

Математический анализ. Экзамен.

4 января 2026 г.

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

1 СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ МНОЖЕСТВА. ПОРОЖДАЮЩАЯ ПРОЦЕДУРА. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ СВОЙСТВО.	3
1.1 Способы задания множества	3
1.2 Описание способов задания множества.....	3
2 ОТОБРАЖЕНИЯ. ИНЪЕКЦИЯ, СЮРЪЕКЦИЯ, БИЕКЦИЯ. ПРЯМЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ МНОЖЕСТВ	4
2.1 Отображения.....	4
2.2 Прямые произведения множеств	4
3 МОЩНОСТЬ МНОЖЕСТВА	5
4 ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ.	6
4.1 Операции	6
4.2 Свойства.....	6
5 ПРЯМОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ N МНОЖЕСТВ.	8
6 ТЕОРЕМА О МОЩНОСТИ ПРЯМОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ МНОЖЕСТВ	9
7 ПОНЯТИЕ ВЕКТОРА. ПРОЕКЦИЯ ВЕКТОРА НА ОСИ. ПРОЕКЦИЯ МНОЖЕСТВА ВЕКТОРОВ	10
8 ПРАВИЛО СУММЫ. ПРАВИЛО ПРОИЗВЕДЕНИЯ.	11
9 ЧИСЛО РАЗМЕЩЕНИЙ БЕЗ ПОВТОРЕНИЙ, ЧИСЛО РАЗМЕЩЕНИЙ С ПОВТОРЕНИЯМИ.....	12
10 ЧИСЛО ПЕРЕСТАНОВОК БЕЗ ПОВТОРЕНИЙ, ЧИСЛО ПЕРЕСТАНОВОК С ПОВТОРЕНИЯМИ.	14
11 ЧИСЛО СОЧЕТАНИЙ БЕЗ ПОВТОРЕНИЙ, ЧИСЛО СОЧЕТАНИЙ С ПОВТОРЕНИЯМИ.....	16

11.1 Сочетания без повторений	16
11.2 Сочетания с повторениями.....	16
12 СООТВЕТСТВИЯ И ФУНКЦИИ.....	18
12.1 Соответствия	18
12.2 Функции	19
13 ВЗАИМНО ОДНОЗНАЧНЫЕ СООТВЕТСТВИЯ И МОЩ-	
НОСТЬ МНОЖЕСТВ.....	21
13.1 Установление взаимно-однозначного соответствия между	
множествами чисел.....	21
14 ТЕОРЕМА О ЧИСЛЕ ПОДМНОЖЕСТВ КОНЕЧНОГО МНО-	
ЖЕСТВА.	23
15 ЧИСЛО ПОДМНОЖЕСТВ СЧЕТНОГО МНОЖЕСТВА.....	24
16 ТЕОРЕМА КАНТОРА	25
17 ГРАФЫ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГРАФА. ОРИЕНТИРОВАННЫЕ И	
НЕОРИЕНТИРОВАННЫЕ ГРАФЫ.....	26
18 МАТРИЦА ИНЦИДЕНТНОСТИ.	27
19 МАТРИЦА СМЕЖНОСТИ.	28
20 ЛОКАЛЬНАЯ СТЕПЕНЬ ВЕРШИНЫ. ВЕКТОР ЛОКАЛЬ-	
НЫХ СТЕПЕНЕЙ.....	29

1 СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ МНОЖЕСТВА. ПОРОЖДАЮЩАЯ ПРОЦЕДУРА. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ СВОЙСТВО.

1.1 Способы задания множества

1. Перечисление $\{a, b, c, \dots\}$
2. Характеристическое свойство $M \stackrel{\text{def}}{=} \{x : P(x)\}$, где $P(x)$ – предикат
3. Порождающая процедура $M := \{y : y = f(x), x \in E\}$, где f – функция от x

1.2 Описание способов задания множества

Определение

Характеристическое свойство – способ задания множества, при котором каждый его элемент обладает свойством $P(x)$

$$M \stackrel{\text{def}}{=} \{x : P(x)\}$$

Определение

Порождающая процедура – способ задания множества, при котором каждый его элемент является результатом выполнения функции f от переменной x из некоторого множества E .

$$M := \{y : y = f(x), x \in E\}$$

2 ОТОБРАЖЕНИЯ. ИНЪЕКЦИЯ, СЮРЪЕКЦИЯ, БИЕКЦИЯ. ПРЯМЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ МНОЖЕСТВ

2.1 Отображения

Определение

Отображение – способ сопоставления элементов между множествами.

