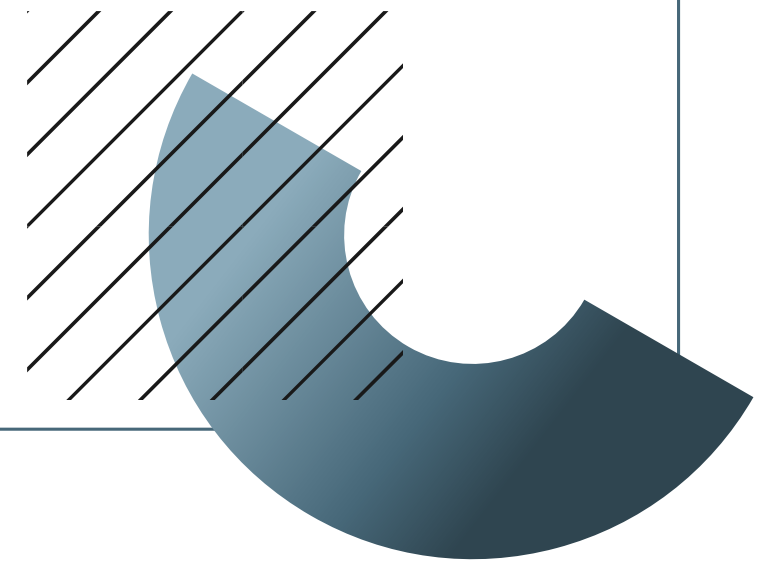


# Reducción entre SAT y 3SAT

Grupo 4 - Complejidad Computacional

# Tabla de Contenidos

- Introducción
- Problemas involucrados
- Demostración de NP-Compleitud
- Transformación de SAT a 3SAT
- Desglose del Algoritmo
- Ejemplos

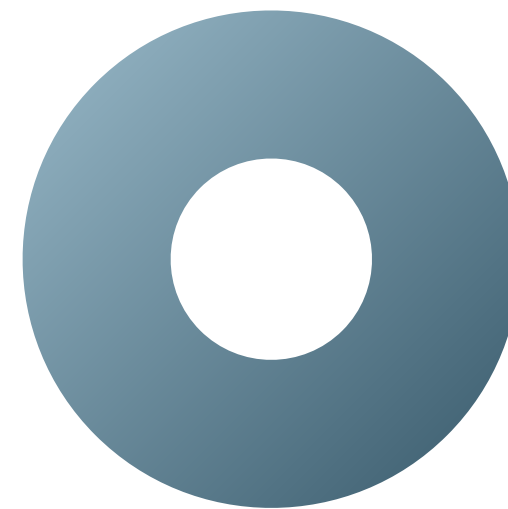
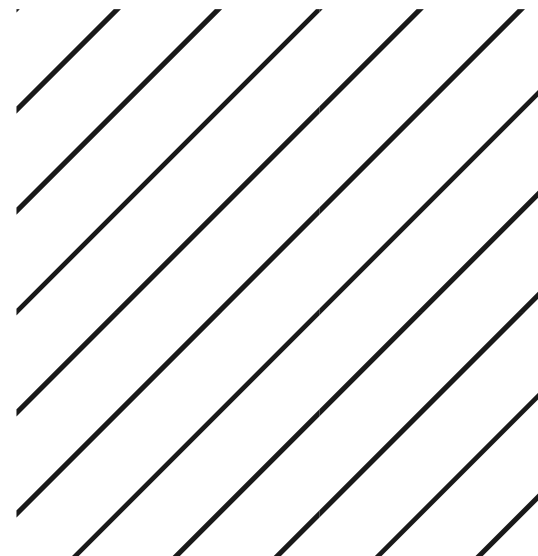
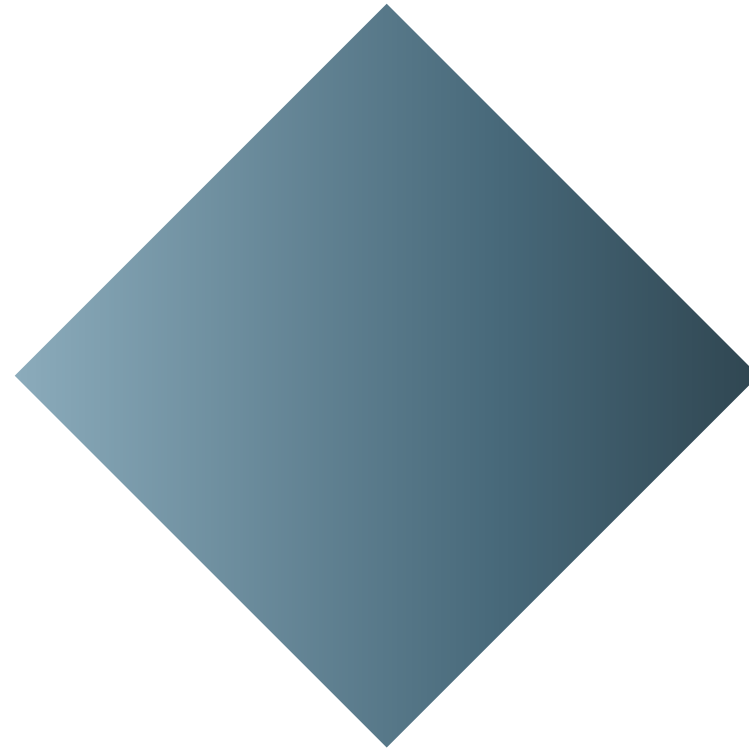


