北京大學 PEKING UNIVERSITY

微分方程

Differential Equations

主讲人：倪星宇

2024 年 6 月 3 日

微分方程的基本概念

- 什么是微分方程
  - 表示未知函数、未知函数的导数与自变量之间的关系的方程
- 微分方程的分类
  - 常微分方程：未知函数是一元函数（导数为全导数）
  - 偏微分方程：未知函数是多元函数（导数为偏导数）
- 微分方程的求解方法
  - 通解法：根据特定微分方程的通解代值求特解
  - 分离变量法、格林函数法
  - ……
  - 数值法（计算机图形学研究的核心之一）

可分离变量的微分方程

- 标准形式：$\psi(y)\mathrm{d}y = \phi(x)\mathrm{d}x$
  - 等式两边积分即得方程的通解 $\int \psi(y)\mathrm{d}y = \int \phi(x)\mathrm{d}x + C$
  - 例：求方程 $x(1+y^2)\mathrm{d}x - y(1+x^2)\mathrm{d}y = 0$ 的通解
    - $\frac{y}{1+y^2}\mathrm{d}y = \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$
    - $\int \frac{y}{1+y^2}\mathrm{d}y = \int \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x + C'$
    - $\frac{1}{2}\ln(1+y^2) = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \frac{1}{2}\ln C$
    - $\ln(1+y^2) = \ln C(1+x^2)$
    - $y^2 = C(1+x^2) - 1$

一阶线性微分方程

- 标准形式：$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = Q(x)$
  - 若 $Q(x) \equiv 0$，方程称为**齐次**的
  - 若 $Q(x) \neq 0$，方程称为**非齐次**的
- 线性齐次方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = 0$
  - 解法（分离变量）
    - $\frac{\mathrm{d}y}{y} = -P(x)\mathrm{d}x$
    - $\ln|y| = -\int P(x)\mathrm{d}x + C_1$
    - $y = C\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\ (C = \pm\mathrm{e}^{C_1})$
  - 应用：体渲染

一阶线性微分方程

- 线性非齐次方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = Q(x)$
  - 解法（待定系数）
    - $y = C(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$
    - $y' = C'(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x} + C(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}[-P(x)]$
    - $y' + P(x)y = C'(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x} = Q(x)$
    - $\int C'(x)\mathrm{d}x = \int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$
    - $C(x) = \int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C$
  - $y = \mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left[\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right]$
    - $C\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$ 为齐次方程的通解
    - $\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$ 为非齐次方程的特解

一阶非线性微分方程

- 伯努利方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)y^n\ (n\neq 0,1)$
  - 解法（变量代换）
    - $y^{-n}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y^{1-n}=Q(x)$
    - $\frac{1}{1-n}\frac{\mathrm{d}(y^{1-n})}{\mathrm{d}x}+P(x)(y^{1-n})=Q(x)$
    - $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+(1-n)P(x)z=(1-n)Q(x)\ (z=y^{1-n})$
    - $y^{1-n}=z=\mathrm{e}^{-(1-n)\int P(x)\mathrm{d}x}\left[(1-n)\int Q(x)\mathrm{e}^{(1-n)\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]$

高阶微分方程

- 可降阶的高阶微分方程
  - $y^{(n)} = f(x)$
    - 连续进行 n 次不定积分即得通解
  - $y'' = f(x, y')$
    - 设 $p = y'$，则有 $p' = f(x, p)$
    - 设一阶方程 $p' = f(x, p)$ 有通解 $p = p(x, C_1)$
    - 积分 $y' = p(x, C_1)$ 得 $y = \int p(x, C_1)\mathrm{d}x + C_2$
  - $y'' = f(y, y')$
    - 设 $p = y'$，有 $y'' = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$
    - $p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = f(y, p)$，解得 $y' = p = \phi(y, C_1)$
    - $\int \frac{\mathrm{d}y}{\phi(y, C_1)} = x + C_2$

