

Formelsammlung

Eike Osmer

25. Oktober 2020

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|-----------|---|-----------|
| 1 | Darstellungskonvention | 1 |
| 2 | Vektoranalysis | 2 |
| 2.1 | Vektoralgebra | 2 |
| 2.2 | Koordinatensysteme | 3 |
| 2.3 | Differentialoperatoren | 4 |
| 2.4 | Integralsätze | 4 |
| 2.5 | Was noch? | 4 |
| 3 | Komplexe Funktionen | 4 |
| 4 | Lineare Algebra | 4 |
| 4.1 | Basiswechsel | 4 |
| 5 | Signale und Systeme | 5 |
| 5.1 | Kontinuierliche Signale | 5 |
| 5.1.1 | Fourier-Transformation | 6 |
| 5.1.2 | Laplace-Transformation | 7 |
| 5.2 | Zeitdiskrete Signale | 8 |
| 5.2.1 | z-Transformation | 8 |
| 5.3 | Zeit- & Wertediskrete Signale | 8 |
| 6 | Elektrische Netzwerke | 8 |
| 7 | Klassische Elektrodynamik | 9 |
| 8 | Elektronik | 10 |
| 8.1 | Operationsverstärker | 10 |
| 9 | Hochfrequenztechnik | 10 |
| 10 | Fehlerrechnung | 10 |

1 Darstellungskonvention

Skalare Variablen in *Kursivschrift*: x, y, z

Vektorielle Variablen mit einem Pfeil über der Variable: \vec{a}

Variablen für Matrizen in **fetter Schrift**: \mathbf{A}

Komplexe Variablen unterstrichen:

2 Vektoranalysis

2.1 Vektoralgebra

Skalarprodukt

φ ist der kleinere von \vec{A} und \vec{B} eingeschlossene Winkel.

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = ||\vec{A}|| \cdot ||\vec{B}|| \cdot \cos \varphi$$

$$\vec{A} \perp \vec{B}: \vec{A} \cdot \vec{B} = 0$$

Kreuzprodukt

φ ist der kleinere von \vec{A} und \vec{B} eingeschlossene Winkel.
 \vec{n} zeigt in Richtung der Rechten-Hand-Regel.

$$\vec{A} \times \vec{B} = ||\vec{A}|| \cdot ||\vec{B}|| \cdot \sin \varphi \cdot \vec{n}$$

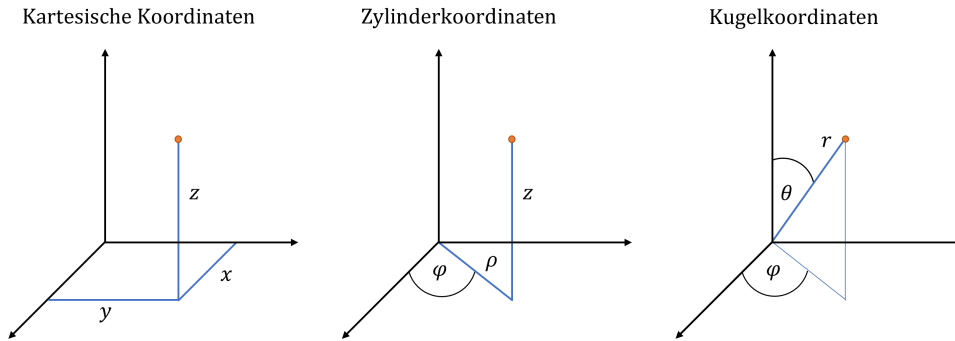
$$\vec{A} \parallel \vec{B}: \vec{A} \times \vec{B} = \vec{0}$$

Richtungsvektor

Zeigt von \vec{A} auf \vec{B} .

$$\vec{r} = \vec{B} - \vec{A}$$

2.2 Koordinatensysteme



| | Kartesische Koordinaten | Zylinderkoordinaten | Kugelkoordinaten |
|--|---|--|--|
| Parametrisierung | $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos(\varphi) \\ \rho \sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2 + y^2} \\ \text{atan2}(\frac{y}{x}) \\ z \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \sin(\theta) \\ r \sin(\varphi) \sin(\theta) \\ r \cos(\theta) \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \text{atan2}(\frac{y}{x}) \end{pmatrix}$ |
| Definitionsbereich | $-\infty < x < \infty$ $-\infty < y < \infty$ $-\infty < z < \infty$ | $0 \leq \rho < \infty$ $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ $-\infty < z < \infty$ | $0 \leq r < \infty$ $0 \leq \theta \leq \pi$ $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ |
| Transformationsmatrix | $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ | $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ | $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) \sin(\theta) & \cos(\varphi) \cos(\theta) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) \sin(\theta) & \sin(\varphi) \cos(\theta) & \cos(\varphi) \\ \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \end{bmatrix}$ |
| inverse Transformationsmatrix | $\mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ | $\mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ | $\mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) \sin(\theta) & \sin(\varphi) \sin(\theta) & \cos(\theta) \\ \cos(\varphi) \cos(\theta) & \sin(\varphi) \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \end{bmatrix}$ |
| Transformation von Vektoren | $\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \mathbf{S} \cdot \begin{pmatrix} a_\rho \\ a_\varphi \\ a_z \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} a_\rho \\ a_\varphi \\ a_z \end{pmatrix} = \mathbf{S}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \mathbf{S} \cdot \begin{pmatrix} a_r \\ a_\theta \\ a_\varphi \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} a_r \\ a_\theta \\ a_\varphi \end{pmatrix} = \mathbf{S}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ |
| Einheitsvektoren in kart. Koordinaten | | | |
| Bogenlängen-Element | $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ | $ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2$ | $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\varphi^2$ |
| Linienelement entlang der Koordinatenlinie | | | |
| Flächenelement der Koordinatenseitenfläche | | | |
| Volumenelement | $dV = dx dy dz$ | $dV = \rho d\rho d\varphi dz$ | $dV = r^2 \sin^2(\theta) dr d\theta d\varphi$ |

