圏論

omosan0627

June 11, 2023

とくに断らない限り、圏は locally small とする. (小圏とは違うよ)

1 圏論入門

1.1 圏論とは何か

http://alg-d.com/math/kan_extension/intro.pdf

Definition 1.1. 圏 C とは二つの集まり $\mathrm{Ob}(C)$, $\mathrm{Mor}(C)$ の組であって, 以下の条件を満たすものをいう. なお元 $a \in \mathrm{Ob}(C)$ を対象, $f \in \mathrm{Mor}(C)$ を射と呼ぶ.

(1) 各 $f \in \mathrm{Mor}(C)$ に対して, ドメインと呼ばれる対象 $\mathrm{dom}(f) \in \mathrm{Ob}(C)$ とコドメインと呼ばれる対象 $\mathrm{cod}(f) \in \mathrm{Ob}(C)$ が定められている. $\mathrm{dom}(f) = a$, $\mathrm{cod}(f) = b$ であることを $f : a \to b$ や $a \xrightarrow{f} b$ と書いて表す. また対象 $a, b \in \mathrm{Ob}(C)$ に対して $\mathrm{Hom}_C(a, b) := \{f \in \mathrm{Mor}(C) : a \xrightarrow{f} b\}$ と書く.

(2) 2 つの射 $f, g \in \mathrm{Mor}(C)$ について $\mathrm{cod}(f) = \mathrm{dom}(g)$ であるとき, f と g の合成射とよばれる射 $g \circ f$ が定められていて, $\mathrm{dom}(g \circ f) = \mathrm{dom}(f), \mathrm{cod}(g \circ f) = \mathrm{cod}(g)$ を満たす。

(3) 射の合成は結合則を満たす. $(h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f)$

(4) 各 $a \in \mathrm{Ob}(C)$ に対して, 恒等射と呼ばれる射 $\mathrm{id}_a : a \to a$ が存在し, 射の合成に関する単位元となる. すなわち $f : a \to b$ に対して, $f \circ \mathrm{id}_a = f, \mathrm{id}_b \circ f = f$ である.

Example 1.2. $\mathbf{Set}, \mathbf{Grp}, \mathbf{Top}$

Definition 1.3. C, D を圏とする. C から D への関手 $F : C \to D$ とは $a \in \mathrm{Ob}(C)$ に $F(a) \in \mathrm{Ob}(D)$ を, $f \in \mathrm{Mor}(C)$ に $F(f) \in \mathrm{Mor}(D)$ を対応させる関数であって, 以下を満たすものである.

(1) $f : a \to b$ のとき $F(f) : F(a) \to F(b)$ である.

(2) $\mathrm{cod}(f) = \mathrm{dom}(g)$ のとき,$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ である.

(3) $a \in C$ に対して $F(\mathrm{id}_a) = \mathrm{id}_{F(a)}$ である.

Definition 1.4. C を圏, $a, b \in C$ を対象とする.

(1) C の射 $f : a \to b$ が同型射
$\iff$ ある射 $g : b \to a$ が存在して, $g \circ f = \mathrm{id}_a, f \circ g = \mathrm{id}_b$ となる

(2) a と b が同型 ($a \cong b$ で表す) $\iff$ ある同型射 $f : a \to b$ が存在する.

Theorem 1.5. f が同型射ならば $F(f)$ も同型射

Definition 1.6. 圏 C と圏 D が同型 ($C \cong D$ と書く) とは, ある関手 $F : C \to D, G : D \to C$ が存在して $GF = \mathrm{id}_C, FG = \mathrm{id}_D$.

1.2 自然変換・圏同値

http://alg-d.com/math/kan_extension/equivalence.pdf

Definition 1.7. C, D を圏, $F, G : C \to D$ を関手とする. F から G への自然変換とは, D の射の族 $\theta = \{\theta_a : Fa \to Fb\}_{a \in \mathrm{Ob}(C)}$ であって, C の射 $f : a \to b$ に対して $Gf \circ \theta_a = \theta_b Ff$ を満たすものをいう. (またこのとき θ_a は a について自然という言い方をする.) 絵で書けば以下のようになる.

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[d, "f"] \arrow[r, mapsto, bend left, "F"] \arrow[rr, mapsto, bend left=60, "G"] & Fa \arrow[r, "\theta_a"] \arrow[d, "Ff"] & Ga \arrow[d, "Gf"] \\
b & Fb \arrow[r, "\theta_b"] & Gb
\end{tikzcd}$$

θ が F から G への自然変換であることを記号で $\theta : F \Rightarrow G$ と表す. また θ_a を θ の a 成分と呼ぶ.

Definition 1.8. 各 θ_a が同型射となる自然変換 θ を自然同型という. また自然同型 $F \Rightarrow G$ が存在するとき, F と G は自然同型であるといい, 記号で $F \cong G$ と表す.

Example 1.9. 有限次元線形空間 V と V^{**} についての自然変換 $\theta : \mathrm{id}_c \Rightarrow F \circ F^{\mathrm{op}}, \theta_V(x)(\rho) \mapsto \rho(x)$. 線形代数の世界 p135 も参照. V^* の場合と違って, 基底を出さなくても自然変換が作れるところがポイント.

Definition 1.10. 圏 C, D が圏同値 ($C \simeq D$ と書く)
$\iff$ 関手 $F : C \to D, G : D \to C$ と自然変換 $GF \cong \mathrm{id}_C, FG \cong \mathrm{id}_D$ が存在する.