

抽象代数习题

Omnscent

2022 年 3 月 2 日

1 群、环、体、域的基本概念

1.0 预备知识

问题 1.

设 X 和 Y 是两个集合, $f: X \rightarrow Y$ 和 $g: Y \rightarrow X$ 是两个映射. 如果 $g \circ f = \text{id}_X$, 则称 g 为 f 的一个左逆; 如果 $f \circ g = \text{id}_Y$, 则称 g 为 f 的一个右逆. 如果 g 既是 f 的左逆又是 f 的右逆, 则称 g 为 f 的一个逆. 证明

- (1) f 有左逆当且仅当 f 是单射;
- (2) f 有右逆当且仅当 f 是满射;
- (3) f 有逆当且仅当 f 是双射;
- (4) 如果 f 有左逆 g , 同时又有右逆 h , 则 $g = h$;
- (5) 如果 f 有逆, 则 f 的逆唯一, f 的逆记为 f^{-1} ;
- (6) 如果 f 有逆, 则 $(f^{-1})^{-1} = f$.

问题 2.

举例说明等价关系的定义中的三个条件是相互独立的 (即任意两条不蕴含剩下的一条).

1.1 群的基本概念

问题 1.

证明群的定义可以简化为: 如果一个非空集合 G 上定义了一个二元运算 \circ , 满足:

- (1) 结合律: $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c) (\forall a, b, c \in G)$;
- (2) 存在左幺元: 存在 $e \in G$, 使得对任意的 $a \in G$, 都有

$$e \circ a = a;$$

- (3) 存在左逆元: 对任意的 $a \in G$, 存在 $b \in G$, 使得

$$b \circ a = e,$$

则 G 关于运算 \circ 构成一个群.

问题 2.

举例说明: 在上题中将条件 (3) 改为“存在右逆元: 对任意的 $a \in G$, 存在 $b \in G$, 使得 $a \circ b = e$ ”, 则 G 不一定是群.

问题 3.

设 G 是一个非空集合, 其中定义了一个二元运算 \circ . 证明: 如果此运算满足结合律, 并且对于 G 中任意两个元素 a, b , 方程 $a \circ x = b$ 和 $y \circ a = b$ 都在 G 中有解, 则 (G, \circ) 是群.

问题 4.

设 G 是一个非空的有限集合, 其中定义了一个二元运算 \circ . 证明: 如果此运算满足结合律, 并且对于 G 中任意的三个元素 a, b, c , 都有 (左消去律) $ab = ac \Rightarrow b = c$ 以及 (右消去律) $ba = ca \Rightarrow b = c$, 则 (G, \circ) 是群.

问题 5.

设 G 是群, $a, b \in G$, 如果 $aba^{-1} = b^r$, 证明 $a^i ba^{-i} = b^{r^i}$.

问题 6.

证明不存在恰有两个 2 阶元素的群.

问题 7.

设 G 是群. 如果对于任意的 $a, b \in G$, 都有 $(ab)^2 = a^2b^2$, 证明 G 是交换群. 并由此证明: 如果 $\exp(G) = 2$, 则 G 交换.

问题 8.

在 S_3 中找出两个元素 x, y , 使得 $(xy)^2 \neq x^2y^2$.

问题 9.

设 G 是群, i 为任意确定的正整数. 如果对于任意的 $a, b \in G$, 都有 $(ab)^k = a^k b^k, k = i, i + 1, i + 2$, 证明 G 是交换群.

问题 10.

证明: 群 G 为交换群当且仅当 $x \mapsto x^{-1} (x \in G)$ 是同构映射.

问题 11.

设 S 是群 G 的非空子集, 在 G 中定义一个二元关系 “ \sim ”: $a \sim b \iff ab^{-1} \in S$. 证明 \sim 是一个等价关系当且仅当 S 是 G 的子群.

问题 12.

设 H, K 为群 G 的子群, 证明 $HK \leq G$ 当且仅当 $HK = KH$.

问题 13.

设 $n \in \mathbb{Z}$, 则 $n\mathbb{Z}$ 是整数加法群 \mathbb{Z} 的子群. 并证明 $n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$.

问题 14.

证明: S_4 的子集 $B = \{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ 是一个子群, 且 B 与四次单位根群 μ_4 不同构.

问题 15.

令

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} e^{\frac{2\pi i}{n}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{2\pi i}{n}} \end{pmatrix},$$

证明集合 $\{B, B^2, \dots, B^n, AB, AB^2, \dots, AB^n\}$ 在矩阵乘法下构成群, 并且此群与二面体群 D_{2n} 同构.

