equazione differenziale $\qquad \dfrac{dv}{dt} = -k\,v$

soluzione $\qquad v = v_0\, e^{-kt} \quad ;$

*le funzioni la cui derivata è proporzionale alla funzione stessa sono le funzioni esponenziali.*

Questo quarto caso è interessante perché viene risolto col *metodo di separazione delle variabili* (che però non è sempre applicabile). Nell'equazione

$$\frac{df}{dx} = -k f$$

si porta a primo membro tutto ciò che dipende esplicitamente da $f$ e a secondo membro tutto ciò che dipende esplicitamente da $x$, per cui

$$\frac{df}{f} = -k\,dx \quad .$$

Ora anche $f$ può essere considerata variabile indipendente (nel primo membro) e si integra subito:

$$\log f = -k\,x + \text{costante}$$

$$\Rightarrow f = e^{-k\,x + \text{costante}} = A\; e^{-k\,x} \quad , \qquad A = f(0) \quad .$$

L'esempio più generale, in cui rientra quello appena visto, è

$$\frac{df}{dx} = A + B f \quad \Rightarrow \quad \frac{df}{A + Bf} = dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{B}\ \log\,(A + B f) = x + \text{costante} \quad \Rightarrow \quad A + B f = C\, e^{B\,x}$$

$$\Rightarrow f = \frac{1}{B}\ (C\, e^{B\,x} - A) \quad , \quad C = A + B f\ (0) \quad .$$

Tutte le volte che la derivata di una funzione è funzione lineare della funzione stessa, questa ha una struttura esponenziale.

Nella soluzione di un'equazione differenziale compaiono sempre delle costanti, dovute al processo di integrazione:

- se nell'equazione c'è solo la derivata prima, abbiamo una sola costante, legata a $f(0)$;
- se nell'equazione c'è anche (o solo) la derivata seconda, abbiamo due costanti, una legata a $f(0)$, l'altra a $\left(\dfrac{df}{dx}\right)_{x=0}$ .

Le *costanti di integrazione sono* quindi *in connessione diretta con le condizioni iniziali.*

Nel caso di funzioni di più variabili l'equazione differenziale contiene le derivate parziali; l'esempio più importante che abbiamo visto è l'equazione delle onde piane (8.10). Anche questa va intesa come una particolare condizione: quali sono le funzioni di due variabili tali che la derivata seconda rispetto a una variabile sia proporzionale alla derivata seconda rispetto all'altra variabile? La ricerca della soluzione esula dalle nostre possibilità, però abbiamo verificato che l'argomento della funzione soluzione deve essere una combinazione lineare delle due variabili.

Non andiamo oltre nel parlare delle equazioni differenziali; la materia è difficile, per esempio non esiste un metodo generale di soluzione valido per tutti i tipi di equazioni differenziali. Queste sono suddivise in varie classi a seconda della loro struttura, ma non sempre è possibile dimostrare che esiste una soluzione e dare i criteri per trovarla. D'altra parte con i metodi del calcolo numerico e l'uso di calcolatori è sempre possibile arrivare a una soluzione approssimata.

# APPENDICE B

# LE UNITA' DI MISURA

Il procedimento di base che permette la scoperta di una nuova legge fisica o la verifica di un'ipotesi teorica è il metodo sperimentale. Per un determinato fenomeno si individuano quelle che possono essere le grandezze significative e se ne esegue la misura secondo un procedimento chiaro e possibilmente ripetibile, magari variando in misure successive alcuni dei parametri in gioco per metterne in evidenza l'influenza sul fenomeno studiato. La legge che regola il fenomeno è una legge quantitativa che esprime, con il linguaggio della matematica, una relazione tra le grandezze misurate.

La determinazione di ciascuna grandezza comporta quindi una misura, il cui risultato è un numero; per una stessa grandezza i metodi di misura possono essere diversi, però è essenziale che per ciascun metodo sia precisato lo svolgimento sperimentale e si arrivi sempre a un risultato numerico. Si parla di *definizione operativa di una grandezza* ed è l'unica definizione scientificamente accettabile.

L'operazione di misura è una valutazione relativa tra grandezze della stessa specie ed è pertanto necessario definire l'unità di misura per ogni grandezza; il risultato della misura è espresso come rapporto quantitativo rispetto all'unità di misura. Il confronto con l'unità però può essere diretto, come nella misura di una lunghezza con un metro, o indiretto: in questo caso si misurano altre grandezze che sono in relazione nota con la grandezza da determinare; è quanto succede, per esempio, quando si calcola la velocità da misure di spazio e di tempo.

Nella misura ci sono due aspetti sui quali per ragioni diverse non ci soffermiamo, ma che riteniamo opportuno ricordare. Innanzitutto ogni misura è accompagnata sempre da un certo errore, la cui determinazione a volte è altrettanto importante del valore stesso della misura; non discutiamo l'argomento perché di norma è trattato nei corsi di laboratorio. In secondo luogo, l'effettuazione stessa della misura può perturbare il fenomeno in esame; nel mondo macroscopico l'effetto può essere reso trascurabile con opportuni accorgimenti, invece nel mondo microscopico in certi casi la perturbazione è inevitabile e il concetto stesso di misura ha profonde implicazioni che nascono dal *principio di indeterminazione di Heisenberg*.

Da un punto di vista strettamente scientifico la scelta dell'unità di misura è arbitraria: basta che siano soddisfatti i requisiti per una definizione operativa della grandezza e sia chiaramente definita l'unità stessa; che poi il risultato sia espresso, per esempio, in metri o in iarde, in litri o in galloni, è un fatto secondario: L'aumento del numero di ricercatori e il diffondersi delle comunicazioni tra di essi, insieme all'affermarsi dell'idea che la fisica ha una struttura unitaria anche se articolata in molti campi, hanno però spinto verso l'adozione di una convenzione universalmente accettata su quante e quali siano le grandezze fondamentali e su come devono essere definiti i campioni delle unità di misura di tali grandezze.

Descriveremo tra breve il sistema internazionale; per ora diciamo soltanto che esso è il risultato attuale, accettato da tutta la comunità scientifica, di un lungo processo storico iniziato nel 1791, durante la rivoluzione francese, quando l'Accademia delle Scienze di Parigi decise di adottare il metro e il chilogrammo come unità di misura della lunghezza e della massa e diede il via alla procedura per la costruzione dei relativi campioni. Dopo di allora sono state successivamente identificate le altre grandezze fisiche fondamentali per la descrizione dei vari fenomeni e definite le loro unità di misura. Ancora adesso si tengono periodicamente le Conferenze Generali di Pesi e Misure le quali aggiornano le definizioni delle unità o propongono di adottarne di migliori.

Grandezze fondamentali

Un sistema di unità di misura è individuato dalle grandezze che in esso sono scelte come fondamentali e dalla definizione delle corrispondenti unità di misura. La scelta delle *grandezze fondamentali*, di per sé arbitraria, è limitata di fatto dalla tradizione storica e da esigenze di praticità. Il numero stesso di grandezze fondamentali non è fissabile a priori: in meccanica, per esempio, è possibile legare tra loro tutte le grandezze fisiche necessarie alla descrizione del moto dei corpi e delle cause che al moto danno origine in modo tale che le grandezze fondamentali siano lunghezza, tempo e massa e tutte le altre, dette grandezze derivate, possano essere espresse in termini di queste tre. Però tale scelta non è l'unica possibile; e inoltre si potrebbe anche ridurre a due il numero di grandezze fondamentali. Senonché non c'è alcuna utilità pratica o concettuale in questo modo di procedere e si preferisce restare con le tre grandezze che la tradizione e l'uso comune hanno consacrato come fondamentali.

Scelte le grandezze fondamentali devono essere fissate le unità di misura e con esse i campioni cui si richiedono determinate caratteristiche, mentre la definizione resta arbitraria. Un buon campione deve essere accessibile e facilmente riproducibile, in modo che per confronto ne possano essere costruiti altri, con la migliore precisione possibile. Però un buon campione deve anche essere invariabile; cioè le sue caratteristiche non dovrebbero cambiare nel tempo sotto l'azione di agenti esterni; occorre allora proteggerlo con il che l'accessibilità non risulta facile. Come si vede le richieste possono essere in contrasto tra loro ed è necessario un certo grado di compromesso tra le varie esigenze.

Unità di misura

Il concetto stesso di *unità di misura* si è evoluto nel tempo. Prendendo come esempio il metro, la definizione originaria lo voleva eguale a un quarantamilionesimo del meridiano terrestre passante per Parigi: infatti il riferimento corretto sembrava la terra. In base alla definizione, chiaramente arbitraria, si costruì un campione, ma successive misure geodetiche dimostrarono che la relazione tra metro campione e meridiano terrestre differiva leggermente da quella assunta come vera. Si pose allora un problema notevole: bisognava cambiare il campione o cambiare la definizione? Fortunatamente fu la seconda via ad essere seguita, come sembra naturale vista l'arbitrarietà della definizione, e alla fine risultò conveniente dire semplicemente che il metro campione era quel certo regolo, costruito con una data procedura e conservato in un determinato posto (a Sèvres, Parigi). La realizzazione del campione avvenne nel 1889 e varie copie vennero distribuite nel mondo: l'errore relativo massimo risultò di $2 \cdot 10^{-7}$. Ogni riferimento alle dimensioni terrestri fu così abbandonato; ma ogni epoca ha evidentemente il suo concetto di invariabilità e oggi la tendenza è di riferirsi a fenomeni atomici per la costruzione di campioni, che oltre ad essere intrinsecamente molto precisi permettono meglio di conciliare i requisiti di riproducibilità e invariabilità. Esistono in natura lunghezze definibili con estrema precisione: si tratta delle *lunghezze d'onda delle radiazioni emesse dagli atomi*; è possibile confrontare il metro campione con queste lunghezze e ne risulta una definizione la cui precisione relativa è dell'ordine di $10^{-8}$. Di recente pure questa definizione è stata superata da un'altra ancora più precisa che vedremo tra poco.

L'aspetto tecnico e pratico della *metrologia* è molto importante. Vengono subito in mente gli innumerevoli metri, bilance, orologi tutti tarati con maggiore o minore accuratezza rispetto ai loro campioni; non bisogna d'altra parte dimenticare che il poter disporre di precisi riferimenti universalmente accettati è essenziale per la costruzione e il controllo di tutte le moderne apparecchiature meccaniche e elettroniche. Infine, lo stimolo a ricercare campioni sempre migliori e riproducibili con sempre migliori precisioni porta all'attuazione di metodi sperimentali che possono poi essere utilizzati nei campi più svariari.