二阶微分方程

- 标准形式：$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + P(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + Q(x)y = f(x)$
  - 若 $f(x) \equiv 0$，方程称为**齐次**的
  - 若 $f(x) \neq 0$，方程称为**非齐次**的
- 二阶线性齐次方程 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$
  - 定理：若 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是上述方程的两个线性无关的解
    - 则 $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ 是方程的通解
    - 该定理可以拓展到 n 阶线性齐次方程中
- 二阶线性非齐次方程 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$
  - 定理：若 $y^*(x)$ 是非齐次方程的特解，$Y(x)$ 是对应齐次方程的通解
    - 则 $y = y^* + Y$ 是非齐次方程的通解

二阶微分方程

- 二阶**常系数**齐次线性微分方程：$y'' + py' + qy = 0$
  - 解法（待定系数）
    - 设 $y = \mathrm{e}^{rx}$ 是方程的解，则 $(r^2 + pr + q)\mathrm{e}^{rx} = 0$
    - $r^2 + pr + q = 0$ 为特征方程，$r_{1,2} = \frac{-\mathrm{p} \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$ 为特征根
    - 判别式 $\Delta = p^2 - 4q$
      - > 0：得到两个线性无关的特解 $y_1 = \mathrm{e}^{r_1 x}$ 和 $y_2 = \mathrm{e}^{r_2 x}$
      - $= 0$：得到一个特解 $y_1 = \mathrm{e}^{-\frac{px}{2}}$，设 $y_2 = u(x)\mathrm{e}^{-\frac{px}{2}}$
        - $[u(x)r^2 + 2u'(x)r + u''(x)]\mathrm{e}^{-\frac{px}{2}} + p[u(x)r + u'(x)]\mathrm{e}^{-\frac{px}{2}} + qu(x)\mathrm{e}^{-\frac{px}{2}} = 0$
        - $u''(x) + (2r + p)u'(x) + (r^2 + pr + q)u(x) = 0$
        - $u''(x) = 0$，取 $u(x) = x$ 得 $y_2 = x\mathrm{e}^{-\frac{px}{2}}$
      - < 0：$r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$，利用欧拉公式 $\mathrm{e}^{ix} = \cos x + i \sin x$
        - $y_1 = \mathrm{e}^{\alpha x} \cos \beta x$，$y_2 = \mathrm{e}^{\alpha x} \sin \beta x$

二阶微分方程

- 高阶常系数齐次线性微分方程：$y^{(n)}+P_1y^{(n-1)}+\cdots+P_{n-1}y'+P_ny=0$
  - 特征方程 $r^n+P_1r^{n-1}+\cdots+P_{n-1}r+P_n=0$
    - k 重根 r 对应于通解项 $\left(C_1+C_2x+\cdots+C_kx^{k-1}\right)\mathrm{e}^{rx}$
    - k 重共轭复根 $\alpha\pm i\beta$ 对应于通解项
      - $\mathrm{e}^{\alpha x}\left[\left(C_1+C_2x+\cdots+C_kx^{k-1}\right)\cos\beta x+\left(D_1+D_2x+\cdots+D_kx^{k-1}\right)\sin\beta x\right]$
- 二阶常系数非齐次线性微分方程：$y''+py'+qy=f(x)$
  - $f(x)=\mathrm{e}^{\lambda x}P_m(x)$ ($P_m(x)$ 表示最高 m 次的多项式，下同)
    - $y^*=x^kR_m(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$
      - $R_m(x)$ 为某个 m 次多项式，$k=0,1,2$ (λ 不是特征方程的根、是单根、是重根)
  - $f(x)=\mathrm{e}^{\lambda x}\left[P_l(x)\cos\omega x+Q_n(x)\sin\omega x\right]$
    - $y^*=x^k\mathrm{e}^{\lambda x}\left[R_m(x)\cos\omega x+S_m(x)\sin\omega x\right]$
      - $m=\max\{l,n\}$，$k=0,1$ ($\lambda\pm\omega i$ 不是特征方程的根、是共轭复根)