# Introducción

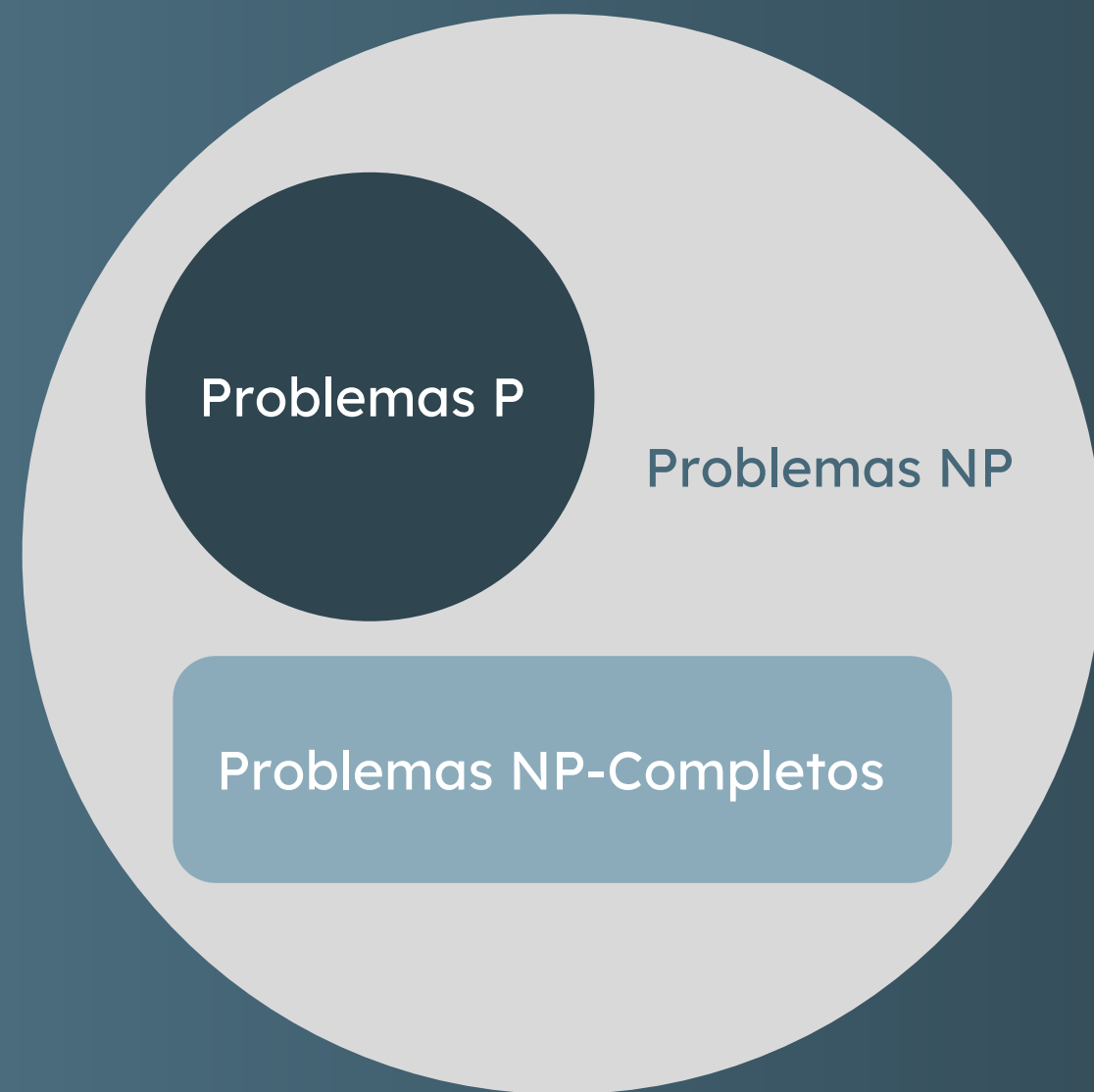
- Reducción Polinomial
- Elemento clave de la Teoría de la NP-Complejidad.
- Transforma un lenguaje asociado a un problema en otro.
- Ejecución en tiempo polinomial.

