Возьмем $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда $\exists N_1 : \forall n > N_1 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon_1$

Возьмем $\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда $\exists N_2 : \forall n > N_2 \Rightarrow |b_n - b| < \varepsilon_2$

Тогда при $n = \max(N_1, N_2)$ $|a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \boxed{a + b}$

Теорема

Если последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ имеют конечные пределы, то произведение этих последовательностей также имеет конечный предел.

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \\ \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \end{cases} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = ab$$

Теорема

Если последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ имеют конечные пределы a и b , а также $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$ и $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow b_n \neq 0$, то отношение этих последовательностей также имеет конечный предел.

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \\ \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \end{cases} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$$

10.3 Предельный переход в неравенствах

Теорема

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, и начиная с какого-то номера $a_n \leq b_n$, то $a \leq b$

Доказательство

$$\begin{aligned} a_n \leq b_n &\Leftrightarrow b_n - a_n \geq 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} b_n - \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \geq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n} \end{aligned}$$

10.4 Предел сжатой последовательности

Теорема

Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = c$, и, начиная с некоторого номера, справедливо неравенство $a_n \leq x_n \leq b_n$. Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$

Доказательство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N_1 : \forall n > N_1 \Rightarrow |a_n - c| < \varepsilon$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = c \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N_2 : \forall n > N_2 \Rightarrow |b_n - c| < \varepsilon$$

Тогда при $N = \max(N_1, N_2)$ выполняются оба неравенства.

Рассмотрим $a_n \leq x_n \leq b_n$ при выбранном N .

$$c - \varepsilon \leq x_n \leq c + \varepsilon$$

Значит x_n входит в ε -окрестность точки c начиная с некоторого N , а значит c также является ее пределом.

11 ПРЕДЕЛ МОНОТОННОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. ТЕОРЕМА ВЕЙЕРШТРАССА О ПРЕДЕЛЕ МОНОТОННОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Теорема

[Теорема Вейерштрасса]

Всякая монотонно возрастающая (убывающая) и ограниченная сверху (снизу) последовательность имеет конечный предел

Доказательство

Докажем теорему для неубывающей последовательности. Для остальных доказывается аналогично.

Поскольку последовательность неубывающая, то $\forall n \Rightarrow x_n \leq x_{n+1}$.

Поскольку еще и она ограничена, то $\exists a = \sup\{x_n\}$. Это значит, что $\forall n \Rightarrow x_n \leq a$. Так как a – супремум, то $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) : x_N > a - \varepsilon$. Последовательность неубывающая, а значит при $n > N$: $x_n \geq x_N > a - \varepsilon$. Значит $a - \varepsilon < x_n \leq a$, откуда следует, что $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \Leftrightarrow |x_n - a| < \varepsilon$ при $n > N$. Значит последовательность имеет предел.

12 НЕОГРАНИЧЕННОСТЬ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ $x_n = q^n$, $q > 1$, ОЦЕНКА $q^{n-1} \leq x < q^n$. СХОДИМОСТЬ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ И СУММЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ ПРИ $|q| < 1$. ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ $\frac{n}{q^n}$

12.1 Неограниченность q^n

Теорема

Последовательность q^n , где $q > 1$, неограничена

Доказательство

Предположим, что это не так. Тогда $\exists \sup\{q^n\} = s$. $\forall n \Rightarrow q^n \leq s$, то есть у этой последовательности есть предел по теореме Вейерштрасса. Тогда начиная с некоторого N будет выполняться $|s - q^N| < \varepsilon$. $\frac{s}{q} < s \Rightarrow \exists q^n : \frac{s}{q} < q^n \leq s \Leftrightarrow s < q^{n+1} \leq sq$, но тогда s – не супремум, ведь мы получили, что $s < q^{n+1}$. Противоречие.

12.2 Оценка $q^{n-1} < x < q^n$

Теорема

Для любого $x > 0$ и $q > 1$ существует единственное целое число $n \in \mathbb{Z}$ такое, что $q^{n-1} \leq x < q^n$

Доказательство

Рассмотрим множество $A = \{k \in \mathbb{Z} : q^k \leq x\}$. Оно непусто, поскольку $k \rightarrow -\infty \Leftrightarrow q^k \rightarrow 0$. Это множество ограничено сверху, поскольку $\forall x > 0 \exists k : q^k > x$. Значит $\exists n = \max A$. По построению $q^n \leq x$, но также по построению $q^{n+1} > x$. Таким образом $q^n \leq x < q^{n+1}$. Заменив n на $n - 1$ получим $q^{n-1} \leq x < q^n$.

12.3 Геометрическая прогрессия

Теорема

Если $|q| < 1$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$

Доказательство

$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \frac{1}{q^N} > \frac{1}{\varepsilon}$ (теорема выше) $\Rightarrow q^N < \varepsilon$. Значит, $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$

Теорема

Если $|q| < 1$, то геометрическая прогрессия $\lim_{n \rightarrow \infty} aq^n$ стремится к 0

Доказательство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} aq^n = a \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$$

Теорема

[Сумма геометрической прогрессии]

При $b_1 = 1, |q| < 1$:

$$S_n = \frac{1}{1 - q}$$

Доказательство

$$S_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n = b_1 + q(b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1}) =$$

$$= b_1 + q(S_n - b_n) = b_1 + qS_n + qb_n$$

$$S_n(1 - q) = b_1 - qb_n$$

$$S_n = \frac{b_1 - qb_n}{1 - q}$$

При $b_1 = 1$ и $|q| < 1$: $S_n = \frac{1}{1 - q}$

Теорема

Если $|q| > 1$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{q^n} = 0$

Доказательство

$\exists n > N : x_{n+1} < x_n \Rightarrow$ последовательность убывает, при этом неотрицательна. Тогда $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{q^n} = a$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{q}$$

$$x_{n+1} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{q} x_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = 1 \cdot \frac{1}{q} a$$

$$a = \frac{a}{q}$$

$$a = 0$$

13 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧИСЛА e . СВОЙСТВА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ, СВЯЗАННЫХ С ЧИСЛОМ e .