Отображения бывают трех видов:

1. Инъекция
2. Сюръекция
3. Биекция

Определение

Инъекция – такое отображение $f(A) \rightarrow B$, при котором любой элемент B имеет **не более одного** прообраза в множестве A .

Определение

Сюръекция – такое отображение $f(A) \rightarrow B$, при котором любой элемент B имеет **не менее одного** прообраза в множестве A .

Определение

Биекция – это отображение, являющееся и сюръекцией, и инъекцией одновременно. То есть взаимнооднозначное соответствие.

2.2 Прямые произведения множеств

Определение

Прямое (декартово) произведение множеств A и B – все такие пары чисел (a, b) , где $a \in A, b \in B$.

$$A \times B \stackrel{\text{def}}{=} \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

3 МОЩНОСТЬ МНОЖЕСТВА

Определение

Мощность множества – количество элементов в нем (для конечных множеств).

Для бесконечных:

1. Если между бесконечным множеством X и множеством натуральных чисел \mathbb{N} существует биекция, то говорят, что X имеет счётную мощность. Это "наименьшая" бесконечная мощность.
2. Если между X и множеством всех вещественных чисел \mathbb{R} (или отрезком $[0, 1]$) существует биекция, то говорят, что X имеет мощность континуума.

4 ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ.

4.1 Операции

1. $A \cap B$ – пересечение

$$A \cap B \stackrel{\text{def}}{=} \{x : (x \in A) \wedge (x \in B)\}$$

2. $A \cup B$ – объединение

$$A \cup B \stackrel{\text{def}}{=} \{x : (x \in A) \vee (x \in B)\}$$

3. $A \setminus B$ – разность

$$A \setminus B \stackrel{\text{def}}{=} \{x : (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$$

4. $A \triangle B$ – симметрическая разность

$$A \triangle B \stackrel{\text{def}}{=} \{x : (x \in (A \setminus B)) \vee (x \in (B \setminus A))\}$$

5. \bar{A} – дополнение до универсума

$$\bar{A} \stackrel{\text{def}}{=} \{x : (x \notin A) \wedge (x \in U)\}$$

4.2 Свойства

1. $A \cap A = A, A \cup A = A$
2. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C,$
 $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
3. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$
 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
4. $A \cup \emptyset = A, A \cap \emptyset = \emptyset$
5. $A \cup U = U, A \cap U = A$
6. $A \cap B = B \cap A, A \cup B = B \cup A$

$$7. A \cup B = A \cap \bar{B},$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

$$8. \bar{\bar{A}} = A$$

$$9. A \setminus B = A \cap \bar{B}$$

5 ПРЯМОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ n МНОЖЕСТВ.

Определение

Прямое произведение n множеств – все возможные кортежи из элементов этих n множеств.

На примере двух множеств:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

6 ТЕОРЕМА О МОЩНОСТИ ПРЯМОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ МНОЖЕСТВ

Теорема

Если A и B конечны, $|A| = n$, $|B| = m$ то $|A \times B| = |A||B| = mn$

Доказательство

Рассмотрим кортеж. В нем на первом месте стоит элемент из A , на втором – из B . К каждому элементу из A можно приставить m элементов из B , получив тем самым множество, представляющее собой результат декартового произведения. То есть на первом месте в кортеже может стоять n элементов, на втором – m . Значит всего таких кортежей можно составить mn штук.