# Problemas Involucrados

- SATisfactibilidad
- 3-SATisfactibilidad



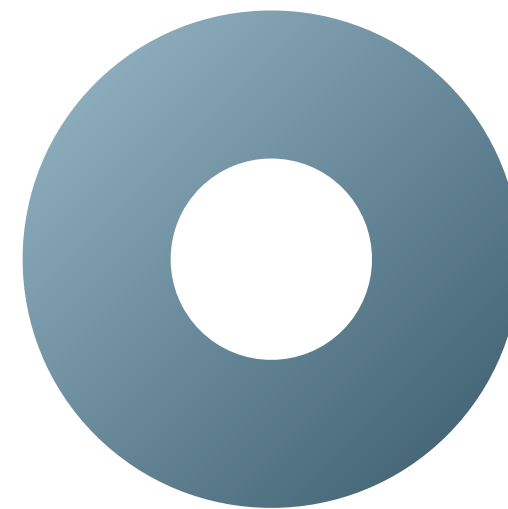
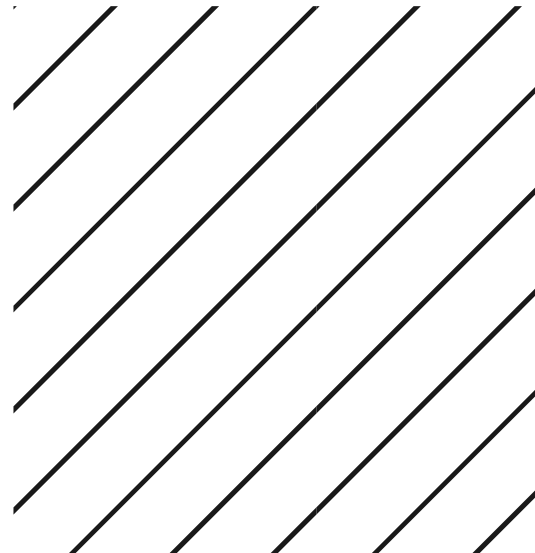
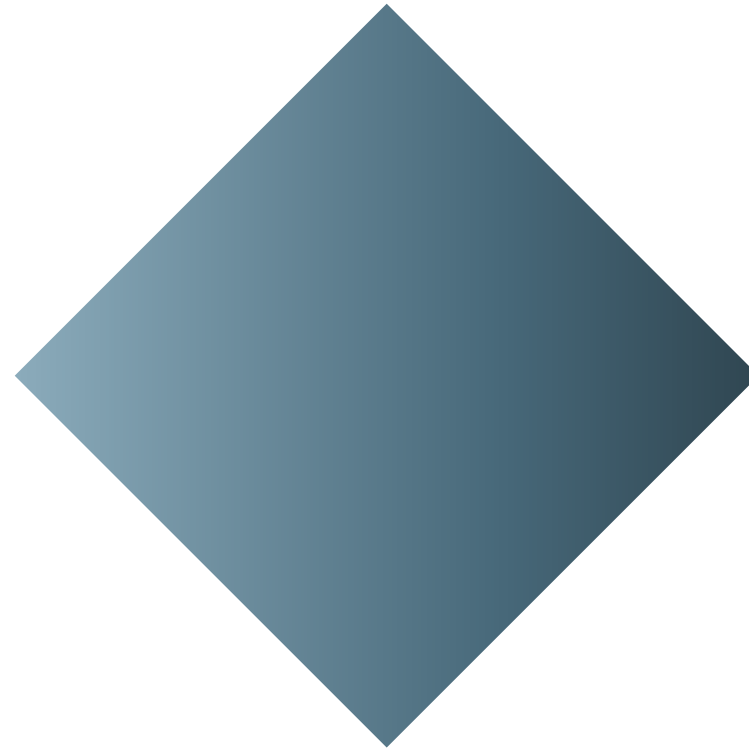
SAT	3SAT
<p>Entrada:</p> $C = \{c_1, c_2, \dots, c_m\}$ <p>compuesto a partir de</p> $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$	<p>Entrada:</p> $C = \{c_1, c_2, \dots, c_m\}$ <p>compuesto a partir de</p> $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ <p>tal que <math> c_i  = 3</math> para <math>1 \leq i \leq m</math></p>
<p>Pregunta:</p> <p>¿Existe una asignación booleana para <math>U</math> que satisfaga todas las clausulas de <math>C</math>?</p>	



# Demostración de NP-Compleitud

- Teorema de Cook - Levin (1971)
- NDTM reconoce el L(3SAT)
- $L_{SAT} \preceq L_{3SAT}$

# Transformación SAT a 3SAT



# SAT

- Conjunto de variables

$$U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$$

