

# 圏論

omosan0627

2023/05/24

## 1 圏論入門

### 1.1 圏論とは何か

[http://alg-d.com/math/kan\\_extension/intro.pdf](http://alg-d.com/math/kan_extension/intro.pdf)

**Definition 1.1.** 圏  $C$  とは二つの集まり  $Ob(C)$ ,  $Mor(C)$  の組であって, 以下の条件を満たすものをいう. なお元  $a \in Ob(C)$  を対象,  $f \in Mor(C)$  を射と呼ぶ.

- (1) 各  $f \in Mor(C)$  に対して, ドメインと呼ばれる対象  $dom(f) \in Ob(C)$  とコドメインと呼ばれる対象  $cod(f) \in Ob(C)$  が定められている.  $dom(f) = a$ ,  $cod(f) = b$  であることを  $f : a \rightarrow b$  や  $a \xrightarrow{f} b$  と書いて表す. また対象  $a, b \in Ob(C)$  に対して  $Hom_C(a, b) := \{f \in Mor(C) : a \xrightarrow{f} b\}$  と書く.
- (2) 2つの射  $f, g \in Mor(C)$  について  $cod(f) = dom(g)$  であるとき,  $f$  と  $g$  の合成射とよばれる射  $g \circ f$  が定められていて,  $dom(g \circ f) = dom(f)$ ,  $cod(g \circ f) = cod(g)$  を満たす.
- (3) 射の合成は結合則を満たす.  $(h \circ (g \circ f)) = (h \circ g) \circ f$
- (4) 各  $a \in Ob(c)$  に対して, 恒等射と呼ばれる射  $id_a : a \rightarrow a$  が存在し, 射の合成に関する単位元となる. すなわち  $f : a \rightarrow b$  に対して,  $f \circ id_a = f$ ,  $id_b \circ f = f$  である.

### Example 1.2. Set, Grp, Top

**Definition 1.3.**  $C, D$  を圏とする.  $C$  から  $D$  への関手  $F : C \rightarrow D$  とは  $a \in Ob(C)$  に  $F(a) \in Ob(D)$  を,  $f \in Mor(C)$  に  $F(f) \in Mor(D)$  を対応させる関数であって, 以下を満たすものである.

- (1)  $f : a \rightarrow b$  のとき  $F(f) : F(a) \rightarrow F(b)$  である.
- (2)  $cod(f) = dom(g)$  のとき,  $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$  である.
- (3)  $a \in C$  に対して  $F(id_a) = id_{F(a)}$  である.

**Definition 1.4.**  $C$  を圏,  $a, b \in C$  を対象とする.

- (1)  $C$  の射  $f : a \rightarrow b$  が同型射  
 $\Leftrightarrow$  ある射  $g : b \rightarrow a$  が存在して,  $g \circ f = id_a$ ,  $f \circ g = id_b$  となる
- (2)  $a$  と  $b$  が同型  $\Leftrightarrow$  ある同型射  $f : a \rightarrow b$  が存在する.