圏論

omosan0627

June 26, 2023

とくに断らない限り、圏は locally small とする．(小圏とは違うよ)

1　圏論入門

1.1　圏論とは何か

http://alg-d.com/math/kan_extension/intro.pdf

Definition 1.1. 圏 C とは二つの集まり $\mathrm{Ob}(C)$, $\mathrm{Mor}(C)$ の組であって, 以下の条件を満たすものをいう．なお元 $a \in \mathrm{Ob}(C)$ を対象, $f \in \mathrm{Mor}(C)$ を射と呼ぶ.

(1) 各 $f \in \mathrm{Mor}(C)$ に対して, ドメインと呼ばれる対象 $\mathrm{dom}(f) \in \mathrm{Ob}(C)$ とコドメインと呼ばれる対象 $\mathrm{cod}(f) \in \mathrm{Ob}(C)$ が定められている．$\mathrm{dom}(f) = a$, $\mathrm{cod}(f) = b$ であることを $f : a \to b$ や $a \xrightarrow{f} b$ と書いて表す．また対象 $a, b \in \mathrm{Ob}(C)$ に対して $\mathrm{Hom}_C(a, b) := \{f \in \mathrm{Mor}(C) : a \xrightarrow{f} b\}$ と書く.

(2) 2 つの射 $f, g \in \mathrm{Mor}(C)$ について $\mathrm{cod}(f) = \mathrm{dom}(g)$ であるとき, f と g の合成射とよばれる射 $g \circ f \in \mathrm{Mor}(C)$ が定められていて, $\mathrm{dom}(g \circ f) = \mathrm{dom}(f), \mathrm{cod}(g \circ f) = \mathrm{cod}(g)$ を満たす。

(3) 射の合成は結合則を満たす．$(h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f)$

(4) 各 $a \in \mathrm{Ob}(C)$ に対して, 恒等射と呼ばれる射 $\mathrm{id}_a : a \to a$ が存在し, 射の合成に関する単位元となる．すなわち $f : a \to b$ に対して, $f \circ \mathrm{id}_a = f, \mathrm{id}_b \circ f = f$ である.

Remark 1.2. $C = (\mathrm{Ob}(C), \mathrm{Mor}(C), \mathrm{cod}, \mathrm{dom}, \mathrm{id}, \circ)$ と書き表すことも。

- $\mathrm{Ob}(C), \mathrm{Mor}(C)$ が集まり
- $\mathrm{cod}, \mathrm{cod}$ が $\mathrm{Mor}(C) \to \mathrm{Ob}(C)$ の関数
- id が $\mathrm{Ob}(C) \to \mathrm{Mor}(C)$ の関数
- $\circ$ が $\mathrm{Mor}(C) \times \mathrm{Mor}(C) \to \mathrm{Mor}(C)$ の関数

Example 1.3. $\mathbf{Set}, \mathbf{Grp}, \mathbf{Top}$

Definition 1.4. C, D を圏とする．C から D への関手 $F : C \to D$ とは $a \in \mathrm{Ob}(C)$ に $F(a) \in \mathrm{Ob}(D)$ を, $f \in \mathrm{Mor}(C)$ に $F(f) \in \mathrm{Mor}(D)$ を対応させる関数であって, 以下を満たすものである.

(1) $f : a \to b$ のとき $F(f) : F(a) \to F(b)$ である.

(2) $\mathrm{cod}(f) = \mathrm{dom}(g)$ のとき,$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ である.

(3) $a \in C$ に対して $F(\mathrm{id}_a) = \mathrm{id}_{F(a)}$ である.

Definition 1.5. C を圏, $a, b \in C$ を対象とする.

(1) C の射 $f : a \to b$ が同型射
$\iff$ ある射 $g : b \to a$ が存在して, $g \circ f = \mathrm{id}_a, f \circ g = \mathrm{id}_b$ となる

(2) a と b が同型 ($a \cong b$ で表す) $\iff$ ある同型射 $f : a \to b$ が存在する.

Theorem 1.6. f が同型射ならば $F(f)$ も同型射

Definition 1.7. 圏 C と圏 D が同型 ($C \cong D$ と書く) とは, ある関手 $F : C \to D, G : D \to C$ が存在して $GF = \mathrm{id}_C, FG = \mathrm{id}_D$.

Definition 1.8. C を圏とする. このとき C^{op} を以下のように定める.

