

MONTÍCULOS BINOMIALES

Óscar Morujo Fernández

Estructura del proyecto

Paquetes y clases:

Package *MonticuloBinomial*: contiene las siguiente clases:

- *MainMonticuloBinomialMenu*: contiene el main que ejecuta el programa principal, donde el usuario puede realizar las diferentes operaciones que indica el menú sobre el montículo.
- *NodoMonticuloBinomial* : clase que representa un nodo del montículo binomial.
- *MonticuloBinomialConPrints*: clase que representa el montículo binomial y tiene salida por consola sobre los pasos por los que va pasando el montículo al realizar las operaciones, las cuales pueden ser las siguientes:
 - Decrecer clave con puntero al nodo
 - Decrecer clave con el valor dado
 - Obtener mínimo del montículo
 - Insertar en el montículo
 - Borrar el mínimo del montículo
 - Union de monticulos
 - Mostrar nodos del montículo
- *MonticuloBinomial* : igual que *MonticuloBinomialConPrints* pero sin mostrar información por consola. Se utiliza para que los test no se vean influenciados y ralentizados por las salidas por consola.

Package *Complexities*:

Contiene las clases con los main correspondientes a cada operación del montículo binomial usadas para el estudio de sus complejidades y generación de los datos para la creación de las gráficas.

El primer bucle del main es un bucle de “calentamiento” para cachear la memoria y que en los primeros casos no de tiempos más altos de lo que son.

Generación de graficas:

Codigo : ***GeneracionGraficas.ipynb***

He utilizado python para el estudio de las complejidades, para ejecutar el archivo se recomienda subirlo junto a los 2 archivos generados por la ejecución del test(tamaños del montículo en eje x ,tiempos en eje y) y realizarlo en google collab.

Ejemplo de utilización 1

-----Menu monticulo binomial-----

1. Insertar un numero en el monticulo.
2. Borrar el minimo del monticulo.
3. Ver numero de nodos del monticulo.
4. Decrecer clave de un nodo proporcionando la clave.
5. Vaciar monticulo
6. Ver el minimo del monticulo
0. Exit

1

Introduce numero a insertar:

1

El monticulo estaba vacio y se inserta el nodo con clave 1

①

Nodos del Monticulo(de abajo a arriba y de izq a dcha) : 1

Representacion binaria del numero de nodos: 1

-----Menu monticulo binomial-----

1. Insertar un numero en el monticulo.
2. Borrar el minimo del monticulo.
3. Ver numero de nodos del monticulo.
4. Decrecer clave de un nodo proporcionando la clave.
5. Vaciar monticulo
6. Ver el minimo del monticulo
0. Exit

1

Introduce numero a insertar:

3

Se une el monticulo actual con el nodo con clave 3 :

---Caso 3, colgamos el nodo con clave 3 del nodo con clave 1

①
③

Nodos del Monticulo(de abajo a arriba y de izq a dcha) : 3 1

Representacion binaria del numero de nodos: 10

-----Menu monticulo binomial-----

1. Insertar un numero en el monticulo.
2. Borrar el minimo del monticulo.
3. Ver numero de nodos del monticulo.
4. Decrecer clave de un nodo proporcionando la clave.
5. Vaciar monticulo

6. Ver el minimo del monticulo

0. Exit

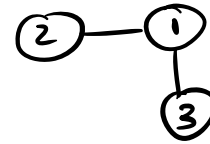
1

Introduce numero a insertar:

2

Se une el monticulo actual con el nodo con clave 2 :

---Caso 1 o caso 2, avanzamos puntero a 1



Nodos del Monticulo(de abajo a arriba y de izq a dcha) : 2 3 1

Representacion binaria del numero de nodos: 11

-----Menu monticulo binomial-----

1. Insertar un numero en el monticulo.

2. Borrar el minimo del monticulo.

3. Ver numero de nodos del monticulo.

4. Decrecer clave de un nodo proporcionando la clave.

5. Vaciar monticulo

6. Ver el minimo del monticulo

0. Exit

1

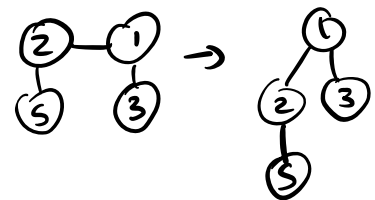
Introduce numero a insertar:

5

Se une el monticulo actual con el nodo con clave 5 :

---Caso 3, colgamos el nodo con clave 5 del nodo con clave 2

---Caso 4, colgamos el nodo con clave 2 del nodo con clave 1



Nodos del Monticulo(de abajo a arriba y de izq a dcha) : 5 2 3 1

Representacion binaria del numero de nodos: 100

-----Menu monticulo binomial-----

1. Insertar un numero en el monticulo.

2. Borrar el minimo del monticulo.

3. Ver numero de nodos del monticulo.

4. Decrecer clave de un nodo proporcionando la clave.

5. Vaciar monticulo

6. Ver el minimo del monticulo

0. Exit

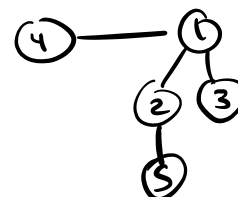
1

Introduce numero a insertar:

4

Se une el monticulo actual con el nodo con clave 4 :

---Caso 1 o caso 2, avanzamos puntero a 1



Nodos del Monticulo(de abajo a arriba y de izq a dcha) : 4 5 2 3 1

Representacion binaria del numero de nodos: 101

-----Menu monticulo binomial-----

1. Insertar un numero en el monticulo.
2. Borrar el minimo del monticulo.
3. Ver numero de nodos del monticulo.
4. Decrecer clave de un nodo proporcionando la clave.
5. Vaciar monticulo
6. Ver el minimo del monticulo
0. Exit

1

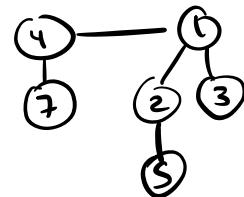
Introduce numero a insertar:

7

Se une el monticulo actual con el nodo con clave 7 :

---Caso 3, colgamos el nodo con clave 7 del nodo con clave 4

---Caso 1 o caso 2, avanzamos puntero a 1



Nodos del Monticulo(de abajo a arriba y de izq a dcha) : 7 4 5 2 3 1

Representacion binaria del numero de nodos: 110

-----Menu monticulo binomial-----

1. Insertar un numero en el monticulo.
2. Borrar el minimo del monticulo.
3. Ver numero de nodos del monticulo.
4. Decrecer clave de un nodo proporcionando la clave.
5. Vaciar monticulo
6. Ver el minimo del monticulo

0. Exit

1

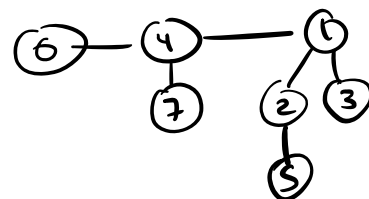
Introduce numero a insertar:

6

Se une el monticulo actual con el nodo con clave 6 :

---Caso 1 o caso 2, avanzamos puntero a 4

---Caso 1 o caso 2, avanzamos puntero a 1



Nodos del Monticulo(de abajo a arriba y de izq a dcha) : 6 7 4 5 2 3 1

Representacion binaria del numero de nodos: 111

-----Menu monticulo binomial-----

1. Insertar un numero en el monticulo.
2. Borrar el minimo del monticulo.
3. Ver numero de nodos del monticulo.
4. Decrecer clave de un nodo proporcionando la clave.
5. Vaciar monticulo
6. Ver el minimo del monticulo

0. Exit

2

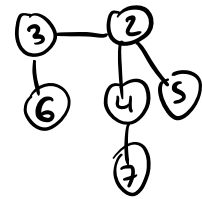
Cortamos el nodo minimo del monticulo.

