圏論

omosan0627

July 16, 2023

とくに断らない限り、圏は locally small とする. (小圏とは違うよ)

1 圏論入門

1.1 圏論とは何か

http://alg-d.com/math/kan_extension/intro.pdf

Definition 1.1. 圏 C とは二つの集まり $\mathrm{Ob}(C)$, $\mathrm{Mor}(C)$ の組であって, 以下の条件を満たすものをいう. なお元 $a \in \mathrm{Ob}(C)$ を対象, $f \in \mathrm{Mor}(C)$ を射と呼ぶ.

(1) 各 $f \in \mathrm{Mor}(C)$ に対して, ドメインと呼ばれる対象 $\mathrm{dom}(f) \in \mathrm{Ob}(C)$ とコドメインと呼ばれる対象 $\mathrm{cod}(f) \in \mathrm{Ob}(C)$ が定められている. $\mathrm{dom}(f) = a$, $\mathrm{cod}(f) = b$ であることを $f : a \to b$ や $a \xrightarrow{f} b$ と書いて表す. また対象 $a, b \in \mathrm{Ob}(C)$ に対して $\mathrm{Hom}_C(a, b) := \{f \in \mathrm{Mor}(C) : a \xrightarrow{f} b\}$ と書く.

(2) 2 つの射 $f, g \in \mathrm{Mor}(C)$ について $\mathrm{cod}(f) = \mathrm{dom}(g)$ であるとき, f と g の合成射とよばれる射 $g \circ f \in \mathrm{Mor}(C)$ が定められていて, $\mathrm{dom}(g \circ f) = \mathrm{dom}(f), \mathrm{cod}(g \circ f) = \mathrm{cod}(g)$ を満たす。

(3) 射の合成は結合則を満たす. $(h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f)$

(4) 各 $a \in \mathrm{Ob}(C)$ に対して, 恒等射と呼ばれる射 $\mathrm{id}_a : a \to a$ が存在し, 射の合成に関する単位元となる. すなわち $f : a \to b$ に対して, $f \circ \mathrm{id}_a = f, \mathrm{id}_b \circ f = f$ である.

Remark 1.2. $C = (\mathrm{Ob}(C), \mathrm{Mor}(C), \mathrm{cod}, \mathrm{dom}, \mathrm{id}, \circ)$ と書き表すことも。

- $\mathrm{Ob}(C), \mathrm{Mor}(C)$ が集まり
- $\mathrm{cod}, \mathrm{cod}$ が $\mathrm{Mor}(C) \to \mathrm{Ob}(C)$ の関数
- id が $\mathrm{Ob}(C) \to \mathrm{Mor}(C)$ の関数
- $\circ$ が $\mathrm{Mor}(C) \times \mathrm{Mor}(C) \to \mathrm{Mor}(C)$ の関数

Example 1.3. $\mathbf{Set}, \mathbf{Grp}, \mathbf{Top}$

Definition 1.4. C, D を圏とする. C から D への関手 $F : C \to D$ とは $a \in \mathrm{Ob}(C)$ に $F(a) \in \mathrm{Ob}(D)$ を, $f \in \mathrm{Mor}(C)$ に $F(f) \in \mathrm{Mor}(D)$ を対応させる関数であって, 以下を満たすものである.

(1) $f : a \to b$ のとき $F(f) : F(a) \to F(b)$ である.

(2) $\mathrm{cod}(f) = \mathrm{dom}(g)$ のとき,$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ である.

(3) $a \in C$ に対して $F(\mathrm{id}_a) = \mathrm{id}_{F(a)}$ である.

Definition 1.5. C を圏, $a, b \in C$ を対象とする.

(1) C の射 $f : a \to b$ が同型射
$\iff$ ある射 $g : b \to a$ が存在して, $g \circ f = \mathrm{id}_a, f \circ g = \mathrm{id}_b$ となる

(2) a と b が同型 ($a \cong b$ で表す) $\iff$ ある同型射 $f : a \to b$ が存在する.

Theorem 1.6. f が同型射ならば $F(f)$ も同型射

Definition 1.7. 圏 C と圏 D が同型 ($C \cong D$ と書く) とは, ある関手 $F : C \to D, G : D \to C$ が存在して $GF = \mathrm{id}_C, FG = \mathrm{id}_D$.