二阶偏微分方程

- 二元二阶线性偏微分方程
  - $a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2b\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+d\frac{\partial u}{\partial x}+e\frac{\partial u}{\partial y}+gu=f$
    - a,b,c,d,e,g,f 都是自变量 x,y 的函数，且二阶偏导数连续，其中 a,b,c 不同时为零
  - 判别式 $\Delta=b^2-ac$ 在不同点处可能取不同值
    - $\Delta>0\ (\forall x,y)$：方程为双曲型偏微分方程
    - $\Delta=0\ (\forall x,y)$：方程为抛物型偏微分方程
    - $\Delta<0\ (\forall x,y)$：方程为椭圆型偏微分方程
- 多元二阶线性偏微分方程
  - $\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+cu=f$
    - 构建二次型 $\mathcal{D}=\{a_{ij}\}$，标准化后按系数的符号判断偏微分方程的类型

二阶偏微分方程

- 双曲型：波动方程
  - $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$（一维）
    - 受迫振动：$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{f}{\rho}$
  - $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \nabla^2 u = 0$（三维）
- 抛物型：热传导方程
  - $\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$（一维）
  - $\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa \nabla^2 u = 0$（三维）
    - 有源项：$\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa \nabla^2 u = f(x, y, z, t)$
- 椭圆型：拉普拉斯方程
  - 可以看成热传导方程的稳定问题
  - $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$（一维）
  - $\nabla^2 u = 0$（三维）
    - 泊松方程：$\nabla^2 u = f(x, y, z, t)$
    - 有源项（如电场方程中的电荷）
  - 若波动方程中
    - $u(x, y, z, t) = v(x, y, z)\mathrm{e}^{-i\omega t}$
    - 波动方程变为亥姆霍兹方程
    - $\nabla^2 v(x, y, z) + k^2 v(x, y, z) = 0$

分离变量法

- 例：使用分离变量法求解波动方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$
    - 初值条件：$t = 0$ 时 $u = \phi(x)$ 且 $\frac{\partial u}{\partial t} = \psi(x)$
    - 分离变量：设 $u(x,t) = X(x)T(t)$
        - $X(x)T''(t) - a^2 X''(x)T(t) = 0$
        - $\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$
            - 该式成立当且仅当等式两端均为常数，设为 $-\lambda$
        - $T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0$
            - $T = A \sin\sqrt{\lambda} at + B\cos\sqrt{\lambda} at$
        - $X''(x) + \lambda X(x) = 0$
            - $X = C\sin\sqrt{\lambda} x + D\cos\sqrt{\lambda} x$

分离变量法

- 例：使用分离变量法求解波动方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0\ (0 < x < l)$
  - 初值条件：$t = 0$ 时 $u = \phi(x)$ 且 $\frac{\partial u}{\partial t} = \psi(x)$
  - 边界条件：$u(0, t) = u(l, t) = 0$
  - 分离变量：设 $u(x, t) = X(x)T(t) = \left(A \sin\sqrt{\lambda}at + B \cos\sqrt{\lambda}at\right)\left(C \sin\sqrt{\lambda}x + D \cos\sqrt{\lambda}x\right)$
    - 定解：$X(0) = X(l) = 0$
      - $C \sin 0 + D \cos 0 = D = 0$
      - $C \sin\sqrt{\lambda}l = 0$
      - $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \quad (n = 0,1,2,3 \dots)$
      - $u_n(x, t) = \sin\frac{n\pi}{l}x \left(A_n \sin\frac{an\pi}{l}t + B_n \cos\frac{an\pi}{l}t\right)$
    - $u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t)$
      - 考虑 ϕ 与 ψ，使用傅里叶展开决定 A_n, B_n

球谐函数

- 球坐标系下的拉普拉斯方程
  - $\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}=0$
  - 分离变量：$u(r,\theta,\phi)=R(r)Y(\theta,\phi)$
    - $Y\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+\frac{R}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{R}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2}=0$
    - $-\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)=\frac{1}{Y}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2}\right]=-\alpha$
  - 球谐函数方程：$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2}+\alpha Y=0$
    - 分离变量：$Y(\theta,\phi)=\Theta(\theta)\Phi(\phi)$
      - $\frac{\Phi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{\Theta}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}+\alpha\Theta\Phi=0$
      - $\frac{1}{\Theta\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\Phi\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}+\alpha=0$