## Il Sistema Internazionale

Vediamo ora quali sono le grandezze fondamentali e i relativi campioni nel sistema di unità di misura chiamato *sistema internazionale* (SI) e raccomandato dalla Conferenza Internazionale Pesi e Misure del 1960 per ogni uso scientifico e tecnologico.

Le grandezze fondamentali sono sette: *lunghezza, tempo, massa, temperatura, intensità di corrente elettrica, intensità luminosa e quantità di materia.*

Lunghezza, metro

Il *metro* è l'*unità di misura della lunghezza*: è definito come lo spazio percorso nel vuoto dalla luce nel tempo $t = 1/c$, dove $c$ è il valore della velocità della luce nel moto, pari a $2.99792458 \cdot 10^8$ m/s; l'errore relativo su questo numero è $4 \cdot 10^{-9}$.

Tempo, secondo

*Unità di tempo* è il *secondo*, pari a $9.162631770 \cdot 10^9$ oscillazioni della radiazione emessa in una particolare transizione dall'isotopo del *Cesio* $^{133}Cs$; la precisione relativa è $10^{-11}$ (1 secondo in 3000 anni). Recentemente è stato messo a punto un altro *orologio atomico* con atomi di berillio a temperatura molto prossima allo zero assoluto che presenta un errore relativo di $10^{-14}$ (1 secondo in $3 \cdot 10^6$ anni). Come è successo per il metro è stato abbandonato per il secondo il riferimento alla terra, cioè al moto di rotazione della terra attorno al proprio asse o di rivoluzione attorno al sole non essendo questi campioni abbastanza precisi e invariabili.

Massa, chilogrammo

Il *chilogrammo* è l'*unità di misura della massa* ed è ancora valida la definizione data nel 1901: vale un chilogrammo la massa del prototipo di platino-iridio conservato a Sèvres (errore relativo $10^{-8}$). Il riferimento atomico a cui si tende è la massa dell'isotopo del carbonio $^{12}C$.

Temperatura, Kelvin

Unità di temperatura è il *Kelvin*, pari a 1/273.16 della temperatura termodinamica del *punto triplo dell'acqua*, misurata con un termometro a ciclo di Carnot (errore relativo $10^{-6}$).

Intensità di corrente, ampere

*Unità di intensità di corrente elettrica* è l'*ampere*, definito come quella corrente elettrica costante che percorrendo due fili conduttori paralleli indefiniti distanti un metro tra loro e posti nel vuoto causa tra di essi una forza di $2 \cdot 10^{-7}$ newton per metro (errore relativo $10^{-8}$).

Intensità luminosa, candela

*Unità dell'intensità luminosa* è la *candela*: si tratta dell'intensità luminosa emessa da un corpo nero, a 2045 Kelvin e sotto una pressione di 101325 pascal, in direzione perpendicolare al foro di uscita, la cui sezione ha un'area pari a $1/(6 \cdot 10^5)$ m$^2$ (errore relativo $10^{-2}$).

Materia, mole

Infine l'*unità di quantità di materia* è la *mole*, cioè la quantità di materia che contiene tante entità elementari quanti sono gli atomi in 12 grammi di $^{12}C$; questo numero è noto come il *numero di Avogadro* e vale $6.02213674 \cdot 10^{23}$ (errore relativo $10^{-8}$).

Numero di Avogadro

I simboli delle unità che abbiamo elencato sono m, s, kg, K, A, cd, mol. C'è anche una convenzione per i prefissi di alcuni dei *multipli e sottomultipli* e per i relativi simboli, come indicato nella Tabella B.1.

Multipli e sottomultipli

**Tabella B.1** - Multipli e sottomultipli

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $10^3$ | chilo | k | $10^{-3}$ | milli | m |
| $10^6$ | mega | M | $10^{-6}$ | micro | μ |
| $10^9$ | giga | G | $10^{-9}$ | nano | n |
| $10^{12}$ | tera | T | $10^{-12}$ | pico | p |
| $10^{15}$ | peta | P | $10^{-15}$ | femto | f |
| | | | $10^{-18}$ | atto | a |

Per esempio, in intervallo di tempo di $10^{-12}$ s si chiama *picosecondo* (ps), una corrente di $10^6$ A si chiama *megampere* (MA). In questo quadro l'unica anomalia è l'unità di massa, che contiene già il prefisso chilo; così che multipli e sottomultipli sono riferiti al grammo. Inoltre per il tempo ci sono i multipli speciali minuto = 60 s e ora = 3600 s.

Limitandoci alle tre grandezze fondamentali lunghezza, tempo e massa, diamo alcuni valori indicativi per far vedere gli enormi intervalli di variabilità che esistono in natura:

| | |
|---|---|
| raggio dell'universo | $10^{26}$ m |
| raggio della galassia | $10^{21}$ m |
| raggio del sole | $7 \cdot 10^8$ m |
| raggio della terra | $6.4 \cdot 10^6$ m |
| lunghezza d'onda luminosa | $0.5 \cdot 10^{-6}$ m = 0.5 μm |
| dimensioni di un virus | $10^{-8}$ m = 10 nm |
| raggio di un atomo | $10^{-10}$ m = 100 pm |
| raggio di un nucleo | $10^{-15}$ m = 1 fm |
| raggio dell'elettrone | $<10^{-16}$ m puntiforme? |
| | |
| età dell'universo | $10^{17}$ s = $3 \cdot 10^9$ anni |
| un anno | $3.1 \cdot 10^7$ s |
| periodo di oscillazione della nota la | $2.3 \cdot 10^{-3}$ s = 2.3 ms |
| ciclo di macchina di un microprocessore | $10^{-6}$ s = 1 μs |
| tempo di transizione tra livelli atomici | $10^{-8}$ s = 10 ns |
| tempo di commutazione di un transistor | $10^{-9}$ s = 1 ns |
| periodo di oscillazione della luce visibile | $10^{-14}$ s = 10 fs |
| | |
| massa dell'universo | $10^{53}$ kg |
| massa della galassia | $8 \cdot 10^{41}$ kg |
| massa del sole | $2 \cdot 10^{30}$ kg |
| massa della terra | $6 \cdot 10^{24}$ kg |
| massa di un virus | $10^{-13}$ kg |
| massa del protone | $1.67 \cdot 10^{-27}$ kg |
| massa dell'elettrone | $9.1 \cdot 10^{-31}$ kg |

Si è accennato, parlando dei requisiti delle unità di misura, alla praticità: questa è fuori discussione per ciò che riguarda metro, secondo e chilogrammo rispetto alle necessità della vita di tutti i giorni e anche della tecnologia corrente. Diversa può essere la situazione nel campo scientifico. Facciamo solo alcuni esempi: in astronomia le distanze considerate sono molto grandi ed è più semplice, oltre che più significativo, l'uso dell'unità *anno luce* pari a $9.46 \cdot 10^{15}$ m, cioè alla distanza che un segnale luminoso percorre in un anno viaggiando alla velocità di $3 \cdot 10^8$ m/s. Nella fisica atomica e nucleare c'è un problema simile per le masse tanto che si utilizza l'unità di *massa atomica* eguale a 1/12 della massa dell'atomo $^{12}C$, ovvero a $1.660 \cdot 10^{-27}$ kg; unità speciali vengono usate anche per l'energia e la quantità di moto; per le lunghezze a livello nucleare si usa l'unità $10^{-15}$ m, chiamata *fermi*, col simbolo fm come il *femtometro*. Ad ogni modo il sistema internazionale resta il punto di riferimento per queste unità accessorie.

Anno luce

Massa atomica

fermi

Nella lista delle unità fondamentali vengono spesso incluse quelle relative alla misura degli angoli piani e degli angoli solidi, *il radiante e lo steradiante*. Presa una circonferenza di raggio $R$, il radiante è la misura dell'angolo al centro che sottende un arco di lunghezza pari al raggio; data una superficie sferica di raggio $R$ lo steradiante è la misura dell'angolo solido con vertice nel centro della superficie sferica che sottende una calotta sferica di area $R^2$. I rispettivi simboli sono rad e sr.

Radiante, steradiante

## Grandezze meccaniche

Elenchiamo in tabella B.2 le principali grandezze incontrate nello studio della meccanica e le loro unità di misura.

**Tabella B.2** - Grandezze meccaniche

| | | | |
|---|---|---|---|
| lunghezza | m | | |
| tempo | s | | |
| massa | kg | | |
| velocità | $ms^{-1}$ | | |
| accelerazione | $ms^{-2}$ | | |
| velocità angolare | rad $s^{-1}$ | | |
| accelerazione angolare | rad $s^{-2}$ | | |
| periodo | s | | |
| frequenza | $s^{-1}$ | = Hz | |
| pulsazione | rad $s^{-1}$ | | |
| forza | kg m $s^{-2}$ | = N | |
| quantità di moto, impulso | kg m $s^{-1}$ | = Ns | |
| lavoro energia | kg $m^2$ $s^{-2}$ | = J | = Nm |
| potenza | kg $m^2$ $s^{-3}$ | = W | = $Js^{-1}$ |
| momento angolare | kg $m^2$ $s^{-1}$ | | |
| momento di una forza | kg $m^2$ $s^{-2}$ | | |
| momento d'inerzia | kg $m^2$ | | |
| densità | kg $m^{-3}$ | | |
| pressione | kg $m^{-1}$ $s^{-2}$ | = Pa | = $Nm^{-2}$ |
| viscosità | kg $m^{-1}$ $s^{-1}$ | | |
| tensione superficiale | kg $s^{-2}$ | = $Nm^{-1}$ | |

Questioni dimensionali

Le leggi fisiche sono equazioni tra grandezze: dal punto di vista delle unità di misura i due membri dell'equazione devono essere *omogenei*, devono cioè avere le stesse unità di misura; questa è una condizione necessaria per la correttezza di una equazione, ma certamente non è sufficiente.

Per esempio, se dopo aver risolto un problema si trova per l'accelerazione di un punto $a = g\,h/m\,t$ si può dire subito che la relazione è sbagliata: da una parte abbiamo $\mathrm{ms^{-2}}$, dall'altra $(\mathrm{ms^{-2}})\,(\mathrm{m})/(\mathrm{kg})\,(\mathrm{s}) = \mathrm{m^2\,kg^{-1}\,s^{-2}}$. L'omogeneità richiede invece che entrambi i membri siano espressi dalla stessa combinazione di metri, secondi e chilogrammi. Si dice anche che entrambi i membri devono avere le stesse *dimensioni* rispetto alle unità fondamentali.

