Formelsammlung

Eike Osmers

5. November 2020

Inhaltsverzeichnis

1 Darstellungskonvention

Skalare Variablen in *Kursivschrift*: x, y, z

Vektorielle Variablen mit einem Pfeil über der Variable: $\vec{a}$

Variablen für Matrizen in **fetter Schrift**: $\mathbf{A}$

Komplexe Variablen unterstrichen:

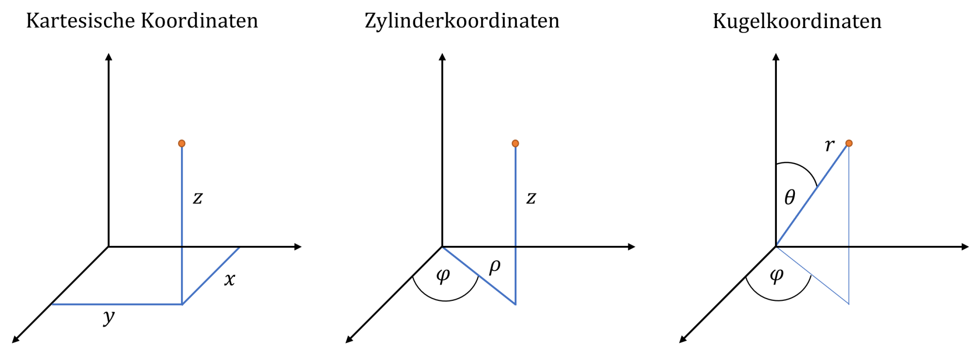
2 Analysis

3 Vektoranalysis

3.1 Vektoralgebra

Skalarprodukt *φ ist der kleinere von $\vec{A}$ und $\vec{B}$ eingeschlossene Winkel.*	$\vec{A} \cdot \vec{B} = \|\|\vec{A}\|\| \cdot \|\|\vec{B}\|\| \cdot \cos\varphi$ $\vec{A} \perp \vec{B}$: $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$
Kreuzprodukt *φ ist der kleinere von $\vec{A}$ und $\vec{B}$ eingeschlossene Winkel. $\vec{n}$ zeigt in Richtung der Rechte-Hand-Regel.*	$\vec{A} \times \vec{B} = \|\|\vec{A}\|\| \cdot \|\|\vec{B}\|\| \cdot \sin\varphi \cdot \vec{n}$ $\vec{A} \| \vec{B}$: $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{0}$
Richtungsvektor *Zeigt von $\vec{A}$ auf $\vec{B}$.*	$\vec{r} = \vec{B} - \vec{A}$
Tangentenvektor	$\dfrac{\partial \vec{x}}{\partial u}$
Fächennormal *Steht immer senkrecht auf der Fläche.*	$\vec{n} = \dfrac{\partial \vec{x}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \vec{x}}{\partial v}$

3.2 Koordinatensysteme



	Kartesische Koordinaten	**Zylinderkoordinaten**	**Kugelkoordinaten**
Parametrisierung	$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos(\varphi) \\ \rho\cos(\varphi) \\ z \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2+y^2} \\ \mathrm{atan2}(\frac{y}{x}) \\ z \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi)\sin(\theta) \\ r\sin(\varphi)\sin(\theta) \\ r\sin(\theta) \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \arccos\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \mathrm{atan2}\left(\frac{y}{x}\right) \end{pmatrix}$
Definitionsbereich	$-\infty < x < \infty$ $-\infty < y < \infty$ $-\infty < z < \infty$	$0 \leq \rho < \infty$ $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ $-\infty < z < \infty$	$0 \leq r < \infty$ $0 \leq \theta \leq \pi$ $0 \leq \varphi \leq 2\pi$
Transformationsmatrix	$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi)\sin(\theta) & \cos(\varphi)\cos(\theta) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi)\sin(\theta) & \sin(\varphi)\cos(\theta) & \cos(\varphi) \\ \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \end{bmatrix}$
inverse Transformationsmatrix	$\mathbf{S}^{\mathbf{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\mathbf{S}^{\mathbf{-1}} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\mathbf{S}^{\mathbf{-1}} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi)\sin(\theta) & \sin(\varphi)\sin(\theta) & \cos(\theta) \\ \cos(\varphi)\cos(\theta) & \sin(\varphi)\cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \end{bmatrix}$
Transformation von Vektoren	$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \mathbf{S} \cdot \begin{pmatrix} a_\rho \\ a_\varphi \\ a_z \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} a_\rho \\ a_\varphi \\ a_z \end{pmatrix} = \mathbf{S}^{\mathbf{-1}} \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \mathbf{S} \cdot \begin{pmatrix} a_r \\ a_\theta \\ a_\varphi \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} a_r \\ a_\theta \\ a_\varphi \end{pmatrix} = \mathbf{S}^{\mathbf{-1}} \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$
Einheitsvektoren in kart. Koordinaten			
Bogenlängen-Element	$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2$	$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\rho^2 + \rho^2\mathrm{d}\varphi^2 + \mathrm{d}z^2$	$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\theta^2 + r^2\sin^2(\theta)\mathrm{d}\varphi^2$
Linienelement entlang der Koordinatenlinie			
Flächenelement der Koordinatenseitenfläche			
Volumenelement	$\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z$	$\mathrm{d}V = \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z$	$\mathrm{d}V = r^2\sin^2(\theta)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$

