Chapter1 の気温の問題で厳密解を求めてみよう。

$$E(\omega_0,\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4)=\sum_{n=1}^{12}\left(\left(\sum_{m=0}^{4}\omega_m n^m\right)-t_n\right)^2 \tag{1}$$

この関数の極値を求めたい。

極値をとる条件は、

$$\frac{\partial E}{\partial\omega_m}(\omega_0,\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega 4)=0\;(m=0,\ldots,4)$$

であり、この連立方程式を解けばよい。

$V_n=y_n-t_n=(\sum_{m=0}^{4}\omega_m n^m)-t_n$ として、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E}{\partial\omega_m}&=\frac{\partial}{\partial\omega_m}(\sum_{n=1}^{12}V_n^2)\\
&=\sum_{n=1}^{12}\left(\frac{\partial}{\partial V_n}V_n^2\right)\frac{\partial V_n}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial\omega_m}\\
&=\sum_{n=1}^{12}(2V_n)n^m\\
&=2\sum_{n=1}^{12}\omega_0 n^m+\omega_1 n^{m+1}+\omega_2 n^{m+2}+\omega_3 n^{m+3}+\omega_4 n^{m+4}-t_n n^m\\
&=2\left(\omega_0\sum_{n=1}^{12}n^m+\omega_1\sum_{n=1}^{12}n^{m+1}+\omega_2\sum_{n=1}^{12}n^{m+2}+\omega_3\sum_{n=1}^{12}n^{m+3}+\omega_4\sum_{n=1}^{12}n^{m+4}-\sum_{n=1}^{12}t_n n^m\right)
\end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial E}{\partial\omega_m}=0\\
&\Leftrightarrow\omega_0\sum_{n=1}^{12}n^m+\omega_1\sum_{n=1}^{12}n^{m+1}+\omega_2\sum_{n=1}^{12}n^{m+2}+\omega_3\sum_{n=1}^{12}n^{m+3}+\omega_4\sum_{n=1}^{12}n^{m+4}-\sum_{n=1}^{12}t_n n^m=0\\
&\Leftrightarrow\omega_0\sum_{n=1}^{12}n^m+\omega_1\sum_{n=1}^{12}n^{m+1}+\omega_2\sum_{n=1}^{12}n^{m+2}+\omega_3\sum_{n=1}^{12}n^{m+3}+\omega_4\sum_{n=1}^{12}n^{m+4}=\sum_{n=1}^{12}t_n n^m
\end{aligned}$$

となる。$m=0,\ldots,4$ で具体値を代入して、

$$\begin{bmatrix}12&78&650&6084&60710\\78&650&6084&60710&630708\\650&6084&60710&630708&6735950\\6084&60710&630708&6735950&73399404\\60710&630708&6735950&73399404&812071910\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega_0\\\omega_1\\\omega_2\\\omega_3\\\omega_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}182.9\\1286.6\\10362.6\\90481.4\\835744.2\end{bmatrix}$$

これを解いて、

$$
\begin{bmatrix} \omega_0 \\ \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11.120202 \\ -9.293603 \\ 4.063967 \\ -0.454027 \\ 0.014744 \end{bmatrix}
$$

を得る。

(1) の式に ω の値を代入して $E = 12.144164724$ を得る。

P61 に「実際の誤差関数 $\boldsymbol{loss}$ の最小値は約 12」と書いてあるが、それと一致する。