Un'applicazione di questi concetti la troviamo quando determiniamo le unità di misura di certe costanti che compaiono nelle varie leggi:

| | |
|---|---|
| $a = -k\,v$ | $k$ è il rapporto tra un'accelerazione e una velocità e si misura in $\mathrm{ms^{-2}/ms^{-1} = s^{-1}}$ |
| $F = -k\,x$ | $k$ si misura in $\mathrm{Nm^{-1}}$ |
| $F = \gamma\,\dfrac{m_1 m_2}{r^2}$ | $\gamma$ si misura in $\mathrm{Nm^2\,kg^{-2} = m^3\,s^{-2}\,kg^{-1}}$ . |

Allo stesso modo, nella (8.10) si capisce che il coefficiente nell'equazione delle onde piane deve avere le dimensioni di una velocità al quadrato, mentre nella (8.3) si deduce che il coefficiente di Poisson è una *grandezza adimensionale* o, come si dice, un *numero puro*.

Anche la misura di un angolo, intesa come rapporto di lunghezze, è un numero puro che si esprime in radianti. Per questa ragione talvolta la velocità angolare o la pulsazione sono date in $\mathrm{s^{-1}}$. Noi preferiamo scrivere esplicitamente rad $\mathrm{s^{-1}}$, nel caso della velocità angolare per evidenziare il significato di angolo coperto per unità di tempo e nel caso della pulsazione per evitare una confusione numerica con la frequenza: le due grandezze, analoghe come significato, differiscono per il fattore $2\,\pi$ ($\omega = 2\,\pi/T$, $\nu = 1/T$ ).

Gli argomenti delle funzioni trigonometriche sono angoli e si misurano in radianti: pertanto non è corretto scrivere sen $x$ o sen $t$ se $x$ è una lunghezza e $t$ un tempo, ma bisogna introdurre una costante moltiplicativa, con le dimensioni rad $\mathrm{m^{-1}}$ o rad $\mathrm{s^{-1}}$, e scrivere sen $k\,x$ o sen $\omega\,t$.

Analogamente, gli esponenti delle funzioni esponenziali sono adimensionali e quindi non scriviamo $e^{x}$ o $e^{t}$, ma $e^{ax} = e^{x/\lambda}$ o $e^{bt} = e^{t/\tau}$, dove le costanti $a$, $\lambda$, $b$, $\tau$ sono espresse rispettivamente in $\mathrm{m^{-1}}$, m, $\mathrm{s^{-1}}$, s. Se invece, come si fa in matematica, si intende scrivere un generico argomento e non riferirsi in particolare a una lunghezza, sono corrette le espressioni $e^{x}$ e sen $x$.

Infine, quando una grandezza è espressa come $g = d\,f/d\,x$ la sua unità di misura è quella di $f$ divisa quella di $x$ ($v = d\,x/d\,t$ si misura in $\mathrm{ms^{-1}}$ ); se c'è una derivata seconda, $h = \dfrac{d\,g}{d\,x} = \dfrac{d}{d\,x}\left(\dfrac{df}{dx}\right) = \dfrac{d^2 f}{dx^2}$ , l'unità di misura di $h$ è quella di $f$ divisa per quella di $x$ elevata al quadrato ($a = d^2x/dt^2$ si misura in $\mathrm{ms^{-2}}$ ) e così via. È appunto in base a ciò che nella (8.10) si determinano le dimensioni *di* $v^2$ : $\partial^2\xi/\partial t^2$ si misura in $\mathrm{ms^{-2}}$, $\partial^2\xi/\partial x^2$ in $\mathrm{m^{-1}}$, dovendo esserci omogeneità $v^2$ si misura in $\mathrm{m^2\,s^{-2}}$ .

# APPENDICE C

# CALCOLO VETTORIALE

## C.1 GRANDEZZE SCALARI E VETTORIALI

Le leggi della fisica sono espresse da equazioni matematiche nelle quali compaiono quantità che descrivono le grandezze fisiche interessate.

Alcune di queste grandezze possono essere rappresentate da un numero che, nell'appropriata unità di misura, ne dà il valore in un certo punto e in un certo istante. Se prendiamo in esame, per esempio, la temperatura dell'aria in un dato luogo, le nostre misure ci permettono di costruire una funzione $T(P)$ che dà il valore della temperatura in ogni punto $P$ dell'ambiente: nel punto $P_i$ la temperatura vale $T_i = T(P_i)$. Inoltre, se non si prendono speciali precauzioni per termostatare l'ambiente, la temperatura in ogni punto varierà nel tempo, per cui più esattamente essa sarà espressa da una funzione $T(P, t)$ delle cordinate del punto e del tempo. La densità della crosta terrestre in un certo luogo è funzione della profondità; lo stesso succede per la densità di una soluzione. La massa di un corpo macroscopico infine è un numero che si assume costante.

Grandezze scalari

Le grandezze per la cui rappresentazione basta un solo numero, costante o funzione delle coordinate ed eventualmente anche del tempo, si dicono *grandezze scalari*; le operazioni che si eseguono su di esse obbediscono alle solite regole dell'algebra. Nel testo sono indicate in *carattere corsivo*.

Ci sono però situazioni in cui un solo numero non è sufficiente a descrivere completamente una grandezza fisica. L'esempio più semplice e immediato è quello dello spostamento da un punto all'altro. Se, partendo da un punto $O$, diciamo di compiere uno spostamento rettilineo $l$, abbiamo specificato semplicemente di quanto ci siamo allontanati da $O$, ma non possiamo determinare dove arriviamo: tutti i punti che stanno su una superficie sferica di centro $O$ e raggio $l$ sono possibili punti di arrivo. Se precisiamo la direzione $r$ dello spostamento, possiamo ancora arrivare in due punti diametralmente opposti sulla superficie sferica; solo se indichiamo il verso di percorrenza lungo $r$ il risultato è univoco.

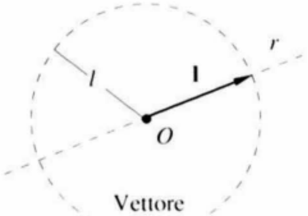



**Fig. C.1**

Esistono dunque grandezze che per essere specificate hanno bisogno di un numero, il modulo, che ne dà il valore in assoluto, di una direzione e di un verso. Il *vettore* è l'ente matematico adatto alla rappresentazione di queste *grandezze* che si chiamano appunto *vettoriali* e per le quali vale un'algebra che non è identica all'algebra scalare.

La rappresentazione grafica di un vettore è immediata: essa avviene tramite un segmento orientato la cui lunghezza è pari al modulo del vettore (fissata convenzionalmente una lunghezza unitaria). Come simbolo usiamo un carattere *grassetto* diritto, per esempio **a**; talvolta è usata anche una lettera con una freccia sopra. I vettori **a** e **b** della figura C.2 sono diversi; anche **c** e **d** sono diversi: pur avendo lo stesso modulo e la stessa direzione, differiscono nel verso; invece **e** ed **f** sono eguali e si scrive **e** = **f**, che è il più semplice esempio di equazione vettoriale.

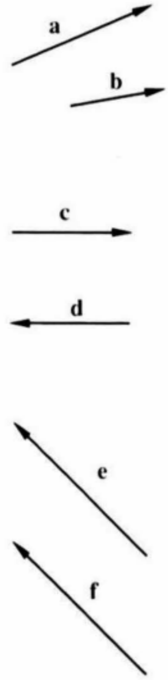


**Fig. C.2**

Matematicamente, un vettore ha infinite rappresentazioni: infatti tutti i segmenti orientati di eguale lunghezza, paralleli ed equiversi sono rappresentazioni dello stesso vettore e quindi equivalenti; si dice che essi formano un sistema di *vettori equipollenti*. Però, a seconda del punto di applicazione, una grandezza vettoriale può dare origine a situazioni fisiche diverse: sappiamo che una stessa forza applicata in punti diversi di un corpo rigido può causare moti diversi. Per questo motivo in pratica facciamo sempre uso di *vettori applicati in un certo punto*, cioè ci concentriamo su una particolare delle infinite rappresentazioni di un vettore.

Nello studio della meccanica si incontrano molte grandezze vettoriali oltre allo spostamento: velocità, accelerazione, velocità angolare, forza, quantità di moto, momento angolare, momento della forza sono vettori. Il modulo di ciascuna descrive l'entità della grandezza, la sua intensità, e pertanto deve essere espresso nella relativa unità di misura: il modulo dello spostamento si esprime in metri, quello della forza in newton, quello del momento angolare in kg m$^2$ s$^{-1}$.

Riprendendo quanto detto all'inizio del paragrafo, possiamo ora precisare che le equazioni che esprimono le leggi fisiche legano tra loro grandezze scalari o grandezze vettoriali, cioè sono *equazioni scalari* o *equazioni vettoriali*; non esiste una possibilità intermedia, ovvero non ha senso eguagliare uno scalare a un vettore. Le grandezze scalari e vettoriali non esauriscono tutti i possibili tipi di grandezze che si incontrano nello studio della fisica, però sono sufficienti per i nostri scopi.

## C.2 PRIME PROPRIETA' DEI VETTORI

La prima operazione che definiamo per i vettori è il *prodotto di un vettore per uno scalare* (numero),

$$\mathbf{b} = m\,\mathbf{a} \quad ; \qquad \text{(C.1)}$$

il prodotto dello scalare $m$ per il vettore **a** ha come risultato un altro vettore **b** che ha la stessa direzione di **a**, il modulo $m$ volte quello di **a**, lo stesso verso di **a** se $m > 0$ e verso opposto se $m < 0$. Ponendo $m = -1$ nella (C.1) si ottiene

$$\mathbf{b} = -\mathbf{a} \qquad \text{(C.2)}$$

che definisce il *vettore opposto* a un dato vettore **a**: – **a** ha stessa direzione e modulo di **a** e verso opposto.