- Conjunto de cláusulas

$$C = \{c_1, c_2, \dots, c_m\}$$



SAT no tiene limitaciones en el número de literales por cláusula que puede tener.

# 3-SAT

- Conjunto de variables

$$U' = \{u'_1, u'_2, \dots, u'_n\}$$

- Conjunto de cláusulas

$$C' = \{c'_1, c'_2, \dots, c'_m\}$$



En 3-SAT cada cláusula tiene que tener exactamente 3 literales.





# ¿Cómo se crean los diferentes conjuntos?

$$U' = U \cup \left( \bigcup_{j=1}^m U'_j \right)$$

$$C' = \bigcup_{j=1}^m C_j.$$



Unión de las variables originales  $U$  y algunas variables adicionales  $U'_j$



Reemplaza la cláusula individual  $c_j$  perteneciente a  $C$  por un conjunto  $C'_j$  de cláusulas de tres literales

# Caso 1:

$$C_j = \{u_1\}$$

$$k = |C_j| = 1$$

$$|U'_j| = 3 - k$$



$$C'_j = \{$$
$$\{u_1, y_j^1, y_j^2\},$$
$$\{u_1, y_j^1, \bar{y}_j^2\},$$
$$\{u_1, \bar{y}_j^1, y_j^2\},$$
$$\{u_1, \bar{y}_j^1, \bar{y}_j^2\}$$
$$\}$$