Subimos sus hijos a la lista principal.

El nodo minimo tenia hijos y se hace la union de estos en orden inverso con el monticulo

---Caso 4, colgamos el nodo con clave 6 del nodo con clave 3
 ---Caso 1 o caso 2, avanzamos puntero a 4
 ---Caso 4, colgamos el nodo con clave 4 del nodo con clave 2

Nodos del Monticulo(de abajo a arriba y de izq a dcha) : 6 3 7 4 5 2
 Representacion binaria del numero de nodos: 110



-----Menu monticulo binomial-----

1. Insertar un numero en el monticulo.

2. Borrar el minimo del monticulo.

3. Ver numero de nodos del monticulo.

4. Decrecer clave de un nodo proporcionando la clave.

5. Vaciar monticulo

6. Ver el minimo del monticulo

0. Exit

2

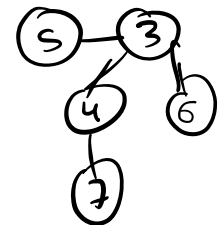
Cortamos el nodo minimo del monticulo.

Subimos sus hijos a la lista principal.

El nodo minimo tenia hijos y se hace la union de estos en orden inverso con el monticulo

---Caso 1 o caso 2, avanzamos puntero a 3

---Caso 3, colgamos el nodo con clave 4 del nodo con clave 3



Nodos del Monticulo(de abajo a arriba y de izq a dcha) : 5 7 4 6 3

Representacion binaria del numero de nodos: 101

-----Menu monticulo binomial-----

1. Insertar un numero en el monticulo.

2. Borrar el minimo del monticulo.

3. Ver numero de nodos del monticulo.

4. Decrecer clave de un nodo proporcionando la clave.

5. Vaciar monticulo

6. Ver el minimo del monticulo

0. Exit

Ejemplo de utilización 2

-----Menu monticulo binomial-----

1. Insertar un numero en el monticulo.
2. Borrar el minimo del monticulo.
3. Ver numero de nodos del monticulo.
4. Decreecer clave de un nodo proporcionando la clave.
5. Vaciar monticulo
6. Ver el minimo del monticulo
0. Exit

1

Introduce numero a insertar:

23

El monticulo estaba vacio y se inserta el nodo con clave 23

23

Monticulo(de abajo a arriba y de izq a dcha) : 23

Representacion binaria del numero de nodos: 1

-----Menu monticulo binomial-----

1. Insertar un numero en el monticulo.
2. Borrar el minimo del monticulo.
3. Ver numero de nodos del monticulo.
4. Decreecer clave de un nodo proporcionando la clave.
5. Vaciar monticulo
6. Ver el minimo del monticulo
0. Exit

1

Introduce numero a insertar:

44

Se une el monticulo actual con el nodo con clave 44 :

---Caso 3, colgamos el nodo con clave 44 del nodo con clave 23

23
44

Monticulo(de abajo a arriba y de izq a dcha) : 44 23

Representacion binaria del numero de nodos: 10

-----Menu monticulo binomial-----

1. Insertar un numero en el monticulo.
2. Borrar el minimo del monticulo.
3. Ver numero de nodos del monticulo.

4. Decrecer clave de un nodo proporcionando la clave.
5. Vaciar monticulo
6. Ver el minimo del monticulo
0. Exit

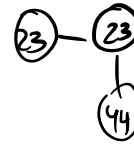
1

Introduce numero a insertar:

23

Se une el monticulo actual con el nodo con clave 23 :

---Caso 1 o caso 2, avanzamos puntero a 23



Monticulo(de abajo a arriba y de izq a dcha) : 23 44 23

Representacion binaria del numero de nodos: 11

-----Menu monticulo binomial-----

1. Insertar un numero en el monticulo.
2. Borrar el minimo del monticulo.
3. Ver numero de nodos del monticulo.
4. Decrecer clave de un nodo proporcionando la clave.
5. Vaciar monticulo
6. Ver el minimo del monticulo
0. Exit

166

Entrada no valida

Monticulo(de abajo a arriba y de izq a dcha) : 23 44 23

Representacion binaria del numero de nodos: 11

-----Menu monticulo binomial-----

1. Insertar un numero en el monticulo.
2. Borrar el minimo del monticulo.
3. Ver numero de nodos del monticulo.
4. Decrecer clave de un nodo proporcionando la clave.
5. Vaciar monticulo
6. Ver el minimo del monticulo
0. Exit

1

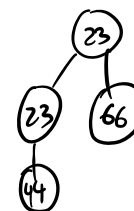
Introduce numero a insertar:

66

Se une el monticulo actual con el nodo con clave 66 :

---Caso 3, colgamos el nodo con clave 66 del nodo con clave 23

---Caso 3, colgamos el nodo con clave 23 del nodo con clave 23



Monticulo(de abajo a arriba y de izq a dcha) : 44 23 66 23

Representacion binaria del numero de nodos: 100

-----Menu monticulo binomial-----

1. Insertar un numero en el monticulo.

2. Borrar el minimo del monticulo.
3. Ver numero de nodos del monticulo.
4. Decrecer clave de un nodo proporcionando la clave.
5. Vaciar monticulo
6. Ver el minimo del monticulo
0. Exit

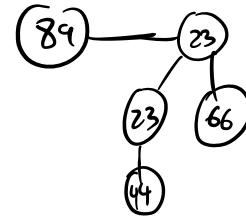
1

Introduce numero a insertar:

89

Se une el monticulo actual con el nodo con clave 89 :

---Caso 1 o caso 2, avanzamos puntero a 23



Monticulo(de abajo a arriba y de izq a dcha) : 89 44 23 66 23

Representacion binaria del numero de nodos: 101

-----Menu monticulo binomial-----

1. Insertar un numero en el monticulo.
2. Borrar el minimo del monticulo.
3. Ver numero de nodos del monticulo.
4. Decrecer clave de un nodo proporcionando la clave.
5. Vaciar monticulo
6. Ver el minimo del monticulo

0. Exit

1

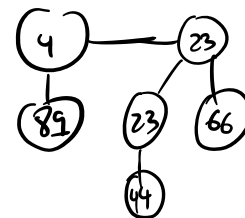
Introduce numero a insertar:

4

Se une el monticulo actual con el nodo con clave 4 :