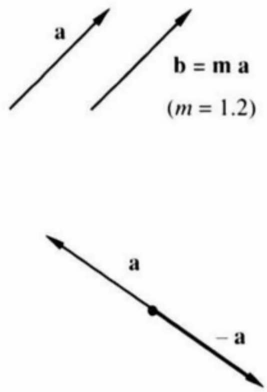


**Fig. C.3**

L'operazione prodotto per uno scalare porta a un concetto molto importante: fissata una direzione orientata $r$ vi sono infiniti vettori che hanno quella direzione e differiscono solo nel modulo e nel verso; in particolare tra questi esiste il vettore **u** che è concorde in verso con $r$ e ha modulo unitario. Tutti gli infiniti vettori di cui sopra possono allora scriversi

$$\mathbf{a} = a\,\mathbf{u} \qquad \text{(C.3)}$$

In questa formulazione **u** descrive la direzione di **a**, mentre $a$ con il suo segno ne determina il verso, concorde o discorde a **u**, e con il suo modulo | **a** | il valore. Il *vettore unitario* **u** si chiama il *versore* della direzione orientata $r$ e per ricordare questo fatto si usa scrivere $\mathbf{u}_r$.

Versore

## Regola di somma

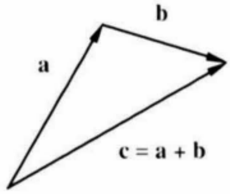



Fig. C.4

Dati due vettori **a** e **b**, in cui **b** è applicato nel punto terminale di **a**, la *somma* è un vettore che si indica con **c** = **a** + **b** e si ottiene graficamente unendo l'origine del vettore **a** con l'estremo del vettore **b**.

Un metodo alternativo per determinare graficamente la somma di due vettori **a** e **b**, detta *vettore somma* o *vettore risultante*, è il cosiddetto *metodo del parallelogramma*: si applica nell'origine di **a** anche il vettore **b** spostandolo parallelamente a se stesso; il vettore somma **c** = **a** + **b** coincide con la diagonale del parallelogramma che ha come lati **a** e **b**. Il confronto della figura C.5 con la figura C.4 mostra che il risultato è lo stesso.

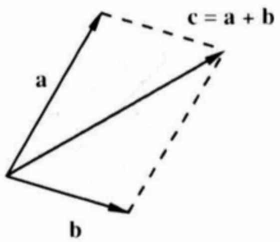



Fig. C.5

La costruzione col metodo del parallelogramma consente di verificare che per la somma di due vettori vale la proprietà commutativa:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a} \quad .$$

La regola di somma completa la definizione di vettore: *una grandezza è vettoriale quando è individuata da modulo, direzione e verso e obbedisce alla regola di somma ora definita.*

Tramite il concetto di vettore opposto (C.2) e la regola di somma, si definisce anche la *differenza di due vettori*:

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\,\mathbf{b}) \quad .$$

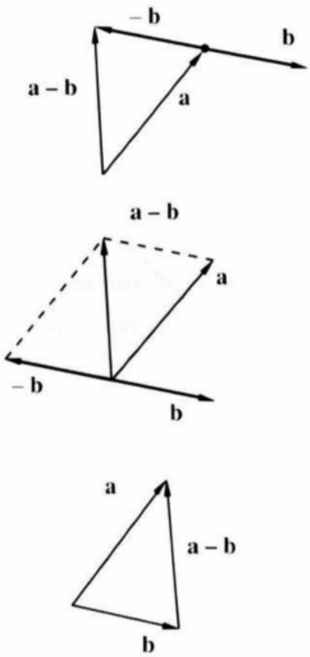



Fig. C.6

Nella figura C.6 sono mostrate le due costruzioni corrispondenti alle figure C.4 e C.5; si vede che il vettore differenza **a** – **b** coincide con l'altra diagonale del parallelogramma utilizzato per il calcolo del vettore somma.

La regola di somma si estende alla somma di più vettori:

$$\mathbf{R} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d} \quad .$$

Si disegnano in successione i diversi vettori ponendo l'origine di uno nel punto in cui termina il precedente: si costruisce così una linea spezzata e il vettore somma **R** si ottiene congiungendo i due estremi di questa linea.

È evidente che il risultato non dipende dall'ordine con cui si considerano gli addendi e che vale la *proprietà associativa*:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) \quad .$$

Nel caso di vettori paralleli, scritti con la notazione (C.3), si ha

$$\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 = a_1\,\mathbf{u} + a_2\,\mathbf{u} = (a_1 + a_2)\,\mathbf{u} \tag{C.4}$$

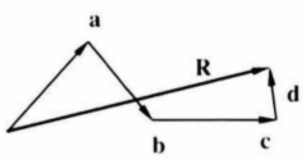



Fig. C.7

e analogamente per più vettori $\Sigma_i\, \mathbf{a}_i = (\Sigma_i\, a_i)\,\mathbf{u}$. La somma consiste nella somma algebrica dei moduli con segno e vediamo che vale la proprietà distributiva nel prodotto di un vettore per uno scalare.

## Scomposizione di un vettore

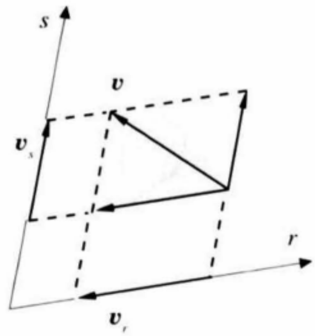



Fig. C.8

Consideriamo un vettore $\boldsymbol{v}$ e due direzioni orientate $r$ e $s$ caratterizzate rispettivamente dai versori $\mathbf{u}_r$ e $\mathbf{u}_s$. Vogliamo scomporre il vettore $\boldsymbol{v}$ nella somma di due vettori, uno $\boldsymbol{v}_r$ parallelo a $\mathbf{u}_r$ e l'altro $\boldsymbol{v}_s$ parallelo a $\mathbf{u}_s$, tali che

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_r + \boldsymbol{v}_s = v_r\,\mathbf{u}_r + v_s\,\mathbf{u}_s \qquad ;$$

$\boldsymbol{v}_r$ e $\boldsymbol{v}_s$ si chiamano i *vettori componenti* del vettore $\boldsymbol{v}$ lungo $r$ e $s$. La costruzione grafica della figura C.8 è ottenuta applicando al contrario il metodo di somma dei vettori.

Dalla scomposizione lungo due direzioni $\mathbf{u}_r$ e $\mathbf{u}_s$ che individuano un piano si passa alla scomposizione secondo tre direzioni nello spazio caratterizzate dai versori $\mathbf{u}_r$, $\mathbf{u}_s$, $\mathbf{u}_t$:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_r + \boldsymbol{v}_s + \boldsymbol{v}_t = v_r\,\mathbf{u}_r + v_s\,\mathbf{u}_s + v_t\,\mathbf{u}_t \qquad .$$

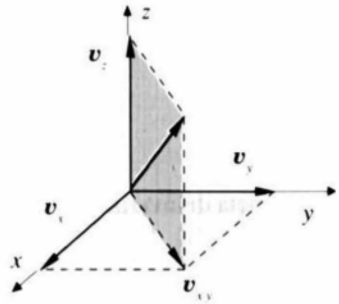



Fig. C.9

Il caso di gran lunga più frequente è che le tre direzioni siano gli *assi cartesiani ortogonali di un sistema di riferimento*, caratterizzati dai versori $\mathbf{u}_x$, $\mathbf{u}_y$, $\mathbf{u}_z$ così che si può scrivere

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_x + \boldsymbol{v}_y + \boldsymbol{v}_z = v_x\,\mathbf{u}_x + v_y\,\mathbf{u}_y + v_z\,\mathbf{u}_z \qquad . \tag{C.5}$$

I vettori $\boldsymbol{v}_x, \boldsymbol{v}_y, \boldsymbol{v}_z$ si chiamano i *vettori componenti* di $\boldsymbol{v}$, mentre $v_x, v_y, v_z$ si chiamano *le componenti* di $\boldsymbol{v}$ secondo i tre assi cartesiani del sistema di riferimento prescelto.

Dati due vettori rappresentati in un certo sistema da

$$\mathbf{a} = a_x\,\mathbf{u}_x + a_y\,\mathbf{u}_y + a_z\,\mathbf{u}_z \quad , \qquad \mathbf{b} = b_x\,\mathbf{u}_x + b_y\,\mathbf{u}_y + b_z\,\mathbf{u}_z \qquad ,$$

la loro somma è data da

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = a_x\,\mathbf{u}_x + a_y\,\mathbf{u}_y + a_z\,\mathbf{u}_z + b_x\,\mathbf{u}_x + b_y\,\mathbf{u}_y + b_z\,\mathbf{u}_z$$

ovvero, secondo (C.4), da

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_x + b_x)\,\mathbf{u}_x + (a_y + b_y)\,\mathbf{u}_y + (a_z + b_z)\,\mathbf{u}_z \quad . \tag{C.6}$$

*Il vettore somma ha come componenti la somma delle componenti dei singoli vettori*. Il risultato si estende alla somma di un numero qualunque di vettori e resta valido anche se gli assi non sono ortogonali.

## Proprietà di invarianza

L'operazione di scomposizione che abbiamo appena descritto fa sì che dato un vettore si ricavino le componenti; viceversa, date le componenti è possibile stabilire modulo, direzione e verso. Tutto questo in un ben determinato sistema di riferimento. Si pone allora il problema se il concetto di vettore e le operazioni che abbiamo finora definito, somma e prodotto per uno scalare, come altre che definiremo in seguito, dipendano dal particolare sistema di riferimento prescelto.

Ritorniamo per un momento alle grandezze scalari e al nostro esempio della temperatura: il valore $T(P,t)$ dipende dalle condizioni fisiche dell'ambiente, ma non dal fatto che osserviamo il fenomeno da un certo sistema di riferimento. Fissato un sistema in cui $P$ ha le coordinate $x$, $y$, $z$, possiamo considerarne un altro legato al primo da una traslazione: i nuovi assi sono paralleli e concordi ai vecchi, l'origine si è spostata; oppure possiamo considerare un terzo sistema ottenuto mantenendo fissa l'origine e ruotando gli assi (il caso più generale è una combinazione di questi due, una rototraslazione). Tali operazioni comportano un cambiamento delle coordinate di $P$, ma la temperatura nel punto $P$ in quel dato istante resta sempre la stessa, da qualunque sistema la guardiamo, essendo piuttosto legata alla distribuzione nello spazio delle sorgenti di energia e a caratteristiche fisiche dell'ambiente. *Una grandezza scalare cioè è invariante rispetto al sistema di riferimento.*

Grandezze scalari

La stessa situazione si presenta per un vettore: se ripensiamo all'esempio dello spostamento a partire da $O$, individuato dal vettore $\mathbf{l}$ (figura C.1), notiamo che la sua definizione è indipendente dal sistema di coordinate. In generale l'operazione di fissare due punti e congiungerli con un segmento orientato non ha bisogno del supporto di un sistema di riferimento per essere definita. Ne discende che anche le operazioni di somma e prodotto per uno scalare sono invarianti rispetto alla scelta del sistema: $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ e $\mathbf{b} = m\,\mathbf{a}$ sono equazioni valide in qualsiasi sistema di riferimento.

