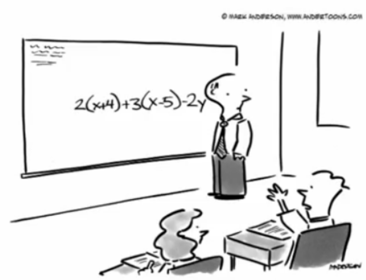
Linear Algebra For Data Science and Machine Learning

Lineer Cebirin Önemi ve Uygulama Alanları

- Lineer cebir, matematiğin önemli bir dallarından birisidir.
- Lineer cebir, çeşitli disiplinlerde geniş uygulama alanları bulmuştur.
- Günümüzde, veri bilimi ve makine öğrenimi gibi teknoloji odaklı alanlarda, büyük veri setleri ve karmaşık modellerle başa çıkmak için vazgeçilmez bir araç haline gelmiştir.



"How come we never complicate equations?"

Lineer Cebirin Temelleri

- **Temel Kavramlar:**

  · **Vektörler:** Uzaydaki noktaları temsil eden ve genellikle sütun matris olarak ifade edilen öğelerdir.

  · **Matrisler:** Veriyi düzenlemek, temsil etmek ve çeşitli operasyonları gerçekleştirmek için kullanılır.

  · **Temel İşlemler:** Toplama, Çıkarma, Skalar Çarpma, İç Çarpım, Transpoz, Determinant ...

- **Lineer Dönüşümler:** Lineer dönüşümler, uzaydaki nesnelerin lineer bir değişimini anlatan matematiksel operasyonlardır. Bu dönüşümler, bir nesnenin konumunu, boyutunu veya yönünü değiştirebilir. Örneğin, bir görüntünün boyutunu değiştirmek veya bir veri setini dönüştürmek için kullanılırlar.

Neden Lineer Cebir?

- **Matematiksel Modelleme:** Lineer cebir, gerçek dünya problemlerini matematiksel olarak modelleme yeteneği sunar. Özellikle doğrusal ilişkileri ve bağımlılıkları ifade etmek için ideal bir araçtır.

- **Veriyi Temsil Etme Gücü:** Büyük veri setleri ve karmaşık yapılar lineer cebirle etkili bir şekilde temsil edilebilir. Bu, veri bilimi ve makine öğrenimi alanlarında karşılaşılan karmaşık problemleri çözme yeteneğini güçlendirir.

- **Optimizasyon ve Çözümleme:** Lineer cebir, lineer denklemlerin sistemlerini hızlı ve etkili bir şekilde çözebilme yeteneği sunar. Bu, optimizasyon problemlerini çözmede ve doğrusal regresyon gibi modelleri eğitmekte önemlidir.

- **Bilgisayar Biliminde Rolü:** Bilgisayar bilimi alanında, veri yapılarından grafik teorisine kadar birçok konuda lineer cebirin temel bir rolü vardır. Örneğin, algoritmaların analizi ve grafik üzerinde işlemler yapma süreçlerinde sıkça kullanılır.

Veri Biliminde Lineer Cebir

- **Veri Temsili:**

· Veri biliminde, büyük ve karmaşık veri setlerini etkili bir şekilde temsil etmek önemlidir. Lineer cebir, bu veri setlerini matrisler aracılığıyla düzenleyip temsil etmede güçlü bir araçtır. Her bir gözlem, bir vektör veya matris içinde ifade edilebilir.

· Özellik vektörleri, bir veri noktasının özelliklerini içerir ve veri analizi süreçlerinde temel bir rol oynar.

- **Lineer Regresyon:**

· Lineer regresyon, bir bağımlı değişkenin diğer bağımsız değişkenlerle ilişkisini modellemek için kullanılır. Lineer cebir, regresyon katsayılarını ve hata karelerini hesaplamak için önemlidir.

· Normal denklemler, lineer regresyon problemlerini çözmede kullanılan matris formunu içerir.

- **Boyut Azaltma:**

· Boyut azaltma teknikleri olan PCA ve SVD, veri setlerindeki karmaşıklığı azaltmak için lineer cebiri kullanır. Bu teknikler, veri setindeki önemli özellikleri koruyarak boyutu azaltır ve modelin genelleme yeteneğini artırır.

Makine Öğrenmesinde Lineer Cebir

- **Sinir Ağları (Neural Networks):**

· Sinir ağları, derin öğrenme modellerini temsil eder ve matrislerle ifade edilir. Lineer cebir, sinir ağlarının katmanları arasındaki ağırlıkları güncellemek ve eğitmek için kullanılır.

· İleri ve geri yayılım süreçleri, lineer cebirin gradient hesaplamalarını içerir.

- **Optimizasyon:**

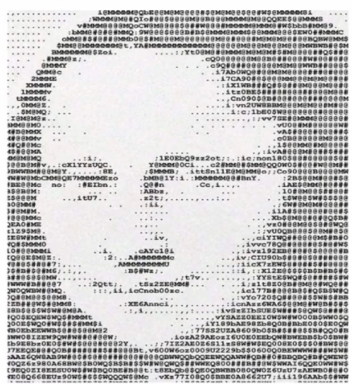
· Makine öğrenimi modellerinin eğitimi, bir optimizasyon sürecini içerir. Gradient iniş (gradient descent) gibi optimizasyon algoritmaları, lineer cebirin kullanımını içerir ve modellerin parametrelerini en iyi şekilde güncellemek için matris operasyonları kullanılır.

- **Kümeleme ve Sınıflandırma (Clustering and Classification):**

·Kümeleme ve sınıflandırma algoritmaları, veriyi gruplandırmak ve etiketlemek için kullanılır. Lineer cebir, karar sınırlarını tanımlamak ve veriyi sınıflandırmak için önemlidir.

Görüntü İşleme Uygulamaları:

Lineer cebir, görüntü işleme uygulamalarında yaygın olarak kullanılır. Görüntüler matrisler olarak temsil edilir ve bu matrisler üzerinde çeşitli lineer cebir operasyonları uygulanır.



Görüntü İşleme Uygulamaları:

- **Matris Filtreleme:**

· Görüntü filtreleme işlemleri, özellikle kenar tespiti gibi uygulamalarda, matrisler arasında konvolüsyon işlemleri kullanır.

- **Renk Dönüşümleri:**

· Renk dönüşümleri, görüntülerde renk uzaylarını değiştirmek için matris dönüşümleri içerir. Bu, renkli görüntülerin analizi ve işlenmesinde lineer cebirin kullanılmasını gerektirir.

Gerçek Dünya Örnekleri

- **Netflix, Spotify ve Öneri Sistemleri:**

· Video akış servisleri, kullanıcı tercihlerini anlamak ve öneri sistemleri geliştirmek için lineer cebiri kullanır. Bu, kullanıcıları benzer ilgi alanlarına sahip gruplara dahil etme ve içerik önerilerini kişiselleştirmede yardımcı olur.

- **Finansal Analiz ve Portföy Yönetimi:**

· Finansal analizde, portföy yönetimi ve risk değerlendirmesi gibi alanlarda lineer cebir, karmaşık finansal modellerin oluşturulmasında ve çözülmesinde kullanılır. Örneğin, portföy getirisini optimize etmek için lineer programlama modelleri kullanılır.

Zorluklar ve Gelecek Trendler

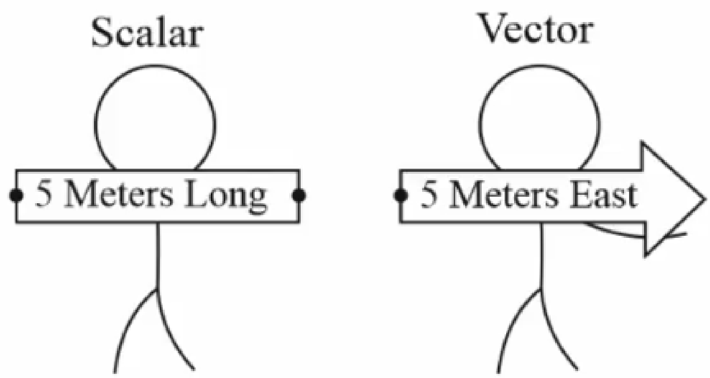
- **Yüksek Boyutlu Veri Setleri ve Boyut Azaltma:**

· Yüksek boyutlu veri setlerinde boyut azaltma, bilgi kaybına neden olabilir. Burum, verinin temsil gücünü ve modelin genelleme yeteneğini etkileyebilir.

- **Gelecek Trendler:**

· Geleceklete, lineer cebirin paralel hesaplama, büyük veri analizi ve derin öğrenme gibi konulardaki rolünün daha da artması beklenmektedir. Yapay zeka ve makine öğrenmesi alanındaki ilerlemeler, lineer cevirin önemini daha da vurgulamaktadır.

Vektörler ve Skalarler



Skalar Nedir?

<u>Tanım:</u> Skaler, yönü olmayan yalnızca büyüklüğü temsil eden sayısal değerlerdir.

- Veri biliminde skalarler bir sayısal değişkene ait değerleri, model parametrelerini temsil eder.
- Ayrıca, doğrusal regresyon gibi modellerde katsayılar olarak karşımıza çıkar.