问题 16.

证明偶数阶群中必有元素 $a \neq e$, 满足 $a^2 = e$.

问题 17.

对 $n > 2$, 证明在有限群 G 中阶为 n 的元素个数是偶数.

问题 18.

对于群中的任意二元素 a, b , 证明 ab 与 ba 的阶相等.

问题 19.

在群 $SL_2(\mathbb{Q})$ 中, 证明元素

$$a = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

的阶为 4, 元素

$$b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

的阶为 3, 而 ab 为无限阶元素.

问题 20.

设 G 是交换群, 证明 G 中的全体有限阶元素构成 G 的一个子群.

问题 21.

如果 G 只有有限多个子群, 证明 G 是有限群.

问题 22.

设 H, K 为有限群 G 的子群, 证明 $|HK| = \frac{|H| \cdot |K|}{|H \cap K|}$.

问题 23.

证明指数为 2 的子群必为正规子群.

问题 24.

证明不存在恰有两个指数为 2 的子群的群.

问题 25.

写出二面体群 D_{20} 的全部正规子群.

问题 26.

设 S 为 G 的非空子集, 令

$$C_G(S) = \{x \in G | xa = ax, \forall a \in S\},$$
$$N_G(S) = \{x \in G | xSx^{-1} = S\}$$

($C_G(S)$ 和 $N_G(S)$ 分别称为 S 在 G 中的中心化子和正规化子). 证明:

- (1) $C_G(S)$ 和 $N_G(S)$ 都是 G 的子群;
- (2) $C_G(S) \trianglelefteq N_G(S)$.

问题 27.

设 H, K 为 G 的正规子群, 证明:

- (1) $HK = KH$;
- (2) $HK \trianglelefteq G$;
- (3) 如果 $H \cap K = \{e\}$, 则 G 同构于 $G/H \oplus G/K$ 的子群.

问题 28.

设 $m, n \in \mathbb{Z}$. 证明 $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 当且仅当 m 与 n 互素.

问题 29.

设 G 为有限群, $N \trianglelefteq G$, $|N|$ 与 $|G/N|$ 互素. 如果 G 的元素 a 的阶整除 $|N|$, 证明 $a \in N$.

问题 30.

设 H, K 是群 G 的子群, 证明 $H \cap K$ 的任一左陪集是 H 的一个左陪集与 K 的一个左陪集的交.

问题 31.

设 H, K 都是群 G 的指数有限的子群, 证明 $H \cap K$ 在 G 中的指数也有限.

问题 32.

设 H 是群 G 的指数有限的子群, 证明 G 有指数有限的正规子群.

问题 33.

设 p 为素数. 证明所有的 p 阶群必为循环群, 因此也是交换群.

问题 34.

试定出所有互不同构的 4 阶群.

问题 35.

证明阶小于 6 的群皆交换, 举例说明存在 6 阶非交换群.

问题 36.

设 G 是 n 阶群, 整数 m 与 n 互素. 如果 $g, h \in G$, 且 $g^m = h^m$, 证明 $g = h$. 再证明对于任一 $x \in G$, 存在唯一的 $y \in G$ 使得

$$y^m = x$$

问题 37.

设 G 是群, $g \in G$. 若 $o(g) = n$, 则 $o(g^m) = n / (m, n)$.

问题 38.

设 $H \leq G, K \leq G, a, b \in G$. 若 $Ha = Kb$, 则 $H = K$.

问题 39.

设 A, B, C 为 G 的子群, 并且 $A \leq C$, 证明

$$AB \cap C = A(B \cap C)$$

问题 40.

设 A, B, C 为群 G 的子群, 并且 $A \leq B$. 如果 $A \cap C = B \cap C, AC = BC$, 证明 $A = B$.

问题 41.

设 G 是群. 令 $Z(G) = \bigcap_{g \in G} C_G(g)$. 称 $Z(G)$ 为 G 的**中心**. 证明 $Z(G)$ 是 G 的正规子群.

问题 42.

证明 2 阶正规子群必属于群的中心.

问题 43.

证明 A_4 没有 6 阶子群.

问题 44.

证明 $Z(A \oplus B) = Z(A) \oplus Z(B)$.

问题 45.

证明: 有限群 G 是二面体群的充分必要条件是 G 可由两个 2 阶元素生成.