2.3 Differentialoperatoren

divgradcurl

| | Kartesische Koordinaten | Zylinderkoordinaten | Kugelkoordinaten |
|--|---|--|---|
| Nabla | | | |
| Gradient | $\nabla a = \text{grad } a = \begin{pmatrix} \frac{\partial a}{\partial x} \\ \frac{\partial a}{\partial y} \\ \frac{\partial a}{\partial z} \end{pmatrix}$ | $\nabla a = \text{grad } a = \begin{pmatrix} \frac{\partial a}{\partial \rho} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial a}{\partial \theta} \\ \frac{\partial a}{\partial z} \end{pmatrix}$ | $\nabla a = \text{grad } a = \begin{pmatrix} \frac{\partial a}{\partial r} \\ \frac{1}{r \sin(\varphi)} \frac{\partial a}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial a}{\partial \varphi} \end{pmatrix}$ |
| Divergenz $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ | $\nabla \cdot \vec{a} = \text{div } \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$ | $\nabla \cdot \vec{a} = \text{div } \vec{a} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho a_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$ | $\nabla \cdot \vec{a} = \text{div } \vec{a} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 a_r) + \frac{1}{r \sin(\varphi)} \frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin(\varphi)} \frac{\partial}{\partial \varphi}(\sin(\varphi) a_\varphi)$ |
| Rotation $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ | $\nabla \times \vec{a} = \text{rot } \vec{a} = \begin{pmatrix} \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \\ \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \\ \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \end{pmatrix}$ | $\nabla \times \vec{a} = \text{rot } \vec{a} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho} \frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} - \frac{\partial a_z}{\partial z} \\ \frac{\partial a_z}{\partial \rho} - \frac{\partial a_\rho}{\partial z} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho a_\theta) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial a_\rho}{\partial \theta} \end{pmatrix}$ | $\nabla \times \vec{a} = \text{rot } \vec{a} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r \sin(\varphi)} \frac{\partial}{\partial \varphi}(\sin(\varphi) a_\theta) - \frac{1}{r \sin(\varphi)} \frac{\partial a_\rho}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r a_\varphi) - \frac{1}{r} \frac{\partial a_\rho}{\partial \varphi} \\ \frac{1}{r \sin(\varphi)} \frac{\partial a_\rho}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r a_\theta) \end{pmatrix}$ |

2.4 Integralsätze

Stokes

$$\oint_{\partial A} \vec{F} d\vec{x} = \iint_A (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{A}$$

∂A ist der Rand der Fläche A

(Satz von Green, usw.?)

2.5 Was noch?

(Wie löst man Kurven- und Oberflächenintegrale)

3 Komplexe Funktionen

4 Lineare Algebra

4.1 Basiswechsel

5 Signale und Systeme

5.1 Kontinuierliche Signale

Energie eines Signals

Energiesignal:

endl. Energie, keine Leistung

$$E_x = \int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} |x(t)|^2 dt$$

(mittlere) Leistung eines Signals

Leistungssignal:

endl. Leistung, unendl. Energie

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt$$

5.1.1 Fourier-Transformation

Relle Fourierreihe

einer T -periodischen Funktion

i.d.R.: $T = 2\pi$

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) \right)$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) dt$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) dt$$

Symmetrieeigenschaften

$$a_k = 0 \Leftrightarrow f(t) \text{ ungerade}$$

$$b_k = 0 \Leftrightarrow f(t) \text{ gerade}$$

Komplexe Fourierreihe

einer T -periodischen Funktion

i.d.R.: $T = 2\pi$

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\frac{2\pi kt}{T}}$$

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-j\frac{2\pi kt}{T}} dt$$

Fourier-Transformation

$$F(j\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

inverse Fourier-Transformation

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(j\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega$$

Eigenschaften

$$f(t) \text{ reell: } \Re\{F(j\omega)\} \text{ gerade, } \Im\{F(j\omega)\} \text{ ungerade}$$

$$f(t) \text{ gerade: } \Im\{F(j\omega)\} = 0$$

$$f(t) \text{ ungerade: } \Re\{F(j\omega)\} = 0$$

Konvergenzbedingung

$f(t)$ muss mind. quadratintegrierbar sein.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty$$