7 ПОНЯТИЕ ВЕКТОРА. ПРОЕКЦИЯ ВЕКТОРА НА ОСИ. ПРОЕКЦИЯ МНОЖЕСТВА ВЕКТОРОВ

Определение

Пусть задано прямое произведение $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$. **Вектором** называется упорядоченный набор (a_1, a_2, \dots, a_n) , где $a_i \in A_i$

Определение

Пусть задано прямое произведение $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$. **Проецированием** $\text{Pr}_k(a_1, a_2, \dots, a_n)$ называется отображение $(a_1, a_2, \dots, a_n) \rightarrow (a_k)$

$$\text{Pr}_k(a_1, a_2, \dots, a_n) \stackrel{\text{def}}{=} f((a_1, a_2, \dots, a_n)) \rightarrow (a_k)$$

Проецирование множества векторов:

$$\begin{aligned} \text{Pr}_{i,j,\dots,m}(\{(a_1, a_2, \dots, a_m), (b_1, b_2, \dots, b_m) \dots\}) = \\ = \{(a_i, a_j, \dots, a_m), (b_i, b_j, \dots, b_m) \dots\} \end{aligned}$$

8 ПРАВИЛО СУММЫ. ПРАВИЛО ПРОИЗВЕДЕНИЯ.

Теорема

[Правило суммы]

Пусть все выборки из множества A делятся на две взаимоисключающие A_1 и A_2 . Число выборок первого типа m_1 , второго – m_2 . Тогда число всех выборок из множества A равно $m_1 + m_2$

Доказательство

Данное правило является следствием формулы включений-исключений:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

где $A \cap B = \emptyset$

Теорема

[Правило произведения]

Пусть число способов построить выборку из множества A равно n , из множества B – m . Тогда число способов построить выборку (a, b) ($a \in A, b \in B$) равно mn

Доказательство

Данное утверждение эквивалентно теореме о мощности прямого произведения. $|A \times B| = |A||B| = mn$

9 ЧИСЛО РАЗМЕЩЕНИЙ БЕЗ ПОВТОРЕНИЙ, ЧИСЛО РАЗМЕЩЕНИЙ С ПОВТОРЕНИЯМИ

Определение

Пусть имеется множество из n элементов. Упорядоченное подмножество из k элементов называется размещением без повторений

Теорема

Число размещений без повторений можно рассчитать по формуле:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Доказательство

Пусть есть n элементов, из которых нужно составить упорядоченные наборы из k элементов.

Тогда на первое место можно поставить n элементов, на второе – $n - 1$, на третье – $n - 2$ и так далее до k -го места, куда можно поставить $n - k + 1$ элементов. тогда посчитаем общее количество наборов по правилу произведения:

$$n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \dots (n - k + 1) = \frac{n!}{(n - k)!}$$

Определение

Пусть имеется множество A из n элементов. Набор $(m_1, m_2 \dots m_k)$, где $\forall i \Rightarrow m_i \in A$, называется размещением с повторениями.

Теорема

Число размещений с повторениями можно рассчитать по формуле:

$$\overline{A}_n^k = n^k$$

Доказательство

Есть k позиция, на каждой из них n элементов. Тогда по правилу произведения всего n^k наборов

10 ЧИСЛО ПЕРЕСТАНОВОК БЕЗ ПОВТОРЕНИЙ, ЧИСЛО ПЕРЕСТАНОВОК С ПОВТОРЕНИЯМИ.

Определение

Пусть имеется множество из n элементов. **Перестановкой с повторениями** называется упорядоченная последовательность его элементов

Теорема

Перестановки без повторений можно посчитать по формуле:

$$P_n = n!$$

Доказательство

Данная формула является следствием правила произведения. Есть n позиций, на каждой следующей на 1 элемент меньше, чем на предыдущей. Значит формула:

$$P_k = n!$$

Определение

Пусть имеется множество из n элементов, среди которых:

- k_1 неразличимых элементов 1-го типа
- k_2 неразличимых элементов 2-го типа
- ...
- k_s неразличимых элементов s -го типа

Перестановкой с повторениями называется упорядоченная последовательность элементов этого множества

Теорема

Число перестановок с повторениями можно рассчитать по формуле:

$$\overline{P}_n = \frac{(k_1 + k_2 + \dots + k_s)!}{k_1!k_2!\dots k_s!}$$

где $k_1 + k_2 + \dots + k_s = n$

Доказательство

Для начала сосчитаем количество перестановок без повторений (представим, что в исходном множестве разные элементы): $n!$. Теперь сосчитаем перестановки для каждой группы: $k_i!$. Поскольку в исходном множестве есть группы одинаковых элементов, то их перестановки для нас неразличимы, а значит необходимо убрать все перестановки, в которых одинаковые наборы элементов одного типа, а их, как мы сосчитали, для каждого типа $k_i!$. Итого формула:

$$\overline{P}_n = \frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_s!}$$

11 ЧИСЛО СОЧЕТАНИЙ БЕЗ ПОВТОРЕНИЙ, ЧИСЛО СОЧЕТАНИЙ С ПОВТОРЕНИЯМИ.