球谐函数

- 球坐标系下的拉普拉斯方程
  - 球谐函数方程：$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2}+\alpha Y=0$
  - $\frac{1}{\Theta\sin}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)+\alpha=-\frac{1}{\Phi\sin^2\theta}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\phi^2}=\frac{\beta}{\sin^2\theta}$
    - $\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\phi^2}+\beta\Phi=0$
      - $\Phi_1=\cos\sqrt{\beta}\phi,\quad \Phi_2=\sin\sqrt{\beta}\phi$
      - 由 $\Phi(0)=\Phi(2\pi)$ 得 $\beta=m^2\ (m\in\mathbb{N})$
    - $\frac{1}{\Theta\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)+\alpha=\frac{m^2}{\sin^2\theta}$
      - $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+\left(\alpha-\frac{m^2}{1-x^2}\right)y=0\quad(x=\cos\theta,\quad y=\Phi)$
      - $x=\pm1$ 时 y 有界（自然边界条件）
        - 通过泰勒展开可解得 $\alpha=l(l+1)\ (l\in\mathbb{N})$

球谐函数

- 球坐标系下拉普拉斯方程的解：$u(r,\theta,\phi)=R(r)Y(\theta,\phi)=R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$
  - 径向方程：$r^2\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}r^2}+2r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}-l(l+1)R=0$
    - $R=A_l^m r^l+B_l^m\frac{1}{r^{l+1}}$
  - $\Phi_1=\cos m\phi,\quad \Phi_2=\sin m\phi$
  - 连带勒让德方程：$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]\Theta=0$
    - $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]y=0$
    - 其解记为 P_l^m，称为连带勒让德多项式
  - 归一化的复数球谐函数（$\int Y_l^m Y_k^n\,\mathrm{d}\Omega=\delta_{kl}\delta_{mn}$）
    - $Y_l^m=\sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\frac{2l+1}{4\pi}}P_l^m(\cos\theta)\mathrm{e}^{im\phi}$

球谐函数

- 归一化的球谐函数 ($\int Y_l^m Y_k^n \,\mathrm{d}\Omega = \delta_{kl}\delta_{mn},\ m,n \in \mathbb{Z}$)
  - $Y_l^m = \sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\frac{2l+1}{2\pi}} P_l^m(\cos\theta)\cos\phi \quad (m > 0)$
  - $Y_l^m = \sqrt{\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\frac{2l+1}{2\pi}} P_l^m(\cos\theta)\sin\phi \quad (m < 0)$
  - $Y_l^m = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l^m(\cos\theta) \quad (m = 0)$
- 勒让德方程：$m = 0$ 的特殊情况（解函数绕极轴旋转对称）
  - $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right] + l(l+1)y = 0$
    - 其解 $P_l(x)$ 称为 l 阶勒让德多项式

球谐函数

- 勒让德多项式的计算
  - 级数表示：$P_l(x)=\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{l}{2}\right\rfloor}(-1)^k\frac{(2l-2\ \ )!}{2^l k!(l-k)!(l-2k)!}x^{l-2k}$
  - 微分表示：$P_l(x)=\frac{1}{2^l l!}\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}(x^2-1)^l$
- 勒让德多项式的性质
  - $P_l(x)$ 的 l 个零点都是实的，且在 $(-1,1)$ 之内；$P_l(-x)=(-1)^l P_l(x)$
  - $\int_{-1}^{1}P_n(x)P_l(x)\mathrm{d}x=N_l^2\delta_{nl}$；$N_l=\sqrt{\frac{2}{2l+1}}$
- 球谐函数的应用
  - 作为基底展开球面函数（用若干系数近似表达环境光照贴图）