<u>Örnekler:</u>

- **Sıcaklık:** T = 30
- **Yaş:** A = 28
- **Gelir:** I = 30.000 ₺

Vektör Nedir?

<u>Tanım:</u> Vektörler hem büyüklüğü hem de yönü olan matematiksel nesnelerdir.

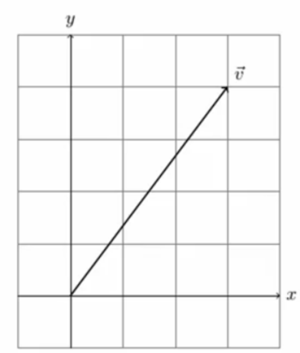
- Veri biliminde vektörler çok boyutlu veri noktalarını, bir başka deyişle gözlem birimlerini temsil eder.

<u>Örnekler:</u>

$$\vec{p} = \begin{bmatrix} \text{Name} \\ \text{Age} \\ \text{Gender} \\ \text{Occupation} \\ \text{Location} \\ \text{Interests} \\ \text{Education} \\ \text{Hobbies} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{John Doe} \\ 30 \\ \text{Male} \\ \text{Software Engineer} \\ \text{New York, USA} \\ \text{Reading, Cooking, Hiking} \\ \text{Master's in Computer Science} \\ \text{Photography, Traveling} \end{bmatrix} \qquad pur\vec{c}hase = \begin{pmatrix} \text{Date} \\ \text{Product Name} \\ \text{Quantity} \\ \text{Unit Price} \\ \text{Total Price} \\ \text{Payment Method} \\ \text{Shipping Address} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{2023-11-07} \\ \text{Laptop} \\ 2 \\ \$800.00 \\ \$1,600.00 \\ \text{Credit Card} \\ \text{123 Main St, City, Country} \end{pmatrix}$$

Vektör Notasyonu

- **Geometrik Notasyon:** Bir vektör v genellikle başlangıç ve bitiş noktası olan bir ok ile temsil edilirir.



- **Cebirsel Notasyon:** Bir vektör v koordinat bileşenleri ile temsil edilebilir.

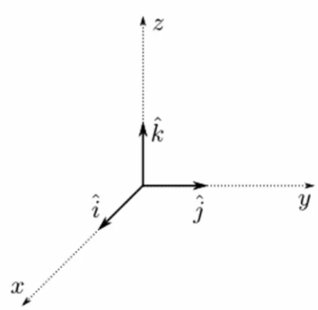
  Örneğin, 2 boyutlu bir vektör v aşağıdaki gibi gösterilir:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}$$

  Burada, v_x, x eksenindeki bileşenini, v_y, y eksenindeki bileşenini ifade etmektedir.

- **Birim Vektör:** Büyüklüğü 1 olan vektörlere denir.

Kartezyen koordinat sisteminde birim vektörler genellikle x yönü için $\hat{\imath}$, y yönü için $\hat{\jmath}$, z yönü için ise $\hat{k}$ notasyonu ile gösterilir.



Temel Vektörel İşlemler

Giriş

- Vektörel Toplama
- Vektörel Çıkarma
- Scalar Çarpma
- Bir Vektörün Uzulunluğu (Büyüklüğü)
- İç Çarpım (Dot Product)
- İki Vektör Arasındaki Açı

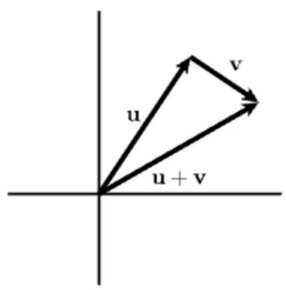
Vektörel Toplama

Tanım: İki vektörün toplamı, vektörlerin her bir bileşeninin karşılıklı olarak toplanması şeklinde tanımlanır.

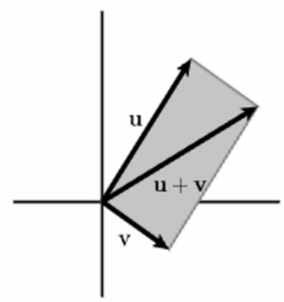
Örneğin, $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ ve $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ n-boyutlu iki vektör olsun. Bu iki vektör ***v*** ve ***u***'nun toplamı şu şekilde ifade edilir:

$$\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} = (v_1 + u_1, v_2 + u_2, \dots, v_n + u_n)$$

Geometrik İnterpretasyon:



Şekil 1: Uc Uca Ekleme Yöntemi



Şekil 2: Paralelkenar Yöntemi

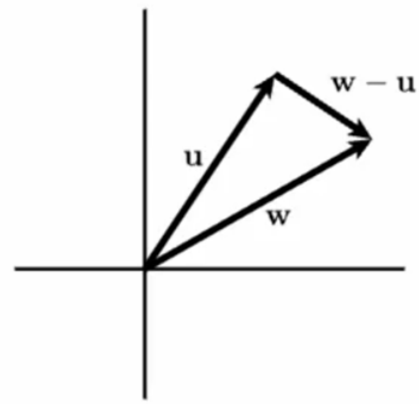
Vektörel Çıkarma

Tanım: İki vektörün farkı, vektörlerin her bir bileşeninin karşılıklı olarak çıkarılması şeklinde tanımlanır.

Örneğin, $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ ve $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ n-boyutlu iki vektör olsun. Bu iki vektör ***v*** ve ***u***'nun toplamı şu şekilde ifade edilir:

$$\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u} = (v_1 - u_1, v_2 - u_2, \dots, v_n - u_n)$$

Geometrik İnterpretasyon:



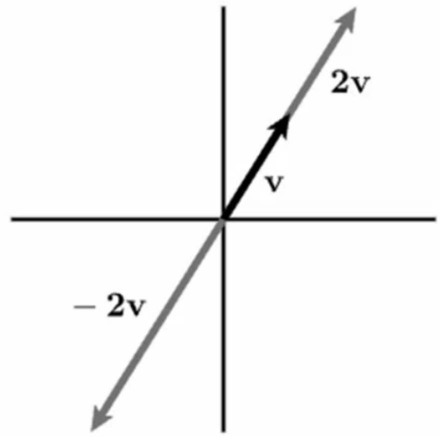
Skalar Çarpma

<u>Tanım:</u> Bir vektörü bir skalar ile çarpma işlemi, o vektörün her bir bileşeni skalarle çarpılarak tanımlanır

Örneğin, $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ n-boyutlu vektör, k bir skalar olsun. Skalar çarpım şu şekilde ifade edilir:

$$kv = (kv_1, kv_2, \dots, kv_n)$$

Geometrik İnterpretasyon:



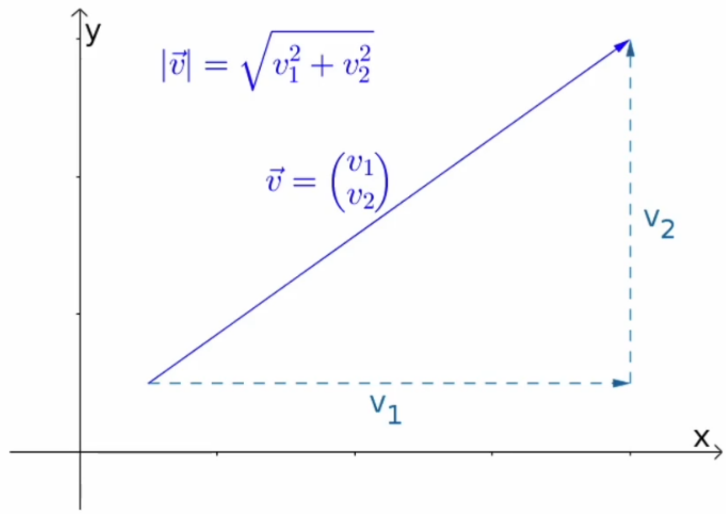
Vektör Uzunluğu (Büyüklüğü)

Tanım: Bir vektörün uzunluğu ya da büyüklülüğü, vektörün başlangıç noktasından bitiş noktasına kadar olan mesafeyi temsil eder.

Örneğin, n-boyutlu ***v* = (*v*$_1$, *v*$_2$, ... , *v*$_n$)** vektörünün boyu ||V|| ile gösterilir ve şu şekilde hesaplanır:

$$||\mathrm{v}|| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \ ... + v_n^2}$$

Geometrik İnterpretasyon:



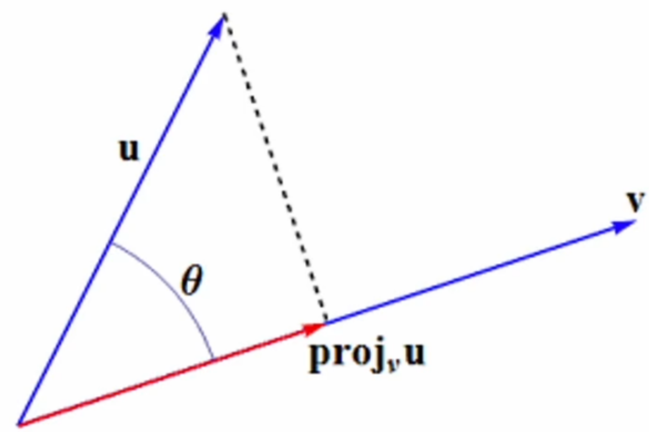
İç Çaprım (Dot Product)

Tanım: İki vektörün iç çarpımı vektörlerin karşılıklı bileşenlerinin çarpılarak toplanması olarak tanımlanır.

