抽象代数习题

Omnscent

2022 年 3 月 3 日

1 群、环、体、域的基本概念

1.0 预备知识

问题 1.

设 X 和 Y 是两个集合, $f: X \to Y$ 和 $g: Y \to X$ 是两个映射. 如果 $g \circ f = \mathrm{id}_X$, 则称 g 为 f 的一个**左逆**; 如果 $f \circ g = \mathrm{id}_Y$, 则称 g 为 f 的一个**右逆**. 如果 g 既是 f 的左逆又是 f 的右逆, 则称 g 为 f 的一个**逆**. 证明

(1) f 有左逆当且仅当 f 是单射;

(2) f 有右逆当且仅当 f 是满射;

(3) f 有逆当且仅当 f 是双射;

(4) 如果 f 有左逆 g, 同时又有右逆 h, 则 $g = h$;

(5) 如果 f 有逆, 则 f 的逆唯一, f 的逆记为 f^{-1};

(6) 如果 f 有逆, 则 $(f^{-1})^{-1} = f$.

问题 2.

举例说明等价关系的定义中的三个条件是相互独立的（即任意两条不蕴含剩下的一条）.

1.1 群的基本概念

问题 1.

证明群的定义可以简化为：如果一个非空集合 G 上定义了一个二元运算 $\circ$, 满足:

(1) **结合律**：$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ $(\forall a, b, c \in G)$;

(2) 存在**左幺元**：存在 $e \in G$, 使得对任意的 $a \in G$, 都有

$$e \circ a = a;$$

(3) 存在**左逆元**：对任意的 $a \in G$, 存在 $b \in G$, 使得

$$b \circ a = e,$$

则 G 关于运算 $\circ$ 构成一个群.

问题 2.

举例说明:在上题中将条件 (3) 改为“存在**右逆元**:对任意的 $a \in G$, 存在 $b \in G$, 使得 $a \circ b = e$”, 则 G 不一定是群.

问题 3.

设 G 是一个非空集合, 其中定义了一个二元运算 $\circ$. 证明：如果此运算满足结合律, 并且对于 G 中任意两个元素 a, b, 方程 $a \circ x = b$ 和 $y \circ a = b$ 都在 G 中有解, 则 $(G, \circ)$ 是群.

问题 4.

设 G 是一个非空的有限集合, 其中定义了一个二元运算 $\circ$. 证明：如果此运算满足结合律, 并且对于 G 中任意的三个元素 a, b, c, 都有（左消去律）$ab = ac \Rightarrow b = c$ 以及（右消去律）$ba = ca \Rightarrow b = c$, 则 $(G, \circ)$ 是群.

问题 5.

设 G 是群, $a, b \in G$, 如果 $aba^{-1} = b^r$, 证明 $a^i b a^{-i} = b^{r^i}$.

问题 6.

证明不存在恰有两个 2 阶元素的群.

问题 7.

设 G 是群. 如果对于任意的 $a, b \in G$, 都有 $(ab)^2 = a^2 b^2$, 证明 G 是交换群. 并由此证明：如果 $\exp(G) = 2$, 则 G 交换.

问题 8.

在 S_3 中找出两个元素 x, y, 使得 $(xy)^2 \neq x^2 y^2$.

问题 9.

设 G 是群, i 为任意确定的正整数. 如果对于任意的 $a, b \in G$, 都有 $(ab)^k = a^k b^k, k = i, i+1, i+2$, 证明 G 是交换群.

问题 10.

证明：群 G 为交换群当且仅当 $x \longmapsto x^{-1} (x \in G)$ 是同构映射.

问题 11.

设 S 是群 G 的非空子集, 在 G 中定义一个二元关系 "$\backsim$":$a \backsim b \Longleftrightarrow ab^{-1} \in S$. 证明 $\backsim$ 是一个等价关系当且仅当 S 是 G 的子群.

问题 12.

设 H, K 为群 G 的子群, 证明 $HK \leqslant G$ 当且仅当 $HK = KH$.

问题 13.

设 $n \in \mathbb{Z}$, 则 $n\mathbb{Z}$ 是整数加法群 $\mathbb{Z}$ 的子群. 并证明 $n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$.

问题 14.

证明：S_4 的子集 $B = \{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ 是一个子群, 且 B 与四次单位根群 μ_4 不同构.

问题 15.