11.1 Сочетания без повторений

Определение

Пусть имеется множество из n элементов. Неупорядоченное подмножество из k его элементов называется **сочетанием без повторений**

Теорема

Число сочетаний без повторений рассчитывается по формуле:

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Доказательство

Посмотрим на формулу размещений без повторений: $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$. Чтобы рассчитать сочетания, необходимо убрать из размещений все те наборы, в которых совпадают элементы. Для каждого набора элементов таких повторяющихся наборов $k!$, ведь это просто перестановки. Тогда итоговая формула:

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

11.2 Сочетания с повторениями

Определение

Пусть имеется k классов элементов множества A . Сочетанием с повторениями называется неупорядоченная выборка n элементов из множества A .

Теорема

Число сочетаний с повторениями можно рассчитать по формуле:

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^{k-1} = \frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!}$$

Доказательство

Используем метод "звезд и перегородок": будем рассматривать k звезд и $n - 1$ перегородок для n типов звезд. Любая такая последовательность однозначно задаёт одно сочетание с повторениями, и наоборот – любому сочетанию соответствует такая последовательность.

Общее число символов в последовательности: $n + k - 1$. Из них выберем k позиций для звезд (или $n - 1$ для перегородок). Тогда таких последовательностей:

$$\overline{C}_n^k = \frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!}$$

12 СООТВЕТСТВИЯ И ФУНКЦИИ

12.1 Соответствия

Определение

Пусть даны два множества A и B . **Соответствием** называется подмножество $A \times B$.

Определение

Областью определения G называется $\text{Pr}_A G$

Определение

Областью значений G называется $\text{Pr}_B G$

Определение

Образом элемента a называется множество всех тех элементов b , которые входят в пары $(a, b) \in G$

$$G(a) = \{b : (a, b) \in G\}$$

Определение

Прообразом элемента b называется множество всех тех элементов a , которые входят в пары $(a, b) \in G$

$$G^{-1}(b) = \{a : (a, b) \in G\}$$

Определение

Соответствие называется **полностью определенным**, если его областью определения является множество A .

Определение

Соответствие называется **сюрьективным**, если его областью значений является множество B

Определение

Соответствие называется **инъективным**, если каждый элемент в области значений имеет ровно один прообраз

Определение

Соответствие называется **функциональным**, если каждый элемент в его области определения имеет не более одного образа

Определение

Соответствие называется **биективным**, если:

1. Является полностью определенным
2. Функциональным
3. инъективным
4. Сюръективным

Важно

Отображение "в" если оно не является сюръективным, и "на" в противоположном случае.

12.2 Функции

Определение

Функция – это всюду определенное и функциональное соответствие

Определение

Функция называется **инъективной**, если разным аргументам соответствуют разные значения

Определение

Функция называется **сюръективной**, если все элементы множества значений "покрыты"

Определение

Функция называется **биективной**, если она является сюръективной и инъективной.

Определение

Для любого соответствия $R \subseteq A \times B$ можно определить **обратное соответствие** $R^{-1} \subseteq B \times A$

Важно

Обратное соответствие будет функцией тогда и только тогда, когда функция биективна

13 ВЗАИМНО ОДНОЗНАЧНЫЕ СООТВЕТСТВИЯ И МОЩНОСТЬ МНОЖЕСТВ

Определение

Соответствие называется **взаимно-однозначным**, если оно сюръективно и инъективно (каждому элементу A сопоставляется ровно один элемент B)

13.1 Установление взаимно-однозначного соответствия между множествами чисел

Теорема

Множество \mathbb{Z} счетно

Доказательство

Попробуем установить биекцию между \mathbb{N} и \mathbb{Z} . Действительно, если установить соответствие следующим образом ($f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$):

$$f(2n) = n$$

$$f(2n + 1) = -n$$

$$f(1) = 0$$

То окажется, что каждому элементу \mathbb{N} сопоставлен ровно один элемент \mathbb{Z} и наоборот, а значит получена биекция.

Множество \mathbb{Z} счетно.