- 対象 $a \in C$ に対して新しい対象 a^{op} を用意し, $\mathrm{Ob}(C^{\mathrm{op}}) := \{a^{\mathrm{op}} : a \in \mathrm{Ob}(C)\}$ と定める.
- 射 $f \in C$ に対して新しい射 f^{op} を用意し, $\mathrm{Mor}(C^{\mathrm{op}}) := \{f^{\mathrm{op}} : f \in \mathrm{Ob}(C)\}$ と定める.
- $\mathrm{dom}(f^{\mathrm{op}}) := \mathrm{cod}(f)^{\mathrm{op}}, \mathrm{cod}(f^{\mathrm{op}}) := \mathrm{dom}(f)^{\mathrm{op}}$ と定める. 即ち $f : a \to b$ のとき $f^{\mathrm{op}} : b^{\mathrm{op}} \to a^{\mathrm{op}}$ である.
- $f^{\mathrm{op}} : a^{\mathrm{op}} \to b^{\mathrm{op}}, g^{\mathrm{op}} : b^{\mathrm{op}} \to c^{\mathrm{op}}$ に対して射の合成 $g^{\mathrm{op}} \circ f^{\mathrm{op}} : a^{\mathrm{op}} \to c^{\mathrm{op}}$ を $g^{\mathrm{op}} \circ f^{\mathrm{op}} = (f \circ g)^{\mathrm{op}}$ と定める.
- $\mathrm{id}_{a^{\mathrm{op}}} := \mathrm{id}_a^{\mathrm{op}}$ とする.

これを圏 C^{op} の反対圏と呼ぶ.

1.2 自然変換・圏同値

`http://alg-d.com/math/kan_extension/equivalence.pdf`

Definition 1.9. C, D を圏, $F, G : C \to D$ を関手とする. F から G への自然変換とは, D の射の族 $\theta = \{\theta_a : Fa \to Fb\}_{a \in \mathrm{Ob}(C)}$ であって, $\forall (a \xrightarrow{f} b) \in \mathrm{Mor}(C)$. $Gf \circ \theta_a = \theta_b \circ Ff$ を満たすものをいう. (またこのとき θ_a は a について自然という言い方をする.) 絵で書けば以下のようになる.

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, mapsto, bend left, "F"] \arrow[rr, mapsto, bend left=60, "G"] \arrow[d, "f"] & Fa \arrow[r, "\theta_a"] \arrow[d, "Ff"] & Ga \arrow[d, "Gf"] \\
b & Fb \arrow[r, "\theta_b"] & Gb
\end{tikzcd}
$$

θ が F から G への自然変換であることを記号で $\theta : F \Rightarrow G$ と表す. また θ_a を θ の a 成分と呼ぶ.

Definition 1.10. 各 θ_a が同型射となる自然変換 θ を自然同型という. また自然同型 $F \Rightarrow G$ が存在するとき, F と G は自然同型であるといい, 記号で $F \cong G$ と表す.

Example 1.11. 有限次元線形空間 V と V^{**} についての自然変換 $\theta : \mathrm{id}_c \Rightarrow F \circ F^{\mathrm{op}}, \theta_V(x)(\rho) \mapsto \rho(x)$. 線形代数の世界 p135 も参照. V^* の場合と違って, 基底を出さなくても自然変換が作れるところがポイント.

Definition 1.12. 圏 C, D が圏同値 ($\boldsymbol{C \simeq D}$ と書く)
$\Longleftrightarrow$ 関手 $F : C \to D, G : D \to C$ と自然変換 $GF \cong \mathrm{id}_C, FG \cong \mathrm{id}_D$ が存在する.

Definition 1.13. C, D を圏, $F : C \to D$ を関手とする.

(1) F が忠実 $\Longleftrightarrow \forall a, b \in \mathrm{Ob}(C).\ F : \mathrm{Hom}_C(a, b) \to \mathrm{Hom}_C(Fa, Fb)$ が単射.

(2) F が充満 $\Longleftrightarrow \forall a, b \in \mathrm{Ob}(C).\ F : \mathrm{Hom}_C(a, b) \to \mathrm{Hom}_C(Fa, Fb)$ が全射.

(3) F が conservative$\Longleftrightarrow \forall f \in \mathrm{Mor}(C).\ Ff$ が同型ならば f も同型である.

(4) F が本質的単射 $\Longleftrightarrow \forall a, b \in \mathrm{Ob}(C).\ Fa \cong Fb$ ならば $a \cong b$
($\Longleftrightarrow Fa$ と Fb に同型射が存在するならば, a と b にも同型射が存在する.)

(5) F が本質的全射 $\Longleftrightarrow \forall d \in \mathrm{Ob}(D).\ \exists c \in \mathrm{Ob}(C).\ Fc \cong d$

Proposition 1.14. 忠実充満 $\Longrightarrow$ conservative, 忠実 $\wedge$ conservative $\Longrightarrow$ 本質的単射

Theorem 1.15. F が圏同値を与える $\Longleftrightarrow$ F が忠実充満な本質的全射

Proof. F が圏同値を与えるという条件は, $G : D \to C$ と自然同型 $\theta : GF \Rightarrow \mathrm{id}_C, \epsilon :\Rightarrow \mathrm{id}_D$ を使って, 以下で表される.

$$\forall (c \xrightarrow{f} c') \in \mathrm{Mor}(C), (d \xrightarrow{g} d') \in \mathrm{Mor}(D).$$

$$\begin{tikzcd}
GFc \arrow[r, "\theta_c"] \arrow[d, "GFf"] & c \arrow[d, "f"] \\
GFc' \arrow[r, "\theta_{c'}"] & c'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
FGd \arrow[r, "\epsilon_d"] \arrow[d, "FGg"] & d \arrow[d, "g"] \\
FGd \arrow[r, "\epsilon_{d'}"] & d'
\end{tikzcd}$$

($\Longrightarrow$)ϵ から本質的全射, θ から忠実充満が示せる. また主に θ_c が同型なので逆向きの θ_c^{-1} が存在することを使う.
($\Longleftarrow$) 本質的全射 $Fc \to d$ から ϵ と G を作る. Gg の定義がすこしトリッキーだが忠実充満の定義に帰れば自然. 最後に θ が自然同型であることを言えばいいが, $Fc \xrightarrow{Ff} Fc'$ について ϵ の自然変換の図式を利用することで示せる.

