圏論

omosan0627

June 15, 2023

とくに断らない限り、圏は locally small とする. (小圏とは違うよ)

1 圏論入門

1.1 圏論とは何か

http://alg-d.com/math/kan_extension/intro.pdf

Definition 1.1. 圏 C とは二つの集まり $\mathrm{Ob}(C)$, $\mathrm{Mor}(C)$ の組であって, 以下の条件を満たすものをいう. なお元 $a \in \mathrm{Ob}(C)$ を対象, $f \in \mathrm{Mor}(C)$ を射と呼ぶ.

(1) 各 $f \in \mathrm{Mor}(C)$ に対して, ドメインと呼ばれる対象 $\mathrm{dom}(f) \in \mathrm{Ob}(C)$ とコドメインと呼ばれる対象 $\mathrm{cod}(f) \in \mathrm{Ob}(C)$ が定められている. $\mathrm{dom}(f) = a$, $\mathrm{cod}(f) = b$ であることを $f : a \to b$ や $a \xrightarrow{f} b$ と書いて表す. また対象 $a, b \in \mathrm{Ob}(C)$ に対して $\mathrm{Hom}_C(a, b) := \{f \in \mathrm{Mor}(C) : a \xrightarrow{f} b\}$ と書く.

(2) 2つの射 $f, g \in \mathrm{Mor}(C)$ について $\mathrm{cod}(f) = \mathrm{dom}(g)$ であるとき, f と g の合成射とよばれる射 $g \circ f$ が定められていて, $\mathrm{dom}(g \circ f) = \mathrm{dom}(f), \mathrm{cod}(g \circ f) = \mathrm{cod}(g)$ を満たす。

(3) 射の合成は結合則を満たす. $(h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f)$

(4) 各 $a \in \mathrm{Ob}(C)$ に対して, 恒等射と呼ばれる射 $\mathrm{id}_a : a \to a$ が存在し, 射の合成に関する単位元となる. すなわち $f : a \to b$ に対して, $f \circ \mathrm{id}_a = f, \mathrm{id}_b \circ f = f$ である.

Example 1.2. $\mathbf{Set}, \mathbf{Grp}, \mathbf{Top}$

Definition 1.3. C, D を圏とする. C から D への関手 $F : C \to D$ とは $a \in \mathrm{Ob}(C)$ に $F(a) \in \mathrm{Ob}(D)$ を, $f \in \mathrm{Mor}(C)$ に $F(f) \in \mathrm{Mor}(D)$ を対応させる関数であって, 以下を満たすものである.

(1) $f : a \to b$ のとき $F(f) : F(a) \to F(b)$ である.

(2) $\mathrm{cod}(f) = \mathrm{dom}(g)$ のとき,$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ である.

(3) $a \in C$ に対して $F(\mathrm{id}_a) = \mathrm{id}_{F(a)}$ である.

Definition 1.4. C を圏, $a, b \in C$ を対象とする.

(1) C の射 $f : a \to b$ が同型射
$\iff$ ある射 $g : b \to a$ が存在して, $g \circ f = \mathrm{id}_a, f \circ g = \mathrm{id}_b$ となる

(2) a と b が同型 ($a \cong b$ で表す) $\Longleftrightarrow$ ある同型射 $f : a \to b$ が存在する.

Theorem 1.5. f が同型射ならば $F(f)$ も同型射

Definition 1.6. 圏 C と圏 D が同型 ($C \cong D$ と書く) とは, ある関手 $F : C \to D, G : D \to C$ が存在して $GF = \mathrm{id}_C, FG = \mathrm{id}_D$.

Definition 1.7. C を圏とする. このとき C^{op} を以下のように定める.

- 対象 $a \in C$ に対して新しい対象 a^{op} を用意し, $\mathrm{Ob}(C^{\mathrm{op}}) := \{a^{\mathrm{op}} : a \in \mathrm{Ob}(C)\}$ と定める.
- 射 $f \in C$ に対して新しい射 f^{op} を用意し, $\mathrm{Mor}(C^{\mathrm{op}}) := \{f^{\mathrm{op}} : f \in \mathrm{Ob}(C)\}$ と定める.
- $\mathrm{dom}(f^{\mathrm{op}}) := \mathrm{cod}(f)^{\mathrm{op}}, \mathrm{cod}(f^{\mathrm{op}}) := \mathrm{dom}(f)^{\mathrm{op}}$ と定める. 即ち $f : a \to b$ のとき $f^{\mathrm{op}} : b^{\mathrm{op}} \to a^{\mathrm{op}}$ である.
- $f^{\mathrm{op}} : a^{\mathrm{op}} \to b^{\mathrm{op}}, g^{\mathrm{op}} : b^{\mathrm{op}} \to c^{\mathrm{op}}$ に対して射の合成 $g^{\mathrm{op}} \circ f^{\mathrm{op}} : a^{\mathrm{op}} \to c^{\mathrm{op}}$ を $g^{\mathrm{op}} \circ f^{\mathrm{op}} = (f \circ g)^{\mathrm{op}}$ と定める.
- $\mathrm{id}_{a^{\mathrm{op}}} := \mathrm{id}_a^{\mathrm{op}}$ とする.

これを圏 C^{op} の反対圏などと呼ぶ.

