Escuela Superior
de Ingeniería y Tecnología
Universidad de La Laguna

Reducción entre SAT y 3SAT

Memoria

Complejidad Computacional

Marta Julia González Padrón
(alu0101254487@ull.edu.es)

Adal Díaz Fariña
(alu0101112251@ull.edu.es)

Óscar Moreira Estévez
(alu0101209067@ull.edu.es)

Vanessa Valentina Villalba Pérez
(alu0101265704@ull.edu.es)

Índice:

1. Problemas involucrados.

Sabiendo que se quiere realizar una transformación polinomial a partir del problema de la Satisfactibilidad al problema de la 3-Satisfactibilidad, se debe tomar en cuenta que se tienen características en común tales como:

- Literales o también conocidos como variables proposicionales, cuyos valores serán dados inicialmente.
- Cláusulas, que hacen referencia a una disyunción de literales.
- Conjunto de cláusulas, las cuales están conformadas de cláusulas en Forma Normal Conjuntiva.

1.1. Satisfactibilidad (SAT).

El problema de satisfactibilidad o *SAT* tiene como entrada un conjunto de cláusulas compuesto a partir de un conjunto finito de variables. Este conjunto de cláusulas estará definido de la siguiente manera: $C = \{c_1, c_2, ..., c_m\}$, donde m es el número subclausulas del conjunto C. El conjunto finito de variables se denomina U.

Para que este problema se cumpla, debe existir una asignación booleana para el conjunto U que satisfaga todas las cláusulas de C. Esto quiere decir que tras aplicar las operaciones lógicas dentro de cada cláusula, cada una de ellas debe ser verdadera.

1.2. 3-Satisfactibilidad (3SAT).

Este problema es prácticamente igual que el anterior. En lo único que se diferencian es que el tamaño de cada una de las subclausulas de C debe de ser exactamente de tamaño 3. Es por esto que al igual que en el problema de satisfactibilidad, el problema *3SAT* recibe como entrada un conjunto de cláusulas compuesto a partir de un conjunto finito de variables donde cada subcláusula es de tamaño 3. Este conjunto de cláusulas estará definido de la siguiente manera:

$$C = \{c_1, c_2, ..., c_m\}, \ tal\ que\ |c_i| = 3,\ para\ 1 \leq i \leq m$$

donde m es el número subclausulas del conjunto C. El conjunto finito de variables se denomina U.

2. Demostración de NP-Completitud.

3SAT es una versión restringida del *SAT*. Es decir, funciona de igual manera que el *SAT* pero está limitado exactamente a 3 literales por cláusula. Debido a esta estructura más sencilla se usa ampliamente para probar diferentes resultados de otros problemas de NP-Completitud.

3SAT es un problema de NP-completitud. ¿Y qué significa que sea miembro de la clase de problemas NP-completos? Básicamente significa que existe un algoritmo que dada una solución para un instancia de *3SAT* verifica la validez de una solución en tiempo polinomial y es reconocida por una Máquina de Turing No Determinista (*NDTM*).

Transformamos *SAT* a *3SAT*. Como se mencionó anteriormente partimos de un conjunto de cláusulas compuesto a partir de un conjunto finito de variables. Este conjunto de cláusulas estará definido de la siguiente manera: $C = \{c_1, c_2, ..., c_m\}$, donde m es el número subclausulas del conjunto C el cual es una entrada arbitraria del SAT. El conjunto finito de variables se denomina U. A partir de ahí, construimos un nuevo conjunto C' con cláusulas de tamaño 3. A partir de el conjunto original C, que se basará en un nuevo conjunto de variables denominado U', el cual contendrá como mínimo el conjunto U. De esta manera el nuevo conjunto C' solo será satisfactible si el conjunto C lo es, ya que son equivalentes.