Örneğin, n-boyutlu $\boldsymbol{v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)}$ ve $\boldsymbol{u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)}$ vektörlerinin iç çarpımı **v • u** ile gösterilir ve şu şekilde hesaplanır:

$$\mathbf{v} \bullet \mathbf{u} = v_1 . u_1 + v_2 . u_2 + \ldots + v_n . u_n$$

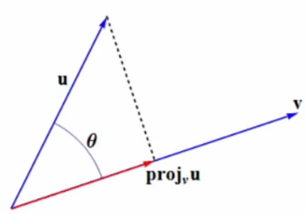
Geometrik İnterpretasyon:



İki Vektör Arasındaki Açı:

İki vektör arasındaki açı, vektörlerin iç çarpımının vektörlerin uzuluklarının çarpımına oranıyla bulunur.

$$\cos \boldsymbol{\theta} = \frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}$$



Vektörel Operasyonların Veri Bilimindeki Yeri

- Veri biliminde, veri noktaları (gözlem birimleri) özellik vektörleri olarak temsil edilir. Her bir özellik (variable/feature) bir boyut olarak düşünülebilir. Vektörel işlemler bu özellik vektörlerini manipüle etmede ve analiz etmede kullanırlır.

- Makine öğrenmesinde genellikle fonskiyonları optimize etmek gerekir ve gradyan inişi (gradient descent) yaygın bir optimizasyon tekniğidir. Vektörler, gradyan vektörünü anlamak ve hesaplamak için kritik bir rol oynar.

- Vektör işlemler PCA(Ana Bileşen Analizi – Principal Component Analysis) gibi boyut azaltma tekniklerinde kullanılır. Bu tür teknikler veri görselleştirmesi mümkün kılar.

Özet

- **Vektörel Toplama:**

$$u + v = (v_1 + u_1, v_2 + u_2, \ldots, v_n + u_n)$$

- **Vektörel Çıkarma:**

$$u - v = (v_1 - u_1, v_2 - u_2, \ldots, v_n - u_n)$$

- **Skalar Çarpma:**

$$kv = (kv_1, kv_2, \ldots, kv_n)$$

- **Vektör Uzunluğu (Büyüklüğü):**

$$||v|| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2}$$

- **İç Çarpım (Dot Product):**

$$v \bullet u = v_1 . u_1 + v_2 . u_2 + . . . + v_n . u_n$$

- **İki Vektör Arasındaki Açı:**

$$\cos\theta = \frac{u \cdot v}{|u||v|}$$

Lineer Denklem Nedir ?

<u>Tanım:</u> Lineer denklem, bir veya daha fazla bilinmeyenin doğrusal terimlerle ifade edildiği bir matematiksel ifadedir.

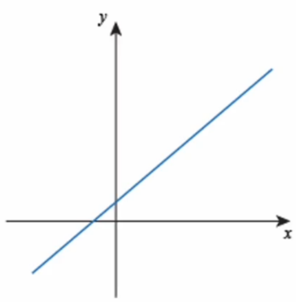
- Genel olarak, bir lineer denklemde bilinmeyenler birinci dereceden terimlerle temsil edilir ve denklemin genel yapısı şu şekildedir:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b.$$

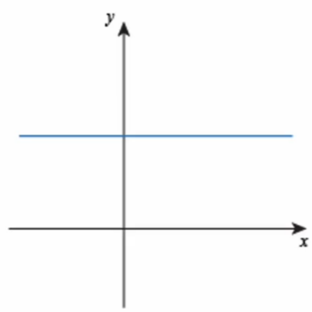
Burada, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bilinmeyenler, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ katsayılar ve b sabit bir sayıdır.

- 2-boyutlu uzayda bir lineer denklemin görüntüsü bir doğru belirtir ve denklemi genellikle şu şekildedir:

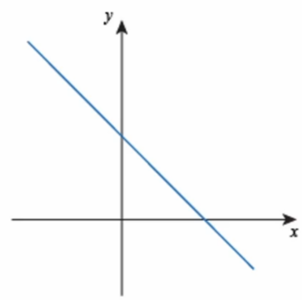
$$ax + by = c$$



$x - 2y = -1$



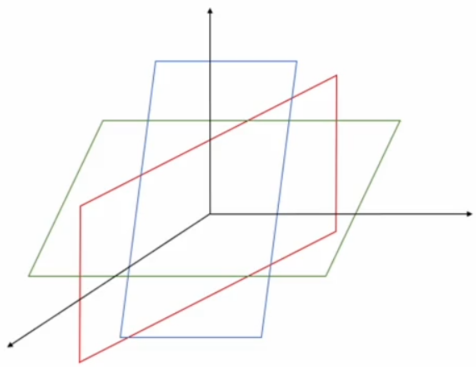
$0x + 1y = 2$



$x + 2y = 3$

• 3-boyutlu uzayda bir lineer denklemin görüntüsü bir düzlem belirtir ve denklemi genellikle şu şekildedir:

$$ax + by + cz = d$$



Lineer Denklem Sistemi Nedir ?

__**Tanım:**__ Lineer denklem sistemi, birden fazla lineer denklemin bir arada bulunduğu bir yapıdır.

- Genel olarak, m tane lineer denklemin bir arada bulunduğu bir lineer denklem şu şekildedir ifade edilebilir:

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{gathered}$$

Burada, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bilinmeyenler, a_{ij} $(1 \leq i, j \leq m)$ katsayılar ve $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sabit sayılardır.

Matris Temsili

m adet lineer denklemden oluşan ve *n* adet bilinmeyeni içeren lineer denklem sisteminin matris temsili şu şekildedir:

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m$$

Bu sistem, $A\,.X=B$ şeklinde matrisler kullanılarak temsil edilebilir:

- A değişkenlerin katsayılarını içeren *m*×*n* boyutunda bir matristir.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- X değişkenlerin bulunduğu sütun vektörü: $X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$
- B sabitlerin bulunduğu sütun vektörü: $B=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$

<u>Lineer Denklem Sistemi</u>

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m$$

<u>Matris Temsili</u>

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

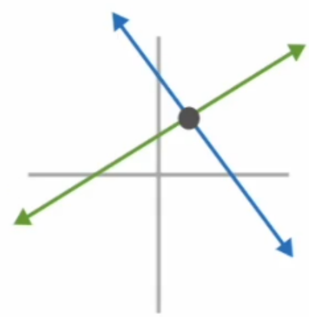
$$A \quad . \quad X \quad = \quad B$$

Lineer Denklem Sistem Çözümleri

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

- İki doğrunun tek bir noktada kesiştiği durumdur.
- Denklemlerin çözüm kümesinde bir nokta bulunur.

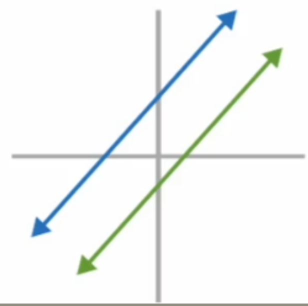


Lineer Denklem Sistem Çözümleri

- **Çözüm Yok (Paralel Doğrular):**

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2 = b_1$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2 = b_2$$

- Doğrular hiçbir noktada kesişmez, paraleldir.
- Denklemlerin çözüm kümesi boştur.

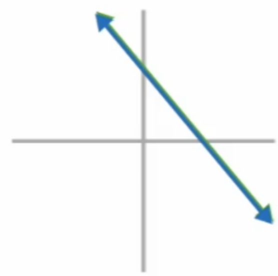


Lineer Denklem Sistem Çözümleri

- **Sonsuz Çözüm (Çakışan Doğrular):**

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

- İki Doğru aynı çizgi üzerindedir.
- Denklemlerin çözüm kümesi sonsuz sayıda noktadan oluşur.



Denklem Sistemlerini Çözmek İçin Yöntemler

- **Yerine koyma yöntemi:** Bu yöntemde, bir denklemde bir değişken ifadesini diğer denklemin çözümüyle değiştirerek sistem çözülür.

- **Eleme Yöntemi (Elimination Method):** Bu yöntemde, denklemleri toplayarak veya çıkararak bir veya daha fazla bilinmeyeni ortadan kaldırarak sistemi çözmeye çalışırız.

- **Matris Yöntemi:** Matrislerle denklem sistemlerini çözmek için matris operasyonları kullanılır. Gauss eleme yöntemi veya matrisin tersini alarak denklem sisteminin çözümü bulunur. Bu yöntem özellikle büyük sistemler için daha etkilidir.