Proprietà di invarianza

Questa *proprietà di invarianza* è certamente molto soddisfacente dal punto di vista matematico e addirittura essenziale in fisica, visto il significato delle grandezze che rappresentiamo con scalari o vettori. Abbiamo già osservato che le leggi della fisica si esprimono tramite equazioni matematiche in cui compaiono le grandezze che descrivono un certo fenomeno. Possiamo dire ora che quando queste *equazioni* sono *scalari*, cioè del tipo $a = b$ o più complesse, oppure *vettoriali*, cioè del tipo $\mathbf{b} = m\,\mathbf{a}$ o più complesse, esse *hanno una validità intrinseca che non dipende dal sistema di riferimento*: in qualsiasi sistema conservano la stessa struttura. Nel caso scalare questo vuol dire in particolare che le grandezze scalari che compaiono nell'equazione hanno lo stesso valore indipendentemente dal sistema adottato; per il caso vettoriale è necessaria una discussione più approfondita.

Quando si fissa un sistema di riferimento un vettore è individuato dalle sue componenti; nella pratica questo procedimento si usa frequentemente. Un'equazione tra vettori equivale a tre equazioni nelle componenti ($\mathbf{b} = m\,\mathbf{a}$ comporta $b_x = m\,a_x$, $b_y = m\,a_y$, $b_z = m\,a_z$) e le operazioni che già conosciamo e quelle che studieremo si portano a termine molto spesso ragionando sulle componenti. Quindi è importante stabilire come si comportano le componenti quando si cambia sistema di riferimento. Il risultato generale è che esse cambiano se cambia il sistema ed è istruttivo studiare questo problema.

Per semplicità poniamoci nel piano cartesiano e consideriamo un sistema $x$, $y$, un sistema $x'$, $y'$ ottenuto dal primo per *traslazione* e un sistema $x''$, $y''$ ottenuto per *rotazione*, come disegnato in figura C.10, nella quale sono anche riportate le formule di trasformazione delle coordinate da un sistema all'altro.

Traslazione

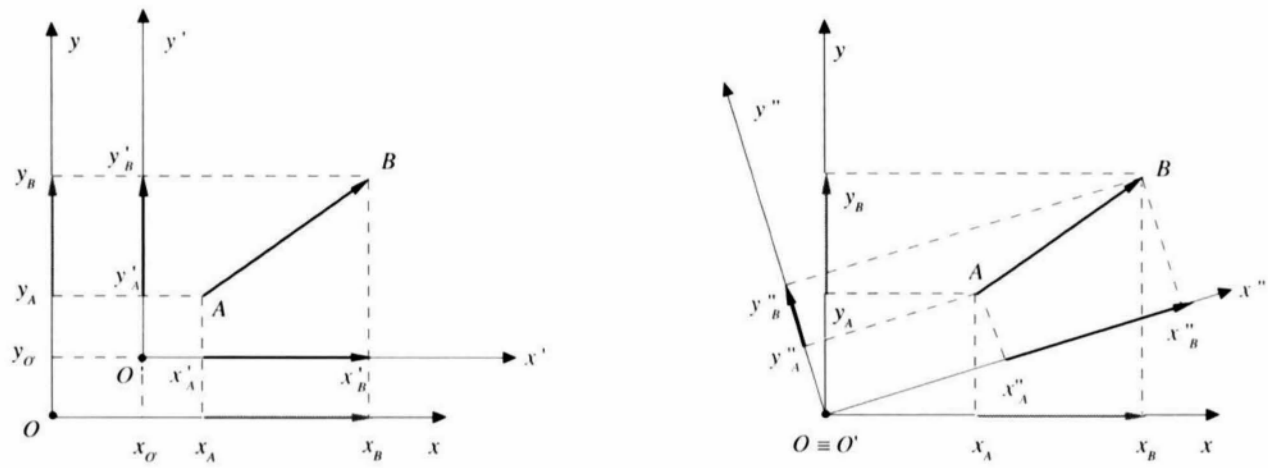
Nel primo caso (*traslazione*) le componenti di $\mathbf{r}_{AB}$ nel sistema $O$ sono $x_{AB} = x_B - x_A$ e $y_{AB} = y_B - y_A$, che risultano eguali rispettivamente a $x'_{AB} = x'_B - x'_A$ e $y'_{AB} = y'_B - y'_A$, componenti nel sistema $O'$: *in una traslazione le componenti di un vettore restano invariate.*

Rotazione

Nel secondo caso (*rotazione*) abbiamo:

$$x''_{AB} = x''_B - x''_A = x_B \cos\theta + y_B \,\mathrm{sen}\,\theta - (x_A \cos\theta + y_A \,\mathrm{sen}\,\theta) =$$

$$= (x_B - x_A)\cos\theta + (y_B - y_A)\,\mathrm{sen}\,\theta = x_{AB}\cos\theta + y_{AB}\,\mathrm{sen}\,\theta \quad .$$




$x' = x - x_{O'}$
$y' = y - y_{O'}$

$x'' = x \cos\theta + y \operatorname{sen}\theta$
$y'' = -x \operatorname{sen}\theta + y \cos\theta$

**Fig. C.10**

Analogamente

$$y''_{AB} = -x_{AB} \operatorname{sen}\theta + y_{AB} \cos\theta \quad .$$

In una rotazione le componenti di un vettore cambiano obbedendo alla stessa regola di trasformazione valida per le coordinate (si veda il paragrafo 3.7). Questa proprietà è del tutto generale e può essere assunta come definizione: *il vettore è l'ente individuato da tre numeri, dipendenti dal sistema di riferimento, che si trasformano sotto rotazioni con la stessa legge con cui si trasformano le coordinate.*

Definizione di vettore

In conclusione, quando scriviamo un'equazione vettoriale **a** = **b** e la consideriamo in un determinato sistema di riferimento, le tre equazioni $a_x = b_x$, $a_y = b_y$, $a_z = b_z$ sono valide come struttura in qualsiasi sistema, però con valori delle componenti diversi in ciascun sistema. *Le componenti* stesse, non essendo indipendenti dal sistema, *non sono quantità scalari*. È invece uno scalare il modulo che, con riferimento alla (C.5) e alla figura C.9, si scrive

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \tag{C.7}$$

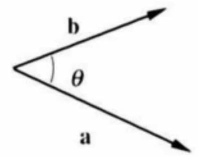
e si verifica essere lo stesso in qualsiasi sistema.

## C.3 PRODOTTI TRA VETTORI

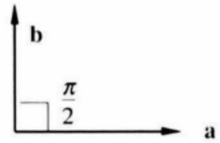
Si definiscono due operazioni di prodotto tra due vettori, che danno come risultato una quantità scalare o un altro vettore; li chiamiamo rispettivamente *prodotto scalare e prodotto vettoriale.*

### Prodotto scalare

Dati due vettori **a** e **b** si definisce *prodotto scalare* la quantità




$s = a\, b \cos\theta$




$s = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$

**Fig. C.11**

$$s = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a\, b \cos\theta \quad . \tag{C.8}$$

indicando con $\theta$ l'angolo formato dai due vettori. Il risultato del prodotto scalare è una quantità scalare data dal prodotto dei moduli di **a** e di **b** per il coseno dell'angolo compreso tra **a** e **b**.

Il prodotto scalare gode delle seguenti proprietà:

- è nullo non solo se uno dei due vettori è nullo, ma anche se i due vettori formano un angolo di $\pi / 2$;
- vale la *proprietà commutativa*

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = b\, a \cos(-\theta) = b\, a \cos\theta = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \quad ;$$

- in particolare, se $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ $(\theta = 0,\ \cos\theta = 1)$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a^2 \quad ; \tag{C.9}$$

il prodotto scalare di un vettore per se stesso, detto anche *quadrato del vettore, è eguale al quadrato del modulo del vettore*;

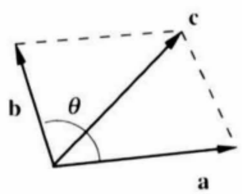
- non ha senso iterare il prodotto scalare: la scrittura $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$ è priva di significato perché $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ è uno scalare e non può essere moltiplicato scalarmente per **c**;
- vale la *proprietà distributiva*:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d} + \ldots) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{d} + \ldots \quad ;$$

- se $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, dalla proprietà distributiva e da (C.9) si ha

$$c^2 = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = a^2 + b^2 + 2\, \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a^2 + b^2 + 2\, a\, b \cos\theta$$

che è *il teorema di Carnot o del coseno* per il triangolo avente come lati $a, b, c$ e permette di calcolare subito il modulo della somma di due vettori. In particolare se $\theta = \pi/2$ si ritrova il *teorema di Pitagora* $c^2 = a^2 + b^2$.



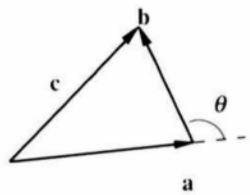




**Fig. C.12**

La definizione (C.8) è certamente invariante in quanto tutte le grandezze che compaiono nel risultato dell'operazione sono scalari. Vediamo ora di calcolare l'espressione del prodotto scalare in un determinato sistema di riferimento, cioè in funzione delle componenti cartesiane dei due vettori. Posto

$$\mathbf{a} = a_x\, \mathbf{u}_x + a_y\, \mathbf{u}_y + a_z\, \mathbf{u}_z \quad , \qquad \mathbf{b} = b_x\, \mathbf{u}_x + b_y\, \mathbf{u}_y + b_z\, \mathbf{u}_z$$

osserviamo che in base alla definizione di versore e alla (C.8)

$$\mathbf{u}_x \cdot \mathbf{u}_x = \mathbf{u}_y \cdot \mathbf{u}_y = \mathbf{u}_z \cdot \mathbf{u}_z = 1 \ ,$$

$$\mathbf{u}_x \cdot \mathbf{u}_y = \mathbf{u}_y \cdot \mathbf{u}_z = \mathbf{u}_z \cdot \mathbf{u}_x = 0 \ ,$$

e quindi il prodotto $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, sviluppato secondo la proprietà distributiva, dà

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x\, b_x + a_y\, b_y + a_z\, b_z \quad . \tag{C10}$$

*Il prodotto scalare tra due vettori è eguale alla somma dei prodotti delle componenti omologhe dei singoli vettori*. In particolare

$$a^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$$

che è la relazione (C.7).

