

圏論

omosan0627

July 6, 2023

とくに断らない限り、圏は locally small とする. (小圏とは違うよ)

1 圏論入門

1.1 圏論とは何か

http://alg-d.com/math/kan_extension/intro.pdf

Definition 1.1. 圏 C とは二つの集まり $\text{Ob}(C)$, $\text{Mor}(C)$ の組であって、以下の条件を満たすものをいう. なお元 $a \in \text{Ob}(C)$ を対象, $f \in \text{Mor}(C)$ を射と呼ぶ.

- (1) 各 $f \in \text{Mor}(C)$ に対して、ドメインと呼ばれる対象 $\text{dom}(f) \in \text{Ob}(C)$ とコドメインと呼ばれる対象 $\text{cod}(f) \in \text{Ob}(C)$ が定められている. $\text{dom}(f) = a$, $\text{cod}(f) = b$ であることを $f : a \rightarrow b$ や $a \xrightarrow{f} b$ と書いて表す. また対象 $a, b \in \text{Ob}(C)$ に対して $\text{Hom}_C(a, b) := \{f \in \text{Mor}(C) : a \xrightarrow{f} b\}$ と書く.
- (2) 2つの射 $f, g \in \text{Mor}(C)$ について $\text{cod}(f) = \text{dom}(g)$ であるとき, f と g の合成射とよばれる射 $g \circ f \in \text{Mor}(C)$ が定められていて, $\text{dom}(g \circ f) = \text{dom}(f)$, $\text{cod}(g \circ f) = \text{cod}(g)$ を満たす.
- (3) 射の合成は結合則を満たす. $(h \circ (g \circ f)) = (h \circ g) \circ f$
- (4) 各 $a \in \text{Ob}(C)$ に対して, 恒等射と呼ばれる射 $\text{id}_a : a \rightarrow a$ が存在し, 射の合成に関する単位元となる. すなわち $f : a \rightarrow b$ に対して, $f \circ \text{id}_a = f$, $\text{id}_b \circ f = f$ である.

Remark 1.2. $C = (\text{Ob}(C), \text{Mor}(C), \text{cod}, \text{dom}, \text{id}, \circ)$ と書き表すことも.

- $\text{Ob}(C), \text{Mor}(C)$ が集まり
- cod, cod が $\text{Mor}(C) \rightarrow \text{Ob}(C)$ の関数
- id が $\text{Ob}(C) \rightarrow \text{Mor}(C)$ の関数
- \circ が $\text{Mor}(C) \times \text{Mor}(C) \rightarrow \text{Mor}(C)$ の関数

Example 1.3. Set, Grp, Top

Definition 1.4. C, D を圏とする. C から D への関手 $F : C \rightarrow D$ とは $a \in \text{Ob}(C)$ に $F(a) \in \text{Ob}(D)$ を, $f \in \text{Mor}(C)$ に $F(f) \in \text{Mor}(D)$ を対応させる関数であって、以下を満たすものである.

- (1) $f : a \rightarrow b$ のとき $F(f) : F(a) \rightarrow F(b)$ である.

(2) $\text{cod}(f) = \text{dom}(g)$ のとき, $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ である.

(3) $a \in C$ に対して $F(\text{id}_a) = \text{id}_{F(a)}$ である.

Definition 1.5. C を圏, $a, b \in C$ を対象とする.

(1) C の射 $f : a \rightarrow b$ が同型射

\iff ある射 $g : b \rightarrow a$ が存在して, $g \circ f = \text{id}_a, f \circ g = \text{id}_b$ となる

(2) a と b が同型 ($a \cong b$ で表す) \iff ある同型射 $f : a \rightarrow b$ が存在する.

Theorem 1.6. f が同型射ならば $F(f)$ も同型射

Definition 1.7. 圏 C と圏 D が同型 ($C \cong D$ と書く) とは, ある関手 $F : C \rightarrow D, G : D \rightarrow C$ が存在して $GF = \text{id}_C, FG = \text{id}_D$.

Definition 1.8. C を圏とする. このとき C^{op} を以下のように定める.

- 対象 $a \in C$ に対して新しい対象 a^{op} を用意し, $\text{Ob}(C^{\text{op}}) := \{a^{\text{op}} : a \in \text{Ob}(C)\}$ と定める.
- 射 $f \in C$ に対して新しい射 f^{op} を用意し, $\text{Mor}(C^{\text{op}}) := \{f^{\text{op}} : f \in \text{Mor}(C)\}$ と定める.
- $\text{dom}(f^{\text{op}}) := \text{cod}(f)^{\text{op}}, \text{cod}(f^{\text{op}}) := \text{dom}(f)^{\text{op}}$ と定める. 即ち $f : a \rightarrow b$ のとき $f^{\text{op}} : b^{\text{op}} \rightarrow a^{\text{op}}$ である.
- $f^{\text{op}} : a^{\text{op}} \rightarrow b^{\text{op}}, g^{\text{op}} : b^{\text{op}} \rightarrow c^{\text{op}}$ に対して射の合成 $g^{\text{op}} \circ f^{\text{op}} : a^{\text{op}} \rightarrow c^{\text{op}}$ を $g^{\text{op}} \circ f^{\text{op}} = (f \circ g)^{\text{op}}$ と定める.
- $\text{id}_{a^{\text{op}}} := \text{id}_a^{\text{op}}$ とする.