Örnek (Yerine Koyma Yöntemi):

$$2x + y = 8$$
$$x - 3y = -1$$

1. İlk denklemden y ifadesini çözelim:

$$y = 8 - 2x$$

2. İkinci denklemde y yerine bu ifadeyi koyalım:

$$x - 3(8 - 2x) = -1$$
$$x - 24 + 6x = -1$$
$$7x - 24 = -1$$
$$7x = 23$$
$$x = \frac{23}{7}$$

3. Bulduğumuz x'i birinci denkleme yerine koyalım:

$$2.\frac{23}{7} + y = 8$$
$$\frac{46}{7} + y = 8$$
$$\mathrm{y} = 8 - \frac{46}{7}$$
$$y = \frac{6}{7}$$

Örnek (Eleme Yöntemi):

$$3x + 2y = 14$$
$$2x - 4y = -2$$

1. İlk denklemi 2 ile, ikinci denklemi 3 ile çarpalım:

$$6x + 4y = 28$$
$$6x - 12y = -6$$

2. Bu denklemleri çıkaralım:

$$(6x + 4y) - (6x - 12y) = 28 \ - (-6)$$
$$16y = 34$$
$$y = \frac{17}{8}$$

3. Bulduğumuz y'yi İki denklemden birinde yerine koayalım:

$$3x + 2.\frac{17}{8} = 14$$
$$3x = 14 - \frac{17}{4}$$
$$x = 13$$

Örnek (Matris Yöntemi):

$$2x + 3y = 8$$
$$5x - 2y = 1$$

Matris Denklemi:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

1. Bu denklemi A matrisinin tersini alarak çözelim:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. A matrisinin tersini şöyle bulunur:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(2 \cdot -2) - (3 \cdot 5)} \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{4 - 15} \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

Örnek (Matris Yöntemi):

$$2x + 3y = 8$$
$$5x - 2y = 1$$

Matris Formu:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3. A matrsinin tersi yerine konarak, X sütun matrisi elde edilir:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} (-2 \cdot 8) + (-3 \cdot 1) \\ (-5 \cdot 8) + (2 \cdot 1) \end{bmatrix} = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} -16 - 3 \\ -40 + 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} -19 \\ -38 \end{bmatrix}$$

Giriş

- Matris Nedir ?
- Matrisi Oluşturan Bileşenler Nelerdir ?
- Index Nedir ?
- Matris Türleri
- Matrislerde Cebirsel İşlemler

Matris Nedir ?

- **Tanım:** Bir matris, satırlar ve sütunlar aracılığıyla düzenlenmiş sayısal veya sembolik veri tablosu olarak tanımlanabilir.

  Örneğin, A matrisi aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

- **Satır:** Matrisin yatay düzlemdeki bölümleridir. Bu bölümler, matrisin soldan sağa doğru uzanan kesimleridir.
- **Sütun:** Matrisin dikey düzlemdeki bölümleridir. Matrisin üstten alta doğru uzanan kesimlerini ifade eder.
- **Eleman:** Matrisin herhangi bir satır-sütun kesişiminde bulunan değerlerdir. Bu değerler, matrisin belirli bir konumundaki sayısal veya sembolik ifadelerdir.

- Matrisin boyutu veya büyüklüğü, satır ve sütunların sayıları ile ifade edilir.

Örneğin, aşağıdaki D matrisinin boyutu 2 x 3'tür. Burada 2 satır sayısını, 3 ise sütun sayısını temsil eder.

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Matris Notasyonu

- Genel olarak m x n boyutlu bir matris aşağıdaki gibi gösterilir:

$$\mathbf{A} = A_{m,n} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

- $a_{i,j}$, i.nci satır ve j.nci sütunun kesişimindeki elemanı ifade eder.

Matris Türleri

- **Kare Matris:** Satır sayısı ile sütun sayısının eşit olduğu matrislere denir.

  Örneğin, aşağıdaki A matrisi 2x2 boyutlu bir kare matristir.

$$A_{2,2} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

- **Birim Matris:** Köşegen üzerindeki tüm elemanların 1 geri kalan tüm elemanların 0 olduğu bir matristir. Genellikle, n x n boyutlu bir kare matris I_n sembolü ile gösterilir.

  Örneğin, aşağıdaki matris 3 x 3 boyutlu birim matristir.

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matris Türleri

- **Sıfır Matris:** Tüm elemanları sıfırdan oluşan matrise denir.

  Örneğin, aşağıdaki A matrisi 2 x 3 boyutlu bir sıfır matristir.

$$A_{2,3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- **Satır ve Sütun Matris:** Yalnızca bir satırdan oluşan matrislere 'satır matris'; yalnızca bir sütundan oluşan matrise ise 'sütun matrisi' denir.

  Örneğin, aşağıdaki matrisler sırasıyla 1 x 3 ve 3 x 1 boyutlu satır ve sütun matrisleridir.

$$A_{1,3} = [1, 2, 3] \qquad B_{3,1} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Temel Matris İşlemleri

- **Matris Toplaması:** Aynı boyutlu $A_{m,n}$, $B_{m,n}$ iki matrisin toplamı aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{1,1} + b_{1,1} & a_{1,2} + b_{1,2} & \cdots & a_{1,n} + b_{1,n} \\ a_{2,1} + b_{2,1} & a_{2,2} + b_{2,2} & \cdots & a_{2,n} + b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} + b_{m,1} & a_{m,2} + b_{m,2} & \cdots & a_{m,n} + b_{m,n} \end{bmatrix}$$

Örneğin,

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 7 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0 & 3+0 & 2+5 \\ 1+7 & 0+5 & 0+0 \\ 1+2 & 2+1 & 2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 8 & 5 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Temel Matris İşlemleri

- **Skalerle Çarpma:** Bir $A_{m,n}$ matrisinin bir k skaleriyle çarpma işlemi, matrisin her bir alamınını bu skalerle çarpma olarak tanımlanır:

$A_{m,n}$ matrisi şu şekilde temsil ediliyorsa:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

ve k bir skaler ise, k ile $A_{m,n}$ matrisinin çarpımı şu şekilde olur:

$$k \cdot A = \begin{bmatrix} k \cdot a_{1,1} & k \cdot a_{1,2} & \cdots & k \cdot a_{1,n} \\ k \cdot a_{2,1} & k \cdot a_{2,2} & \cdots & k \cdot a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k \cdot a_{m,1} & k \cdot a_{m,2} & \cdots & k \cdot a_{m,n} \end{bmatrix}$$

Temel Matris İşlemleri

- **Matris Çarpması:** $A_{m,n}$ ve $B_{n,p}$, $m \times n$ ve $n \times p$ boyutlu iki matrisi düşünelim.

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,p} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,1} & b_{n,2} & \cdots & b_{n,p} \end{bmatrix}$$

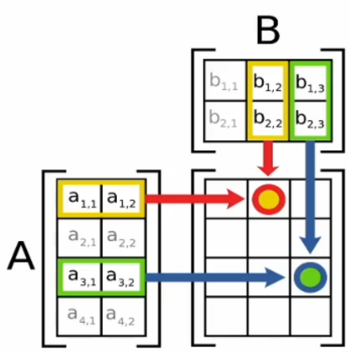
- Bu iki matrisin çarpımı $\mathrm{m} \times p$ boyutlu bir $C_{m,p} = A_{m,n} \times B_{n,p}$ matrisidir ve her $c_{i,j}$ elemanı şu şekilde bulunur:

$$c_{i,j} = a_{i,1} \times b_{1,j} + a_{i,2} \times b_{2,j} + \cdots + a_{i,n} \times b_{n,j}$$

$$C_{m,p} = \begin{bmatrix} a_{1,1} \cdot b_{1,1} + \cdots + a_{1,n} \cdot b_{n,1} & \cdots & a_{1,1} \cdot b_{1,p} + \cdots + a_{1,n} \cdot b_{n,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} \cdot b_{1,1} + \cdots + a_{m,n} \cdot b_{n,1} & \cdots & a_{m,1} \cdot b_{1,p} + \cdots + a_{m,n} \cdot b_{n,p} \end{bmatrix}$$

Temel Matris İşlemleri

- **Matris Çarpması:**



Örnek:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

- **UYARI: Matris çarpması değişmeli bir işlem <u>değildir</u> !**

$$A \times B \neq B \times A$$

Matris Transpozu

- **Tanım:** Bir matrisin satırlarını sütunlara ve sütunlarını da satırlara dönüştüren işleme **transpoz** denir.

$$(A^T)^T = A$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Örneğin,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad A^\top = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Matris Transpozu

- Transpozu kendine eşit olan matrislere **simetrik matris** denir. $(A = A^T)$
- Eğer $-A = A^T$ eşitliği sağlanıyorsa, A matrisine **skew-simetrik matris** denir.

Özellikler:

- $A = (A^T)^T$
- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(A . B)^T = B^T . A^T$
- $(c\, A)^T = \text{c}\, A^T$

Matris Tersi

- **Tanım:** Bir kare A matrisin tersi, A^{-1} matrisi ile temsil edilir ve aşağıdaki koşulu sağlar:

$$A \,.\, A^{-1} = A^{-1} \,.\, A = I$$

Örneğin,

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{bmatrix}$$

Ters Matris Hesaplama

Tersinir bir A matrisinin tersini hesaplamak için kullanılan yöntemlerden bazıları şunlardır:

- **Gauss Eleme Yöntemi:** Bu yöntemde, tersi alınacak matrise elementer satır işlemleri uygulanarak basit üçgen matris formatı elde edilir.
- **Cramer Kuralı:** Bu kuralda, matrisin tersi bulunurken matrisin determinantı ve adjoint matrisi kullanılır.
- **LU Ayrışımı:** Bir matrisi alt üçgensel (lower triangular) ve üst üçgensel (upper triangular) matrislere ayıran bir faktörizasyon yöntemidir. Bu yöntem, matrisin tersini bulmak için kullanılır.