Un altro modo, spesso fisicamente molto significativo, di rappresentare il prodotto scalare è il seguente:

$$s = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a \cos\theta)\, b = a\, (b \cos\theta) \quad .$$

*Il prodotto scalare tra due vettori è eguale al prodotto del modulo di uno dei vettori per la proiezione su di questo dell'altro vettore.*

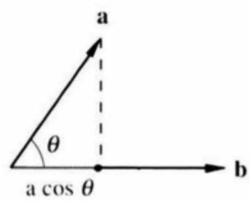



**Fig. C.13**

## Prodotto vettoriale

Dati due vettori **a** e **b** si definisce *prodotto vettoriale* il vettore **c** che si indica col simbolo

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

e che ha le seguenti caratteristiche:
- la *direzione* è perpendicolare al piano individuato da **a** e **b** ;
- il *verso* è quello di una normale vite destrogira, cioè ruotando da **a** a **b** nel verso della vite, il verso di **c** è indicato dalla punta della vite; alternativamente, si può dire che dalla punta di **c** deve apparire antioraria la rotazione che porta **a** su **b**;
- il *modulo* è

$$c = a\, b \operatorname{sen}\theta \tag{C.11}$$

e coincide con l'area del parallelogramma di lati $a$ e $b$.

È bene osservare subito che *il prodotto vettoriale non gode della proprietà commutativa*. Infatti se eseguiamo il prodotto **b** × **a** in base alla definizione otteniamo il vettore – **c**, opposto a **c**:

$$\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -\,\mathbf{a} \times \mathbf{b} \ ,$$

e si dice che *il prodotto vettoriale è anticommutativo.*

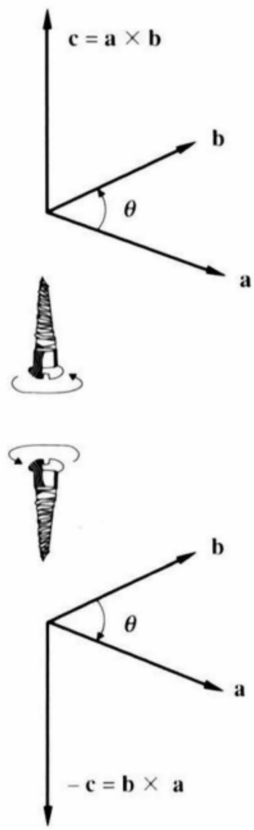



**Fig. C.14**

Valgono inoltre le seguenti proprietà:
- il risultato è nullo se uno dei due vettori è nullo oppure se i due vettori sono paralleli ($\theta = 0$ , $\theta = \pi$ : due vettori paralleli non individuano un piano); in particolare è nullo il prodotto vettoriale di un vettore per se stesso, $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = 0$ ;
- si applica la proprietà distributiva:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{R} = \mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d} + \ldots) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{a} \times \mathbf{d} + \ldots \quad ;$$

- il prodotto vettoriale può essere iterato, ma va completamente specificata la sequenza delle diverse operazioni, perché *non vale la proprietà associativa*:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \neq (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} \quad .$$

La definizione di prodotto vettoriale è indipendente dal sistema di riferimento perché è ricondotta a operazioni invarianti per la determinazione di direzione, verso e modulo del risultato. Il calcolo dell'espressione in funzione delle componenti cartesiane in un dato sistema di riferimento si basa sulle

$$\mathbf{a} = a_x\,\mathbf{u}_x + a_y\,\mathbf{u}_y + a_z\,\mathbf{u}_z \quad , \qquad \mathbf{b} = b_x\,\mathbf{u}_x + b_y\,\mathbf{u}_y + b_z\,\mathbf{u}_z$$

e sulle proprietà dei prodotti vettoriali tra i versori $\mathbf{u}_x$, $\mathbf{u}_y$, $\mathbf{u}_z$:

$$\mathbf{u}_x \times \mathbf{u}_x = \mathbf{u}_y \times \mathbf{u}_y = \mathbf{u}_z \times \mathbf{u}_z = 0$$

$$\mathbf{u}_x \times \mathbf{u}_y = \mathbf{u}_z \;,\quad \mathbf{u}_y \times \mathbf{u}_z = \mathbf{u}_x \;,\quad \mathbf{u}_z \times \mathbf{u}_x = \mathbf{u}_y \;,$$

$$\mathbf{u}_y \times \mathbf{u}_x = -\,\mathbf{u}_z \;,\quad \mathbf{u}_z \times \mathbf{u}_y = -\,\mathbf{u}_x \;,\quad \mathbf{u}_x \times \mathbf{u}_z = -\,\mathbf{u}_y \;.$$

Applicando la proprietà distributiva si ottiene

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_y\,b_z - a_z\,b_y)\,\mathbf{u}_x + (a_z\,b_x - a_x\,b_z)\,\mathbf{u}_y + (a_x\,b_y - a_y\,b_x)\,\mathbf{u}_z$$

che è suscettibile della seguente forma

$$\boldsymbol{c} = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

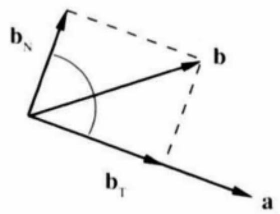



Fig. C.15

Il vettore **c** si calcola come *determinante* della matrice formata con i versori degli assi del sistema di riferimento, le componenti di **a** e quelle di **b**, nell'ordine prefissato (chiaramente scambiando la seconda e la terza riga cambia il verso del risultato, **c** diventa – **c**).

Un'altra rappresentazione molto utile consiste nello scomporre **b** secondo un componente $\mathbf{b}_T$ parallelo ad **a** e un componente $\mathbf{b}_N$ ortogonale ad **a**, per cui

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\mathbf{b}_T + \mathbf{b}_N) = \mathbf{a} \times \mathbf{b}_N$$

in quanto $\mathbf{a} \times \mathbf{b}_T = 0$ essendo i due vettori paralleli. Il modulo di **c** è $c = a\,b_N$ ($\theta = \pi/2$, sen $\theta = 1$): *il modulo del prodotto vettoriale è eguale al prodotto del modulo di un vettore per la componente dell'altro vettore normale al primo.*

## Momento di un vettore rispetto ad un punto

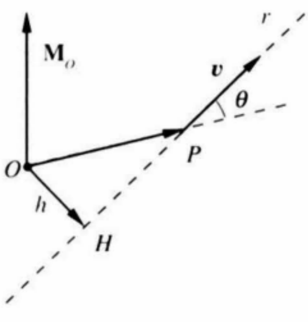



Fig. C.16

Sia $\boldsymbol{v}$ un vettore applicato nel punto $P$ e $O$ un altro generico punto. Si definisce *momento del vettore* $\boldsymbol{v}$ *rispetto al punto O*, chiamato *polo*, il vettore

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{OP} \times \boldsymbol{v} \quad , \tag{C.13}$$

ortogonale al piano individuato da **OP** e $\boldsymbol{v}$. Detto **OH** il componente di **OP** perpendicolare a $\boldsymbol{v}$ (si veda anche la figura C.15) otteniamo

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{OP} \times \boldsymbol{v} = \mathbf{OH} \times \boldsymbol{v} \quad .$$

Il modulo di $\mathbf{M}_O$ *è dato da*

$$M_O = |\,OP\,|\, v \text{ sen } \theta = |\,OH\,|\, v = h\, v \quad , \tag{C.14}$$

essendo $h$ la distanza di $O$ dalla retta $r$ contenente $\boldsymbol{v}$, detta *retta di applicazione* di $\boldsymbol{v}$; $h$ prende il nome di *braccio* di $\boldsymbol{v}$ rispetto ad $O$.

Dovunque si prenda $P$ lungo $r$ il momento non cambia in quanto $\mathbf{OH}$ rimane lo stesso; analogamente, se si sposta $O$ lungo una retta parallela a $r$ il momento non cambia.

Se si sceglie un altro polo $O'$, il momento di $\boldsymbol{v}$ rispetto a $O'$ è dato da

$$\mathbf{M}_{O'} = \mathbf{O'P} \times \boldsymbol{v} \quad .$$

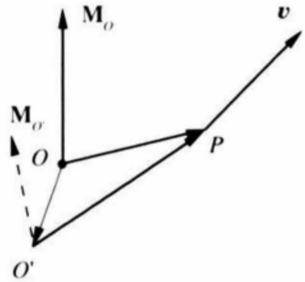



**Fig. C.17**

Poiché $\mathbf{OP} = \mathbf{OO'} + \mathbf{O'P}$ abbiamo

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{OP} \times \boldsymbol{v} = \mathbf{OO'} \times \boldsymbol{v} + \mathbf{O'P} \times \boldsymbol{v} = \mathbf{OO'} \times \boldsymbol{v} + \mathbf{M}_{O'} \quad . \tag{C.15}$$

*In generale* $\mathbf{M}_O \neq \mathbf{M}_{O'}$: *il momento di un vettore dipende dal polo*; solo se $\mathbf{OO'}$ è parallelo a $\boldsymbol{v}$, $\mathbf{M}_O = \mathbf{M}_{O'}$ e ritroviamo il risultato enunciato sopra.

## C.4 DERIVATA DI UN VETTORE

Le operazioni tipiche del calcolo infinitesimale possono essere estese alle grandezze vettoriali. Cominciamo col considerare un vettore $\boldsymbol{v}$ funzione di una variabile scalare $t$, cioè una grandezza vettoriale il cui modulo e la cui direzione cambiano al variare di $t$, in un modo che in generale supponiamo continuo; $\boldsymbol{v}(t)$ e $\boldsymbol{v}(t + \Delta t)$ sono due diversi valori della funzione, comprendendo nel termine valore modulo e direzione. Possiamo scrivere

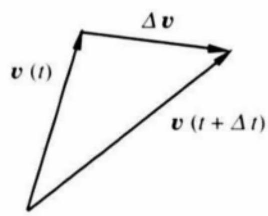



**Fig. C.18**

$$\boldsymbol{v}(t + \Delta t) = \boldsymbol{v}(t) + \Delta \boldsymbol{v}$$

e costruire il rapporto

$$\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} = \frac{\boldsymbol{v}(t + \Delta t) - \boldsymbol{v}(t)}{\Delta t}$$

tra la variazione $\Delta \boldsymbol{v}$ della funzione vettoriale $\boldsymbol{v}(t)$ e l'*incremento della variabile t.* Si definisce *derivata del vettore $\boldsymbol{v}$ rispetto alla variabile t* la quantità

Derivata di un vettore

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{v}(t + \Delta t) - \boldsymbol{v}(t)}{\Delta t}$$

Osserviamo che *la derivata di un vettore è ancora un vettore* in quanto l'operazione equivale al prodotto di un vettore, $d\boldsymbol{v}$, per uno scalare, $1/dt$; inoltre il vettore derivata in generale non è parallelo a $\boldsymbol{v}$, come si può intuire dalla figura C.18: $\Delta\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{v}$ non sono paralleli, neppure al limite.