Ähnlichkeitssatz

$$f(bt) \circ \bullet \frac{1}{|b|} F\left(\frac{j\omega}{b}\right)$$

Verschiebungssatz

Zeitverschiebung im Zeitbereich

Phasenverschiebung im Frequenzbereich

$$f(t - t_0) \circ \bullet e^{-j\omega t_0} F(j\omega)$$

Modulationssatz

Multiplikation mit harm. Schwingung

Verschiebung im Frequenzbereich

$$e^{j\omega_0 t} f(t) \circ \bullet F(j(\omega - \omega_0))$$

Differentiationssatz

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} \circ \bullet (j\omega)^n F(j\omega)$$

5.1.2 Laplace-Transformation

komplexe Frequenz

σ : Dämpfung/Verstärkung

$$s = \sigma + j\omega$$

ω : Frequenz

Einseitige Laplace-Transformation

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{j2\pi} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) e^{st} ds$$

inverse Laplace-Transformation

Alternativ: Rücktransformation

mittels Korrespondenz-Tabelle

ggf. Polydivision oder Partialbruchzerlegung notwendig

Konvergenzbedingung

$$\int_{-\infty}^\infty |f(t) e^{-st}|^2 dt < \infty$$

Verschiebungssatz

$$f(t - t_0) \circ \bullet e^{-st_0} F(s)$$

Dämpfungssatz

$$e^{bt} f(t) \circ \bullet F(s - b)$$

Integrationssatz

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \circ \bullet \frac{1}{s} F(s)$$

Differentiationssatz

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} \circ \bullet s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} \frac{d^k f(0)}{dt^k}$$

Multiplikationssatz

$$t^k f(t) \circ \bullet (-1)^k \frac{d^k F(s)}{ds^k}$$

Anfangswertsatz

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$$

Endwertsatz

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

5.2 Zeitdiskrete Signale

| | |
|---|--|
| Länge eines Signals | $N = N_2 - N_1 + 1$ |
| Faltungssumme | $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[h-k]$ $= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k]h[k]$ |
| Zirkulare Zeitumkehr <small>entlang eines Kreises mit Umfang $N - 1$</small> | $y[n] = x[-n \bmod N]$ |
| Zirkulare Verschiebung | $y[n] = x[(n - n_0) \bmod N]$ |

5.2.1 z-Transformation

| | |
|---|---|
| z-Transformation <small>C Geometr. Reihe hilft oft</small> | $X(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n}$ |
| inverse z-Transformation <small>C muss um den Ursprung und im Konvergenzgebiet von $X(z)$ liegen.</small> | $x[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} = \frac{1}{j2\pi} \oint_C X(z) z^{n-1}$ |
| Dämpfungssatz | $a^n x[n] \circ \bullet X\left(\frac{z}{a}\right)$ |
| Multiplikationssatz | $nx[n] \circ \bullet -z \frac{dX(z)}{dz}$ |
| Anfangswertsatz | $\lim_{n \rightarrow 0} x[n] \circ \bullet \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$ |
| Endwertsatz | $\lim_{n \rightarrow \infty} x[n] \circ \bullet \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z)$ |

to-do: Stabilität der z-Transformation

5.3 Zeit- & Wertediskrete Signale

6 Elektrische Netzwerke

7 Klassische Elektrodynamik

Georg.Felder Marinescu

| | Skalare Größe | Vektorielle Größe |
|--|--|---|
| | Differentielle Form | Integrale Form |
| Coulomb'sches Kraftgesetz | | |
| Kraftvektoren zweier Ladungen zeigen von einander weg. $n > 2$: Superposition | $F_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2}$ | $\vec{F}_{C_{12}} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{x}_2 - \vec{x}_1}{ \vec{x}_2 - \vec{x}_1 ^3}$ |
| Elektrische Feldstärke | | |
| $\left[\vec{E} \right] = \frac{V}{m}$ | | $\vec{E}(\vec{x}) = -\text{grad}(\varphi_e) \quad \vec{E}(\vec{x}) = \frac{\vec{F}_{C_{12}}}{q_2} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{x} - \vec{x}_1}{ \vec{x} - \vec{x}_1 ^3}$ |
| Elektrische Potential(feld) | | |
| $[\varphi_e] = V$ Gleiches Potential auf Äquipotentialflächen | $\varphi_e(\vec{x}) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{ \vec{x} - \vec{x}_1 }$ | |
| Elektrische Spannung | | |
| $[U] = V$ | $U_{12} = \varphi_e(\vec{x}_2) - \varphi_e(\vec{x}_1) \\ = - \int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} \vec{E} \, d\vec{s}$ | |
| <hr/> | | |
| Linienladungsdichte | $\lambda = \frac{dq_e}{ds}$ $q_e = \int \lambda \, ds$ | |
| Flächenladungsdichte | $\sigma = \frac{dq_e}{dA}$ $q_e = \iint \sigma \, dA$ | |
| Volumenladungsdichte | $\rho = \frac{dq_e}{dV}$ $q_e = \iiint \rho \, dV$ | |

8 Elektronik

8.1 Operationsverstärker

9 Hochfrequenztechnik

10 Fehlerrechnung