## Caso 2:

$$C_j = \{u_1, u_2\}$$

$$k = |C_j| = 2$$

$$|U'_j| = 3 - k$$



$$C'_j = \{$$

$$\{u_1, u_2, y_j^1\},$$

$$\{u_1, u_2, \bar{y}_j^1\},$$

$$\}$$

# Caso 3:

$$C_j = \{u_1, u_2, u_3\}$$

$$k = |C_j| = 3$$

$$|U'_j| = 3 - k$$

$$C'_j = \{$$

$$\{u_1, u_2, u_3\}$$

}



# Caso 4:

$$C_j = \{u_1, \dots, u_m\} \quad k = |C_j| \geq 4 \quad |U'_j| = k - 3$$

$$C'_j = \{$$

$$\{u_1, u_2, y_j^1\},$$

$\cup$

$$\{\{\bar{y}_j^i, u_{i+2}, y_j^{i+1}\} : \forall 1 \leq i \leq k - 4\},$$

$\cup$

$$\{y_j^{k-3}, u_{k-1}, u_k\}\}$$





# Ejemplos



# Caso 1:

$$C_j = \{u_1\}$$

$$k = |C_j| = 1$$

$$|U'_j| = 2$$



$$C'_j = \{$$

$$\{u_1, y_j^1, y_j^2\},$$

$$\{u_1, y_j^1, \bar{y}_j^2\},$$

$$\{u_1, \bar{y}_j^1, y_j^2\},$$

$$\{u_1, \bar{y}_j^1, \bar{y}_j^2\}$$

$$\}$$

# Caso 1:

$$C_j = \{1\}$$

$$k = 1$$

$$y_j^1 = 1$$

$$y_j^2 = 1$$



$$C'_j = \{$$

$$\{1, 1, 1\},$$

$$\{1, 1, 0\},$$

$$\{1, 0, 1\},$$

$$\{1, 0, 0\}$$

$$\}$$



# Caso 1:

$$C_j = \{1\}$$

$$k = 1$$

$$y_j^1 = 1$$

$$y_j^2 = 1$$



$$C'_j = \{$$
$$\{1 \text{ or } 1 \text{ or } 1\}$$
$$\text{and}$$
$$\{1 \text{ or } 1 \text{ or } 0\},$$
$$\text{and}$$
$$\{1 \text{ or } 0 \text{ or } 1\},$$
$$\text{and}$$
$$\{1 \text{ or } 0 \text{ or } 0\}$$
$$\}$$