Gauss Eleme Yöntemi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 8 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$ matrisinin tersini adım adım hesaplayalım:

1. Genişletilmiş Matris Oluşturma:

$$[A \mid I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Gauss Eleme Yöntemi

2. Gauss Eleme Adımları:

Adım 1:

$$-2R_1 + R_2 \to R_2$$
$$R_1 + R_3 \to R_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{5}{2} & -4 & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -4 & \frac{5}{2} & 1 \end{array}\right]$$

Adım 2:

$$\frac{5}{2}R_2 + R_1 \to R_1$$
$$\frac{5}{2}R_2 + R_3 \to R_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -24 & 15 & 5 \\ 0 & -2 & 0 & -10 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -4 & \frac{5}{2} & 1 \end{array}\right]$$

Adım 3:

$$5R_3 + R_1 \to R_1$$
$$2R_3 + R_2 \to R_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -24 & 15 & 5 \\ 0 & -2 & 0 & -10 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -4 & \frac{5}{2} & 1 \end{array}\right]$$

Gauss Eleme Yöntemi

2. Gauss Eleme Adımları:

Adım 4:

$$
\begin{array}{l} -\dfrac{1}{2}R_2 \to R_2 \\ -2R_3 \to R_3 \end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -24 & 15 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & -5 & -2 \end{array}\right] \\
\qquad \boldsymbol{I} \qquad\qquad\quad \boldsymbol{A^{-1}}
\end{array}
$$

Özetle, bir A matrisi tersi olan bir matris ise $\boldsymbol{A}$ matrisini birim matrise dönüştürmek için uygulanması gereken satır işlemleri aynı sırada birim matrise uygulandığında $\boldsymbol{A^{-1}}$ matrisi elde edilir.

UYARI:

- Her matrisin tersi **YOKTUR !**
- Matrisin boyutu arttıkça o matrisin tersini hesaplamak zorlaşır.

Birkaç nedenle bu işlem zorlu olabilir:

1. **Hesaplama Gücü:** Büyük boyutlu matrislerde tersini bulmak, çok sayıda hesaplama adımı gerektirir. Bu işlem, zaman ve hesaplama gücü gerektirebilir.
2. **Karmaşıklık:** Matris boyutları arttıkça, eldeki denklemler ve işlemler daha karmaşık hale gelir. Bu da insan hatalarının artmasına ve işlem süresinin uzamasına neden olabilir.
3. **Sayısal Kararlılık:** Büyük boyutlu matrislerde sayısal kararlılık önemlidir. Hesaplama sırasında küçük hata payları büyük sonuçlara yol açabilir.
4. **Bellek Kullanımı:** Büyük matrislerin terslerini hesaplarken büyük miktarda bellek kullanımı gerekebilir. Bu da işlemci ve bellek kaynaklarını talep eder.

Özet

- **Matris Transpozu**

Matrisin transpozu, matrisin satırlarını sütunlarına ve sütunlarını da satırlarına dönüştürmek için kullanılan bir işlemdir. Bir matrisin transpozu, orijinal matrisin tersine alınmış sütun ve satırlarından oluşur.

- **Ters Matris**

Bir kare matrisin tersi, çarpım sonucunda birim matris elde edilen bir matristir. Ters matris, orijinal matrisle çarpıldığında sonuç olarak birim matris elde edilir. Ters matrisin bulunabilmesi için matrisin belirli özellikleri ve koşulları sağlaması gerekir. Ters matris, matris denklemlerinin çözümünde, lineer cebir problemlerinde ve çeşitli matematiksel işlemlerde kullanılır.

Giriş

- Lineer Dönüşüm Nedir ?
- Lineer Dönüşümleri Matris ile Temsil Etme
- Özel Lineer Dönüşüm Örnekleri
- Dönüşüm Matrisi Nedir ?
- Dönüşüm Matrisi Bulma

Lineer Dönüşüm Nedir ?

Tanım: Aşağıdaki özellikleri sağlayan vektör uzayları arasındaki $\boldsymbol{T} : \boldsymbol{V} \rightarrow \boldsymbol{W}$ fonksiyonuna **lineer dönüşüm** denir.

- $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{T}(\boldsymbol{v})$
- $\boldsymbol{T}(c\,\boldsymbol{u}) = c\,\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u})$

Burada, $\boldsymbol{u}$ ve $\boldsymbol{v}$ vektörleri vektör uzayının elemanları ve c bir skalerdir.

Örneğin,

$$\boldsymbol{T} : \boldsymbol{R}^2 \rightarrow \boldsymbol{R}^2$$
$$(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2) \mapsto (2\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2, 3\boldsymbol{u}_2)$$

bir lineer (doğrusal) dönüşümdür.

Lineer Dönüşümlerin Matris Temsili

Teorem: Her lineer dönüşüm bir matris ile temsil edilir.

Örneğin,

$$T : R^2 \rightarrow R^2$$
$$(u_1, u_2) \mapsto (2u_1 - u_2, 3u_2)$$

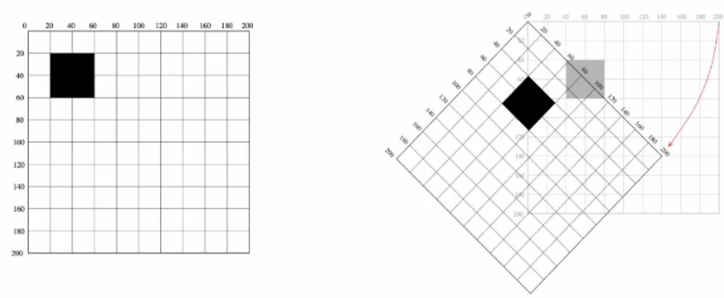
lineer dönüşümü $T = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

matrisi ile temsil edilir. Bu matrise dönüşüm matrisi denir.

Özel Lineer Dönüşüm Örnekleri

- **Örnek 1.** (2 boyutlu uzayda döndürme işlemi)

Grafiksel Temsil:

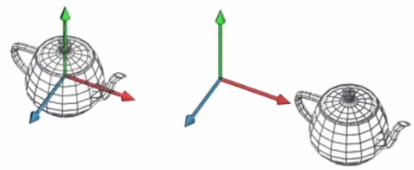


Matris Gösterimi: Aşağıdaki matris, $\theta = 45$ derece döndürme işlemini temsil eder.

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Özel Lineer Dönüşüm Örnekleri

- **Örnek 2.** (3 boyutlu uzayda öteleme işlemi)

Grafiksel Temsil: 

Matris Gösterimi: Aşağıdaki matris x, y, z eksenlerinde farklı mesafelerde öteleme işlemini temsil eder.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Dönüşüm Matrisi

Tanım: Dönüşüm matrisi, bir uzaydaki bir noktanın, veya vektörün koordinatlarını başka koordinatlara dönüştürmek için kullanılan matrislerdir.

- $n \times n$ boyutlu bir dönüşüm matrisi, n – boyutlu bir uzayda bir vektörün koordinatlarını dönüştürmek için kullanılır.
- Örneğin, $2D$ uzaydaki bir vektörün koordinatlarını dönüştürmek için 2×2 boyutundaki bir dönüşüm matrisi kullanılır:

$$T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Bu matris, koordinatları $v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ olan vektörü $v' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ vektörüne aşağıdaki şekilde dönüştürür:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Lineer Dönüşüm Matrisi Bulma

- Lineer dönüşüm matrisini bulmak için, bu dönüşümün orijinal uzaydaki baz vektörlerininin nasıl yeni uzaydaki baz vektörlerine dönüştüğünü bulmamız gerekir.
- Eğer T bir lineer dönüşüm ise ve $b_1, b_2, \cdots, b_n$ orijinal uzayın baz vektörleri ise $T(b_1), T(b_2), \cdots, T(b_n)$ bu vektörlerin yeni uzaydaki karşılıklarıdır.
- T lineer dönüşüm matrisinin sütunları yeni uzaydaki $T(b_1), T(b_2), \cdots, T(b_n)$ vektörlerinden oluşur.

Örnek: $\boldsymbol{T(u, v) = (2u - v, 3v)}$ lineer dönüşümünü ele alım.
Standart baz vektörleri genellikle $e_1 = (1, 0)$ ve $e_2 = (0, 1)$ olarak tanımlanır. Bu vektörlerin dönüşümü şu şekildedir:

$$T(e_1) = (2 \cdot 1 - 0, 3 \cdot 0) = (2, 0)$$
$$T(e_2) = (2 \cdot 0 - 1, 3 \cdot 1) = (-1, 3)$$

olduğundan dönüşüm matrisi $T = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ olarak bulunur.