令

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} e^{\frac{2\pi i}{n}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{2\pi i}{n}} \end{pmatrix},$$

证明集合 $\{B, B^2, \cdots, B^n, AB, AB^2, \cdots, AB^n\}$ 在矩阵乘法下构成群, 并且此群与二面体群 D_{2n} 同构.

问题 16.

证明偶数阶群中必有元素 $a \neq e$, 满足 $a^2 = e$.

问题 17.

对 $n > 2$, 证明在有限群 G 中阶为 n 的元素个数是偶数.

问题 18.

对于群中的任意二元素 a, b, 证明 ab 与 ba 的阶相等.

问题 19.

在群 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q})$ 中, 证明元素

$$a = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

的阶为 4, 元素

$$b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

的阶为 3, 而 ab 为无限阶元素.

问题 20.

设 G 是交换群, 证明 G 中的全体有限阶元素构成 G 的一个子群.

问题 21.

如果 G 只有有限多个子群, 证明 G 是有限群.

问题 22.

设 H,K 为有限群 G 的子群, 证明 $|HK| = \dfrac{|H|\cdot|K|}{|H\cap K|}$.

问题 23.

证明指数为 2 的子群必为正规子群.

问题 24.

证明不存在恰有两个指数为 2 的子群的群.

问题 25.

写出二面体群 D_{20} 的全部正规子群.

问题 26.

设 S 为 G 的非空子集, 令

$$\begin{aligned} C_G(S) &= \{x\in G | xa = ax, \forall a\in S\}, \\ N_G(S) &= \{x\in G | xSx^{-1} = S\} \end{aligned}$$

($C_G(S)$ 和 $N_G(S)$ 分别称为 S 在 G 中的**中心化子**和**正规化子**). 证明:

(1) $C_G(S)$ 和 $N_G(S)$ 都是 G 的子群;

(2) $C_G(S) \trianglelefteq N_G(S)$.

问题 27.

设 H,K 为 G 的正规子群, 证明:

(1) $HK = KH$;

(2) $HK \trianglelefteq G$;

(3) 如果 $H\cap K = \{e\}$, 则 G 同构于 $G/H\oplus G/K$ 的子群.

问题 28.

设 $m,n\in\mathbb{Z}$. 证明 $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}\cong\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}\oplus Z/n\mathbb{Z}$ 当且仅当 m 与 n 互素.

问题 29.

设 G 为有限群, $N \trianglelefteq G$,$|N|$ 与 $|G/N|$ 互素. 如果 G 的元素 a 的阶整除 $|N|$, 证明 $a \in N$.

问题 30.

设 H, K 是群 G 的子群, 证明 $H \cap K$ 的任一左陪集是 H 的一个左陪集与 K 的一个左陪集的交.

问题 31.

设 H, K 都是群 G 的指数有限的子群, 证明 $H \cap K$ 在 G 中的指数也有限.

问题 32.

设 H 是群 G 的指数有限的子群, 证明 G 有指数有限的正规子群.

问题 33.

设 p 为素数. 证明所有的 p 阶群必为循环群, 因此也是交换群.

问题 34.

试定出所有互不同构的 4 阶群.

问题 35.

证明阶小于 6 的群皆交换, 举例说明存在 6 阶非交换群.

问题 36.

设 G 是 n 阶群, 整数 m 与 n 互素. 如果 $g, h \in G$, 且 $g^m = h^m$, 证明 $g = h$. 再证明对于任一 $x \in G$, 存在唯一的 $y \in G$ 使得

$$y^m = x$$

问题 37.

设 G 是群, $g \in G$. 若 $o(g) = n$, 则 $o(g^m) = n/(m, n)$.

问题 38.

设 $H \leqslant G, K \leqslant G, a, b \in G$. 若 $Ha = Kb$, 则 $H = K$.

问题 39.

设 A, B, C 为 G 的子群, 并且 $A \leqslant C$, 证明

$$AB \cap C = A(B \cap C)$$

问题 40.

设 A, B, C 为群 G 的子群, 并且 $A \leqslant B$. 如果 $A \cap C = B \cap C, AC = BC$, 证明 $A = B$.

问题 41.

设 G 是群. 令 $Z(G) = \bigcap_{g \in G} C_G(g)$. 称 $Z(G)$ 为 G 的**中心**. 证明 $Z(G)$ 是 G 的正规子群.

问题 42.

证明 2 阶正规子群必属于群的中心.

问题 43.

证明 A_4 没有 6 阶子群.