Definition 1.8. C を圏とする. このとき C^{op} を以下のように定める.

- 対象 $a \in C$ に対して新しい対象 a^{op} を用意し, $\mathrm{Ob}(C^{\mathrm{op}}) := \{a^{\mathrm{op}} : a \in \mathrm{Ob}(C)\}$ と定める.
- 射 $f \in C$ に対して新しい射 f^{op} を用意し, $\mathrm{Mor}(C^{\mathrm{op}}) := \{f^{\mathrm{op}} : f \in \mathrm{Ob}(C)\}$ と定める.
- $\mathrm{dom}(f^{\mathrm{op}}) := \mathrm{cod}(f)^{\mathrm{op}}, \mathrm{cod}(f^{\mathrm{op}}) := \mathrm{dom}(f)^{\mathrm{op}}$ と定める. 即ち $f : a \to b$ のとき $f^{\mathrm{op}} : b^{\mathrm{op}} \to a^{\mathrm{op}}$ である.
- $f^{\mathrm{op}} : a^{\mathrm{op}} \to b^{\mathrm{op}}, g^{\mathrm{op}} : b^{\mathrm{op}} \to c^{\mathrm{op}}$ に対して射の合成 $g^{\mathrm{op}} \circ f^{\mathrm{op}} : a^{\mathrm{op}} \to c^{\mathrm{op}}$ を $g^{\mathrm{op}} \circ f^{\mathrm{op}} = (f \circ g)^{\mathrm{op}}$ と定める.
- $\mathrm{id}_{a^{\mathrm{op}}} := \mathrm{id}_a^{\mathrm{op}}$ とする.

これを圏 C^{op} の反対圏と呼ぶ.

Remark 1.9. f^{op} のことを単に f と書く場合が多い. 米田周りの話ではかなり省略することが多いが, よくわからなくなったら op をつけて丁寧に計算すれば良い.「双対を考えると次の定理が導ける」と言った場合は, C に C^{op} を代入して, C の言葉で書き直すことで従うことを差す場合が多そう.

Definition 1.10. $F : C \to D$ を関手とするとき, 関手 $F^{\mathrm{op}} : C^{\mathrm{op}} \to D^{\mathrm{op}}$ を以下のように定める.

- $a \in \mathrm{Ob}(C^{\mathrm{op}})$ に対して, $F^{\mathrm{op}}(a) := F(a)$
- $f^{op} \in \mathrm{Mor}(C^{\mathrm{op}})$ に対して, $F^{\mathrm{op}}(f^{\mathrm{op}}) := F(f)^{\mathrm{op}}$

Definition 1.11. 圏 C, D の直積 $C \times D$ を以下のように定義する.

- 対象は「C の対象と D の対象の組」である.
- $\langle c, d \rangle$ から $\langle c', d' \rangle$ への射は成分ごとの射の組 $\langle f : c \to c', g : d \to d' \rangle$ である. つまり $\mathrm{Hom}_{C \times D}(\langle c, d \rangle, \langle c', d' \rangle) := \mathrm{Hom}_C(c, c') \times \mathrm{Hom}_D(d, d')$ となる.
- 射の合成は成分ごとに行う. 即ち $\langle g, g' \rangle \circ \langle f, f' \rangle := \langle g \circ f, g' \circ f' \rangle$ となる.
- $\langle c, d \rangle$ の恒等射は $\mathrm{id}_{\langle c, d \rangle} := \langle \mathrm{id}_c, \mathrm{id}_d \rangle$ である.

1.2 自然変換・圏同値

http://alg-d.com/math/kan_extension/equivalence.pdf

Definition 1.12. C, D を圏, $F, G : C \to D$ を関手とする. F から G への自然変換とは, D の射の族 $\theta = \{\theta_a : Fa \to Fb\}_{a \in \mathrm{Ob}(C)}$ であって, $\forall(a \xrightarrow{f} b) \in \mathrm{Mor}(C)$. $\theta_b \circ Ff = Gf \circ \theta_a$ を満たすものをいう. (またこのとき θ_a は a について自然という言い方をする.) 絵で書けば以下のようになる.

