Высшая алгебра. Экзамен.

28 декабря 2025 г.

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

1 МАТРИЦА. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СЛОЖЕНИЯ МАТРИЦ, УМНОЖЕНИЯ МАТРИЦЫ НА ЧИСЛО, СВОЙСТВА

1.1 Матрица

Определение

Матрица – прямоугольная таблица чисел $m \times n$

1.2 Действия над матрицами

Определение

Сложение матриц – операция над матрицами, при которой складываются их соответственные элементы. Для матриц разных размеров операция не определена.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Определение

Умножение матрицы на число – операция, при которой каждый элемент матрицы умножается на данное число.

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

2 ОПРЕДЕЛЕНИЕ И СВОЙСТВА ОПЕРАЦИИ УМНОЖЕНИЯ МАТРИЦ

2.1 Умножение матриц

Определение

Умножение матрицы на матрицу – это операция над двумя матрицами, при которой каждый i-й элемент n-й строки первой матрицы умножается на i-ый элемент n-го столбца второй матрицы, после чего все такие произведения суммируются

$$A \cdot B = C$$

, где

$$c_{ij} = \sum_{t=1}^{k} a_{it} b_{tj}$$

2.2 Свойства умножения матриц

1. $A(BC) = (AB)C$
2. $A(B + C) = AB + AC$
3. $(B + C)D = BD + CD$

Важно

Умножение матриц не коммутативно!

$$AB \neq BA$$

3 ТРАНСПОНИРОВАНИЕ МАТРИЦЫ. СВОЙСТВА

Определение

Транспонирование матрицы – процесс преобразование матрицы, при котором столбцы становятся строками, а строки – столбцами.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Свойства транспонирования матрицы:

1. $(A^T)^T = A$
2. $A^T + B^T = (A + B)^T$
3. $\lambda A^T = (\lambda A)^T$
4. $(AB)^T = B^T A^T$
5. $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$
6. $\det A = \det A^T$
7. $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} A^T$

4 ОТДЕЛЬНЫЕ ВИДЫ МАТРИЦ: КВАДРАТНАЯ, ТРЕУГОЛЬНАЯ, ДИАГОНАЛЬНАЯ, ЕДИНИЧНАЯ. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И СВОЙСТВА

4.1 Виды матриц

Определение

Матрица называется **квадратной**, если число ее строк равно числу ее столбцов

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Свойства квадратной матрицы:

1. Можно вычислить определитель
2. Может быть обратимой, если $\det A \neq 0$
3. Можно возводить в целую степень

Определение

Матрица называется **верхнетреугольной**, если она является квадратной, а **под** ее главной диагональю все элементы равны нулю

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Определение

Матрица называется **нижнетреугольной**, если она является квадратной, а **над** ее главной диагональю все элементы равны нулю

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Свойства треугольных матриц:

1. Определитель равен произведению диагональных элементов
2. Обратная к треугольной матрице (если существует) тоже треугольная того же типа
3. Произведение двух верхних (нижних) треугольных матриц — верхняя (нижняя) треугольная матрица

Определение

Матрица называется **диагональной**, если все ее элементы, кроме тех, что лежат на главной диагонали, равны нулю

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Свойства диагональной матрицы:

1. Определитель равен произведению диагональных элементов
2. Обратная: $D^{-1} = \operatorname{diag}\left(d_1^{-1}, d_2^{-1}, \ldots\right)$
3. Возведение в степень: $D^k = \operatorname{diag}\left(d_1^k, d_2^k, \ldots\right)$

Определение

Матрица называется **единичной**, если все элементы ее главной диагонали равны единице, а остальные – нулю

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Свойства единичной матрицы:

1. Нейтральный элемент относительно умножения
2. $\det E = 1$
3. $E^{-1} = E$