# Caso 1:

$$C_j = \{1\}$$

$$k = 1$$

$$y_j^1 = 1$$

$$y_j^2 = 1$$



$$C'_j = \{$$

$$\{1\}$$

*and*

$$\{1\},$$

*and*

$$\{1\},$$

*and*

$$\{1\}$$

$\}$

# Caso 1:

$$C_j = \{1\} \quad \Leftrightarrow \quad C'_j = \{1\}$$

## Caso 2:

$$C_j = \{u_1, u_2\}$$

$$k = 2$$

$$|U'_j| = 1$$



$$C'_j = \{$$

$$\{u_1, u_2, y_j^1\},$$

$$\{u_1, u_2, \bar{y}_j^1\},$$

$$\}$$

## Caso 2:

$$C_j = \{1, 1\}$$

$$k = 2$$

$$y_j^1 = 1$$



$$C'_j = \{$$

$$\{1, 1, 1\},$$

$$\{1, 1, 0\},$$

$$\}$$

## Caso 2:

$$C_j = \{1 \text{ or } 1\}$$

$$k = 2$$

$$y_j^1 = 1$$



$$C'_j = \{$$

$$\{1 \text{ or } 1 \text{ or } 1\}$$

*and*

$$\{1 \text{ or } 1 \text{ or } 0\}$$

$$\}$$

## Caso 2:

$$C_j = \{1\} \Leftrightarrow C'_j = \{1\}$$

# Caso 3:

$$C_j = \{u_1, u_2, u_3\}$$

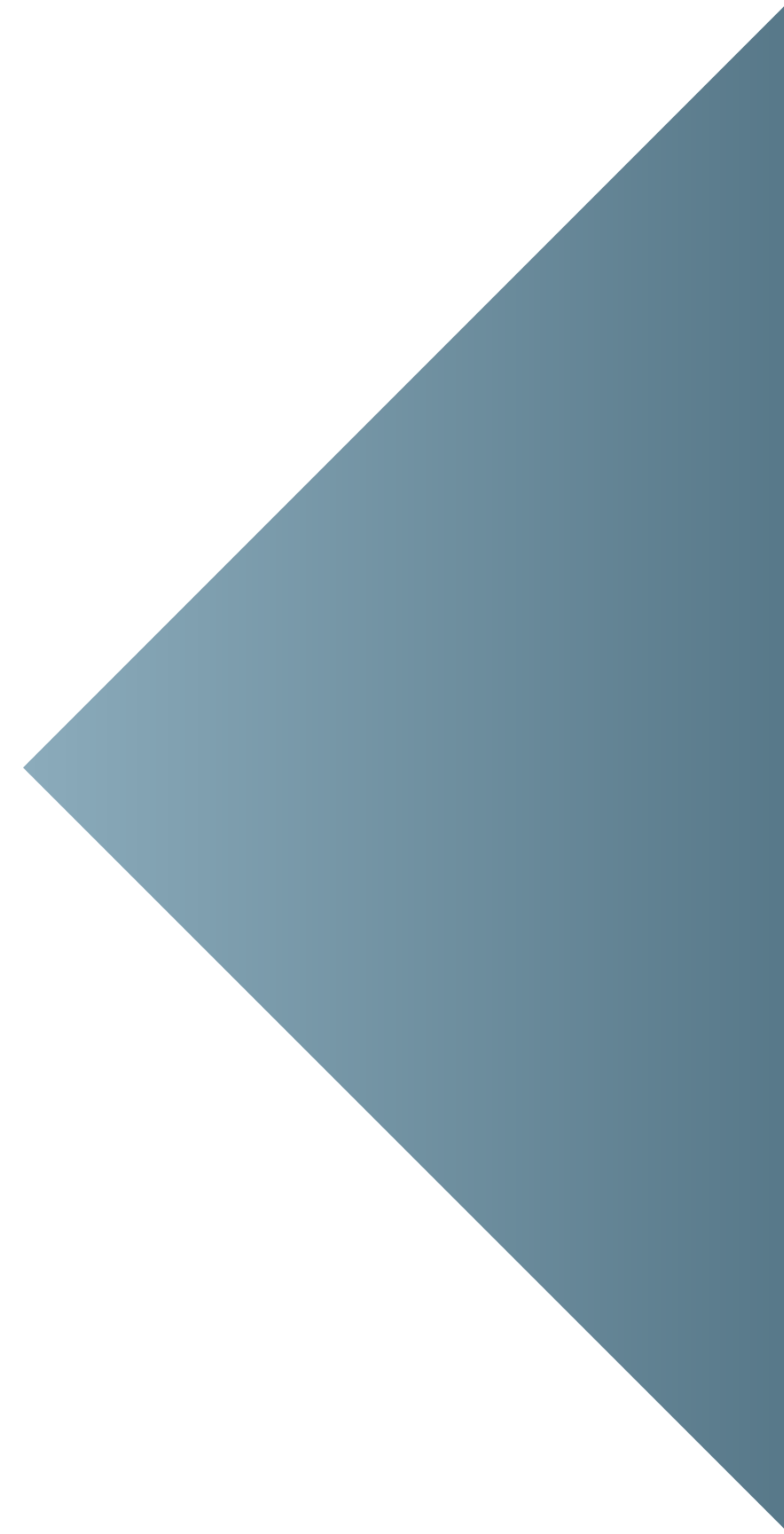
$$k = 3$$

$$|U'_j| = 0$$

$$C'_j = \{$$

$$\{u_1, u_2, u_3\}$$

}





# Caso 3:

$$C_j = \{1, 1, 1\}$$

$$k = 3$$

$$|U'_j| = 0$$



$$C'_j = \{ \\ \{1, 1, 1\} \\ \}$$