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[d, "f"] \arrow[rr, mapsto, bend left, "F"] \arrow[rrr, mapsto, bend left=50, "G"] & & Fa \arrow[r, "\theta_a"] \arrow[d, "Ff"] & Ga \arrow[d, "Gf"] \\
b & & Fb \arrow[r, "\theta_b"] & Gb
\end{tikzcd}
$$

θ が F から G への自然変換であることを記号で $\theta : F \Rightarrow G$ と表す. また θ_a を θ の a 成分と呼ぶ.

Remark 1.13. 任意の f について Ff から Gf への変換則が成り立っていると思うと分かりやすい? また射、関手についてだが、基本的には $\to$ しか記号として使わなくて、こういう圏の内部に言及するときだけ $\mapsto$ を使うイメージ.

Definition 1.14. 各 θ_a が同型射となる自然変換 θ を自然同型という. また自然同型 $F \Rightarrow G$ が存在するとき, F と G は自然同型であるといい, 記号で $F \cong G$ と表す.

Example 1.15. 有限次元線形空間 V と V^{**} についての自然変換 $\theta : \mathrm{id}_c \Rightarrow F \circ F^{\mathrm{op}}, \theta_V(x)(\rho) \mapsto \rho(x)$. 線形代数の世界 p135 も参照. V^* の場合と違って, 基底を出さなくても自然変換が作れるところがポイント.

Definition 1.16. 圏 C, D が圏同値 ($\boldsymbol{C} \simeq \boldsymbol{D}$ と書く)
$\Longleftrightarrow$ 関手 $F : C \to D, G : D \to C$ と自然変換 $GF \cong \mathrm{id}_C, FG \cong \mathrm{id}_D$ が存在する.

Definition 1.17. C, D を圏, $F : C \to D$ を関手とする.

(1) F が忠実 $\Longleftrightarrow \forall a, b \in \mathrm{Ob}(C)$. $F : \mathrm{Hom}_C(a, b) \to \mathrm{Hom}_C(Fa, Fb)$ が単射.

(2) F が充満 $\Longleftrightarrow \forall a, b \in \mathrm{Ob}(C)$. $F : \mathrm{Hom}_C(a, b) \to \mathrm{Hom}_C(Fa, Fb)$ が全射.

(3) F が conservative$\Longleftrightarrow \forall f \in \mathrm{Mor}(C)$. Ff が同型ならば f も同型である.

(4) F が本質的単射 $\Longleftrightarrow \forall a, b \in \mathrm{Ob}(C)$. $Fa \cong Fb$ ならば $a \cong b$
($\Longleftrightarrow$ Fa と Fb に同型射が存在するならば, a と b にも同型射が存在する.)

(5) F が本質的全射 $\Longleftrightarrow \forall d \in \mathrm{Ob}(D)$. $\exists c \in \mathrm{Ob}(C)$. $Fc \cong d$

Proposition 1.18. 忠実充満 $\Longrightarrow$ conservative, 忠実 $\wedge$ conservative $\Longrightarrow$ 本質的単射

Theorem 1.19. F が圏同値を与える $\Longleftrightarrow$ F が忠実充満な本質的全射

Proof. F が圏同値を与えるという条件は, $G : D \to C$ と自然同型 $\theta : GF \Rightarrow \mathrm{id}_C, \epsilon : \Rightarrow \mathrm{id}_D$ を使って, 以下で表される.

$$\forall (c \xrightarrow{f} c') \in \mathrm{Mor}(C), (d \xrightarrow{g} d') \in \mathrm{Mor}(D).$$

$$\begin{tikzcd} GFc \arrow[r, "\theta_c"] \arrow[d, "GFf"] & c \arrow[d, "f"] \\ GFc' \arrow[r, "\theta_{c'}"] & c' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} FGd \arrow[r, "\epsilon_d"] \arrow[d, "FGg"] & d \arrow[d, "g"] \\ FGd \arrow[r, "\epsilon_{d'}"] & d' \end{tikzcd}$$

$(\Longrightarrow)\epsilon$ から本質的全射, θ から忠実充満が示せる. また主に θ_c が同型なので逆向きの θ_c^{-1} が存在することを使う.
$(\Longleftarrow)$ 本質的全射 $Fc \to d$ から ϵ と G を作る. Gg の定義がすこしトリッキーだが忠実充満の定義に帰れば自然. 最後に θ が自然同型であることを言えばいいが, $Fc \xrightarrow{Ff} Fc'$ について ϵ の自然変換の図式を利用することで示せる. □