问题 44.

证明 $Z(A \oplus B) = Z(A) \oplus Z(B)$.

问题 45.

证明：有限群 G 是二面体群的充分必要条件是 G 可由两个 2 阶元素生成.

1.2 环的基本概念

问题 1.

如果把整数环 $\mathbb{Z}$ 中的加法和乘法的定义互换, 即对于 $a, b \in \mathbb{Z}$, 定义 $a \oplus b = ab, a \odot b = a + b$, 试问 $(\mathbb{Z}; \oplus, \odot)$ 是否构成环?

问题 2.

在集合 $S = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ 上定义

$$
\begin{aligned}
(a, b) + (c, d) &= (a + c, b + d) \\
(a, b) \cdot (c, d) &= (ac - bd, ad + bc)
\end{aligned}
$$

证明 $(S; +, \cdot)$ 是交换幺环.

问题 3.

设 R 是交换幺环. 对于 $a, b \in R$, 定义

$$
\begin{aligned}
a \oplus b &= a + b - 1, \\
a \odot b &= a + b - ab,
\end{aligned}
$$

证明 $(R; \oplus, \odot)$ 是交换幺环.

问题 4.

设 $(G;+)$ 是交换群. 对于 $\varphi, \phi \in \mathrm{End}\,(G)$, 定义加法:

$$\begin{aligned} \varphi+\phi:\ \ & G \to G, \\ & g \longmapsto \varphi\,(g)+\phi\,(g)\,, \quad g \in G. \end{aligned}$$

又定义 $\varphi \cdot \phi$ 为 φ 与 ϕ 的复合 $\varphi \circ \phi$. 证明 $(\mathrm{End}\,(G)\,;+,\cdot)$ 构成幺环（称为 G 的**自同态环**）.

问题 5.

设 $G=(\mathbb{Z};+)$, 求 $\mathrm{End}\,(G)$.

问题 6.

设 G 为 n 阶循环群, 求 $\mathrm{End}\,(G)$.

问题 7.

设 $G=\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, 求 $\mathrm{End}\,(G)$.

问题 8.

给出环 R 和它的子环 S 的例子, 使得他们满足以下条件之一:

(1) R 有 1, 但 S 没有 1;

(2) R 有 1, 但 S 有 1;

(3) R 与 S 都有 1;

(4) R 不交换, 但 S 交换.

问题 9.

设 R 是环. 如果存在 $e_l \in R$, 满足 $e_l a = a\,(\forall a \in R)$, 则称 e_l 为 R 的一个**左幺元**. 类似地, 如果存在 $e_r \in R$, 满足 $a e_r = a\,(\forall a \in R)$, 则称 e_r 为 R 的一个**右幺元**. 证明:

(1) 如果 R 有左幺元又有右幺元, 则 R 有幺元;

(2) 如果 R 有左幺元但没有非零零因子, 则 R 有幺元;

(3) 如果 R 有左幺元但没有右幺元, 则 R 至少有两个左幺元.

问题 10.

设 R 是环, $a \in R, a \neq 0$. 如果存在 $b \in R, b \neq 0$, 使得 $aba=0$, 证明 a 是 b 的一个左零因子或右零因子.

问题 11.

设 R 是有限幺环, $a, b \in R$ 且 $ab = 1$. 证明 $ba = 1$

*** 问题 12.**

设 R 是幺环, $a, b \in R, ab = 1$ 但 $ba \neq 1$. 证明由无穷多个 $x \in R$ 满足 $ax = 1$.

问题 13.

设 R 是环, $a \in R$. 如果存在正整数 n 使得 $a^n = 0$, 则称 a 为一个**幂零元**. 证明：如果 a 是幺环中的幂零元, 则 $1 - a$ 可逆.

问题 14.

证明：在交换环 R 中全体幂零元组成一个理想（称为 R 的**幂零根**或**小根**）.

问题 15.

证明幺环中理想的加、乘法满足分配律. 即设 I, J, K 是幺环 R 的理想, 则

$$(I + J)\,K = IK + JK,$$
$$K\,(I + J) = KI + KJ.$$

问题 16.

设 I 是交换幺环 R 的一个理想. 令

$$\mathrm{rad}I = \left\{x \in R | \text{存在正整数} n \text{使得} x^n \in I\right\}.$$

证明 $\mathrm{rad}I$ 是 R 的理想（$\mathrm{rad}I$ 称为 I 的**根理想**）.