Özet

- **Lineer Dönüşümler**

$$\boldsymbol{T : V \to W}$$

$$\bullet\ \boldsymbol{T(u + v) = T(u) + T(v)}$$

$$\bullet\ \boldsymbol{T(c\,u) = c\,T(u)}$$

- **Dönüşüm Matrisleri**

Her lineer dönüşüm $\boldsymbol{T : V \to W}$ bir dönüşüm matrisi $\boldsymbol{A}$ ile temsil edilir:

$$\boldsymbol{A} \quad . \quad \boldsymbol{v} \quad = \boldsymbol{T(v)}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

Giriş

- Özdeğer (Eigenvalue) Nedir ?
- Özvektör (Eigenvector) Nedir ?
- Hesaplama Yöntemleri
- Kullanım Alanları ve Önemi

Özdeğer (Eigenvalue) ve Özvektör (Eigenvector) Nedir ?

Tanım: A bir $n \times n$ boyutlu bir matris, λ bir gerçel ya da kompleks sayı ise, eğer bir n boyutlu bir v vektörü varsa öyle ki

$$A \,.\, v = \lambda \, v$$

eşitliği sağlanıyorsa, λ, A matrisinin **özdeğeri (eigenvalue)** olarak adlandırılır.

λ özdeğerine karşılık

$$A \,.\, \lambda = \lambda \, v$$

eşitliği sağlayan v vektörüne de **özvektör (eigenvector)** denir.

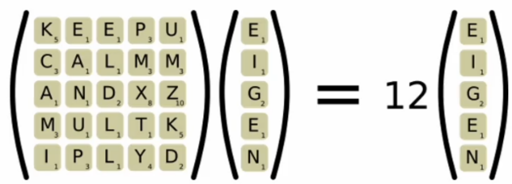
Özdeğer (Eigenvalue) ve Özvektör (Eigenvector) Nedir ?

- $T: V \rightarrow W$ bir lineer dönüşüm olsun. A ise bu lineer dönüşümü temsil eden dönüşüm matrisi olsun.

- Eğer λ bu matrisin özdeğeri ise,

$$A \,.\, v = \lambda\, v \Leftrightarrow T(v) = \lambda\, v$$

- O zaman, öz vektörler lineer dönüşüm sonrasında *aynı yönü gösteren* vektörlerdir diyebiliriz.



Özdeğer (Eigenvalue) ve Özvektör (Eigenvector) Nedir ?

- Örneğin, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ matrisini hangi vektörle çarparsak aynı yönde bir vektör elde ederiz?

- A matrisi bir permütasyon matrisidir öyle ki 2-boyutlu bir vektörün koordinatlarını yer değiştirir:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- **Soru:** Peki hangi vektörün öğeleri yer değiştirirse yine kendisi olur?
- **Cevap:**

$$\mathrm{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda = 1, \quad Ax = x$$

Özdeğer (Eigenvalue) ve Özvektör (Eigenvector) Bulma

- **Teorem:** $n \times n$ boyutlu bir matrisin n tane özdeğeri vardır.

Uyarı: Bu değerleri bulmak her zaman kolay değildir.

Özdeğerini bulmak istediğimiz matrisin boyutu arttıkça, özdeğerlerini bulmak için çözmemiz gereken denklemin de derecesi artmaktadır.

Bu yüzden, de özdeğer bulmak matrisin boyutu arttıkça zorlaşmaktadır.

Özdeğer (Eigenvalue) ve Özvektör (Eigenvector) Hesabı

- **Adım 1:**

$$A\,x = \lambda\,x$$

- **Adım 2:**

$$(A - \lambda I)x = 0$$

- **Adım 3:**

$$det(A - \lambda I) = 0$$

Bu denklem, A matrisinin **özdeğer denklemi** ya da **karakteristik denklemi** olarak adlandırılır. Bu yüzden de A matrisinin özdeğerleri çoğunlukla A matrisinin karakteristik denkleminin kökleri olarak da tanımlanır.

- **Örnek:**

$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ simetrik matrisinin özdeğerlerini hesaplayalım.

A matrisinin karakteristik denklemi aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{bmatrix} = (3-\lambda)^2 - 1 = 0$$

$$\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$$

$$\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 2.$$

Böylece A matrisinin özdeğerleri $\lambda_1 = 4$, $\lambda_1 = 2$ olarak bulunur.

- **Örnek:**

$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ simetrik matrisinin $\lambda_1 = 4$, $\lambda_1 = 2$ özdeğerlerine karşılık gelen özvektörlerini hesaplayalım.

$\lambda_1 = 4$:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 3-4 & 1 \\ 1 & 3-4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- **Örnek:**

$\underline{\lambda_1 = 2:}$

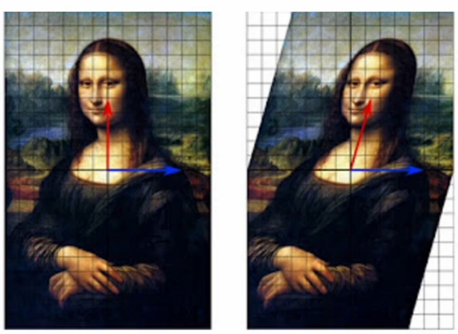
$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3-2 & 1 \\ 1 & 3-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

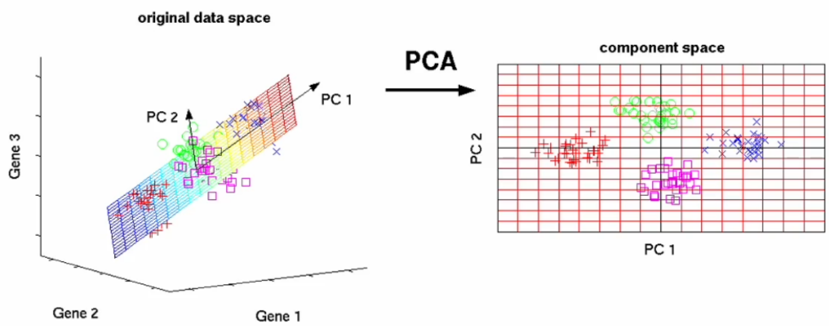
Özdeğerler ve özvektörler, veri bilimi alanında önemli uygulamalara sahiptir:

- **Görüntü İşleme:** Görüntü işleme alanında, görüntü özelliklerini çıkarmak, boyutsal azaltma ve desen tanıma gibi birçok algoritmanın temelini oluşturur. Özellikle PCA (Principal Component Analysis) gibi tekniklerde kullanılır.



Bu kayma haritalamasında kırmızı ok yön değiştirirken mavi ok değişmez; mavi ok, bu kayma eşlemesinin bir özvektörüdür, çünkü yön değiştirmez ve uzunluğu değişmediğinden özdeğeri 1'dir

- **Veri Madenciliği ve Makine Öğrenimi:** Özdeğerler ve özvektörler, veri kümesindeki temel bileşenleri (PCA gibi) belirlemek, boyutsal azaltma yapmak, veri sıkıştırma ve özellik çıkarma gibi birçok makine öğrenimi ve veri analizi tekniğinde kullanılır.



Özet

- **Özdeğer (Eigenvalue) Nedir?**

Bir matrisin özdeğerleri, o matrisin belirli bir vektör tarafından ölçeklendirildiği skalardır. Özdeğerler, bir matrisin özdeğer denkleminin kökleri olarak bulunur ve matrisin dönüşme özelliklerini ifade eder.

- **Özvektör (Eigenvector) Nedir?**

Özdeğerlere karşılık gelen vektörlerdir. Bir matrisin özvektörleri, o matris tarafından değiştirilmeden yalnızca bir ölçek faktörüyle çarpılabilecek vektörlerdir.

- **Kullanım Alanları ve Önemi**

Özdeğerler ve özvektörler, matrislerin temel özelliklerini ve sistemlerin davranışını anlamak için kullanılır. Örneğin, sistemlerin kararlılığı ve veri boyut indirgeme gibi alanlarda kullanımları yaygındır.

Giriş

- Boyut Azaltma Nedir ?
- Principal Componenet Analysis (PCA) Temelleri
- PCA Uygulaması

Boyut Azaltma Nedir ?

Tanım: Boyut azaltma, veri setindeki değişken sayısını azaltarak bilgi kaybını minimize etmeyi amaçlayan bir tekniktir.

- Bu teknik, veri setinin karmaşıklığını azaltabilir ve analiz edilebilir hale getirebilir.

Neden Boyut Azaltma Yapılır ?

- Yüksek boyutlu veri setlerindeki gereksiz bilgiyi elemek
- Hesaplama ve depolama maliyetlerini azaltmak
- Model karmaşıklığını ve aşırı uyumu önlemek
- Veri görselleştirmeyi kolaylaştırmak

Principal Componenet Analysis (PCA) Temelleri

Veri Matrisinin Merkezileştirilmesi:

- Veri matrisi X genellikle özelliklerin (değişkenlerin) sütunları ve örneklerin (gözlemlerin) satırları olarak temsil edilir. Veri matrisinin merkezileştirilmesi için, her özellikten ortalama değer çıkarılır ve standart sapmaya oranlanır:

$$\text{Standartlaştırma:} \quad z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Burada μ özelliklerin ortalamasını, σ standart sapmasını ifade eder:

$$\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad \sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2}$$

Principal Componenet Analysis (PCA) Temelleri

Kovaryans Matrisinin Hesaplanması:

- Veri matrisinin merkezileştirilmiş hali üzerinden kovaryans matrisi hesaplanır. Kovaryans matrisi şu şekilde ifade edilir:

$$\mathrm{Kov}(X, Y) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

Burada n örnek sayısını ifade eder.