Определение

Число e определяется как предел последовательности $(1 + \frac{1}{n})^n$

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Теорема

Предел последовательности $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$ существует

Доказательство

Докажем по теореме Вейерштрасса

[Монотонность]

$$\begin{aligned} \frac{x_{n+1}}{x_n} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \left(\frac{1 + \frac{1}{n+1}}{1 + \frac{1}{n}}\right)^n = \\ &= \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \left(\frac{n^2 + 2n}{(n+1)^2}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n \geq \end{aligned}$$

Воспользуемся неравенством Бернулли $(1 + a)^n \geq 1 + an$ при $a \geq -1$:

$$\begin{aligned} &\geq \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{n}{(n+1)^2}\right) = \left(\frac{n+2}{n+1}\right) \left(\frac{n^2 + n + 1}{(n+1)^2}\right) = \\ &= \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 2}{n^3 + 3n^2 + 3n + 1} > 1 \end{aligned}$$

Последовательность возрастает

[Ограниченнность]

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!n^k} =$$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{n^k k!} \leq$$

Поскольку $\frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{n^k} < 1$, то:

$$\leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots < 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} < 3$$

Связанные последовательности:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = e^x$

14 ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. КРИТЕРИЙ КОШИ СХОДИМОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ.

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **фундаментальной**, если:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall m > N, n > N \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon$$

Теорема

[Критерий сходимости Коши]

Последовательность имеет предел тогда и только тогда, когда она фундаментальна

Доказательство

[Имеет предел \Rightarrow фундаментальна]

Пусть $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. Докажем, что последовательность фундаментальна.

Пусть задано ε . Возьмем $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}$

$$\exists N_1 : \forall n > N_1 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon_1$$

$$\exists N_2 : \forall m > N_2 \Rightarrow |x_m - a| < \varepsilon_1$$

$$|x_n - x_m| = |(x_n - a) - (x_m - a)| \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_1 < \varepsilon$$

[Фундаментальна \Rightarrow имеет предел]

Зафиксируем $m > N(\varepsilon)$. Тогда все члены следующие члены последовательности лежат в этой ε -окрестности члена x_m . Значит последовательность ограничена, а тогда из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $x_{n_k} \rightarrow a$. Докажем, что это и будет предел последовательности.

Все члены подпоследовательности $\{x_{n_k}\}$ начиная с некоторого номера m лежат в ε -окрестности точки a , но при этом сами лежат в ε -окрестности точки x_m . Значит $|a - x_n| < 2\varepsilon$

15 ПОДПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. ТЕОРЕМА БОЛЬЦАНО-КОШИ О СУЩЕСТВОВАНИИ СХОДЯЩЕЙСЯ ПОДПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. ЧАСТИЧНЫЕ ПРЕДЕЛЫ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ. НИЖНИЙ И ВЕРХНИЙ ПРЕДЕЛЫ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. ТЕОРЕМА О НИЖНЕМ И ВЕРХНЕМ ПРЕДЕЛЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ.

15.1 Подпоследовательности

Определение

Пусть задана последовательность $\{x_n\}$, также пусть $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$. Тогда последовательность $\{x_{n_k}\}$ называется **подпоследовательностью** последовательности $\{x_n\}$.

Теорема

[Теорема Больцано-Коши]

Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность

Доказательство

Пусть $\{x_n\}$ ограничена, то есть $\exists[a_1, b_1] : \forall n \Rightarrow x_n \in [a_1, b_1]$. Поделим отрезок пополам. Тогда хотя бы одна половина содержит бесконечное множество членов, выберем ее и снова поделим пополам. Снова хотя бы одна половина содержит бесконечное множество членов и т.д.

Получаем систему вложенных отрезков $b_k - a_k \rightarrow 0$, при этом у них существует единственная общая точка.

Тогда выберем подпоследовательность так, чтобы каждый ее член лежал в разных отрезках. Получим последовательность, сходящуюся к общей точке всех отрезков.

15.2 Частичные пределы

Определение

Число a называется **частичным** пределом последовательности $\{x_n\}$, если существует такая подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, что $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$

Определение

Верхним пределом последовательности называется наибольший из ее частичных пределов

Определение

Нижним пределом последовательности называется наименьший из ее частичных пределов

Теорема

Последовательность имеет предел тогда и только тогда, когда все ее частичные пределы конечны и совпадают

Доказательство

[Предел существует \Rightarrow все частичные пределы конечны и совпадают]

Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} \{x_n\} = a$. Но тогда любая ее подпоследовательность сходится к a , ведь начиная с некоторого номера все члены последовательности входят в ε -окрестность точки a

[Частичные пределы конечны и совпадают \Rightarrow существует предел]

[Случай 1: последовательность ограничена]

Если последовательность $\{x_n\}$ ограничена, то из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$. Пусть $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$. Но известно, что все частичные пределы совпадают, но если предположить,

что a не является пределом, то $\exists\{x_{n_{km}}\} : |x_{n_{km}} - a| \geq \varepsilon$, что противоречит единственности частичного предела.

[Случай 2: последовательность неограничена]

Тогда из такой последовательности можно выделить неограниченную подпоследовательность, то есть ее предел равен бесконечности. То есть тогда все частичные пределы равны бесконечности, а это противоречит условию.