

圏論

omosan0627

July 14, 2023

とくに断らない限り、圏は locally small とする. (小圏とは違うよ)

1 圏論入門

1.1 圏論とは何か

http://alg-d.com/math/kan_extension/intro.pdf

Definition 1.1. 圏 C とは二つの集まり $\text{Ob}(C)$, $\text{Mor}(C)$ の組であって、以下の条件を満たすものをいう. なお元 $a \in \text{Ob}(C)$ を対象, $f \in \text{Mor}(C)$ を射と呼ぶ.

- (1) 各 $f \in \text{Mor}(C)$ に対して、ドメインと呼ばれる対象 $\text{dom}(f) \in \text{Ob}(C)$ とコドメインと呼ばれる対象 $\text{cod}(f) \in \text{Ob}(C)$ が定められている. $\text{dom}(f) = a$, $\text{cod}(f) = b$ であることを $f : a \rightarrow b$ や $a \xrightarrow{f} b$ と書いて表す. また対象 $a, b \in \text{Ob}(C)$ に対して $\text{Hom}_C(a, b) := \{f \in \text{Mor}(C) : a \xrightarrow{f} b\}$ と書く.
- (2) 2つの射 $f, g \in \text{Mor}(C)$ について $\text{cod}(f) = \text{dom}(g)$ であるとき, f と g の合成射とよばれる射 $g \circ f \in \text{Mor}(C)$ が定められていて, $\text{dom}(g \circ f) = \text{dom}(f)$, $\text{cod}(g \circ f) = \text{cod}(g)$ を満たす.
- (3) 射の合成は結合則を満たす. $(h \circ (g \circ f)) = (h \circ g) \circ f$
- (4) 各 $a \in \text{Ob}(C)$ に対して, 恒等射と呼ばれる射 $\text{id}_a : a \rightarrow a$ が存在し, 射の合成に関する単位元となる. すなわち $f : a \rightarrow b$ に対して, $f \circ \text{id}_a = f$, $\text{id}_b \circ f = f$ である.

Remark 1.2. $C = (\text{Ob}(C), \text{Mor}(C), \text{cod}, \text{dom}, \text{id}, \circ)$ と書き表すことも.

- $\text{Ob}(C), \text{Mor}(C)$ が集まり
- cod, cod が $\text{Mor}(C) \rightarrow \text{Ob}(C)$ の関数
- id が $\text{Ob}(C) \rightarrow \text{Mor}(C)$ の関数
- \circ が $\text{Mor}(C) \times \text{Mor}(C) \rightarrow \text{Mor}(C)$ の関数

Example 1.3. Set, Grp, Top

Definition 1.4. C, D を圏とする. C から D への関手 $F : C \rightarrow D$ とは $a \in \text{Ob}(C)$ に $F(a) \in \text{Ob}(D)$ を, $f \in \text{Mor}(C)$ に $F(f) \in \text{Mor}(D)$ を対応させる関数であって、以下を満たすものである.

- (1) $f : a \rightarrow b$ のとき $F(f) : F(a) \rightarrow F(b)$ である.

(2) $\text{cod}(f) = \text{dom}(g)$ のとき, $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ である.

(3) $a \in C$ に対して $F(\text{id}_a) = \text{id}_{F(a)}$ である.

Definition 1.5. C を圏, $a, b \in C$ を対象とする.

(1) C の射 $f : a \rightarrow b$ が同型射

\iff ある射 $g : b \rightarrow a$ が存在して, $g \circ f = \text{id}_a, f \circ g = \text{id}_b$ となる

(2) a と b が同型 ($a \cong b$ で表す) \iff ある同型射 $f : a \rightarrow b$ が存在する.

Theorem 1.6. f が同型射ならば $F(f)$ も同型射

Definition 1.7. 圏 C と圏 D が同型 ($C \cong D$ と書く) とは, ある関手 $F : C \rightarrow D, G : D \rightarrow C$ が存在して $GF = \text{id}_C, FG = \text{id}_D$.

Definition 1.8. C を圏とする. このとき C^{op} を以下のように定める.