La manera de construir el nuevo conjunto C' es partiendo del conjunto C pero se reemplazará la cláusula individual c_j contenida en C por una equivalente de tamaño 3 que pertenece al nuevo conjunto C'. Los posibles nuevos literales que sean necesarios se añaden al conjunto U', el cual ya contenía los literales del conjunto original . Es por esto que el nuevo conjunto de variables se construye de la siguiente manera:

$$U' = U \cup \left(\bigcup_{j=1}^{m} U'_j \right)$$

Para construir el conjunto de cláusulas C'_j y el conjunto de variables U'_j necesitamos saber el número de literales que vienen definidos en c_j , al cuál denominaremos k. La manera en la que vamos a construir C'_j y U'_j va a depender del valor de k:

Caso 1. $k = 1$

$$U'_j = \{ y_j^1, y_j^2 \}$$

$$C'_j = \left\{ \{u_1, y_j^1, y_j^2\}, \{u_1, \overline{y}_j^1, y_j^2\}, \{u_1, y_j^1, \overline{y}_j^2\}, \{u_1, \overline{y}_j^1, \overline{y}_j^2\} \right\}$$

Caso 2. $k = 2$

$$U'_j = \{ y_j^1 \}$$

$$C'_j = \left\{ \{u, u_2, y_j^1\}, \{u_1, u_2, \overline{y}_j^1\} \right\}$$

Caso 3. $k = 3$

$$U'_j = \emptyset$$

$$C'_j = \left\{ c_j \right\}$$

Caso 4. $k \geq 4$

$$U'_j = \left\{ y_j^i / 1 \leq i \leq k - 3 \right\}$$

$$C'_j = \left\{ u_1, u_2, y_j^1 \right\} \cup \left\{ \left\{ \overline{y}_j^i, u_{i+2}, y_j^{i+1} \right\} / 1 \leq i \leq k - 4 \right\} \cup \left\{ \overline{y}_j^{k-3}, u_{k-1}, u_k \right\}$$

3. Ejemplo 3SAT

Tomando como referencia las variables utilizadas en apartados anteriores, se propone el siguiente ejemplo de transformación SAT a 3SAT.

Entrada SAT	Salida 3SAT
$U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$ $C = \{$ $\{\overline{u}_1\},$ $\{\overline{u}_1, u_2\},$ $\{\overline{u}_1, u_2, u_3\},$ $\{u_1, u_2, \overline{u}_3, \overline{u}_4\},$ $\{\overline{u}_1, u_2, \overline{u}_3, \overline{u}_4, u_5, u_5\}$ $\}$	$U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, y_1, y_2, y_3\}$ $C = \{$ $\{\{\overline{u}_1, y_1, y_2\}, \{\overline{u}_1, y_1, \overline{y}_2\}, \{\overline{u}_1, \overline{y}_1, y_2\}, \{\overline{u}_1, \overline{y}_1, \overline{y}_2\}\}$ $\{\{\overline{u}_1, u_2, y_1\}, \{\overline{u}_1, u_2, \overline{y}_1\}\},$ $\{\{\overline{u}_1, u_2, u_3\}\},$ $\{\{u_1, u_2, y_1\}, \{\overline{u}_3, \overline{y}_4, \overline{y}_2\}\},$ $\{\{\overline{u}_1, u_2, y_1\}, \{\overline{y}_1, \overline{u}_3, y_2\}, \{\overline{y}_2, \overline{u}_4, y_3\}, \{u_5, u_6, \overline{y}_3\}\}$ $\}$

4. Referencias.

[1] 3SAT: Demostración de NP-completitud para el 3SAT. [En línea]. Disponible en: https://github.com/CC-ULL/3SAT.

[2] Wikipedia contributors, "Boolean satisfiability problem", Wikipedia, The Free Encyclopedia, 09-ene-2022. [En línea]. Disponible en: https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Boolean_satisfiability_problem&oldid=1064645537.

[3] @omorest @itsmartagonzalez @vanessavvp @AdalDiazFarina, 3SAT. [En línea]. Disponible en: https://github.com/omorest/3SAT