3.3 Differentialoperatoren

divgradcurl

	Kartesische Koordinaten	Zylinderkoordinaten	Kugelkoordinaten
Nabla	$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$	$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \rho} \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \phi} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$	$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi} \end{pmatrix}$
Gradient *(eines Skalarfeldes)*	$\nabla a = \text{grad }\ a = \begin{pmatrix} \frac{\partial a}{\partial x} \\ \frac{\partial a}{\partial y} \\ \frac{\partial a}{\partial z} \end{pmatrix}$	$\nabla a = \text{grad }\ a = \begin{pmatrix} \frac{\partial a}{\partial \rho} \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial a}{\partial \theta} \\ \frac{\partial a}{\partial z} \end{pmatrix}$	$\nabla a = \text{grad }\ a = \begin{pmatrix} \frac{\partial a}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial a}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial a}{\partial \varphi} \end{pmatrix}$
Divergenz $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$	$\nabla \cdot \vec{a} = \text{div }\ \vec{a} =$ $\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$	$\nabla \cdot \vec{a} = \text{div }\ \vec{a} =$ $\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho a_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$	$\nabla \cdot \vec{a} = \text{div }\ \vec{a} =$ $\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 a_r) + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin(\theta)\, a_\theta) + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi}$
Rotation $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$	$\nabla \times \vec{a} = \text{rot }\ \vec{a} =$ $\begin{pmatrix} \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \\ \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \\ \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \end{pmatrix}$	$\nabla \times \vec{a} = \text{rot }\ \vec{a} =$ $\begin{pmatrix} \frac{1}{\rho}\frac{\partial a_z}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial a_\rho}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial \rho} \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho a_\theta) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial a_\rho}{\partial \theta} \end{pmatrix}$	$\nabla \times \vec{a} = \text{rot }\ \vec{a} =$ $\frac{1}{r}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sin(\varphi)}\left(\frac{\partial}{\partial \varphi}(\sin(\varphi)a_\theta) - \frac{\partial a_\varphi}{\partial \theta}\right) \\ \frac{\partial}{\partial r}(r a_\varphi) - \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} \\ \frac{1}{\sin(\varphi)}\frac{\partial a_r}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial r}(r a_\theta) \end{pmatrix}$

3.4 Integralsätze

Stokes *∂A ist der Rand der Fläche A*	$\oint_{\partial A} \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{x} = \iint_A \nabla \times \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{A}$
Gauß *∂V ist die Oberfläche des Volumens V*	$\oint_{\partial V} \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{A} = \iiint_V \nabla \cdot \vec{F}\,\mathrm{d}V$

3.5 Was noch?

(Wie löst man Kurven- und Oberflächenintegrale)

4 Komplexe Funktionen

5 Lineare Algebra

5.1 Basiswechsel

6 Signale und Systeme

6.1 Kontinuierliche Signale

Energie eines Signals Energiesignal: *endl. Energie, keine Leistung*	$E_x = \int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} \lvert x(t)\rvert^2 \,\mathrm{d}t$
(mittlere) Leistung eines Signals Leistungssignal: *endl. Leistung, unendl. Energie*	$P_x = \lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \lvert x(t)\rvert^2 \,\mathrm{d}t$