---Caso 4, colgamos el nodo con clave 89 del nodo con clave 4

---Caso 1 o caso 2, avanzamos puntero a 23



Monticulo(de abajo a arriba y de izq a dcha) : 89 4 44 23 66 23

Representacion binaria del numero de nodos: 110

-----Menu monticulo binomial-----

1. Insertar un numero en el monticulo.
2. Borrar el minimo del monticulo.
3. Ver numero de nodos del monticulo.
4. Decrecer clave de un nodo proporcionando la clave.
5. Vaciar monticulo
6. Ver el minimo del monticulo

0. Exit

3

Numero de nodos = 6

Monticulo(de abajo a arriba y de izq a dcha) : 89 4 44 23 66 23

Representacion binaria del numero de nodos: 110

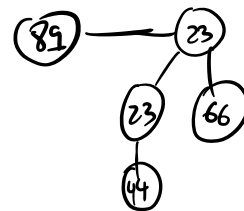
-----Menu monticulo binomial-----

1. Insertar un numero en el monticulo.
 2. Borrar el minimo del monticulo.
 3. Ver numero de nodos del monticulo.
 4. Decrecer clave de un nodo proporcionando la clave.
 5. Vaciar monticulo
 6. Ver el minimo del monticulo
 0. Exit
- 6
- Minimo: 4

Monticulo(de abajo a arriba y de izq a dcha) : 89 4 44 23 66 23
Representacion binaria del numero de nodos: 110

-----Menu monticulo binomial-----

1. Insertar un numero en el monticulo.
 2. Borrar el minimo del monticulo.
 3. Ver numero de nodos del monticulo.
 4. Decrecer clave de un nodo proporcionando la clave.
 5. Vaciar monticulo
 6. Ver el minimo del monticulo
 0. Exit
- 2



Cortamos el nodo minimo del monticulo.

Subimos sus hijos a la lista principal.

El nodo minimo tenia hijos y se hace la union de estos en orden inverso con el monticulo

---Caso 1 o caso 2, avanzamos puntero a 23

Monticulo(de abajo a arriba y de izq a dcha) : 89 44 23 66 23
Representacion binaria del numero de nodos: 101

-----Menu monticulo binomial-----

1. Insertar un numero en el monticulo.
 2. Borrar el minimo del monticulo.
 3. Ver numero de nodos del monticulo.
 4. Decrecer clave de un nodo proporcionando la clave.
 5. Vaciar monticulo
 6. Ver el minimo del monticulo
 0. Exit
- 6
- Minimo: 23

Monticulo(de abajo a arriba y de izq a dcha) : 89 44 23 66 23
Representacion binaria del numero de nodos: 101

-----Menu monticulo binomial-----

1. Insertar un numero en el monticulo.
2. Borrar el minimo del monticulo.
3. Ver numero de nodos del monticulo.

4. Decrecer clave de un nodo proporcionando la clave.
 5. Vaciar monticulo
 6. Ver el minimo del monticulo
 0. Exit
- 3
Numero de nodos = 5

Monticulo(de abajo a arriba y de izq a dcha) : 89 44 23 66 23
Representacion binaria del numero de nodos: 101

-----Menu monticulo binomial-----

1. Insertar un numero en el monticulo.
 2. Borrar el minimo del monticulo.
 3. Ver numero de nodos del monticulo.
 4. Decrecer clave de un nodo proporcionando la clave.
 5. Vaciar monticulo
 6. Ver el minimo del monticulo
 0. Exit
- 2

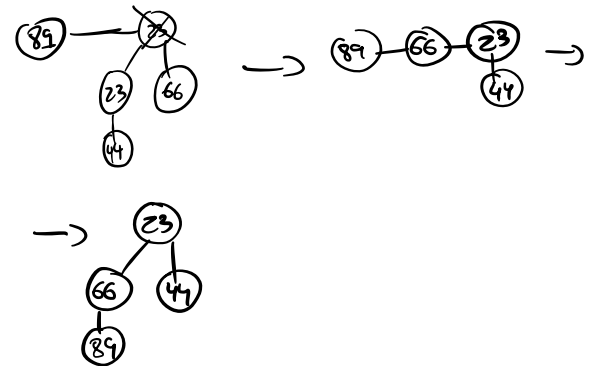
Cortamos el nodo minimo del monticulo.

Subimos sus hijos a la lista principal.

El nodo minimo tenia hijos y se hace la union de estos en orden inverso con el monticulo

---Caso 4, colgamos el nodo con clave 89 del nodo con clave 66

---Caso 4, colgamos el nodo con clave 66 del nodo con clave 23



Monticulo(de abajo a arriba y de izq a dcha) : 89 66 44 23
Representacion binaria del numero de nodos: 100

-----Menu monticulo binomial-----

1. Insertar un numero en el monticulo.
 2. Borrar el minimo del monticulo.
 3. Ver numero de nodos del monticulo.
 4. Decrecer clave de un nodo proporcionando la clave.
 5. Vaciar monticulo
 6. Ver el minimo del monticulo
 0. Exit
- 6

Minimo: 23

Monticulo(de abajo a arriba y de izq a dcha) : 89 66 44 23
Representacion binaria del numero de nodos: 100

-----Menu monticulo binomial-----

1. Insertar un numero en el monticulo.
2. Borrar el minimo del monticulo.
3. Ver numero de nodos del monticulo.
4. Decrecer clave de un nodo proporcionando la clave.
5. Vaciar monticulo

6. Ver el minimo del monticulo

0. Exit

4

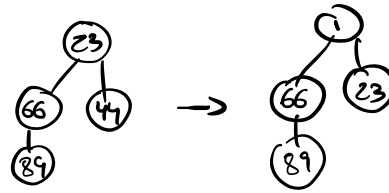
Introduce la clave a decrecer:

44

Introduce el nuevo valor:

1

Intercambiamos nodo con clave 1 por el nodo con clave 23



Monticulo(de abajo a arriba y de izq a dcha) : 89 66 23 1

Representacion binaria del numero de nodos: 100

-----Menu monticulo binomial-----

1. Insertar un numero en el monticulo.

2. Borrar el minimo del monticulo.

3. Ver numero de nodos del monticulo.

4. Decrecer clave de un nodo proporcionando la clave.

5. Vaciar monticulo

6. Ver el minimo del monticulo

0. Exit

6

Minimo: 1

Monticulo(de abajo a arriba y de izq a dcha) : 89 66 23 1

Representacion binaria del numero de nodos: 100

-----Menu monticulo binomial-----

1. Insertar un numero en el monticulo.

2. Borrar el minimo del monticulo.

3. Ver numero de nodos del monticulo.

4. Decrecer clave de un nodo proporcionando la clave.

5. Vaciar monticulo

6. Ver el minimo del monticulo

0. Exit

5

Monticulo(de abajo a arriba y de izq a dcha) :