## Caso 3:

$$C_j = \{1, 1, 1\} \Leftrightarrow C'_j = \{1, 1, 1\}$$

# Caso 4:

$$C_j = \{u_1, u_2, u_3, \\ u_4, u_5, u_6\}$$

$$k = 6$$

$$|U'_j| = 3$$



$$C'_j = \{ \\ \{u_1, u_2, y_j^1\}, \\ \{\bar{y}_j^1, u_3, y_j^2\}, \\ \{\bar{y}_j^2, u_4, y_j^3\}, \\ \{u_5, u_6, \bar{y}_j^3\} \\ \}$$

# Caso 4:

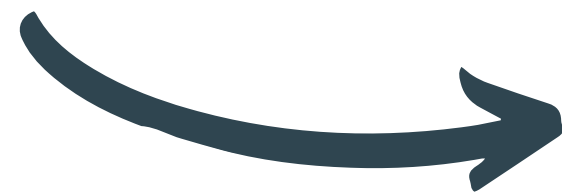
$$C_j = \{1, 1, 1, \\ 1, 1, 1\}$$

$$k = 6$$

$$y_j^1 = 1$$

$$y_j^2 = 1$$

$$y_j^3 = 1$$



$$C'_j = \{ \\ \{1, 1, 1\}, \\ \{0, 1, 1\}, \\ \{0, 1, 1\}, \\ \{1, 1, 0\} \\ \}$$

# Caso 4:

$C_j = \{1 \text{ or } 1 \text{ or } 1$   
 $\text{or } 1 \text{ or } 1 \text{ or } 1\}$

$k = 6$

$y_j^1 = 1$

$y_j^2 = 1$

$y_j^3 = 1$



$C'_j = \{$   
 $\{1 \text{ or } 1 \text{ or } 1\},$   
 $\text{and}$   
 $\{0 \text{ or } 1 \text{ or } 1\},$   
 $\text{and}$   
 $\{0 \text{ or } 1 \text{ or } 1\},$   
 $\text{and}$   
 $\{1 \text{ or } 1 \text{ or } 0\}$   
 $\}$



# Caso 4:

$C_j = \{1 \text{ or } 1 \text{ or } 1$   
 $\text{or } 1 \text{ or } 1 \text{ or } 1\}$