これを圏 C^{op} の反対圏と呼ぶ.

Definition 1.9. 圏 C, D の直積 $C \times D$ を以下のように定義する.

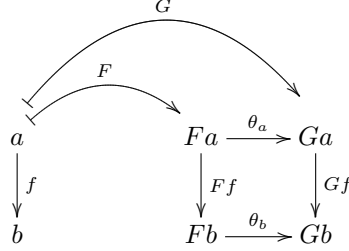
- 対象は「 C の対象と D の対象の組」である.
- $\langle c, d \rangle$ から $\langle c', d' \rangle$ への射は成分ごとの射の組 $\langle f : c \rightarrow c', g : d \rightarrow d' \rangle$ である. つまり $\text{Hom}_{C \times D}(\langle c, d \rangle, \langle c', d' \rangle) := \text{Hom}_C(c, c') \times \text{Hom}_D(d, d')$ となる.
- 射の合成は成分ごとに行う. 即ち $\langle g, g' \rangle \circ \langle f, f' \rangle := \langle g \circ f, g' \circ f' \rangle$ となる.
- $\langle c, d \rangle$ の恒等射は $\text{id}_{\langle c, d \rangle} := \langle \text{id}_c, \text{id}_d \rangle$ である.

1.2 自然変換・圏同値

http://alg-d.com/math/kan_extension/equivalence.pdf

Definition 1.10. C, D を圏, $F, G : C \rightarrow D$ を関手とする. F から G への自然変換とは, D の射の族 $\theta = \{\theta_a : Fa \rightarrow Gb\}_{a \in \text{Ob}(C)}$ であって, $\forall (a \xrightarrow{f} b) \in$

$\text{Mor}(C)$. $\theta_b \circ Ff = Gf \circ \theta_a$ を満たすものをいう. (またこのとき θ_a は a について自然という言い方をする.) 絵で書けば以下ようになる.



θ が F から G への自然変換であることを記号で $\theta : F \Rightarrow G$ と表す. また θ_a を θ の a 成分と呼ぶ.

Remark 1.11. 任意の f について Ff から Gf への変換則が成り立っていると思うと分かりやすい? また射、関手についてだが、基本的には \rightarrow しか記号として使わなくて、こういう圏の内部に言及するときだけ \mapsto を使うイメージ.

Definition 1.12. 各 θ_a が同型射となる自然変換 θ を自然同型という. また自然同型 $F \Rightarrow G$ が存在するとき, F と G は自然同型であるといい, 記号で $F \cong G$ と表す.

Example 1.13. 有限次元線形空間 V と V^{**} についての自然変換 $\theta : \text{id}_C \Rightarrow F \circ F^{\text{op}}, \theta_V(x)(\rho) \mapsto \rho(x)$. 線形代数の世界 p135 も参照. V^* の場合と違って, 基底を出さなくても自然変換が作れるところがポイント.

Definition 1.14. 圏 C, D が圏同値 ($C \simeq D$ と書く)
 \iff 関手 $F : C \rightarrow D, G : D \rightarrow C$ と自然変換 $GF \cong \text{id}_C, FG \cong \text{id}_D$ が存在する.

Definition 1.15. C, D を圏, $F : C \rightarrow D$ を関手とする.

- (1) F が忠実 $\iff \forall a, b \in \text{Ob}(C). F : \text{Hom}_C(a, b) \rightarrow \text{Hom}_D(Fa, Fb)$ が単射.
- (2) F が充満 $\iff \forall a, b \in \text{Ob}(C). F : \text{Hom}_C(a, b) \rightarrow \text{Hom}_D(Fa, Fb)$ が全射.
- (3) F が conservative $\iff \forall f \in \text{Mor}(C). Ff$ が同型ならば f も同型である.
- (4) F が本質的単射 $\iff \forall a, b \in \text{Ob}(C). Fa \cong Fb$ ならば $a \cong b$
 $(\iff Fa$ と Fb に同型射が存在するならば, a と b にも同型射が存在する.)
- (5) F が本質的全射 $\iff \forall d \in \text{Ob}(D). \exists c \in \text{Ob}(C). Fc \cong d$

Proposition 1.16. 忠実充満 \implies conservative, 忠実 \wedge conservative \implies 本質的単射

Theorem 1.17. F が圏同値を与える $\iff F$ が忠実充満な本質的全射

Proof. F が圏同値を与えるという条件は, $G : D \rightarrow C$ と自然同型 $\theta : GF \Rightarrow \text{id}_C, \epsilon : \Rightarrow \text{id}_D$ を使って, 以下で表される.

$$\begin{array}{ccc}
 \forall (c \xrightarrow{f} c') \in \text{Mor}(C), (d \xrightarrow{g} d') \in \text{Mor}(D). & & \\
 \begin{array}{ccc}
 GFc & \xrightarrow{\theta_c} & c \\
 \downarrow GFf & & \downarrow f \\
 GFc' & \xrightarrow{\theta_{c'}} & c'
 \end{array} & & \begin{array}{ccc}
 FGd & \xrightarrow{\epsilon_d} & d \\
 \downarrow FGg & & \downarrow g \\
 FGd & \xrightarrow{\epsilon_{d'}} & d'
 \end{array}
 \end{array}$$

(\implies) ϵ から本質的全射, θ から忠実充満が示せる. また主に θ_c が同型なので逆向きの θ_c^{-1} が存在することを使う.