Theorem 1.20. F が同型 $\Longleftrightarrow$ F が忠実充満で, 対象について全単射

Proof. $(\Longleftarrow)$ Theorem 1.19 と似ているが、ここでは本質的全射ではなく全単射. □

Definition 1.21. 部分圏 $C \subseteq D$ が充満部分圏であるとは、任意の $a, b \in C$ に対して $\mathrm{Hom}_C(a, b) = \mathrm{Hom}_D(a, b)$ となることをいう.

Definition 1.22. 圏 C が骨格的 $\Longleftrightarrow$ $a \cong b$ ならば $a = b$ である

Definition 1.23. 圏 C の骨格とは, 骨格的な充満部分圏 $S \subseteq C$ であって条件

任意の c に対して, ある $s \in S$ が存在して $c \cong s$ となる

を満たすものをいう.

Theorem 1.24. 任意の圏は骨格を持つ. また骨格は圏同型を除いて一意である.

Proof. 骨格を持つことを示す際に選択公理が必要. 一意性は F を同型射を利用して作って Theorem 1.19 を適用. □

Theorem 1.25. C, D を圏, $S \subseteq C, T \subseteq D$ を骨格とする. このとき

$$C \text{ と } D \text{ が圏同値} \Longleftrightarrow S \text{ と } T \text{ が圏同型}$$

Proof. $(\Longrightarrow)$ F を S に制限した関手 $F|_S$ が圏同型であることを使うとできる. 本質的単射を使う.
$(\Longleftarrow)$ 包含関手が圏同値であることを利用する. □

2 圏論

2.1 自然変換・関手圏

2.2 コンマ圏

Definition 2.1. C_0, C_1, D を圏, $K : C_0 \to D, L : C_1 \to D$ を関手とする. 以下のようにして定まる圏をコンマ圏といい, $K \downarrow L$ と書く.

- $K \downarrow L$ の対象は組 $\langle c_0, c_1, f\rangle$ であり以下を満たすものとする.
  (1) c_0 は C の対象である.
  (2) c_1 は C の対象である.
  (3) $f : Kc_0 \to Lc_1$ は D の射である.
- $K \downarrow L$ の射 $\langle c_0, c_1, f\rangle \to \langle c_0', c_1', f'\rangle$ とは組 $\langle g_0, g_1\rangle$ であり以下を満たすものである.
  (1) $g_0 : c_0 \to c_0'$ は C_0 の射である
  (2) $g_1 : c_1 \to c_1'$ は C_1 の射である
  (3) $Lg_1 \circ f = f' \circ Kg_0$, 即ち次の図式を可換にする.
  図図図図図図図ずっずず

Remark 2.2. 自然変換の一般化っぽくなっている. $C = C_0 = C_1$ のとき, 自然変換 $\theta : K \Rightarrow L$ は要素が $\langle c, c, \theta_c\rangle$, 射が $\langle f, f\rangle$ である $K \downarrow L$ の部分圏と対応する.

Definition 2.3. Definition 2.1 の定義から, 関手 $P_0 : K \downarrow L \to C_0$, $P_1 : K \downarrow L \to C_1$, 自然変換 $\theta : K \circ P_0 \Rightarrow L \circ P_1$ を以下のように定められる。

- $\langle c_0, c_1, f\rangle \in \mathrm{Ob}(K \downarrow L)$ に対して $P_0\langle c_0, c_1, f\rangle := c_0$, $\langle g_0, g_1\rangle \in \mathrm{Mor}(K \downarrow L)$ に対して $P_0\langle g_0, g_1\rangle := g_0$
- $\langle c_0, c_1, f\rangle \in \mathrm{Ob}(K \downarrow L)$ に対して $P_1\langle c_0, c_1, f\rangle := c_1$, $\langle g_0, g_1\rangle \in \mathrm{Mor}(K \downarrow L)$ に対して $P_1\langle g_0, g_1\rangle := g_1$
- $\langle c_0, c_1, f\rangle \in \mathrm{Ob}(K \downarrow L)$ に対して $\theta_{\langle c_0, c_1, f\rangle} := f$

Proposition 2.4. もし $\langle X, Q_0, Q_1, \rho\rangle$ が $\langle K \downarrow L, P_0, P_1, \theta\rangle$ と同じ条件を満たすならば, 関手 $H : X \to K \downarrow L$ が一意に存在して以下を満たす.