Per la derivata di un vettore valgono le usuali *regole di derivazione*; ne elenchiamo alcune:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \frac{d\mathbf{a}}{dt} + \frac{d\mathbf{b}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(m\,\boldsymbol{v}) = m\,\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \qquad \text{se } m \text{ è costante}$$

Regole di derivazione dei vettori

$$\frac{d}{dt}(m\,\boldsymbol{v}) = \frac{dm}{dt}\,\boldsymbol{v} + m\,\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \qquad \text{se } m \text{ dipende da } t$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = \frac{d\mathbf{a}}{dt}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot\frac{d\mathbf{b}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \frac{d\mathbf{a}}{dt}\times\mathbf{b} + \mathbf{a}\times\frac{d\mathbf{b}}{dt} \quad .$$

In quest'ultimo caso bisogna fare attenzione all'ordine con cui sono scritti i vettori nel prodotto vettoriale.

La derivata di un vettore, essendo, come abbiamo già osservato, a sua volta un vettore, non dipende per il significato e per la sua definizione dal sistema di riferimento. Se però rappresentiamo il vettore $\boldsymbol{v}$ in un sistema di assi cartesiani ortogonali per cui $\boldsymbol{v} = v_x\,\mathbf{u}_x + v_y\,\mathbf{u}_y + v_z\,\mathbf{u}_z$, allora ripetendo il procedimento di passaggio al limite abbiamo

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\,\mathbf{u}_x + \frac{dv_y}{dt}\,\mathbf{u}_y + \frac{dv_z}{dt}\,\mathbf{u}_z \tag{C.16}$$

nell'ipotesi che i versori $\mathbf{u}_x$, $\mathbf{u}_y$, $\mathbf{u}_z$, che caratterizzano il sistema di riferimento, siano fissi, ovvero costanti rispetto a $t$. In tal caso il vettore derivato di $\boldsymbol{v}$ ha come componenti le derivate delle componenti di $\boldsymbol{v}$. La (C.16), che può essere anche assunta come definizione, fornisce un mezzo molto comodo per calcolare le derivate di vettori.

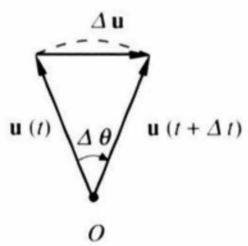



Fig. C.19

## Derivata di un versore $\mathbf{u}\,(t)$

Dal momento che un *versore* è per definizione un vettore di modulo unitario, ciò che può cambiare in funzione di $t$ è solo la direzione, cioè il versore può compiere solamente una rotazione di un certo angolo $\Delta\,\theta$, come mostrato in figura C.19. Possiamo quindi scrivere

$$\Delta\,\mathbf{u} = \mathbf{u}\,(t+\Delta\,t) - \mathbf{u}\,(t)$$

essendo $\Delta\,\mathbf{u}$ la *corda* che unisce gli estremi dell'arco di circonferenza descritto da $\mathbf{u}\,(t)$ nella rotazione di $\Delta\,\theta$. Al limite per $\Delta\,t \to 0$ la corda $\Delta\,\mathbf{u}$ tende ad un vettore infinitesimo $d\,\mathbf{u}$, perpendicolare a $\mathbf{u}\,(t)$, il cui modulo si confonde con l'arco:

$$d\,u = |\,u\,(t)\,|\,d\,\theta = d\,\theta \quad \Rightarrow \quad d\,\mathbf{u} = d\,\theta\,\mathbf{u}_N$$

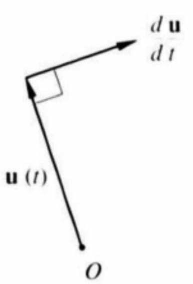



Fig. C.20

essendo $\mathbf{u}_N$ *un versore perpendicolare a* $\mathbf{u}\,(t)$. Definiamo la *derivata del versore* $\mathbf{u}\,(t)$ come

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{d\,\theta}{dt}\,\mathbf{u}_N \quad . \tag{C.17}$$

*La derivata di un versore è un vettore perpendicolare al versore, di modulo $d\,\theta/d\,t$, in generale diverso da 1*: in altre parole $d\,\mathbf{u}/d\,t$ *non è un versore.*

## Scrittura intrinseca della derivata

Consideriamo il vettore $\boldsymbol{v}$ nella sua forma (C.3), $\boldsymbol{v} = v\,\mathbf{u}$, invariante rispetto al sistema di riferimento. Calcoliamo la derivata di $\boldsymbol{v}\,(t)$ con la regola di derivazione di un prodotto:

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\,\mathbf{u} + v\,\frac{d\mathbf{u}}{dt} \quad .$$

Vediamo che la variazione rispetto a $t$ del vettore $\boldsymbol{v}$ ha due termini: il primo $\frac{dv}{dt}\,\mathbf{u}$, parallelo a $\boldsymbol{v}$, è dovuto alla variazione del modulo di $\boldsymbol{v}$, il secondo $v\,\frac{d\mathbf{u}}{dt} = v\,\frac{d\theta}{dt}\,\mathbf{u}_N$ secondo (C.17) è ortogonale a $\boldsymbol{v}$ ed è dovuto alla variazione della direzione di $\boldsymbol{v}$. Quindi:

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\,\mathbf{u} + v\,\frac{d\theta}{dt}\,\mathbf{u}_N \quad . \tag{C.18}$$

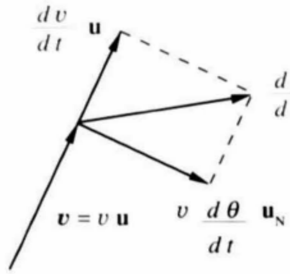



**Fig. C.21**

Il *modulo del vettore derivato* è

$$\left|\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\right| = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(v\,\frac{d\theta}{dt}\right)^2} \tag{C.19}$$

e osserviamo che *il modulo della derivata di $\boldsymbol{v}$ è diverso dalla derivata del modulo di $\boldsymbol{v}$.*

La presenza di uno solo dei termini di (C.18) dà origine a situazioni particolari che si incontrano spesso:

a) $\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\,\mathbf{u}$: il vettore varia solamente in modulo e mantiene inalterata la direzione, cioè $d\,\theta/d\,t = 0$ ;

b) $\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = v\,\frac{d\theta}{dt}\,\mathbf{u}_N$ : il vettore non varia in modulo, $d\,v/d\,t = 0$, ma solo in direzione, cioè compie una rotazione.

Dal caso b) ricaviamo questo risultato: *la derivata di un vettore di modulo costante è perpendicolare al vettore stesso* (si estende così quanto trovato prima per un versore).

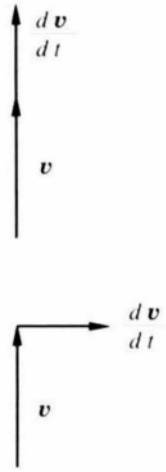



**Fig. C.22**

Notiamo che nel caso più generale la variazione di direzione che compare nella (C.18) non è contenuta sempre nello stesso piano, ma è tridimensionale.

Dalla definizione di derivata di un vettore si può ottenere un vettore infinitesimo dato da

$$d\,\boldsymbol{v} = \left(\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\right)\,dt$$

oppure, ricorrendo alle componenti cartesiane, espresso da

$$d\,\boldsymbol{v} = d\,v_x\,\mathbf{u}_x + d\,v_y\,\mathbf{u}_y + d\,v_z\mathbf{u}_z \quad , \tag{C.20}$$

sempre nell'ipotesi che i versori degli assi coordinati siano fissi. Infine, da (C.18),

$$d\,\boldsymbol{v} = d\,v\,\mathbf{u} + v\,d\,\theta\,\mathbf{u}_N \quad :$$

$d\,\boldsymbol{v}$ giace nel piano in cui avviene la variazione istantanea di $\boldsymbol{v}$, individuato da $\mathbf{u}$, parallelo a $\boldsymbol{v}$, e da $\mathbf{u}_N$, perpendicolare a $\boldsymbol{v}$. In un istante successivo di norma $\mathbf{u}_N$ non giace in questo piano.

## C.5 INTEGRAZIONE VETTORIALE

La funzione vettoriale $\mathbf{a}\,(t)$ sia definita in un certo intervallo della variabile $t$ ; dividiamo questo intervallo in tanti sottointervalli $\Delta\,t_i$ in ciascuno dei quali consideriamo un valore $\mathbf{a}\,(t_i)$ della funzione. Costruiamo i vettori $\mathbf{a}\,(t_i)\,\Delta\,t_i$ e ne consideriamo la somma

$$\mathbf{A} = \sum_{1}^{n}{}_{i}\,\mathbf{a}\,(t_i)\,\Delta\,t_i \quad .$$

$\mathbf{A}$ è un vettore che unisce l'origine del primo vettore $\mathbf{a}\,(t_1)\,\Delta\,t_1$ con l'estremo dell'ultimo $\mathbf{a}\,(t_n)\,\Delta\,t_n$ .

Si definisce *integrale definito* di $\mathbf{a}\,(t)$ il vettore a cui tende la somma quando tutti i $\Delta\,t_i$ tendono a zero:

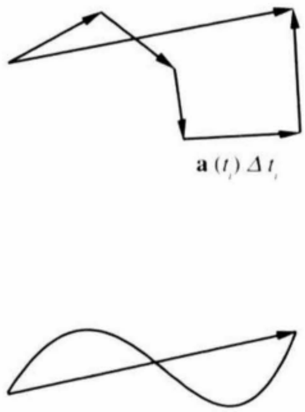



Fig. C.23

$$\mathbf{A} = \lim \sum_{1}^{n}{}_{i}\,\mathbf{a}\,(t_i)\,\Delta\,t_i = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{a}\,(t)\;d\,t \quad ;$$

$t_1$ e $t_2$ sono gli estremi dell'intervallo di $t$ considerato.

