# Formelsammlung

Eike Osmers

20. Oktober 2020

# Inhaltsverzeichnis

# 1 Darstellungskonvention

Skalare Variablen in *Kursivschrift*: $x, y, z$

Vektorielle Variablen mit einem Pfeil über der Variable: $\vec{a}$

Variablen für Matrizen in **fetter Schrift**: $\mathbf{A}$

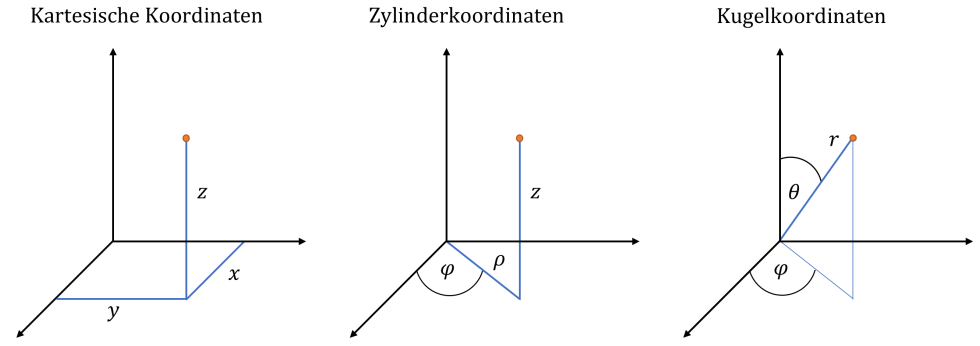
Komplexe Variablen unterstrichen:

# 2 Vektoranalysis

## 2.1 Vektoralgebra

| | |
|---|---|
| **Skalarprodukt**<br>*$\varphi$ ist der kleinere von $\vec{A}$ und $\vec{B}$ eingeschlossene Winkel.* | $\vec{A} \cdot \vec{B} = \|\|\vec{A}\|\| \cdot \|\|\vec{B}\|\| \cdot \cos\varphi$<br>$\vec{A} \perp \vec{B}$: $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$ |
| **Kreuzprodukt**<br>*$\varphi$ ist der kleinere von $\vec{A}$ und $\vec{B}$ eingeschlossene Winkel. $\vec{n}$ zeigt in Richtung der Rechte-Hand-Regel.* | $\vec{A} \times \vec{B} = \|\|\vec{A}\|\| \cdot \|\|\vec{B}\|\| \cdot \sin\varphi \cdot \vec{n}$<br>$\vec{A} \| \vec{B}$: $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{0}$ |
| **Richtungsvektor**<br>*Zeigt von $\vec{A}$ auf $\vec{B}$.* | $\vec{r} = \vec{B} - \vec{A}$ |

## 2.2 Koordinatensysteme




| | Kartesische Koordinaten | Zylinderkoordinaten | Kugelkoordinaten |
|---|---|---|---|
| **Parametrisierung** | $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos(\varphi) \\ \rho\cos(\varphi) \\ z \end{pmatrix}$ <br> $\begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2+y^2} \\ \mathrm{atan2}(\frac{y}{x}) \\ z \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi)\sin(\theta) \\ r\sin(\varphi)\sin(\theta) \\ r\sin(\theta) \end{pmatrix}$ <br> $\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \arccos\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \mathrm{atan2}\left(\frac{y}{x}\right) \end{pmatrix}$ |
| **Definitionsbereich** | $-\infty < x < \infty$ <br> $-\infty < y < \infty$ <br> $-\infty < z < \infty$ | $0 \le \rho < \infty$ <br> $0 \le \varphi \le 2\pi$ <br> $-\infty < z < \infty$ | $0 \le r < \infty$ <br> $0 \le \theta \le \pi$ <br> $0 \le \varphi \le 2\pi$ |
| **Transformationsmatrix** | $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ | $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ | $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi)\sin(\theta) & \cos(\varphi)\cos(\theta) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi)\sin(\theta) & \sin(\varphi)\cos(\theta) & \cos(\varphi) \\ \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \end{bmatrix}$ |
| **inverse Transformationsmatrix** | $\mathbf{S}^{\text{-}\mathbf{1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ | $\mathbf{S}^{\text{-}\mathbf{1}} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ | $\mathbf{S}^{\text{-}\mathbf{1}} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi)\sin(\theta) & \sin(\varphi)\sin(\theta) & \cos(\theta) \\ \cos(\varphi)\cos(\theta) & \sin(\varphi)\cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \end{bmatrix}$ |
| **Transformation von Vektoren** | $\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \mathbf{S} \cdot \begin{pmatrix} a_\rho \\ a_\varphi \\ a_z \end{pmatrix}$ <br> $\begin{pmatrix} a_\rho \\ a_\varphi \\ a_z \end{pmatrix} = \mathbf{S}^{\text{-}\mathbf{1}} \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \mathbf{S} \cdot \begin{pmatrix} a_r \\ a_\theta \\ a_\varphi \end{pmatrix}$ <br> $\begin{pmatrix} a_r \\ a_\theta \\ a_\varphi \end{pmatrix} = \mathbf{S}^{\text{-}\mathbf{1}} \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ |
| **Einheitsvektoren in kart. Koordinaten** | | | |
| **Bogenlängen-Element** | $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2$ | $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\rho^2 + \rho^2\mathrm{d}\varphi^2 + \mathrm{d}z^2$ | $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\theta^2 + r^2\sin^2(\theta)\mathrm{d}\varphi^2$ |
| **Linienelement entlang der Koordinatenlinie** | | | |
| **Flächenelement der Koordinatenseitenfläche** | | | |
| **Volumenelement** | $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z$ | $\mathrm{d}V = \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z$ | $\mathrm{d}V = r^2\sin^2(\theta)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$ |