6.1.1 Fourier-Transformation

Relle Fourierreihe *einer T-periodischen Funktion* i.d.R.: $T = 2\pi$	$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)\right)$ $a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t$ $a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)\,\mathrm{d}t$ $b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)\,\mathrm{d}t$
Symmetrieeigenschaften	$a_k = 0 \Leftrightarrow f(t)$ ungerade $b_k = 0 \Leftrightarrow f(t)$ gerade
Komplexe Fourierreihe *einer T-periodischen Funktion* i.d.R.: $T = 2\pi$	$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(c_k\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{j}2\pi kt}{T}}\right)$ $c_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{j}2\pi kt}{T}}\,\mathrm{d}t$
Fourier-Transformation	$F(\mathrm{j}\omega) = \mathcal{F}\{f(t\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t$
inverse Fourier-Transformation	$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\mathrm{j}\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\mathrm{j}\omega)\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}\omega$
Eigenschaften	$f(t)$ reell: $\Re\{F(\mathrm{j}\omega)\}$ gerade, $\Im\{F(\mathrm{j}\omega)\}$ ungerade $f(t)$ gerade: $\Im\{F(\mathrm{j}\omega)\} = 0$ $f(t)$ ungerade: $\Re\{F(\mathrm{j}\omega)\} = 0$
Konvergenzbedingung *$f(t)$ muss mind. quadratintegrierbar sein.*	$\int_{-\infty}^{\infty} \|f(t)\|^2\,\mathrm{d}t < \infty$
Ähnlichkeitssatz	$f(bt) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{\|b\|}F\left(\frac{\mathrm{j}\omega}{b}\right)$
Verschiebungssatz *Zeitverschiebung im Zeitbereich* *Phasenverschiebung im Frequenzbereich*	$f(t-t_0) \circ\!\!-\!\!\bullet \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}F(\mathrm{j}\omega)$
Modulationssatz *Multiplikation mit harm. Schwingung* *Verschiebung im Frequenzbereich*	$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F\left(\mathrm{j}(\omega-\omega_0)\right)$
Differentiationssatz	$\frac{d^n f(t)}{dt^n} \circ\!\!-\!\!\bullet (\mathrm{j}\omega)^n F(\mathrm{j}\omega)$

6.1.2 Laplace-Transformation

komplexe Frequenz

σ: Dämpfung/Verstärkung

ω: Frequenz

$$s = \sigma + \mathrm{j}\omega$$

Einseitige Laplace-Transformation

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t$$

inverse Laplace-Transformation

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{\mathrm{j}2\pi}\int_{c-\mathrm{j}\infty}^{c+\mathrm{j}\infty} F(s)\,\mathrm{e}^{st}\,\mathrm{d}s$$

Alternativ: Rücktransformation mittels Korrespondenz-Tabelle

ggf. Polydivision oder Partialbruchzerlegung notwendig

Konvergenzbedingung

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)\,\mathrm{e}^{-st}|^2\,\mathrm{d}t < \infty$$

Verschiebungssatz

$$f(t-t_0) \circ\!\!-\!\!\bullet\; \mathrm{e}^{-st_0}F(s)$$

Dämpfungssatz

$$\mathrm{e}^{bt}f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; F(s-b)$$

Integrationssatz

$$\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau \circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{1}{s}F(s)$$

Differentiationssatz

$$\frac{\mathrm{d}^n f(t)}{\mathrm{d}t^n} \circ\!\!-\!\!\bullet\; s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1}\;\frac{\mathrm{d}^k f(0)}{\mathrm{d}t^k}$$

Multiplikationssatz

$$t^k f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; (-1)^k\;\frac{\mathrm{d}^k F(s)}{\mathrm{d}s^k}$$

Anfangswertsatz

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$

Endwertsatz

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

6.2 Zeitdiskrete Signale

Länge eines Signals	$N = N_2 - N_1 + 1$
Faltungssumme	$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[h-k] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k]h[k] \end{aligned}$$
Zirkulare Zeitumkehr *entlang eines Kreises mit Umfang $N - 1$*	$y[n] = x\left[-n \bmod N\right]$
Zirkulare Verschiebung	$y[n] = x\left[(n - n_0) \bmod N\right]$

Energie eines Signals Energiesignal: *endl. Energie, keine Leistung*	$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lvert x[n] \rvert^2$$
mittlere Leistung einer periodischen Folge Leistungssignal: *endl. Leistung, unendl. Energie*	$$P_x = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \lvert x[n] \rvert^2$$
mittlere Leistung einer aperiodischen Folge Leistungssignal: *endl. Leistung, unendl. Energie*	$$P_x = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{2k+1} \sum_{n=-k}^{k} \lvert x[n] \rvert^2$$

6.2.1 z-Transformation

Zur Angabe der z-Transformierten gehört immer die Angabe des Konvergenzgebietes (Region of Convergence, RoC), da es sonst keine eindeutige Umkehrung der z-Transformation gibt.