Representacion binaria del numero de nodos: 0

-----Menu monticulo binomial-----

1. Insertar un numero en el monticulo.

2. Borrar el minimo del monticulo.

3. Ver numero de nodos del monticulo.

4. Decrecer clave de un nodo proporcionando la clave.

5. Vaciar monticulo

6. Ver el minimo del monticulo

0. Exit

3

Numero de nodos = 0

Monticulo(de abajo a arriba y de izq a dcha) :
Representacion binaria del numero de nodos: 0

-----Menu monticulo binomial-----

1. Insertar un numero en el monticulo.
 2. Borrar el minimo del monticulo.
 3. Ver numero de nodos del monticulo.
 4. Decrecer clave de un nodo proporcionando la clave.
 5. Vaciar monticulo
 6. Ver el minimo del monticulo
 0. Exit
- 0

Estudio sobre la complejidad de la implementación

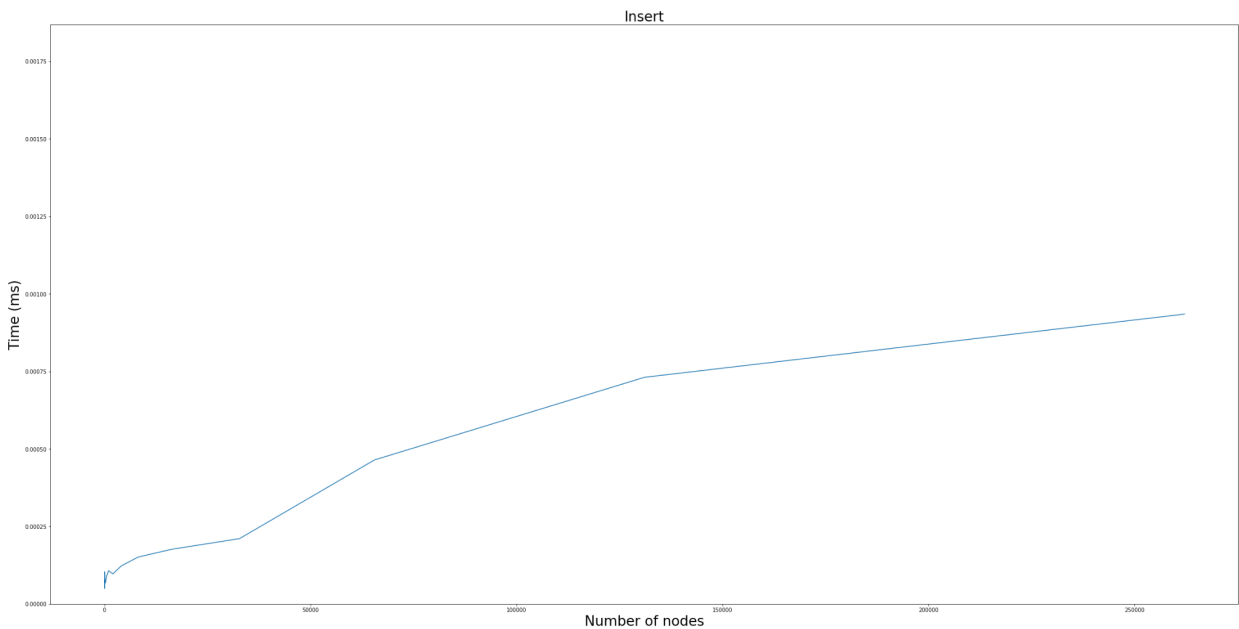
Se consideran en la teoría estas complejidades para las siguientes operaciones:

Oper.	Bino. (peor)
crear	$O(1)$
insertar	$O(\log n)$
min	$O(1)$
borraMin	$O(\log n)$
unir	$O(\log n)$
decrecer	$O(\log n)$
borrar	$O(\log n)$

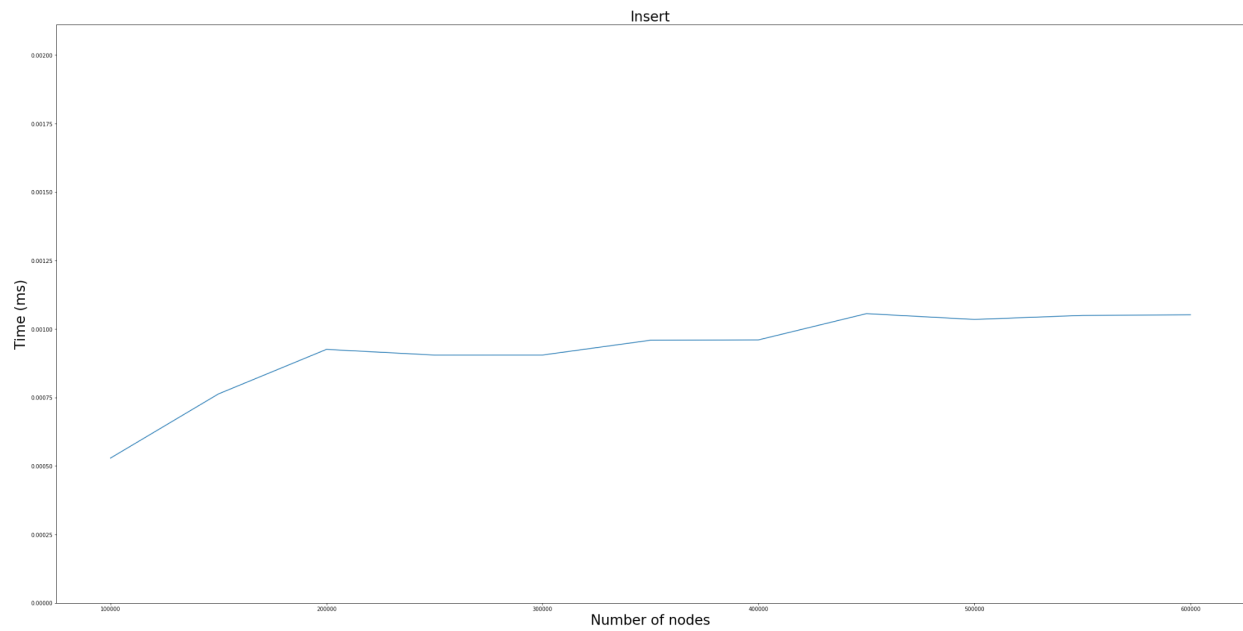
Ahora veremos los tiempos de mi algoritmo:

INSERT:

Files: tamanios_insert0.txt, times_insert0.txt
Número de nodos potencias de 2



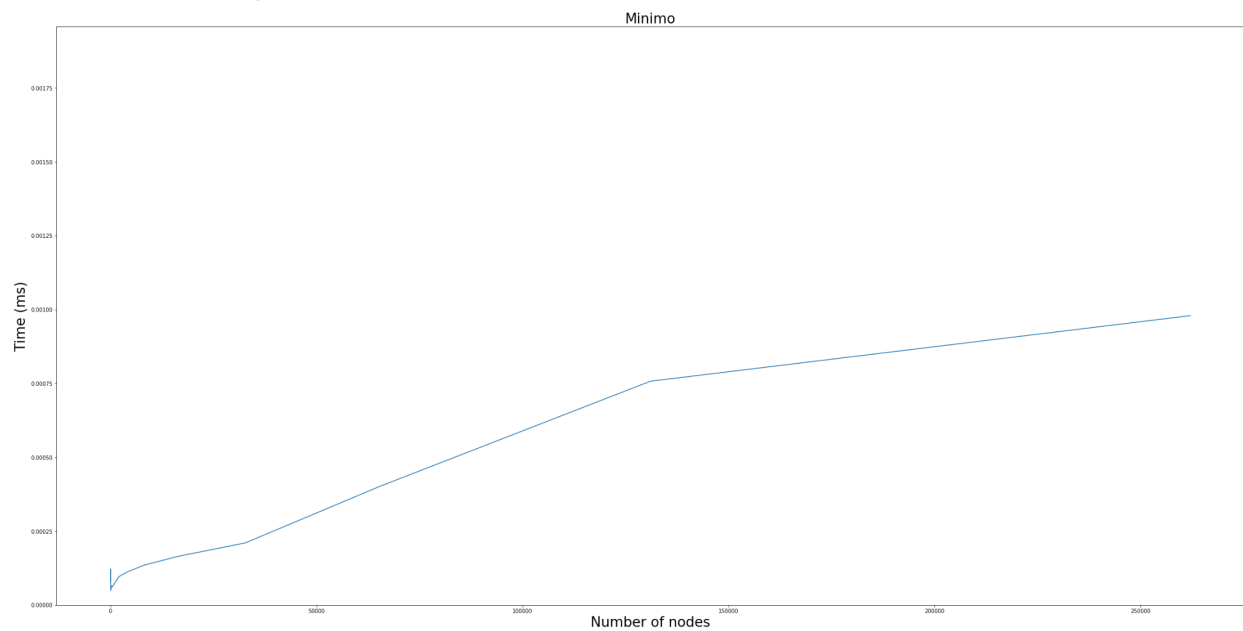
Files : tamanios_insert_1.txt, times_insert_1.txt
Número de nodos de 50.000 en 50.000



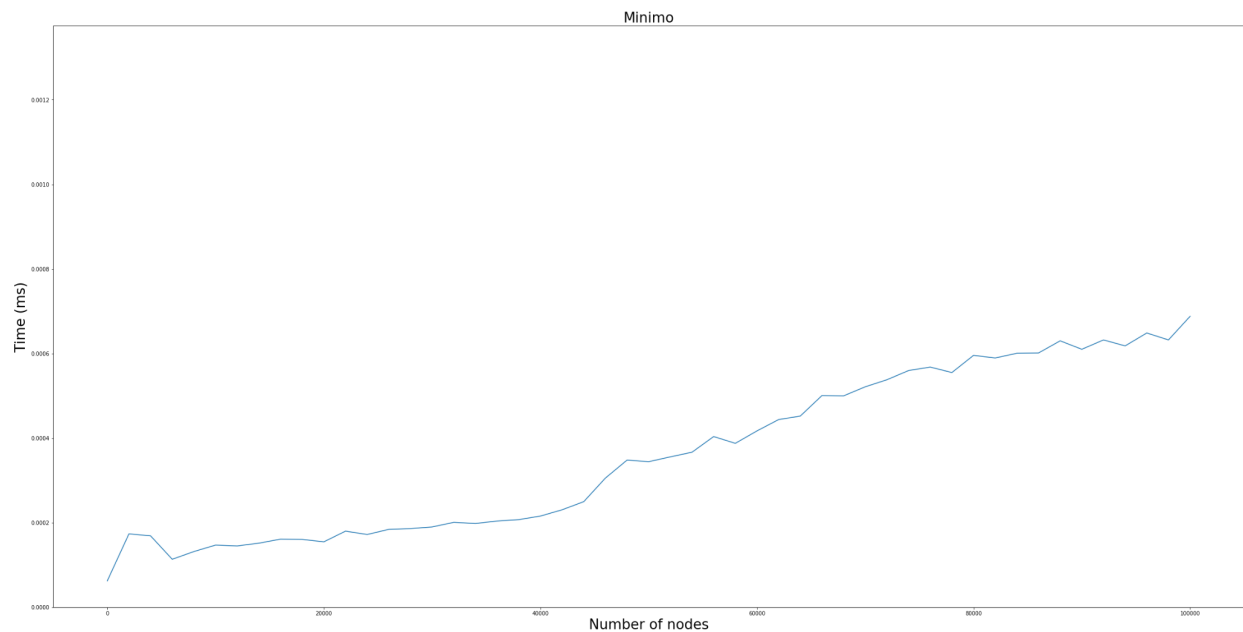
Como observamos en los valores, es logarítmica la inserción como se afirma en la teoría.

MÍNIMO:

Files: tamanios_minimo_0.txt, times_minimo_0.txt
Número de nodos potencias de 2



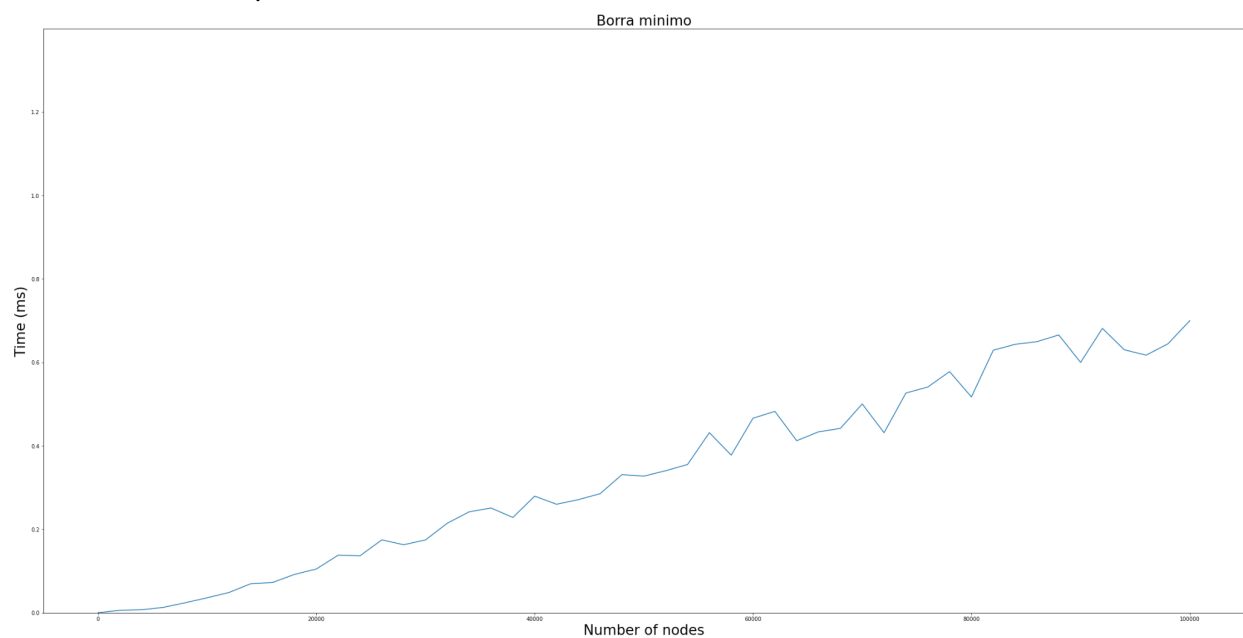
Files: tamanios_minimo_1.txt, times_minimo_1.txt
Número de nodos de 2000 en 2000