## 2.3 Differentialoperatoren

### divgradcurl

| | Kartesische Koordinaten | Zylinderkoordinaten | Kugelkoordinaten |
|---|---|---|---|
| **Nabla** | | | |
| **Gradient** | $\nabla a = \text{grad } a = \begin{pmatrix} \frac{\partial a}{\partial x} \\ \frac{\partial a}{\partial y} \\ \frac{\partial a}{\partial z} \end{pmatrix}$ | $\nabla a = \text{grad } a = \begin{pmatrix} \frac{\partial a}{\partial \rho} \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial a}{\partial \theta} \\ \frac{\partial a}{\partial z} \end{pmatrix}$ | $\nabla a = \text{grad } a = \begin{pmatrix} \frac{\partial a}{\partial r} \\ \frac{1}{r\sin(\varphi)}\frac{\partial a}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial a}{\partial \varphi} \end{pmatrix}$ |
| **Divergenz** $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ | $\nabla \cdot \vec{a} = \text{div } \vec{a} =$ $\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$ | $\nabla \cdot \vec{a} = \text{div } \vec{a} =$ $\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho a_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$ | $\nabla \cdot \vec{a} = \text{div } \vec{a} =$ $\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 a_r) + \frac{1}{r\sin(\varphi)}\frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin(\varphi)}\frac{\partial}{\partial \varphi}(\sin(\varphi)\, a_\varphi)$ |
| **Rotation** $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ | $\nabla \times \vec{a} = \text{rot } \vec{a} =$ $\begin{pmatrix} \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \\ \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \\ \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \end{pmatrix}$ | $\nabla \times \vec{a} = \text{rot } \vec{a} =$ $\begin{pmatrix} \frac{1}{\rho}\frac{\partial a_z}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial a_\rho}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial \rho} \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho a_\theta) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial a_\rho}{\partial \theta} \end{pmatrix}$ | $\nabla \times \vec{a} = \text{rot } \vec{a} =$ $\begin{pmatrix} \frac{1}{r\sin(\varphi)}\frac{\partial}{\partial \varphi}(\sin(\varphi) a_\theta) - \frac{1}{r\sin(\varphi)}\frac{\partial a_\varphi}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r a_\varphi) - \frac{1}{r}\frac{\partial a_r}{\partial \varphi} \\ \frac{1}{r\sin(\varphi)}\frac{\partial a_r}{\partial \theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r a_\theta) \end{pmatrix}$ |

## 2.4 Differential- und Integrationsregeln

(Wie löst man Kurven- und Oberflächenintegrale)
(Satz von Green, Stokes, usw.?)