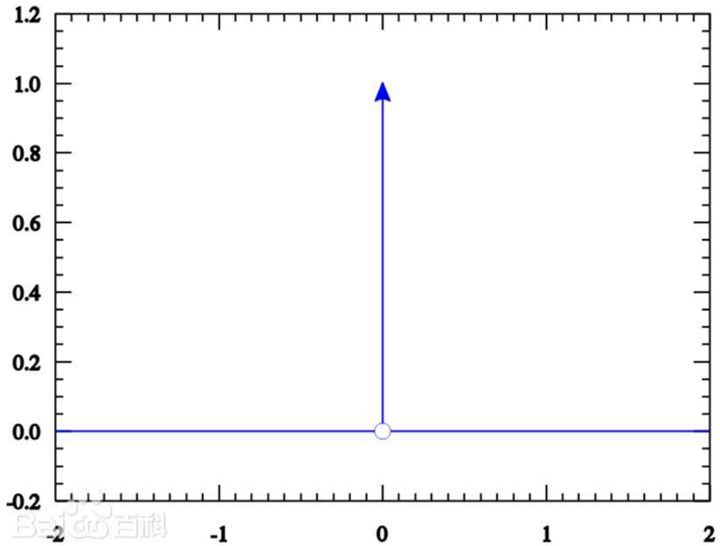
格林函数法

- 例：给定电荷密度分布，求电场强度
  - 电场高斯定理的积分形式：$\oiint_{\partial V} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} = \frac{q}{\varepsilon_0}$
    - q 为区域 V 中的电荷总量，ε_0 是一个物理常量
  - 电场高斯定理的微分形式：$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$
    - ρ 为电荷密度
  - 考虑下列问题：如何求 $\boldsymbol{r}_0$ 处大小为 q 的点电荷的电势与电场
    - $E(\boldsymbol{r}) = k\frac{q(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|^3}$ （高中物理）
    - $\phi(\boldsymbol{r}) = k\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}$ （大学物理）

    - 问题：点电荷处的电荷密度是多少？

格林函数法

- 狄拉克函数
  - $\delta(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} 0, & \boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{0} \\ \infty, & \boldsymbol{r} = \boldsymbol{0} \end{cases}$
  - $\int_V \delta(\boldsymbol{r}) \mathrm{d}V = \begin{cases} 1, & \boldsymbol{r} \in V \\ 0, & \boldsymbol{r} \notin V \end{cases}$
- 点电荷的密度：$q\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)$
  - $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = \frac{q\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)}{\varepsilon_0}$
    - $\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\phi$
  - $\boldsymbol{\nabla}^2\phi = -\frac{q\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)}{\varepsilon_0}$
    - 系拉普拉斯方程

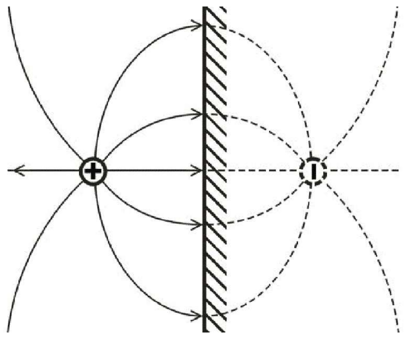


格林函数法

- 泊松方程的格林函数解
  - $\boldsymbol{\nabla}^2\phi = -\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)$
    - $\phi = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}$, $\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi}\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|^3}$
  - $\boldsymbol{\nabla}^2\phi = -\frac{q\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)}{\varepsilon_0}$
    - $\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}$, $\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|^3}$, $k = \frac{1}{4\pi\ {}_0}$
  - $u = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}$是泊松方程 $\boldsymbol{\nabla}^2 u = \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)$在无穷远边界条件下的格林函数解
    - 又称为泊松方程的基本解
    - 无穷远边界条件：$\lim\limits_{|\boldsymbol{r}|\to\infty} u = 0$
    - 由叠加原理得无穷远边界条件下 $\boldsymbol{\nabla}^2 u = f$ 的解（联想：给定电荷密度分布求电势）
      - $u = -\frac{1}{4\pi}\iiint\frac{f\mathrm{d}V}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}$