$k = 6$

$y_j^1 = 1$

$y_j^2 = 1$

$y_j^3 = 1$



$C'_j = \{$

$\{1\},$

*and*

$\{1\},$

*and*

$\{1\},$

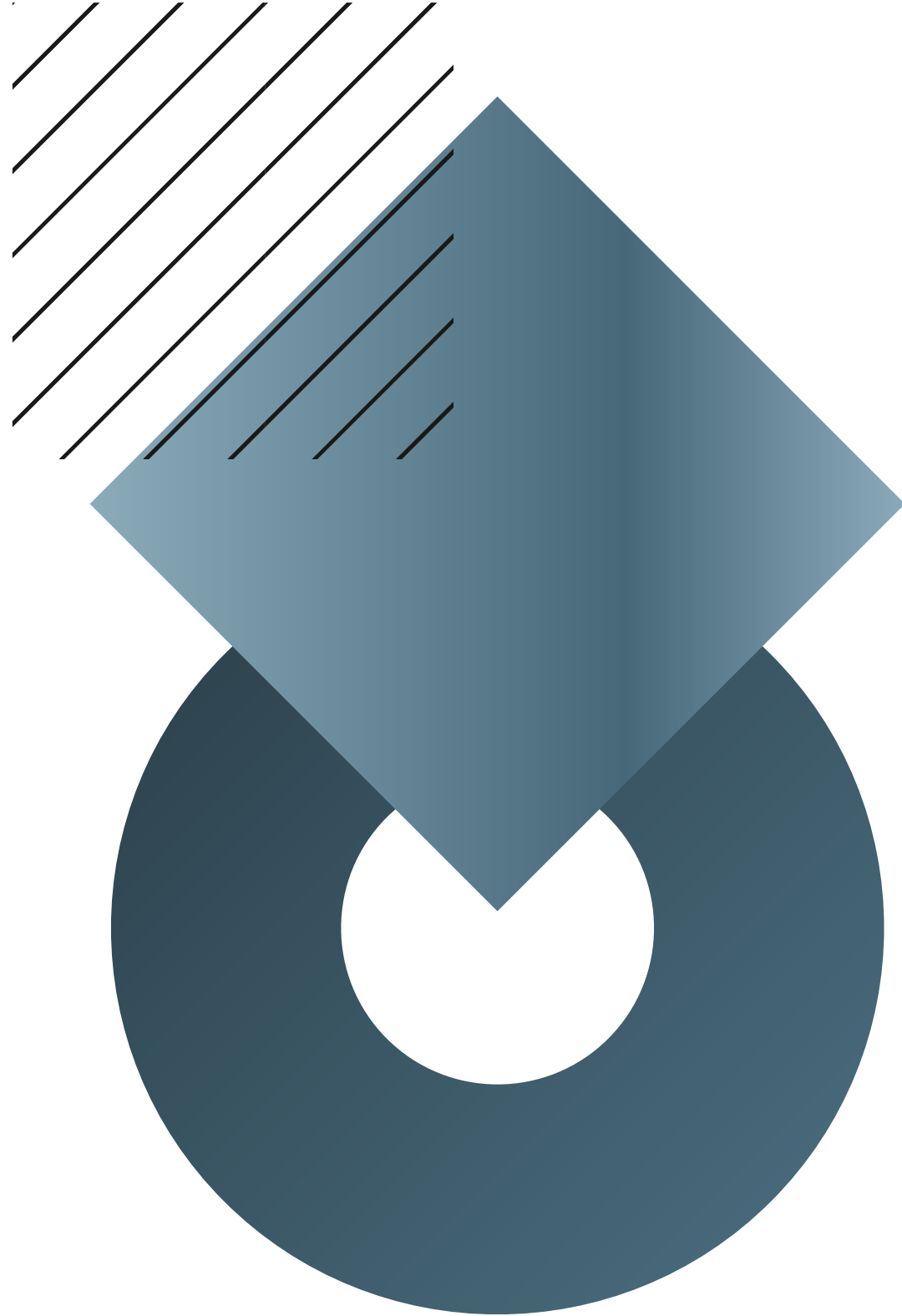
*and*

$\{1\}$

$\}$

## Caso 4:

$$C_j = \{1\} \Leftrightarrow C'_j = \{1\}$$



# WEB SAT - 3SAT

*<https://3-sat.vercel.app/>*



# Referencias

- 3SAT: Demostración de NP-completitud para el 3SAT. [En línea]. Disponible en: <https://github.com/CC-ULL/3SAT>.
- Wikipedia contributors, “Boolean satisfiability problem”, Wikipedia, The Free Encyclopedia, 09-ene-2022. [En línea]. Disponible en: [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Boolean\\_satisfiability\\_problem&oldid=1064645537](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Boolean_satisfiability_problem&oldid=1064645537).
- @omorest @itsmartagonzalez @vanessavvp @AdalDiazFarina, 3SAT. [En línea]. Disponible en: <https://github.com/omorest/3SAT>

¡Gracias!



Óscar Moreira  
Estévez

alu0101209067



Vanessa Villalba  
Pérez

alu0101265704



Marta Julia  
González Padrón

alu0101254487



Adal Díaz  
Fariña

alu0101112251