(1) $P_0 \circ H = Q_0$, $P_1 \circ H = Q_1$

(2) $\theta_H = \rho$

2.3 極限

Definition 2.5. C, D を圏とする. 対角関手 $\Delta : D \to D^C$ とは

- $a \in D$ に対して Δa は以下で与えられる関手 $\Delta a : C \to D$ である.
  - $c \in C$ に対して $\Delta a(c) = a$
  - $f \in \mathrm{Mor}(C)$ に対して $\Delta a(f) = \mathrm{id}_a$
- $f : a \to b$ に対して, Δf は「$c \in C$ に対して, $(\Delta f)_c = f$」で与えられる自然変換 $\Delta f : \Delta a \to \Delta b$ である.

Remark 2.6. 簡単に言えば, a から「全てを a に写す関手 Δa」に写す関手.

Definition 2.7. C, D を圏, $c \in C$ を対象, $G : D \to C$ を関手とする. 以下を満たす組 $\langle d, f\rangle$ を c から G への普遍射という.

(1) d は D の対象である.

(2) f は C の射 $f : c \to Gd$ である.

(3) 組 $\langle d', f' \rangle$ が上 2 つの条件を満たすならば, D の射 $h : d \to d'$ が一意に存在して, $Gh \circ f = f'$ となる.

図図図図図図図図図図図図図図図図図図

Definition 2.8. J, C を圏として, $\Delta : C \to C^J$ を対角関手とする.

(1) 関手 $T : J \to C$ を図式という．また J を図式 T の添え字圏という.

(2) Δ から $T \in C^J$ への普遍射 $\langle \mathrm{lim} T, \pi \rangle$ を図式 T の極限という.

(3) $T \in C^J$ から Δ への普遍射 $\langle \mathrm{colim} T, \mu \rangle$ を図式 T の余極限という.

Definition 2.9. 関手 $F : C \to \mathbf{Set}$ が表現可能関手 $\Longleftrightarrow$ ある対象 $a \in C$ と自然同型 $F \cong \mathrm{Hom}_C(a, -)$ が存在する

Theorem 2.10. 表現可能関手 F を表現する対象は同型を除いて一意である.

Theorem 2.11. $\alpha : \mathrm{Hom}_C(a, -) \Rightarrow F$ を自然変換として米田の補題で α に対応する $x \in Fa$ を取る．(補足 $x = \alpha_a(\mathrm{id}_a) \in Fa$) このとき,

α が同型 $\Longleftrightarrow$ 任意の $b \in C, u \in Fb$ に対して, ある射 $h : a \to b$ が一意に存在して $Fh(x) = u$ となる.

Theorem 2.12. $F : C \to D$ を関手として, $d \in D$ を取る．このとき

F から d への普遍射が存在する $\Longleftrightarrow \mathrm{Hom}_C(F(-), d)$ が表現可能関手.

Remark 2.13. $\mathrm{Hom}_D(F(-), d) \cong \mathrm{Hom}_C(-, c)$ も成立する.

2.4 随伴関手

http://alg-d.com/math/kan_extension/adjoint.pdf

Definition 2.14. C, D を圏, $F : C \to D, G : D \to C$ を関手とする．$c \in C, d \in D$ について自然な全単射 $\phi_{cd} : \mathrm{Hom}_D(Fc, d) \to \mathrm{Hom}_C(c, Gd)$ が存在するとき, 3 つ組 $\langle F, G, \phi \rangle$ のことを随伴という．このとき記号では $F \dashv G : C \to D$ もしくは単に $F \dashv G$ と書く．また F を G の左随伴写像, G を F の右随伴写像という.

Definition 2.15. 自然同型 ϕ により次のような二つの射が一対一に対応することになる.

$$f : Fc \to d,\ \ g : c \to Gd$$

$\phi_{cd}(f) = g$ のとき, g を f の右随伴射, f を g の左随伴射と呼ぶ．本 PDF では随伴射を $\tilde{}$ と表すことにする．つまり $f : Fc \to d, g : c \to Gd$ のとき, $\tilde{f} : c \to Gd, \tilde{g} : Fc \to d$ であり, $\phi_{cd}(f) = \tilde{f}, \phi_{cd}(\tilde{g}) = g$ である.