- 対象 $a \in C$ に対して新しい対象 a^{op} を用意し, $\text{Ob}(C^{\text{op}}) := \{a^{\text{op}} : a \in \text{Ob}(C)\}$ と定める.
- 射 $f \in C$ に対して新しい射 f^{op} を用意し, $\text{Mor}(C^{\text{op}}) := \{f^{\text{op}} : f \in \text{Ob}(C)\}$ と定める.
- $\text{dom}(f^{\text{op}}) := \text{cod}(f)^{\text{op}}, \text{cod}(f^{\text{op}}) := \text{dom}(f)^{\text{op}}$ と定める. 即ち $f : a \rightarrow b$ のとき $f^{\text{op}} : b^{\text{op}} \rightarrow a^{\text{op}}$ である.
- $f^{\text{op}} : a^{\text{op}} \rightarrow b^{\text{op}}, g^{\text{op}} : b^{\text{op}} \rightarrow c^{\text{op}}$ に対して射の合成 $g^{\text{op}} \circ f^{\text{op}} : a^{\text{op}} \rightarrow c^{\text{op}}$ を $g^{\text{op}} \circ f^{\text{op}} = (f \circ g)^{\text{op}}$ と定める.
- $\text{id}_{a^{\text{op}}} := \text{id}_a^{\text{op}}$ とする.

これを圏 C^{op} の反対圏と呼ぶ.

Remark 1.9. f^{op} のことを単に f と書く場合が多い. 米田周りの話ではかなり省略することが多いが, よくわからなくなったら op をつけて丁寧に計算すれば良い. 「双対を考えると次の定理が導ける」と言った場合は, C に C^{op} を代入して, C の言葉で書き直すことで従う事実を差す場合が多そう.

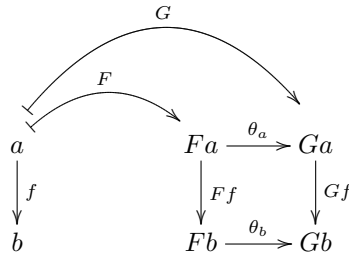
Definition 1.10. 圏 C, D の直積 $C \times D$ を以下のように定義する.

- 対象は「 C の対象と D の対象の組」である.
- $\langle c, d \rangle$ から $\langle c', d' \rangle$ への射は成分ごとの射の組 $\langle f : c \rightarrow c', g : d \rightarrow d' \rangle$ である. つまり $\text{Hom}_{C \times D}(\langle c, d \rangle, \langle c', d' \rangle) := \text{Hom}_C(c, c') \times \text{Hom}_D(d, d')$ となる.
- 射の合成は成分ごとに行う. 即ち $\langle g, g' \rangle \circ \langle f, f' \rangle := \langle g \circ f, g' \circ f' \rangle$ となる.
- $\langle c, d \rangle$ の恒等射は $\text{id}_{\langle c, d \rangle} := \langle \text{id}_c, \text{id}_d \rangle$ である.

1.2 自然変換・圏同値

http://alg-d.com/math/kan_extension/equivalence.pdf

Definition 1.11. C, D を圏, $F, G : C \rightarrow D$ を関手とする. F から G への自然変換とは, D の射の族 $\theta = \{\theta_a : Fa \rightarrow Ga\}_{a \in \text{Ob}(C)}$ であって, $\forall (a \xrightarrow{f} b) \in \text{Mor}(C)$, $\theta_b \circ Ff = Gf \circ \theta_a$ を満たすものをいう. (またこのとき θ_a は a について自然という言い方をする.) 絵で書けば以下のようなになる.



θ が F から G への自然変換であることを記号で $\theta : F \Rightarrow G$ と表す. また θ_a を θ の a 成分と呼ぶ.

Remark 1.12. 任意の f について Ff から Gf への変換則が成り立っていると思うと分かりやすい? また射、関手についてだが、基本的には \rightarrow しか記号として使わなくて、こういう圏の内部に言及するときだけ \mapsto を使うイメージ.

Definition 1.13. 各 θ_a が同型射となる自然変換 θ を自然同型という. また自然同型 $F \Rightarrow G$ が存在するとき, F と G は自然同型であるといい, 記号で $F \cong G$ と表す.

Example 1.14. 有限次元線形空間 V と V^{**} についての自然変換 $\theta : \text{id}_C \Rightarrow F \circ F^{\text{op}}$, $\theta_V(x)(\rho) \mapsto \rho(x)$. 線形代数の世界 p135 も参照. V^* の場合と違って, 基底を出さなくても自然変換が作れるところがポイント.

Definition 1.15. 圏 C, D が圏同値 ($C \simeq D$ と書く)

\iff 関手 $F : C \rightarrow D, G : D \rightarrow C$ と自然変換 $GF \cong \text{id}_C, FG \cong \text{id}_D$ が存在する.