(\impliedby) 本質的全射 $Fc \rightarrow d$ から ϵ と G を作る. Gg の定義がすこしトリッキーだが忠実充満の定義に帰れば自然. 最後に θ が自然同型であることを言えばいいが, $Fc \xrightarrow{Ff} Fc'$ について ϵ の自然変換の図式を利用することで示せる.

□

Theorem 1.18. F が同型 $\iff F$ が忠実充満で, 対象について全単射

Proof. (\impliedby) Theorem 1.17 と似ているが、ここでは本質的全射ではなく全単射. □

Definition 1.19. 部分圏 $C \subseteq D$ が充満部分圏であるとは、任意の $a, b \in C$ に対して $\text{Hom}_C(a, b) = \text{Hom}_D(a, b)$ となることをいう.

Definition 1.20. 圏 C が骨格的 $\iff a \cong b$ ならば $a = b$ である

Definition 1.21. 圏 C の骨格とは、骨格的な充満部分圏 $S \subseteq C$ であって条件

任意の c に対して、ある $s \in S$ が存在して $c \cong s$ となる

を満たすものをいう.

Theorem 1.22. 任意の圏は骨格を持つ. また骨格は圏同型を除いて一意である.

Proof. 骨格を持つことを示す際に選択公理が必要. 一意性は F を同型射を利用して作って Theorem 1.17 を適用. □

Theorem 1.23. C, D を圏, $S \subseteq C, T \subseteq D$ を骨格とする. このとき

C と D が圏同値 $\iff S$ と T が圏同型

Proof. (\implies) F を S に制限した関手 $F|_S$ が圏同型であることを使うとできる. 本質的全射を使う.

(\impliedby) 包含関手が圏同値であることを利用する. □

2 圏論

2.1 自然変換・関手圏

2.2 コンマ圏

Definition 2.1. C_0, C_1, D を圏, $K : C_0 \rightarrow D, L : C_1 \rightarrow D$ を関手とする. 以下のようにして定まる圏をコンマ圏といい, $K \downarrow L$ と書く.

- $K \downarrow L$ の対象は組 $\langle c_0, c_1, f \rangle$ であり以下を満たすものとする.
 - (1) c_0 は C_0 の対象である.
 - (2) c_1 は C_1 の対象である.
 - (3) $f : Kc_0 \rightarrow Lc_1$ は D の射である.
- $K \downarrow L$ の射 $\langle c_0, c_1, f \rangle \rightarrow \langle c'_0, c'_1, f' \rangle$ とは組 $\langle g_0, g_1 \rangle$ であり以下を満たすものである.
 - (1) $g_0 : c_0 \rightarrow c'_0$ は C_0 の射である

Theorem 2.9. $f : Fc \rightarrow d, h : Fc' \rightarrow d', p : c \rightarrow c', q : d \rightarrow d'$ とする. この時次の左の図式が可換ならば右の図式も可換であり, 右の図式が可換ならば, 左の図も可換である.

$$\begin{array}{ccc} Fc & \xrightarrow{f} & d \\ \downarrow Fp & & \downarrow q \\ c & \xrightarrow{h} & Gd \end{array} \quad \begin{array}{ccc} Fc' & \xrightarrow{\tilde{f}} & d' \\ \downarrow p & & \downarrow Gq \\ c' & \xrightarrow{\tilde{h}} & Gd' \end{array}$$

Proof. ϕ_{cd} の自然変換の可換図から, c, d それぞれ固定したときを考える. q, Gq の向きを入れ替えた図式についても成立する. \square

Definition 2.10. $d = Fc$ とすると $\text{Hom}_D(Fc, Fc) \cong \text{Hom}_C(c, GFc)$ となる. 左辺の id_{Fc} について, $\eta_c := \widetilde{\text{id}_{Fc}}$ と定義する.

Theorem 2.11. $\langle Fc, \eta_c \rangle$ は c から G への普遍射である.

Corollary 2.12. 全単射 $\text{Hom}_D(Fc, d) \rightarrow \text{Hom}_C(c, Gd)$ は $f \mapsto Gf \circ \eta_c$ で与えられる.

Theorem 2.13. $G : D \rightarrow C$ を関手として, 各 $c \in C$ に対して普遍射 $\eta_c : c \rightarrow Gd_c$ が存在するとする. このとき対応 $c \mapsto d_c$ は関手 $F : C \rightarrow D$ を定め, $F \dashv G$ となる.