Теорема

Множество \mathbb{Q} счетно

Доказательство

Составим таблицу:

0	1	-1	2	-2
$\frac{0}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{-2}{2}$
$\frac{0}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{-1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{-2}{3}$
...				

В этой таблице представлены все рациональные числа. Теперь можно пойти "змейкой" и сосчитать все эти числа.

Значит $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$

14 ТЕОРЕМА О ЧИСЛЕ ПОДМНОЖЕСТВ КОНЕЧНОГО МНОЖЕСТВА.

Теорема

Число всех подмножеств конечного множества, состоящего из n элементов, равно 2^n

Доказательство

Каждое подмножество исходного множества можно задать, установив "флаг" каждому его элементу: включать его в подмножество или нет. Всего два варианта, а значит по правилу произведения всего вариантов подмножеств:

$$2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 = 2^n$$

15 ЧИСЛО ПОДМНОЖЕСТВ СЧЕТНОГО МНОЖЕСТВА.

Теорема

Множество всех подмножеств счетного множества несчетно

Доказательство

Предположим, что все подмножества данного счетного множества можно пронумеровать: A_1, A_2, \dots, A_n и построим множество D , противоречащее допущению, по следующему правилу:

Число n входит в D тогда и только тогда, когда оно не входит в A_n

$$D = \{n \in \mathbb{N} : n \notin A_n\}$$

Но тогда получим противоречие: D – корректно построенное множество натуральных чисел, а значит оно должно являться подмножеством \mathbb{N}

Значит $|\mathbb{N}| \neq |2^{\mathbb{N}}|$

16 ТЕОРЕМА КАНТОРА

Теорема

[Теорема Кантора]

Мощность множества всегда меньше мощности множества всех его подмножеств

$$|A| < |2^A|$$

Доказательство

Очевидно, что $|A| \leq |2^A|$, поскольку 2^A содержит в качестве подмножеств все элементы A , а также другие подмножества, сочетающие эти элементы, и пустое множество.

Докажем, что $|A| \neq |2^A|$

Зададим множество B следующим образом:

$$B = \{x \in A : x \notin f(x)\}$$

То есть это множество всех тех x из A , не принадлежащих своим прообразам при биективном отображении f .

Понятно, что $B \in 2^A$, ведь B состоит из элементов A . Попробуем найти прообраз B в множестве A .

Если существует $x_0 \in A$ такое, что $f(x_0) = B$, то получаем противоречие, ведь B составлено из элементов множества A , которых нет в их образе в 2^A . Значит такого x_0 не существует. Но это означает, что у B не существует прообраза в A , а значит не существует и биекции между A и 2^A .

17 ГРАФЫ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГРАФА. ОРИЕНТИРОВАННЫЕ И НЕОРИЕНТИРОВАННЫЕ ГРАФЫ.

Определение

Граф – это отношения инцидентности, заданные на множестве вершин и ребер

$$\Gamma : e \rightarrow (u; v)$$

Определение

Вершина и ребро называются **инцидентными**, если вершина является концом ребра.

Определение

Граф называется **ориентированным**, если в нем упорядочены вершины

18 МАТРИЦА ИНЦИДЕНТНОСТИ.

Определение

Матрица инцидентности – это матрица, в которой по горизонтали расположены вершины, по вертикали – ребра.

В неориентированном графе:

$$e_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если ребро инцидентно вершине} \\ 2, & \text{иначе} \end{cases}$$

В ориентированном графе:

$$e_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если вершина } j \text{ – конец ребра } i \\ 0, & \text{если неинцидентны} \\ -1, & \text{если вершина } j \text{ – начало ребра } i \end{cases}$$

19 МАТРИЦА СМЕЖНОСТИ.

Определение

Матрица смежности – матрица, в которой по горизонтали и вертикали – вершины

$$e_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если вершины смежны} \\ -, & \text{иначе} \end{cases}$$

20 ЛОКАЛЬНАЯ СТЕПЕНЬ ВЕРШИНЫ. ВЕКТОР ЛОКАЛЬНЫХ СТЕПЕНЕЙ.

Определение

Степень вершины – это количество ребер, инцидентных вершине

Определение

Вектор степеней – вектор, составленный из степеней всех вершин графа, расположенных по убыванию