1.2 自然変換・圏同値

http://alg-d.com/math/kan_extension/equivalence.pdf

Definition 1.8. C, D を圏, $F, G : C \to D$ を関手とする. F から G への自然変換とは, D の射の族 $\theta = \{\theta_a : Fa \to Fb\}_{a \in \mathrm{Ob}(C)}$ であって, $\forall (a \xrightarrow{f} b) \in \mathrm{Mor}(C)$. $Gf \circ \theta_a = \theta_b \circ Ff$ を満たすものをいう. (またこのとき θ_a は a について自然という言い方をする.) 絵で書けば以下のようになる.

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, mapsto, bend left, "F"] \arrow[rr, mapsto, bend left=60, "G"] \arrow[d, "f"] & Fa \arrow[r, "\theta_a"] \arrow[d, "Ff"] & Ga \arrow[d, "Gf"] \\
b & Fb \arrow[r, "\theta_b"] & Gb
\end{tikzcd}
$$

θ が F から G への自然変換であることを記号で $\theta : F \Rightarrow G$ と表す. また θ_a を θ の a 成分と呼ぶ.

Definition 1.9. 各 θ_a が同型射となる自然変換 θ を自然同型という. また自然同型 $F \Rightarrow G$ が存在するとき, F と G は自然同型であるといい, 記号で $F \cong G$ と表す.

Example 1.10. 有限次元線形空間 V と V^{**} についての自然変換 $\theta : \mathrm{id}_c \Rightarrow F \circ F^{\mathrm{op}}, \theta_V(x)(\rho) \mapsto \rho(x)$. 線形代数の世界 p135 も参照. V^* の場合と違って, 基底を出さなくても自然変換が作れるところがポイント.

Definition 1.11. 圏 C, D が圏同値 ($C \simeq D$ と書く)
$\iff$ 関手 $F : C \to D, G : D \to C$ と自然変換 $GF \cong \mathrm{id}_C, FG \cong \mathrm{id}_D$ が存在する.

Definition 1.12. C, D を圏, $F : C \to D$ を関手とする.

(1) F が忠実 $\iff \forall a, b \in \mathrm{Ob}(C).\ F : \mathrm{Hom}_C(a, b) \to \mathrm{Hom}_C(Fa, Fb)$ が単射.

(2) F が充満 $\iff \forall a, b \in \mathrm{Ob}(C).\ F : \mathrm{Hom}_C(a, b) \to \mathrm{Hom}_C(Fa, Fb)$ が全射.

(3) F が conservative$\iff \forall f \in \mathrm{Mor}(C).\ Ff$ が同型ならば f も同型である.

(4) F が本質的単射 $\iff \forall a, b \in \mathrm{Ob}(C).\ Fa \cong Fb$ ならば $a \cong b$
($\iff Fa$ と Fb に同型射が存在するならば, a と b にも同型射が存在する.)

(5) F が本質的全射 $\iff \forall d \in \mathrm{Ob}(D).\ \exists c \in \mathrm{Ob}(C).\ Fc \cong d$

Proposition 1.13. 忠実充満 $\Longrightarrow$ conservative, 忠実 $\vee$ conservative $\Longrightarrow$ 本質的単射

Theorem 1.14. F が圏同値を与える $\iff$ F が忠実充満な本質的全射

Proof. F が圏同値を与えるという条件は, $G : D \to C$ と自然同型 $\theta : GF \Rightarrow \mathrm{id}_C, \epsilon :\Rightarrow \mathrm{id}_D$ を使って, 以下で表される.

$$\forall (c \xrightarrow{f} c') \in \mathrm{Mor}(C), (d \xrightarrow{g} d') \in \mathrm{Mor}(D).$$

$$\begin{tikzcd}
GFc \arrow[r, "\theta_c"] \arrow[d, "GFf"] & c \arrow[d, "f"] \\
GFc' \arrow[r, "\theta_{c'}"] & c'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
FGd \arrow[r, "\epsilon_d"] \arrow[d, "FGg"] & d \arrow[d, "g"] \\
FGd \arrow[r, "\epsilon_{d'}"] & d'
\end{tikzcd}$$

($\Longrightarrow$)ϵ から本質的全射, θ から忠実充満が示せる. また主に θ_c, ϵ_d 等の射が同型なので逆向きの $\theta_c^{-1}, \epsilon_d^{-1}$ が存在することを使う.
($\Longleftarrow$) 本質的全射 $Fc \to d$ から G と ϵ を作る. 最後に θ が自然同型であることを言えばいいが, $Fc \xrightarrow{Ff} Fc'$ について ϵ の自然変換の図式を利用することで示せる. □

Theorem 1.15. F が同型 $\iff$ F が忠実充満で, 対象について全単射

2 圏論

2.1 随伴写像

`http://alg-d.com/math/kan_extension/adjoint.pdf`

Definition 2.1. C, D を圏, $F : C \to D, G : D \to C$ を関手とする. $c \in C, d \in D$ について自然な全単射 $\phi_{cd} : \mathrm{Hom}_D(Fc, d) \to \mathrm{Hom}_C(c, Gd)$ が存在するとき, 3 つ組 $\langle F, G, \phi \rangle$ のことを随伴という. このとき記号では $F \dashv G : C \to D$ もしくは単に $F \dashv G$ と書く. また F を G の左随伴写像, G を F の右随伴写像という.