□

Theorem 1.16. F が同型 $\Longleftrightarrow$ F が忠実充満で, 対象について全単射

Proof. ($\Longleftarrow$) Theorem 1.15 と似ているが、ここでは本質的全射ではなく全単射. □

Definition 1.17. 部分圏 $C \subseteq D$ が充満部分圏であるとは、任意の $a, b \in C$ に対して $\mathrm{Hom}_C(a, b) = \mathrm{Hom}_D(a, b)$ となることをいう.

Definition 1.18. 圏 C が骨格的 $\Longleftrightarrow$ $a \cong b$ ならば $a = b$ である

Definition 1.19. 圏 C の骨格とは, 骨格的な充満部分圏 $S \subseteq C$ であって条件

$$\text{任意の } c \text{ に対して, ある } s \in S \text{ が存在して } c \cong s \text{ となる}$$

を満たすものをいう.

Theorem 1.20. 任意の圏は骨格を持つ. また骨格は圏同型を除いて一意である.

Proof. 骨格を持つことを示す際に選択公理が必要. 一意性は F を同型射を利用して作って Theorem 1.15 を適用. □

Theorem 1.21. C, D を圏, $S \subseteq C, T \subseteq D$ を骨格とする. このとき

$$C \text{ と } D \text{ が圏同値} \iff S \text{ と } T \text{ が圏同型}$$

Proof. ($\Longrightarrow$) F を S に制限した関手 $F|_S$ が圏同型であることを使うとできる. 本質的単射を使う.
($\Longleftarrow$) 包含関手が圏同値であることを利用する. □

2 圏論

2.1 随伴写像

http://alg-d.com/math/kan_extension/adjoint.pdf

Definition 2.1. C, D を圏, $F : C \to D, G : D \to C$ を関手とする. $c \in C, d \in D$ について自然な全単射 $\phi_{cd} : \mathrm{Hom}_D(Fc, d) \to \mathrm{Hom}_C(c, Gd)$ が存在するとき, 3 つ組 $\langle F, G, \phi \rangle$ のことを随伴という. このとき記号では $F \dashv G : C \to D$ もしくは単に $F \dashv G$ と書く. また F を G の左随伴写像, G を F の右随伴写像という.

Definition 2.2. 自然同型 ϕ により次のような二つの射が一対一に対応することになる.

$$f : Fc \to d, \ \ g : c \to Gd$$

$\phi_{cd}(f) = g$ のとき, g を f の右随伴射, f を g の左随伴射と呼ぶ. 本 PDF では随伴射を $\tilde{}$ と表すことにする. つまり $f : Fc \to d, g : c \to Gd$ のとき, $\tilde{f} : c \to Gd, \tilde{g} : Fc \to d$ であり, $\phi_{cd}(f) = \tilde{f}, \phi_{cd}(\tilde{g}) = g$ である.

Theorem 2.3. $f : Fc \to d, h : Fc' \to d', p : c \to c', q : d \to d'$ とする. この時次の左の図式が可換ならば右の図式も可換であり, 右の図式が可換ならば, 左の図も可換である.

$$\begin{tikzcd} Fc \arrow[r, "f"] \arrow[d, "Fp"] & d \arrow[d, "q"] \\ c \arrow[r, "h"] & Gd \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Fc' \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "p"] & d' \arrow[d, "Gq"] \\ c' \arrow[r, "\tilde{h}"] & Gd' \end{tikzcd}$$

Proof. ϕ_{cd} の自然変換の可換図から. c, d それぞれ固定したときを考える. q, Gq の向きを入れ替えた図式についても成立する. □

Definition 2.4. $d = Fc$ とすると $\mathrm{Hom}_D(Fc, FC) \cong \mathrm{Hom}_C(c, GFc)$ となる. 左辺の id_{Fc} について, $\eta_c := \widetilde{\mathrm{id}_{Fc}}$ と定義する.

Theorem 2.5. $\langle Fc, \eta_c \rangle$ は c から G への普遍射である.

Corollary 2.6. 全単射 $\mathrm{Hom}_D(Fc, d) \to \mathrm{Hom}_C(c, Gd)$ は $f \mapsto Gf \circ \eta_c$ で与えられる.

Theorem 2.7. $G : D \to C$ を関手として, 各 $c \in C$ に対して普遍射 $\eta_c : c \to Gd_c$ が存在するとする. このとき対応 $c \mapsto d_c$ は関手 $F : C \to D$ を定め, $F \dashv G$ となる.