

圏論

omosan0627

June 11, 2023

とくに断らない限り、圏は locally small とする. (小圏とは違うよ)

1 圏論入門

1.1 圏論とは何か

http://alg-d.com/math/kan_extension/intro.pdf

Definition 1.1. 圏 C とは二つの集まり $\text{Ob}(C)$, $\text{Mor}(C)$ の組であって, 以下の条件を満たすものをいう. なお元 $a \in \text{Ob}(C)$ を対象, $f \in \text{Mor}(C)$ を射と呼ぶ.

- (1) 各 $f \in \text{Mor}(C)$ に対して, ドメインと呼ばれる対象 $\text{dom}(f) \in \text{Ob}(C)$ とコドメインと呼ばれる対象 $\text{cod}(f) \in \text{Ob}(C)$ が定められている. $\text{dom}(f) = a$, $\text{cod}(f) = b$ であることを $f : a \rightarrow b$ や $a \xrightarrow{f} b$ と書いて表す. また対象 $a, b \in \text{Ob}(C)$ に対して $\text{Hom}_C(a, b) := \{f \in \text{Mor}(C) : a \xrightarrow{f} b\}$ と書く.
- (2) 2つの射 $f, g \in \text{Mor}(C)$ について $\text{cod}(f) = \text{dom}(g)$ であるとき, f と g の合成射とよばれる射 $g \circ f$ が定められていて, $\text{dom}(g \circ f) = \text{dom}(f)$, $\text{cod}(g \circ f) = \text{cod}(g)$ を満たす.
- (3) 射の合成は結合則を満たす. $(h \circ (g \circ f)) = (h \circ g) \circ f$
- (4) 各 $a \in \text{Ob}(C)$ に対して, 恒等射と呼ばれる射 $\text{id}_a : a \rightarrow a$ が存在し, 射の合成に関する単位元となる. すなわち $f : a \rightarrow b$ に対して, $f \circ \text{id}_a = f$, $\text{id}_b \circ f = f$ である.

Example 1.2. Set, Grp, Top

Definition 1.3. C, D を圏とする. C から D への関手 $F : C \rightarrow D$ とは $a \in \text{Ob}(C)$ に $F(a) \in \text{Ob}(D)$ を, $f \in \text{Mor}(C)$ に $F(f) \in \text{Mor}(D)$ を対応させる関数であって, 以下を満たすものである.

- (1) $f : a \rightarrow b$ のとき $F(f) : F(a) \rightarrow F(b)$ である.
- (2) $\text{cod}(f) = \text{dom}(g)$ のとき, $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ である.
- (3) $a \in C$ に対して $F(\text{id}_a) = \text{id}_{F(a)}$ である.

Definition 1.4. C を圏, $a, b \in C$ を対象とする.

- (1) C の射 $f : a \rightarrow b$ が同型射
 \iff ある射 $g : b \rightarrow a$ が存在して, $g \circ f = \text{id}_a$, $f \circ g = \text{id}_b$ となる

(2) a と b が同型 ($a \cong b$ で表す) \iff ある同型射 $f : a \rightarrow b$ が存在する.

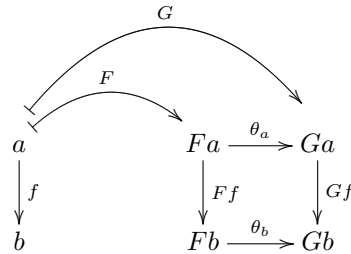
Theorem 1.5. f が同型射ならば $F(f)$ も同型射

Definition 1.6. 圏 C と圏 D が同型 ($C \cong D$ と書く) とは, ある関手 $F : C \rightarrow D, G : D \rightarrow C$ が存在して $GF = \text{id}_C, FG = \text{id}_D$.

1.2 自然変換・圏同値

http://alg-d.com/math/kan_extension/equivalence.pdf

Definition 1.7. C, D を圏, $F, G : C \rightarrow D$ を関手とする. F から G への自然変換とは, D の射の族 $\theta = \{\theta_a : Fa \rightarrow Ga\}_{a \in \text{Ob}(C)}$ であって, C の射 $f : a \rightarrow b$ に対して $Gf \circ \theta_a = \theta_b \circ Ff$ を満たすものをいう. (またこのとき θ_a は a について自然という言い方をする.) 絵で書けば以下ようになる.



θ が F から G への自然変換であることを記号で $\theta : F \Rightarrow G$ と表す. また θ_a を θ の a 成分と呼ぶ.

Definition 1.8. 各 θ_a が同型射となる自然変換 θ を自然同型という. また自然同型 $F \Rightarrow G$ が存在するとき, F と G は自然同型であるといい, 記号で $F \cong G$ と表す.

Example 1.9. 有限次元線形空間 V と V^{**} についての自然変換 $\theta : \text{id}_C \Rightarrow F \circ F^{\text{op}}, \theta_V(x)(\rho) \mapsto \rho(x)$. 線形代数の世界 p135 も参照. V^* の場合と違って, 基底を出さなくても自然変換が作れるところがポイント.

Definition 1.10. 圏 C, D が圏同値 ($C \simeq D$ と書く)

\iff 関手 $F : C \rightarrow D, G : D \rightarrow C$ と自然変換 $GF \cong \text{id}_C, FG \cong \text{id}_D$ が存在する.