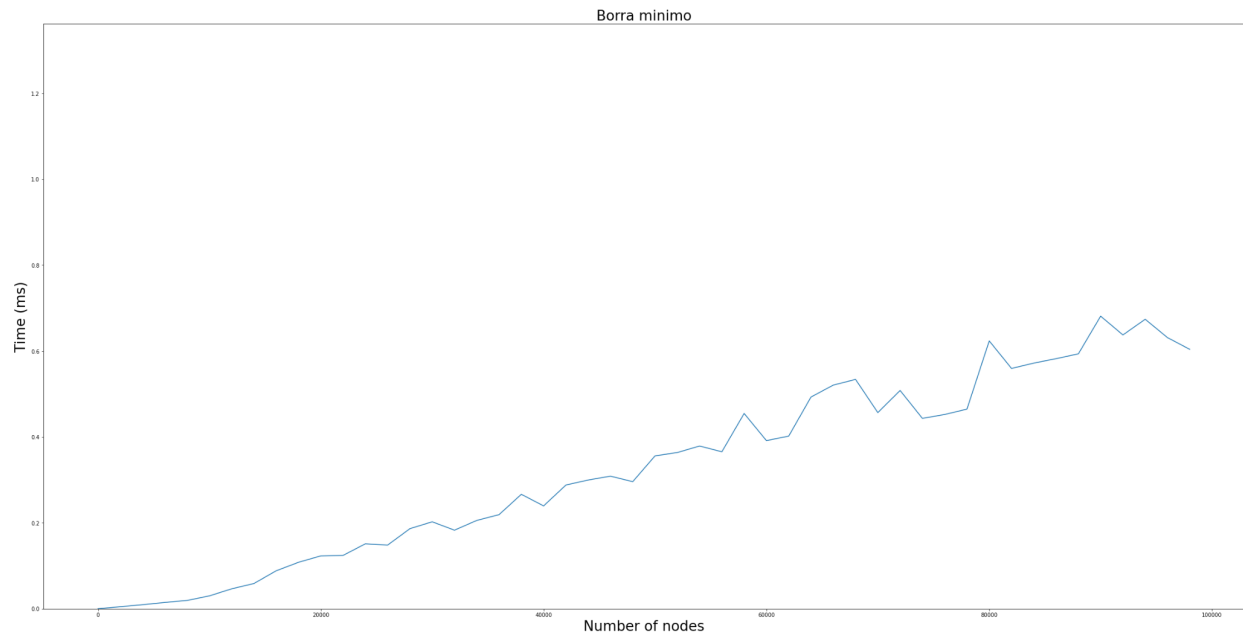
Como observamos en los valores, es logarítmica la obtención del minimo, aunque se afirma en la teoría que es constante. En el siguiente punto se compara con una implementación modificada que mantiene un puntero al mínimo.

BORRA MÍNIMO:

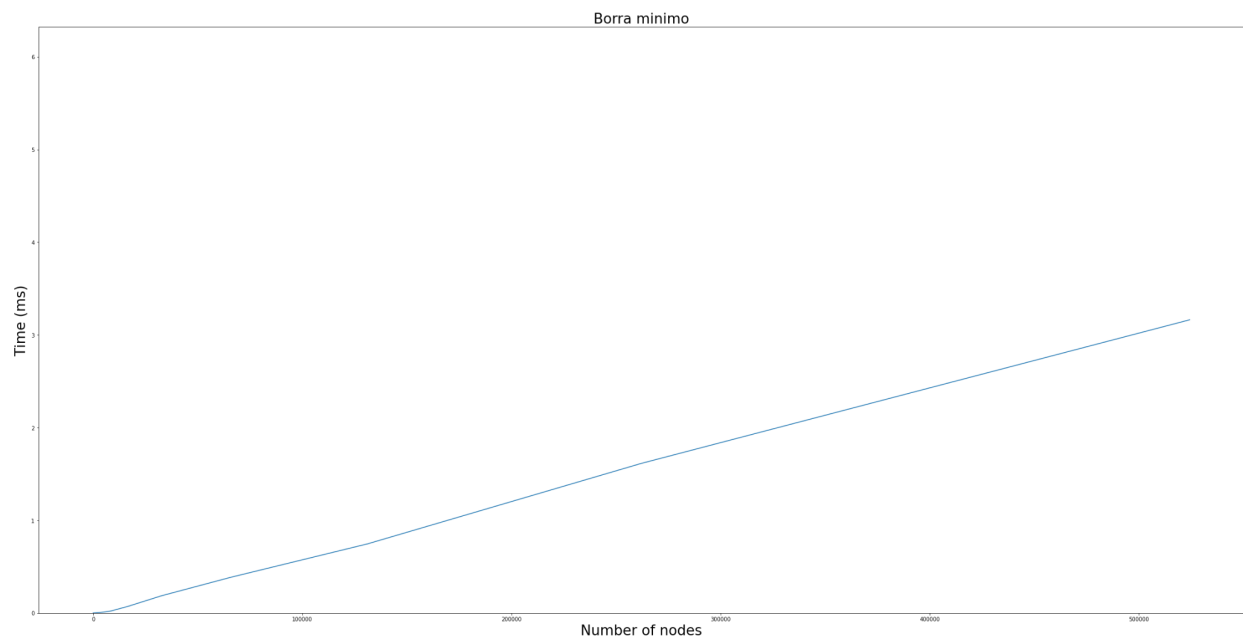
Files: tamanios_borramin_0.txt, times_borramin_0.txt
Número de nodos par



Files: tamanios_borramin_1.txt, times_borramin_1.txt
Número de nodos impar



Files: tamanios_borramin_2.txt, times_borramin_2.txt
Número de nodos (potencias de 2) - 1.