问题 17.

证明域 K 上的 n 阶全矩阵环 $\mathrm{M}_n\,(K)$ 没有非平凡理想（这种环称为**单环**）.

问题 18.

设 R 和 S 都是幺环, $\varphi : R \to S$ 是把 R 的幺元映到 S 的幺元的满同态, 判断下述命题是否正确（给出证明或反例）:

(1) φ 把幂零（幂等）元映为幂零（幂等）元（环中的元素 a 称为**幂等元**, 如果 $a^2 = a$）;

(2) φ 把零因子映为零因子;

(3) φ 把整环映为整环;

(4) 如果 S 是整环, 则 R 是整环;

(5) φ 把可逆元映为可逆元;

(6) 对于 $a \in R$, 如果 $\varphi\,(a)$ 可逆, 则 a 可逆.

问题 19.

设 R 是幺环, T 是整环, $\varphi: R \to T$ 是环同态. 证明 $\varphi(1_R) = 1_T$（1_R 和 1_T 分别为 R 和 T 的幺元）.

问题 20.

证明习题 3 中构造的环与原来的环 R 同构.

问题 21.

设 R 是幺环, $R = R_1 \oplus R_2 \oplus \cdots \oplus R_n$ 是环 R 的一个内直和, I 为 R 的一个理想. 证明

$$I = (I \cap R_1) \oplus (I \cap R_2) \oplus \cdots \oplus (I \cap R_n).$$

1.3 体、域的基本概念

问题 1.

设 R 是非零交换幺环. 证明 R 是单环当且仅当 R 是域.

问题 2.

设 K 是域, $\varphi: K \to R$ 是环同态. 证明 $\varphi(K) = \{0\}$ 或 φ 是单射.

问题 3.

证明有限整环是域.

问题 4.

在 p–进制域 $\mathbb{Q}_p$ 中证明 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} p^i = \frac{1}{1-p}$

问题 5.

证明 p–进整数环 $\mathbb{Z}_p$ 的可逆元素乘法群

$$\mathbb{Z}_p^\times = \left\{ a \in \mathbb{Z}_p \middle| |a|_p = 1 \right\}.$$

问题 6.

证明 p–进整数环 $\mathbb{Z}_p$ 的任一非零理想皆形如

$$\{a \in \mathbb{Z}_p | v_p(a) \geqslant n\},$$

其中 n 为非负整数.

问题 7.

证明 p–进整数环 $\mathbb{Z}_p$ 的任一非零理想皆形如 $\mathfrak{M}^n$, 其中 $\mathfrak{M}$ 为 $\mathbb{Q}_p$ 的赋值理想, n 为非负整数.

问题 8.

证明 p–进整数环 $\mathbb{Z}_p$ 等于可逆元素乘法群与赋值理想 $\mathfrak{M}$ 的无交并.

问题 9.

证明 $\mathbb{H}_0 = \{a + bI + cJ + dK \in \mathbb{H} | a, b, c, d \in \mathbb{Q}\}$ 是四元数体 $\mathbb{H}$ 的子体.

问题 10.

求四元数体 $\mathbb{H}$ 的中心（即 $\mathbb{H}$ 中与所有元素乘法可交换的全体元素）.

问题 11.

证明四元数体的单位元素 $\{\pm 1, \pm I, \pm J, \pm K\}$ 在乘法下组成一个群, 叫做**四元数群**, 记作 Q_8. 证明 Q_8 的每个子群都是正规子群.

问题 12.

证明四元数群 Q_8 与 4 阶循环群的直和存在非正规子群.

问题 13.

设 L 是含有两个以上元素的环. 如果对于每个非零元素 $a \in L$, 都存在唯一的元素 $b \in L$ 使得 $aba = a$, 证明:

(1) L 无非零零因子;

(2) $bab = b$;

(3) L 有 1;

(4) L 是体.

问题 14.

设 L 是体, $a, b \in L, ab \neq 0, 1$. 证明**华罗庚等式**:

$$a - \left(a^{-1} + \left(b^{-1} - a\right)^{-1}\right)^{-1} = aba.$$

问题 15.

设 F 是特征 $p > 0$ 的域. 证明

$$(a + b)^p = a^p + b^p, \ \forall a, b \in F.$$

问题 16.

给出两个有限非交换群 G, 分别适合：

(1) $g^3 = e, \forall g \in G$;

(2) $g^4 = e, \forall g \in G$.