Theorem 2.16. $f : Fc \to d, h : Fc' \to d', p : c \to c', q : d \to d'$ とする．この時次の左の図式が可換ならば右の図式も可換であり, 右の図式が可換ならば, 左の図も可換である.

$$\begin{tikzcd} Fc \arrow[r, "f"] \arrow[d, "Fp"] & d \arrow[d, "q"] \\ c \arrow[r, "h"] & Gd \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Fc' \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "p"] & d' \arrow[d, "Gq"] \\ c' \arrow[r, "\tilde{h}"] & Gd' \end{tikzcd}$$

Proof. ϕ_{cd} の自然変換の可換図から．c, d それぞれ固定したときを考える．q, Gq の向きを入れ替えた図式についても成立する． □

Remark 2.17. $Fc \to d$ の射がある図式だと広く成立するはず。可換である =2 つの合成方法があったとき、それが一致するなので、証明のように三角形に分割すれば従いそう。やっぱり向きが重要で、$d \to Fc$ となっていたら、F は右随伴になる。

Definition 2.18. $d = Fc$ とすると $\mathrm{Hom}_D(Fc, Fc) \cong \mathrm{Hom}_C(c, GFc)$ となる. 左辺の id_{Fc} について, $\eta_c := \widetilde{\mathrm{id}_{Fc}}$ と定義する.

Remark 2.19. $\eta : \mathrm{id}_C \Rightarrow GF$ の自然変換になっている。

Theorem 2.20. $\langle Fc, \eta_c \rangle$ は c から G への普遍射である.

Corollary 2.21. 全単射 $\mathrm{Hom}_D(Fc, d) \to \mathrm{Hom}_C(c, Gd)$ は $f \mapsto Gf \circ \eta_c$ で与えられる.

Theorem 2.22. $G : D \to C$ を関手として, 各 $c \in C$ に対して普遍射 $\eta_c : c \to Gd_c$ が存在するとする．このとき対応 $c \mapsto d_c$ は関手 $F : C \to D$ を定め, $F \dashv G$ となる.

Theorem 2.23. $G : D \to C$ の左随伴関手は, 存在するならば (自然同型を除いて) 一意である.

Theorem 2.24. 左随伴関手は任意の余極限と交換する．即ち関手 $T : J \to C$ の余極限 $\langle \mathrm{colim} T, \mu \rangle$ が存在するとき, $\langle F(\mathrm{colim} T), F\mu \rangle$ は関手 $FT : J \to D$ の余極限である.

Theorem 2.25. $\epsilon_d := \widetilde{\mathrm{id}_{Gd}} : FGd \to d$ とすれば $\langle Gd, \epsilon_d \rangle$ は F から d への普遍射であり, 全単射 $\mathrm{Hom}_C(c, Gd) \to \mathrm{Hom}_D(Fc, d)$ は $g \mapsto \epsilon_d \circ Fg$ により与えられる．また ϵ は自然変換 $FG \Rightarrow \mathrm{id}_D$ となる．逆に $F : C \to D$ を関手として, 各 $d \in D$ に対して普遍射 $\epsilon_c : Fc_d \to d$ が存在すれば, F は右随伴関手 G を持つ．また右随伴は一意的であり, さらに右随伴関手は任意の極限と交換する.

3 全ての概念は Kan 拡張である

3.1 Kan 拡張

3.2 随伴関手定理

Theorem 3.1. C, D を圏, C を余完備で関手 $F : C \to D$ は余連続であるとする. 更に, 任意の $d \in D$ に対してある集合 $S \subset \mathrm{Ob}(F \to d)$ が存在して次を満たすとする．(この条件を解集合条件と呼ぶ)

任意の $\langle c, f \rangle \in F \to d$ に対してある $\langle s, k \rangle \in S$ と射 $\langle c, f \rangle \to \langle s, k \rangle$ が存在する.

このとき F は右随伴を持つ.

Proof. 各点 Kan 拡張が存在することを示す. □