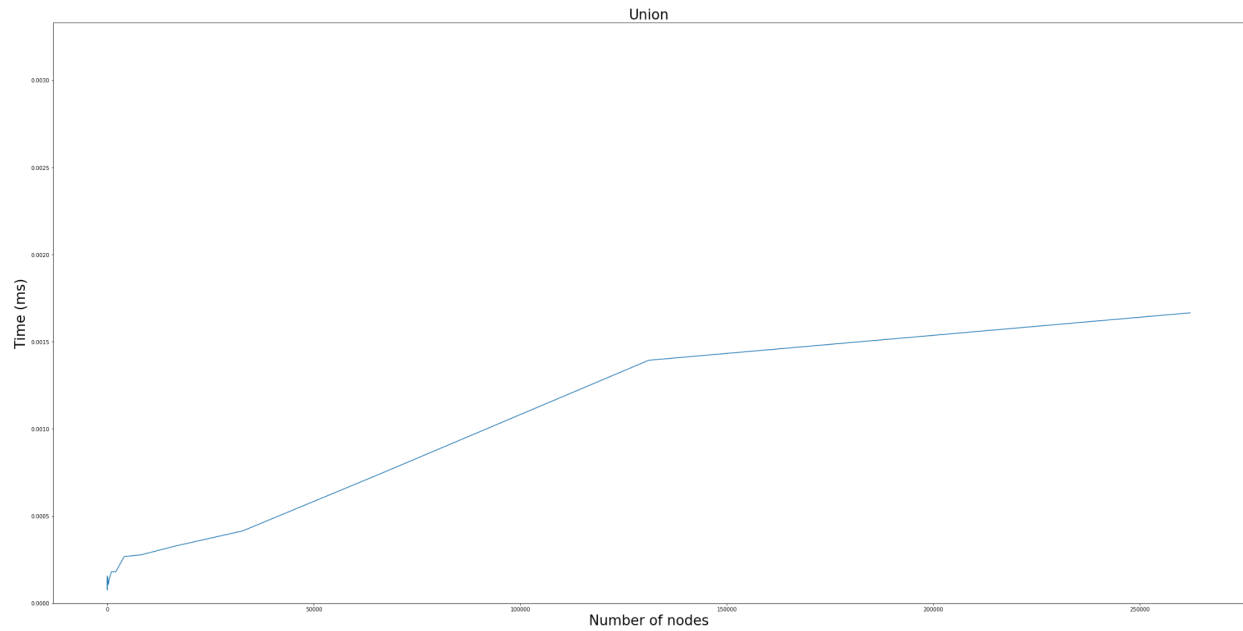


Como observamos en los valores, es logarítmico el borrado del minimo como se afirma en la teoría.

UNIÓN:

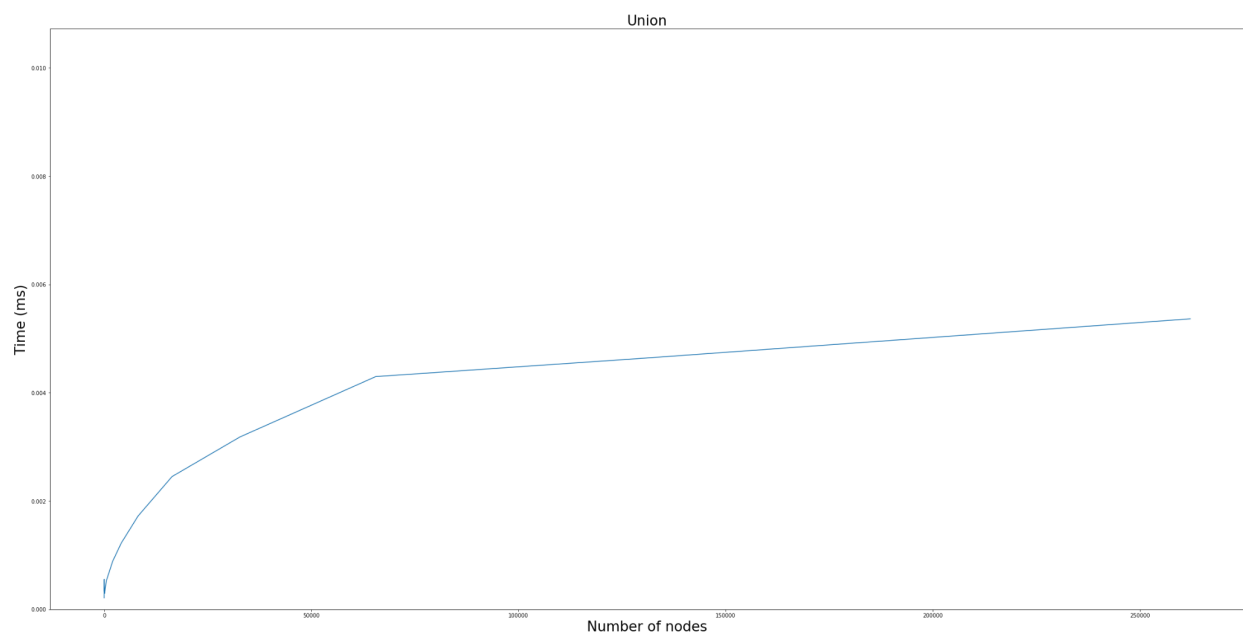
Files: tamanios_union_0.txt, times_union_0.txt

Número de nodos potencias de 2



Files: tamanios_union_1.txt, times_union_1.txt

Número de nodos (potencias de 2) - 1.

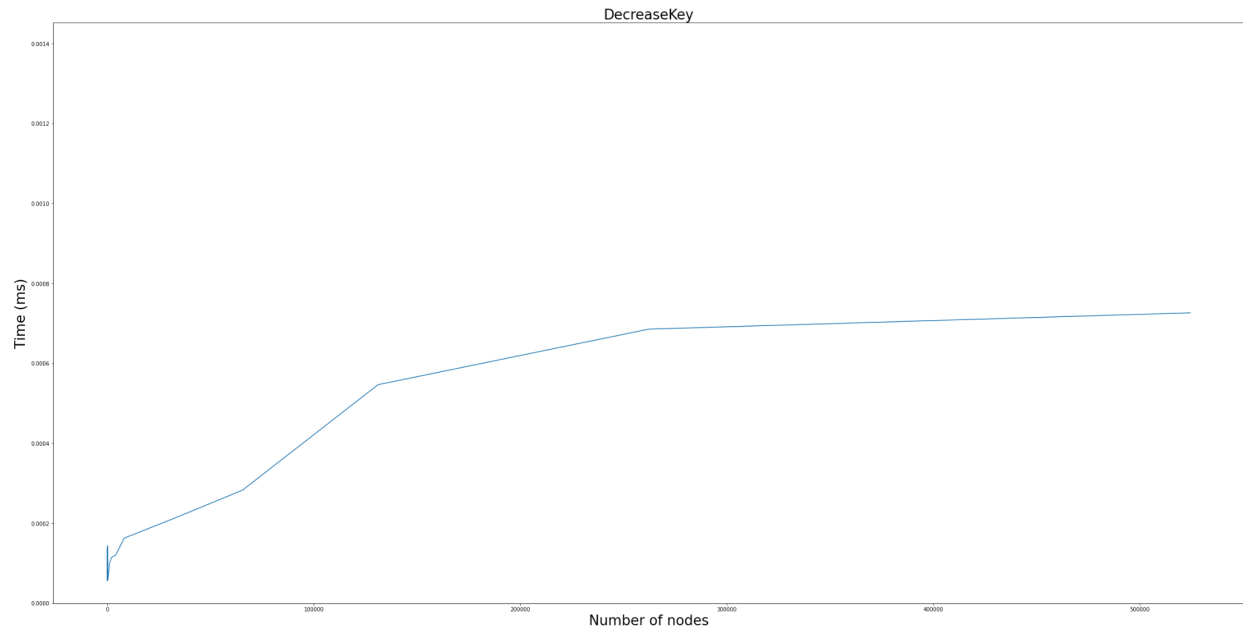


Como observamos en los valores, es logarítmica la unión como se afirma en la teoría.