Il vettore $\mathbf{A}\,(t)$, ottenuto dall'integrazione di $\mathbf{a}\,(t)$, *non* dipende dal sistema di riferimento. Tuttavia per eseguire i calcoli è conveniente fissare un sistema di coordinate, per esempio cartesiane ortogonali: allora

$$\mathbf{a}\,(t) = a_x\,(t)\,\mathbf{u}_x + a_y\,(t)\,\mathbf{u}_y + a_z\,(t)\,\mathbf{u}_z$$

e l'integrale si scrive

$$\mathbf{A} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{a}\,(t)\,d\,t = \mathbf{u}_x \int_{t_1}^{t_2} a_x\,(t)\,d\,t + \mathbf{u}_y \int_{t_1}^{t_2} a_y\,(t)\,d\,t + \mathbf{u}_z \int_{t_1}^{t_2} a_z\,(t)\,d\,t \quad :$$

*l'integrale di un vettore ha come componenti gli integrali delle componenti del vettore*. Continuano a valere le usuali regole.

### Integrale di linea

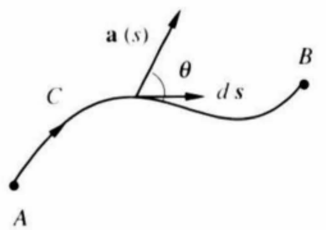



Fig. C.24

Consideriamo una curva continua $C$, di estremi $A$ e $B$, nei punti della quale è definito un vettore $\mathbf{a}\,(s)$, essendo $s$ una coordinata curvilinea che individua il punto corrente sulla curva. Se $d\,\mathbf{s}$ è un vettore infinitesimo tangente alla curva nel punto $P$, calcoliamo il prodotto scalare

$$\mathbf{a}\,(s)\cdot d\,\mathbf{s} = a\,(s)\cos\theta\,d\,s = a_T\,(s)\,d\,s$$

dove $a_T\,(s)$ è la componente di $\mathbf{a}\,(s)$ tangente alla curva nel punto $P$. Si sommano tutti questi infiniti contributi infinitesimi ottenuti suddividendo la curva $C$ in infiniti elementi $d\,\mathbf{s}$; il risultato si chiama *integrale di linea* di $\mathbf{a}$ lungo la linea $C$ orientata da $A$ a $B$ e si indica con

$$\Gamma(A \to B \text{ lungo } C) = \int_A^B \mathbf{a} \cdot d\,\mathbf{s} \quad . \tag{C.21}$$

Integrale di linea di un vettore

*L'integrale di linea $\Gamma$ è uno scalare*; dati i punti $A$ e $B$ in generale il suo valore *dipende* dalla curva $C$ che congiunge $A$ e $B$.

Se la curva è chiusa ($A \equiv B$) si parla di *circuitazione* di $\mathbf{a}$ *lungo la linea chiusa* e si usa il simbolo

$$\oint \mathbf{a} \cdot d\,\mathbf{s} \quad .$$

## C.6 GRADIENTE DI UNA FUNZIONE SCALARE

Sia $f\,(x, y, z)$ una funzione scalare, continua e derivabile, delle coordinate del punto $P$ in una certa regione dello spazio. Nel passaggio dal punto $P$ al punto $P'$ di coordinate $x + d\,x$, $y + d\,y$, $z + d\,z$ la variazione della funzione è espressa da

$$\begin{aligned} d\,f &= f\,(x + d\,x, y + d\,y, z + d\,z) - f\,(x, y, z) = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}\, d\,x + \frac{\partial f}{\partial y}\, d\,y + \frac{\partial f}{\partial z}\, d\,z \quad , \end{aligned} \tag{C.22}$$

come visto nella (A.2) dell'appendice A. Il vettore $\mathbf{PP'}$ è rappresentato da

$$d\,\mathbf{r} = \mathbf{PP'} = d\,x\,\mathbf{u}_x + d\,y\,\mathbf{u}_y + d\,z\,\mathbf{u}_z \quad .$$

A partire dalle derivate parziali della funzione $f$ costruiamo il vettore

$$\mathbf{grad}\, f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathbf{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathbf{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathbf{u}_z \tag{C.23}$$

Gradiente di una funzione scalare

detto *gradiente della funzione f*. Se confrontiamo (C.23) e (C.22), con l'espressione di $d\,\mathbf{r}$ e con (C.10), che dà il prodotto scalare in funzione delle componenti, vediamo che

$$d\,f = \mathbf{grad}\, f \cdot d\,\mathbf{r} \quad . \tag{C.24}$$

Questo fatto ci dice innanzitutto che il *gradiente*, definito da (C.23), *è* effettivamente *un vettore*, in quanto il suo prodotto scalare per un altro vettore dà una quantità scalare; inoltre, scrivendo (C.24) come

$$d\,f = (\,\mathbf{grad}\, f\, \cos\theta\,)\, d\,r \quad ,$$

vediamo che la variazione della funzione $f$ per uno spostamento $d\,r$ è eguale al prodotto di $d\,r$ per la proiezione del gradiente della funzione sulla direzione dello spostamento.

Consideriamo due spostamenti particolari. Il luogo dei punti in cui $f$ assume un valore costante, individuato dall'equazione $f$ = costante, rappresenta una superficie nello spazio: per uno spostamento $d\,\mathbf{r}$ lungo una tale superficie $d\,f = 0$ e quindi, da (C.24), risulta che *il gradiente di $f$ è perpendicolare alle superficie su cui $f$ è costante* (se $f$ è la temperatura si parla di *superficie isoterme*, se $f$ è la pressione di *superficie isobariche*, se $f$ è l'energia potenziale di *superficie equipotenziali*). Se lo stesso spostamento è effettuato in direzione parallela e concorde al gradiente, $d\,f$ risulta invece massima ($\cos\,\theta = 1$).

Nella figura C.25 sono mostrati alcuni spostamenti, tutti eguali in modulo, a partire da un punto di una superficie $f$ = costante.

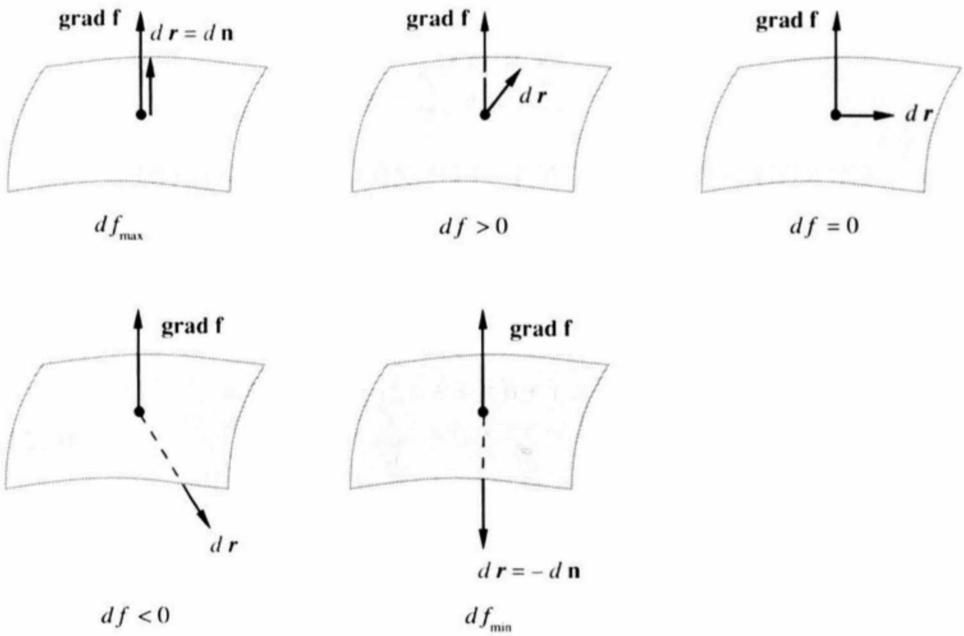



**Fig. C.25**

Quindi *il gradiente della funzione $f$ è un vettore che in ogni punto è ortogonale alla superficie $f$ = costante passante per quel punto e che con il suo verso indica il verso di massima variazione di $f$*; il suo modulo è dato da

$$|\,\mathbf{grad}\,f\,| = \frac{df}{dn} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2} \quad .$$

In conclusione, data una funzione scalare $f\,(x,\,y,\,z)$, con l'operazione gradiente si costruisce una funzione vettoriale **grad** $f$, a sua volta funzione della posizione, che riassume le informazioni sulle variazioni della funzione $f$ nello spazio, dato che permette di calcolare $d\,f$ per qualsiasi spostamento $d\,\mathbf{r}$.

La figura C.26 mostra alcune superficie appartenenti alla famiglia di superficie $f$ = costante: ciascuna corrisponde a un diverso valore della costante. Le linee tratteggiate sono tali che in ogni loro punto la direzione della tangente alla curva coincide con la direzione del gradiente in quel punto: esse sono orientate nel verso di crescita di $f$ e sono ortogonali alle superficie $f$ = costante.

Sia direttamente per il fatto che è un vettore, sia analizzando come si possono

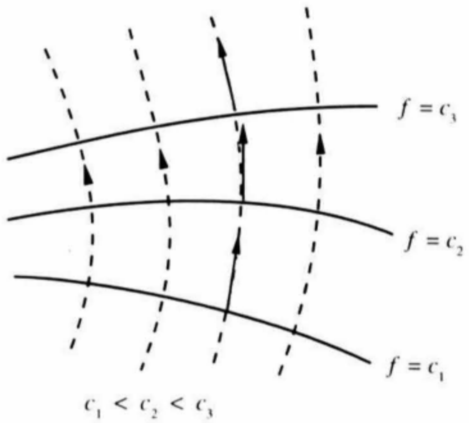



**Fig. C.26**

definire direzione, verso e modulo, è evidente che il gradiente è invariante rispetto alla scelta del sistema di riferimento. D'altra parte, come abbiamo notato più volte, l'espressione (C.23) in un sistema cartesiano ortogonale è utile sia per comprenderne bene il significato che per eseguire calcoli specifici. In particolari problemi può essere più appropriato adottare altri sistemi di coordinate, per esempio polari; allora, ferme restando le proprietà del gradiente, la (C.23) assume una forma diversa.

# Indice analitico