# 3 Komplexe Funktionen

# 4 Lineare Algebra

## 4.1 Basiswechsel

# 5 Signale und Systeme

## 5.1 Kontinuierliche Signale

**Energie eines Signals**

Energiesignal:

*endl. Energie, keine Leistung*

$$E_x = \int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} |x(t)|^2 \, \mathrm{d}t$$

**(mittlere) Leistung eines Signals**

Leistungssignal:

*endl. Leistung, unendl. Energie*

$$P_x = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 \, \mathrm{d}t$$

### 5.1.1 Fourier-Transformation

**Relle Fourierreihe**

*einer T-periodischen Funktion*

i.d.R.: $T = 2\pi$

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos\left(\frac{2\pi k t}{T}\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k t}{T}\right)\right)$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\left(\frac{2\pi k t}{T}\right)\,\mathrm{d}t$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\left(\frac{2\pi k t}{T}\right)\,\mathrm{d}t$$

**Symmetrieeigenschaften**

$$a_k = 0 \Leftrightarrow f(t) \text{ ungerade}$$

$$b_k = 0 \Leftrightarrow f(t) \text{ gerade}$$

**Komplexe Fourierreihe**

*einer T-periodischen Funktion*

i.d.R.: $T = 2\pi$

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( c_k\, \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{j}2\pi k t}{T}} \right)$$

$$c_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{j}2\pi k t}{T}}\,\mathrm{d}t$$

### 5.1.2 Laplace-Transformation

## 5.2 Zeitdiskrete Signale

| | |
|---|---|
| **Länge eines Signals** | $N = N_2 - N_1 + 1$ |
| **Faltungssumme** | $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[h-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k]h[k]$ |
| **Zirkulare Zeitumkehr** *entlang eines Kreises mit Umfang $N-1$* | $y[n] = x\left[-n \,\mathrm{modulo}(N)\right]$ |
| **Zirkulare Verschiebung** | $y[n] = x\left[(n-n_0) \,\mathrm{modulo}(N)\right]$ |

### 5.2.1 z-Transformation

## 5.3 Zeit- & Wertediskrete Signale

# 6 Elektrische Netzwerke

# 7 Klassische Elektrodynamik

**Georg.Felder Marinescu**

## 7.1 Elektrostatik

| | Skalare Größe | Vektorielle Größe |
|---|---|---|
| **Coulomb'sches Kraftgesetz**<br>Kraftvektoren zweier Ladungen<br>zeigen von einander weg.<br>$n > 2$: Superposition | $F_C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2}$<br>$= -\frac{\partial E_C}{\partial r}$ | $\vec{F}_{C_{12}} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{x}_2 - \vec{x}_1}{\lvert\lvert\vec{x}_2 - \vec{x}_1\rvert\rvert^3}$ |
| **Elektrische Feldstärke**<br>$[\vec{E}] = \frac{V}{m}$ | | $\vec{E}(\vec{x}) = -\operatorname{grad}(\varphi_e)$<br>$= \frac{\vec{F}_{C_{12}}}{q_2} = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{x} - \vec{x}_1}{\lvert\lvert\vec{x} - \vec{x}_1\rvert\rvert^3}$ |
| **Elektrische Potential(feld)**<br>$[\varphi_e] = V$<br>Gleiches Potential auf Äquipotentialflächen | $\varphi_e(\vec{x}) = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{\lvert\lvert\vec{x} - \vec{x}_1\rvert\rvert}$ | |
| **Elektrische Spannung**<br>$[U] = V$ | $U_{12} = \varphi_e(\vec{x}_1) - \varphi_e(\vec{x}_2)$<br>$= \int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} \vec{E}\, d\vec{s}$ | |

| | | |
|---|---|---|
| **Linienladungsdichte**<br>$[\lambda] = \frac{C}{m}$ | $\lambda = \frac{dq_e}{ds}$<br>$q_e = \int \lambda\, ds$ | |
| **Flächenladungsdichte**<br>$[\sigma] = \frac{C}{m^2}$ | $\sigma = \frac{dq_e}{dA}$<br>$q_e = \iint \sigma\, dA$ | |
| **Volumenladungsdichte**<br>$[\rho] = \frac{C}{m^3}$ | $\rho = \frac{dq_e}{dV}$<br>$q_e = \iiint \rho\, dV$ | |

# 8 Elektronik

## 8.1 Operationsverstärker

# 9 Hochfrequenztechnik

# 10 Fehlerrechnung