DECRECEER CLAVE:

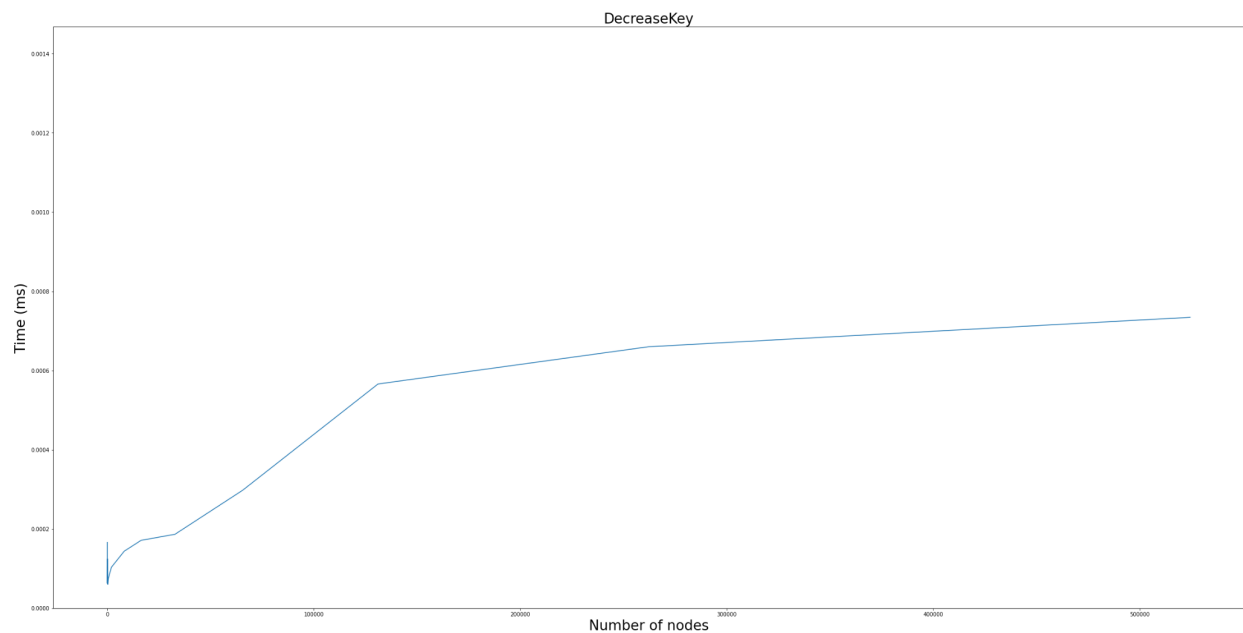
Files: tamanios_decreaseKey_0.txt, times_decreaseKey_0.txt

Número de nodos potencias de 2



Files: tamanios_decreaseKey_1.txt, times_decreaseKey_1.txt

Número de nodos (potencias de 2) - 1



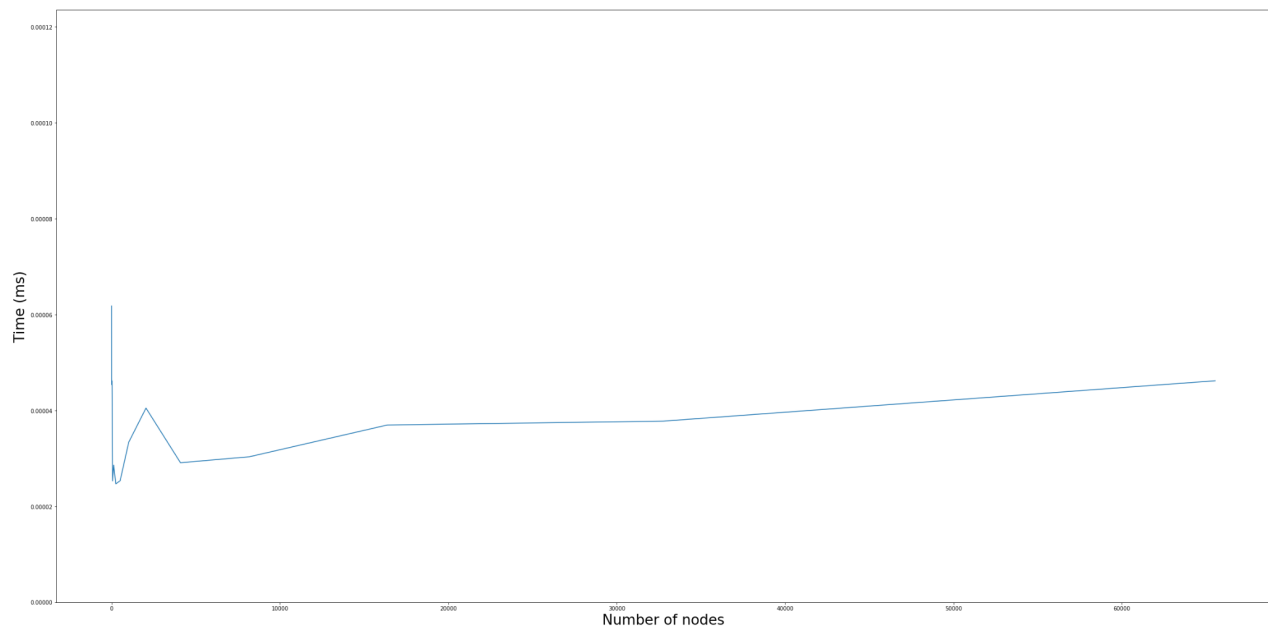
Como observamos en los valores, es logarítmica la operación de decrecer clave como se afirma en la teoría.

Estudio sobre la complejidad de la implementación modificada

A continuación se modifica la implementación de montículo binomial para que mantenga un puntero al mínimo. El coste sería complicar un poco la operación de insertar/unir en el montículo y al borrar el mínimo y decrecer clave para que actualice el puntero al mínimo si es necesario.

Se obtienen las siguiente gráfica para obtener el **mínimo, que como vemos es constante**:

Files: tamanios_minimo_constante.txt , times_minimo_constante.txt



Si ejecutamos los test para las demás operaciones vemos que se mantiene como en la anterior implementación; es decir, logarítmica, ya que las modificaciones son:

- Al unir (insert por lo tanto también), tenemos que comparar el mínimo actual con el del nuevo montículo a unir y actualizarlo, lo cual es constante.
- Al decrecer clave, tenemos que ver si el mínimo del montículo es mayor que el nuevo valor de la clave y actualizarlo en ese caso. El coste sería $O(\log n)$ que se ve “absorbido” por el coste logarítmico que tiene ya decrecer clave

- Al borrar el mínimo, tenemos que buscar el siguiente mínimo en la lista principal del montículo binomial. El coste sería $O(\log n)$ que se ve “absorbido” por el coste logarítmico que tiene ya borrar el mínimo.
- Ahora para obtener el mínimo es solo consultar al puntero del nodo mínimo, que se hace en $O(1)$