Definition 1.16. C, D を圏, $F : C \rightarrow D$ を関手とする.

- (1) F が忠実 $\iff \forall a, b \in \text{Ob}(C)$. $F : \text{Hom}_C(a, b) \rightarrow \text{Hom}_D(Fa, Fb)$ が単射.
- (2) F が充満 $\iff \forall a, b \in \text{Ob}(C)$. $F : \text{Hom}_C(a, b) \rightarrow \text{Hom}_D(Fa, Fb)$ が全射.
- (3) F が conservative $\iff \forall f \in \text{Mor}(C)$. Ff が同型ならば f も同型である.
- (4) F が本質的単射 $\iff \forall a, b \in \text{Ob}(C)$. $Fa \cong Fb$ ならば $a \cong b$
($\iff Fa$ と Fb に同型射が存在するならば, a と b にも同型射が存在する.)
- (5) F が本質的全射 $\iff \forall d \in \text{Ob}(D)$. $\exists c \in \text{Ob}(C)$. $Fc \cong d$

Proposition 1.17. 忠実充満 \implies conservative, 忠実 \wedge conservative \implies 本質的単射

Theorem 1.18. F が圏同値を与える $\iff F$ が忠実充満な本質的全射

Proof. F が圏同値を与えるという条件は, $G : D \rightarrow C$ と自然同型 $\theta : GF \Rightarrow \text{id}_C, \epsilon : \Rightarrow \text{id}_D$ を使って, 以下で表される.

$$\forall (c \xrightarrow{f} c') \in \text{Mor}(C), (d \xrightarrow{g} d') \in \text{Mor}(D).$$

$$\begin{array}{ccc} GFc & \xrightarrow{\theta_c} & c \\ \downarrow GFf & & \downarrow f \\ GFc' & \xrightarrow{\theta_{c'}} & c' \end{array} \quad \begin{array}{ccc} FGd & \xrightarrow{\epsilon_d} & d \\ \downarrow FGg & & \downarrow g \\ FGd' & \xrightarrow{\epsilon_{d'}} & d' \end{array}$$

(\Rightarrow) ϵ から本質的全射, θ から忠実充満が示せる. また主に θ_c が同型なので逆向きの θ_c^{-1} が存在することを使う.

(\Leftarrow) 本質的全射 $Fc \rightarrow d$ から ϵ と G を作る. Gg の定義がすこしトリッキーだが忠実充満の定義に帰れば自然. 最後に θ が自然同型であることを言えばいいが, $Fc \xrightarrow{Ff} Fc'$ について ϵ の自然変換の図式を利用することで示せる.

□

Theorem 1.19. F が同型 $\iff F$ が忠実充満で, 対象について全単射

Proof. (\Leftarrow) Theorem 1.18 と似ているが, ここでは本質的全射ではなく全単射. □

Definition 1.20. 部分圏 $C \subseteq D$ が充満部分圏であるとは, 任意の $a, b \in C$ に対して $\text{Hom}_C(a, b) = \text{Hom}_D(a, b)$ となることをいう.

Definition 1.21. 圏 C が骨格的 $\iff a \cong b$ ならば $a = b$ である

Definition 1.22. 圏 C の骨格とは, 骨格的な充満部分圏 $S \subseteq C$ であって条件

任意の c に対して, ある $s \in S$ が存在して $c \cong s$ となる

を満たすものをいう.

Theorem 1.23. 任意の圏は骨格を持つ. また骨格は圏同型を除いて一意である.

Proof. 骨格を持つことを示す際に選択公理が必要. 一意性は F を同型射を利用して作って Theorem 1.18 を適用. □

Theorem 1.24. C, D を圏, $S \subseteq C, T \subseteq D$ を骨格とする. このとき

$$C \text{ と } D \text{ が圏同値} \iff S \text{ と } T \text{ が圏同型}$$

Proof. (\Rightarrow) F を S に制限した関手 $F|_S$ が圏同型であることを使うとできる. 本質的全射を使う.


(\Leftarrow) 包含関手が圏同値であることを利用する. □

2 圏論

2.1 自然変換・関手圏

2.2 コンマ圏

Definition 2.1. C_0, C_1, D を圏, $K : C_0 \rightarrow D, L : C_1 \rightarrow D$ を関手とする. 以下のようにして定まる圏をコンマ圏といい, $K \downarrow L$ と書く.