Principal Componenet Analysis (PCA) Temelleri

Özdeğerlerin ve Özvektörlerin Bulunması:

- Kovaryans matrisinin ya da korelasyon matrisinin özdeğerleri $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ ve özvektörleri $(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ bulunur. Bu özvektörler, veri setinin değişkenliğini temsil eder. Büyük özdeğere sahip özvektör, veri setindeki önemli değişkenlik yapısını yakalayan yeni bileşen olarak seçilir.

Özdeğerlerin Sıralanması ve Özvektörlerin Seçimi:

- Özdeğerleri büyükten küçüğe sıralayacağız ve ilgilenilen boyut sayısına göre ilk k büyük özdeğer ve özvektörünü seçeceğiz.

Yeni Veri Setinin Oluşturulması:

- Seçilen özvektörler kullanılarak yeni veri seti oluşturulur. Yeni veri seti, boyut indirgenmiş halini temsil eder.

PCA Uygulaması

Ev fiyatlarının listelendiği aşağıdaki küçük veriseti için PCA kullanarak boyut azaltma işlemi yapalım:

Oda_Sayisi	Bina_Yasi	Metrekare	Apartman_Yasi	Sehir_Merkezi_Mesafe	Ev_Fiyatı
3	5	150	10	5	300000
4	10	200	5	3	400000
2	3	120	8	8	250000
5	8	250	15	12	450000
3	6	170	12	6	320000

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 150 & 10 & 5 & 300000 \\ 4 & 10 & 200 & 5 & 3 & 400000 \\ 2 & 3 & 120 & 8 & 8 & 250000 \\ 5 & 8 & 250 & 15 & 12 & 450000 \\ 3 & 6 & 170 & 12 & 6 & 320000 \end{bmatrix}$$

PCA Uygulaması

Veri Setinin Standartlaştırılması:

- Her bir sütunun ortalamasını bulma.
- Her bir sütundaki değerlerden sütun ortalamasını çıkarma.
- Her bir sütundaki değerleri o sütunun standart sapmasıyla bölme.

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 150 & 10 & 5 & 300000 \\ 4 & 10 & 200 & 5 & 3 & 400000 \\ 2 & 3 & 120 & 8 & 8 & 250000 \\ 5 & 8 & 250 & 15 & 12 & 450000 \\ 3 & 6 & 170 & 12 & 6 & 320000 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -0.22 & -0.38 & -0.22 & -0.26 & -0.47 & -0.34 \\ 0.44 & 0.87 & 0.59 & -0.65 & -0.85 & 0.64 \\ -1.11 & -1.28 & -1.41 & -0.13 & 0.87 & -1.21 \\ 1.33 & 0.43 & 1.48 & 1.42 & 1.30 & 1.57 \\ -0.44 & 0.36 & -0.44 & 0.62 & -0.85 & 0.34 \end{bmatrix}$$

PCA Uygulaması

Kovaryans Matrisinin Hesaplanması:

- Kovaryans matrisini hesaplamak için, öncelikle veri matrisinin transpozunu almalı ve sonra bu transpoz matrisi ile kendisinin çarpımının ortalamasını almalıyız

$$\text{Veri Matrisi: } \begin{bmatrix} -0.22 & -0.38 & -0.22 & -0.26 & -0.47 & -0.34 \\ 0.44 & 0.87 & 0.59 & -0.65 & -0.85 & 0.64 \\ -1.11 & -1.28 & -1.41 & -0.13 & 0.87 & -1.21 \\ 1.33 & 0.43 & 1.48 & 1.42 & 1.30 & 1.57 \\ -0.44 & 0.36 & -0.44 & 0.62 & -0.85 & 0.34 \end{bmatrix} \qquad \text{Transpoz Matrisi: } \begin{bmatrix} -0.22 & 0.44 & -1.11 & 1.33 & -0.44 \\ -0.38 & 0.87 & -1.28 & 0.43 & 0.36 \\ -0.22 & 0.59 & -1.41 & 1.48 & -0.44 \\ -0.26 & -0.65 & -0.13 & 1.42 & 0.62 \\ -0.47 & -0.85 & 0.87 & 1.30 & -0.85 \\ -0.34 & 0.64 & -1.21 & 1.57 & 0.34 \end{bmatrix}$$

$$\text{Kovaryans Matrisi: } \begin{bmatrix} 1.20 & 0.60 & 1.08 & 0.33 & 0.12 \\ 0.60 & 1.20 & 0.68 & -0.02 & -0.07 \\ 1.08 & 0.68 & 1.20 & 0.35 & 0.13 \\ 0.33 & -0.02 & 0.35 & 1.20 & 0.68 \\ 0.12 & -0.07 & 0.13 & 0.68 & 1.20 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -0.22 & -0.38 & -0.22 & -0.26 & -0.47 & -0.34 \\ 0.44 & 0.87 & 0.59 & -0.65 & -0.85 & 0.64 \\ -1.11 & -1.28 & -1.41 & -0.13 & 0.87 & -1.21 \\ 1.33 & 0.43 & 1.48 & 1.42 & 1.30 & 1.57 \\ -0.44 & 0.36 & -0.44 & 0.62 & -0.85 & 0.34 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.22 & 0.44 & -1.11 & 1.33 & -0.44 \\ -0.38 & 0.87 & -1.28 & 0.43 & 0.36 \\ -0.22 & 0.59 & -1.41 & 1.48 & -0.44 \\ -0.26 & -0.65 & -0.13 & 1.42 & 0.62 \\ -0.47 & -0.85 & 0.87 & 1.30 & -0.85 \\ -0.34 & 0.64 & -1.21 & 1.57 & 0.34 \end{bmatrix}$$

PCA Uygulaması

Kovaryans Matrisinin Özdeğerlerini ve Özvektörlerini Bulunması:

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1.20-\lambda & 0.60 & 1.08 & 0.33 & 0.12 \\ 0.60 & 1.20-\lambda & 0.68 & -0.02 & -0.07 \\ 1.08 & 0.68 & 1.20-\lambda & 0.35 & 0.13 \\ 0.33 & -0.02 & 0.35 & 1.20-\lambda & 0.68 \\ 0.12 & -0.07 & 0.13 & 0.68 & 1.20-\lambda \end{bmatrix}\right) = 0$$

- Bu denklemleri çözmek oldukça karmaşık bir işlemdir ve tam olarak elle çözülmesi zor olabilir.
- Genellikle bu tür hesaplamalar için lineer cebir kütüphaneleri veya hesaplayıcılar kullanılır çünkü hesaplar karmaşıklaşabilir.

HELP !!!

PCA Uygulaması

Özdeğerlerin Sıralanması ve Özvektörlerin Seçimi

- Farzelim ki, kovaryans matrisinin özdeğerleri $(\lambda_1,\ \lambda_2, \cdots, \lambda_5)$ ve özvektörleri $(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ olarak bulunsun.

Özdeğerlerin Sıralanması ve Özvektörlerin Seçimi:

- Özdeğerleri büyükten küçüğe sıralarak, ilgilenilen boyut sayısına göre ilk k büyük özdeğer ve özvektörünü seçeriz:

$$\begin{array}{ccccccccc} \lambda_3 & < & \lambda_2 & < & \lambda_1 & < & \lambda_5 & < & \lambda_4 \\ v_3 & & v_2 & & v_1 & & v_5 & & v_4 \end{array}$$

Yeni Veri Setinin Oluşturulması:

- Seçilen özvektörler ile oluşturalan matris aracılığıyla orijinal veri seti istenilen boyutta veri setine indirgenir.

Özet

- **Boyut Azaltma:**

Amaç: Veri setindeki karmaşık yapının anlaşılabilirliğini artırmak ve işleme gücünü azaltmak için kullanılır.
Yöntemler: Boyut azaltma teknikleri, özellik seçimi veya özellik çıkarma gibi yöntemlerle veri setindeki değişken sayısını azaltır. Örnek olarak, PCA gibi teknikler kullanılarak değişkenler arasındaki ilişkiler özetlenerek yeni özellikler oluşturulabilir.

- **PCA (Principal Component Analysis - Temel Bileşen Analizi):**

Amaç: Değişkenler arasındaki ilişkileri inceleyerek veri setini daha az değişkenle ifade eden, ana özellikleri (temel bileşenleri) belirleyen istatistiksel bir tekniktir.
Çalışma Prensibi: Varyansı maksimize eden yeni değişkenler (temel bileşenler) oluşturarak veri setindeki bilgi kaybını minimize etmeye çalışır. Bu şekilde, veri setinin boyutunu azaltırken orijinal verinin önemli özelliklerini korur.

