

圏論

omosan0627

June 11, 2023

1 圏論入門

1.1 圏論とは何か

http://alg-d.com/math/kan_extension/intro.pdf

Definition 1.1. 圏 C とは二つの集まり $Ob(C)$, $Mor(C)$ の組であって, 以下の条件を満たすものをいう. なお元 $a \in Ob(C)$ を対象, $f \in Mor(C)$ を射と呼ぶ.

- (1) 各 $f \in Mor(C)$ に対して, ドメインと呼ばれる対象 $dom(f) \in Ob(C)$ とコドメインと呼ばれる対象 $cod(f) \in Ob(C)$ が定められている. $dom(f) = a$, $cod(f) = b$ であることを $f : a \rightarrow b$ や $a \xrightarrow{f} b$ と書いて表す. また対象 $a, b \in Ob(C)$ に対して $Hom_C(a, b) := \{f \in Mor(C) : a \xrightarrow{f} b\}$ と書く.
- (2) 2つの射 $f, g \in Mor(C)$ について $cod(f) = dom(g)$ であるとき, f と g の合成射とよばれる射 $g \circ f$ が定められていて, $dom(g \circ f) = dom(f)$, $cod(g \circ f) = cod(g)$ を満たす.
- (3) 射の合成は結合則を満たす. $(h \circ (g \circ f)) = (h \circ g) \circ f$
- (4) 各 $a \in Ob(C)$ に対して, 恒等射と呼ばれる射 $id_a : a \rightarrow a$ が存在し, 射の合成に関する単位元となる. すなわち $f : a \rightarrow b$ に対して, $f \circ id_a = f$, $id_b \circ f = f$ である.

Example 1.2. Set, Grp, Top

Definition 1.3. C, D を圏とする. C から D への関手 $F : C \rightarrow D$ とは $a \in Ob(C)$ に $F(a) \in Ob(D)$ を, $f \in Mor(C)$ に $F(f) \in Mor(D)$ を対応させる関数であって, 以下を満たすものである.

- (1) $f : a \rightarrow b$ のとき $F(f) : F(a) \rightarrow F(b)$ である.
- (2) $cod(f) = dom(g)$ のとき, $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ である.
- (3) $a \in C$ に対して $F(id_a) = id_{F(a)}$ である.

Definition 1.4. C を圏, $a, b \in C$ を対象とする.

- (1) C の射 $f : a \rightarrow b$ が同型射
 \Leftrightarrow ある射 $g : b \rightarrow a$ が存在して, $g \circ f = id_a$, $f \circ g = id_b$ となる
- (2) a と b が同型 \Leftrightarrow ある同型射 $f : a \rightarrow b$ が存在する.

1.2 自然変換・圏同値

Definition 1.5. C, D を圏, $F, G : C \rightarrow D$ を関手とする. F から G への自然変換とは, D の射の族 $\theta = \{\theta_a : Fa \rightarrow Ga\}_{a \in \text{Ob}(C)}$ であって, C の射 $f : a \rightarrow b$ に対して $Gf \circ \theta_a = \theta_b Ff$ を満たすものをいう. またこのとき θ_a は a について自然という言い方をする.