- $K \downarrow L$ の対象は組 $\langle c_0, c_1, f \rangle$ であり以下を満たすものとする.
 - (1) c_0 は C の対象である.
 - (2) c_1 は C の対象である.
 - (3) $f : Kc_0 \rightarrow Lc_1$ は D の射である.
- $K \downarrow L$ の射 $\langle c_0, c_1, f \rangle \rightarrow \langle c'_0, c'_1, f' \rangle$ とは組 $\langle g_0, g_1 \rangle$ であり以下を満たすものである.
 - (1) $g_0 : c_0 \rightarrow c'_0$ は C_0 の射である
 - (2) $g_1 : c_1 \rightarrow c'_1$ は C_1 の射である
 - (3) $Lg_1 \circ f = f' \circ Kg_0$, 即ち次の図式を可換にする.


Remark 2.2. 自然変換の一般化っぽくなっている. $C = C_0 = C_1$ のとき, 自然変換 $\theta : K \Rightarrow L$ は要素が $\langle c, c, \theta_c \rangle$, 射が $\langle f, f \rangle$ である $K \downarrow L$ の部分圏と対応する.

Definition 2.3. Definition 2.1 の定義から, 関手 $P_0 : K \downarrow L \rightarrow C_0$, $P_1 : K \downarrow L \rightarrow C_1$, 自然変換 $\theta : K \circ P_0 \Rightarrow L \circ P_1$ を以下のように定められる.

- $\langle c_0, c_1, f \rangle \in \text{Ob}(K \downarrow L)$ に対して $P_0 \langle c_0, c_1, f \rangle := c_0$, $\langle g_0, g_1 \rangle \in \text{Mor}(K \downarrow L)$ に対して $P_0 \langle g_0, g_1 \rangle := g_0$
- $\langle c_0, c_1, f \rangle \in \text{Ob}(K \downarrow L)$ に対して $P_1 \langle c_0, c_1, f \rangle := c_1$, $\langle g_0, g_1 \rangle \in \text{Mor}(K \downarrow L)$ に対して $P_1 \langle g_0, g_1 \rangle := g_1$
- $\langle c_0, c_1, f \rangle \in \text{Ob}(K \downarrow L)$ に対して $\theta_{\langle c_0, c_1, f \rangle} := f$

Proposition 2.4. もし $\langle X, Q_0, Q_1, \rho \rangle$ が $\langle K \downarrow L, P_0, P_1, \theta \rangle$ と同じ条件を満たすならば, 関手 $H : X \rightarrow K \downarrow L$ が一意に存在して以下を満たす.

- (1) $P_0 \circ H = Q_0$, $P_1 \circ H = Q_1$
- (2) $\theta_H = \rho$

2.3 極限

Definition 2.5. C, D を圏とする. 対角関手 $\Delta : D \rightarrow D^C$ とは

- $a \in D$ に対して Δa は以下で与えられる関手 $\Delta a : C \rightarrow D$ である.
 - $c \in C$ に対して $\Delta a(c) = a$
 - $f \in \text{Mor}(C)$ に対して $\Delta a(f) = \text{id}_a$
- $f : a \rightarrow b$ に対して, Δf は「 $c \in C$ に対して, $(\Delta f)_c = f$ 」で与えられる自然変換 $\Delta f : \Delta a \rightarrow \Delta b$ である.

Remark 2.6. $T(c, d) \mapsto d, T(f, g) \mapsto g$ となる関手 $T : C \times D \rightarrow D$ について, C を右肩に移動したものと一致する.

Definition 2.7. C, D を圏, $c \in C$ を対象, $G : D \rightarrow C$ を関手とする. 以下を満たす組 $\langle d, f \rangle$ を c から G への普遍射という.

- (1) d は D の対象である.

(2) f は C の射 $f : c \rightarrow Gd$ である.

(3) 組 $\langle d', f' \rangle$ が上 2 つの条件を満たすならば, D の射 $h : d \rightarrow d'$ が一意に存在して, $Gh \circ f = f'$ となる.

図図図図図図図図図図図図図図図図図図図図

Definition 2.8. J, C を圏として, $\Delta : C \rightarrow C^J$ を対角関手とする.

(1) 関手 $T : J \rightarrow C$ を図式という. また J を図式 T の添え字圏という.