Giriş

- Lineer Regresyon Nedir?
- Lineer Regresyonun Matematiksel Temelleri
- Lineer Regresyonun Çeşitleri
- Regresyon Katsayılarının Hesaplanması
- Hata Değerlendirme Metrikleri
- Lineer Regresyon Uygulaması

Lineer Regresyon Nedir ?

Tanım: Lineer regresyon, istatistiksel bir modelleme yöntemidir.

- Temel amaç, bağımlı bir değişken ile bir veya daha fazla değişken arasındaki ilişkiyi modellemektir.
- Özellikle, bu modelleme tekniği gelecekti olayları tahmin etmek veya değişkenler arasındaki ilişkiyi anlamak için yaygın kullanılır.
- Örneğin, pazarlama harcamaları ile satışlar arasındaki ilişkiyi anlamak veya gelir ile harcama arasındaki ilişkiyi değerlendirmek için kullanılır.

Lineer Regresyonun Matematiksel Temelleri

Temel Kavramlar:

- **Bağımlı Değişken:** İncelenen olayda diğer değişkenlerden etkilenen ve tahmin edilmeye çalışan değişkendir. Genellikle, $\boldsymbol{Y}$ harfi ile gösterilir.
- **Bağımsız Değişken(ler):** Bağımlı değişkeni açıklamak için kullanılan değişkenlerdir ve $\boldsymbol{X_i}$ ile gösterilir.
- **Regresyon Analizi:** Bağımlı ve bağımsız değişkenler arasındaki ilişkiyi açıklayan matematiksel bir model oluşturma sürecidir.

Lineer Regresyonun Matematiksel Temelleri

- **En Küçük Kareler Yöntemi (Least Square Method):** Gerçek ve tahmin edilen değerler arasındaki hata karelerinin toplamını minimize etmek için kullanılan bir optimizasyon yöntemidir. Bu yöntem, regresyon katsayılarını (eğim ve y-kesidi gibi) hesaplamak için kullanılır.
- **Hata Terimi:** Gerçek ve tehmin edilen değerler arasındaki farkı ifade eder ve genellikle $\boldsymbol{\varepsilon}$ ile gösterilir. açıklamak için kullanılan değişkenlerdir ve $\boldsymbol{X_i}$ ile gösterilir. Modelin uygunluğunu ölçmek için kullanılır.

Lineer Regresyon Çeşitleri

Tek Değişkenli (Simple) Lineer Regresyon:

- Tek değişkenli lineer regresyon, yalnızca bir bağımsız değişkenin bağımlı değişken üzerine etkisini analiz eder.
- Bu durumda, regresyon denklemi $\boldsymbol{y = mx + b}$ formülü ile ifade edilir. Burada, $\boldsymbol{y}$ bağımlı değişken, $\boldsymbol{x}$ bağımsız değişken, $\boldsymbol{m}$ eğim, $\boldsymbol{b}$ ise doğrunun y-kesidi olarak tanımlanır.
- Eğim ve y-kesidi, bağımsız değişkenin bağımlı değişken üzerindeki etkisini ve doğrunun nereden geçtiğini belirler.

Lineer Regresyon Çeşitleri

Çok Değişkenli (Multiple) Lineer Regresyon:

- Çok değişkenli lineer regresyon, birden fazla bağımsız değişkenin bağımlı değişken üzerine etkisini analiz eder.
- Regresyon denklemi matris formunda $\mathbf{Y} = \boldsymbol{X}\beta + \varepsilon$ olarak ifade edilir. Burada, $\boldsymbol{X}$ bağımsız değişken matrisi, β regresyon katsayıları vektörü, ε ise hata terimini simgeler.
- *Çoklu bağıntı*, birden fazla bağımsız değişken arasındaki ilişkiyi inceleyerek modelin karmaşıklığını değerlendirir.
- *Çoklu katsayılar*, ise her bir bağımsız değişkenin bağımsız değişken üzerindeki ektisini gösteririr.

Lineer Regresyon Katsayılarının Hesaplanması

En Küçük Kareler Yöntemi:

- Bu yöntem, regresyon katsayılarını bulmak için kullanılan en temel ve en yaygın yöntemdir.
- Hata terimlerinin karelerini minimize ederek, en iyi uyumu sağlayan katsayıları bulmaya çalışır.
- Çok Değişkenli lineer regresyon için katsayılar şu formülle hesaplanır:

$$\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{X}^{T}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^{T}\boldsymbol{y}$$

Burada:

$\boldsymbol{\beta}$: Katsayılar vektörü

$\boldsymbol{X}$**:** Bağımsız değişkenlerin oluşturduğu matris (veri matrisi)

$\boldsymbol{y}$: Bağımlı değişken vektörü

Lineer Regresyon Katsayılarının Hesaplanması

Gradient Descent Yöntemi:

- Gradient descent, bir fonksiyonun minimum veya maksimum değerini bulmak için kullanılan iteratif bir optimizasyon algoritmasıdır.
- Regresyon modellerinde kullanıldığında, bu yöntem regresyon katsayılarını optimize etmek için kullanılabilir.
- Temel prensip, bir fonksiyonun eğiminin (gradyanın) negatif yönünde adımlar atarak fonksiyonun minimum değerini bulmaktır.

Lineer Regresyon Katsayılarının Hesaplanması

Gradient Descent Yöntemi:

Regresyon katsayılarını güncellemek için gradient descent şu şekilde çalışır:

- Başlangıçta rastgele seçilmiş katsayılarla başlanır.
- Her adımda, gradyan vektörü hesaplanır ve bu vektörün negatif yönünde bir adım atılır.
- Bu adımlar, fonksiyon minimuma yaklaşana kadar devam eder.

Lineer Regresyon Model Değerlendirme Metrikleri

- **Ortalama Hata Kare (MSE):** Gerçek ve tahmin edilen değerler arasındaki farkların karesinin ortalamasıdır.

$$\frac{1}{n}\sum (y_i - \hat{y}_i)^2$$

- **R-Kare (R^2):** Bağımlı değişkenin varyansının ne kadar açıklandığını gösteren bir ölçüttür.

$$1 - \frac{\sum_i (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_i (y_i - \overline{y})^2}$$

- **Ortalama Mutlak Hata (MAE):** Gerçek ve tahmin edilen değerler arasındaki mutlak farkların ortalamasıdır.

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} | y_i - \hat{y}_i |$$

Lineer Regresyon Uygulaması

- **Örnek Veri Seti:**

Ev Büyüklüğü (X1)	Oda Sayısı (X2)	Ev Fiyatı (Y)
120	3	220,000
150	4	300,000
100	2	180,000
130	3	250,000

- **Veri Matrisi Oluşturma:**

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 120 & 3 \\ 1 & 150 & 4 \\ 1 & 100 & 2 \\ 1 & 130 & 3 \end{bmatrix} \qquad y = \begin{bmatrix} 220,000 \\ 300,000 \\ 180,000 \\ 250,000 \end{bmatrix}$$

Lineer Regresyon Uygulaması

- **Katsayıların Hesaplanması**

$$\beta = (X^T X)^{-1} X^T y$$

İlk olarak X^T ve $X^T X$ matrislerini hesaplayalım:

$$X^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 120 & 150 & 100 & 130 \\ 3 & 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$X^T X = \begin{bmatrix} 4 & 500 & 8 \\ 500 & 71500 & 1170 \\ 8 & 1170 & 22 \end{bmatrix}$$

Lineer Regresyon Uygulaması

- **Katsayıların Hesaplanması**

  Şimdi bu matrislerin inversini alalım:

$$(X^T X)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.765 & -0.005 & -5.553 \\ -0.005 & 0.0001 & 0.073 \\ -5.553 & 0.073 & 74.184 \end{bmatrix}$$

  Son olarak, β vektörünü hesaplayalım:

$$\beta = (X^T X)^{-1} X^T y =$$

$$\begin{bmatrix} 0.765 & -0.005 & -5.553 \\ -0.005 & 0.0001 & 0.073 \\ -5.553 & 0.073 & 74.184 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 120 & 150 & 100 & 130 \\ 3 & 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 220,000 \\ 300,000 \\ 180,000 \\ 250,000 \end{bmatrix}$$

HELP !!!

Özet

- **Lineer Regresyon Nedir?**

İki veya daha fazla değişken arasındaki ilişkiyi modellemek için kullanılan istatistiksel bir tekniktir. Bağımlı değişken ile bir veya daha fazla bağımsız değişken arasındaki ilişkiyi açıklamak için kullanılan bir modelleme yöntemidir.

- **Lineer Regresyon Çeşitleri**

İki çeşit lineer regresyon vardır:

1. Tek Değişkenli (Simple) Lineer Regresyon
2. Çok Değişkenli (Multiple) Lineer Regresyon

- **Lineer Regresyon Katsayılarının Hesaplanması**

En küçük kareler yöntemi veya gradyan inişi gibi teknikler kullanılarak, regresyon katsayıları hesaplanır.

- **Lineer Regresyon Hata Değerlendirme Metrikleri**

Modelin performansını değerlendirmek için kullanılan metriklerdir:

- MSE, R-Kare, MAE.