	Transformation	Konvergenzgebiet
z-Transformation *Geometr. Reihe hilft oft*	$X(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, z^{-n}$	R_x
inverse z-Transformation *C muss um den Ursprung und im Konvergenzgebiet von $X(z)$ liegen.*	$x[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} = \frac{1}{\mathrm{j}2\pi} \oint_C X(z)\, z^{n-1}\, \mathrm{d}z$	
Zeitverschiebung	$x[n-n_0] ○\!\!-\!\!\bullet\ z^{-n_0}\, X(z)$	R_x, evtl. Änderung bei $z=0$ und $z=\infty$
Zeitumkehr	$x[-n] ○\!\!-\!\!\bullet X\left(\frac{1}{z}\right)$	$\frac{1}{Rx}$
Dämpfungssatz	$a^n\, x[n] ○\!\!-\!\!\bullet\ X\left(\frac{z}{a}\right)$	$\lvert a\rvert R_x$
Multiplikationssatz	$nx[n] ○\!\!-\!\!\bullet\ -z\, \frac{\mathrm{d}X(z)}{\mathrm{d}z}$	R_x, evtl. Änderung bei $z=0$ und $z=\infty$
Anfangswertsatz	$\lim_{n\to 0} x[n] ○\!\!-\!\!\bullet\ \lim_{z\to\infty} X(z)$	
Endwertsatz	$\lim_{n\to\infty} x[n] ○\!\!-\!\!\bullet\ \lim_{z\to 1}(z-1)X(z)$	

to-do: Stabilität der z-Transformation

6.3 Zeit- & Wertediskrete Signale

7 Elektrische Netzwerke

Modified Node Analysis (PaBe Kochrezept im Ordner)

7.1 passive Bauelemente

Ersatzschaltbilder von R und C und L

0. Ordnung R: R

1. Ordnung R: L+R oder C——R

2. Ordnung R: (R——C)+L oder (L+R)——C

1. Ordnung C: C+R oder C——R

Universal ESB C: Ls + Rs + (Rp —— R(f) —— C)

1. Ordnung L: L + R

Güte Reihen- und Parallelschwingkreis

7.2 Netzwerkparameter

siehe PaBe Kapitel 5

8 Klassische Elektrodynamik

Georg.Felder Marinescu

	Skalare Größe	Vektorielle Größe Differentielle Form	Integrale Form
Maxwell Gleichungen			
Elektrostatik			
Coulomb'sches Kraftgesetz Kraftvektoren zweier Ladungen zeigen von einander weg. $n > 2$: Superposition	$F_C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2}$		$\vec{F}_{C_{12}} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{x}_2 - \vec{x}_1}{\lvert\lvert\vec{x}_2 - \vec{x}_1\rvert\rvert^3}$
Elektrische Feldstärke $\left[\vec{E}\right] = \frac{V}{m}$		$\vec{E}(\vec{x}) = -\operatorname{grad}(\varphi_e)$	$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{\vec{F}_{C_{12}}}{q_2} = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{x} - \vec{x}_1}{\lvert\lvert\vec{x} - \vec{x}_1\rvert\rvert^3}$
Elektrische Potential(feld) $[\varphi_e] = V$ Gleiches Potential auf Äquipotentialflächen	$\varphi_e(\vec{x}) = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{\lvert\lvert\vec{x} - \vec{x}_1\rvert\rvert}$		
Elektrische Spannung $[U] = V$	$U_{12} = \varphi_e(\vec{x}_2) - \varphi_e(\vec{x}_1) = -\int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} \vec{E}\, d\vec{s}$		
Linienladungsdichte $[\lambda] = \frac{C}{m}$		$\lambda = \frac{dq_e}{ds}$	$q_e = \int \lambda\, ds$
Flächenladungsdichte $[\sigma] = \frac{C}{m^2}$		$\sigma = \frac{dq_e}{dA}$	$q_e = \iint \sigma\, dA$
Volumenladungsdichte $[\rho] = \frac{C}{m^3}$		$\rho = \frac{dq_e}{dV}$	$q_e = \iiint \rho\, dV$

Maxwellgleichungen für verschiedene Anwendungsfälle (allgemein, Elektrostatik, quasistatisch, stationär quasistationär (siehe PaBe Kap. 1),

9 Elektronik

9.1 Operationsverstärker

10 Hochfrequenztechnik

11 Fehlerrechnung