格林函数法

- 非无穷远边界条件的格林函数
  - 静电学中的电像法
    - 例：空间中有无穷大平面满足电势为零，左端有一点电荷
      - $\nabla^2\phi = -\frac{q\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)}{\varepsilon_0}, \quad \phi|_{x=0} = 0$
    - 上述方程的格林函数解为 $\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{|\boldsymbol{r}-(x_0,y_0,z_0)|} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{|\boldsymbol{r}-(-x_0,y_0,z_0)|}$
      - 等同于电荷的电势加上右侧镜像位置的异号电荷产生的电势
  - 类似地，可以利用格林函数+叠加原理求解方程



- 二维情形下的泊松方程基本解
  - 注意上述形式只适用于三维
  - 在二维中 $u = \frac{1}{2\pi}\ln|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|$是泊松方程 $\nabla^2 u = \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)$ 的无穷远边界条件解

格林函数法

- 格林恒等式
  - 设区域 V 内有连续可微的标量函数场 ϕ, ψ
  - 格林第一恒等式
    - $\int_V (\psi \nabla^2 \phi + \nabla \phi \cdot \nabla \psi) \mathrm{d}V = \oint_{\partial V} \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} \mathrm{d}A$
  - 格林第二恒等式
    - $\int_V (\psi \nabla^2 \phi - \phi \nabla^2 \psi) \mathrm{d}V = \oint_{\partial V} \left(\psi \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial \psi}{\partial n}\right) \mathrm{d}A$
  - 格林第三恒等式
    - 设 $\boldsymbol{\nabla}^2 G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0) = \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)$ 是泊松方程的基本解，$\psi(\boldsymbol{r})$ 在区域内满足拉普拉斯方程
    - $\psi(\boldsymbol{r}) = \oint_{\partial V} \left(\psi(\boldsymbol{r}') \frac{\partial G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')}{\partial n'} - G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \frac{\partial \psi(\boldsymbol{r}')}{\partial n'}\right) \mathrm{d}A'$
      - 该方程构成了边界元法的基础

微分方程的数值解

- 常微分方程 $y'(x) = f(x, y),\quad y(x_0) = y_0$
  - 欧拉法 $y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$
    - $h = x_{i+1} - x_i$
    - 一阶精度
  - 高阶方法：隆格—库塔法等
- 偏微分方程：以二维拉普拉斯方程为例
  - $(\nabla^2 u)_{i,j} = \frac{\frac{u_{i+1,j}-u_{i,j}}{\Delta x} - \frac{u_{i,j}-u_{i-1,j}}{\Delta x}}{\Delta x} + \frac{\frac{u_{i,j+1}-u_{i,j}}{\Delta x} - \frac{u_{i,j}-u_{i,j-1}}{\Delta x}}{\Delta x} = \frac{u_{i+1,j}+u_{i,j+1}+u_{i-1,j}+u_{i,j-1}-4u_{i,j}}{\Delta x^2}$
  - $\frac{u_{i+1,j}+u_{i,j+1}+u_{i-1,j}+u_{i,j-1}-4u_{i,j}}{\Delta x^2} = 0$
  - $u_{ij} = \frac{u_{i+1,j}+u_{i,j+1}+u_{i-1,j}+u_{i,j-1}}{4}$

微分方程的数值解

- 偏微分方程：以二维拉普拉斯方程为例
  - $u_{ij} = \frac{u_{i+1,j}+u_{i,j+1}+u_{i-1,j}+u_{i,j-1}}{4}$
  - 雅可比迭代
    - $u_{ij}^{n+1} = \frac{u_{i+1,j}^{n}+u_{i,j+1}^{n}+u_{i-1,j}^{n}+u_{i,j-1}^{n}}{4}$
  - 高斯—赛德尔迭代
    - $u_{ij}^{n+1} = \frac{u_{i+1,j}^{n}+u_{i,j+1}^{n}+u_{i-1,j}^{n+1}+u_{i,j-1}^{n+1}}{4}$
  - 上述解法的分类：有限差分离散化下的点迭代法
  - 其它离散化方式：有限体积法、有限元法、边界元法
  - 其它线性系统求解方法：共轭梯度下降法、多重网格法