(2) Δ から $T \in C^J$ への普遍射 $\langle \lim T, \pi \rangle$ を図式 T の極限という.

(3) $T \in C^J$ から Δ への普遍射 $\langle \text{colim } T, \mu \rangle$ を図式 T の余極限という.

Definition 2.9. 関手 $F : C \rightarrow \text{Set}$ が表現可能関手 \iff ある対象 $a \in C$ と自然同型 $F \cong \text{Hom}_C(a, -)$ が存在する

Theorem 2.10. 表現可能関手 F を表現する対象は同型を除いて一意である.

Theorem 2.11. $\alpha : \text{Hom}_C(a, -) \Rightarrow F$ を自然変換として米田の補題で α に対応する $x \in Fa$ を取る. (補足 $x = \alpha_a(\text{id}_a) \in Fa$) このとき,

α が同型 \iff 任意の $b \in C, u \in Fb$ に対して, ある射 $h : a \rightarrow b$ が一意に存在して $Fh(x) = u$ となる.

Theorem 2.12. $F : C \rightarrow D$ を関手として, $d \in D$ を取る. このとき

F から d への普遍射が存在する $\iff \text{Hom}_D(F(-), d)$ が表現可能関手.

Remark 2.13. $\text{Hom}_D(F(-), d) \cong \text{Hom}_C(-, c)$ も成立する.

2.4 随伴写像

http://alg-d.com/math/kan_extension/adjoint.pdf

Definition 2.14. C, D を圏, $F : C \rightarrow D, G : D \rightarrow C$ を関手とする. $c \in C, d \in D$ について自然な全単射 $\phi_{cd} : \text{Hom}_D(Fc, d) \rightarrow \text{Hom}_C(c, Gd)$ が存在するとき, 3 つ組 $\langle F, G, \phi \rangle$ のことを随伴という. このとき記号では $F \dashv G : C \rightarrow D$ もしくは単に $F \dashv G$ と書く. また F を G の左随伴写像, G を F の右随伴写像という.

Definition 2.15. 自然同型 ϕ により次のような二つの射が一対一に対応することになる.

$$f : Fc \rightarrow d, g : c \rightarrow Gd$$

$\phi_{cd}(f) = g$ のとき, g を f の右随伴射, f を g の左随伴射と呼ぶ. 本 PDF では随伴射を \sim と表すことにする. つまり $f : Fc \rightarrow d, g : c \rightarrow Gd$ のとき, $\tilde{f} : c \rightarrow Gd, \tilde{g} : Fc \rightarrow d$ であり, $\phi_{cd}(f) = \tilde{f}, \phi_{cd}(\tilde{g}) = g$ である.

Theorem 2.16. $f : Fc \rightarrow d, h : Fc' \rightarrow d', p : c \rightarrow c', q : d \rightarrow d'$ とする. この時次の左の図式が可換ならば右の図式も可換であり, 右の図式が可換ならば, 左の図も可換である.

$$\begin{array}{ccc} Fc & \xrightarrow{f} & d \\ \downarrow Fp & & \downarrow q \\ c & \xrightarrow{h} & Gd \end{array} \quad \begin{array}{ccc} Fc' & \xrightarrow{\tilde{f}} & d' \\ \downarrow p & & \downarrow Gq \\ c' & \xrightarrow{\tilde{h}} & Gd' \end{array}$$

Proof. ϕ_{cd} の自然変換の可換図から. c, d それぞれ固定したときを考える. q, Gq の向きを入れ替えた図式についても成立する. \square

Definition 2.17. $d = Fc$ とすると $\text{Hom}_D(Fc, Fc) \cong \text{Hom}_C(c, GFc)$ となる. 左辺の id_{Fc} について, $\eta_c := \widetilde{\text{id}_{Fc}}$ と定義する.

Theorem 2.18. $\langle Fc, \eta_c \rangle$ は c から G への普遍射である.

Corollary 2.19. 全単射 $\text{Hom}_D(Fc, d) \rightarrow \text{Hom}_C(c, Gd)$ は $f \mapsto Gf \circ \eta_c$ で与えられる.

Theorem 2.20. $G : D \rightarrow C$ を関手として, 各 $c \in C$ に対して普遍射 $\eta_c : c \rightarrow Gd_c$ が存在するとする. このとき対応 $c \mapsto d_c$ は関手 $F : C \rightarrow D$ を定め, $F \dashv G$ となる.